

УДК 539.1:534.1

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-20

## НЕСТАЦІОНАРНІ ВІСЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ЕЛЕКТРОПРУЖНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ СКІНЧЕННОЇ ДОВЖИНИ

**І. В. Янчевський, О. А. Савченко**

*Національний технічний університет України «КПІ ім. І. Сікорського»  
i.yanchevskiy@kpi.ua*

**Ключові слова:**

циліндрична електропружна оболонка, нестационарні коливання, інтегральне перетворення Лапласа.

Представлено чисельно-аналітичне розв'язання задачі про нестационарні коливання біморфної (метал-п'єзокераміка) циліндричної оболонки з шарнірно закріпленими торцями. Розглянуті режими прямого і зворотного п'єзоелектричного ефекту. Динамічні процеси моделюються в рамках лінійної теорії тонких електропружних оболонок, заснованої на узагальнених гіпотезах Кірхгофа–Лява. Представлені числові результати для випадку східчастого електромеханічного навантаження оболонки та дано їх аналіз.

## NON-STATIONARY AXISYMMETRIC VIBRATION OF FINITE-LENGTH ELECTROELASTIC CYLINDRICAL SHELL

**I. V. Yanchevskiy, O. A. Savchenko**

*National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»,  
i.yanchevskiy@kpi.ua*

**Key words:**

cylindrical electroelastic shell, non-stationary vibration, Laplace integral transform.

The numerically-analytical solution of a problem on non-stationary vibration of bimorph (metal-piezoceramic) cylindrical shell with hinged ends is presented. Modes of direct and inverse piezoelectric effect are considered. Dynamic processes are modeled within the limits of the linear theory of the thin electroelastic shells based on generalized Kirchhoff–Love hypotheses. Numerical results for stepped electromechanical loadings of the shell are presented and their analysis are included.

### 1. Вступ

Область практичного застосування приладів і пристроїв, що використовують у своїх конструкціях п'єзокерамічні перетворювачі енергії, у цей час досить широка [7]. З усього розмаїття конфігурацій перетворювачів до досить розповсюджених відносяться елементи у вигляді тонкостінних циліндричних оболонок, вивченню динамічної поведінки яких приділяється велика увага [1, 2, 10]. Особливий інтерес при цьому представляють дослідження коливань при прикладанні імпульсних електромеханічних навантажень [4, 8, 9]. Разом з тим, залишаються відкритими питання поведінки п'єзокерамічних елементів з конструктивними особливостями при різних варіантах їх закріплення.

У даній роботі представлено ефективний чисельно-аналітичний метод дослідження перехідних процесів у біморфному

(метал-п'єзокераміка) перетворювачі у вигляді циліндричної оболонки скінченної довжини при її механічному і/або електричному імпульсному навантаженні. При цьому розглянуто найпростіший випадок вісесиметричного навантаження оболонки, торці якої шарнірно закріплені.

### 2. Постановка задачі

Розглядається замкнена кругова циліндрична оболонка довжиною  $l$ , яка складається з тонких, жорстко з'єднаних між собою, внутрішнього електропружного і зовнішнього пружного шарів з товщинами  $h_p$  і  $h_m$  відповідно. Радіус поверхні з'єднання шарів рівний  $R_1$ . На поляризований по товщині електропружний (п'єзоелектрично активний) шар нанесені суцільні, нескінченно тонкі електроди, внутрішній з яких «зазем-

лений», а електричний потенціал на зовнішньому електроді рівний  $V_0(t)$ . На оболонку діє також розподілене вісесиметричне нестационарне нормальне навантаження з інтенсивністю  $q$ . Торці оболонки шарнірно закріплені.

Віднесемо оболонку до циліндричної системи координат, вісь  $z$  якої збігається з віссю оболонки, а площини  $z=0$  й  $z=l$  співпадають з її торцями. Тоді в рамках узагальнених на випадок електромеханіки гіпотез Кірхгофа–Лява вхідна система рівнянь вісесиметричного руху поверхні зведення [5] досліджуваного біморфного циліндричного п'єзоперетворювача має вигляд [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + w + \delta \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial z} = \\ = q + V - \zeta_p \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}; \\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} - \nu \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут  $w(z,t)$ ,  $u_0(z,t)$  – нормальна і осьова складові вектора переміщень, відповідно;  $V(z,t)$  – функція, що описує профіль електричного потенціалу на зовнішньому струмопровідному покритті;  $\zeta_p$  – відстань між поверхнею зведення, що має радіус кривизни  $R_0 = R_1 - \zeta_0$ , і серединною поверхнею електропружного шару.

