УДК 517.9 DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-16

ЗБУРЕННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛЯПУНОВА У ПРОСТОРІ ГІЛЬБЕРТА

Є. В. Панасенко, А. І. Анохін, А. А. Гужва, М. М. Чміль

Запорізький національний університет
panasenko.yevgeniy@gmail.com

Ключові слова:
крайова задача, псевдообернений оператор, рівняння Ляпунова, простір Гільберта.

Рівняння Ляпунова має багато застосувань у квантовій механіці, теорії оптимального керування та теорії ігор, варіаційному численні. У статті розглянуто збурену крайову задачу для рівняння Ляпунова у критичному випадку у просторі Гільберта. Досліджено задачу у припущенні, коли породжуюча крайова задача не має розв'язків. Множина розв'язків будується за допомогою теорії псевдообернених і нормально розв'язних операторів. Отримано достатні умови біфуркації збуреної крайової задачі для рівняння Ляпунова, коли $\left[A(t),Z(t)\right]=AZ(t)-Z(t)A$, побудовано збіжний ітераційний алгоритм. Розв'язок $Z(t,\varepsilon)\in C^1\left(\left[a,b\right];L\left(H_1\right)\right)\times C\left(0,\varepsilon_0\right]$ шукається для фіксованого $\varepsilon_0>0$. Запропонований підхід до знаходження розв'язків крайової задачі застосовано до крайової задачі у просторі $m=l_\infty$ обмежених числових послідовностей із зліченновимірними матрицями у диференціальному рівнянні.

PERTURBATION OF A BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A LYAPUNOV EQUATION IN A HILBERT SPACE

Ye. V. Panasenko, A. I. Anokhin, A. A. Guzhva, M. M. Chmil

Zaporizhzhia National University
panasenko.yevgeniy@gmail.com

Key words:
boundary-value problem, pseudoinverse operator, Lyapunov equation, Hilbert space.

This article is devoted to the boundary problem for a Lyapunov equation in a Hilbert space. A Lyapunov equation has abundance of applications, e.g. it is used in quantum mechanics, linear theories of Hamiltonian systems, games theory, optimal control theory, variations calculus and in a number of other supplements. The problem is investigated on the assumption that generating boundary-value problem does not have any solutions and the operator that describes linear boundary-value problem is noetherian. Set of solutions is based on pseudoinverse theory [8, 17], normally resolvable operators [2] and the Vishik-Lyusternik method. The condition of bifurcation solution of boundary-value problem for Lyapunov equation in critical case was found given that $\left[A(t),Z(t)\right]=AZ(t)-Z(t)A$.

The solution $Z(t,\varepsilon)\in C^1\left(\left[a,b\right];L\left(H_1\right)\right)\times C\left(0,\varepsilon_0\right]$ can be found for fixed $\varepsilon_0>0$. The paper is the continuation of authors' research [14].It should be noted that boundary problems for Lyapunov and Riccati equations investigate as in finite-dimensional so in infinite-dimensional spaces in set of papers [3, 19-21]. In infinite-dimensional case such problems have been investigated insufficiently. As a rule, such equations investigate in regular case, when the problem has only one solution. In irregular case this equation was investigated (periodical case) in the works of Boichuk O.A. and Krivosheya S.A. [3]. In this paper a Lyapunov equation investigates in operator, matrix case or in the differential-operator case.

In the article [14] sufficient conditions of bifurcation solutions of boundary-value problem for the Lyapunov equation in the Gilbert space were obtained given that generating boundary-value problem has solutions. In the paper [12] a controllability of boundary-value problem for the Lyapunov equation in the Hilbert space was considered. Optimization of boundary-value problem for the Lyapunov equation in the Hilbert space was examined in [15]. Nonlinear boundary-value problem for the Lyapunov equation in L_p space was considered in [16].

In this article an example of boundary-value problem for the countable system of such equations was provided. All necessary and sufficient conditions of the boundary-value problem solutions for the Lyapunov equation in the Gilbert space were found. Suggested approach can be employed in research papers dedicated to boundary-value problems for differential-operator equations of general type.

1. Постановка задачі

Дослідженню крайових задач для диференціальних рівнянь як у скінченновимірному, так і у нескінченновимірному випадках присвячена величезна кількість робіт [3, 11-16, 19-21]. Серед останнього класу добре відомим є рівняння Ляпунова [3]. У статті розглядається задача про достатні умови біфуркації розв'язків крайової задачі для рівняння Ляпунова у просторі Гільберта, коли $[A(t), Z(t)] = AZ(t) - Z(t)A$. Дана робота є продовженням роботи авторів [14].

Розглянемо крайову задачу

$$\dot{Z}(t,\varepsilon) = AZ(t,\varepsilon) - Z(t,\varepsilon)A + \varepsilon C(t)Z(t,\varepsilon) + \Phi(t), \quad (1)$$

$$lZ(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon l_1 Z(\cdot,\varepsilon), \quad (2)$$

де $A \in L(H_1)$ – лінійний обмежений оператор, $\Phi(t), C(t) \in C([a,b]; L(H_1))$ – неперервні оператор-функції, $l, l_1 : C^1([a,b]; L(H_1)) \to H_2$ – лінійні обмежені оператори, ε – малий параметр, $L(H_1)$ – простір лінійних та обмежених операторів, що діють з простору Гільберта H_1 у себе; H_1, H_2 – простори Гільберта, $\alpha \in H_2$. Шукається розв'язок $Z(t,\varepsilon) \in \in C^1([a,b]; L(H_1)) \times C(0,\varepsilon_0]$ для фіксованого $\varepsilon_0 > 0$.

