

## РОЗДІЛ II. КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ

УДК 519.688:519.6:514.752

DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2021-2-05>

### СУЧАСНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ У КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМАХ

**Гоменюк С. І.**

*доктор технічних наук, професор*  
*Запорізький національний університет*  
*вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна*  
*orcid.org/0000-0001-7340-5947*  
*mf@znu.edu.ua*

**Калюжняк А. В.**

*аспірантка*  
*Запорізький національний університет*  
*вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна*  
*orcid.org/0000-0002-4837-7566*  
*anastasia.korgun@gmail.com*

**Ключові слова:** САПР,  
*R-функції, B-rep, F-rep,*  
*геометричне моделювання,*  
*дискретна модель.*

У даний час розвиток автоматизації проєктних робіт неможливий без удосконалення наявних методів геометричного моделювання. Без використання комп'ютерного обладнання неможливо створити або проєктувати складні механізми, машини, споруди. Відомі методи геометричного моделювання вирішують проблеми побудови складних форм без високих матеріальних та часових затрат. Але дані методи готові вирішити не всі проблеми, та інколи використання того чи іншого підходу неможливе, оскільки реалізація становиться занадто складною. У даній статті розглядаються відомі методи геометричного моделювання, опис форм за допомогою теоретико-множинних операцій. Одним із найважливіших елементів чисельного аналізу напружено-деформованого стану проєктованих інженерних конструкцій та споруд є побудова їх адекватної геометричної моделі. Створення дискретної геометричної моделі конструкції нетипової форми є дуже складним і трудомістким завданням, що вимагає наявності формальних методів опису топології плоских та просторових геометричних областей, придатних для подальшого використання в автоматичних процедурах дискретизації кінцевих елементів заданого типу. Одним із перспективних варіантів є використання R-функцій, але його застосування на практиці викликає певні складності

## MODERN METHODS FOR GEOMETRIC OBJECT MODELING IN COMPUTER SYSTEMS

**Gomenyk S. I.**

*Doctor of Technology, Professor  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-7340-5947  
mf@znu.edu.ua*

**Kaliuzhniak A. V.**

*Postgraduate Student  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-4837-7566  
anastasia.korgun@gmail.com*

**Key words:** CAD, R-function, B-rep, F-rep, geometric modeling, discrete model.

Currently, the development of design work automation is impossible without improving existing geometric modeling methods. The non-usage of appropriate computer equipment prevents from creating or designing complex mechanisms, machines or structures. Already existing methods of geometric modelling can solve the issues with constructing complex shapes without great material and time consumption. However, the given techniques are not able to fulfil all the assigned tasks. However, the given techniques are not able to fulfil all the assigned tasks. Moreover, applying particular approaches becomes impossible as their implementation can present a complex issue. In the given article we consider existing methods of geometric modeling and shape description by means of set-theoretic operations. One of the key elements of the numerical analysis of the stress-strain state of the designed engineering structures is their adequate geometric model construction.

Creation of the discrete geometric model of an atypical shape construction is a very complex and time-consuming task, which requires implementation of methods of description the topology of flat and spatial geometric domains, applicable in further automatic sampling procedures of finite elements of a given type. One of the most forward-looking options is to implement R-functions. However, its practical application causes some difficulties particularly in folding an implicitly assigned function, which can be rather time-consuming in its turn.

**Вступ.** Розвиток сучасних технологій, а саме машинобудування та будівництва неможливо уявити сьогодні без ефективних методів геометричного моделювання та складних конструкцій в інтегрованих системах. Таким чином, автоматизація побудови геометричних моделей складних інженерних об'єктів з наступною дискретизацією на кінцеві елементи є дуже складним і актуальним завданням. У статті виконано аналіз основних способів опису топології геометричних об'єктів, їх переваги та недоліки, а також запропоновані шляхи усунення проблем.