Відстань  $\zeta_0$  між поверхнями зведення та з'єднання шарів обрана таким чином, що має місце найбільш простий зв'язок між зусиллями та деформаціями [6]:

$$\begin{aligned} N_1 = \frac{\partial u_0}{\partial z} + \nu w - V, \\ M_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\zeta_p}{\delta} V. \end{aligned} \quad (2)$$

Рівняння руху (1) доповнимо нульовими початковими умовами (до моменту  $t=0$  перетворювач перебуває в стані спокою)

$$w|_{t=0} = \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = u_0|_{t=0} = \frac{\partial u_0}{\partial t}|_{t=0} = 0$$

і механічними граничними умовами

$$w|_{z=0,l} = 0; \quad N_1|_{z=0,l} = 0; \quad M_1|_{z=0,l} = 0, \quad (3)$$

що відповідають умові шарнірного закріплення торців.

Форма електричних граничних умов залежить від виду електродування п'єзоактивного шару і способу підведення (знімання) електричної енергії. Якщо покласти, що суцільні електроди підключені до генератора напруги або закорочені, то функцію

$$V(z,t) = V_0(t) \quad (4')$$

у системі (1) вважаємо заданою. Якщо ж електроди розімкнуті або підключені до електронного пристрою з нескінченно великим вхідним опором, то необхідне виконання рівності нулеві погонного струму зсуву через серединну поверхню п'єзошару. У цьому випадку вираз для невідомої різниці потенціалів  $V_0(t)$  між суцільними електродами шару запишеться у вигляді [6]:

$$V(z,t) = V_0(t) = \frac{\delta_1}{l} \int_0^l \left( \frac{\partial u_0}{\partial z} + w - \zeta_p \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) dz. \quad (4'')$$

Співвідношення (1)–(4) представляють собою повну систему рівнянь зв'язаних коливань досліджуваного біморфного електропружного перетворювача.

Слід зазначити, що рівняння записані з використанням безрозмірних змінних: час  $t$  віднесений до  $R_0 \sqrt{m_h / D_N}$ ; переміщення  $w$ ,  $u_0$  – до  $R_0$ ; різниця потенціалів  $V$  – до  $R_0 D_N / e_1$ .

Розрахункові формули для вхідних в (1)–(4) постійних коефіцієнтів наведені в [6].

### 3. Метод розв'язання задачі

Для граничних умов (3) функції  $w$  і  $u_0$  представимо у вигляді

$$\begin{aligned} w(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \sin\left(\frac{k\pi z}{l}\right); \\ u_0(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \cos\left(\frac{k\pi z}{l}\right), \end{aligned} \quad (5)$$

де  $a_k$ ,  $b_k$  – невідомі коефіцієнти;  $z \in [0, l]$ .

Електричний потенціал також задаємо у вигляді тригонометричного ряду Фур'є, тобто

$$V(z,t) = V_0(t) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} v_k \sin\left(\frac{k\pi z}{l}\right), \quad (6)$$

коефіцієнти  $v_k$  якого на підставі рівностей (4) рівні  $v_k = (2/k\pi) \cdot [1 - (-1)^k]$ .

Механічне навантаження  $q$  вважається рівномірно розподіленим на ділянці  $[z_1, z_2]$ , тобто

$$q(z, t) = -q_0(t) [H(z - z_1) - H(z - z_2)],$$

де  $H$  – одинична функція Хевісайда, і також може бути представлена у формі, аналогічній (6):

$$q_3 = q_0(t) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin\left(\frac{k\pi z}{l}\right);$$

$$f_k = -\frac{2}{k\pi} \left[ \cos\left(\frac{k\pi z_1}{l}\right) - \cos\left(\frac{k\pi z_2}{l}\right) \right]. \quad (7)$$

