

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ КОНФОРМНИХ ПЛОСКИХ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ ПРО ЗНОШУВАННЯ ЗА СТЕПЕНЕВИМ ЗАКОНОМ ПРИ ФІКСОВАНІЙ ПЛОЩАДЦІ КОНТАКТУ

Дмитрів К. М.

аспірант кафедри фундаментальної і прикладної математики

Запорізький національний університет

вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна

orcid.org/0000-0001-7259-7510

c.dmitrova@gmail.com

Д'яченко Н. М.

кандидат фізико-математичних наук, доцент,

доцент кафедри фундаментальної і прикладної математики

Запорізький національний університет

вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна

orcid.org/0000-0001-5284-4502

dyachenkonata69@gmail.com

Ключові слова: *плоска зносоконтактна задача, степеневий закон зношування, штамп з плоскою підшовою, конформний контакт, швидко осцилююча функція форми підшови штампа, метод редукції.*

Зношування – це процес часткового або повного видалення матеріалу з поверхні тертя внаслідок її руйнування, який призводить до поступової зміни форми і розмірів тіл, що взаємодіють. Закон зношування виражає, зокрема, залежність швидкості зношування від тиску, яка може бути лінійною або степеневою.

У роботі розглянуто плоску контактну задачу про зношування за степеневим законом тонкої пружної смуги при ковзанні по ній штампа. Розглянуто два випадки. Випадок 1: штамп має плоску підшову та випадок 2: конформний контакт смуги і штампа з підшовою, форма якої визначається швидко осцилюючою тригонометричною функцією. При цьому область контакту є фіксованою. Для розв'язання поставленої задачі застосовується покроковий за часом метод. На кожному часовому кроці систему інтегральних рівнянь, що моделює дану задачу, зведено до операторного рівняння Фредгольма другого роду, яке має єдиний розв'язок, котрий можна знайти методом послідовних наближень. Для випадку 1 отримано аналітичний і чисельний розв'язки, у випадку 2 – лише чисельний. Аналітичний розв'язок подано степеневим рядом з невідомими коефіцієнтами, які можна знайти з нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Наближено аналітичний розв'язок знайдено за допомогою методу редукції. Чисельне розв'язання передбачає заміну інтегрального рівняння системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно дискретних значень функції контактного тиску. Отримано висновок про ефективність наближено аналітичного підходу розв'язання над чисельним для випадку 1 і неефективність – у випадку 2.

Проведено аналіз числових результатів. Зокрема, у випадку 2 конформного контакту розподіл контактного тиску в кожний момент часу характеризується функцією, локальні екстремуми якої протилежні екстремумам функції, що визначає форму штампа. Порівняльний аналіз зносоконтактних характеристик у двох випадках показав їх узгодженість. Результати даної роботи підтверджують, що процес зношування в обох розглянутих випадках можна умовно поділити на дві стадії: стадію припрацювання та стадію сталого зносу, що було зазначено в роботах І.Г. Горячевої.

Вплив степеневого закону зношування характеризується сповільненням процесу зношування у порівнянні з лінійним законом.

COMPARATIVE ANALYSIS OF CONFORMAL CONTACT PROBLEMS OF WEARING UNDER THE POWER LAW WITH FIXED CONTACT ZONE

Dmytriv K. M.

*Postgraduate Student at the Department of Fundamental and Applied Mathematics
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0001-7259-7510
c.dmitrova@gmail.com*

Dyachenko N. M.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Fundamental and Applied Mathematics
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0001-5284-4502
dyachenkonata69@gmail.com*

Key words: *a flat wear contact problem, the power law of wear, stamp with a flat bottom, conformal contact, a fast oscillating function of stamp bottom shape, reduction method.*

Wear is the process of partial or complete removal of material from the friction surface due to its destruction, which leads to a gradual change in the shape and size of the interacting units. The wear law displays how the wear rate depends on pressure, which can be linear or power.

In the paper, the flat contact problem of wearing a thin elastic strip when a stamp slides on it under the power law is considered. There are two cases. Case 1: the stamp has a flat bottom; case 2: conformal contact of the strip and the stamp, the bottom shape of which is determined by the fast oscillating trigonometric function. The contact area is fixed. To solve this problem a step-by-step method in time is used. At each time step, the system of integral equations modeling this problem is reduced to the Fredholm operator equation of the second kind, which has a single solution that can be found by the iteration method. For case 1, analytical and numerical solutions are obtained in case 2 – only numerical. The analytical solution is represented by a power series with unknown coefficients, which can be found from an infinite system of linear algebraic equations. The approximate analytical solution is found by using the reduction method. The numerical solution is found by replacing the integral equation with a system of linear algebraic equations, in which discrete values of the contact pressure function are unknown. As a result, the approximate analytical approach is more efficient than the numerical one for case 1 and less efficient for case 2.

The analysis of numerical results is carried out. Therefore, in case 2 the contact pressure distribution at each time point is described by a function, which local extremes are opposite to the extremes of the function that determines the shape of the stamp. Comparative analysis of wear contact characteristics in two cases shows their consistency.

The results of the paper confirm that the wear process in both cases can be divided into two stages: the stage of running-in and the stage of steady-state wear, which was mentioned in I. G. Goryacheva's researches.

The influence of wearing under the power law is characterized by a slowing down of the wear process compared to the linear law.

Вступ. Одним з актуальних питань сучасного машинобудування є збільшення терміну служби машин, обладнання, приладів та підвищення їх надійності. Успішному вирішенню даної проблеми сприяють ґрунтовні наукові дослідження у галузі трибології та її інженерних додатків.

На довговічність машин впливає їх міцність, зносостійкість і жорсткість. При цьому зношування є одним з основних видів руйнування та найбільш розповсюдженою причиною виходу деталей та механізмів з ладу.

Руйнування контактуючих тіл в процесі зношування супроводжується частковим видаленням матеріалу, а отже, й зміною форми і розмірів тіл [1–3]. Одним з ефективних способів запобігання передчасного зносу вузлів тертя є використання в них покриттів [3–5].

У даній роботі розглянемо контактну задачу зношування пружної тонкої смуги-покриття, що лежить на основі, внаслідок ковзання по ній штампа. Функція, що визначає форму підшви штампа, повинна бути парною, а в центрі площадки контакту дорівнюватиме нулю. У роботі дослідимо два випадки: *випадок 1* – плоска підшва штампа, *випадок 2* – підшва визначається швидко осцилюючою тригонометричною функцією. Крім того, задача розв’язується в діапазоні часу, якому відсутнє повне зношування покриття.

Під конформними розуміють взаємно повторювані поверхні. У даному випадку повторюються форми поверхонь підшви штампа і смуги-покриття. Конформні контактні задачі досліджено, зокрема, в роботах К.Є. Казакова [6] для в’язкопружних тіл. Подібний контакт може виникнути, наприклад, коли штамп занурюється в покриття, що твердне, до його повного затвердіння. У результаті цього поверхня покриття отримує форму підшви штампа.