Існуючі методи геометричного моделювання дозволяють створювати геометричні об'єкти, визначати їх різноманітні параметри, а також отримувати необхідні графічні зображення на

комп'ютері. Функціональні можливості моделювання реалізуються за допомогою програмного забезпечення, яке взаємодіє в процесі роботи з графічними пристроями вводу/виводу. Сьогоднішній рівень обчислювальної техніки постійно сприяє оптимізації або автоматизації систем. Автоматизація, яка здійснюється за допомогою проєктувальних робіт з використанням інформаційних технологій, застосовується в трьох напрямках, а саме:

- 1) виконання проєктних робіт створення креслень;
- 2) аналіз властивостей об'єкта, характеристик та особливостей;
- 3) виконання додаткових задач, які не підлягають формалізації.

Головною областю застосування інтегрованих систем в геометричному моделюванні є системи автоматизованого проектування, які використовуються для автоматизації інженерних робіт. За допомогою даних систем створюються геометричні об'єкти на площині та в тривимірному просторі з метою синтезу та аналізу просторових форм проєктованих виробів. Однією з основних проблем при практичній реалізації є автоматизація побудови складних форм геометричних моделей з найменшою похибкою.

**1. Огляд методів сучасних систем.** Щоб реалізувати будь-яку геометричну модель, необхідно врахувати, до якої із двох груп за характеристикою відносити її: розміри об'єкта, його форма (макрогеометрія) та відхилення форм, шорсткість (мікрогеометрія).

Процес геометричного моделювання прийнято розділяти на три етапи:

- 1) simulation;
- 2) modeling;
- 3) visualization.

Сучасні інформаційні системи використовують 4 методи геометричного моделювання:

- 1) каркасне моделювання;
- 2) моделювання твердого тіла;
- 3) точкове моделювання;
- 4) моделювання складних поверхней [1].

Проте відомі також іще 4 класичних методів подання схем:

- 5) інженерне креслення;
- 6) подання екземплярами;
- 7) подання розгорткою;
- 8) подання у вигляді дискретної моделі.

Найбільш зручним та універсальним є функціональний підхід побудови об'єктів так як за його допомоги можна легко побудувати модель будь-якої складності. R-функції дозволяють за допомогою математичних відношень в неявному вигляді описати будь-яку модель.

У даній статті розглядаються методи геометричного моделювання та підходи до швидкої візуалізації геометричних моделей складних систем.

В каркасній моделі лежать моделі, які мають форму у вигляді кінцевої множини ліній, які описують ребра об'єктів, з'єднаних між собою в точках (вершинах). На криволінійній поверхні лінії нагадують форму каркасу.

Каркасне представлення часто використовується не для моделювання, а для відображення моделей як один із видів візуалізації. Дані моделі потребують менше пам'яті, ніж інші моделі, але придатні для вирішення задач побудови простих форм. Тому що дана модель представляє собою моделювання низького рівня і має ряд важливих обмежень, які виникають за недостатньою інформацією про грані, заключними між лініями,

і неможливість виділити внутрішню і зовнішню область зображення твердого об'єму тіла [1].

Найбільш частими обмеженнями каркасної моделі є:

1) каркасна модель не несе інформації про поверхні, що обмежують об'єкт, що обумовлює неможливість виявлення небажаних взаємодій між гранями об'єкта;

2) складність при визначенні внутрішньої частини моделі і отриманні однозначної проєкції. Не маючи відомостей про зовнішню і внутрішню поверхні, неможливо розрахувати масу об'єкта або створити сітку для кінцево-елементного аналізу;

3) ускладнене автоматичне видалення невидимих ліній і поверхонь;

4) операцію з видалення невидимих ліній можна виконати тільки вручну із застосуванням команд редагування кожної окремої лінії, але результат цієї роботи рівносильний руйнуванню всієї створеної каркасної конструкції, оскільки лінії невидимі в одному вигляді і видимі в іншому;