Після підстановки розвинень (5)–(7) у трансформовану за Лапласом систему (1) отримаємо алгебраїчну систему рівнянь відносно зображень шуканих коефіцієнтів  $a_k$  і  $b_k$ :

$$a_k^L(s) \cdot (s^2 + \xi_k^{(1)}) + b_k^L(s) \cdot \xi_k^{(2)} =$$

$$= q_0^L(s) \cdot f_k + V_0^L(s) \cdot v_k \xi_k^{(4)};$$

$$a_k^L(s) \cdot \xi_k^{(2)} + b_k^L(s) \cdot (s^2 + \xi_k^{(3)}) =$$

$$= V_0^L(s) \cdot v_k \xi_k^{(5)}. \quad (8)$$

Тут  $s$  – параметр перетворення (верхнім індексом  $L$  позначені трансформовані за Лапласом функції);  $\xi_k^{(5)} = -k\pi/l$ ;  $\xi_k^{(1)} = 1 + \delta \xi_k^{(5)4}$ ;  $\xi_k^{(2)} = v \xi_k^{(5)}$ ;  $\xi_k^{(3)} = \xi_k^{(5)2}$ ;  $\xi_k^{(4)} = 1 + \zeta_p \xi_k^{(3)}$ .

Розв'язком системи (8) буде

$$a_k^L(s) = D_k^a(s) / D_k(s);$$

$$b_k^L(s) = D_k^b(s) / D_k(s), \quad (9)$$

де

$$D_k = s^4 + s^2 \lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)};$$

$$D_k^a = f_k q_0^L(s^2 + \lambda_k^{(3)}) + \xi_k^{(4)} v_k V_0^L(s^2 + \lambda_k^{(4)});$$

$$D_k^b = -\xi_k^{(2)} f_k q_0^L + \xi_k^{(5)} v_k V_0^L(s^2 + \lambda_k^{(5)}),$$

при цьому

$$\lambda_k^{(1)} = \xi_k^{(1)} + \xi_k^{(3)}; \quad \lambda_k^{(2)} = \xi_k^{(1)} \xi_k^{(3)} - \xi_k^{(2)2}; \quad \lambda_k^{(3)} = \xi_k^{(3)};$$

$$\lambda_k^{(4)} = \xi_k^{(3)} - \frac{\xi_k^{(2)} \xi_k^{(5)}}{\xi_k^{(4)}}; \quad \lambda_k^{(5)} = \xi_k^{(1)} - \frac{\xi_k^{(2)} \xi_k^{(4)}}{\xi_k^{(5)}}.$$

Далі, використовуючи звичайні правила операційного обчислення, здійснюється перехід у простір оригіналів. В результаті нескладних математичних операцій отримаємо

$$a_k(t) = q_0(t) (f_k I_k^{(3)}(t)) + V_0(t) (v_k \xi_k^{(4)} I_k^{(4)}(t));$$

$$b_k(t) = q_0(t) (f_k \xi_k^{(2)} I_k^{(2)}(t)) +$$

$$+ V_0(t) (v_k \xi_k^{(5)} I_k^{(5)}(t)), \quad (10)$$

де позначено  $f(t) * I(t) = \int_0^t f(\tau) I(t - \tau) d\tau$ . Підінтегральні функції  $I$  можуть бути представлені в компактному вигляді у такий спосіб:

$$I_k^{(r)}(t) = \sum_{j=1}^2 \frac{\beta_k^{(r,j)}}{\alpha_k^{(j)}} \sin(\alpha_k^{(j)} t) \quad (r = \overline{2,5});$$

$$\beta_k^{(2,j)} = \frac{-1}{\alpha_k^{(1)2} - \alpha_k^{(j)2}}; \quad \beta_k^{(\rho,j)} = \frac{\lambda_k^{(\rho)} - \alpha_k^{(j)2}}{\alpha_k^{(1)2} - \alpha_k^{(j)2}};$$

$$(1, j = \overline{1,2}; \quad 1 \neq j; \quad \rho = \overline{3,5}).$$

Тут  $\alpha_k^{(j)}$  ( $j = \overline{1,2}$ ) – модулі уявних коренів бікватратного рівняння  $D_k(s) = 0$ .

