

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-12

## МОДЕЛЮВАННЯ ПРУЖНОПЛАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ТІЛАХ ПРИ ВІДПАЛІ ТА НАСТУПНИХ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ ВПЛИВАХ

**В. С. Михайлишин**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України  
vira.mykhailyshyn@gmail.com*

**Ключові слова:**

відпал, температура, напруження, деформації, пластичне деформування, термочутливість, зміцнення, метод скінченних елементів.

Запропоновано підхід до вивчення термомеханічних процесів в тілах протягом охолодження в процесі високотемпературного відпалу та наступних термомеханічних впливах. Цей підхід полягає у поетапному формулюванні та розв'язуванні з допомогою методу скінченних елементів задач про термомеханічний стан тіла на кожному етапі. Цими етапами є: 1) оцінка релаксованих в кінці відпалу напружень; 2) оцінка напружень у навантажених після відпалу тілах. Як приклад досліджено напружений стан у тонкому круглому диску з концентричним коаксіальним отвором при охолодженні в процесі відпалу та сумісному впливі після відпалу тиску і стаціонарного температурного поля.

---

## MODELING OF AN ELASTOPLASTIC PROCESSES IN SOLIDS DUE TO ANNEALING AND FOLLOWING THERMOMECHANICAL

**V. S. Mykhailyshyn**

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,  
National Academy of Sciences of Ukraine,  
vira.mykhailyshyn@gmail.com*

**Key words:**

annealing, temperature, stresses, strains, plastic deforming, thermosensitivity, hardening, finite element method.

This work is oriented on the sequential solving of two problems: 1) the estimation of the relaxed stresses in metallic products on cooling stage in its high-temperature annealing process; 2) the estimation of the stresses in these products with obtained distribution of stresses relaxed consequently to annealing, where the products are subjected to thermomechanical influences modeling the working conditions after annealing. Common character and particularity of both problems is presence of residual (initial) stresses. It is validated an importance of investigation concerning initial stress redistribution in cooling condition during annealing and condition modeling working conditions of annealed products. It is proposed the approach to study of thermomechanical processes in products during cooling in high-temperature annealing and following after annealing thermomechanical influences realized during exploitation of products and constructional elements with known initial previously acquired stresses. This approach consists in stage-by-stage formulating and solving using the finite element method (FEM) of problems about thermal and mechanical states with various initial and boundary conditions for every stage. These stages are: 1) the estimation of the stresses relaxed at the end of annealing; 2) the stress estimation in solids loaded after annealing. Within nonstationary heat conductivity theory and plastic nonisothermal yielding theory the thermomechanics problem has been formulated. It is assumed a quasi-static deformation processes. The isotropic materials are considered. The solids are cooled by heat exchange with environment. The criterion of plastic deformation is von Mises condition modified on the isotropic-kinematic hardening case. It is assumed a thermal sensitivity of material properties in the considered temperature spans and hardening possibility in plastic deformation. The developed software is adapted to solving of defined kind of two-dimensional problems for solids with initial stresses. A process of solution obtaining on the ground of developed FEM program system has been schematic illustrated.

As example the stress state is investigated in the thin circular disc of steel with concentric coaxial hole and heat-insulated front-face surfaces. The regularities concerning character and level of stresses in solids under simulated working conditions are established depending on model approaches of hardening material properties. The calculating aspects of problems solving are discussed including discretization of geometrical domain and step-by-step discretization. For comparison the results are realized concerning of common influence of pressure and thermal field on stress state in disc without initial stresses for elastic-plastic isotropic-kinematic hardenable material and assuming elastic behavior of material. According to the results of computer simulation experiment the stress distribution in disc with residual stresses, typical in weldments, is obtained in cooling conditions during annealing also in conditions of common influence of static mechanical loading and nonstationary thermal field after annealing. In this connection the estimation of stresses initial before cooling is validated. This estimation is based on known before annealing stress distribution and known experimental observations and theoretical facts. The results are obtained assuming an ideal plastic deformable material and for three hardening models. The isotropic, kinematic and isotropic-kinematic hardening cases have been considered. The results are presented according to step-by-step change of applied pressure and temperature. The regularities concerning character and level of stresses in solids under simulated working conditions are established depending on model approaches of hardening material properties. These regularities consist in appreciable influence of welding stresses, relaxed after annealing, on mechanical behavior in neighborhood of welded seam. The lesser significant distinctions in kind and appreciable quantitative distinctions in stress distribution depending on model approaches of material hardening properties have been observed (ideal material, kinematic hardening, isotropic-kinematic and isotropic hardening).

## 1. Вступ

Дана робота орієнтована на послідовне вирішення двох проблем:

- 1) оцінки релаксованих напружень у металевих тілах на стадії охолодження в процесі їх високотемпературного відпалу;
- 2) оцінки напружень в цих тілах з отриманим розподілом релаксованих в результаті відпалу напружень при термосилових впливах, моделюючих умови експлуатації цих виробів після відпалу.

Спільною ознакою і особливістю обох проблем є наявність залишкових (початкових) напружень. Через труднощі математичного характеру теоретичні дослідження можливі із застосуванням наближених методів і насамперед методу скінченних елементів (МСЕ). Однак відомі програмні комплекси МСЕ не працюють з об'єктами, що характеризуються початковим розподілом напружень. В даній роботі розроблене раніше [1, 2] програмне забезпечення, що базується на МСЕ, адаптоване і застосоване до розв'язування окресленого вище класу задач. Ця програмна система була доопрацьована і

вдосконалена для дослідження термомеханічних процесів в тілах з початковими напруженнями [3].

Термообробка відпалом є поширеним технологічним способом зняття чи пониження небажаних попередньо набутих залишкових напружень [4 – 6]. Такі залишкові напруження виникають, зокрема, в результаті зварювання елементів конструкцій, гартування [7] і ін.. Існує ряд робіт, пов'язаних із дослідженням процесу відпалу, в яких висвітлюються металознавчі, технологічні, експериментальні і теоретичні аспекти цієї проблеми [4 – 8]. При високих температурах відпалу в матеріалі мають місце процеси повзучості і явища на молекулярному та мікроструктурному рівнях, вплив яких на механічні процеси важко спрогнозувати в рамках існуючих теоретичних уявлень. Теоретичні дослідження термомеханічних станів при відпалі пов'язані із низкою труднощів, оскільки виникає проблема визначення нестационарного температурного поля, процеси описуються нелінійними фізичними співвідношеннями, теплофізичні характеристики

матеріалу мають в розглядуваних температурних діапазонах складну залежність, зазвичай не описувану точними функціональними співвідношеннями. Незважаючи на ряд труднощів, ці роботи є важливими і актуальними, однак через недостатність теоретичних прогнозів базуються на дорогих, трудомістких і часто руйнівних експериментальних методах та на досвіді промислових підприємств. Зокрема, для зварних конструкцій ціна термічної обробки складає 25% – 28% від загальної вартості зварювальних робіт. Експериментальні методи не дозволяють в достатній мірі встановити загальні закономірності в поведінці напруженого стану.

Наступна проблема, пов'язана з відпадом, а саме щодо оцінки напружень у виробках, які пройшли відпал, характеризуються розподілом напружень, понижених у результаті відпалу, і експлуатуються при певних технологічних умовах, пов'язаних із дією сил чи температури, висвітлена в меншій мірі. Аналіз доступних літературних джерел вказує, що дослідження експлуатаційних можливостей відпалених виробів зводяться до вивчення мікроструктури та механічних властивостей [9, 10], до покращення конструктивних властивостей [11]. Тому питання можливості роботи конструкції із залишковими напруженнями в певних технологічних умовах також часто базується на досвіді чи експерименті. При теоретичному обґрунтуванні здатності конструкції працювати в даних технологічних умовах виникають подібні труднощі, як і при прогнозуванні напружень при відпалі.

Із цією проблемою тісно пов'язана також проблема про необхідність призначення відпалу або недоцільності цього виду термообробки, оскільки часто залишкові напруження виступають як необхідний, але не достатній фактор процесу руйнування [4]. Це означає, що доцільно порівняти результати щодо розподілу напружень у виробі із залишковими напруженнями, працюючому при певному силовому або температурному навантаженні після відпалу і без попереднього перед експлуатацією застосування відпалу.

Тому актуальність робіт з вивчення механічної поведінки тіл із залишковими напруженнями, які зазнають впливу експлуатаційних умов, пов'язана:

- 1) із практичною відсутністю таких робіт;
- 2) із недостатньо напрацьованими теоретичними та методичними підходами до вирішення цієї проблеми;
- 3) із важливістю теоретичного обґрунтування доцільності чи недоцільності призначення термообробки, метою якої є пониження залишкових напружень.