У роботі [14] отримано достатні умови біфуркації розв'язків крайової задачі для рівняння Ляпунова у просторі Гільберта, коли породжуюча крайова задача має розв'язки і не має розв'язків. У роботі [12] досліджено крайову задачу на керованість для рівняння Ляпунова в просторі Гільберта. Задача оптимізації крайової задачі для рівняння Ляпунова у просторі Гільберта розглянута у [15]. Нелінійна крайова задача для рівняння Ляпунова в просторі L_p розглянута у [16].

2. Лінійна задача

При $\varepsilon = 0$ отримаємо породжуючу крайову задачу:

$$\dot{Z}_0(t) = AZ_0(t) - Z_0(t)A + \Phi(t), \quad (3)$$

$$lZ_0(\cdot) = \alpha. \quad (4)$$

Загальний розв'язок (3) має вигляд:

$$Z_0(t,\bar{C}_0) = = e^{tA}\bar{C}_0 e^{-tA} + \int_0^t e^{(t-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-t)A}d\tau \quad (5)$$

для всіх $\bar{C}_0 \in L(H_1)$. Переконаємось у цьому:

$$\dot{Z}_0(t,\bar{C}_0) = Ae^{tA}\bar{C}_0 e^{-tA} - e^{tA}\bar{C}_0 e^{-tA}A + \Phi(t) + A\int_0^t e^{(t-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-t)A}d\tau - \int_0^t e^{(t-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-t)A}d\tau A = = AZ_0(t,\bar{C}_0) - Z_0(t,\bar{C}_0)A + \Phi(t),$$

так як

$$\left(\int_0^t e^{(t-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-t)A}d\tau\right)'_t = = \Phi(t) + A\int_0^t e^{(t-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-t)A}d\tau - \int_0^t e^{(t-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-t)A}d\tau.$$

Підставляючи (5) у крайову умову, отримаємо наступне операторне рівняння

$$Q\bar{C}_0 = g_0,$$

де $QC = le^{\cdot A}Ce^{-\cdot A}$. Тоді

$$g_0 = \alpha - l\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-\cdot)A}d\tau .$$

Розглянемо випадок, коли $R(Q) = \overline{R(Q)}$; тоді, розв'язок існує тоді й тільки тоді, коли виконується наступна умова [2]:

$$P_{N(Q^*)}g_0 = 0, \quad (6)$$

де $P_{N(Q^*)}$ – проєктор на ядро оператора Q^*, спряженого до оператора Q. Ця умова гарантує належність правої частини рівняння $Q\overline{C}_0 = g_0$ множині значень оператора Q:

$$\left[\alpha - l\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-\cdot)A}d\tau\right] \in R(Q).$$

У цьому випадку загальний розв'язок операторного рівняння $Q\overline{C}_0 = g_0$ матиме вигляд:

$$\overline{C}_0 = Q^+ g_0 + P_{N(Q)}C_0, C_0 \in L(H_1).$$

Тоді загальний розв'язок задачі (3), (4) матиме вигляд:

$$Z_0(t, C_0) = e^{tA}P_{N(Q)}C_0e^{-tA} + (G[\Phi,\alpha])(t), \quad (7)$$

де

$$(G[\Phi,\alpha])(t) =$$

$$= e^{tA}Q^+\left(\alpha - l\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-\cdot)A}d\tau\right)e^{-tA} +$$

$$+\int_0^t e^{(t-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-t)A}d\tau .$$

Таким чином, отримали теорему.

Теорема 1. Нехай оператор $QC = le^{\cdot A}Ce^{-\cdot A}$, що діє з гільбертового простору H_1 у гільбертовий простір H_2, має псевдообернений. Крайова задача (3), (4) має розв'язки тоді і тільки тоді, коли виконується умова (6). При цьому розв'язки крайової задачі (3), (4) мають вигляд (7).

3. Збурена задача

Припустимо, що у породжуючій крайовій задачі (3), (4) не існує розв'язків. Це означає, що умова розв'язності $P_{N(Q^*)}g_0 = 0$ не виконується. В цьому випадку розв'язок шукаємо у вигляді ряду:

$$Z(t,\varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty}\varepsilon^i Z_i(t). \quad (8)$$

Підставимо ряд (8) у крайову задачу (1), (2) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε. При ε^{-1} приходимо до однорідної крайової задачі:

$$\dot{Z}_{-1}(t) = AZ_{-1}(t) - Z_{-1}(t)A, \quad (9)$$

$$\ell Z_{-1}(\cdot) = 0. \quad (10)$$

Задача (9), (10) має розв'язок:

$$Z_{-1}(t, C_{-1}) = e^{tA}P_{N(Q)}C_{-1}e^{-tA} \quad (11)$$

для довільного елемента $C_{-1} \in H_1$, який буде знайдений нижче. Операторне рівняння (9) має розв'язок:

$$Z_{-1}(t, \overline{C}_{-1}) = e^{tA}\overline{C}_{-1}e^{-tA}. \quad (12)$$

Переконаємося у справедливості представлення (11):

$$\dot{Z}_{-1}(t, \overline{C}_{-1}) = Ae^{tA}\overline{C}_{-1}e^{-tA} - e^{tA}\overline{C}_{-1}e^{-tA}A.$$