Кінетику зміни форми контактуючих поверхонь характеризує швидкість зношування. З теоретичних та експериментальних досліджень відомо, що залежність швидкості зношування від тиску може визначатися лінійним або степеневим (нелінійним) законами [1; 2; 5]. У даній роботі акцентовано увагу на степеневому законі зношування.

Огляд літератури. Вперше задачу розрахунку зношування абсолютно жорстких тіл, що контактують, поставив О.С. Проніков [6]. Його задача допускала знос обох тіл пари тертя при нелінійному законі зношування. Саме він побудував загальну модель зношування жорстких тіл.

Ця проблема отримала подальший розвиток, зокрема, в роботах [1–5; 7–17], а робота [3] містить детальний огляд досліджень в цій галузі. Увага дослідників зносоконтактних задач спрямована

на плоскі [1; 3–5; 7–11], осесиметричні [1; 2; 4], просторові задачі [1; 4; 12–14], з різними умовами навантаження, зокрема, динамічного [5; 15], з різними фізичними властивостями тіл, що контактують [4; 5; 7], для випадків фіксованої [1; 2; 5; 7; 12; 13] та невідомої площадок контакту [5; 16].

Однією з поширених постановок контактних задач є розрахунок зносу поверхні за наявності тонкого покриття. Зазвичай, механічні характеристики таких шарів описуються моделлю Вінклера. Зокрема, цей підхід запропоновано В.М. Александровим [2].

У роботах І.Г. Горячевої, М.М. Добичіна [1; 2] виведено інтегральні рівняння зносоконтактних плоских задач і застосовано покроковий за часом метод для отримання чисельних розв’язків у випадках лінійного і степеневих законів зношування тонкої смуги-покриття при ковзанні по ній штампа з плоскою підшвою.

Залишилося відкритим питання отримання наближено аналітичного розв’язку задачі у *випадку 1* при степеневому законі зношування. У статті [10] запропоновано наближено аналітичний підхід до розв’язання даної задачі при лінійному законі, деякі ідеї якого збережено в цій роботі. Для розв’язання поставленої задачі застосуємо покроковий за часом метод, що передбачає знаходження на кожному кроці наближено аналітичного розв’язку з використанням степеневих рядів і методу редукції.

Чисельний підхід до отримання розв’язку плоскої зносоконтактної задачі у *випадку 1*, запропонований в [1; 2], застосуємо як до задачі у *випадку 1* так і у *випадку 2*. Проведемо аналіз щодо ефективності застосування аналітичного підходу у кожному випадку.

Чимало підходів до обчислення зносу пружних тіл, що контактують при постійній області контакту та постійному зовнішньому навантаженні, засновано на наявності стадії сталого зносу, коли нормальний тиск стає рівномірним на всій області контакту. Цю властивість досліджено в роботах [1; 2]. Слід зазначити, що існування стадії сталого зносу виявлено в статті [17] дослідним шляхом. На це вказував незмінний в часі профіль поверхні, що зношується. Поставимо за мету перевірку зазначеного ефекту.

Постановка задачі та її інтегральні рівняння

Розглянемо плоску контактну задачу про взаємодію штампа з двошаровою пружною основою в наступній постановці [1; 2]. Нехай пружна смуга початкової товщини h_0 лежить на пружній основі (рис. 1). Смуга може бути закріпленою двома способами ($y = h_0$):

- 1) смуга лежить на пружній основі без тертя (задача 1);
- 2) смуга жорстко закріплена на основі (задача 2).

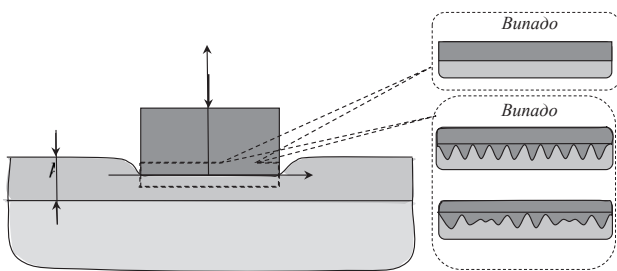


Рис. 1. Схема контакту штамп з пружною тонкою смугою

На штамп з плоскою основою півширини a (рис. 1.1) діє постійна вертикальна сила P . Смугу вважаємо тонкою, тобто її ширина задовольняє умову $h_0/a \ll 1$. Смуга товщиною $h(x,t)$ зношується штампом, що ковзає в напрямі осі Oz . Припустимо, що швидкість зносу смуги $\partial h(x,t)/\partial t$ залежить від контактної тиску $p(x,t)$ за степеневим законом:

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = -K_w \left(\frac{p(x,t)}{p^*} \right)^\alpha, \quad (1)$$

де K_w – коефіцієнт зносу, що залежить від швидкості руху, температури і умов взаємодії; p^* – деякий характерний тиск [1; 2; 7].

Як зазначено в монографії [1], дотичні напруження на площадці контакту діють тільки у напрямі руху штамп і відсутні у напрямі осі Ox , тобто $\tau_{xy} = 0$; крім того, компонента τ_{zy} не впливає на розподіл контактних тисків, проте, впливає на швидкість процесу зношування.

Якщо зміщення пружної смуги задовольняє умову $\partial h(x,t)/\partial x < 1$, то рівняння для визначення тиску $p(x,t)$ у довільний момент часу t має вигляд [1; 2]:

$$\begin{aligned} [h(x,t) - h(0,t)] - \frac{A}{E_1} [h(x,t)p(x,t) - h(0,t)p(0,t)] + \\ + \frac{1}{\pi E_2} \int_{-a}^a p(x',t) \ln \left| \frac{x' - x}{x'} \right| dx' = f(x), \quad (2) \end{aligned}$$

де $E_i^* = \frac{E_i}{2(1-\nu_i^2)}$, E_i, ν_i – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона смуги ($i=1$) і основи ($i=2$). Відомо [1], що за припущення $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, значення A для першої задачі дорівнює $0,5$, а для другої задачі – $A = \frac{2(1-\nu)(\kappa-1)(2-n+\nu\kappa)}{(\kappa+1)^2}$, де $n = \frac{E_1^*}{E_2^*}$, $\kappa_i = 3 - 4\nu_i$ ($i=1, 2$). Функція $f(x)$ у правій частині рівняння (2) відрізняється для випадків 1 і 2: у випадку 1 для штамп з плоскою підшоною $f(x) = 0$, у випадку 2 для штамп з осцилюючою функцією форму підшови визначимо функцією

$$f(x) = g(x) - \max g(x); \quad g(x) = \sum_{k=1}^s C_k \cos \pi n_k x.$$

де n_k ($k = \overline{1, s}$) – натуральні числа, більші за 1.