## 2. Мета роботи

Метою даної роботи є розробка теоретичного підходу до оцінки термомеханічних станів для виробів, зразків, конструктивних елементів із залишковими напруженнями як в умовах охолодження при високотемпературному відпалі, так і в умовах температурних та (або) статичних силових впливів, моделюючих експлуатаційні умови після відпалу. Цей підхід базується на формулюванні задачі нестационарної теплопровідності, задачі теорії пластичного течіння, вдосконалених на випадок існування початкових напружень розрахункових схемах МСЕ та відповідному програмному забезпеченні. При цьому достатньо фізично обґрунтоване прогнозування напружень пов'язане із визначенням нестационарного температурного поля, врахуванням можливості пластичного деформування, неоднорідності матеріалів, з врахуванням складної температурної залежності теплофізичних характеристик матеріалу, зміцнення матеріалу.

## 3. Формулювання задачі

У технологічному процесі відпалу виробів послідовно реалізуються три стадії: нагрів до високої температури, витримка при цій температурі протягом декількох годин та охолодження [4, 5, 7]. В даній роботі теоретична оцінка напружень в процесі охолодження після витримки базується на початковому розподілі температури, що є температурою витримки, та на достатньо обґрунтованому даліше початковому розподілі напружень, що є результатом перерозподілу напружень від початку відпалу протягом нагріву та витримки. Залишкові після відпалу

напруження є початковими для вивчення деформаційних процесів у виробі, який зазнає після відпалу впливу термічних і (або) механічних факторів.

Відомі теоретичні описи механічних процесів, спричинених температурними чи механічними впливами в пластично деформованих тілах, базуються на різних варіантах теорії пластичності залежно від того, які важливі фізичні ефекти бажано врахувати у формулюванні задачі та які теоретичні (аналітичні чи числові) підходи є вже напрацьовані для розв'язування розглядуваного класу задач. При моделюванні процесу відпалу на стадії охолодження та наступної експлуатації виробів після відпалу передбачається можливість пластичного деформування, зміцнення матеріалу та термочутливість характеристик матеріалу в діапазонах температур як охолодження, так і експлуатації. Врахування цих факторів є суттєвим для оцінки напружено-деформованого стану в тілі.

На основі відомих розподілів напружень в кінці витримки можна, нехтуючи малосуттєвим впливом фазових перетворень та явища повзучості на стадії охолодження, теоретично спрогнозувати кінцеві напруження в кінці відпалу виробу (які стають залишковими при наступній експлуатації виробу) і кінцеві напруження в результаті реалізованих експлуатаційних умов після відпалу.

Для ізотропного тіла, що підлягає термообробці відпалом з метою релаксації відомих залишкових технологічно набутих напружень  $\{\sigma^{(0)}\}^*$  до невідомого шуканого рівня  $\{\sigma^{(0)}\}^2$  і наступній його експлуатації при заданих термомеханічних умовах, формулюється послідовність задач на основі тих самих співвідношень теплопровідності та термопластичності з різними початковими умовами щодо розподілу температури і напружень та різними крайовими умовами охолодження за рахунок конвективного теплообміну і характеру прикладених статичних механічних зусиль. При цьому для дослідження термомеханічних процесів при відпалі розглядається етап охолодження, для якого є відомою початкова температура  $T_0$ , що є температурою витримки  $T_0^1$ , а на ос-

нові відомого перед відпалом розподілу напружень  $\{\sigma^{(0)}\}^*$  обґрунтовується розподіл релаксованих перед охолодженням напружень  $\{\sigma^{(0)}\} = \{\sigma^{(0)}\}^1$ .

Вихідна перед охолодженням недеформована область  $\Omega_0$ , зайнята тілом і обмежена границею  $\Gamma_0$ , віднесена до ортогональної декартової системи координат  $(x_1, x_2, x_3)$ . Припускається квазістатичність деформаційних процесів як на етапі охолодження в процесі відпалу, так і в наступних експлуатаційних умовах. Масовими силами нехтуємо. Високоградієнтні температурні поля і (або) поверхневі навантаження можуть спричинити явища пластичного деформування та високий рівень напружень.

Пропонується наступне формулювання задачі про визначення термонапруженого стану. Нестационарний тепловий процес при конвективному теплообміні із зовнішнім середовищем описується рівнянням теплопровідності [12]

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_q(T) \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

з початковою умовою

$$T(\{x\}, t) \Big|_{t=t_0} = T_0(\{x\}) \quad (2)$$

та крайовою умовою

$$-\lambda_q(T) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{01}} = \beta(T) (T(\{x\}, t) - T_c). \quad (3)$$

Величини у формулах (1)-(3) позначають:  $T$  – температуру в тілі,  $T_0(\{x\})$  – початковий розподіл температури в тілі,  $T_c$  – температуру середовища,  $t_0$  – початковий час у розглядуваному тепловому процесі,  $t$  – час,  $C(T)$  – питому об'ємну теплоємність,  $\lambda_q(T)$  – залежний від температури коефіцієнт теплопровідності,  $\{n\}$  – одиничну зовнішню нормаль до поверхні  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_{01} \subset \Gamma_0$  – частину поверхні тіла, через яку здійснюється тепловіддача в середовище з коефіцієнтом тепловіддачі  $\beta$ . Шукана температура  $T$  є фактором впливу на напружено-деформований стан як при охолодженні в процесі відпалу, так і при експлуатації в умовах нестационарних температур. Відповідно початковою умовою при охолодженні в процесі відпалу буде температура витримки  $T_0 = T_0^1$ , початкова температура при експлуатації –  $T_0 = T_0^2$ .

При формулюванні задачі про механічний стан тіла припускається, що початкові напруження як перед охолодженням при відпалі, так і перед експлуатацією після відпалу є самозрівноваженими, тобто задовольняють співвідношенням [13]

$$[B]' \{ \tilde{\sigma}^{(0)} \} = 0, \quad (4)$$

$$[n]' \{ \tilde{\sigma}^{(0)} \} \Big|_{\Gamma_{0\sigma}} = 0, \quad (5)$$

в яких  $\{ \tilde{\sigma}^{(0)} \}$  – вектор початкових напружень Піоли-Кірхгофа I-го роду [13],  $[B]$  – матриця диференціальних операторів геометричних співвідношень в системі координат  $(x_1, x_2, x_3)$  [14],  $[n]$  – матриця напрямних косинусів зовнішньої нормалі  $\{n\}$  до поверхні  $\Gamma_0, \Gamma_{0\sigma} \subset \Gamma_0$ . У співвідношеннях (4), (5) при векторному поданні  $\{ \tilde{\sigma}^{(0)} \}$  відповідної тензорної величини компоненти тензора напружень розміщені як у векторі  $\{ \sigma \} = \{ \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23} \}'$ , де символ «'» позначає операцію транспонування. У наступних співвідношеннях використані аналогічні векторні подання тензорів напружень, а також подання тензорів деформацій із розміщенням компонент як у векторі  $\{ \varepsilon \} = \{ \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23} \}'$ . При вивченні механічних процесів для III етапу відпалу початкові напруження  $\{ \sigma^{(0)} \} = \{ \sigma^{(0)} \}^1$  є набутими в кінці витримки. При моделюванні впливу експлуатаційних умов на механічну поведінку виробу після відпалу напруженнями  $\{ \sigma^{(0)} \} = \{ \sigma^{(0)} \}^2$  будуть напруження, релаксовані в результаті відпалу.

При температурних факторах впливу, попередньо отриманих як розв'язок задачі теплопровідності (1)-(3) у вигляді розподілу нестационарного температурного поля  $T(\{x\}, t)$ , і (або) механічних факторах, заданих силовим навантаженням  $\{P_n(\{x\}, t)\}$  на частині  $\Gamma_{0\sigma} \subset \Gamma_0$  початково недеформованої поверхні  $\Gamma_0$  та переміщеннями  $\{u^*(\{x\}, t)\}$  на частині  $\Gamma_{0u} \subset \Gamma_0$ , формулюється з допомогою наступних співвідношень задача про визначення напружено-деформованого стану (НДС). Цими співвідношеннями є рівняння рівноваги [13]

$$[B]'(\{ \tilde{\sigma}^{(0)} \} + \{ \tilde{\sigma} \}) + \{ X \} = 0, \quad (6)$$