Підставимо (12) у крайову умову (10), отримаємо наступне операторне рівняння

$$Q\overline{C}_{-1} = 0,$$

де $Q\overline{C}_{-1} = le^{\cdot A}\overline{C}_{-1}e^{-\cdot A}$. Тоді

$$\overline{C}_{-1} = P_{N(Q)}C_{-1}. \quad (13)$$

Підставляючи (13) у (12), отримаємо співвідношення (11). Прирівнюючи коефіцієнти при ε^0, маємо крайову задачу для визначення коефіцієнта $Z_0(t)$:

$$\dot{Z}_0(t, C_{-1}) = AZ_0(t, C_{-1}) - Z_0(t, C_{-1})A +$$

$$+C(t)Z_{-1}(t, C_{-1}) + \Phi(t), \quad (14)$$

$$\ell Z_0(\cdot, C_{-1}) = \alpha + \ell_1 Z_{-1}(\cdot, C_{-1}). \quad (15)$$

Операторне рівняння (14) має розв'язок:

$$Z_0(t, \overline{C}_0) = e^{tA}\overline{C}_0e^{-tA} +$$

$$+\int_0^t e^{(t-\tau)A}\left[C(\tau)Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau)\right]e^{(\tau-t)A}d\tau . \quad (16)$$

Підставляючи $Z_0(t, \overline{C}_0)$ в крайову умову (15), отримаємо наступне операторне рівняння

$$Q\overline{C}_0 = g_0,$$

де $Q\overline{C}_0 = le^{\cdot A}\overline{C}_0e^{-\cdot A}$,

$$g_0 = \alpha + \ell_1 Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) -$$

$$-\ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} \left[C(\tau) Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau) \right] e^{(\tau-\cdot)A} d\tau .$$

У випадку, коли $R(Q) = \overline{R(Q)}$, розв'язок існує тоді й тільки тоді, коли виконується умова (6), або ж враховуючи те що $Z_{-1}(t, C_{-1}) = e^{tA} P_{N(Q)} C_{-1} e^{-tA}$, маємо:

$$B_0 C_{-1} =$$

$$= -P_{N(Q^*)} \left[\alpha - \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau-\cdot)A} d\tau \right], \quad (17)$$

де оператор B_0 має вигляд

$$B_0 C_{-1} = P_{N(Q^*)} \left[\ell_1 e^{\cdot A} P_{N(Q)} C_{-1} e^{-\cdot A} - \right.$$

$$\left. -\ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) e^{\cdot A} P_{N(Q)} C_{-1} e^{-\cdot A} e^{(\tau-\cdot)A} d\tau \right].$$

Рівняння (17) є розв'язним тоді і лише тоді, коли його права частина задовольняє умові

$$P_{N(B_0^*)} P_{N(Q^*)} \left[\alpha - \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau-\cdot)A} d\tau \right] = 0 .$$

Остання умова виконується, якщо буде виконана умова:

$$P_{N(B_0^*)} P_{N(Q^*)} = 0, \quad (18)$$

а операторне рівняння (17) при цьому буде мати хоча б один розв'язок у вигляді:

$$C_{-1} =$$

$$= -B_0^+ P_{N(Q^*)} \left[\alpha - \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau-\cdot)A} d\tau \right]. \quad (19)$$

У цьому випадку розв'язок рівняння $Q\overline{C}_0 = g_0$ матиме вигляд:

$$\overline{C}_0 = Q^+ g_0 + P_{N(Q)} C_0, C_0 \in H$$

або

$$\overline{C}_0 = Q^+ \left\{ \alpha + \ell_1 Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) \right\} -$$

$$-Q^+ \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} \left[C(\tau) Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau) \right] e^{(\tau-\cdot)A} d\tau +$$

$$+ P_{N(Q)} C_0 .$$

Таким чином, розв'язок $Z_0(t, C_0)$ можна записати у наступному вигляді:

$$Z_0(t, C_0) = e^{tA} P_{N(Q)} C_0 e^{-tA} + \overline{Z}_0(t) \quad (20)$$

для довільного елемента $C_0 \in H_1$, який буде знайдений нижче.

$$\overline{Z}_0(t) = e^{tA} \left[Q^+ \left\{ \alpha + \ell_1 Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) \right\} \right] e^{-tA} +$$

$$+ \left(G\left[C(\cdot) Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) + \Phi(\cdot) \right] \right)(t), \quad (21)$$

де оператор Гріна має вигляд:

$$\left(G\left[C(\cdot) Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) + \Phi(\cdot) \right] \right)(t) =$$

$$= \int_0^t e^{(t-\tau)A} \left[C(\tau) Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau) \right] e^{(\tau-t)A} d\tau -$$

$$-e^{tA} \left[Q^+ \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} \left[C(\tau) Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \Phi(\tau) \right] e^{(\tau-\cdot)A} d\tau \right] e^{-tA}. \quad (22)$$

При ε^1 приходимо до визначення коефіцієнта $Z_1(t)$ до крайової задачі

$$\dot{Z}_1(t) = A Z_1(t) - Z_1(t) A + C(t) Z_0(t, C_0),$$

(23)

$$\ell Z_1(\cdot) = \ell_1 Z_0(\cdot, C_0). \quad (24)$$

Операторне рівняння (23) має розв'язок:

$$Z_1(t, \overline{C}_1) = e^{tA} \overline{C}_1 e^{-tA} +$$

$$+ \int_0^t e^{(t-\tau)A} C(\tau) Z_0(\tau, C_0) e^{(\tau-t)A} d\tau . \quad (25)$$