У випадку електромеханічного навантаження перетворювача функції  $q_0(t)$  і  $V_0(t)$ , що входять в (10), вважаються заданими. Якщо ж п'єзоактивний шар перебуває в режимі прямого п'єзо ефекту (має місце режим «холостого ходу»), то  $V_0$  – невідома. Її значення залежить від деформованого стану оболонки і обчислюється на підставі граничної умови (4''), яка після підстановки в нього виразів (5) прийме вигляд:

$$V_0(t) = \frac{\delta_1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} v_k \left[ a_k(t) \cdot (1 + \zeta_p \xi_k^{(5)2}) + b_k(t) \cdot \xi_k^{(5)} \right]. \quad (11)$$

Подальше виключення невідомої  $V_0$  з (10) з використанням рівності (11) приведе до нескінченної системи інтегральних рівнянь Вольтерри 2-го роду для коефіцієнтів  $a_k(t)$  і  $b_k(t)$ :

$$a_k - \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \left[ \frac{\delta_1}{2} v_n (1 + \zeta_p \xi_n^{(5)2}) v_k \xi_k^{(4)} I_k^{(4)} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} b_n * \left( \frac{\delta_1}{2} v_n \xi_n^{(5)} v_k \xi_k^{(4)} I_k^{(4)} \right) = q_0 * (f_k I_k^{(3)});$$

$$b_k - \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \left[ \frac{\delta_1}{2} v_n (1 + \zeta_p \xi_n^{(5)2}) v_k \xi_k^{(5)} I_k^{(5)} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} b_n * \left( \frac{\delta_1}{2} v_n \xi_n^{(5)} v_k \xi_k^{(5)} I_k^{(5)} \right) = q_0 * (f_k \xi_k^{(2)} I_k^{(2)}). \quad (12)$$

Її розв’язання може бути реалізоване чисельно з використанням класичних квадратурних формул, зокрема формули середніх прямокутників. Загалом, структура даної системи дозволяє звести її розв’язок до рекурентного розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка може бути записана в матричній формі в такий спосіб

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}_m = \mathbf{Y}_m \quad (m = \overline{1, M}),$$

$$\{\mathbf{A}\}_{k,n} = \phi_{k,n} - \int_0^{\Delta t} \frac{\delta_1}{2} v_n (1 + \zeta_p \xi_n^{(5)2}) v_k \xi_k^{(4)} I_k^{(4)}(\tau) d\tau \quad ; \quad \{\mathbf{A}\}_{k,n+N} = - \int_0^{\Delta t} \frac{\delta_1}{2} v_n \xi_n^{(5)} v_k \xi_k^{(4)} I_k^{(4)}(\tau) d\tau ;$$

$$\{\mathbf{A}\}_{k+N,n} = - \int_0^{\Delta t} \frac{\delta_1}{2} v_n (1 + \zeta_p \xi_n^{(5)2}) v_k \xi_k^{(5)} I_k^{(5)}(\tau) d\tau \quad ; \quad \{\mathbf{A}\}_{k+N,n+N} = \phi_{k+N,n+N} - \int_0^{\Delta t} \frac{\delta_1}{2} v_n \xi_n^{(5)} v_k \xi_k^{(5)} I_k^{(5)}(\tau) d\tau ;$$

$$\{\mathbf{Y}_m\}_k = \int_0^{m\Delta t} q_0(\tau) f_k I_k^{(3)}(m\Delta t - \tau) d\tau + \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{n=1}^N \int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t} \frac{\delta_1}{2} v_n [a_{n,p} (1 + \zeta_p \xi_n^{(5)2}) + b_{n,p} \xi_n^{(5)}] v_k \xi_k^{(4)} I_k^{(4)}(m\Delta t - \tau) d\tau;$$

$$\{\mathbf{Y}_m\}_{k+N} = \int_0^{m\Delta t} q_0(\tau) f_k \xi_k^{(2)} I_k^{(2)}(m\Delta t - \tau) d\tau + \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{n=1}^N \int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t} \frac{\delta_1}{2} v_n [a_{n,p} (1 + \zeta_p \xi_n^{(5)2}) + b_{n,p} \xi_n^{(5)}] v_k \xi_k^{(5)} I_k^{(5)}(m\Delta t - \tau) d\tau,$$

де  $N$  – кількість утримуваних у розвиненнях (5)–(7) членів ( $k, n = \overline{1, N}$ );  $M$  – кількість кроків за часом ( $M\Delta t = T_{inv}$ ;  $T_{inv}$  – час дослідження;  $\Delta t$  – крок дискретизації часової координати при використанні методу квадратур);  $\phi_{k,n}$  – символ Кронекера.