У випадку 1 в початковий момент часу товщина смуги $h(x,0) = h_0$ для будь-яких $x \in [-a; a]$.

Для того, щоб задовольнити умову конформності контакту, у випадку 2 потрібно покласти $h(x,0) = h_0 - |f(x)|$.

У рівнянні (2) другий доданок лівої частини можна розглядати як переміщення поверхні завдяки наявності тонкої смуги, що поводить себе як покриття вінклерівського типу з коефіцієнтом пропорційності $k = \frac{Ah_0}{E_1^*}$, а третій доданок характеризує переміщення пружної основи [1; 2].

Товщину смуги у довільний момент часу t можна визначити з рівняння зносу (1):

$$h(x,t) = h_0 - K_w \int_0^t \left(\frac{p(x,t')}{p^*} \right)^\alpha dt'. \quad (3)$$

Крім того, зазначені рівняння доповнюються умовою рівноваги:

$$\int_{-a}^a p(x',t) dx' = P. \quad (4)$$

Таким чином, маємо систему інтегральних рівнянь (2)-(4). В ній невідомими є функція товщини смуги $h(x,t)$ та функція контактної тиску $p(x,t)$.

Методи розв'язання

Метод дискретизації за часом. У монографіях [1; 2] запропоновано покроковий за часом метод розв'язання рівнянь (2)-(4), де зазначено, що крок за часом $\Delta\tau$ варто обирати таким чином, щоб в межах будь-якого інтервалу $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, де $\tau_{k+1} = \tau_k + \Delta\tau$, $\tau_0 = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, можна було знехтувати величиною зносу поверхні і перерозподілом тиску на площадці контакту.

Якщо ввести наступні безрозмірні координати і функції:

$$\tau = t \frac{K_w}{a}, \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{aE_2^*}, \quad \tilde{h}_0 = \frac{h_0}{a}, \quad \tilde{h}(\xi, \tau) = \frac{1}{a} h \left(\xi a, \tau \frac{a}{K_w} \right),$$

$$\tilde{A} = \frac{A}{n}, \quad \tilde{p}(\xi, \tau) = \frac{1}{E_2^*} p \left(\xi a, \tau \frac{a}{K_w} \right), \quad \tilde{f}(\xi) = \frac{1}{a} f(\xi a),$$

то система інтегральних рівнянь (2)-(4) апроксимується наступними співвідношеннями, поданими в безрозмірному вигляді:

$$\tilde{h}_{k+1}(\xi) = \tilde{h}_k(\xi) - \left(\frac{\tilde{p}_k(\xi)}{\tilde{p}^*} \right)^\alpha \Delta\tau, \quad \tilde{h}_0(\xi) = \tilde{h}_0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}_k(\xi) - \tilde{h}_k(0) - \tilde{A} [\tilde{h}_k(\xi) \tilde{p}_k(\xi) - \tilde{h}_k(0) \tilde{p}_k(0)] + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{p}_k(\xi') \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| d\xi' = \tilde{f}(\xi), \quad (6) \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 \tilde{p}_k(\xi') d\xi' = \tilde{P}. \quad (7)$$

Отже, на кожному часовому кроці необхідно:

1) з рівнянь (6) та (7) знайти функцію нормального тиску $\tilde{p}_k(\xi)$;

2) з рівняння (5) знайти функцію товщини смуги $\tilde{h}_{k+1}(\xi)$ для наступного за часом кроку.

У результаті можна отримати товщину смуги та розподіл тиску у різні моменти дискретного часу при зношуванні поверхневого шару. Даний метод дискретизації за часом застосовується у

сполучені з аналітичним або чисельним методом розв'язання інтегральних рівнянь (6), (7).

Аналітичний метод розв'язання системи (6), (7) у випадку 1 на кожному часовому кроці.

Нульовий крок за часом. Розглянемо момент часу $\tau_0 = 0$. Розв'язок задачі на цьому кроці дублює відповідний розв'язок, наведений в роботі [10] на всіх етапах, за винятком останнього. Наведемо тут основні результати, що будуть використані у подальшому.

1. Введено позначення:

$$\alpha_0 = 1 - \tilde{A}\tilde{h}_0, \quad P_0(\xi) = \tilde{p}_0(\xi) - \tilde{p}_0(0),$$

$$w(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| d\xi'. \quad (8)$$

2. З рівняння рівноваги $\int_{-1}^1 \tilde{p}_0(\xi') d\xi' = \tilde{P}$ виражено значення $\tilde{p}_0(0)$:

$$\tilde{p}_0(0) = \frac{\tilde{P}}{2} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_0(\xi') d\xi'. \quad (9)$$

3. Враховуючи співвідношення (6), (8), (9), у момент часу $\tau_0 = 0$ отримано інтегральне рівняння

$$P_0(\xi) = \alpha_0 P_0(\xi) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| P_0(\xi') d\xi' -$$

$$- \frac{w(\xi)}{2} \int_{-1}^1 P_0(\xi') d\xi' + \frac{\tilde{P}}{2} w(\xi). \quad (10)$$

4. Введення операторів

$$[B_1 f](\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| f(\xi') d\xi',$$

$$[B_2 f](\xi) = \frac{w(\xi)}{2} \int_{-1}^1 f(\xi') d\xi',$$

$$[L f](\xi) = [(B_1 - B_2) f](\xi) \quad (11)$$

дозволило переписати рівняння (10) у вигляді операторного рівняння Фредгольма другого роду

$$P_0(\xi) = [(\alpha_0 I + L) P_0](\xi) + \frac{\tilde{P}}{2} w(\xi). \quad (12)$$

5. Введення множини Γ неперервних, невід'ємних, парних на відрізку $[-1; 1]$ та зростаючих на відрізку $[0; 0,9]$ функцій $f(x)$ для яких $f(0) = 0$ дозволило довести, що на цій множині оператор $(\alpha_0 I + L) : C_{[-1;1]} \rightarrow C_{[-1;1]}$ є стискуючим за умов $\tilde{A}\tilde{h}_0 < 1, 0 < \alpha_0 < 1$. Отже, за цих умов рівняння (12) має єдиний розв'язок на множині Γ

6. Знайдено розклади образу степеневі функції $\psi(\xi) = \xi^{2n}$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) під дією введених вище операторів:

$$[B_1 \psi](\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{n,i} \xi^{2i}, \quad [L \psi](\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} b_{n,i} \xi^{2i}, \quad (13)$$

де $\beta_{n,i} = -\frac{1}{\pi \cdot i \cdot (2n - 2i + 1)}, i = 1, 2, 3, \dots;$

$$b_{n,i} = \beta_{n,i} - \frac{1}{2n+1} \beta_{0,i}, i = 1, 2, 3, \dots$$

Оскільки $w(\xi) = [Be](\xi)$, де $e(\xi) \equiv 1$, то

$$w(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{0,i} \xi^{2i}. \quad (14)$$

7. За допомогою розвинення розв'язку рівняння в ряд Неймана доведено, що розв'язок рівняння (12) можна подати рядом

$$P_0(\xi) = \frac{\tilde{P}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(0)} \xi^{2n}. \quad (15)$$

8. Розклади (13)-(15) дозволяють звести рівняння (12) до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів ряду (15):

$$\delta_n^{(0)} = \alpha_0 \delta_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j^{(0)} b_{j,n} + \beta_{0,n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (16)$$

9. Нескінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь (16) розв'язується наближено за допомогою методу редукції шляхом зведення її до скінченної системи з M рівнянь. Остання розв'язується ітераційним методом. Можливість застосування методу редукції і збіжність послідовності наближених розв'язків до точного на множині Γ за умов $\tilde{A}\tilde{h}_0 < 1, 0 < \alpha_0 < 1$ пояснюється в [10].