5) неможливість розпізнання криволінійних граней. Бічні поверхні циліндричної форми реально не мають ребер, хоча на зображенні є деякі уявні ребра, які обмежують такі поверхні. Розташування цих уявних ребер змінюється залежно від напрямку виду, тому силуети розпізнаються як елементи каркасної моделі і не відображаються на них. Щоб спробувати уявити криволінійні грані, вдаються до ряду умовностей (інтерпретуючи поверхню циліндра плоскими гранями);

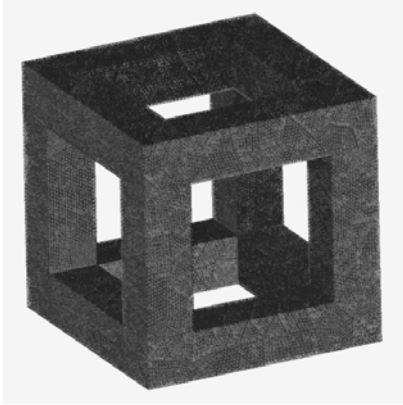
6) складності при обчисленні фізичних характеристик внаслідок нестачі даних про поверхні.

У даний час для підвищення ефективності праці створюваних об'єктів і якості розроблюваної продукції замість плоского проєкційного креслення широко застосовують тривимірне твердотільне моделювання, яке працює з об'єктами, що складаються з замкнутого контуру або моноліту (solid). Воно забезпечує повний однозначний опис 3D геометричної форми [2].

При твердотільному способі основними інструментами є тіла, обмежені поверхнями, а головні операції – булеві: об'єднання, доповнення, перетин. В цьому випадку конструктор повинен представити форму простими тілами (куля, циліндр, піраміда) і більш складними тілами. При цьому тверде тіло – це область тривимірного простору, що складається з однорідного матеріалу і обмежена замкнутою поверхнею. Вона може бути сформована з однієї або декількох граней, що стикаються (рис.1). Але даний метод має свої переваги і недоліки.

Тривимірна твердотільна модель складається з окремих об'ємних елементів, які утворюють в ній грані, ребра і вершини. Процес побудови твердотільної моделі складається з послідовного додавання і (або) видалення матеріалу деталі.

За допомогою тривимірної моделі може бути отримана не тільки інформація про координати будь-якої точки на поверхні, але і інші характеристики: диференціальні (нормалі, кривизни і т. д.) або інтегральні (об'єм, площа поверхні, моменти інерції). На її основі завжди можна отримати плоскі моделі: площини і розрізи.



**Рис. 1. Геометрична модель куба при твердотільному моделюванні**

Таким чином, під час реалізації всіх видів тривимірного проектування в сучасних САПР має місце використання параметричного підходу на основі історії побудови та наявність лише обмежених можливостей варіаційного проектування.

Твердотільне 3D-моделювання на основі ієрархічного дерева побудови дозволяє значно полегшити та прискорити створення САД-моделі. Тривимірне моделювання набуло широкого поширення в наукоємних галузях (автомобільної, авіаційної, космічної, суднобудівної та ін.), воно підвищує ефективність проектування. Проте недолік твердотільного моделювання в тому, що вхідні в модель примітиви дуже прості – складні поверхні або створити дизайн з його використанням важко.

Твердотільна модель має таку ієрархію зверху вниз: тіло – грані – ребра – вершини. Існують методи, які використовуються в прикладних системах, їх поділять на такі класи:

- 1) метод граничного представлення (B-Rep);
- 2) метод функціонального представлення (F-Rep).

