

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-14

РОЗТЯГ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНИ З ДВОМА ПОВЕРХНЕВИМИ ТРІЩИНАМИ НА ПРЯМОЛІНІЙНІЙ МЕЖІ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ З УРАХУВАННЯМ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН ПО ЇХ ФРОНТУ

М. М. Николишин¹, В. К. Опанасович², Л. Р. Куротчин¹, М. С. Слободян²

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,

²Львівський національний університет ім. Івана Франка

klesi@i.ua, slobkolia@gmail.com

Ключові слова:

розтяг, пластина, поверхневі тріщини, пластичні зони, комплексні потенціали, умова пластичності Треска, розкриття тріщини.

Розглянуто задачу про двовісний розтяг кусково-однорідної пластини з двома поверхневими тріщинами на прямолінійній межі поділу матеріалів. Припускаємо, що навантаження, властивості матеріалів і розміри тріщин такі, що біля їх вершин на продовженні тріщин утворюються пластичні зони, де виконуються умови пластичності Треска у вигляді поверхневого пластичного шару. Оскільки тріщини поверхневі, то розв'язок задачі розбито на задачу розтягу пластини та згину пластини із використанням класичної теорії згину. Використовуючи комплексні потенціали, розв'язування задачі зведено до задач лінійного спряження та знайдено їх аналітичний розв'язок у класі функцій обмежених у вершинах пластичних зон. Визначено напружений стан пластини на межі поділу матеріалів та розкриття берегів тріщин у їх вершинах. Проведено числовий аналіз та визначено довжини пластичних зон і розкриття тріщини біля їх вершин.

TENSION OF PIECEWISE-HOMOGENEOUS PLATE WITH TWO SURFACE CRACKS ON THE LINEAR INTERFACE OF MATERIALS WITH REGARD FOR PLASTIC ZONES ALONG THEIR FRONT

M. M. Nykolyshyn¹, V. K. Opanasovich², L. R. Kurotchyn¹, M. S. Slobodyan²

¹Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine,

²Ivan Franko National University of Lviv

klesi@i.ua, slobkolia@gmail.com

Key words:

tension, plate, surface crack, plastic zones, complex potentials, Tresca plasticity condition, crack opening.

A problem on biaxial tension of piecewise-homogeneous plate on the linear interface of materials is studied. It is assumed that load, materials properties and crack sizes are such that near their tips on the crack prolongation the plastic zones are formed, where Tresca plasticity conditions are satisfied in the form of a surface plastic layer. Since the cracks are surface, the solution of the problem is divided on the problem of the plate tension and the plate bending, using the classical theory of bending. Making use of complex potentials, the solution of the problems is reduced to the problems of linear conjugation and their analytic solution is obtained in the class of functions, limited in the tops of plastic zones. The stress state of the plates on the interface of materials and crack edges opening in their tips are determined. Numerical analysis is carried out and the length of the plastic zone and crack opening near their tips are determined.

1. Вступ

У різних галузях техніки використовують пластинчасті елементи конструкцій, які під час виготовлення і експлуатації можуть отримати тріщиноподібні дефекти, що різко

знижують допустиме навантаження і можуть призвести до руйнування конструкції, тому важливо вивчати їхній вплив на напружено-деформований стан таких елементів.

Нашою метою є дослідити задачу про двовісний розтяг кусково-однорідної пластини з двома поверхневими тріщинами на прямолінійній межі поділу матеріалів. Вважаємо, що в процесі деформування біля вершин тріщин на їх продовженні утворилися вузькі пластичні зони по всій товщині пластини. Аналогічно як у δ_c -моделі замінимо пластичні зони поверхнями розриву пружних переміщень, а реакцію пластичної зони на пружний об'єм – невідомими нормальними та дотичними напруженнями, які задовольняють умові пластичності Треска у вигляді поверхневого шару [2, 3]. Таким чином, пружно-пластичну задачу для пластини з тріщинами заданих розмірів зведено до задачі про пружну рівновагу такої ж пластини з наскрізними тріщинами невідомих розмірів. Оскільки тріщини поверхневі, то розв'язування задачі подаємо у вигляді суперпозиції плоскої задачі теорії пружності і задачі згину пластини з використанням класичної теорії згину. За допомогою методів теорії функцій комплексної змінної розв'язування задачі зведено до задач лінійного спряження, розв'язок яких отримано в класі функцій обмежених у вершинах тріщин. Числовий аналіз задачі проведено з використанням методу механічних квадратур [7, 10].

2. Формулювання задачі

Розглянемо нескінченну кусково-однорідну пластину завтовшки $2h$ з прямолінійною межею поділу матеріалів. Вважаємо, що пластина перебуває під дією однорідного поля зусиль на нескінченності q , P_1 , P_2 , а на межі поділу матеріалів наявні дві однакові

поверхневі тріщини завглибшки $h + h_1$ і завдовжки $2l$. Береги тріщин вільні від зовнішнього навантаження. Виберемо в серединній площині пластини декартову систему координат $Ox\tilde{z}$ з початком в центрі між тріщинами, а вісь Ox спрямуємо по межі поділу матеріалів. Вважаємо, що під дією зовнішнього навантаження на продовженні тріщини виникають пластичні зони завдовжки w_1 – між тріщинами і w_2 – зовні тріщин, крім того, матеріал у перемичці $h_1 \leq \tilde{z} \leq h$, $-l \leq x \leq l$ (рис. 1) також перейшов у пластичний стан. На межі поділу матеріалів поза тріщиною виконуються умови ідеального механічного контакту. В серединній площині пластини лінію спаю матеріалів позначимо через L' , лінію, де розміщені тріщини, – через L , а пластичні зони через – L'_1 , L''_1 , L'_2 , L''_2 . Півплощину для якої $y < 0$ ($y > 0$) – через S_1 (S_2). Відстань між центрами тріщин через $2s$, їх кінці через b і c та $-c$ і $-b$, кінці пластичних зон через a і d та $-d$ і $-a$. Граничне значення відповідних величин при $y \rightarrow \pm 0$ будемо позначати знаками «+» і «-», а для пружних сталей матеріалу S_j півплощини приписуватимемо індекс j , який надалі приймає два значення 1 чи 2, і введено позначення $L_j = L'_j \cup L''_j$, $\tilde{L} = L \cup L_1 \cup L_2$, $\tilde{L} = L \cup L' \cup L_1 \cup L_2$ (див. рис. 1). Завдяки наявності пластичної зони в перемичці розв'язок задачі подано у вигляді розв'язків двох задач: плоскої задачі та задачі згину пластини з використанням класичної теорії.

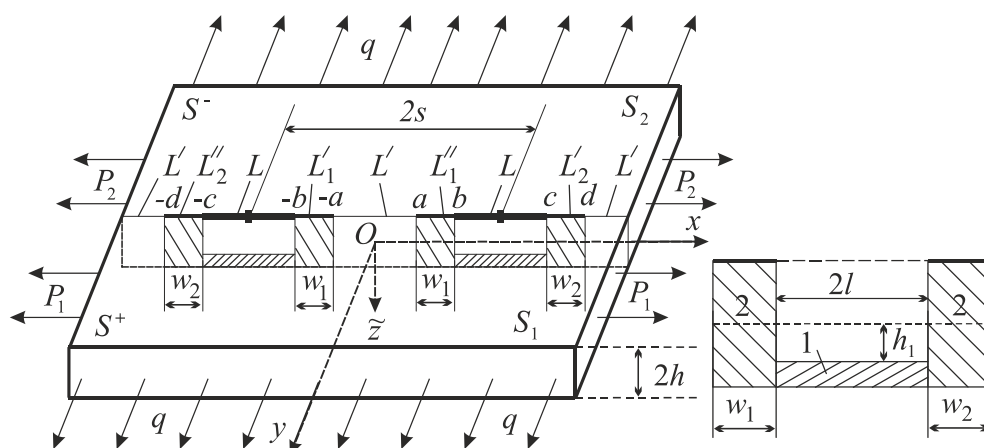


Рис. 1. Схема навантаження пластини, розміщення та вигляд тріщин і пластичних зон

Розв'язок задачі визначатимемо за таких крайових умов:

$$u_{\Pi r} = 0, \quad u_{\Pi \theta} = 0, \quad t \in L; \quad (1)$$

$$\sigma_{x_1 y_1}^{\pm} = 0, x_1 \in \tilde{L}_1; \quad \sigma_{y_1 y_1}^{\pm} = 0, x_1 \in L_1;$$

$$\sigma_{y_1 y_1}^{\pm} = \sigma_0^{(1)}, x_1 \in L'_1; \quad \sigma_{y_1 y_1}^{\pm} = \sigma_0^{(2)}, x_1 \in L''_1, \quad (2)$$

де $u_{\Pi r}$ і $u_{\Pi \theta}$ – компоненти вектора переміщень у полярній системі координат, $\sigma_{x_1 y_1}$, $\sigma_{y_1 y_1}$ – компоненти тензора напружень у декартовій системі координат; $\sigma_0^{(1)}$ і $\sigma_0^{(2)}$ – невідомі нормальні напруження у пластичних зонах, для яких виконуються умови пластичності Треска [7].

Згідно з формулюванням задачі маємо такі крайові умови:

на межі поділу матеріалів

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^+ &= \sigma_{yy}^-, \quad \sigma_{xy}^+ = \sigma_{xy}^-, \\ u^+ &= u^-, \quad v^+ = v^-, \\ M_y^+ &= M_y^-, \quad H_{xy}^+ = H_{xy}^-, \end{aligned} \quad (1^*)$$

$$N_y^+ = N_y^-, \quad w^+ = w^-,$$

$$(\partial w_y)^+ = (\partial w_y)^-$$

і на берегах тріщин з пластичними зонами

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{\pm} &= \begin{cases} \sigma_{0j}, & x \in L_j, \\ \sigma_Y \tilde{b}_1, & x \in L, \end{cases} \\ \sigma_{xy}^{\pm} &= \begin{cases} \tau_{0j}, & x \in L'_j, \\ 0, & x \in L, \\ -\tau_{0j}, & x \in L''_j, \end{cases} \end{aligned} \quad (2^*)$$

$$M_y^{\pm} = \begin{cases} M_{0j}, & x \in L_j, \\ \sigma_Y \tilde{b}_2, & x \in L, \end{cases}$$

$$H_{xy}^{\pm} = \begin{cases} H_{0j}, & x \in L'_j, \\ 0, & x \in L, \\ -H_{0j}, & x \in L''_j, \end{cases} \quad (3)$$

$$\tilde{b}_1 = (h - h_1)/(2h), \quad \tilde{b}_2 = (h^2 - h_1^2)/2, \quad (4)$$

де u , v – проекції вектора переміщення точки серединної площини на осі Ox і Oy відповідно; σ_{yy} , σ_{xy} , σ_{xx} – компоненти тензора напружень; σ_{0j} , τ_{0j} , – невідомі нормальні і дотичні напруження у плоскій задачі в j пластичній зоні, де $j=1,2$; w –

прогин серединної площини пластини; M_y , H_{xy} , N_y – згинальний і крутний моменти та перерізувальна сила; M_{0j} , H_{0j} – невідомі згинальний і крутний моменти у пластичній зоні; $\sigma_Y = \min\{\sigma_Y^{(1)}, \sigma_Y^{(2)}\}$, $\sigma_Y^{(j)}$ – границя текучості матеріалу S_j – півплощини; $\partial_s f$ – позначення часткової похідної $\partial f / \partial s$.

3. Розв'язок задачі

Розв'язок плоскої задачі. Введемо комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі $\Phi_j(z)$ і $\Psi_j(z)$ для S_j півплощини. Тоді згідно з [4] можемо записати

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} + \sigma_{xx} &= 4 \operatorname{Re}[\Phi_j(z)], \\ \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} &= \Phi_j(z) + \overline{\Phi_j(z)} + \\ &+ z\Phi_j'(z) + \overline{\Psi_j(z)}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} 2\mu_j \partial_x(u + iv) &= \kappa_j \Phi_j(z) - \overline{\Phi_j(z)} - \\ &- z\overline{\Phi_j'(z)} - \overline{\Psi_j(z)}, \end{aligned}$$

де $z = x + iy$, $i^2 = -1$, $\kappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$; μ_j – модуль зсуву; ν_j – коефіцієнт Пуассона.

Для великих $|z|$ мають місце розвинення [4]

$$\begin{aligned} \Phi_j(z) &= \Gamma_j + O(1/z^2), \\ \Psi_j(z) &= \Gamma_j' + O(1/z^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Тут

$$\Gamma_j = 0, 25(P_j + q), \quad \Gamma_j' = 0, 5(q - P_j). \quad (7)$$

Аналітично продовжимо функцію $\Phi_j(z)$ з області S_j в область S_{3-j} за формулою [4]

$$\Phi_j(z) = -\overline{\Phi_j(z)} - z\overline{\Phi_j'(z)} - \overline{\Psi_j(z)}. \quad (8)$$

Тоді залежності (5) можемо записати так:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} &= \Phi_j(z) - \Phi_j(\bar{z}) + \\ &+ (z - \bar{z})\overline{\Phi_j'(z)}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} 2\mu_j \partial_x(u + iv) &= \kappa_j \Phi_j(z) + \Phi_j(\bar{z}) - \\ &- (z - \bar{z})\overline{\Phi_j'(z)}. \end{aligned} \quad (10)$$

На підставі (6) аналітичне продовження функції $\Phi_j(z)$ (8) при великих $|z|$ матиме вигляд

$$\Phi_j(z) = -\Gamma_j - \Gamma'_j + O(1/z^2). \quad (11)$$

Враховуючи (9), з крайових умов (1)-(2) отримуємо таку задачу лінійного спряження:

$$\begin{aligned} &(\Phi_1(x) + \Phi_2(x))^+ - \\ &-(\Phi_1(x) + \Phi_2(x))^- = 0, \\ &x \in \tilde{L}, \end{aligned} \quad (12)$$

розв'язавши яку одержимо

$$\theta(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) = (P_1 + P_2 - 2q)/4. \quad (13)$$

Введемо функцію

$$\Phi(z) = \mu_{3-j}\kappa_j\Phi_j(z) - \mu_j\Phi_{3-j}(z), \quad (14)$$

тоді, як видно з другої крайової умови (1) та залежності (10), вона задовольняє крайовій умові

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = 0, \quad x \in L'. \quad (15)$$

Звідси, враховуючи (6), (11), (14) і (7) при великих $|x|$, отримаємо

$$\begin{aligned} &\mu_1(1 + \kappa_2)P_2 - \mu_2(1 + \kappa_1)P_1 = \\ &= [3(\mu_1 - \mu_2) + \mu_2\kappa_1 - \mu_1\kappa_2]q. \end{aligned} \quad (16)$$

На підставі (13) і (14) знайдемо вирази для функцій $\Phi_1(z)$ і $\Phi_2(z)$ через введені функції $\theta(z)$ і $\Phi(z)$

$$\Phi_j(z) = \begin{cases} A_j^{-1}(\mu_j\theta(z) + \Phi(z)), & z \in S_j, \\ A_{3-j}^{-1}(\mu_j\kappa_{3-j}\theta(z) - \Phi(z)), & z \in S_{3-j}, \end{cases} \quad (17)$$

де $A_j = \mu_j + \mu_{3-j}\kappa_j$.

Крайову умову (2) подамо так:

$(\sigma_y - i\tau_{xy})^+ = f(x)$, $x \in \tilde{L}$, з якої на підставі (9) і (17) отримаємо

$$\Phi^+(x) - g\Phi^-(x) = -A\theta(x) + A_1f(x), \quad (18)$$

$$\Phi_0(z) = A_1(a_1z + a_1b_1 + a_2 + (b_1a_2 + b_2a_1 + a_3)/z + \dots), \quad (24)$$

де

$$b_1 = -2i\beta(d - a), \quad b_2 = 4ad\beta - 0,5(a^2 + d^2)(1 + 4\beta^2),$$

$$x \in \tilde{L},$$

$$f(x) = \sigma_{01} - i\tau_{01}, \quad x \in L'_1,$$

$$f(x) = \sigma_{01} + i\tau_{01}, \quad x \in L''_1,$$

$$f(x) = \sigma_{02} - i\tau_{02}, \quad x \in L'_2,$$

$$f(x) = \sigma_{02} + i\tau_{02}, \quad x \in L''_2,$$

$$f(x) = \sigma_Y \tilde{b}_1, \quad x \in L,$$

$$A = \mu_1\mu_2(1 - \kappa_1\kappa_2)A_2^{-1}, \quad g = -A_1A_2^{-1}.$$

Якщо ввести функцію

$$\Phi_0(z) = \Phi(z) + A\theta(z)/(1 - g), \quad (19)$$

то вона, як випливає з (18), є розв'язком такої крайової задачі:

$$\Phi_0^+(x) - g\Phi_0^-(x) = A_1f(x), \quad x \in \tilde{L}. \quad (20)$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (20), одержимо

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) = A_1X_0(z) &[\sigma_Y \tilde{b}_1g(L, z) + \\ &+ \sigma_{01}g(L_1, z) + \sigma_{02}g(L_2, z) - \\ &- \tau_{01}ig(L'_1, z) + \tau_{01}ig(L''_1, z) - \\ &- \tau_{02}ig(L'_2, z) + \tau_{02}ig(L''_2, z)], \end{aligned} \quad (21)$$

де

$$\beta = \frac{\ln|g|}{-2\pi},$$

$$g(L, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{dt}{X_0^+(t)(t - z)},$$

$$X_0(z) = \frac{[(z + a)(z - d)]^{0,5+i\beta}}{[(z + d)(z - a)]^{-0,5+i\beta}}. \quad (22)$$

Враховуючи (6), (11), (13), (14), (19), для функції $\Phi_0(z)$ при великих $|z|$ має місце розвинення

$$\Phi_0(z) = A_1q/(1 - g) + O(1/z^2). \quad (23)$$

З іншого боку, на підставі (21) при великих $|z|$ отримаємо

$$\begin{aligned}
a_1 &= ie^{\beta\pi} \left[-\sigma_Y \tilde{b}_1 I_s^{bc} - \sigma_{01} I_s^{ab} - \sigma_{02} I_s^{cd} + \tau_{01} I_c^{ab} - \tau_{02} I_c^{cd} \right] / \pi, \\
a_2 &= e^{\beta\pi} \left[\sigma_Y \tilde{b}_1 I_{ct}^{bc} + \sigma_{01} I_{ct}^{ab} + \sigma_{02} I_{ct}^{cd} + \tau_{01} I_{st}^{ab} - \tau_{02} I_{st}^{cd} \right] / \pi, \\
a_3 &= ie^{\beta\pi} \left[-\sigma_Y \tilde{b}_1 I_{st2}^{bc} - \sigma_{01} I_{st2}^{ab} - \sigma_{02} I_{st2}^{cd} + \tau_{01} I_{ct2}^{ab} - \tau_{02} I_{ct2}^{cd} \right] / \pi, \\
I_{\rho}^{km} &= \int_k^m g_{\rho}(t) dt, \quad I_{\rho t}^{km} = \int_k^m g_{\rho}(t) t dt, \quad I_{\rho t^2}^{km} = \int_k^m g_{\rho}(t) t^2 dt,
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
g_c(t) &= b_3^{-1}(t) \cos b(t), \quad g_s(t) = b_3^{-1}(t) \sin b(t), \quad b_3(t) = \sqrt{(t^2 - a^2)(d^2 - t^2)}, \\
b(t) &= \beta \ln \left\{ \left[(t+a)(d-t) \right] / \left[(t-a)(t+d) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Тут індекс ρ набуває двох значень c чи s , а $km - ab, bc, cd$.

Враховуючи (23) і (24), отримаємо

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0, \quad a_2 = q/(1-g), \\
a_3 &= 2i\beta(d-a)q/(1-g). \tag{26}
\end{aligned}$$

Систему алгебричних рівнянь (25), (26) стосовно σ_{0j} і τ_{0j} запишемо так:

$$\begin{aligned}
\sigma_Y \tilde{b}_1 I_s^{bc} + \sigma_{01} I_s^{ab} + \sigma_{02} I_s^{cd} - \\
-\tau_{01} I_c^{ab} + \tau_{02} I_c^{cd} = 0, \tag{27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_Y \tilde{b}_1 I_{ct}^{bc} + \sigma_{01} I_{ct}^{ab} + \sigma_{02} I_{ct}^{cd} + \\
+\tau_{01} I_{st}^{ab} - \tau_{02} I_{st}^{cd} = q\pi e^{-\beta\pi} (1-g), \tag{28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\sigma_Y \tilde{b}_1 I_{st2}^{bc} - \sigma_{01} I_{st2}^{ab} - \sigma_{02} I_{st2}^{cd} + \\
+\tau_{01} I_{ct2}^{ab} - \tau_{02} I_{ct2}^{cd} = \frac{2\beta\pi(d-a)}{(1-g)e^{\beta\pi}} q. \tag{29}
\end{aligned}$$

$$\sigma_{yy}^{\pm}(x) = \sigma_{01}, \quad \sigma_{xy}^{\pm}(x) = -\tau_{01}, \quad x \in (a, b),$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^+(x) &= b_4(\sigma_{01} - q) + P_1 + 2b_3(x) \left[(\sigma_Y \tilde{b}_1 - \sigma_{01}) b_5^{bc}(x) + (\sigma_{02} - \sigma_{01}) b_5^{cd}(x) + \right. \\
&\quad \left. + \tau_{01} \{ 2b_{6-}^{ab}(x) + b_7^{bc}(x) + b_7^{cd}(x) \} - \tau_{02} b_8^{cd}(x) \right] / \pi, \quad x \in (a, b),
\end{aligned}$$

$$\sigma_{yy}^{\pm}(x) = \sigma_{02}, \quad \sigma_{xy}^{\pm}(x) = \tau_{02}, \quad x \in (c, d), \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^+(x) &= b_4(\sigma_{02} - q) + P_1 + 2b_3(x) \left[(\sigma_Y \tilde{b}_1 - \sigma_{02}) b_5^{bc}(x) + (\sigma_{01} - \sigma_{02}) b_5^{ab}(x) - \right. \\
&\quad \left. - \tau_{02} \{ 2b_{6-}^{cd}(x) + b_7^{bc}(x) + b_7^{ab}(x) \} + \tau_{01} b_8^{ab}(x) \right] / \pi, \quad x \in (c, d),
\end{aligned}$$

де

$$b_4 = (3+g)/(1-g), \quad b_{6\pm}^{km}(x) = \sin b(x) I_{sp}^{km}(x) \pm \cos b(x) I_{cp}^{km}(x),$$

$$b_5^{km}(x) = \sin b(x) (I_{cp}^{km} + I_{cm}^{km}) + \cos b(x) (I_{sp}^{km} - I_{sm}^{km}),$$

$$b_7^{km}(x) = \sin b(x) (I_{sp}^{km} - I_{sm}^{km}) - \cos b(x) (I_{cp}^{km} + I_{cm}^{km}),$$

$$b_8^{km}(x) = \sin b(x) (I_{sp}^{km} + I_{sm}^{km}) - \cos b(x) (I_{cp}^{km} - I_{cm}^{km}),$$

Компоненти тензора напружень вздовж осі Ox знайдемо за формулами

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy}^{\pm} - i\sigma_{xy}^{\pm} &= A_1^{-1} \left[\Phi_0^+(x) - g\Phi_0^-(x) \right], \\
\sigma_{xy}^+ &= A_1^{-1} \operatorname{Re} \left[3\Phi_0^+(x) + g\Phi_0^-(x) \right] + \\
&\quad + P_1 - q(3+g)/(1-g), \tag{30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^+ + \sigma_{xx}^- - 2\sigma_{yy}^{\pm} &= \\
&= P_1 + P_2 - 2q, \quad -\infty < x < \infty.
\end{aligned}$$

Введемо позначення

$$I_{\rho p}^{km}(x) = \int_k^m \frac{g_{\rho}(t)}{(t+x)} dt, \quad I_{\rho m}^{km}(x) = \int_k^m \frac{g_{\rho}(t)}{(t-x)} dt,$$

тоді на підставі залежностей (30) отримано вирази для компонент тензора напружень на дійсній осі, які наведемо через їх громіздкий вигляд тільки у зонах пластичності

$$b_9^{km}(x) = \sin b(x)(I_{cp}^{km} - I_{cm}^{km}) + \cos b(x)(I_{sp}^{km} + I_{sm}^{km}).$$

Задача згину пластини. Введемо комплексні потенціали $\Phi_{3j}(z)$ і $\Psi_{3j}(z)$ для кожної з півплощин S_j та аналітичне продовження функції $\Phi_{3j}(z)$ з області S_j в область S_{3-j} за формулою

$$\Phi_{3j}(z) = -\bar{\Phi}_{3j}(\bar{z}) - z\bar{\Phi}'_{3j}(\bar{z}) - \bar{\Psi}_{3j}(z),$$

тоді згідно з [8] можемо записати

$$\begin{aligned} \partial_x(\partial_x w + i\partial_y w) = \\ = \Phi_{3j}(z) - \Phi_{3j}(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'_{3j}(z)}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$z \in S_j;$$

$$\begin{aligned} 2\tilde{\mu}_j \tilde{f} = \tilde{\kappa}_j \Phi_{3j}(z) + \Phi_{3j}(\bar{z}) - \\ - (z - \bar{z})\overline{\Phi'_{3j}(z)}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$z \in S_j,$$

де

$$\tilde{f} = M_y + i \left(H_{xy} + \int_{-a}^x N_y dx \right),$$

$$\tilde{\mu}_j = -0,75(1 + \nu_j) / E_j h^3,$$

$$\tilde{\kappa}_j = (3 + \nu_j) / (1 - \nu_j),$$

E_j – модуль Юнга.

Для комплексного потенціалу $\Phi_{3j}(z)$ має місце розвинення

$$\Phi_{3j}(z) = O(1/z^2), \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (34)$$

Введемо функції

$$\theta_3(z) = \tilde{\Phi}_{31}(z) + \tilde{\Phi}_{32}(z), \quad z \in S_j, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(z) = \tilde{\mu}_{3-j} \tilde{\kappa}_j \Phi_{3j}(z) - \tilde{\mu}_j \Phi_{33-j}(z), \\ z \in S_j. \end{aligned} \quad (36)$$

З частини крайових умов (3) можемо записати

$$\tilde{f}^+ = \tilde{f}^-, \quad x \in \tilde{L}. \quad (37)$$

Якщо врахувати (33) і (36), то з крайової умови (37) одержимо, що функція $\Phi_3(z)$ задовольняє задачі лінійного спряження

$$\Phi_3^+(x) - \Phi_3^-(x) = 0, \quad x \in \tilde{L},$$

розв'язок якої набув вигляду

$$\Phi_3(z) = 0. \quad (38)$$

Розв'язавши систему алгебричних рівнянь (35) і (36) стосовно $\Phi_{3j}(z)$ та врахувавши (38), отримаємо

$$\Phi_{3j}(z) = \begin{cases} \tilde{A}_j^{-1} \tilde{\mu}_j \theta_3(z), & z \in S_j, \\ \tilde{A}_{3-j}^{-1} \tilde{\mu}_j \tilde{\kappa}_{3-j} \theta_3(z), & z \in S_{3-j}. \end{cases} \quad (39)$$

Тут $\tilde{A}_j = \tilde{\mu}_j + \tilde{\mu}_{3-j} \tilde{\kappa}_j$.

Якщо врахувати крайові умови (3) і (4), а також залежності (32), (33) і (39), то одержимо, що функція $\theta_3(z)$ задовольняє таким крайовим умовам:

$$\theta_3^+(x) - \theta_3^-(x) = 0, \quad x \in L', \quad (40)$$

$$\theta_3^+(x) - \tilde{g} \theta_3^-(x) = \tilde{A}^{-1} \tilde{f}_1(x), \quad x \in \tilde{L},$$

де

$$\tilde{f}_1(x) = \sigma_y \tilde{b}_2, \quad x \in L,$$

$$\tilde{A} = \tilde{\kappa}_1 / (2\tilde{A}_1), \quad \tilde{g} = -\tilde{\kappa}_2 \tilde{A}_1 / (\tilde{A}_2 \tilde{\kappa}_1),$$

$$\tilde{f}_1(x) = M_{0j} + iH_{0j}, \quad x \in L'_j,$$

$$\tilde{f}_1(x) = M_{0j} - iH_{0j}, \quad x \in L''_j.$$

Розв'язок задачі лінійного спряження (40) можна зобразити:

$$\begin{aligned} \theta_3(z) = \tilde{A}^{-1} \tilde{X}_0(z) \left[\sigma_y \tilde{b}_2 \tilde{g}(L, z) + \right. \\ \left. + M_{01} \tilde{g}(L_1, z) + M_{02} \tilde{g}(L_2, z) + \right. \\ \left. + iH_{01} \tilde{g}(L'_1, z) - iH_{01} \tilde{g}(L''_1, z) + \right. \\ \left. + iH_{02} \tilde{g}(L'_2, z) - iH_{02} \tilde{g}(L''_2, z) \right], \end{aligned} \quad (41)$$