10. Співвідношення (8) і (9) дозволяють знайти невідому функцію контактної тиску в нульовий момент часу:

$$\tilde{p}_0(\xi) = \tilde{p}_0(0) + P_0(\xi) = \frac{\tilde{P}}{2} \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^{(0)}}{2j+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j^{(0)} \xi^{2j} \right). \quad (17)$$

Особливість поставленої задачі у випадку 1 полягає у пошуку товщини смуги по завершенню часу $\Delta\tau$ за допомогою співвідношення (5):

$$\tilde{h}_1(\xi) = \tilde{h}_0 - \Delta\tau \left(\frac{\tilde{P}}{2\tilde{p}^*} \right)^{\circ} \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^{(0)}}{2j+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j^{(0)} \xi^{2j} \right)^{\circ}.$$

Оскільки у подальшому потрібно мати розклад отриманої функції в степеневий ряд, то виконаємо наступні перетворення.

Спочатку перепишемо функцію $\tilde{h}_1(\xi)$ у вигляді:

$$\tilde{h}_1(\xi) = \tilde{h}_0 - \Delta\tau \left(\frac{\tilde{P}}{2\tilde{p}^*} \right)^{\circ} \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^{(0)}}{2j+1} \right)^{\circ} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{(0)} \xi^{2j} \right)^{\circ}, \quad (18)$$

де $\sigma_0^{(0)} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^{(0)}}{2j+1}, \sigma_j^{(0)} = \frac{\delta_j^{(0)}}{\sigma_0^{(0)}} (j = 1, 2, 3, \dots)$.

Отримаємо розклад функції $\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{(0)} \xi^{2j} \right)^{\circ}$ в ряд Маклорена, використавши відомий розклад для функції $(1+u)^{\circ}$:

$$\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{(0)} \xi^{2j} \right)^{\circ} = 1 + \omega \left(\sigma_1^{(0)} \xi^2 + \sigma_2^{(0)} \xi^4 + \sigma_3^{(0)} \xi^6 + \sigma_4^{(0)} \xi^8 + \dots \right) +$$

$$+ \frac{\omega(\omega-1)}{2!} \left(\sigma_1^{(0)} \xi^2 + \sigma_2^{(0)} \xi^4 + \sigma_3^{(0)} \xi^6 + \sigma_4^{(0)} \xi^8 + \dots \right)^2 +$$

$$+ \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{3!} \left(\sigma_1^{(0)} \xi^2 + \sigma_2^{(0)} \xi^4 + \sigma_3^{(0)} \xi^6 + \sigma_4^{(0)} \xi^8 + \dots \right)^3 +$$

$$+ \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{4!} \left(\sigma_1^{(0)} \xi^2 + \sigma_2^{(0)} \xi^4 + \sigma_3^{(0)} \xi^6 + \sigma_4^{(0)} \xi^8 + \dots \right)^4 + \dots$$

Далі зведемо подібні доданки при однакових степенях ξ і знайдемо закономірності

$$p_{m,s} = \prod_{i=1}^{s-m+1} \frac{\omega - i + 1}{i}, \quad a_{s,m} = \sum_{i=1}^m a_{s-i,m-i+1} \sigma_i^{(0)}, \quad a_{s,s} = \sigma_s^{(0)},$$

$$\gamma_s^{(0)} = \sum_{m=1}^s p_{m,s} a_{s,m}$$

$$(m = 1, \dots, s-1, \quad s = 1, 2, 3, \dots),$$

що дозволяють подати функцію $\tilde{h}_1(\xi)$ у вигляді степеневому ряду

$$\tilde{h}_1(\xi) = \tilde{h}_0 - \Delta\tau \left(\frac{\tilde{P}}{2\tilde{P}^*} \right)^\omega (\sigma_0^{(0)})^\omega \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^{(0)} \xi^{2j} \right).$$

k -ий за часом крок. Нехай розв'язок на попередньому кроці $\tilde{p}_{k-1}(\xi)$ уже знайдено. У тому числі відома й функція товщини смуги

$$\tilde{h}_k(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i^{(k)} \xi^{2i}. \quad (19)$$

Щоб знайти функцію нормального тиску на k -му за часом кроці, потрібно розв'язати систему інтегральних рівнянь (6)-(7). Аналогічний вигляд мала задача на k -му кроці для лінійного закону зношування. Викладемо послідовність дій щодо її дослідження відповідно до роботи [10].

1. Введено позначення:

$$\alpha_k = 1 - \tilde{A}\tilde{h}_k(0), \quad P_k(\xi) = \tilde{p}_k(\xi) - \tilde{p}_k(0),$$

$$H_k(\xi) = \tilde{h}_k(\xi) - \tilde{h}_k(0). \quad (20)$$

2. З умови рівноваги (7) виражено $\tilde{p}_k(0)$:

$$\tilde{p}_k(0) = \frac{\tilde{P}}{2} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_k(\xi') d\xi'. \quad (21)$$

3. З використанням (20) і (21) інтегральне рівняння (6) набуде вигляду

$$P_k(\xi) = \alpha_k P_k(\xi) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| P_k(\xi') d\xi' - \frac{w(\xi)}{2} \int_{-1}^1 P_k(\xi') d\xi' -$$

$$-\tilde{A}H_k(\xi) \left[P_k(\xi) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_k(\xi') d\xi' \right] + \frac{\tilde{P}}{2} w(\xi) - \frac{\tilde{P}}{2} \tilde{A}H_k(\xi) + H_k(\xi). \quad (22)$$

4. Введено наступні лінійні оператори

$$[R_k f](\xi) = \tilde{A}H_k(\xi) \left[f(\xi) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(\xi') d\xi' \right],$$

$$[L_k f](\xi) = [(L - R_k) f](\xi) \quad (23)$$

і функцію

$$v_k(\xi) = \frac{\tilde{P}}{2} w(\xi) - \frac{\tilde{P}}{2} \tilde{A}H_k(\xi) + H_k(\xi), \quad (24)$$