геометричне лінійне співвідношення [13]

$$\{ \varepsilon \} = [B] \{ u \} \quad (7)$$

і рівняння стану теорії пластичного неізо-термічного течіння [15]

$$\begin{aligned} \{ d\sigma \} = & \left( [D]^{t+dt} - \frac{9}{4(\bar{\sigma}_i^t)^2} \times \right. \\ & \times \frac{[D]^{t+dt} \{ \bar{S} \}^t \{ \bar{S} \}^t ' [D]^{t+dt}}{H^t + 3G^{t+dt}} \Big) (\{ d\varepsilon \} - \{ d\varepsilon^T \}) + \\ & + \left( [dD] - \frac{9}{4(\bar{\sigma}_i^t)^2} \frac{[D]^{t+dt} \{ \bar{S} \}^t \{ \bar{S} \}^t ' [dD]}{H^t + 3G^{t+dt}} \right) \times \\ & \times (\{ \varepsilon \}^t - \{ \varepsilon^p \}^t - \{ \varepsilon^T \}^t) + \\ & + \frac{3}{2\bar{\sigma}_i^t} \cdot \frac{[D]^{t+dt} \{ \bar{S} \}^t \frac{\partial \tilde{\sigma}_i^t}{\partial T}}{H^t + 3G^{t+dt}} dT \quad (8) \end{aligned}$$

з відповідними крайовими умовами [13]

$$[n]'(\{ \tilde{\sigma}^{(0)} \} + \{ \tilde{\sigma} \}) \Big|_{\Gamma_{0\sigma}} = \{ P_n \}, \quad (9)$$

$$\{ u \} \Big|_{\Gamma_{0u}} = \{ u^* \}. \quad (10)$$

У співвідношеннях (6)-(10) введені позначення  $\{u\}$  для вектора переміщень;  $\{\varepsilon\}$ ,  $\{\varepsilon^p\}$ ,  $\{\varepsilon^T\}$  – відповідно для векторів повної, пластичної та температурної деформацій;  $\{\tilde{\sigma}\}$  – для вектора напружень Піоли-Кірхгофа I-го роду [13];  $\{\sigma\}$  – для вектора напружень Піоли-Кірхгофа II-го роду;  $\{\bar{S}\}$  – для вектора девіаторних компонент напружень, віднесених до центру  $\gamma$  зміщеної поверхні текучості в просторі напружень;  $\tilde{\sigma}_i$  – для інтенсивності напружень Коші [16];  $\Gamma_{0\sigma} \subset \Gamma_0$ ,  $\Gamma_{0u} \subset \Gamma_0$  ( $\Gamma_{0u} \cup \Gamma_{0\sigma} = \Gamma_0$ ,  $\Gamma_{0u} \cap \Gamma_{0\sigma} = \emptyset$ ). У співвідношенні (6) через  $\{X\}$  позначено масові сили. В рівнянні стану (8) матриці  $[D]$  і  $[dD]$  є відповідно матрицями пружних сталей та їх приростів у зв'язку із зміною температури;  $H$  – поточне значення тангенсу кута нахилу кривої деформування матеріалу «інтенсивність напружень – інтенсивність деформацій»;  $G$  – модуль пружності при зсуві;  $\bar{\sigma}_i = \sqrt{\frac{3}{2} \{ \bar{S} \} ' \{ \bar{S} \}}$  – інтенсивність напружень [16], віднесених до центру  $\gamma$  поверхні текучості. Верхні індекси  $t$  і  $t + dt$  відносяться до величин у моменти деформування  $t$  і  $t + dt$  відповідно.

За критерій пластичного деформування взято умову Мізеса, модифіковану на випадок ізотропно-кінематичного зміцнення [15]

$$\sqrt{\frac{3}{2}\{\bar{s}\}^t\{\bar{s}\}^t} = \sigma_T + \beta^* b(\varepsilon_i^{pt})^m \quad (11)$$

$$(0 \leq \beta^* \leq 1)$$

$$\{\bar{s}\}^t = \{\bar{\sigma}\}^t - \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}' \bar{\sigma}_0^t,$$

$$\{\bar{\sigma}\}^t = \{\sigma\}^t - \{\gamma\}^t,$$

$$\bar{\sigma}_0^t = \frac{1}{3}\{1, 1, 1, 0, 0, 0\}(\{\sigma\}^t - \{\gamma\}^t),$$

де  $\sigma_T$  – межа текучості матеріалу;

$\varepsilon_i^p = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p}$  – інтенсивність пластичних

деформацій [16];  $\beta^*$ ,  $b$ ,  $m$  – параметри зміцнення матеріалу. Параметри зміцнення дозволяють при певних значеннях моделювати ізотропно-кінематичне, ізотропне, кінематичне зміцнення та ідеальний матеріал [15]. Умова пластичності (11) описує в просторі напружень поверхню з центром  $\{\gamma\}^t$ , яка обмежує область пружного деформування. В процесі деформування зміщення поверхні текучості приймається за правилом Ціглера [17]

$$\{d\gamma\} = d\mu(\{\sigma\}^t - \{\gamma\}^t), \quad (12)$$

де множник  $d\mu$  отриманий у роботі [18] відповідно до явного вигляду правої і лівої частин умови текучості (11) на основі відомого виразу [19] при неявному поданні правої і лівої частин умови пластичного деформування. Врахування ізотропно-кінематичного зміцнення при деяких властивих матеріалу значеннях параметрів  $\beta^*$ ,  $b$ ,  $m$  ізотропного розширення поверхні текучості та її кінематичного зміщення, згідно з правилом Ціглера [17] (12), дозволяє достатньо добре узгодити отримуваний НДС з кривою деформування матеріалу [15].

Подане співвідношеннями (1)-(12) формулювання задачі математичної фізики дозволяє описати теплові та механічні явища в металевих тілах і елементах конструкцій з попередньо набутими початковими напруженнями як в розглянутих технологічних процесах, так і в інших процесах при статичній механічній і (або) термообробці із супутнім істотним для оцінки напруженого стану проявом пластичного течіння, зміцнюваності матеріалу і температурної залежності його термомеханічних характеристик.

#### 4. Методика розв'язування задач

Існують труднощі математичного характеру при аналітичному розв'язуванні конкретних задач на основі наведеної постановки задачі, оскільки розподіли початкових напружень, температурні залежності тепло-механічних характеристик матеріалу, фактори зовнішнього теплового і (або) механічного впливу (в загальному випадку змінні в часі) можуть бути задані не функціональними співвідношеннями, розглядувані області можуть бути неканонічними та просторово неоднорідними. Запропонований наближений підхід до розв'язування задач базується на МСЕ, для розрахункових схем якого перелічені труднощі не є першорядними та принциповими.

Розроблене програмне забезпечення стосовно визначення НДС [1-3] орієнтоване на розв'язування двовимірних задач: осесиметричних, в припущенні плоского напруженого та плоского деформованого станів.

Застосовуване для розв'язування задач нестационарної теплопровідності програмне забезпечення [1], яке базується на еквівалентній до задачі (1)-(3) варіаційній постановці та МСЕ, дозволяє досліджувати температурні поля протягом розглянутого теплового процесу, який впливає на деформаційні процеси і напружений стан. Розроблене програмне забезпечення для розв'язування з допомогою МСЕ задач механіки та термомеханіки про НДС у виробках, зразках і елементах конструкцій [1] вдосконалено [3] стосовно врахування початкових (залишкових) напружень, опису механічних процесів на основі фізично більш обґрунтованого рівняння стану (8) та модельного наближення ізотропно-кінематичного зміцнення матеріалу [15]. Розрахункові схеми програмної системи базуються на варіаційному рівнянні принципу віртуальної роботи [13]

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega_0} \{\delta\varepsilon\}'(\{\sigma^{(0)}\} + \{\sigma\})d\Omega - \\ & - \iint_{\Gamma_{0\sigma}} \{\delta u\}'\{P_n\}d\Gamma - \\ & - \iiint_{\Omega_0} \{\delta u\}'\{X\}d\Omega = 0, \quad (13) \end{aligned}$$

яке визначене на множині кінематично допустимих переміщень із простору Соболева  $W_2^{(1)}$  [20], є частковим випадком відомого варіаційного рівняння для геометрично нелінійних теорій [13] та еквівалентним варіаційним формулюванням задачі про напружений стан. Оскільки початкові залишкові напруження самозрівноважені, то з використанням співвідношення (4) має місце

$$\iiint_{\Omega_0} \{\delta \varepsilon\}' \{\sigma^{(0)}\} d\Omega = 0$$


і варіаційне рівняння (13) приймає вигляд

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_0} \{\delta \varepsilon\}' \{\sigma\} d\Omega - \iint_{\Gamma_{0\sigma}} \{\delta u\}' \{P_n\} d\Gamma - \\ - \iint_{\Omega_0} \{\delta u\}' \{X\} d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Рівняння (14) не залежить від початкових напружень на відміну від відповідного варіаційного рівняння геометрично нелінійних теорій, залежного від початкових напружень [13]. У розробленому програмному забезпеченні масові сили  $\{X\}$  не враховуються.

МСЕ для фізично нелінійної задачі (6)-(12) про визначення напружено-деформованого стану реалізується для апроксимованої за методом «кроків» лінеаризованої задачі [2]. Деякі принципові аспекти організації обчислювального процесу, такі як формування послідовності апроксимованих за методом «кроків» задач, лінеаризація рівняння стану (8) за методом змінних параметрів пружності (МЗПП) або методом додаткових навантажень (МДН), конструювання лінеаризуючого ітераційного процесу, отримання ключових рівнянь МСЕ відповідно до рівняння стану (8) і ін. висвітлені в публікаціях [2, 3].