де

$$\tilde{\beta} = \frac{\ln|\tilde{g}|}{-2\pi}, \quad \tilde{g}(L, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{dt}{\tilde{X}_0^+(t)(t-z)},$$

$$\tilde{X}_0(z) = \frac{[(z+a)(z-d)]^{0,5+i\tilde{\beta}}}{[(z+d)(z-a)]^{-0,5+i\tilde{\beta}}}. \quad (42)$$

Розвинення функції $\theta_3(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ знайдемо двояко, враховуючи формули (35) і (34)

$$\theta_3(z) = O(1/z^2) \quad (43)$$

та залежність (41)

$$\theta_3(z) = \tilde{A}^{-1} (\tilde{a}_1 z + \tilde{a}_1 b_1 + \tilde{a}_2 + (b_1 \tilde{a}_2 + b_2 \tilde{a}_1 + \tilde{a}_3) / z + \dots). \quad (44)$$

Тут

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= ie^{\tilde{\beta}\pi} \left[-\sigma_Y \tilde{b}_2 \tilde{I}_s^{bc} - M_{01} \tilde{I}_s^{ab} - M_{02} \tilde{I}_s^{cd} - H_{01} \tilde{I}_c^{ab} + H_{02} \tilde{I}_c^{cd} \right] / \pi, \\ \tilde{a}_2 &= e^{\tilde{\beta}\pi} \left[\sigma_Y \tilde{b}_2 \tilde{I}_{ct}^{bc} + M_{01} \tilde{I}_{ct}^{ab} + M_{02} \tilde{I}_{ct}^{cd} - H_{01} \tilde{I}_{st}^{ab} + H_{02} \tilde{I}_{st}^{cd} \right] / \pi, \\ \tilde{a}_3 &= ie^{\tilde{\beta}\pi} \left[-\sigma_Y \tilde{b}_2 \tilde{I}_{st2}^{bc} - M_{01} \tilde{I}_{st2}^{ab} - M_{02} \tilde{I}_{st2}^{cd} - H_{01} \tilde{I}_{ct2}^{ab} + H_{02} \tilde{I}_{ct2}^{cd} \right] / \pi. \end{aligned} \quad (45)$$

Вирази для \tilde{I}_ρ^{km} , $\tilde{I}_{\rho t}^{km}$, $\tilde{I}_{\rho t2}^{km}$ отримано із виразів для I_ρ^{km} , $I_{\rho t}^{km}$, $I_{\rho t2}^{km}$ заміною $\beta \rightarrow \tilde{\beta}$.

На підставі (43) і (44) запишемо

$$\tilde{a}_1 = 0, \quad \tilde{a}_2 = 0, \quad a_3 = 0. \quad (46)$$

Підставляючи (45) у (46), отримано систему лінійних алгебричних рівнянь стосовно M_{0j} і H_{0j}

$$\begin{aligned} \sigma_Y \tilde{b}_2 I_s^{bc} + M_{01} I_s^{ab} + M_{02} I_s^{cd} + \\ + H_{01} I_c^{ab} - H_{02} I_c^{cd} = 0, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \sigma_Y \tilde{b}_2 I_{ct}^{bc} + M_{01} I_{ct}^{ab} + M_{02} I_{ct}^{cd} - \\ - H_{01} I_{st}^{ab} + H_{02} I_{st}^{cd} = 0, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} -\sigma_Y \tilde{b}_2 I_{st2}^{bc} - M_{01} I_{st2}^{ab} - M_{02} I_{st2}^{cd} - \\ - H_{01} I_{ct2}^{ab} + H_{02} I_{ct2}^{cd} = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Згинальні та крутні моменти на дійсній осі визначимо за формулами

$$\begin{aligned} M_y^\pm + iH_{xy}^\pm &= \tilde{A} \left[\theta_3^+(x) - \tilde{g} \theta_3^-(x) \right], \\ M_x^+ &= \tilde{A} \operatorname{Re} \left[d_1 \theta_3^+(x) + \tilde{g} \theta_3^-(x) \right], \\ M_x^- &= -\tilde{A} \operatorname{Re} \left[\theta_3^+(x) + \tilde{g} d_2 \theta_3^-(x) \right], \end{aligned} \quad (50)$$

$$d_j = (\tilde{\kappa}_j - 2) / \tilde{\kappa}_j, \quad c_j = (\tilde{\kappa}_j - 1) / \tilde{\kappa}_j.$$

Якщо врахувати вирази для функцій $\theta_3(z)$ (41), то на підставі (48) отримано моменти на всій дійсній осі, а наведено у пластичних зонах

$$M_y^\pm(x) = M_{01}, \quad H_{xy}^\pm(x) = -H_{01}, \quad x \in (a, b),$$

$$\begin{aligned} M_x^+(x) &= M_{01} (d_1 + \tilde{g}) / (1 - \tilde{g}) + c_1 b_3(x) \left[(\sigma_Y \tilde{b}_2 - M_{01}) \tilde{b}_5^{bc}(x) + (M_{02} - \right. \\ &\left. - M_{01}) \tilde{b}_5^{cd}(x) + H_{01} \{ 2\tilde{b}_{6-}^{ab}(x) + \tilde{b}_7^{bc}(x) + \tilde{b}_7^{cd}(x) \} - H_{02} \tilde{b}_8^{cd}(x) \right] / \pi, \quad x \in (a, b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x^-(x) &= -M_{01} (1 + d_2 \tilde{g}) / (1 - \tilde{g}) - c_2 b_3(x) \left[(\sigma_Y \tilde{b}_2 - M_{01}) \tilde{b}_5^{bc}(x) + (M_{02} - \right. \\ &\left. - M_{01}) \tilde{b}_5^{cd}(x) + H_{01} \{ 2\tilde{b}_{6-}^{ab}(x) + \tilde{b}_7^{bc}(x) + \tilde{b}_7^{cd}(x) \} - H_{02} \tilde{b}_8^{cd}(x) \right] / \pi, \quad x \in (a, b), \end{aligned}$$

$$M_y^\pm(x) = M_{02}, \quad H_{xy}^\pm(x) = H_{02}, \quad x \in (c, d), \quad (51)$$

$$\begin{aligned} M_x^+(x) &= M_{02} (d_1 + \tilde{g}) / (1 - \tilde{g}) + c_1 b_3(x) \left[(\sigma_Y \tilde{b}_2 - M_{02}) \tilde{b}_5^{bc}(x) + (M_{01} - \right. \\ &\left. - M_{02}) \tilde{b}_5^{ab}(x) - H_{02} \{ 2\tilde{b}_{6-}^{cd}(x) + \tilde{b}_7^{bc}(x) + \tilde{b}_7^{ab}(x) \} + H_{01} \tilde{b}_8^{ab}(x) \right] / \pi, \quad x \in (c, d), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x^-(x) &= -M_{02} (1 + d_2 \tilde{g}) / (1 - \tilde{g}) - c_2 b_3(x) \left[(\sigma_Y \tilde{b}_2 - M_{02}) \tilde{b}_5^{bc}(x) + (M_{01} - \right. \\ &\left. - M_{02}) \tilde{b}_5^{ab}(x) - H_{02} \{ 2\tilde{b}_{6-}^{cd}(x) + \tilde{b}_7^{bc}(x) + \tilde{b}_7^{ab}(x) \} + H_{01} \tilde{b}_8^{ab}(x) \right] / \pi, \quad x \in (c, d), \end{aligned}$$

де вирази для $\tilde{b}_5^{km}(x)$, $\tilde{b}_{6\pm}^{km}(x)$, $\tilde{b}_7^{km}(x)$, $\tilde{b}_8^{km}(x)$, $\tilde{b}_9^{km}(x)$ отримаємо із виразів для $b_5^{km}(x)$, $b_6^{km}(x)$, $b_7^{km}(x)$, $b_8^{km}(x)$, $b_9^{km}(x)$ заміною $\beta \rightarrow \tilde{\beta}$.