яка виражається через степеневі ряди з коефіцієнтами, що визначені на кроці $k-1$. Таким чином, інтегральне рівняння (23) перетворюється в операторне рівняння Фредгольма другого роду, де функція $v_k(\xi)$ буде вільним членом:

$$P_k(\xi) = [(\alpha_k I + L_k) P_k](\xi) + v_k(\xi). \quad (25)$$

5. Доведено, що на множині M рівняння (25) має єдиний розв'язок, який можна подати рядом

$$P_k(\xi) = \frac{\tilde{P}}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^{(k)} \xi^{2i}, \quad (26)$$

а коефіцієнти знайти з нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\delta_n^{(k)} = \alpha_k \delta_n^{(k)} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j^{(k)} b_{j,n} - \tilde{A} \left[-\phi_n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^{(k)}}{2j+1} + \sum_{s=1}^{n-1} \phi_{n-s} \delta_s^{(k)} \right] +$$

$$+\beta_{0,n} - \tilde{A}\phi_n + \frac{2}{\tilde{P}} \phi_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (27)$$

6. Показано, що для наближеного розв'язання системи (27) можна застосовувати метод редукції і метод ітерацій.

7. Використання (20), (21), (26) дозволило знайти шукану функцію нормального тиску в момент часу τ_k :

$$\tilde{p}_k(\xi) = \tilde{p}_k(0) + P_k(\xi) = \frac{\tilde{P}}{2} \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^{(k)}}{2j+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j^{(k)} \xi^{2j} \right). \quad (28)$$

Наступна дія характеризує відмінність в розв'язанні даної задачі від випадку лінійного закону [10]. З співвідношень (5) і (28) знайдемо функцію товщини смуги $\tilde{h}_{k+1}(\xi)$:

$$\tilde{h}_{k+1}(\xi) = \tilde{h}_k(\xi) - \left(\frac{\tilde{p}_k(\xi)}{\tilde{P}^*} \right)^\omega \Delta\tau = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i^{(k)} \xi^{2i} -$$

$$-\Delta\tau \left(\frac{\tilde{P}}{2\tilde{P}^*} \right)^\omega \left[1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^{(k)}}{2j+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j^{(k)} \xi^{2j} \right]^\omega.$$

Введення позначень

$$\sigma_0^{(k)} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^{(k)}}{2j+1}, \quad \sigma_j^{(k)} = \frac{\delta_j^{(k)}}{\sigma_0^{(k)}} \quad (j = 1, 2, 3, \dots),$$

$$a_{s,m} = \sum_{i=1}^m a_{s-i,m-i+1} \sigma_i^{(k)}, \quad a_{s,s} = \sigma_s^{(k)}, \quad \gamma_s^{(k)} = \sum_{m=1}^s p_{m,s} a_{s,m}$$

$$(m = 1, \dots, s-1, \quad s = 1, 2, 3, \dots)$$

дозволяє подати функцію товщини смуги в момент часу τ_{k+1} у вигляді:

$$\tilde{h}_{k+1}(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i^{(k)} \xi^{2i} - \Delta\tau \left(\frac{\tilde{P}}{2\tilde{P}^*} \right)^\omega (\delta_0^{(k)})^\omega \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^{(k)} \xi^{2j} \right).$$

Чисельне розв'язання системи (6), (7) на кожному часовому кроці.

Дослідження властивостей інтегральних операторів рівнянь (6) і (7) і висновки про розв'язність системи для будь-якої неперервної функції в правій частині проведено в [1; 3; 9]. Деталі отримання чисельного розв'язку виписано в монографії [2]. Опишемо лише ідею методу.

1. Відрізок $[-1; 1]$ розбивається на непарну кількість N рівних частин $[\xi_{j-1}; \xi_j]$, $j = \overline{1, N}$.

2. На кожному відрізку розбиття до інтегралів в рівняннях застосовується наближення теореми про середнє з відомим значенням інтеграла:

$$\int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| \tilde{p}_k(\xi') d\xi' \approx \sum_{j=1}^N \tilde{p}_k(\xi_{j-1/2}) \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| d\xi';$$

$$\int_{-1}^1 \tilde{p}_k(\xi') d\xi' \approx \sum_{j=1}^N \tilde{p}_k(\xi_{j-1/2}) (\xi_j - \xi_{j-1}).$$

3. Рівняння $(N + 1)/2$ задовольняється тотожно.

4. В результаті система (6)-(7) замінюється на систему з N рівняння з N змінними. Система допускає зменшення порядку вдвічі [2].

Аналіз числових результатів

Числові результати отримуємо для випадку, коли смуга жорстко закріплена на основі (задача 2). Розрахунки будемо проводити у припущенні, що відношення модулів пружностей смуги і основи дорівнює $n = \frac{E_1}{E_2} = 0,1$. Значення безрозмірних величин оберемо такі самі, як в монографії [1]: $\omega = 1, 4$, $\tilde{h}_0 = 3 \cdot 10^{-2}$, $\tilde{P} = 9 \cdot 10^{-3}$, $\tilde{p}^* = 0,26$. Часовий крок обрано $\Delta\tau = 0,01$.

Наближено аналітичний розв'язок у випадку 1 обчислювався за методом редукції для $M = 50$ і $M = 100$ розрахунки показали збіжність у значеннях шуканих величин до третього значущого знаку.

На рис. 2 наведено графіки розподілу нормального тиску під штампом з плоскою основою (випадок 1) в різні моменти часу процесу зношування за степеневим (а) і лінійним (б) законом зношування. А на рис. 3 – графіки відповідних профілів зношеної поверхні в ті самі моменти часу. Оскільки обидві функції є симетричними, то графіки побудовано на відрізку $[0,1]$. Суцільним лініям відповідають наближено аналітичному розв'язку, маркованим – чисельним при $N = 61$ і $N = 21$. Спостерігається відхилення між аналітичним і чисельним розв'язками при $N = 21$ до 8%, при $N = 61$ – до 2%.

Проаналізуємо ефективність наближено аналітичного розв'язання. По-перше, запропонований наближено аналітичний підхід, окрім іншого, спрямований на зведення інтегрального рівняння до такого вигляду, який дозволяє на певному класі функцій застосовувати ітераційні методи. Вони, в свою чергу, суттєво прискорюють отри-

мання числових результатів порівняно з прямими методами розв'язання систем, до яких зводиться задача чисельними методами. По-друге, ефективність наближено аналітичного підходу розв'язання визначається можливістю отримання однакової точності, розв'язуючи систему меншого порядку, як порівняти з чисельним розв'язанням. По-третє, наближено аналітичний розв'язок дозволяє знайти значення контактних характеристик безпосередньо в межових точках площадки контакту, в той час, як чисельний – лише в точках, близьких до межі.

Розрахунки у випадку 2 проводилися для тригонометричних функцій $f_1(x) = C(\cos 10\pi x - 1)$ і $f_2(x) = C(0.5\cos 10\pi x + 0.5\cos 8\pi x - 1)$, де $C = 0.015 h_0$, при тих самих параметрах степеневому закону зношування. Застосування описаного вище аналітичного підходу передбачало б розвинення даної функції в степеневий ряд з не виправдано великою кількістю доданків, що знижує ефективність аналітичного розв'язання. Крім того, аналіз можливості застосування методу редукції проведено на множині Γ функцій, яким не задовольняють розв'язки у випадку 2. Тому у даному випадку застосовано саме чисельний метод при $N = 101$. Відповідні результати наведено на рис. 4 суцільними лініями.

Вибір більшого значення N , ніж у випадку 1, пов'язано саме з осцилюючими властивостями функції, що визначає форму підшови штампа. Зокрема, відхилення між чисельними розв'язками, отриманими при $N = 81$ і $N = 101$, становить до 2%, в той час, як у випадку 1 для таких значень N відхилення становить менше за 0,2%.

Задля покращення наочності поведінки цих функцій контактного тиску на рис. 4 в) для форми підшови, визначеної функцією $f_2(x)$, діапазон зміни значень функцій тиску звужено до відрізка [12; 22].

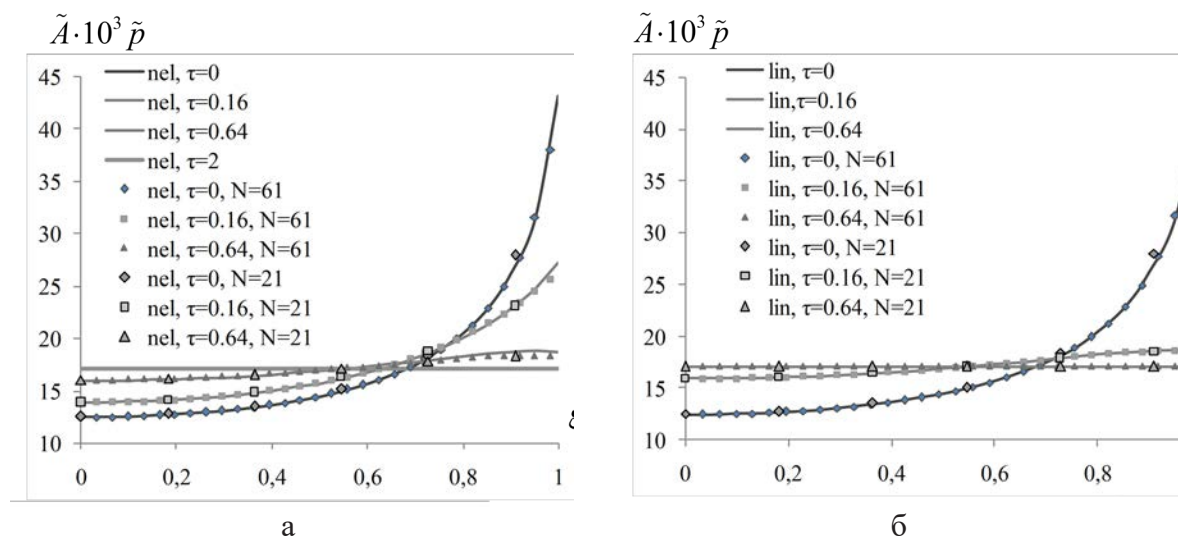


Рис. 2. Функції розподілу нормального тиску під плоским штампом в різні моменти часу для нелінійного (а) і лінійного (б) законів зношування

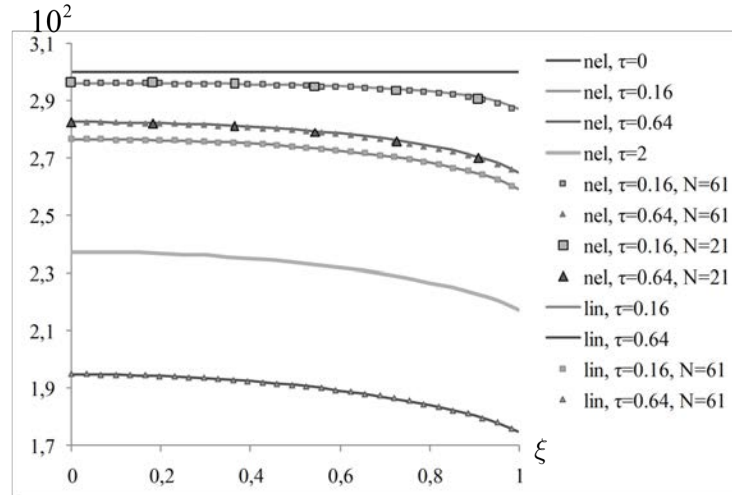


Рис. 3. Функції профілів зношеної поверхні смуги під плоским штампом в різні моменти часу для нелінійного і лінійного законів зношування

