

ПОВЗДОВЖНИЙ ЕФЕКТИВНИЙ МОДУЛЬ ПРУЖНОСТІ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ В УМОВАХ НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ

Гребенюк С. М.

*доктор технічних наук, професор,
завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-5247-9004
gsm1212@ukr.net*

Морозова І. Ю.

*аспірант
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0001-8200-0140
irina.oleynik.1997@gmail.com*

Ключові слова: *волокно, гомогенізація, ефективний модуль пружності, коефіцієнт Пуассона, композиційний матеріал, нелінійні деформації, матриця.*

У статті розглядається математичне моделювання механічної поведінки волокнистого композиту для визначення його напружено-деформованого стану в умовах нелінійної деформації. