

УДК 517.95+518.517+629.735.33-519

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-19

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОЧИХ КОЛЕС НАСОСОВ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ НА 3D-ПРИНТЕРЕ

Т. И. Шейко<sup>1</sup>, К. В. Максименко-Шейко<sup>1,2</sup>, Ю. С. Литвинова<sup>3</sup>, А. И. Морозова<sup>4</sup><sup>1</sup>Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,<sup>2</sup>Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина,<sup>3</sup>Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»,<sup>4</sup>Харьковский национальный университет радиоэлектроники<sup>1</sup>sheyko@ipmach.kharkov.ua, <sup>2</sup>m-sh@ipmach.kharkov.ua, <sup>3</sup>litjuli56@gmail.com,<sup>4</sup>anna.morozova@nure.ua**Ключевые слова:**

3D-печать, 3D-принтер, 3D-моделирование, рабочие колеса, R-функции, центробежные насосы

В статье на основе конструктивных средств теории R-функций построены уравнения рабочих колес центробежных насосов с целью их реализации на 3D-принтере. Использована методика поэтапного построения уравнений геометрических объектов и методика построения уравнений объектов с точечной симметрией циклического типа. Возможность введения буквенных параметров в уравнениях позволяет оперативно изменять форму проектируемого объекта. Свойство положительности построенной функции во внутренних точках объекта весьма удобно для реализации 3D-печати.

## МАТЕМАТИЧНЕ І КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОБОЧИХ КОЛЕС НАСОСІВ ДЛЯ РЕАЛІЗАЦІЇ НА 3D-ПРИНТЕРІ

Т. І. Шейко<sup>1</sup>, К. В. Максименко-Шейко<sup>1,2</sup>, Ю. С. Літвінова<sup>3</sup>, А. І. Морозова<sup>4</sup><sup>1</sup>Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України,<sup>2</sup>Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна,<sup>3</sup>Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»,<sup>4</sup>Харківський національний університет радіоелектроніки<sup>1</sup>sheyko@ipmach.kharkov.ua, <sup>2</sup>m-sh@ipmach.kharkov.ua, <sup>3</sup>litjuli56@gmail.com,<sup>4</sup>anna.morozova@nure.ua**Ключові слова:**

3D-друк, 3D-принтер, 3D-моделювання, робочі колеса, R-функції, відцентрові насоси.

Відцентрові насоси - одні з найпоширеніших насосів у світі. Відцентрові насоси настільки універсальні, що їх використовують майже у всіх галузях промисловості (хімічній, гірничодобувній, харчовій, енергетичній тощо). Основними перевагами відцентрових насосів є проста конструкція та висока ефективність. Серед недоліків, які варто відзначити, є низька зносостійкість крильчатки. Форма і розміри лопатей крильчатки насоса визначаються трудомісткими розрахунками. Крильчатки насоса можна розділити на три категорії: відкриті, напівзакриті, закриті.

Відомі різні способи виготовлення крильчаток відцентрових насосів. Обробка профілю лопатевого диска може здійснюватися на програмно-керованій копіювально-фрезерній машині, кришка та диск приварюються один до одного аргонодуговим зварюванням, а коло піддають термічній обробці для зняття напруг після зварювання. Недоліками цього способу є складність забезпечення високої міцності колеса. У цьому випадку зварні шви спотворюють форму міжлопатевого каналів.

Іноді крильчатка виготовляється з двох частин за допомогою стикового зварного з'єднання двох елементів. Недоліками цього способу є технологічні труднощі, а в деяких випадках неможливість отримання складної просторової форми міжлопатевого каналів для малих коліс.

У зарубіжному та вітчизняному насособудуванні продовжують проводитись дослідження з метою пошуку оптимальних схем техноло-

гічного процесу для підготовки деталей з полімерів. Основні способи обробки пластикових виробів включають пресування, лиття під тиском, екструзію, вакуум-формування, продувку, штампування.

Світовий виробник насосів і клапанів різних типів, концерн KSB (Німеччина), став найбільшим світовим новатором у галузі застосування 3D-друку в ливарній галузі. За допомогою 3D-принтера виготовляються основні моделі та запчастини до насосів, що дозволяє значно скоротити час на ремонт чи виготовлення нових моделей.

Однак існує проблема задання інформації для друку, тобто створення математичної та комп'ютерної моделі проєктованого об'єкта. Одним із методів вирішення цього завдання є застосування теорії R-функцій, яка дозволяє описати геометричні об'єкти складної форми єдиним аналітичним виразом.

Метою даної роботи є розробка на основі теорії R-функцій методів математичного та комп'ютерного моделювання крильчаток насосів для їх реалізації на 3D-принтері.

При побудові математичних моделей методом R-функцій використовуватимуться як найпростіші R-операції, так і R-операції для згладжування гострих країв і кутів. При побудові рівнянь, що відповідають геометричним об'єктам із симетрією циклічного типу, для зменшення кількості R-операцій було розроблено метод, заснований на доведеній раніше теоремі.

Для побудови об'єкта заданої товщини було використано його нормалізоване рівняння, що також в деяких випадках дозволяє значно зменшити кількість R-функцій.

Було побудовано кілька математичних моделей відкритих крильчаток у відцентрових насосах: з радіальними лопатями, із шістьма вигнутими лопатями та балансуєчими отворами та з п'ятьма криволінійними лопатями різного кута нахилу в центральній зоні. Змінюючи буквенні параметри, введені в програму, в межах однієї програми можуть бути отримані крильчатки з іншими конструктивними елементами (такими, як кількість радіальних лопатей, кількість балансуєчих отворів, різні кути нахилу лопаті в центральній зоні тощо). Отримані рівняння візуалізовано за допомогою програми RFPreview, а їх реалізація на 3D-принтері проводиться в Інституті проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного Національної академії наук України.