Підставляючи $Z_1(t)$ в крайову умову (24), отримаємо наступне операторне рівняння

$$Q\overline{C}_1 = g_1,$$

де $Q\overline{C}_1 = l e^{\cdot A} \overline{C}_1 e^{-\cdot A}$,

$$g_1 = \ell_1 Z_0(\cdot, C_0) -$$

$$-\ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) Z_0(\tau, C_0) e^{(\tau-\cdot)A} d\tau .$$

У випадку, коли $R(Q) = \overline{R(Q)}$, розв'язок існує тоді й тільки тоді, коли виконується наступна умова $P_{N(Q^*)} g_1 = 0$, або ж враховуючи те, що $Z_0(t, C_0) = e^{tA} P_{N(Q)} C_0 e^{-tA} + \overline{Z}_0(t)$, маємо:

$$B_0 C_0 = -P_{N(Q^*)} \left[\ell_1 \overline{Z}_0(\cdot) - \right.$$

$$\left. -\ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) \overline{Z}_0(\tau) e^{(\tau-\cdot)A} d\tau \right], \quad (26)$$

де оператор B_0 має вигляд:

$$B_0C_0 = P_{N(Q^*)}\Big[\ell_1 e^{\cdot A}P_{N(Q)}C_0 e^{-\cdot A} -$$

$$-\ell\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)e^{\cdot A}P_{N(Q)}C_0 e^{-\cdot A}e^{(\tau-\cdot)A}d\tau\Big].$$

Рівняння (26) належить до рівнянь вигляду (17) і при тій же умові (18) операторне рівняння (26) має хоча б один розв'язок у вигляді:

$$C_0 = -B_0^+ P_{N(Q^*)}\Big[\ell_1 \bar{Z}_0(\cdot) -$$

$$-\ell\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)\bar{Z}_0(\tau)e^{(\tau-\cdot)A}d\tau\Big]. \quad (27)$$

В цьому випадку розв'язок рівняння $Q\bar{C}_1 = g_1$ матиме вигляд:

$$\bar{C}_1 = Q^+ g_1 + P_{N(Q)}C_1,\ C_1 \in H, \quad (28)$$

або

$$\bar{C}_1 = Q^+\ell_1 Z_0(\cdot, C_0) -$$

$$-Q^+\ell\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\big[C(\tau)Z_0(\tau, C_0)\big]e^{(\tau-\cdot)A}d\tau +$$

$$+P_{N(Q)}C_1.$$

Таким чином, розв'язок $Z_1(t)$ можна записати у наступному вигляді:

$$Z_1(t, C_1) = e^{tA}P_{N(Q)}C_1 e^{-tA} + \bar{Z}_1(t) \quad (29)$$

для довільного елемента $C_1 \in H_1$, який буде знайдений нижче.

$$\bar{Z}_1(t) = e^{tA}\big[Q^+\ell_1 Z_0(\cdot, C_0)\big]e^{-tA} +$$

$$+\big(G\big[C(\cdot)Z_0(\cdot, C_0)\big]\big)(t), \quad (30)$$

де оператор Гріна має вигляд:

$$\big(G\big[C(\cdot)Z_0(\cdot, C_0)\big]\big)(t) =$$

$$= \int_0^t e^{(t-\tau)A}C(\tau)Z_0(\tau, C_0)e^{(\tau-t)A}d\tau - e^{tA}\Big[Q^+ \times$$

$$\times \ell\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\big[C(\tau)Z_0(\tau, C_0)\big]e^{(\tau-\cdot)A}d\tau\Big]e^{-tA}. \quad (31)$$

При ε^2 приходимо до визначення коефіцієнта $Z_2(t)$ до крайової задачі:

$$\dot{Z}_2(t) = AZ_2(t) - Z_2(t)A + C(t)Z_1(t, C_1), \quad (31)$$

$$\ell Z_2(\cdot) = \ell_1 Z_1(\cdot, C_1). \quad (32)$$

Операторне рівняння (32) має розв'язок:

$$Z_2(t) = e^{tA}\bar{C}_2 e^{-tA} +$$

$$+\int_0^t e^{(t-\tau)A}C(\tau)Z_1(\tau, C_1)e^{(\tau-t)A}d\tau. \quad (33)$$

Підставляючи $Z_2(t)$ в крайову умову (32), отримаємо наступне операторне рівняння:

$$Q\bar{C}_2 = g_2,$$

де $Q\bar{C}_2 = le^{\cdot A}\bar{C}_2 e^{-\cdot A}$,

$$g_2 = \ell_1 Z_1(\cdot, C_1) -$$

$$-\ell\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)Z_1(\tau, C_1)e^{(\tau-\cdot)A}d\tau.$$

У випадку, коли $R(Q) = \overline{R(Q)}$, розв'язок існує тоді й тільки тоді, коли виконується наступна умова $P_{N(Q^*)}g_2 = 0$, або ж враховуючи те, що $Z_1(t, C_1) = e^{tA}P_{N(Q)}C_1 e^{-tA} + \bar{Z}_1(t)$, маємо:

$$B_0C_1 = -P_{N(Q^*)}\Big[\ell_1 \bar{Z}_1(\cdot) -$$

$$-\ell\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)\bar{Z}_1(\tau)e^{(\tau-\cdot)A}d\tau\Big], \quad (34)$$