Метод граничного представлення геометрії B-Rep (Boundary representation) дозволяє створювати точне, а не наближене уявлення геометричного твердого тіла. Всі поверхні і вершини присутні в B-Rep моделі явно [3]. Проте необхідно більше пам'яті, але не потрібно майже ніяких обчислень для створення зображення. Цей метод вимагає, щоб користувач задав контури або грані об'єкта, а також ескізи різних видів об'єкта, вка-

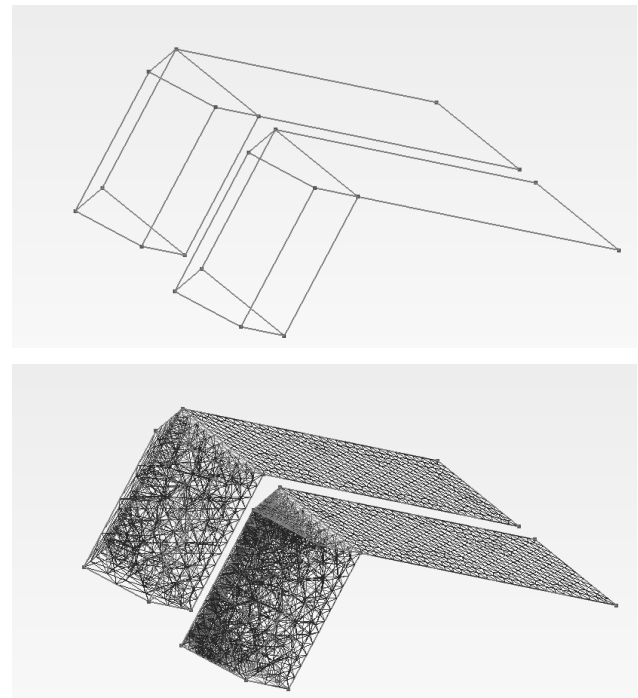
завши лінії зв'язку між ними, щоб можна було встановити однозначну відповідність. Розглянемо приклад побудови куба в програмі геометричного моделювання Gmsh. Для того, щоб створити будь-яку геометричну модель, необхідно спочатку задати координати точок простору, ліній, замкнуті контури ліній, поверхню, замкнуті контури поверхні, об'єм та фізичну сутність.

Для побудови двовимірної або тривимірної сітки використовують алгоритми, які задаються в гео файлі (рис.2). 2D: Mesh.Algorithm = 1 (Адаптивний – за замовчуванням), 5 (Делоне), 6 (Фронтальний) 3D: Mesh.Algorithm3D = 1 (Делоне – за замовчуванням), 4 (Фронтальний).

Також можлива оптимізація сітки для підвищення якості елементів:

Mesh.Optimize = 1 (за замовчуванням - 0)

Mesh.OptimizeNetgen = 1 (за замовчуванням - 0).



**Рис. 2. Побудова тривимірної моделі та сітки в програмі Gmsh**

**2. Опис моделі за допомогою функціонального моделювання.** Функціональне представлення (F-Rep) представляє геометричний об'єкт як єдине ціле за допомогою однієї дійсної неперервної функції декількох змінних у вигляді  $F(x) > 0$ . Традиційне використання неявних функцій в комп'ютерній графіці охоплює: скелетон (skeletons), що генерують скалярні поля або так звані «краплинні об'єкти» (blobby objects); примітиви конструктивної геометрії твердих тіл (CSG); алгебраїчні відсіки поверхонь в граничному поданні[4].

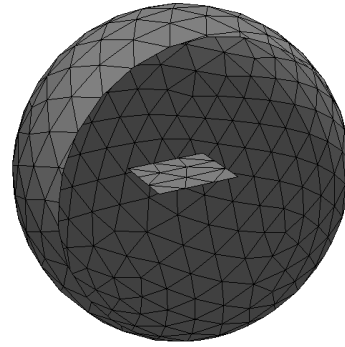
F-гер є спробою створити більш загальну схему моделювання з використанням дійсних функцій. F-гер об'єднує багато різних за своєю природою моделей, зокрема класичні неявно задані примітиви, об'єкти на базі скелетон, геометрико-множинні тверді тіла, воксельні об'єкти, параметричні і процедурні моделі. Кожна операція повинна бути замкнута на представленні, генеруючи в якості результату безперервну дійсну функцію [5].