Маючи значення  $a_{n,m}$  і  $b_{n,m}$  на наступному етапі здійснюється їх підстановка в співвідношення (5) і (11) для обчислення як компонент вектора переміщень ( $w(z,t)$ ,  $u_0(z,t)$ ), так і різниці потенціалів  $V_0(t)$  між розімкнутими електродами п’єзоелектричного шару.

де  $\mathbf{X}_m = [a_{1,m} \dots a_{N,m} \quad b_{1,m} \dots b_{N,m}]^T$  –  $(2N \times 1)$  матриця-стовбець, який містить значення шуканих коефіцієнтів ( $a_{n,m} = a_n(m\Delta t)$ ;  $b_{n,m} = b_n(m\Delta t)$ );  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{Y}_m$  –  $(2N \times 2N)$  і  $(2N \times 1)$  матриці, елементи якої визначаються за формулами:

#### 4. Числові результати та їх аналіз

Числові дані отримані для біморфної оболонки безрозмірної довжини  $l = 2R_0$ , яка складена з шару п’єзокераміки марки PZT-5 товщиною  $h_p = 0.04R_0$  і шару титанового сплаву VT-6 ( $h_m = h_p/2$ ). Матеріальні характеристики наведено в [3]. При виконанні розрахунків у розвиненнях (5)–(7) утримано 60 членів, що забезпечує наближення до суми з погрішністю не більш 2%. Точність розрахунків також контролювалася варіюванням кроку дискретизації часового інтервалу  $\Delta t$  в методі квадратур.

На рис. 1 суцільною кривою представлені обчислені за формулами (6) і (10) радіальні коливання точки  $z = 0.5l$  у випадку дії

на оболонку з короткозамкненими електродами ( $V_0=0$ ) механічного навантаження східчастого профілю ( $q_0(t)=H(t)$ ). При цьому вважається, що навантаження рівномірно розподілене на області зовнішньої поверхні оболонки із границями  $z_1=0.25l$  і  $z_2=0.75l$ .

Штрихова крива на цьому рисунку ілюструє коливання оболонки в досліджуваній точці ( $z=0.5l$ ) при миттєвому прикладанні до суцільних електродів п'єзоактивного шару одиничного електричного навантаження ( $V_0(t)=H(t)$ ,  $q_0=0$ ).

Представлені на рис. 1 криві свідчать, що при електромеханічному східчастому навантаженні оболонка здійснює коливання

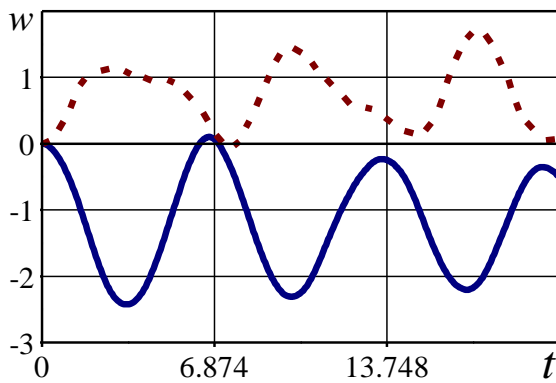


Рис. 1. Деформація оболонки при східчастому електромеханічному навантаженні

Рисунок 2 ілюструє різницю потенціалів  $V_0(t)$  у випадку розімкнутих електродів п'єзокерамічного шару при дії розглянутого вище механічного навантаження –  $q(z,t)=H(t) \cdot [H(z-z_1) - H(z-z_2)]$ . При цьому графік функції  $w(0.5l,t)$ , обчислений на основі (6) і (12), практично збігається (з точністю до товщини лінії) із представленою на рис. 1 суцільною кривою. Тут доречно відзначити, що виконані чисельні експерименти показали, що з прийнятною точністю (відносна погрішність для максимальних значень радіального переміщення не перевищує 1%) визначення  $a_k(t)$  і  $b_k(t)$  у цьому випадку може бути виконане не з системи рівнянь (12), а безпосередньо з рівностей (10), у яких функцію  $V_0(t)$  слід прийняти рівною нулеві:

відносно деякого статичного деформованого стану, що відображає властиві лінійним нестационарним завданням механіки характерні риси. Період зазначених коливань близький до значення  $2\pi/\alpha_{1,1}$ , де  $\alpha_{1,1}$  – частота основної моди коливань оболонки ( $\alpha_{1,1}=0.914$ ). При цьому при електричному збудженні оболонки має місце більш складний характер зміни в часі радіальних переміщень, ніж при механічному, що обумовлене наявністю похідних по просторовій координаті в правій частині розрахункової системи диференціальних рівнянь руху оболонки (1). Водночас порядок максимальних деформацій оболонки при її механічному і електричному безрозмірному одиничному навантаженні є порівняльним.