На основі розроблених алгоритмів побудовані математичні та комп'ютерні моделі напівзакритих крильчаток відцентрових насосів.

Переваги використання 3D-друку очевидні - виробництво нестандартних моделей, скорочення часу на створення нових прототипів і скорочення часу ремонту, простота та значна дешевизна виготовлення, використання сучасних важких матеріалів. У цій роботі теорія R-функцій використовується для математичного та комп'ютерного моделювання крильчаток насоса при впровадженні технології 3D-друку. Метод побудови рівнянь геометричних об'єктів типу циклічної симетрії в 3D використовувався для побудови рівняння відкритої крильчатки відцентрового насоса з радіальними лопатями. А для побудови математичних моделей крильчаток відцентрових насосів зі згнутими лопатями був розроблений новий підхід, заснований на теорії R-функцій.

Аналітичний запис спроектованих об'єктів дає можливість використовувати буквенні геометричні параметри, складні суперпозиції функцій, що, своєю чергою, дозволяє швидко змінювати їх структурні елементи.

## MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELING OF PUMPS IMPELLERS FOR IMPLEMENTATION ON A 3D-PRINTER

T. I. Sheyko<sup>1</sup>, K. V. Maksimenko-Sheyko<sup>1,2</sup>, Yu. S. Litvinova<sup>3</sup>, A. I. Morozova<sup>4</sup>

<sup>1</sup>A. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems of the NAS of Ukraine,

<sup>2</sup>V. N. Karazin Kharkiv National University,

<sup>3</sup>National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute",

<sup>4</sup>Kharkiv National University of Radio Electronics

<sup>1</sup>sheyko@ipmach.kharkov.ua, <sup>2</sup>m-sh@ipmach.kharkov.ua, <sup>3</sup>litjuli56@gmail.com,

<sup>4</sup>anna.morozova@nure.ua

### Key words:

3D printing, 3D printer, 3D modeling, impellers, R functions, centrifugal pumps.

Centrifugal pumps are one of the most common pumps in the world. Centrifugal pumps are so versatile that they are used in almost all industries (chemical, mining, food, energy, etc.). The main advantages of centrifugal pumps are simple design and high efficiency. Among the shortcomings worth noting is the low wear resistance of the impeller. The shape and size of the pump impeller blades are determined by time-consuming calculations. Pump impellers can be divided into three categories: open, semi-closed, closed.

Various manufacturing methods are known for centrifugal pumps impellers. The processing of the blade disk profile can be done on a program-controlled copy-milling machine, cover disc and blade disk are welded to each other by argon-arc welding, and the wheel is heat-treated to relieve stresses after welding. The disadvantages of this method are the difficulty of ensuring high wheel strength. In this case, the welds distort the shape of the inter-blade channels.

Sometimes the impeller is made of two parts, forming each blade by means of a butt weld joint of two elements. The disadvantages of this method are technological difficulty, and in some cases the impossibility of obtaining a complex spatial shape of the inter-blade channels for small wheels.

In foreign and local pump engineering, researches continue to be carried out to find optimal process flow schemes for preparing parts from polymers. The main methods of plastic products processing include pressing, injection molding, extrusion, vacuum forming, blowing, stamping.

The global manufacturer of various types of pumps and valves, the KSB concern (Germany), has become the world's largest innovator in the field of 3D printing applications in the foundry industry. With the help of a 3D printer, master models and spare parts for pumps are manufactured, which can significantly reduce the time to repair or manufacture new models.

However, there is the problem of setting information for printing, i.e. creating a mathematical and computer model of the designed object. One of the methods for solving this problem is the application of the R-functions theory, which allows one to describe geometric objects of complex shape with a single analytical expression.

The aim of this work is to develop, on the basis of the theory of R-functions, methods of mathematical and computer simulation of pump impellers for their implementation on a 3D-printer.

When constructing mathematical models using the R-functions method, both the simplest R-operations as  $x \wedge_0 y$ ;  $x \vee_0 y$  and R-operations for smoothing sharp edges and corners  $x \wedge_\rho y$ ;  $x \vee_\rho y$  will be used. When constructing equations corresponding to geometrical objects with cyclic-type point symmetry, to reduce the number of R-operations a method based on the theorem proved earlier was developed.

To construct an object of a given thickness, its normalized equation was used, which also in some cases allows to significantly reduce the number of R-functions.

Several mathematical models of open impellers in centrifugal pumps were built: with radial blades, with six curved blades and balancing holes

and with five curvilinear blades of different inclination angles in the central zone. By varying the alphabetic parameters entered into the program, impellers with other structural elements (such as number of radial blades, number of balancing holes, various blade inclination angles in the central zone, etc.) may be obtained within the same program. The obtained equations are visualized using RFPreview program, and their 3D-printer implementation is made in the Institute of Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine.

On the basis of the developed algorithms, mathematical and computer models of semi-closed impellers of centrifugal pumps were built.

The advantages of using 3D printing are obvious – the production of non-standard models, the reduction of time for the creation of new prototypes and the reduction of repair time, the simplicity and considerable cheapness of production, the use of modern heavy-duty materials. In this paper, the theory of R-functions is used for mathematical and computer simulation of pump impellers in the implementation of 3D printing technology. The method of constructing equations of geometrical objects with cyclic symmetry type in 3D was used to construct the equation of an open centrifugal pump impeller with radial blades. And to build mathematical models of the centrifugal pumps impellers with curved blades, a new approach was developed based on the theory of R-functions.

Analytical recording of the designed objects makes it possible to use alphabetic geometric parameters, complex superpositions of functions, which, in turn, allows to change their structural elements quickly.