де оператор B_0 має вигляд:

$$B_0C_1 = P_{N(Q^*)}\Big[\ell_1 e^{\cdot A}P_{N(Q)}C_1 e^{-\cdot A} -$$

$$-\ell\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)e^{\cdot A}P_{N(Q)}C_1 e^{-\cdot A}e^{(\tau-\cdot)A}d\tau\Big].$$

Рівняння (34) належить до рівнянь вигляду (17) і при тій же умові (18) операторне рівняння (34) має хоча б один розв'язок у вигляді

$$C_1 = -B_0^+ P_{N(Q^*)}\Big[\ell_1 \bar{Z}_1(\cdot) -$$

$$-\ell\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)\bar{Z}_1(\tau)e^{(\tau-\cdot)A}d\tau\Big]. \quad (35)$$

В цьому випадку розв'язок рівняння $Q\bar{C}_2 = g_2$ матиме вигляд:

$$\bar{C}_2 = Q^+ g_2 + P_{N(Q)}C_2, C_2 \in H$$

або

$$\bar{C}_2 = Q^+\ell_1 Z_1(\cdot, C_0) -$$

$$-Q^+\ell\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\big[C(\tau)Z_1(\tau, C_1)\big]e^{(\tau-\cdot)A}d\tau +$$

$$+P_{N(Q)}C_2.$$

Таким чином, розв'язок $Z_2(t)$ можна записати у наступному вигляді:

$$Z_2(t,C_2)=e^{tA}P_{N(Q)}C_2e^{-tA}+\bar{Z}_2(t) \qquad (36)$$

для довільного елемента $C_2\in H_1$, який буде знайдений нижче.

$$\bar{Z}_2(t)=e^{tA}\left[Q^+\ell_1 Z_1(\cdot,C_1)\right]e^{-tA}+$$
$$+\left(G\left[C(\cdot)Z_1(\cdot,C_1)\right]\right)(t), \qquad (37)$$

де оператор Гріна має вигляд:

$$\left(G\left[C(\cdot)Z_1(\cdot,C_1)\right]\right)(t)=$$
$$=\int_0^t e^{(t-\tau)A}C(\tau)Z_1(\tau,C_1)e^{(\tau-t)A}d\tau-e^{tA}\Big[Q^+\times$$
$$\times\ell\int_0^{\cdot}e^{(\cdot-\tau)A}\left[C(\tau)Z_1(\tau,C_1)\right]e^{(\tau-\cdot)A}d\tau\Big]e^{-tA}. \qquad (38)$$

Діючи за індукцією, для визначення коефіцієнта $x_i(t)$ при ε^i ряду (8) приходимо до крайової задачі

$$\dot{Z}_i(t)=AZ_i(t)-Z_i(t)B+$$
$$+C(t)Z_{i-1}(t,C_{i-1}), \qquad (39)$$

$$\ell Z_i(\cdot)=\ell_1 Z_{i-1}(\cdot,C_{i-1}). \qquad (40)$$

При тій же умові (18) крайова задача (39), (40) має розв’язок:

$$Z_i(t,C_i)=e^{tA}P_{N(Q)}C_ie^{-tA}+\bar{Z}_i(t), \qquad (41)$$

де частинний розв’язок $\bar{Z}_i(t)$ крайової задачі (39), (40) має вигляд:

$$\bar{Z}_i(t)=e^{tA}\left[Q^+\ell_1 Z_{i-1}(\cdot,C_{i-1})\right]e^{-tA}+$$
$$+\left(G\left[C(\cdot)Z_{i-1}(\cdot,C_{i-1})\right]\right)(t). \qquad (42)$$

Довільний елемент $C_i\in H$ знаходиться за формулою:

$$C_i=-B_0^+P_{N(Q^*)}\Big[\ell_1\bar{Z}_i(\cdot)-$$
$$-\ell\int_0^{\cdot}e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)\bar{Z}_i(\tau)e^{(\tau-\cdot)A}d\tau\Big]. \qquad (43)$$

$\left(G\left[C(\cdot)Z_{i-1}(\cdot,C_{i-1})\right]\right)(t)$ – оператор Гріна неоднорідно крайової задачі (39), (40), який діє на оператор $C(\cdot)Z_{i-1}(\cdot,C_{i-1})\in C([a;b];H_1)$ наступним чином:

$$\left(G\left[C(\cdot)Z_{i-1}(\cdot,C_{i-1})\right]\right)(t)=$$
$$=\int_0^t e^{(t-\tau)A}C(\tau)Z_{i-1}(\tau,C_{i-1})e^{(\tau-t)A}d\tau-e^{tA}\Big[Q^+\times$$
$$\times\ell\int_0^{\cdot}e^{(\cdot-\tau)A}\left[C(\tau)Z_{i-1}(\tau,C_{i-1})\right]e^{(\tau-\cdot)A}d\tau\Big]e^{-tA}. \qquad (44)$$