Вивчення термомеханічної поведінки виробу здійснюється як в процесі охолодження після витримки, так і при наступних після відпалу статичних механічних і (або) в загальному випадку нестационарних теплових впливах, моделюючих експлуатаційні. Результати розв'язування першої задачі, а саме залишкові напруження в кінці відпалу,

є початковим вихідним станом для розв'язування другої задачі із цієї послідовності. Реалізація розв'язування кожної із задач полягає у виконанні ряду формуючих вхідні дані і розрахункових операцій. На рис. 1 схематично проілюстрований процес отримання розв'язку на основі розробленої програмної системи МСЕ. В блоках, позначених , виконується побудова сітки скінченних елементів, яка включає нумерацію елементів; формування вузлових координат і масиву для ідентифікації локального номера вузла скінченного елемента відповідно до його глобальної нумерації; обчислюється ширина стрічкової матриці для системи алгебраїчних рівнянь, отримуваної в наступних розрахункових алгоритмах МСЕ. Також вказується кількість і геометричне розміщення матеріалів у випадку кускової неоднорідності; задається віднесений до вузлів розподіл температури, відомий або як початкова умова, або попередньо отриманий як розв'язок задачі теплопровідності. Крайові умови для задачі теплопровідності сформовані як вхідна інформація про вузли границі досліджуваної області, які ідентифікують зони конвективного теплообміну з охолоджуючим середовищем і зони відсутності теплових потоків. Для задачі про НДС чисельно модельовані крайові умови вказують у випадку силового і, можливо, теплового навантаження величину тиску і вузли, які знають механічного впливу або певним чином закріплені. Ця інформація відображає як конкретний об'єкт дослідження, так і умови його навантаження і є вхідною для наступного розв'язування задач або теплопровідності, або визначення НДС. Розрахункові блоки, позначені  і , є програмними системами для розв'язування відповідно задачі теплопровідності та визначення НДС. При розв'язуванні цих задач формуються файли вхідних залежних від температури характеристик матеріалу. Початковими напруженнями  $\{\sigma^{(0)}\}$  для задачі про НДС при охолодженні в процесі відпалу є напруження  $\{\sigma^{(0)}\}^1$  в кінці витримки. Напруження  $\{\sigma^{(0)}\} = \{\sigma^{(0)}\}^2$  при моделюванні силових і (або) теплових навантажень після відпалу отримані в результаті розв'язування задачі для етапу охолодження при відпалі.

У розробленому програмному забезпеченні передбачена можливість візуального аналізу отриманих результатів, який дозволяє встановити неточності в побудові сітки, ідентифікувати границі прикладених зусиль, в покрововому режимі спостерігати за

зміною температурного поля і напруженого стану. Програма візуалізації виконана з використанням графічних можливостей програмованого пакету FORGRAF.

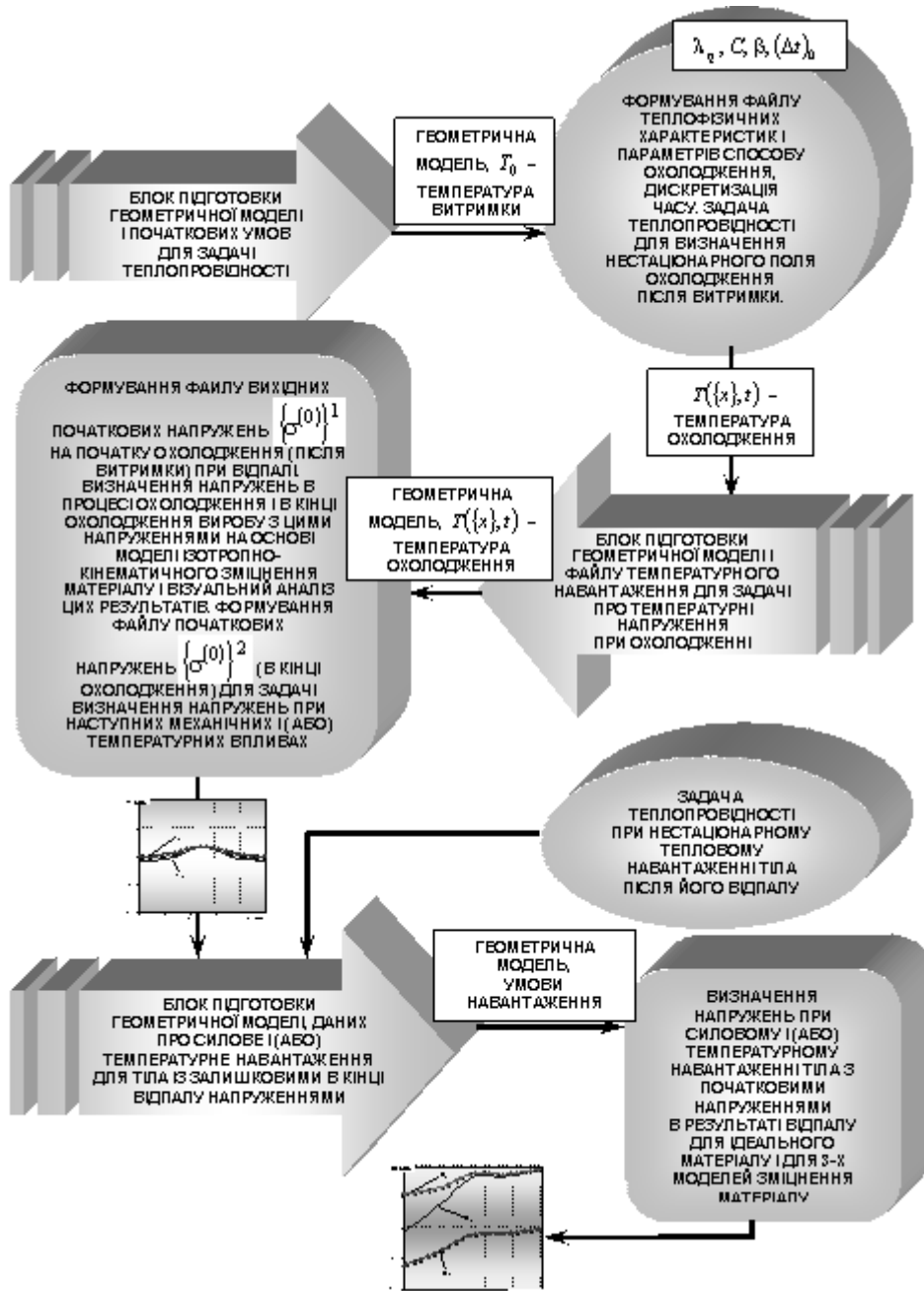


Рис. 1. Схема процесу розв'язування задач теплопровідності та задач про напружено-деформований стан, сформульованих для етапу охолодження при відпалі та наступних після відпалу термомеханічних впливах

З метою тестування розробленої методики і програмного забезпечення для розв'язання осесиметричних задач і задач в припущенні плоского деформованого і плоского напруженого станів розв'язані деякі двовимірні задачі теорії пружності і пластичності, для яких відомі аналітичні розв'язки.

Зокрема, для випадку плоского напруженого стану виконано розрахунок напружень в диску без початкових напружень: а) під впливом силового навантаження, прикладеного до отвору; б) при впливі стаціонарного температурного поля. Аналітичний розв'язок задачі а) при пружному і пружно-пластичному деформуванні отриманий в



[21], а розв'язок задачі б) при пружному деформуванні – в [22]. Результати тестових розрахунків добре узгоджуються з аналітичними результатами як для розглянутих варіантів силового і температурного навантажень у випадку плоского напруженого стану, так і для інших тестових задач в осесиметричному випадку і у випадку плоского деформованого стану.

**5. Дослідження термонапруженого стану тонкого круглого диска з концентричним отвором в умовах охолодження при відпалі та в умовах сумісного впливу після відпалу силового навантаження і стаціонарного температурного поля**

Для теоретичної оцінки напружень в кінці відпалу розглядається стадія охолодження як заключна стадія відпалу. Як приклад досліджується еволюція теплового і напружено-деформованого станів на стадії охолодження при відпалі та при наступному механічному і термічному навантаженні тонкого круглого диску з коаксіальним концентричним отвором радіуса  $R_1$ , із зовнішнім радіусом  $R_2$  та термоізовльованими лицьовими поверхнями. Диск характеризується відомими набутими перед початком відпалу напруженнями  $\{\sigma^{(0)}\}^*$ , які частково релаксуються протягом нагріву та витримки до рівня  $\{\sigma^{(0)}\}^1$ . Диск як при охолодженні в процесі відпалу, так і після відпалу підпадає під такі теплові чи механічні фактори впливу, при яких реалізується плоский напружений стан.