## 1. Введение

Центробежные насосы являются одними из самых распространённых насосов в мире. Благодаря своим конструкционным решениям и стабильной работе, этот тип насосов нашел широкое применение как для решения бытовых задач, так и для основных технологических процессов в различных отраслях промышленности. Центробежные насосы настолько универсальны в использовании, что применяются практически во всех отраслях промышленности (химическая, горнодобывающая, пищевая, энергетика и пр.). Центробежные насосы применяются для перекачивания различных жидкостей, начиная с воды и заканчивая высокоагрессивными и абразивными суспензиями. Выбор материалов для основных элементов центробежных насосов очень широкий, и чаще всего он основывается на стойкости данного материала к свойствам перекачиваемой жидкости и условиям работы самого насоса.

Основными преимуществами центробежных насосов являются простая конструкция, высокий КПД и т.д. Среди недостатков стоит отметить низкую износостойкость рабочего колеса, которое является основным элементом центробежного насоса. Форма, размеры лопатки рабочего колеса

насоса определяются благодаря трудоемким расчётам. Рабочие колёса насосов можно разделить на три категории: открытые, полузакрытые, закрытые.

Сейчас в насосостроении рабочие колёса открытого типа практически не применяются из-за низкого КПД, который составляет менее 40%. Несмотря на этот существенный недостаток, открытый тип рабочих колёс имеет и ряд неоспоримых достоинств: ремонт их очень прост, насосы с рабочим колесом открытого типа гораздо меньше засоряются, можно существенно продлить их срок службы с помощью накладок из износостойкой стали. Полузакрытые рабочие колёса не применяются в больших грунтовых насосах. Тем не менее, часть производителей небольших насосов, для которых тема засорения весьма актуальна, стараются применять именно полузакрытые колёса. Закрытые рабочие колёса насоса позволяют добиться максимального КПД, что вызывает наибольший интерес со стороны как производителей, так и потребителей. Преимуществом такого типа рабочих колёс является более высокая прочность. Но есть и недостатки, а именно – более сложный ремонт и защита от износа. На рабочих колёсах расположены лопатки, количество которых находится в пределах 2-5, изредка – 6.

На внешней поверхности дисков закрытого рабочего колеса часто делают радиальные выступы. Их иногда делают не радиальными, а повторяющими очертание лопаток.

По технологической схеме изготовления рабочих колес обработку профиля диска с лопатками производят на копировально-фрезерном станке с программным управлением, покрывной диск и диск с лопатками сваривают между собой аргонодуговой сваркой, для снятия напряжений после сварки производят термообработку колеса. Недостатками этого способа являются трудность обеспечения высокой прочности колеса с помощью тех сварных соединений, которые возможны при указанном разделении колеса на части, например, таврового или в виде прорезных швов, а также необходимость термообработки всего колеса после сварки. При этом сварные швы, вообще говоря, искажают форму межлопастных каналов.

Известен способ изготовления рабочего колеса центробежного насоса, согласно которому рабочее колесо выполняют из двух частей, образуя каждую лопасть посредством стыкового сварного соединения двух элементов, один из которых выполняют в виде выступа на основном диске как одно целое с последним, а другой — на покрывающем диске как одно целое с последним. Недостатками этого способа являются технологическая трудность, а в некоторых случаях и невозможность получения сложной пространственной формы межлопастных каналов для колес небольших размеров. В зарубежном и отечественном насосостроении продолжают проводиться исследования по изысканию оптимальных схем технологического процесса изготовления деталей из полимеров, отвечающих необходимым технико-экономическим требованиям. К основным способам переработки изделий из пластмасс относятся прессование, литье под давлением, экструзия, вакуум-формирование, выдувание, штамповка. В некоторых случаях применяется и механическая обработка из блоков материала. Применение полимерных композиций для изготовления рабочих колес шахтных центробежных насосов связано со значительными технологическими трудностями. Колесо центробежного

насоса представляет собой пространственную конструкцию закрытого типа. Закрытое рабочее колесо можно изготавливать из полимерных материалов двумя путями — прессованием и литьем под давлением. Результаты исследования износостойкости и технологичности изготовления показали преимущества полимерных материалов перед традиционно применяемыми стальным и чугунным литьем. В производственном отношении изготовление рабочих колес и других деталей из термопластических материалов значительно проще, чем из бронзы, чугуна или терморезистивных пластмасс. Например, детали из полиамидных смол очень легко отливать в металлические формы на обычных литьевых машинах. Сохранение необходимых геометрических форм, точность размеров и чистота поверхностей при этом обеспечиваются в нужных пределах без большого труда.

Для быстрой замены изношенных деталей в современной промышленности используют 3D-печать. Мировой производитель различных видов насосов и арматуры, концерн KSB (Германия), стал крупнейшим в мире новатором в области применения 3D-печати в литейном производстве. С помощью 3D-принтера изготавливаются мастер-модели и запчасти к насосам, что позволяет существенно сократить время ремонта или появления новых моделей на рынке.

Однако возникает проблема задания информации для печати, т.е. создания математической и компьютерной модели проектируемого объекта. Одним из методов решения этой проблемы является применение теории R-функций, которая позволяет описывать геометрические объекты сложной формы единым аналитическим выражением [1-3].

**Целью работы** является разработка на основе теории R-функций методов математического и компьютерного моделирования рабочих колес насосов для их реализации на 3D-принтере.

## 2. Основная часть

При построении математических моделей методом R-функций будут использованы как простейшие R-операции [1-3]

$$fk \wedge_0 fl = fk + fl - \sqrt{fk^2 + fl^2};$$

$$fk \vee_0 fl = fk + fl + \sqrt{fk^2 + fl^2},$$

так и R-операции для сглаживания острых кромок и углов [3, 4]:

$$fk \wedge_\rho fl = fk + fl - \sqrt{fk^2 + fl^2 + \frac{FR}{8\rho^2}(FR + |FR|)},$$

$$fk \vee_\rho fl = fk + fl + \sqrt{fk^2 + fl^2 + \frac{FR}{8\rho^2}(FR + |FR|)},$$

где

$$FR = \rho^2 - fk^2 - fl^2.$$

При построении уравнений, соответствующих геометрическим объектам с точечной симметрией циклического типа, для сокращения количества R-операций будут использованы результаты следующей теоремы [3].

**Теорема.** Пусть трансляционная область  $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y, z) \geq 0]$  симметрична относительно оси абсцисс, а область  $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y, z) \geq 0]$  может быть размещена внутри сектора  $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{n}$ . Области  $\Sigma_k = [\sigma_0(r \cos(\theta - 2\pi k/n) - r_0, r \sin(\theta - 2\pi k/n), z) \geq 0]$

получены в результате поворота области  $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y, z) \geq 0]$  в плоскости  $xOy$  вокруг начала координат на углы  $\frac{2\pi k}{n}$ . Тогда уравнение границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega = \bigcup_{k=0}^{n-1} \Sigma_k$  имеет вид

$$\omega(x, y) \equiv \sigma_0(r \cos \mu(\theta, n) - r_0, r \sin \mu(\theta, n), z) = 0,$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\theta = \arctg \frac{y}{x}$ .

$$\mu(n\theta) = \frac{8}{n\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[ (2k-1) \frac{n\theta}{2} \right]}{(2k-1)^2}.$$

(В процессе численной реализации для построения уравнения границы  $\partial\Omega$  с рациональной точностью достаточно количество членов ряда  $k = 5$ ).

Кроме того, для построения объекта заданной толщины  $\delta$  использовалось его нормализованное уравнение  $\omega(x, y, z) \geq 0$ ,  $\frac{\partial\omega}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 1$ . Хорошо известно, что функция  $\omega(x, y, z)$  в окрестности границы  $\partial\Omega$  ведет

себя как расстояние до  $\partial\Omega$ . Тогда функция  $\omega_1(x, y, z) = \frac{\delta}{2} - |\omega(x, y, z)| \geq 0$  будет положительна только в пояске шириной  $\delta$ . Использование этого подхода в ряде случаев позволяет существенно сократить количество R-операций, а, следовательно, и сократить вычислительный процесс.

1. Построим математическую модель открытого рабочего колеса центробежного насоса с радиальными лопатками.

$$f1 = (10^2 - x^2 - y^2) \wedge_0 (0.5 - z) \times (0.1 + z) \geq 0; f2 = (6^2 - x^2 - y^2) \wedge_0$$

$$\wedge_0 (2 - z)z \geq 0;$$

$$f12 = (f1 \vee_0 f2) \wedge_0$$

$$\wedge_0 (x^2 + y^2 - 4.5^2) \geq 0$$

$$f123 = f12 \vee_0 f3 \geq 0; \text{ (рис. 1, а)}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \theta = \arctg \frac{y}{x}; no = 24;$$

$$ff = \theta \frac{no}{2};$$

$$\mu = \frac{8}{no\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin[(2k-1)ff]}{(2k-1)^2};$$

$$x1 = \rho \cos \mu; y1 = \rho \sin \mu;$$

$$fr = ((0.25 - |y1|) \wedge_0 z(1.9 - z)) \wedge_0$$

$$\wedge_0 (10^2 - x1^2 - y1^2) \wedge_0$$

$$\wedge_0 (x1^2 + y1^2 - 5^2) \geq 0; \text{ (рис. 1, б)}$$

$$f4 = (4.5^2 - x^2 - y^2) \wedge_0$$

$$\wedge_0 (x^2 + y^2 - 3^2) \geq 0;$$

$$f5 = ((1 - x^2) \vee_0 (1 - y^2)) \wedge_0$$

$$\wedge_0 z(1.93 - z) \geq 0;$$

$$f6 = f4 \wedge_0 f5 \geq 0;$$

$$f7 = (0.3^2 - x^2 - (y - 3.7)^2) \vee_0$$

$$\vee_0 (0.3^2 - x^2 - (y + 3.7)^2) \geq 0;$$

$$fv = f6 \wedge_0 - f7 \geq 0; \text{ (рис. 1, в)}$$

$$r2 = 0.4; sr2 = r2^2 - fr^2 - f123^2;$$

$$fpr = fr + f123 +$$

$$+ \sqrt{fr^2 + f123^2 + \frac{sr2}{8r2^2}(sr2 + |sr2|)} \geq 0;$$

$$W = fv \vee_0 fpr \geq 0; \text{ (рис. 1, г)}$$

$$fpas = (0.35^2 - y^2) \wedge_0 x(2 - x) \geq 0;$$

$$\phi = \frac{\pi}{2}; nd = 8; th = \frac{\phi}{nd}; t1 = \theta - \frac{\pi}{2} + \frac{\phi}{2};$$

$$ft = \left( t1 - \frac{th}{2} \right) \frac{\pi}{th};$$

$$\mu_0 = \frac{4th}{\pi^2} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin[(2k-1)ft]}{(2k-1)^2};$$

$$wl = 0.5(t1 - \frac{th}{2} + \phi - t1 - \frac{th}{2} -$$

$$-abs(t1 - \frac{th}{2} - \phi + t1 + \frac{th}{2})) \geq 0;$$

$$\mu z = 0.5(\mu_0 + wl - abs(\mu_0 - wl)) \geq 0;$$

$$\begin{cases} x1k = \rho \cos \mu z, \\ y1k = \rho \sin \mu z; \end{cases} \begin{cases} xkk = -\frac{0.8x1k}{z-0.8}, \\ ykk = -\frac{0.8y1k}{z-0.8}; \end{cases}$$

$$fk = (0.3^2 - xkk^2 - ykk^2) \Lambda_0$$

$$\Lambda_0 (z - 0.8) \geq 0;$$

$$WKOL = (\omega \Lambda_0 \overline{fk}) \Lambda_0 \overline{f pas} \geq 0. \text{ (рис. 1, д)}$$

Меняя значения буквенных параметров  $no, nd$  и других, можно в рамках этой же программы получать колеса с другими конструктивными параметрами.

2. Построим математическую модель открытого рабочего колеса центробежного насоса с шестью криволинейными лопатками и балансировочными отверстиями

$$f01 = ((2.2^2 - x^2 - y^2) \Lambda_0$$

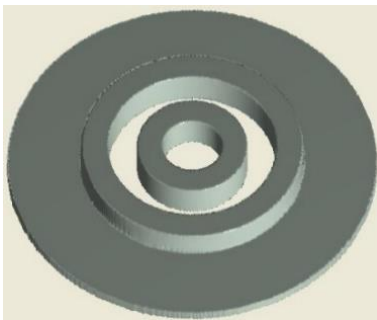
$$\Lambda_0 (x^2 + y^2 - 1)) \Lambda_0 (2 - z)z \geq 0;$$

$$f0 = ((10^2 - x^2 - y^2) \Lambda_0$$

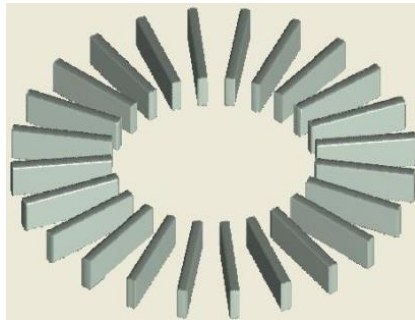
$$\Lambda_0 (2 + z)(0.2 - z)) \vee_0 f01 \geq 0; \text{ (рис. 2, а)}$$

$$f11 = \left( 0.5 - \left| \frac{(5^2 - (y-5)^2 - x^2)}{10} \right| \right) \Lambda_0$$

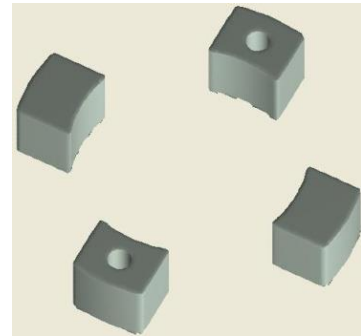
$$\Lambda_0 \bar{x} \geq 0;$$



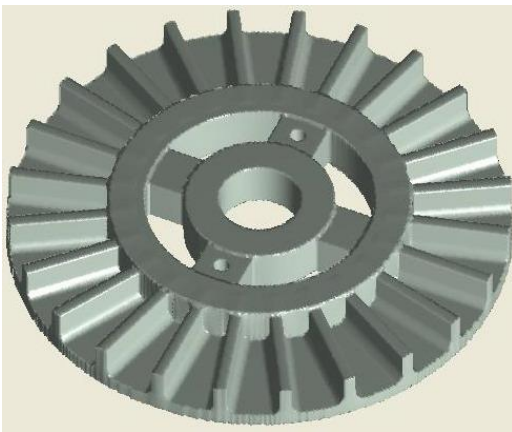
а)



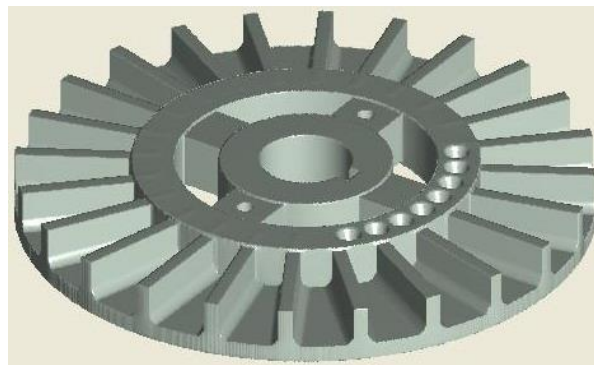
б)



в)



г)



д)

Рис. 1. Визуализация поэтапного построения уравнения открытого рабочего колеса центробежного насоса с радиальными лопатками

$$x1 = x \cos \frac{\pi}{3} + y \sin \frac{\pi}{3};$$

$$y1 = -x \sin \frac{\pi}{3} + y \cos \frac{\pi}{3};$$

$$f1 = \left( 0.5 - \left| \frac{(5^2 - (y1 - 5)^2 - x1^2)}{10} \right| \right) \Lambda_0$$

$$\Lambda_0 \bar{x}1 \geq 0;$$

$$x2 = x \cos \frac{2\pi}{3} + y \sin \frac{2\pi}{3};$$

$$y2 = -x \sin \frac{2\pi}{3} + y \cos \frac{2\pi}{3};$$

$$f2 = \left( 0.5 - \left| \frac{(5^2 - (y2 - 5)^2 - x2^2)}{10} \right| \right) \Lambda_0$$