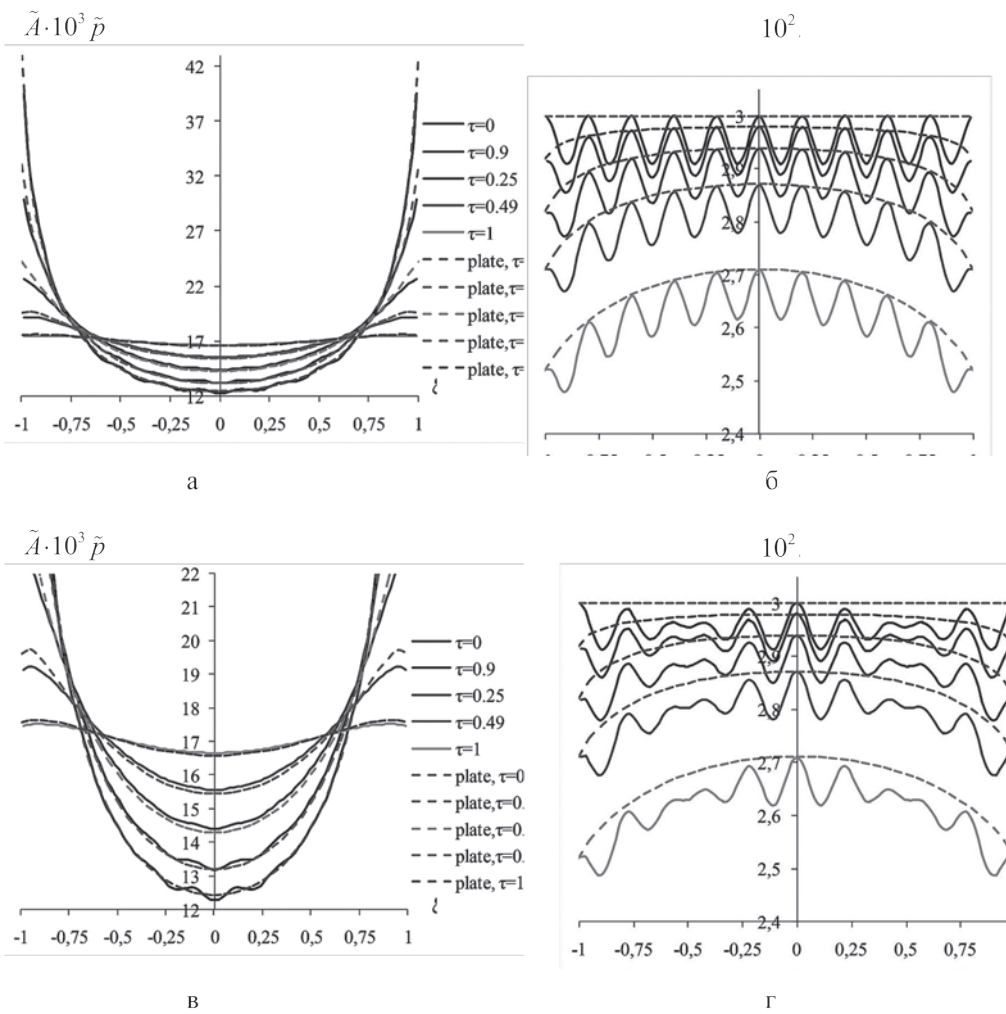


Рис. 4. Конформний контакт тонкої смуги і штампу, форма якого описується функціями $f_1(x)$ (а), (б) і $f_2(x)$ (в), (г): розподіл контактної тиску (а), (в) і функції профілів зношеної поверхні тонкої смуги (б), (г) в різні моменти часу

У випадку 2 швидко осцилюючої функції підшви штамп, що знаходиться у конформному контакті зі смугою, розподіл контактного тиску в кожний момент часу характеризується функцією, локальні максимуми (мінімуми) якої розміщуються в точках локального мінімуму (максимуму) функції, що визначає форму штамп.

Рисунок 4 доповнено штриховими лініями, що відповідають контакту штамп з плоскою підшвою (випадок 1), що надає змогу встановити зв'язок між зносоконтактними характеристиками задач у випадках 1 і 2. У кожний момент часу крива профілю зношеної смуги обмежує під штампом з плоскою підшвою обмежує зверху профіль зношення під штампом з тригонометричною формою підшви. При цьому, функція розподілу контактного тиску під плоским штампом «усереднює» значення функції тиску під штампом з осцилюючою формою. До того ж, мають місце суттєві відхилення в значеннях функції тиску в точках, близьких до межі площадки контакту. Для обраного типу осцилюючої функції значення функції тиску на межі у випадку 1 більші за значення у випадку 2.

Аналіз результатів дозволив дійти загальних висновків:

1) у будь-який момент часу функція розподілу контактного тиску є обмеженою, причому найменший тиск спостерігається в центрі області контакту, а найбільший – в точках, близьких до межі цієї області;

2) з часом нормальний тиск вирівнюється, тобто збільшується в центрі області контакту і зменшується у точках, близьких до межі; причому, у випадку 2 функція тиску з часом зменшує коливання на всіх відрізках площадки контакту;

3) найбільший знос тонкої смуги спостерігаємо в точках, близьких до межі області контакту.

Аналіз результатів в розглянутому прикладі показує якісну відповідність висновкам, отриманим в [1]. Зокрема, отримано, що процес зношення умовно ділиться на дві стадії:

1. На початковій стадії (стадії припрацювання) як нормальний тиск, так і форма зношеної поверхні стрімко змінюються.

2. На другій стадії (стадії сталого зносу) тиск перерозподіляється і наближається до рівномірного, а форма зношеної поверхні стає незмінною.

Причому нелінійному закону зношення відповідає менша швидкість зношення, тому нелінійний закон потребує більшого часу для досягнення аналогічних лінійному закону значень зносоконтактних характеристик.

Достовірність отриманих результатів підтверджується порівнянням з результатами, отриманими науковцями іншими методами. Так, задача у випадку 1 була розв'язана не тільки запропонованим в роботі наближено аналітичним підходом, але й чисельним, викладеним в роботі [1]. Результати повною мірою узгоджені.

Аналогічна задача до випадку 2 розглянута для в'язкопружної смуги-покриття в роботі [7]. Наведені в [7] числові результати якісно узгоджуються з отриманими в даній роботі.

Висновки

Конформний контакт передбачає взаємне повторення форми поверхонь підшви штамп і смуги. Найпростішим випадком таких задач є контакт штамп з плоскою основою і гладкої смуги. Саме цей випадок розглянуто в роботі першим і знайдено як наближено аналітичний, так і чисельний розв'язок. Другим став випадок штамп з формою підшви, що визначається швидко осцилюючою функцією. Застосування наближено аналітичного підходу є неефективним для такої задачі.

Дані задачі розглянуто при степеневому законі зношення. У першому випадку розрахунки проведено також і для лінійного закону. Порівняльний аналіз свідчить про повільніший процес зношення при нелінійному законі.

В обох випадках підтверджено наявність двох стадій зношення: стадії припрацювання і стадії сталого зносу. Остання, зокрема, характеризується вирівнюванням функції контактного тиску в обох випадках.

ЛІТЕРАТУРА

1. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. Москва : Наука, 2001. 478 с.
2. Александров В.М., Коваленко Е.В. О контактном взаимодействии тел с покрытиями при наличии износа. Докл. АН СССР. 1984. Т. 275, № 4. С. 827–830.
3. Горячева И.Г., Солдатенков И.А. Контактные задачи с учетом износа. Механика контактных взаимодействий / под ред. И.И. Воровича, В.М. Александрова. Москва, 2001. С. 438–458.
4. Кравчук А.С., Кравчук А.И. Прикладные контактные задачи для обобщенной стержневой модели покрытия: монография. Санкт-Петербург : Научно-технологические публикации, 2019. 221 с. URL: https://publishing.intelgr.com/archive/core_model.pdf.
5. Солдатенков И.А. Износоконтактная задача с приложениями к инженерному расчету износа. Москва : Физматкнига, 2010. 160 с.
6. Проников А.С. Классификация и расчет сопряжений деталей машин на изнашивание. Трение и износ в машинах. Москва : Изд-во АН СССР, 1956. Вып. 11. С. 121–181.