Приведені нижче дослідження виконані в полярній системі координат  $(r, \theta)$  із вказаними нижче значеннями параметрів зміцнення  $\beta^*, b, m, \{\gamma\}^t$  для використовуваного матеріалу, які входять в умову пластичного течіння (11). У зв'язку із симетричністю геометричної конфігурації та умов навантаження розрахунки виконані в області  $\Omega_0$ , що є четвертою частиною діаметрального перерізу диска (рис. 2).

Початковою умовою задачі теплопровідності для процесу охолодження при відпалі буде умова (2) при  $T_0 = T_0^1$  (температура витримки). При термоізоляції лицьових поверхонь, конвективному теплообміні че-

рез границю отвору  $r = R_1$  та зовнішню границю диска  $r = R_2$  і відсутності теплових потоків через границі  $\Gamma_{01}$  та  $\Gamma_{02}$  області  $\Omega_0$  (рис. 2) крайові умови задачі теплопровідності при охолодженні мають вигляд:

$$\begin{aligned} -\lambda_q \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_1} &= -\beta(T - T_C), \\ -\lambda_q \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_2} &= \beta(T - T_C), \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} &= \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

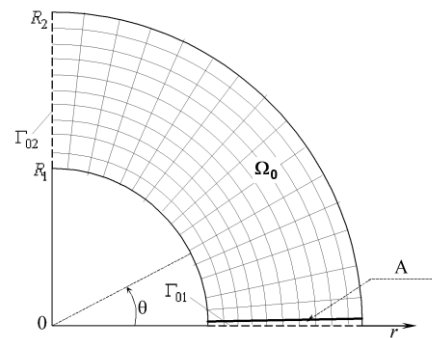


Рис. 2. Розрахункова область та скінченноелементна дискретизація

При незміщуваності частково обмежуючих область  $\Omega_0$  перерізів  $\Gamma_{01}$  та  $\Gamma_{02}$  (рис. 2) крайові умови на цих перерізах для задач визначення НДС як при охолодженні, так і при моделюванні впливу термосилового навантаження після відпалу мають вигляд:

$$u_\theta \Big|_{\theta=0} = 0, u_\theta \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0 \quad (16)$$

і забезпечують нерозривність переміщень у цілому диску. Вигляд граничних умов при  $r = R_1$  та  $r = R_2$  для задачі про напруження залежить від характеру прикладених механічних зусиль чи їх відсутності.

При дослідженні процесу охолодження, який є етапом високотемпературного відпалу, важливо знати початкові напруження, тобто залишкові напруження  $\{\sigma^{(0)}\}^1$  в кінці витримки. Така оцінка вихідного перед охолодженням стану відпалюваного виробу є важливою для встановлення реалістичного перерозподілу напружень теоретичними і розрахунковими підходами.

Розрахунки виконані для диска при  $R_1 = 0,05$  м,  $R_2 = 0,1$  м. Припускалось, що відпал призначений для релаксації залишкових радіальних  $\sigma_r^{(0)*} = \sigma_r^{(A)}$  і кільцевих  $\sigma_\theta^{(0)*} =$

$\sigma_{\theta}^{(A)}$  напружень, розподілених вздовж радіальної координати відповідно до рис. 3. Такий розподіл характерний для залишкових напружень в зварних з'єднаннях [4, 7], де в даному випадку зварний коловий стиковий шов проходить по дузі радіуса  $r = (R_1 + R_2)/2$  і з'єднує два кільцеві диски.

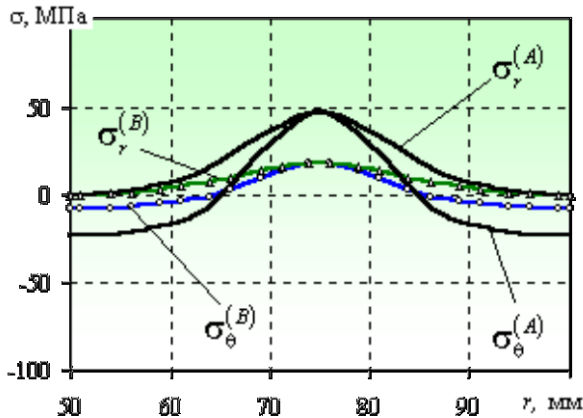


Рис. 3. Розподіл напружень  $\{\sigma^{(0)}\}^*$  в диску перед початком відпалу ( $\sigma_r^{(A)}, \sigma_{\theta}^{(A)}$ ) та напружень  $\{\sigma^{(0)}\}^1$  перед початком охолодження в процесі відпалу ( $\sigma_r^{(B)}, \sigma_{\theta}^{(B)}$ )

Вплив домінуючих при витримці виробу у високих температурах процесів повзучості та фазових перетворень на перерозподіл залишкових напружень важко спрогнозувати теоретично. Тому в даній роботі оцінка початкових перед охолодженням напружень  $\{\sigma^{(0)}\}^1$ , поданих на рис. 3 розподілом вздовж радіальної координати радіальних  $\sigma_r^{(B)}$  та кільцевих  $\sigma_{\theta}^{(B)}$  напружень, базується на вихідному перед відпалом розподілі ( $\sigma_r^{(A)}, \sigma_{\theta}^{(A)}$ , рис. 3) та на почерпнутих із роботи [4] експериментальних спостереженнях і теоретичних фактах, зміст яких зводиться до наступних положень:

1) Інтенсивність максимальних напружень перед відпалом не перевищує величини приблизно рівної межі текучості  $\sigma_T$  матеріалу при температурі середовища [4].

2) На початку витримки інтенсивність максимальних напружень не перевищує значення  $\sigma_T$  при температурі витримки.

3) Протягом витримки експериментально спостерігається незначне зниження напружень порівняно з релаксацією напружень на етапі нагріву при відпалі [4, 7]. При

цьому інтенсивність максимальних напружень в кінці витримки понижується приблизно в 2,5-3 рази відносно залишкових напружень перед початком відпалу [4].

4) Для зварних з'єднань має місце експериментально спостережувана і описана в літературі [4] закономірність, яка полягає у подібності одноосьових та двоосьових епюр залишкових напружень перед відпалом та після відпалу, якщо в зварному з'єднанні відсутні зони із нестійкими структурами.

Диск із термоізолюваними лицьовими поверхнями після витримки при температурі  $T_0 = T_0^1 = 600^\circ\text{C}$  охолоджується шляхом конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем температури  $T_c = 20^\circ\text{C}$  з коефіцієнтом тепловіддачі  $\beta = 5,6 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ . При відсутності механічних навантажень в процесі відпалу крайовими умовами задачі про НДС будуть умови (16) та умови

$$\sigma_r \Big|_{r=R_1} = 0, \quad \sigma_r \Big|_{r=R_2} = 0.$$

Залишкові напруження  $\{\sigma^{(0)}\}^2$  в кінці відпалу, отримані в результаті послідовного розв'язання для етапу охолодження задачі теплопровідності та задачі про температурні напруження, спричинені цим охолодженням, є вихідним залишковим напруженим станом у диску, який зазнає впливу наступних після відпалу модельованих експлуатаційних умов. Прогнозування виникаючих при цьому напружень є наступним етапом даного дослідження.

Після охолодження в процесі відпалу до температури середовища диск із додатково термоізолюваною зовнішньою границею  $r = R_2$  зазнає сумісного впливу силового навантаження  $P_n$  на контур отвору  $r = R_1$  і стаціонарного температурного поля із заданою на границі отвору температурою  $T_{int}$ . Розподіл цього температурного поля має вигляд

$$T(r, \theta) = \frac{T_{int}}{\ln \frac{R_2}{R_1} \ln \frac{R_2}{r}} \quad (17)$$

і отриманий в [22] як розв'язок задачі теплопровідності з крайовими умовами

$$T \Big|_{r=R_1} = T_{int}, \quad T \Big|_{r=R_2} = 0.$$

Крайовими умовами задачі визначення температурних напружень в області  $\Omega_0$  будуть умови (16) і умови

$$\sigma_r \Big|_{r=R_1} = P_n, \quad \sigma_r \Big|_{r=R_2} = 0.$$

Досліджується вплив тиску величиною  $P_n = 60$  МПа на границю отвору і стаціонарного температурного поля (17) при  $T_{int} = 80$  °C на НДС диска із залишковими після відпалу напруженнями  $\{\sigma^{(0)}\}^2$ . Розрахунки виконані для диска із сталі 0X13. Для сталі 0X13 в розглядуваному діапазоні температур спостерігається температурна залежність коефіцієнта теплопровідності  $\lambda_q$ , модуля пружності  $E$  і коефіцієнта Пуассона  $\nu$

[23] (табл.1). Межа текучості  $\sigma_T$  лінійно знижується від 96 МПа при 20 °C [15] до 1 МПа при 1000 °C. Інші характеристики приймалися постійними: питома об'ємна теплоємність  $C = 3592,44$  кДж/(м<sup>3</sup>·К), коефіцієнт лінійного температурного розширення  $\alpha_T = 11,0 \cdot 10^{-6}$  ·К [23]. Параметрами ізотропного зміцнення для сталі 0X13 є  $\beta^* = 0,515$ ,  $b = 2208$  МПа,  $m = 0,435$  [15]. Параметр кінематичного зміцнення  $\{\gamma\}^t \neq 0$  для  $t > 0$  визначається формулою (12).