Таким чином, маємо ітераційний алгоритм побудови розв’язку крайової задачі (39), (40):

$$Z_i(t,C_i)=\begin{cases} e^{tA}P_{N(Q)}C_ie^{-tA}, & \text{якщо } i=-1;\\ e^{tA}P_{N(Q)}C_ie^{-tA}+\bar{Z}_i(t), & \text{якщо } i=\overline{0,\infty}, \end{cases} \qquad (45)$$

$$C_i=\begin{cases} -B_0^+P_{N(Q^*)}\left[\alpha-\ell\int_0^{\cdot}e^{(\cdot-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-\cdot)A}d\tau\right], & \text{якщо } i=-1;\\ -B_0^+P_{N(Q^*)}\left[\ell_1\bar{Z}_i(\cdot)-\ell\int_0^{\cdot}e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)\bar{Z}_i(\tau)e^{(\tau-\cdot)A}d\tau\right], & \text{якщо } i=\overline{0,\infty}, \end{cases} \qquad (46)$$

$$\bar{Z}_i(t)=\begin{cases} e^{tA}\left[Q^+\left(\alpha+\ell_1 Z_{-1}(\cdot,C_{-1})\right)\right]e^{-tA}+\left(G\left[C(\cdot)Z_{-1}(\cdot,C_{-1})+\Phi(\cdot)\right]\right)(t), & \text{якщо } i=-1;\\ e^{tA}\left[Q^+\ell_1 Z_{i-1}(\cdot,C_{i-1})\right]e^{-tA}+\left(G\left[C(\cdot)Z_{i-1}(\cdot,C_{i-1})\right]\right)(t), & \text{якщо } i=\overline{0,\infty}, \end{cases} \qquad (47)$$

$$\left(G\left[C(\cdot)Z_{i-1}(\cdot,C_{i-1})\right]\right)(t)=\begin{cases} \int_0^t e^{(t-\tau)A}\left[C(\tau)Z_{-1}(\tau,C_{-1})+\Phi(\tau)\right]e^{(\tau-t)A}d\tau- \\ \quad -e^{tA}\left[Q^+\ell\int_0^{\cdot}e^{(\cdot-\tau)A}\left[C(\tau)Z_{-1}(\tau,C_{-1})+\Phi(\tau)\right]e^{(\tau-\cdot)A}d\tau\right]e^{-tA}, & \text{якщо } i=0;\\ \int_0^t e^{(t-\tau)A}C(\tau)Z_{i-1}(\tau,C_{i-1})e^{(\tau-t)A}d\tau- \\ \quad -e^{tA}\left[Q^+\ell\int_0^{\cdot}e^{(\cdot-\tau)A}\left[C(\tau)Z_{i-1}(\tau,C_{i-1})\right]e^{(\tau-\cdot)A}d\tau\right]e^{-tA}, & \text{якщо } i=\overline{1,\infty}. \end{cases} \qquad (48)$$

Отже, критерій розв’язності крайової задачі (1), (2) у гільбертовому просторі може бути сформульований наступним чином.

Теорема 2. Нехай оператор $QC_i = le^{\cdot A}C_i e^{-\cdot A}$, що діє з гільбертового простору H_1 у гільбертовий простір H_2, має псевдообернений і породжуюча крайова задача, отримана із (1), (2) при $\varepsilon = 0$, при довільних неоднорідностях $\Phi(t) \in \in C([a;b], L(H_1))$ та $\alpha \in H_2$ не має розв’язків. Тоді, якщо виконуються умови:

1) оператор B_0 має псевдооборнений оператор;

2) $P_{N(B_0^*)}P_{N(Q^*)} = 0$,

то збурена крайова задача (1), (2) при довільних неоднорідностях $\Phi(t) \in \in C([a;b], L(H_1))$ та $\alpha \in H_2$ має хоча б один розв’язок у вигляді ряду:

$$Z(t) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i Z_i(t),$$

абсолютно збіжного при довільних фіксованих $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, а оператор B_0 має вигляд

$$B_0 C_0 = P_{N(Q^*)}\Big[\ell_1 e^{\cdot A} P_{N(Q)} C_0 e^{-\cdot A} -$$

$$-\ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) e^{\cdot A} P_{N(Q)} C_0 e^{-\cdot A} e^{(\tau-\cdot)A} d\tau \Big],$$

і коефіцієнти ряду визначаються ітераційним алгоритмом (45)-(48).

4. Приклад

Розглянемо збурену крайову задачу (1), (2) для рівняння Ляпунова у просторі $m = l_\infty$ обмежених числових послідовностей із зліченновимірними матрицями A, $C(t)$ і $\Phi(t)$:

$$A = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0, \ldots \frac{1}{4}, 0, \ldots\right),$$

$$C(t) = \operatorname{diag}\left(e^{\frac{1}{8}t}, e^{\frac{1}{8}t}, e^{\frac{1}{8}t}, e^{\frac{1}{8}t}, \ldots e^{\frac{1}{8}t}, e^{\frac{1}{8}t}, \ldots\right),$$

$$\Phi(t) = \operatorname{diag}\left(e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{1}{2}t}, \ldots e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{1}{2}t}, \ldots\right)$$

та крайовою умовою наступного вигляду:

$$lZ(\cdot, \varepsilon) = MZ(0, \varepsilon) - NZ(8\ln 2, \varepsilon) = \alpha,$$

де

$$M = \operatorname{diag}(10, 8, 10, 8, \ldots 10, 8, \ldots),$$

$$N = \operatorname{diag}(8, 8, 8, 8, \ldots 8, 8, \ldots),$$

$$\alpha = \operatorname{diag}(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \ldots \alpha_{nn}, \ldots).$$