$$\Lambda_0 \bar{x}2 \geq 0;$$

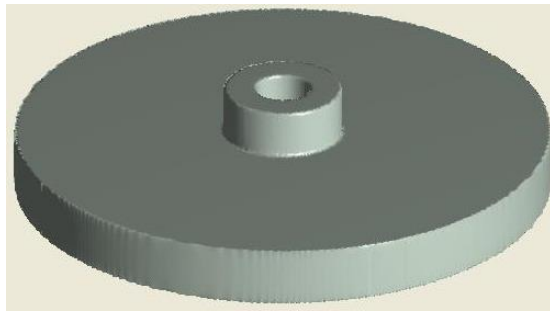
$$\begin{aligned}
 x_3 &= x \cos \frac{3\pi}{3} + y \sin \frac{3\pi}{3}; \\
 y_3 &= -x \sin \frac{3\pi}{3} + y \cos \frac{3\pi}{3}; \\
 f_3 &= \left( 0.5 - \left| \frac{(5^2 - (y_3 - 5)^2 - x_3^2)}{10} \right| \right) \Lambda_0 \\
 \Lambda_0 \bar{x}_3 &\geq 0; \quad x_4 = x \cos \frac{4\pi}{3} + y \sin \frac{4\pi}{3}; \\
 y_4 &= -x \sin \frac{4\pi}{3} + y \cos \frac{4\pi}{3}; \\
 f_4 &= \left( 0.5 - \left| \frac{(5^2 - (y_4 - 5)^2 - x_4^2)}{10} \right| \right) \Lambda_0 \\
 \Lambda_0 \bar{x}_4 &\geq 0; \\
 x_5 &= x \cos \frac{5\pi}{3} + y \sin \frac{5\pi}{3}; \\
 y_5 &= -x \sin \frac{5\pi}{3} + y \cos \frac{5\pi}{3}; \\
 f_5 &= \left( 0.5 - \left| \frac{(5^2 - (y_5 - 5)^2 - x_5^2)}{10} \right| \right) \Lambda_0 \\
 \Lambda_0 \bar{x}_5 &\geq 0; \\
 f_{1112345} &= ((((((f_{11} \vee_0 f_1) \vee_0 \\
 &\vee_0 f_2) \vee_0 f_3) \vee_0 f_4) \vee_0 f_5) \Lambda_0 \\
 &\Lambda_0 (2 - z)z) \Lambda_0 (x^2 + y^2 - 3^2)) \geq 0; \\
 f_v &= f_{1112345} \Lambda_0 (9.7^2 - x^2 - y^2) \geq 0; \\
 (\text{рис. 2, б}) \quad f_{i0} &= f_0 \vee_0 f_v \geq 0; \quad (\text{рис. 2, в}) \\
 \phi &= \frac{\pi}{2}; \quad nd = 6; \quad th = \frac{\phi}{nd}; \quad \theta = \arctg \frac{x}{y}; \\
 t_1 &= \theta - \frac{\pi}{2} + \frac{\phi}{2}; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ff &= \left( t_1 - \frac{th}{2} \right) \frac{\pi}{th}; \\
 \mu &= \frac{4th}{\pi^2} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin[(2k-1)ff]}{(2k-1)^2}; \\
 e_1 &= t_1 - \frac{th}{2}; \quad e_2 = \phi - t_1 - \frac{th}{2}; \\
 S &= 0.5(e_1 + e_2 - |e_1 - e_2|) \geq 0; \\
 \mu S &= 0.5(\mu + S - |\mu - S|) \geq 0; \\
 y_{11} &= \rho \sin \mu S; \\
 fb &= ((0.8^2 - (z + 1)^2 - y_{11}^2) \Lambda_0 \\
 &\Lambda_0 (x^2 + y^2 - 3^2)) \Lambda_0 x \geq 0; \\
 WKOL &= f_{i0} \Lambda_0 \bar{fb} \geq 0. \quad (\text{рис. 2, г})
 \end{aligned}$$

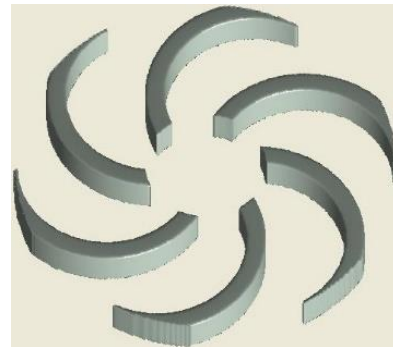
Меняя параметр  $nd$ , можно регулировать количеством балансировочных отверстий.

3. Построим математическую модель открытого рабочего колеса центробежного насоса с пятью криволинейными лопатками.

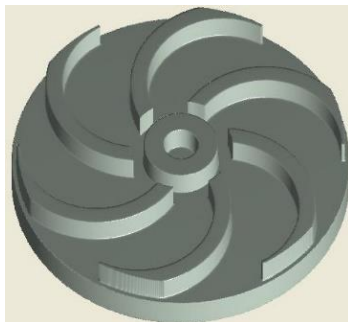
$$\begin{aligned}
 f_{01} &= ((2.2^2 - x^2 - y^2) \Lambda_0 \\
 &\Lambda_0 (x^2 + y^2 - 1.7^2)) \Lambda_0 (2 - z)z \geq 0; \\
 f_{02} &= ((1.7^2 - x^2 - y^2) \Lambda_0 \\
 &\Lambda_0 (x^2 + y^2 - 1.2^2)) \Lambda_0 (1.5 - z)z \geq 0; \\
 f_{001} &= f_{01} \vee_0 f_{02} \geq 0; \\
 f_{00} &= ((12.5^2 - x^2 - y^2) \Lambda_0 \\
 &\Lambda_0 (3 + z)(0.5 - z)) \vee_0 f_{001} \geq 0; \\
 &(\text{рис. 3, а})
 \end{aligned}$$



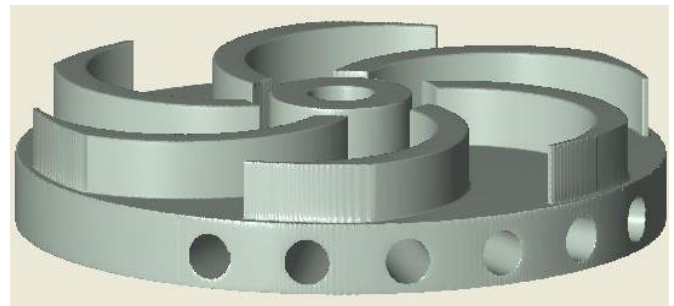
а)



б)



в)



г)