4. Числовий аналіз та висновки

Числовий аналіз задачі проведено для нитесилу $\sigma_Y^{(1)} = 278$ МПа, $E_1 = 1,38 \cdot 10^5$ МПа

та технічно чистого заліза $\sigma_Y^{(2)} = 130$ МПа, $E_2 = 2,08 \cdot 10^5$ МПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$. На рис. 2-7 графіки наведені на верхній основі пластини ($z = -h$).

Скористаємося умовою пластичності Треска-Сен-Венана [1] у вигляді поверхневого шару [2, 3]

$$\max \{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2| \} = 2\tau_Y = \sigma_Y, \quad (52)$$

де

$$\sigma_{1,2} = \left(\tilde{\sigma}_{xx} + \tilde{\sigma}_{yy} \pm \sqrt{(\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\sigma}_{yy})^2 + 4(\tilde{\sigma}_{xy})^2} \right) / 2,$$

$$\tilde{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} + \sigma_{xx}^3, \quad \tilde{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy} + \sigma_{yy}^3,$$

$$\tilde{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy} + \sigma_{xy}^3, \quad \sigma_{xx}^3 = -\frac{3M_x}{2h^2},$$

$$\sigma_{yy}^3 = -\frac{3M_y}{2h^2}, \quad \sigma_{xy}^3 = -\frac{3H_{xy}}{2h^2}, \quad \sigma_{xy}^3 = -\frac{3H_{xy}}{2h^2}$$

та умовою однозначності переміщень для плоскої задачі та задачі згину

$$\int_a^d [\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x)] dx = 0,$$

$$\int_a^d [\theta_0^+(x) - \theta_0^-(x)] dx = 0. \quad (53)$$

Розкриття тріщини δ у вершинах b і c на верхній основі пластини знайдемо за формулами $\delta_b = \delta_{ab} + \delta_{ab}^3$, $\delta_c = \delta_{dc} + \delta_{dc}^3$.

$$\delta_{ab} = \frac{A_1(g-1)^b}{4\pi g \mu_1 \mu_2 a} \int_a^b b_3(x) \left[(\sigma_Y \tilde{b}_1 - \sigma_{01}) \tilde{b}_7^{bc}(x) + (\sigma_{02} - \sigma_{01}) \tilde{b}_7^{cd}(x) - \tau_{01} \{ 2\tilde{b}_{6+}^{ab}(x) + \tilde{b}_5^{bc}(x) + \tilde{b}_5^{cd}(x) \} + \tau_{02} \tilde{b}_9^{cd}(x) \right] dx,$$

$$\delta_{ab}^3 = h \frac{\tilde{A}(\tilde{g}-1)^b}{2\pi \tilde{g}} \int_a^b b_3(x) \left[(\sigma_Y \tilde{b}_2 - M_{01}) \tilde{b}_7^{bc}(x) + (M_{02} - M_{01}) \tilde{b}_7^{cd}(x) - H_{01} \{ 2\tilde{b}_{6+}^{ab}(x) + \tilde{b}_5^{bc}(x) + \tilde{b}_5^{cd}(x) \} + H_{02} \tilde{b}_9^{cd}(x) \right] dx,$$

$$\delta_{dc} = \frac{A_1(g-1)^c}{4\pi g \mu_1 \mu_2 d} \int_b^c b_3(x) \left[(\sigma_Y \tilde{b}_1 - \sigma_{02}) \tilde{b}_7^{bc}(x) + (\sigma_{01} - \sigma_{02}) \tilde{b}_7^{ab}(x) + \tau_{02} \{ 2\tilde{b}_{6+}^{cd}(x) + \tilde{b}_5^{bc}(x) + \tilde{b}_5^{ab}(x) \} - \tau_{01} \tilde{b}_9^{ab}(x) \right] dx,$$

$$\delta_{dc}^3 = h \frac{\tilde{A}(\tilde{g}-1)^c}{2\pi \tilde{g}} \int_b^c b_3(x) \left[(\sigma_Y \tilde{b}_2 - M_{02}) \tilde{b}_7^{bc}(x) + (M_{01} - M_{02}) \tilde{b}_7^{ab}(x) + H_{02} \{ 2\tilde{b}_{6+}^{cd}(x) + \tilde{b}_5^{bc}(x) + \tilde{b}_5^{ab}(x) \} - H_{01} \tilde{b}_9^{ab}(x) \right] dx.$$

Отриману систему рівнянь (27)-(29), (47)-(49), (52), (53) відносно шуканих величин розв'язуємо за допомогою методу Ньютона, а інтеграли обчислено методом механічних квадратур [7].

На рис. 2-7 суцільним лініям відповідають w_1^* , δ_1^* , а пунктирним – w_2^* , δ_2^* , причому використано обезрозмірення $w_j^* = w_j/l$, $\delta_j^* = \delta_j E_1 / (l \sigma_Y)$, $q^* = q / \sigma_Y$, $P_1^* = P_1 / \sigma_Y$, $s^* = s/l$, $h_1^* = h_1/h$.

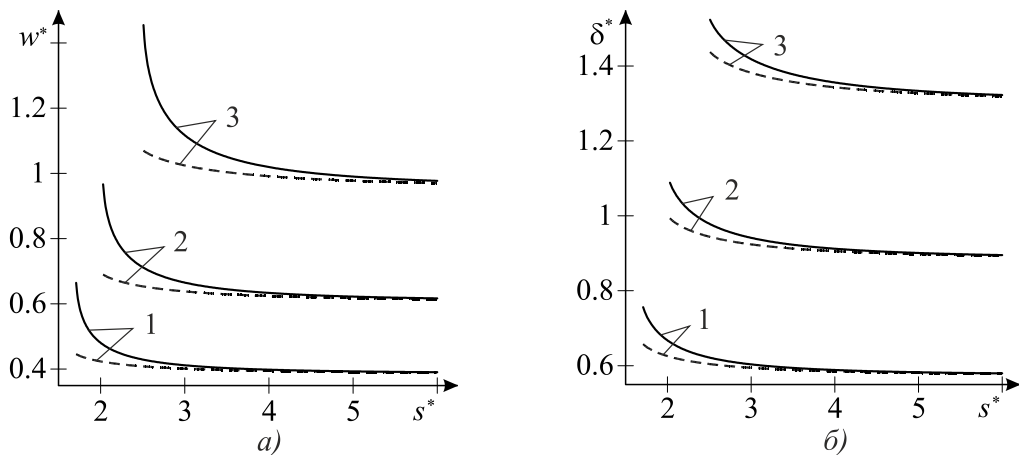


Рис. 2. Графічна залежність довжин зон пластичності w_j^* та розкриття δ_j^* від відстані між тріщинами s^* при різних q^*

Для $h_1^* = 0,8$, $P_1^* = 0,1$ на рис. 2 подано графічні залежності довжин зон пластичності w_j^* (рис. а) та розкриття δ_j^* (рис. б) від відстані між тріщинами s^* при різних значеннях навантаження q^* , причому кривим 1,

2, 3 відповідає $q^* = 0,4; 0,5; 0,6$. З віддаленням тріщин виходимо на результати для однієї тріщини [5], а при збільшенні навантаження шукані величини зростають. Крім того, довжина пластичної зони та розкриття тріщин у внутрішній вершині більші, ніж у зовнішній.