Розглянемо геометричні об'єкти як замкнуті підмножини евклідового простору  $E_n$ , яка визначена і описується функцією  $F(x) > 0$ , де  $F$  – безперервна дійсна функція, і  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – задається координатними змінними в  $E_n$ . Також  $F(x) > 0$  задає точки всередині об'єкта,  $F(x) = 0$  – точки на кордоні і  $F(x) < 0$  – точки, що лежать зовні і не належать об'єкту. Функції можуть бути визначені формулами або за допомогою обчислювальних процедур. Таким чином, певні геометричні об'єкти не представляють регуляризовані конструктивні тверді тіла. Вони можуть мати границі з ділянками, які не суміжними з внутрішньою частиною об'єкта. Загальне визначення об'єкта задається в багатовимірному просторі, що дозволяє вибирати простір потрібної розмірності в кожному конкретному випадку.

Під час проектування конкретної системи моделювання може бути визначена деяка кінцева множина об'єктів-примітивів.

Проте концептуально це не обов'язково, адже це дозволяє мати порожню множину об'єктів в припущенні, що користувач визначить їх сам або в символічному вигляді за допомогою формул або за допомогою обчислювальних процедур. Даний підхід дозволяє уніфікувати дуже різні види моделей твердих тіл за умови, що вдається знайти функціональні уявлення для них або конвертувати вже наявні об'єкти в бажану форму. Таким чином, можливо спільно використовувати в одній моделі примітиви конструктивної геометрії, неявно задані об'єкти вільної форми, тверді тіла і воксельні об'єкти.

Теоретико-множинні операції визначаються в аналітичному вигляді за допомогою розробленої В.Л. Рвачевим теорії R-функцій [2]. При цьому результуючий об'єкт включає граничні точки, що відповідає операціям тризначної логіки над предикатом приналежності точки. Існує кілька систем R-функцій, кожна з яких має властивість замкнутості. Найбільш часто використовується система  $f_1$  і  $f_2$  – функції, що визначають вихідні геометричні об'єкти (рис. 3):



Netgen 6.2-dev

**Рис. 3. Побудований геометричний об'єкт за допомогою теоретико-множинних операцій в програмі Netgen**

1) об'єднання:

$$f_1 | f_2 = \frac{1}{1+a} \cdot (f_1 + f_2 + \sqrt{f_{12} + f_{22} - 2 \cdot a \cdot f_1 \cdot f_2});$$

2) перетин:

$$f_1 \& f_2 = \frac{1}{1+a} \cdot (f_1 + f_2 - \sqrt{f_{12} + f_{22} - 2 \cdot a \cdot f_1 \cdot f_2});$$

3) логічне доповнення:

$$\sim f = -f;$$

4) віднімання:

$$f_1 f_2 = f_1 \& (-f_2).$$

Тут,  $a = a(f_1, f_2)$  – деяка неперервна функція, така що:

$$-1 < a(f_1, f_2) \leq 1,$$

$$a(f_1, f_2) = a(f_2, f_1) = a(-f_1, f_2) = a(f_1, -f_2).$$

5) декартовий добуток (дана операція збільшує розмірність) за допомогою R-функцій виражається:

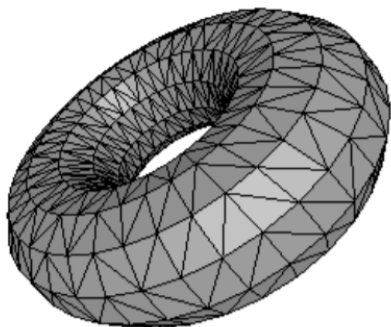
$$f_3(x, y, z) = f_1(x, y) \& f_2(z),$$

де  $f_1(x, y)$  описує твердотільне тіло і  $f_2(z) = (z - z_1) \& (z_2 - z)$  описує відрізок.