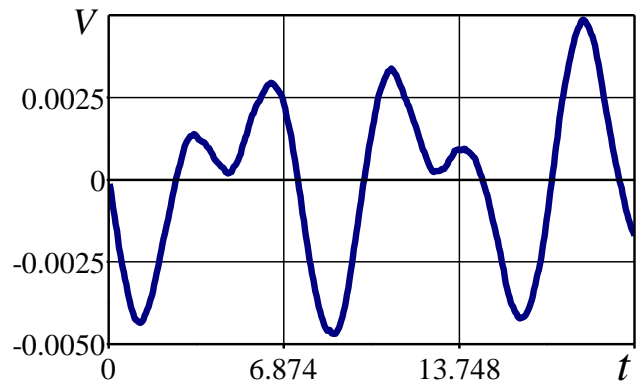


Рис. 2. Різниця потенціалів між розімкненими електродами оболонки

$$a_k(t) = \int_0^t q_0(\tau) f_k I_k^{(3)}(t-\tau) d\tau$$

$$b_k(t) = \int_0^t q_0(\tau) f_k \xi_k^{(2)} I_k^{(2)}(t-\tau) d\tau$$

Загалом, з аналізу представлених на рис. 1 і рис. 2 кривих випливає, що різниця потенціалів між електродами досліджуваної оболонки в режимі прямого п'єзоелектричного ефекту суттєво менша різниці потенціалів, необхідної для збудження коливань оболонки з порівняльними за максимальними значенням деформаціям. А це свідчить про слабку ефективність використання обраного варіанта закріплення торців досліджуваного циліндричного перетворювача та схеми його електродування в якості джерела електричного сигналу. Покращення ефективності електромеханічного перетворення

енергії можливо за рахунок секціонування струмопровідного покриття і/або заміни варіанта граничних умов механічної групи (зокрема, вільні границі). Для розв'язання задачі у такій постановці можуть бути використані отримані в даній роботі результати. Також, з врахуванням викладених у роботі [6] матеріалів, вони можуть бути узагальнені на випадок невісесиметричного електромеханічного навантаження оболонки.

### 5. Висновки

У роботі отримано розв'язок задачі про нестационарне деформування двошарового (метал-п'єзокераміка) електропружного перетворювача у вигляді циліндричної оболонки скінченної довжини з шарнірно закріпленими торцями. З використанням розв'язання шуканих функцій у ряди Фур'є та перетворення Лапласа за часовою координатою задача зведена до виразів для коефіціє-

нтів зазначених розвинень (різниця потенціалів між суцільними електродами відома) або до нескінченної системи інтегральних рівнянь (різниця потенціалів невідома), яка розв'язується чисельно методом усикання. Аналіз результатів виконаних чисельних експериментів показав слабку ефективність розглянутого перетворювача та обраної комбінації граничних умов у якості джерела електричного сигналу.

Отримані результати можуть бути використані при розв'язанні прикладних задач активного керування нестационарними коливаннями конструктивних елементів у вигляді циліндричних оболонок скінченної довжини. Представлені в даній роботі співвідношення можуть бути узагальнені на випадок невісесиметричного механічного навантаження біморфної оболонки та секціонування струмопровідного покриття її електропружного шару.