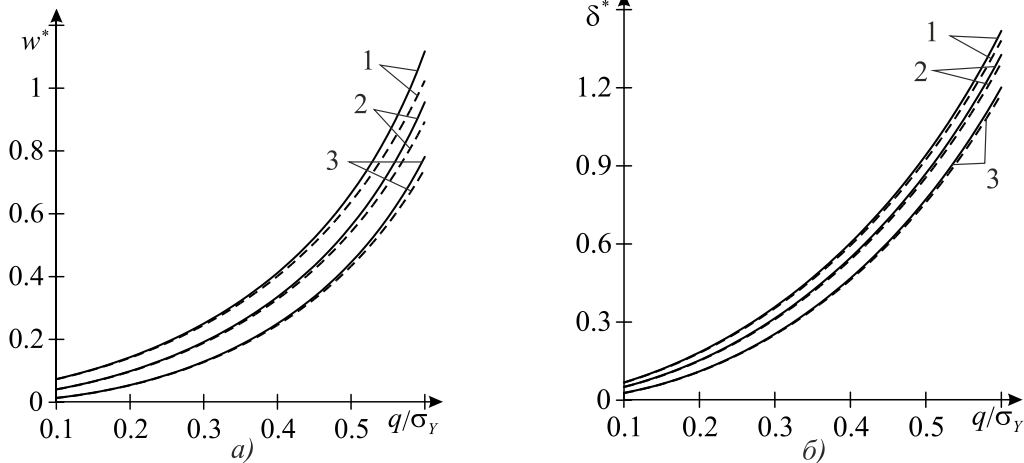


Рис. 3. Графічна залежність довжин зон пластичності w_j^* та розкриття δ_j^* від навантаження q^* при різному h_1^*

Для $P_1^* = 0,1$, $s^* = 3$ на рис. 3 зображено графічні залежності довжин зон пластичності w_j^* (рис. а) і розкриття δ_j^* (рис. б) від навантаження q^* при різному значенні h_1^* .

Криві 1-3 побудовані при $h_1^* = 0,8; 0,9; 1$. Числовий аналіз показав, що для наскрізних тріщин довжини зон пластичності на верхній основі менші, ніж для поверхневих тріщин.

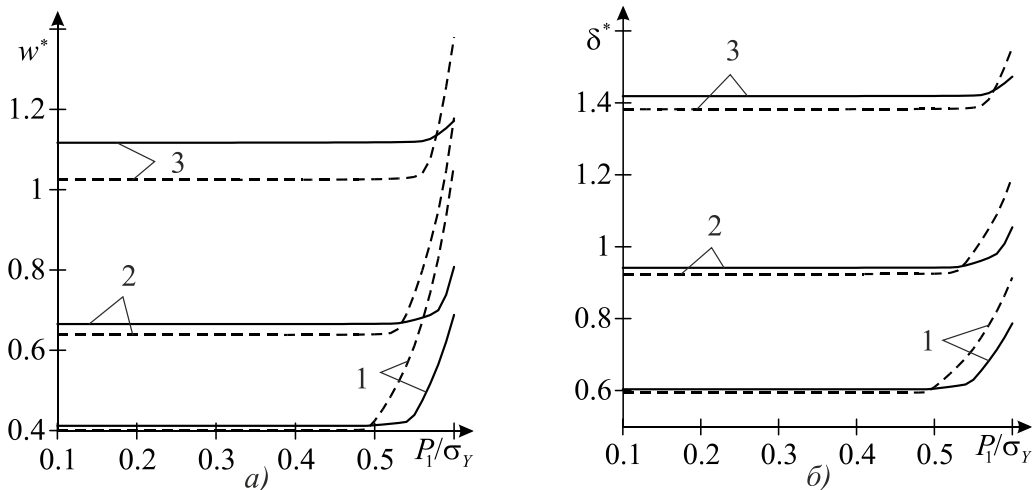


Рис. 4. Графічна залежність довжин зон пластичності w_j^* та розкриття δ_j^* від зусилля P_1^* при різних значеннях q^*

Для $h_1^* = 0,8$, $s^* = 3$ на рис. 4 подано графічні залежності довжин зон пластичності w_j^* (рис. а) та розкриття δ_j^* (рис. б) від навантаження P_1^* при різних значеннях нормального навантаження q^* , причому кривим

1-3 відповідає $q^* = 0,4; 0,5; 0,6$. Числовий аналіз показує, що вплив навантаження P_1^* на дослідження параметрів w_j^* , δ_j^* проявляється тільки при великому його значенні.

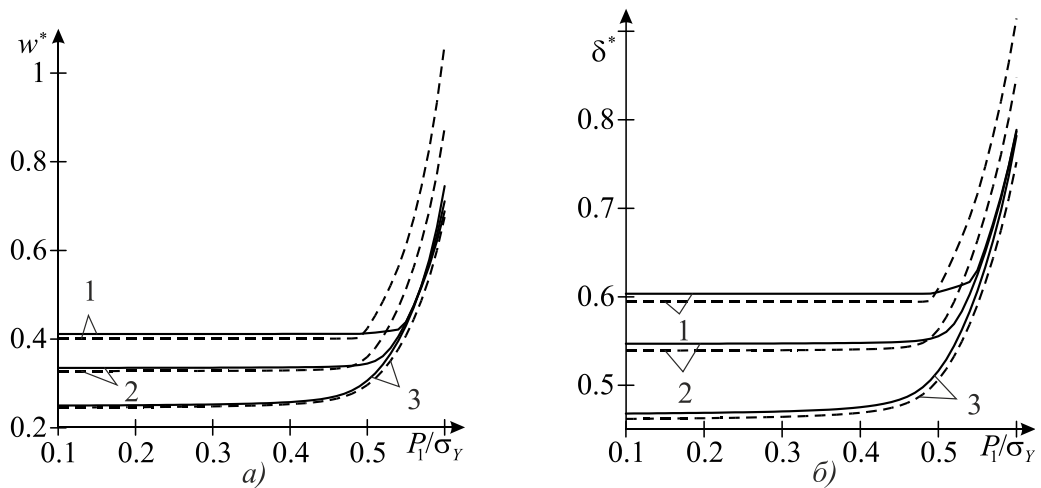


Рис. 5. Графічна залежність довжин зон пластичності w_j^* та розкриття δ_j^* від зведеного зусилля P_1^* при різному h_1^*