Одним із альтернативних способів опису геометричних моделей складними областями є використання серединної поверхні (medial surfaces) [3].  $[z_1, z_2]$  вздовж осі  $z$ . Серединною поверхнею об'єкта називається геометричне місце точок, що є центрами всіх вписаних усередину об'єкта сфер максимального радіусу. Така сфера має стосуватися, як мінімум, двох точок межі області, інакше має існувати інша вписана сфера (рис. 4):

$$\omega = R^2 - \left[ \left( \sqrt{x^2 + y^2} - r \right) \cdot \cos \left( r \cdot \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \right) + z \cdot \sin \left( r \cdot \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \right) \right]^2 + \left[ \left( \sqrt{x^2 - y^2} - r \right) \cdot \sin \left( r \cdot \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \right) + z \cdot \cos \left( r \cdot \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \right) \right]^2$$

Але хоч даний метод є більш універсальним порівняно з іншими, він має похибку створення форми об'єкта залежно від заданої функції. Тому сьогодні постає завдання покращити роботу даного геометричного моделювання, щоб похибка



**Рис. 4. Дискретна модель геометричної форми**

була найменшою. Необхідність розробити універсальний інструмент побудови геометричних моделей з найменшою похибкою та затратами часу показує актуальність проблеми.

Отже, на підставі виконаного аналізу можна зробити висновок про те, що застосування відомих підходів геометричного моделювання не

завжди дозволяє ефективно й зручно описувати топологію геометричних областей складних форм саме в тривимірному моделюванні. Одним із перспективних варіантів є використання R-функцій, але його застосування на практиці викликає певні складності саме в неявно заданій функції, що потребує великої затрати часу.

Застосування математичного апарату R-функцій дозволяє суттєво спростити процес опису топологічних моделей геометричних областей практично будь-якої складності.

При цьому такий підхід позбавлений більшої частини недоліків вищеписаних стандартних методів геометричного моделювання. Крім того, за рахунок спрощення пошуку опорних вузлів на поверхні вихідного об'єкта стає простішою процедура автоматичної генерації кінцево-елементного розбиття вихідної конструкції. Тому необхідно розробити алгоритм, який буде пришвидшувати роботу геометричного моделювання за допомогою функціонального підходу.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Голованов М.М. Геометричне моделювання. Київ : Наук. думка, 2019. 272 с.
2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев : Наук. думка, 1982. 106 с.
3. Lorenzen W. E., Cline H. E. Marching Cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm. URL: <https://dl.acm.org/doi/10.1145/37402.37422>.
4. Agoston M. K. Computer Graphics and Geometric Modelling. London, Springer-Verlag, 2005. 400 p.
5. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Sixth edition. Butterworth-Heinemann, 2016. 753 p.
6. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. URL: <https://gmsh.info/>.
7. Healy K. Data Visualization : A Practical Introduction. New Jersey : Princeton University Press, 2018. 296 p.
8. Curcic M. Modern Fortran: Building efficient parallel applications. USA : Manning Publications, 2020. 416 p.

#### REFERENCES

1. Golovanov M.M. (2019) *Geometric modeling*. Kyiv. Nayk. Dymka.
2. Rvachev V.L. (1982) *R-function theory and some of its applications*. Kyiv: Nayk. Dymka.
3. Lorenzen W. E., Cline H. E. (2017) *Marching Cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm*. URL: <https://dl.acm.org/doi/10.1145/37402.37422>
4. Agoston M. K. (2005) *Computer Graphics and Geometric Modelling*. London, Springer-Verlag.
5. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. (2016) *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Sixth edition*. Butterworth-Heinemann.
6. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. URL: <https://gmsh.info/>
7. Healy K. (2018) *Data Visualization : A Practical Introduction*. New Jersey: Princeton University Press.
8. Curcic M. (2020) *Modern Fortran: Building efficient parallel applications*. USA: Manning Publications.