**Таблиця 1.** Температурна залежність характеристик сталі 0X13 [23]

$T, \text{ }^\circ\text{C}$	$\lambda_q, \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$	$T, \text{ }^\circ\text{C}$	$E, \text{ ГПа}$	$\nu$
20	26,7	20	224,78	0,268
100	27,7	100	224,78	0,268
200	27,7	149	211,68	0,268
300	28,0	260	204,09	0,268
400	27,7	427	190,99	0,272
500	27,2	482	184,77	0,276
600	26,4	538	177,20	0,282
700	25,5	593	164,10	0,289
800	25,1	649	151,69	0,300
900	26,7	704	140,66	0,316
1000	27,7	1000	72,89	0,316

Розв'язування задач як для охолодження при відпалі, так і при наступних після відпалу термомеханічних впливах виконано для диска при дискретизації області  $\Omega_0$  сіткою із 150 скінченних елементів, поданою на рис. 2. Сітка утворена перетином концентричних дуг при рівномірному поділі відрізка  $[R_1, R_2]$  на 10 відрізків і рівномірному поділі кута  $[0, \pi/2]$  радіальними прямими на 15 кутів. Графіки розподілів отримуваних напружень будуть подані для перерізу  $A$ , вказаному на рис. 2, який перетинає в радіальному напрямку точки інтегрування скінченних елементів.

*Обчислювальні аспекти та аналіз результатів досліджень для етапу охолодження в процесі відпалу.* На цьому етапі дослідження виконані на основі моделі ізотропно-кінематичного зміцнення матеріалу ( $\{\gamma\}^t \neq 0$  для  $t > 0$ ,  $\beta^* = 0,515$ ).

У результаті розв'язування задачі теплопровідності з початковим кроком по часу  $(\Delta t)_0 = 1$  с і укрупненими часовими інтервалами в наступних обчисленнях отриманий при дискретизації на  $N_T = 4801$  кроків не-

стаціонарний, приведений до вузлів скінченно-елементної сітки, тепловий процес. Тривалість цього процесу складає  $t_{END} = 20000 \approx 5,5$  год. При цьому встановлюється практично рівномірний розподіл температури величиною  $T \approx 154$  °C. Ця температура є кінцевою при обчисленнях, оскільки наступне пониження близької до однорідної температури не викликає напружень. Укрупнення інтервалів часу в міру зменшення градієнтності температурного поля пов'язане із недоцільністю здійснення більшої кількості обчислень при збереженні приблизно такої ж точності отримуваних результатів. Інформація про отриманий тепловий режим у вигляді відповідних розподілів температури для дискретних часових моментів є вхідною інформацією для задачі про температурні напруження.

Розв'язування задачі теплопровідності і задачі аналізу НДС здійснено при різній дискретизації часового інтервалу процесу охолодження. Розрахункові температурні напруження отримані протягом 33 кроків, для яких природи часу є більшими, ніж для

задачі теплопровідності. Укрупнення проміжків часу при розрахунку напружень здійснено для забезпечення більш високої швидкості обчислень при збереженні точності. Встановлено, що при даних умовах охолодження відбувається пружне деформування матеріалу, яке не спричинює небажаного перерозподілу напружень на стадії охолодження при відпалі. В результаті в диску отримано розподіл напружень  $\{\sigma^{(0)}\}^2$ .

Результати розрахунків свідчать, що зростання напружень в результаті охолодження не відбувається, що є бажаним ефектом з точки зору релаксації напружень при відпалі. Відомі експериментальні дані [7] і результати теоретичних досліджень [4, 18] свідчать про можливе підвищення на етапі охолодження рівня напружень, попередньо знижених в кінці витримки, за рахунок зростання модуля пружності  $E$  та межі текучості матеріалу  $\sigma_T$  із пониженням температури. Для часткового попередження цього явища створюють умови для реалізації практично рівномірного охолодження з однорідно розподіленою температурою шляхом остигання виробу в печі і наступним його вивантаженням при температурі 150 – 200 °C [4]. В даному випадку остигання при низьких градієнтах температур отримано за рахунок термоізоляції лицьових поверхонь, яка перешкоджає тепловіддачі в середовище. Тому зниження температури внаслідок теплообміну із середовищем через границю отвору  $r = R_1$  і границю  $r = R_2$  є повільним і практично рівномірним. Шляхом термоізоляції великих ділянок поверхні при охолодженні може бути в значній мірі вирішена технологічна проблема про непідвищення рівня напружень після витримки або його незначне підвищення, підтверджене розрахунковими результатами моделювання еволюції розгляданого термомеханічного процесу. Це дозволить значно скоротити час перебування виробів в печі, більш ефективно використовувати піч для відпалу інших виробів та підвищити енергозбереження.

Обчислювальні аспекти та аналіз результатів досліджень сумісного впливу після відпалу силового навантаження і стаціонарного температурного поля. Розрахункові результати для задачі про напруження отримані при 4 кроках навантаження, відпо-

відно до яких зростає від нульового значення механічне навантаження із приростом  $\Delta P_n = 15$  МПа та зростає від  $T = T_C$  із приростом  $\Delta T_{int} = 20$  °C температура на границі отвору.

Для порівняння реалізовані результати стосовно впливу цих факторів на напруження в диску із відсутніми початковими напруженнями для пружно-пластичного матеріалу при його ізотропно-кінематичному зміцненні (рис. 4) та в припущенні пружної поведінки матеріалу (рис. 5). Відповідні графіки розподілів напружень  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  та інтенсивності напружень  $\sigma_i$  подані на рис. 4, 5. При цьому для пружно-пластичного матеріалу розрахунково спостерігається пружний характер деформування протягом початкових трьох кроків.

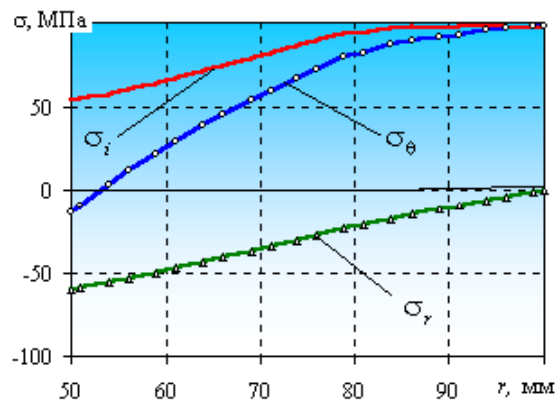


Рис. 4. Розподіл напружень в диску без початкових напружень під впливом силового навантаження на контур отвору та стаціонарного температурного поля для пружно-пластичного матеріалу при його ізотропно-кінематичному зміцненні

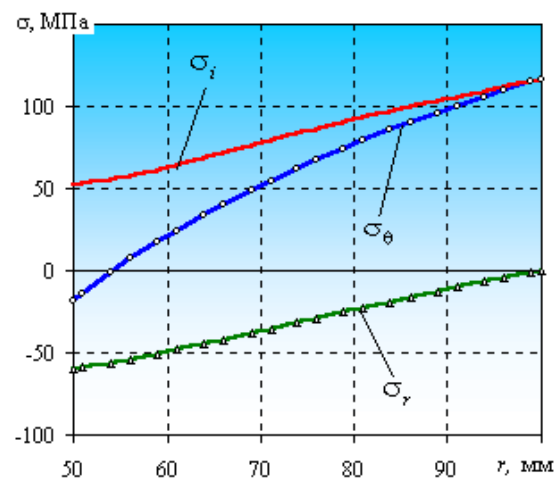
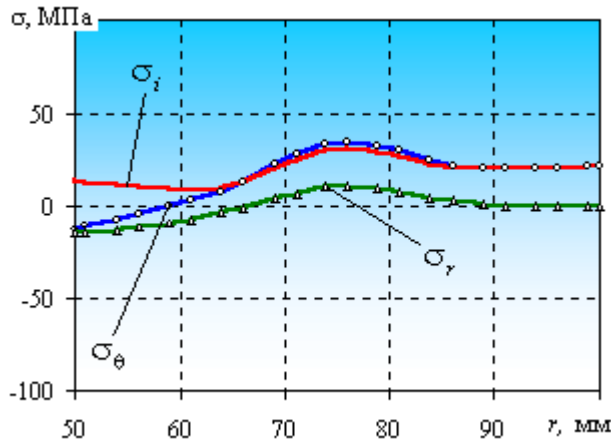