7. Kazakov K.E., Manzhairov A.V. Conformal contact between layered foundations and punches. *Mechanics of Solids. United States: Allerton Press Inc.* 2008. Vol. 43, No. 3. P. 512–524. URL: <https://doi.org/10.3103/S0025654408030229>.
8. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. Москва : Наука, 1980. 304 с.
9. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. Москва : Машиностроение, 1988. 254 с.
10. Дьяченко Н.М., Манько Н.І. Приближенно аналитическое решение плоской контактной задачи с учетом изнашивания тонкого упругого слоя при фиксированной области контакта. *Проблеми трибології (Problem of Tribology)*. 2016. № 2. С. 34–45.
11. Онишкевич В.М., Сулим Г.Т. Урахування зношування при плоскому контакті прямокутного штампа з пружною півплощиною. *Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія фіз.-мат. науки.* 2019. № 1. С. 138–141. URL: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/1.31>.
12. Han, D., Han, W., Jureczka, M., Ochal, A. Numerical analysis of a contact problem with wear. *Computers & Mathematics with Applications.* 2020. Vol. 79. P. 2942–2951. URL: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.12.027>.
13. Jureczka M., Ochal A. Numerical analysis and simulations of contact problem with wear. *Comput. Math. Appl.* 2019. Vol. 77. P. 2980–2988. URL: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.08.044>.
14. Xuan H., Cheng X. Numerical Analysis and Simulation of a Frictional Contact Problem with Wear, Damage and Long Memory. *East Asian Journal on Applied Mathematics.* 2020. Vol. 10, No. 4. P. 659–678. URL: <https://doi.org/10.4208/eajam.130320.260520>.
15. Voitov A.V. Modeling the processes of friction and wear under dynamic influences on the tribosystem. *Problems of tribology*, 2020. Vol. 25, No 3/97. P. 45–49. URL: <https://doi.org/10.31891/2079-1372-2020-97-3-45-49>.
16. Савчук Ю.В., Максимук О.В., Саланда І.П. Аналітико-числове обчислення ітераційними методами областей контакту для задачі про зношування пружної півплощини канонічними штампами. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фіз.-мат. науки.* 2019. Вип.. 20. С. 70–78. URL: <https://doi.org/10.32626/2308-5878.2019-20.70-78>.
17. Aiblas J.B., Kuipers M. Contact problems of a rectangular block on an elastic layer of finite thickness. *Acta mechanica.* 1969. B. 3. P. 133–145.

REFERENCES

1. Goryacheva I.G. (2001) *Mekhanika frikcionnogo vzaimodejstviya* [Mechanics of Frictional Interaction]. M.: Nauka (in Russian)
2. Aleksandrov V. M., Kovalenko E. V. (1984) О контактном взаимодействии тел с покрытиями при наличии износа [About the contact interaction of bodies with coatings in the presence of wear]. *Doklady AN SSSR*, vol. 275, no. 4, pp. 827–830. (in Russian).
3. Goryacheva I. G., Soldatenkov I. A. (2001) Контактные задачи с учетом износа [Contact tasks taking into account wear]. *Mekhanika kontaktnykh vzaimodeystviy* [Contact mechanics] / in edit. I. I. Vorovich, V. M. Aleksandrov. Москва : Fizmatlit, pp. 438–458 (in Russian).
4. Kravchuk A. S., Kravchuk A.I. (2019) *Prikladnye kontaktnye zadachi dlya obobshchennoj sterzhnevoj modeli pokrytiya* [Applied contact problems for a generalized bar coverage model]: monograph. SPb: Naukoemkie tekhnologii (in Russian). https://publishing.intelgr.com/archive/core_model.pdf.
5. Soldatenkov I. A. (2010) *Iznosokontaktnaya zadacha s prilozheniyami k inzhenernomu raschetu iznosa* [Wear-Contact Problem with Applications to Engineering Wear calculation]. M.: Fizmatkniga (in Russian).
6. Pronikov A. S. (1956) Классификация и расчет сопряжений деталей машин на изнашивание [Classification and calculation coupling of machine parts for wear]. *Trenie i iznos v mashinah.* M.: Izd-vo AN SSSR, issue. 11, pp. 121–181 (in Russian).
7. Kazakov K.E., Manzhairov A.V. (2008) Conformal contact between layered foundations and punches. *Mechanics of Solids. United States: Allerton Press Inc.*, vol. 43, no. 3, pp. 512–524. <https://doi.org/10.3103/S0025654408030229>.
8. Galin L. A. (1980) Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости [Contact problems of the theory of elasticity and viscoelasticity]. M.: Nauka (in Russian).
9. Goryacheva I. G., Dobychin M. N. (1988) Контактные задачи в трибологии [Contact problems in tribology]. M.: Mashinostroenie (in Russian).
10. Dyachenko N. M., Manko N. I. (2016) Приближенно аналитическое решение плоской контактной задачи с учетом изнашивания тонкого упругого слоя при фиксированной области контакта [The approached analytical decision of the flat contact problem into account wear of the thin elastic layer at the fixed area of contact]. *Problem of Tribology*, no. 2, pp. 34–45 (in Russian).

11. Onyshkevych V. M., Sulim G. T. (2019) Urahuvannya znoshuvannya pri ploskomu kontakti pryamokutnogo shtampa z pruzhnoyu pivploshchynoyu [Consideration of wear in plane contact of rectangular punch and elastic half-plane]. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics*, no. 1, pp. 138–141 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/1.31>.
12. Han, D., Han, W., Jureczka, M., Ochal, A. (2020) Numerical analysis of a contact problem with wear. *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 79, pp. 2942–2951. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.12.027>.
13. Jureczka M., Ochal A. (2019) Numerical analysis and simulations of contact problem with wear. *Comput. Math. Appl.*, vol. 77, pp. 2980–2988. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.08.044>
14. Xuan H., Cheng X. (2020) Numerical Analysis and Simulation of a Frictional Contact Problem with Wear, Damage and Long Memory. *East Asian Journal on Applied Mathematics*, vol. 10, no. 4, pp. 659–678 <https://doi.org/10.4208/eajam.130320.260520>.
15. Voitov A.V. (2020) Modeling the processes of friction and wear under dynamic influences on the tribosystem. *Problems of tribology*, vol. 25, no 3/97, pp. 45–49. <https://doi.org/10.31891/2079-1372-2020-97-3-45-49>.
16. Savchuk Yu. V, Maksimuk O.V., Salanda I.P. (2019) Analitiko-chislove obchislennya iteracijnimi metodami oblastej kontaktu dlya zadachi pro znoshuvannya pruzhnoï pivploshchyni kanonichnimi shtampami [Analytical and numerical calculations by iteration method for contact area for the problem of wearing the elastic area by canonical stamps]. *Mathematical and computer modeling. Series: Phys.-Math. Science*, issue 20, pp. 70–78 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.32626/2308-5878.2019-20.70-78>.
17. Aiblas J. B., Kuipers M. (1969) Contact problems of a rectangular block on an elastic layer of finite thickness. *Acta mechanica*, b.3, pp. 133–145.