### Література

1. Guz A. N., Kubenko V. D., Babaev A. E. Dynamics of shell systems interacting with a liquid. *Int. Appl. Mech.* 2002. Vol. 38, Iss. 3. P. 260–301. DOI: 10.1023/A:1016073909775.
2. Karlash V. L. Resonant electromechanical vibrations of piezoelectric shells of revolution (review). *Int. Appl. Mech.* 2008. Vol. 44, Iss. 4. P. 361–387. DOI: 10.1007/s10778-008-0050-1.
3. Kubenko V. D., Yanchevskii I. V. Vibrations of a nonclosed two-layer spherical electroelastic shell under impulsive electromechanical loading. *Int. Appl. Mech.* 2013. Vol. 49, Iss. 3. P. 303–314. DOI: 10.1007/s10778-013-0568-8.
4. Кубенко В. Д., Янчевский И. В. Нестационарные неосесимметричные колебания цилиндрической оболочки металл-пьезокерамика. *Зб. наук. праць «Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла»*. 2011. Вип. 12. С. 188–196.
5. Rudnitskii S. I., Sharapov V. M., Shul'ga N. A. Vibrations of a bimorphic disk transducer of the metal-piezoceramic type. *Int. Appl. Mech.* 1990. Vol. 26, Iss. 10. P. 973–980. DOI: 10.1007/BF00888849.
6. Янчевский И. В., Бабаев А. А. Уравнения нестационарных колебаний электроупругих конической и цилиндрической оболочек конечной длины. *Вісник ЗНУ. Фіз.-мат. науки*. 2017. № 2. С. 332–338.
7. Qiu J., Ji H. The application of piezoelectric materials in smart structures. *Int. J. of Aeronautical & Space Sc.* 2010. Vol. 11, No. 4. P. 266–284. DOI:10.5139/IJASS.2010.11.4.266.
8. Wang H. M., Ding H. J., Chen Y. M. Dynamic solution of a multilayered orthotropic piezoelectric hollow cylinder for axisymmetric plane strain problems. *Int. J. Sol. and Struct.* 2005. Vol. 42, Iss. 1. P. 85–102.
9. Yanchevskii I. V. Nonstationary deformation of an electroelastic nonclosed cylindrical shell under mechanical and electric loading. *Int. Appl. Mech.* 2013. Vol. 49, Iss. 4. P. 475–481.
10. Yang J. S. Piezoelectric transformer structural modeling – A review. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 2007. Vol. 54, No. 6. P. 1154–1170.

### References

1. Guz, A. N., Kubenko, V. D. & Babaev, A. E. (2002). Dynamics of shell systems interacting with a

- liquid. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 38, Iss. 3, pp. 260–301. DOI: 10.1023/A:1016073909775.
2. Karlash, V. L. (2008). Resonant electromechanical vibrations of piezoelectric shells of revolution (review). *Int. Appl. Mech.*, Vol. 44, Iss. 4, pp. 361–387. DOI: 10.1007/s10778-008-0050-1.
  3. Kubenko, V. D. & Yanchevskii, I. V. (2013). Vibrations of a nonclosed two-layer spherical electroelastic shell under impulsive electromechanical loading. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 49, Iss. 3, pp. 303–314. DOI: 10.1007/s10778-013-0568-8.
  4. Kubenko, V. D. & Yanchevskiy, I. V. (2011). Nonstationary nonaxisymmetric vibrations of metal-piezoceramics cylindrical shell. *Zb. nauk. prac «Metody rozviazuvannia prykladnyh zadach mekhaniky deformivnogo tverdogo tila»*, Iss. 12, pp. 188–196.
  5. Rudnitskii, S. I., Sharapov, V. M. & Shul'ga N. A. (1990). Vibrations of a bimorphic disk transducer of the metal-piezoceramic type. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 26, Iss. 10, pp. 973–980. DOI: 10.1007/BF00888849.
  6. Yanchevskiy, I. V. & Babaev A. A. (2017). Equations of non-stationary oscillations of electroelastic conic and cylindrical shells of finite length. *Visnyk ZNU. Fiz.-mat. nauky*, No. 2, pp. 332–338.
  7. Qiu, J. & Ji, H. (2010). The application of piezoelectric materials in smart structures. *Int. J. of Aeronautical & Space Sc.*, Vol. 11, No. 4, pp. 266–284. DOI:10.5139/IJASS.2010.11.4.266.
  8. Wang, H. M., Ding, H. J. & Chen, Y. M. (2005). Dynamic solution of a multilayered orthotropic piezoelectric hollow cylinder for axisymmetric plane strain problems. *Int. J. Sol. and Struct.*, Vol. 42, Iss. 1, pp. 85–102. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2004.06.059.
  9. Yanchevskii, I. V. (2013). Nonstationary deformation of an electroelastic nonclosed cylindrical shell under mechanical and electric loading. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 49, Iss. 4, pp. 475–481. DOI: 10.1007/s10778-013-0581-y.
  10. Yang, J. S. (2007). Piezoelectric transformer structural modeling – A review. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, Vol. 54, No. 6, pp. 1154–1170. DOI: 10.1109/TUFFC.2007.369.