Рис. 2. Визуализация поэтапного построения уравнения колеса



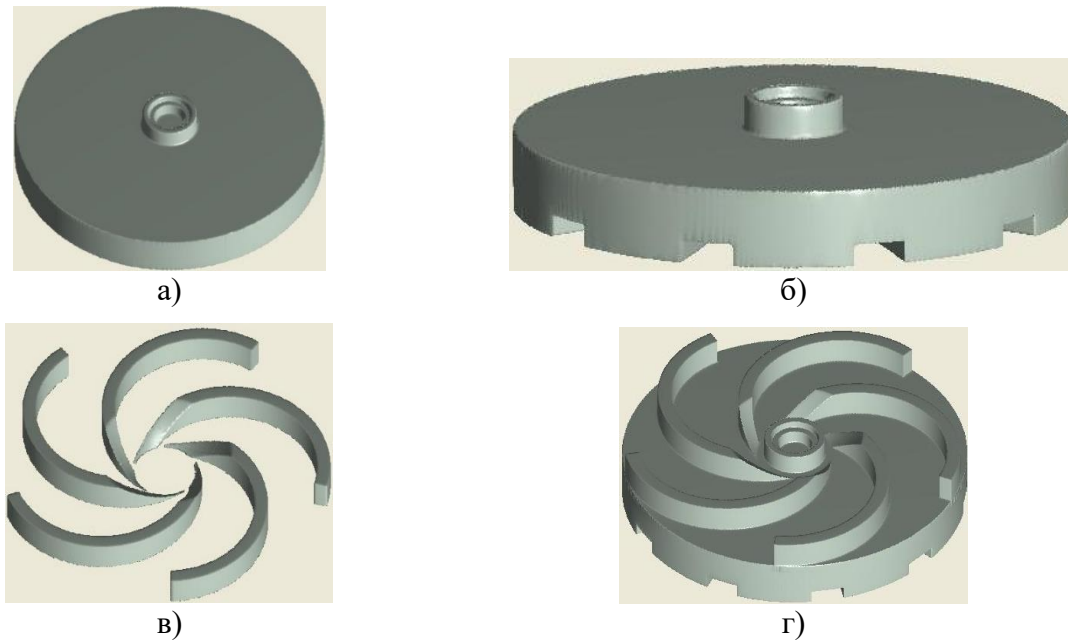


Рис. 3. Визуалізація поетапного побудови рівняння колеса

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \theta = \arctg \frac{y}{x}; no = 10;$$

$$ff = \theta \frac{no}{2};$$

$$\mu = \frac{8}{no\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin[(2k-1)ff]}{(2k-1)^2};$$

$$x1 = \rho \cos \mu; y1 = \rho \sin \mu;$$

$$fn1 = ((1.2^2 - y1^2) \wedge_0 (-z - 2)) \wedge_0$$

$$\wedge_0 (x^2 + y^2 - 8^2) \geq 0;$$

$$f11 = \left(0.5 - \left| \frac{(7^2 - x^2 - (y-5)^2)}{14} \right| \right) \wedge_0$$

$$\wedge_0 \bar{x} \geq 0;$$

$$x1 = x \cos \frac{2\pi}{5} + y \sin \frac{2\pi}{5};$$

$$y1 = -x \sin \frac{2\pi}{5} + y \cos \frac{2\pi}{5};$$

$$f1 = \left(0.5 - \left| \frac{(7^2 - x1^2 - (y1 - 5)^2)}{14} \right| \right) \wedge_0$$

$$\wedge_0 \bar{x1} \geq 0;$$

$$x2 = x \cos \frac{4\pi}{5} + y \sin \frac{4\pi}{5};$$

$$y2 = -x \sin \frac{4\pi}{5} + y \cos \frac{4\pi}{5};$$

$$f2 = \left(0.5 - \left| \frac{(7^2 - x2^2 - (y2-5)^2)}{14} \right| \right) \wedge_0$$

$$\wedge_0 \bar{x2} \geq 0;$$

$$x3 = x \cos \frac{8\pi}{5} + y \sin \frac{8\pi}{5};$$

$$y3 = -x \sin \frac{8\pi}{5} + y \cos \frac{8\pi}{5};$$

$$f3 = \left(0.5 - \left| \frac{(7^2 - x3^2 - (y3-5)^2)}{14} \right| \right) \wedge_0]$$

$$\wedge_0 \bar{x3} \geq 0;$$

$$x4 = x \cos \frac{16\pi}{5} + y \sin \frac{16\pi}{5};$$

$$y4 = -x \sin \frac{16\pi}{5} + y \cos \frac{16\pi}{5};$$

$$f4 = \left(0.5 - \left| \frac{(7^2 - x4^2 - (y4-5)^2)}{14} \right| \right) \wedge_0$$

$$\wedge_0 \bar{x4} \geq 0;$$

$$xk = -\frac{z_0 x}{z - z_0}; yk = -\frac{z_0 y}{z - z_0};$$

$$fk = xk^2 + yk^2 - r^2 \geq 0; x_0 = 0; y_0 = 0;$$

$$z_0 = -2; r = 2.2.$$

$$f111234 = (((((11 \vee_0 f1) \vee_0 f2) \vee_0$$

$$\vee_0 f3) \vee_0 f4) \wedge_0 (2.5 - z)z) \wedge_0 fk \geq 0;$$

(рис. 3,в)

$$WKOL = f111234 \vee_0 f0 \geq 0. \text{ (Рис. 3,г)}$$

Меняя значения  $z_0, r$  для конической поверхности, можем получать различные углы наклона лопатки в центральной зоне.

Полученные уравнения моделей колес визуализированы с помощью программы RFPreview [5], а их реализация на 3D-принтере (рис. 4) выполнена в ИПМаш им. А.Н. Подгорного НАН Украины.

На основе разработанных алгоритмов построены математические и компьютерные модели полузакрытых рабочих колес центробежных насосов, приведенных на рис. 5.