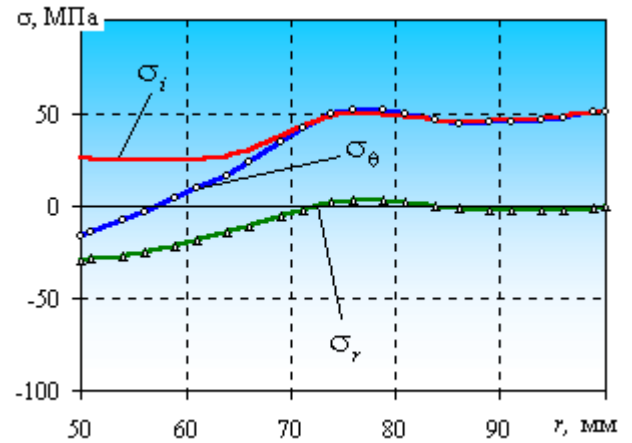
Рис. 5. Розподіл напружень в диску без початкових напружень під впливом силового навантаження на контур отвору та стаціонарного температурного поля в припущенні пружного характеру деформування

Наступні дослідження виконані в припущенні ідеального матеріалу та в рамках модельних наближень ізотропно зміцнюваного, кінематично та ізотропно-кінематично зміцнюваних матеріалів. Диск із релаксованими внаслідок відпалу напруженнями  $\{\sigma^{(0)}\}^2$  підпадає під ті ж умови. Результати

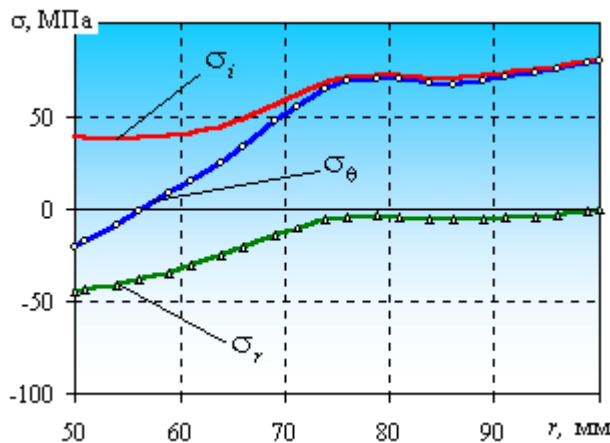
(рис. 6) ілюструють покрокову зміну напружень, які співпадають для ідеального пружно-пластичного матеріалу і в припущенні його зміцнюваності на основі трьох моделей зміцнення протягом 3 кроків деформування (рис. 6а-в).



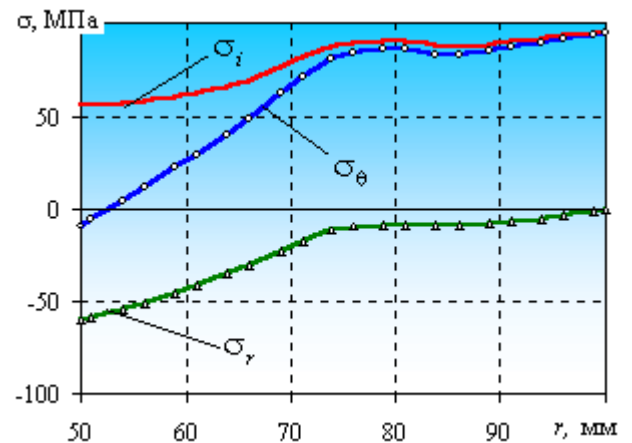
а)  $P_n = 15$  МПа,  $T_{int} = 20^\circ\text{C}$



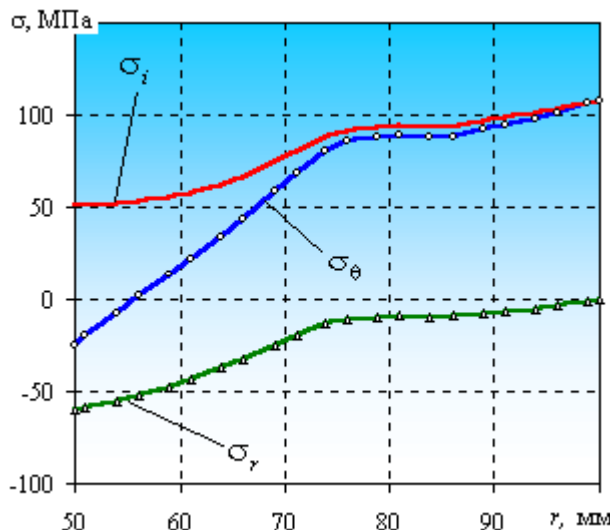
б)  $P_n = 30$  МПа,  $T_{int} = 40^\circ\text{C}$



в)  $P_n = 45$  МПа,  $T_{int} = 60^\circ\text{C}$



г)  $P_n = 60$  МПа,  $T_{int} = 80^\circ\text{C}$



д)  $P_n = 60$  МПа,  $T_{int} = 80^\circ\text{C}$

**Рис. 6.** Покрокова зміна розподілів напружень в диску з початковими напруженнями  $\{\sigma^{(0)}\}^2$  під впливом силового навантаження на контур отвору та стаціонарного температурного поля:  
 а – 1-й крок, пружність;  
 б – 2-й крок, пружність;  
 в – 3-й крок, пружність;  
 г – 4-й крок, пластичність, ідеальний або кінематично зміцнюваний матеріал;  
 д – 4-й крок, пластичність, ізотропно або ізотропно-кінематично зміцнюваний матеріал

Співпадіння цих результатів пов'язане з пружним характером поведінки розгляданого фізичного об'єкта протягом 3 кроків при досягнутому рівні термосилового навантаження. При цьому формування напружень відбувається шляхом сумування залишкових після відпалу напружень та напружень, спричинених впливом тиску і температури із досягнутими на цьому кроці рівнями у початково ненапруженому диску.

При наступному довантаженні на 4 кроці відбувається пластичне деформування матеріалу. Розрахункові результати на рис. 6г проілюстровані розподілами напружень у радіальному напрямку для ідеального ( $\{\gamma\}^t = 0, \beta^* = 0$ ) і кінематично зміцнюваного ( $\{\gamma\}^t \neq 0$  для  $t > 0, \beta^* = 0$ ) пружно-пластичного матеріалу. Ці результати для розгляданого фізичного об'єкта та умов навантаження співпадають. Також співпадають результати розв'язання задачі в припущенні ізотропно-кінематичного ( $\{\gamma\}^t \neq 0$  для  $t > 0, \beta^* = 0,515$ ) і ізотропного зміцнення ( $\{\gamma\}^t \neq 0$  для  $t > 0, \beta^* = 1$ ) матеріалу, подані на рис. 6д. Наявність початкових напружень та зон пластичного течіння істотно впливає на розподіл остаточних напружень, поданих на рис. 6г або рис. 6д (для порівняння див. рис. 4, 5). На основі узгодженості використовуваної моделі ізотропно-кінематичного зміцнення та експериментальної кривої деформування матеріалу [15] результати на рис. 6д є фізично більш обґрунтованими в порівнянні із результатами з рис. 6г. Нехтування зміцненням помітно впливає на оцінку рівня результуючих залишкових напружень і дозволяє отримати лише якісний розподіл напружень.

## 6. Висновки

Окреслено клас задач термомеханіки з вивчення впливу нестационарного процесу охолодження на перерозподіл залишкових

напружень в тілах при їх високотемпературному відпалі та впливу наступних після відпалу термомеханічних факторів, моделюючих експлуатаційні умови. Сформульовано відповідну задачу термомеханіки в рамках теорій нестационарної теплопровідності та термопластичності з урахуванням важливих для оцінки напруженого стану явищ термочутливості, пластичного деформування та зміцнюваності матеріалів. Як приклад для технологічно набутих у тонкому круглomu диску з концентричним коаксіальним отвором зварних напружень і відповідно оціненого їх перерозподілу на етапах нагріву та витримки при відпалі отримано з допомогою методу скінченних елементів остаточний в кінці відпалу напружений стан. Цей напружений стан є початковим для наступного дослідження його перерозподілу в умовах сумісного впливу тиску заданої величини на границю отвору та стаціонарного температурного поля. Встановлено закономірності розподілу напружень в диску залежно від модельованого варіанта зміцнення матеріалу. Ці закономірності полягають у помітному впливі релаксованих після відпалу зварних напружень на механічну поведінку в околі зварного шва. Спостерігаються менш значні якісні і помітні кількісні відмінності в розподілах напружень залежно від модельних наближень зміцнюючих властивостей матеріалу (ідеальний матеріал, кінематичне зміцнення, ізотропно-кінематичне та ізотропне зміцнення). Розроблена методика розв'язування задач механіки може бути використана для більш широкого класу задач у цьому напрямку. Перспективними виглядають прогнозування залишкового напруженого стану після технологічної операції гартування виробів, після наступної термообробки відпалом та моделювання експлуатаційних механічних чи (або) теплових впливів гартованих і відпалених виробів.