Проєктори $P_{N(Q)}$ і $P_{N(Q^*)}$ дорівнюють:

$$P_{N(Q)} = \operatorname{diag}(0, 1, 0, 1, \ldots 0, 1, \ldots),$$

$$P_{N(Q^*)} = \operatorname{diag}(0, 1, 0, 1, \ldots 0, 1, \ldots).$$

Породжуюча крайова задача (3), (4) (при $\varepsilon = 0$) має розв’язок, коли виконується умова розв’язності

$$P_{N(Q^*)}\left[\alpha - l\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\Phi(\tau) e^{(\tau-\cdot)A} d\tau\right] = 0,$$

$$\begin{cases} \alpha_{22} + 240 = 0, \\ \alpha_{44} + 240 = 0, \\ \quad \ldots \\ \alpha_{2n2n} + 240 = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{22} = -240, \\ \alpha_{44} = -240, \\ \quad \ldots \\ \alpha_{2n2n} = -240, \end{cases} \quad \text{і } \forall \alpha_{(2n-1)(2n-1)} \in R.$$

Тепер розглянемо, яким чином потрібно збурити крайову задачу (3), (4), щоб збурена крайова задача (1), (2) мала розв’язок навіть для тих α, які не задовольняють умові розв’язності

$$P_{N(Q^*)}\left[\alpha - l\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\Phi(\tau) e^{(\tau-\cdot)A} d\tau\right] = 0.$$

Для розв’язання цієї проблеми знайдемо оператор B_0:

$$B_0 = \operatorname{diag}(0, 64, 0, 64, \ldots 0, 64, \ldots).$$

Оператор B_0 має псевдообернений оператор:

$$B_0^+ = \operatorname{diag}\left(0, \frac{1}{64}, 0, \frac{1}{64}, \ldots 0, \frac{1}{64}, \ldots\right).$$

Проєктори $P_{N(B_0)}$ і $P_{N(B_0^*)}$ відповідно дорівнюють:

$$P_{N(B_0)} = \operatorname{diag}(1, 0, 1, 0, \ldots 1, 0, \ldots),$$

$$P_{N(B_0^*)} = \mathrm{diag}(1,0,1,0,\ldots 1,0,\ldots).$$

Умова розв’язності $P_{N(B_0^*)}P_{N(Q^*)} = 0$ виконується. Таким чином, усі умови теоеми 2 виконано і у даному випадку задача має єдиний розв’язок.

5. Висновки

У роботі розглянуто збурену крайову задачу для рівняння Ляпунова у просторі Гільберта. Дана теорія працює як у критичному, так й у регулярному випадках [2]. Анологічна задача у випадку, коли опеатор A є необмеженим або несталим, вимагає окремого дослідження. Теорія, розроблена в роботі [14], дозволяє досліджувати умови біфуркації розв’язків рівняння Ляпунова й у тому випадку, коли множини значень операторів Q та B_0 не є замкненими $R(Q) \neq \overline{R(Q)}$, $R(B_0) \neq \overline{R(B_0)}$, тобто оператори Q, B_0 не є нормально розв’язними. У такому випадку побудована вище процедура даватиме узагальнені розв’язки або квазірозв’язки. Запропонований підхід можна застосовувати до дослідження крайових задач для операторно-диференціальних рівнянь загального типу.

Література

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. Москва: Наука, 1969. 368 с.
2. Бойчук А. А., Журавлёв В. Ф., Самойленко А. М. Обобщённо-обратные операторы и нётеровы краевые задачи. Київ: Ин-т мат-ки НАНУ, 1995. 320 с.
3. Бойчук О. А., Кривошея С. А. Критерій розв’язності матричних рівнянь типу Ляпунова. *Український математичний журнал*. 1998. Т. 50, № 8. С. 1021–1026.
4. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Москва: Наука, 1970. 534 с.
5. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. Москва: Наука, 1969. 527 с.
6. Ванько В. И., Ермошина О. В., Кувыркин Г. Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление: учебник для вузов. Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. 488 с.
7. Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. Москва: Наука, 1983. 384 с.
8. Журавлев В. Ф. Псевдообратный оператор к матричному в бесконечномерном гильбертовом пространстве. *Нуковий вісник Ужгородського університету*. 2011. Вип. 22. С. 52–63.
9. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Москва: Наука, 1967. 464 с.
10. Найфе А.Х. Методы возмущений. Москва: Мир, 1976. 454 с.
11. Панасенко Є. В., Покутний О. О. Крайові задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі з необмеженим оператором в лінійній частині. *Нелінійні коливання*. 2013. Т. 16, № 4. С. 518–526.
12. Панасенко Є. В., Покутний О. О. Керованість крайових задач для рівнянь Ляпунова в просторі Гільберта. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2015. № 3. С. 212–220.
13. Панасенко Є. В., Покутний О. О. Крайові задачі для рівняння Ляпунова у банаховому просторі. *Нелінійні коливання*. Київ: Ін-т математики НАНУ, 2016. Т. 19, № 2. С. 240–246.
14. Панасенко Є. В., Покутний О. О. Умова біфуркації розв’язків рівняння Ляпунова у просторі Гільберта. *Нелінійні коливання*. Київ: Ін-т математики НАНУ, 2017. Т. 20, № 3. С. 373–390.
15. Панасенко Є. В. Задача оптимізації крайової задачі для рівняння Ляпунова в просторі Гільберта. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2017. № 2. С. 216–223.
16. Панасенко Є. В., Покутний О. О. Нелінійні крайові задачі для рівняння Ляпунова у просторі L*p*. *Нелінійні коливання*. 2018. Т. 21, № 4. С. 523–536.
17. Покутний О. О. Узагальнено-обернений оператор в просторах Фреше, Банаха та Гільберта. *Вісник Київського національного університету імені Т. Шевченка. Фізико-математичні науки*. 2013. № 4. С. 158–161.
18. Чуйко С. М. Обобщенный оператор Грина нётеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2016. № 8. С. 74–83.