### 3. Выводы

Создание математических моделей для реализации 3D-печати представляют значительный интерес, который связан с актив-

ным внедрением 3D-печати в различные отрасли промышленности. Достоинства применения 3D-печати очевидны — это изготовление нестандартных моделей, сокращение времени на создание новых прототипов и сокращение времени ремонта, простота и значительная дешевизна производства, использование современных сверхпрочных материалов. В данной работе применяется теория R-функций для математического и компьютерного моделирования рабочих колес насосов при реализации технологии 3D-печати.

Метод построения уравнений геометрических объектов, обладающих циклическим типом симметрии в 3D, был использован для построения уравнения открытого рабочего колеса центробежного насоса с радиаль-

ными лопатками. А для построения математических моделей колес центробежных насосов с криволинейными лопатками был разработан новый подход на основе теории R-функций.

Достоверность полученных результатов, их адекватность проектируемым объектам подтверждается визуализацией как в условиях эксплуатации программы RFPreview, так и реализацией на 3D-принтере. Аналитическая запись проектируемых объектов дает возможность использовать буквенные геометрические параметры, сложные суперпозиции функций, что, в свою очередь, позволяет оперативно изменять их конструктивные элементы.



Рис. 4. Макеты колес центробежных насосов, выполненные на 3D-принтере

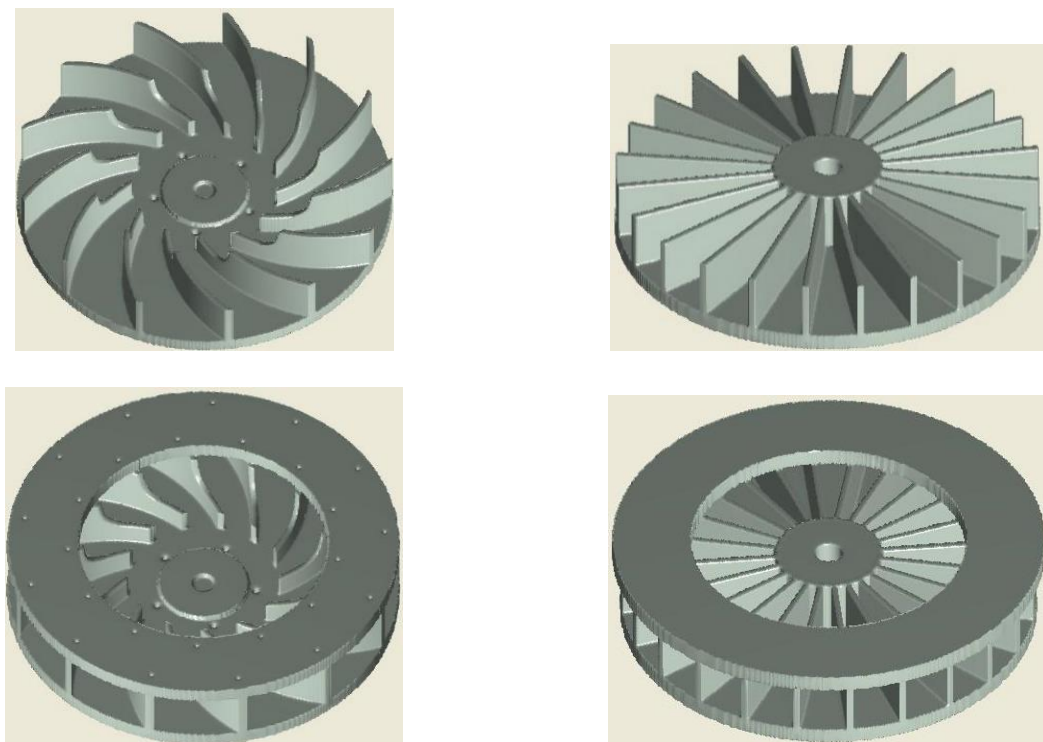


Рис. 5. Полузакрывые рабочие колеса центробежных насосов

### Литература

1. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 552 с.
2. Rvachev V. L., Sheiko T. I. R-functions in boundary value problems in mechanics. *Applied Mechanics Reviews*. 1995. Vol. 4. P. 151–188.
3. Максименко-Шейко К. В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. 306 с.
4. Литвинова Ю. С., Максименко-Шейко К. В., Шейко Т. И., Толлок А. В. Аналитическая идентификация машиностроительных деталей с помощью R-функций. *Информационные технологии в проектировании и производстве*. 2016. №1 (161). С. 38–44.
5. Лисин Д. А., Максименко-Шейко К. В., Толлок А. В., Шейко Т. И. R-функции в компьютерном моделировании дизайна 3D-поверхности автомобиля. *Прикладная информатика*. 2011. №6 (36). С. 78–85.

### References

1. Rvachev, V. L. (1982). The theory of R-functions and some of its applications. Kiev: Nauk. dumka (in Russian).
2. Rvachev, V. L. & Sheiko, T. I. (1995). R-functions in boundary value problems in mechanics. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 4, pp. 151–188.
3. Maksimenko-Sheyko, K. V. (2009). R-functions in mathematical modeling of geometric objects and physical fields. Khar'kov: IPMash NAN Ukrainy (in Russian).
4. Litvinova, YU. S., Maksimenko-Sheyko, K. V., Sheyko, T. I. & Tolok, A. V. (2016). Analytical identification of machine parts using R functions. *Informatsionnyye tekhnologii v proyektirovanii i proizvodstve*, Vol. 1(161), pp. 38–44 (in Russian).
5. Lisin, D. A., Maksimenko-Sheyko, K. V., Tolok, A. V. & Sheyko, T. I. (2011). R-functions in computer simulation of a 3D car surface design. *Prikladnaya informatika*, Vol. 6 (36), pp. 78–85 (in Russian).