## Література

1. Будз С. Ф., Дробенко Б. Д., Михайлишин В. С. Компьютерное моделирование термоупруго-пластического поведения механических систем. Львов: Ин-т прикл. проблем механики и математики АН Украины, 1992. 60 с.
2. Mykhailyshyn V. S. Iterative Procedures for Problems of Nonisothermal Elastoplasticity with Isotropic Kinematic Hardening. *Materials Science*. 1999. Vol. 35, No 4. P. 561–571.

3. Гачкевич О., Михайлишин В., Равська-Скотнічна А. Числова методика розв'язування задач термомеханіки тіл у разі охолодження в процесі високотемпературного відпалювання. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ.* 2007. Вип. 12. С. 78–92.
4. Винокуров В. А. Отпуск сварных конструкций для снижения напряжений. Москва: Машиностроение, 1973. 213 с.
5. Alberg H. Material Modelling for Simulation of Heat Treatment. Lulea: University of Technology, 2003. 22 p.
6. Wang J., Lu H., Murakawa H. Numerical Simulation of Mechanical Behavior during Local Postweld Heat Treatment. *Journal of Materials*. 2000. Vol. 13, No 2. P. 722–727.
7. Касаткин Б. С., Прохоренко В. М., Чертов И. М. Напряжения и деформации при сварке. Киев: Вища шк., 1987. 246 с.
8. Khrebtov O. Investigation of electrocontact annealing in the production process of steel welding wire. *Технологічний аудит та резерв виробництва*. 2017. № 4/1(36). С. 30–34.
9. Emre H. E., Kacar R. Effect of Post Weld Heat Treatment Process on Microstructure and Properties of Friction Welded Dissimilar Drill Pipe. *Materials Research*. 2015. Vol. 18, No 3. P. 503–508.
10. Liu P., Sun S., Xu S., Cao M., Feng K. Influence of holding time of annealing treatment on microstructure and properties of TIG welded joint for P91 heat-resistant steel tube. *Kovove Mater.* 2018. No 56. P. 245–252.
11. Федосов О. В., Карпович О. В., Перерва В. О. Застосування електронного променя для відпалу зварних з'єднань титанового сплаву ВТ23. *Авиационно-космическая техника и технология*. 2015. № 6(123). С. 52–57.
12. Коваленко А. Д. Термоупругость. Киев: Вища шк., 1975. 216 с.
13. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / пер. с англ. Москва: Мир, 1987. 542 с.
14. Сахаров А. С., Альтенбах И. Метод конечных элементов в механике твердых тел. Киев: Вища шк., 1982. 480 с.
15. Морозов Е. М., Никишков Г. П., Черныш Т. А. Неизотермическая модель упругопластического тела с комбинированным законом упрочнения и ее применение для МКЭ-расчета тел с трещинами. *Аналитические и численные методы решения краевых задач пластичности и вязкоупругости*. Свердловск: Уральск. научн. центр, АН СССР. 1986. С. 87–94.
16. Писаренко Г. С., Можаровский Н. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: справ. пособие. Киев: Наук. думка, 1981. 496 с.
17. Ziegler H. A modification of Prager's hardening rule. *Quart. Appl. Math.* 1959. Vol. 17. P. 55–65.
18. Гачкевич О. Р., Михайлишин В. С. Математичне моделювання і дослідження напруженого стану тіл у процесі охолодження при високотемпературному відпалі. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2004. Т. 47, № 3. С. 186–198.
19. Allen D. H., Haisler W. E. A theory for analysis of thermoplastic materials. *Comput. & Struct.* 1981. Vol. 13, No 1. P. 129–135.
20. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. Москва: Мир, 1982. 488 с.
21. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Москва: Наука, 1969. 420 с.
22. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости / пер. с англ. Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. 576 с.
23. Теплотехнический справочник / под ред. В. Н. Юренева, П. Д. Лебедева: в 2 т. Москва: Энергия, 1976. Т. 2. 897 с.

### References

1. Budz, S. F., Drobenko, B. D. & Mykhailyshyn, V. S. (1992). Computer simulation of thermoelastoplastic behavior of mechanical system. Lvov: In-te for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Academy of Scien.
2. Mykhailyshyn, V. S. (1999). Iterative Procedures for Problems of Nonisothermal Elastoplasticity with Isotropic Kinematic Hardening. *Materials Science*, Vol. 35, No 4, pp. 561–571.

3. Hachkevych, O., Mykhailyshyn, V. & Rav'ska-Skotnichna, A. (2007). A numerical policy of solving of thermomechanics problems for bodies during cooling in high-temperature annealing process. *Visn. Lviv Univ., Ser. Prykl. Mathem. ta Inform.*, Issue 12, pp. 78–92.
4. Vinokurov, V. A. (1973). Tempering treatment of welded structures for stress reduction. Moscow: Mashynostroyeniye.
5. Alberg, H. (2003). *Material Modelling for Simulation of Heat Treatment*. Lulea: University of Technology.
6. Wang, J., Lu, H. & Murakawa, H. (2000). Numerical Simulation of Mechanical Behavior during Local Postweld Heat Treatment. *Journal of Materials*, Vol. 13, No 2, pp. 722–727.
7. Kasatkin, B. S., Prokhorenko, V. M. & Chertov I. M. (1987). Stresses and strains under welding. Kyev: Vyshha shkola.
8. Khrebtov, O. (2017). Investigation of electrocontact annealing in the production process of steel welding wire. *Tekhnologicheskij audit i rezerv proizvodstva*, No 4/1(36), pp. 30–34.
9. Emre, H. E. & Kacar, R. (2015). Effect of Post Weld Heat Treatment Process on Microstructure and Properties of Friction Welded Dissimilar Drill Pipe. *Materials Research*, Vol. 18, No 3, pp. 503–508.
10. Liu, P., Sun, S., Xu, S., Cao, M. & Feng, K. (2018). Influence of holding time of annealing treatment on microstructure and properties of TIG welded joint for P91 heat-resistant steel tube. *Kovove Mater.*, No 56, pp. 245–252.
11. Fedosov, O. V., Karpovych, O. V. & Pererva, V. O. (2015). An application of the electron ray for annealing of weldments of titanium alloy VT23. *Aviacionno-kosmicheskaya tekhnika i tehnologiya*, No 6(123), pp 52–57.
12. Kovalenko, A. D. (1975). *Thermoelasticity*. Kyev: Vyshha shkola.
13. Vaidzu, K. (1987). *Variational methods in elasticity and plasticity theory*. Moscow: Mir.
14. Sakharov, A. S. & Altenbakh, I. (1982). *Finite element method in solids mechanics*. Kyev: Vyshha shkola.
15. Morozov, Ye. M., Nikishkov, G. P. & Chernysh, T. A. (1986). Nonisothermal model of elastoplastic body with combined hardening law and its application for FEM calculating of bodies with cracks. Analytical and numerical methods of solving of plasticity and viscoelasticity boundary problems. Sverdlovsk: Ural'skij nayechnyj centr, Academy of Scien. of SUSR, pp. 87–94.
16. Pysarenko, H. S. & Mozharovskij, N. S. (1981). *Equations and boundary problems of plasticity and creep theory: reference aid*. Kyev: Naukova dumka.
17. Ziegler, H. (1959). A modification of Prager's hardening rule. *Quart. Appl. Math.*, Vol. 17, pp. 55–65.
18. Hachkevych, O. R. & Mykhailyshyn, V. S. (2004). Mathematical simulation and investigation of the stress state of bodies in cooling process during high-temperature annealing. *Mat. met. ta fiz.-mekh. polya*, Vol. 47, No 3, pp. 186–198.
19. Allen, D. H. & Haisler, W. E. (1981). A theory for analysis of thermoplastic materials. *Comput. & Struct.*, Vol. 13, No 1, pp. 129–135.
20. Rikhtmajyer, R. (1982). *Principles of modern mathematical physics*. Moscow: Mir.
21. Kachanov, L. M. (1969). *Fundamentals of plasticity theory*. Moscow: Nauka.
22. Timoshenko, S. P. & Hudyer, J. (1975). *Elasticity theory*. Moscow: Nauka.
23. Yurenev, V. N. & Lebedev, P. D. *Thermotechnical handbook*. (1976). In 2 vol. Vol. 2. Moscow: Energiya.