19. Чуйко С. М. О решении матричных уравнений Ляпунова. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Математика, прикладна математика і механіка*. 2014. № 1120. С. 85–94.
20. Bhatia Rajendra. A note on the Lyapunov equation. *Linear algebra and its applications*. 1997. № 259. P. 71–76.
21. Datko R. Extending a theorem of a A. M. Lyapunov to Hilbert space. *Journal of mathematical analysis and applications*. 1970. № 32. P. 610–616.

References

1. Bellman, R. (1969). Introduction to the theory of matrices. Moscow: Science.
2. Bojchuk, A. A., Zhuravlyov, V. F. & Samojlenko, A. M. (1995). Generalized inverse operators and Noetherian boundary-value problems. Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine.
3. Bojchuk, O. A. & Krivosheya, S. A. (1998). The criterion of solvability of Lyapunov type matrix equations. Ukrayinskij matematichnij zhurnal, Vol. 50, No. 8, pp. 1021–1026 (in Ukrainian).
4. Dalecjkij, Yu. L. & Krejn, M. G. (1970). Stability of solutions of differential equations in a Banach space. Moscow: Science.
5. Vajnberg, M. M. & Trenogin, V. A. (1969). Teoriya vetvleniya reshenij nelinejnyh uravnenij. Moscow: Nauka.
6. Vanko, V. I., Ermoshina, O. V. & Kuvyrki, G. N. (2006). Calculus of variations and optimal control: a textbook for universities. Moscow: Moscow State Technical University Publishing House Bauman.
7. Dalecjkij, Yu. L. & Fomin, S. V. (1983). Measures and differential equations in infinite-dimensional spaces. Moscow: Science.
8. Zhuravlev, V. F. (2011). Pseudo-inverse operator to a matrix one in an infinite-dimensional Hilbert space. Nukovij visnik Uzhgorodskogo universitetu, Iss. 22, pp. 52–63 (in Russian).
9. Krejn, S. G. (1967). Linear differential equations in a Banach space. Moscow: Science.
10. Najfe, A. H. (1976). Perturbation methods. Moscow: World.
11. Panasenko, Ye. V. & Pokutniy, O. O. (2013). Boundary-value problems for differential equations in a Banach space with an unbounded operator in a linear part. Nelinijni kolivannya, Vol. 16, No. 4, pp. 518–526 (in Ukrainian).
12. Panasenko, Ye. V. & Pokutniy, O. O. (2015). Guidance of boundary value problems for Lyapunov equations in Hilbert space. Visnik Zaporizkogo nacionalnogo universitetu. Fiziko-matematichni nauki, No. 3, pp. 212–220 (in Ukrainian).
13. Panasenko, Ye. V. & Pokutniy, O. O. (2016). Boundary value problems for the Lyapunov equation in a Banach space. Nelinijni kolivannya, Vol. 19, No. 2, pp. 240–246 (in Ukrainian).
14. Panasenko, Ye. V. & Pokutniy, O. O. (2017). The condition for bifurcation of solutions of the Lyapunov equation in Hilbert space. Nelinijni kolivannya, Vol. 20, No. 3, pp. 373–390 (in Ukrainian).
15. Panasenko, Ye. V. (2017). The problem of optimizing the boundary value problem for the Lyapunov equation in the Hilbert space. Visnik Zaporizkogo nacionalnogo universitetu. Fiziko-matematichni nauki, No. 2, pp. 216–223 (in Ukrainian).
16. Panasenko, Ye. V. & Pokutniy, O. O. (2018). Nonlinear boundary value problems for the Lyapunov equation in Lp space. Nelinijni kolivannya, Vol. 21, No. 4, pp. 523–536 (in Ukrainian).
17. Pokutniy, O. O. (2013) A generalized inverse operator in Frechet, Banach, and Hilbert spaces. Visnik Kiyivskogo nacionalnogo universitetu imeni T. Shevchenka. Fiziko-matematichni nauki, Vol. 4, pp. 158–161 (in Ukrainian).
18. Chujko, S. M. (2016). The generalized Green operator of the Noetherian boundary value problem for a matrix differential equation. Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Matematika, Vol. 8, pp. 74–83 (in Ukrainian).
19. Chujko, S. M. (2014). On the solution of the Lyapunov matrix equations. Visnik Harkyvskogo nacionalnogo universitetu imeni V.N. Karazina. Matematika, prikladna matematika i mehanika, Vol. 1120, pp. 85–94 (in Ukrainian).
20. Bhatia Rajendra (1997). A note on the Lyapunov equation. Linear algebra and its applications, Vol. 259, pp. 71–76.
21. Datko, R. (1970). Extending a theorem of a A. M. Lyapunov to Hilbert space. Journal of mathematical analysis and applications, Vol. 32, pp. 610–616.