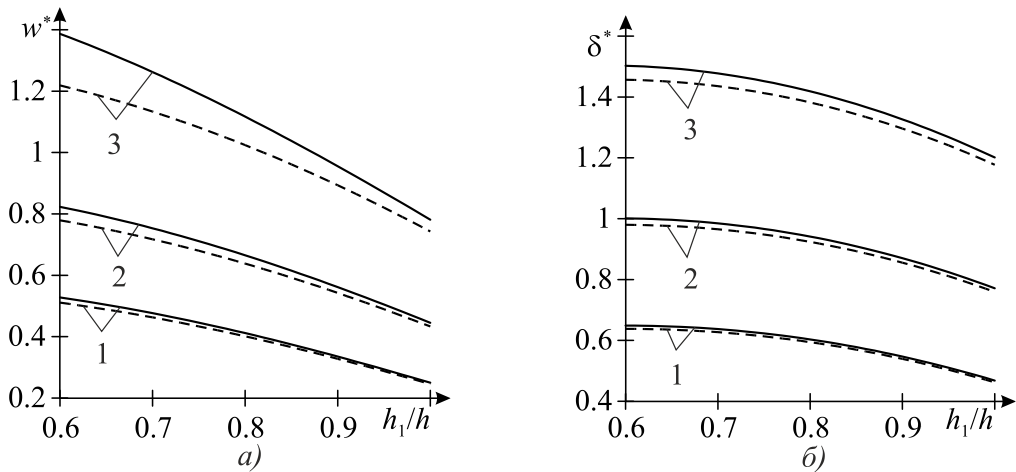


Рис. 6. Графічна залежність довжин зон пластичності w_j^* та розкриття δ_j^* від h_1^* при різних значеннях зусилля q^*

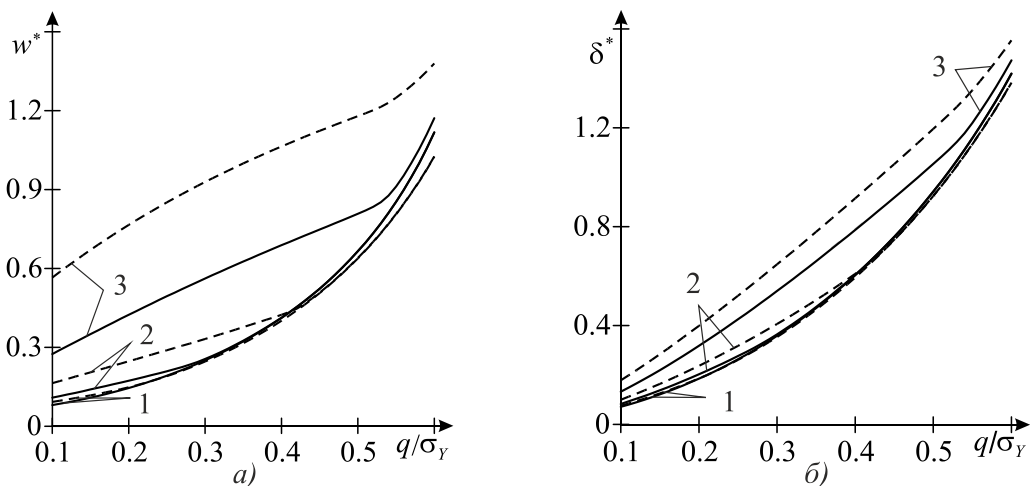


Рис. 7. Графічна залежність довжин зон пластичності w_j^* та розкриття δ_j^* від зусилля q^* при різному P_1^*

Для $q^* = 0,4$, $s^* = 3$ на рис. 5 подано графічні залежності довжин зон пластичності w_j^* (рис. а) та розкриття δ_j^* (рис. б) від навантаження P_1^* при різній глибині тріщин

h_1^* , причому кривим 1-3 відповідає $h_1^* = 0,8; 0,9; 1$. У випадку наскрізних тріщин $h_1^* = 1$ отримуємо відомі результати із статті [6].

Для $P_1^* = 0,1$, $s^* = 3$ на рис. 6 подано графічні залежності довжин зон пластичності w_j^* (рис. а) та розкриття δ_j^* (рис. б) від глибини тріщин h_1^* при різних значеннях нормального навантаження q^* , причому кривим 1-3 відповідає відповідно $q^* = 0,4; 0,5; 0,6$. Бачимо, що на верхній осн. пластини шукані значення спадають до результатів наскрізних тріщин [6].

Для $h_1^* = 0,8$, $s^* = 3$ на рис. 7 зображено графічні залежності довжин зон пластичності w_j^* (рис. а) і розкриття δ_j^* (рис. б)

від навантаження q^* при різних значеннях навантаження P_1^* . Криві 1-3 побудовані при $P_1^* = 0,4; 0,5; 0,6$. Числовий аналіз показав, що навантаження q^* на довжини зон пластичності та розкриття суттєво впливає.

На основі числового аналізу встановлено, що при віддаленні тріщини одна від одної отримуємо результати для однієї поверхневої тріщини [5] і шукані величини зменшуються, а при нульовій величині перемички під тріщинами виходимо на результати для наскрізних тріщин [6].

Література

1. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пластичності та міцності. Львів: Світ, 1999. Т. 1. 531 с.
2. Кир'ян В. І., Осадчук В. А., Николишин М. М. Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій. Львів: СПОЛОМ, 2007. 320 с.
3. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. Львів: СПОЛОМ, 2003. 320 с.
4. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 708 с.
5. Николишин М., Опанасович В., Куротчин Л., Слободян М. Двовісний розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів та ненаскрізною тріщиною в ній з урахуванням пластичних зон біля її вершин. *Вісник Львів. нац. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 2012. Вип. 72. С. 29–45.
6. Николишин М. М., Опанасович В. К., Куротчин Л. Р., Слободян М. С. Двовісний розтяг кусково-однорідної пластини з двома тріщинами на межі поділу матеріалів з урахуванням пластичних зон біля їхніх вершин. *Фізико-хімічна механіка матеріалів.* 2014. № 6 С. 67–72.
7. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распространение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 444 с.
8. Пруссов И. А. Метод сопряжения в теории плит. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. 256 с.
9. Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. Киев: Наук. думка, 1989. 248с.
10. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружності рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. 716 с.

References

1. Bozhydarnyk, V. V. & Sulim, G. T. (1999). Elements of the theory of plasticity and strength. Lviv: Svit.
2. Kyryjan, V. I., Osadchuk, V. A. & Nykolyshyn, M. M. (2007). Fracture mechanics of metal welded joints. Lviv: SPOLOM.
3. Kushnir, R. M., Nikolishin, M. M. & Osadchuk, V. A. (2003). Elastic and elastic-plastic shells with boundary condition defects. Lviv: SPOLOM.
4. Mushelishvili, N. I. (1966). Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Moscow: Nauka.
5. Nykolyshyn, M. M., Opanasovych, V. K., Kurotchyn, L. R. & Slobodyan, M. S. (2012). Biaxial tension of piecewise-homogeneous isotropic plate with a straight boundary between material and non-

- through crack in it, taking into account the plastic zone at its edges. *Bulletin of Lviv. Univ. Series meh.-mate*, No. 72, pp. 29–45.
6. Nykolyshyn, M. M., Opanasovych, V. K., Kurotchyn, L. R. & Slobodyan, M. S. (2014). Biaxial tension piecewise homogeneous plate with two cracks at the interface of materials based on plastic zones near their vertices. *Fiziko-himichna mehanika materialiv*, No 6, pp. 67–72.
 7. Panasyuk, V. V., Savruk, M. P. & Datsishin, A. P. (1976). *Distribution of stresses around cracks in plates and shells*. Kiev: Naukova Dumka.
 8. Prusov, I. A. (1975). *The method of conjugation in the theory of plates*. Minsk: Izdatelstvo Beloruskogo universitetu.
 9. Savruk, M. P. (1981). *Two-dimensional problems of elasticity for bodies with cracks*. Kiev: Naukova Dumka.
 10. Sulym, G. T. (2007). *Fundamentals of the mathematical theory of thermoelastic equilibrium deformed solids with thin inclusions*. Lviv: Research and Publishing Center of Shevchenko.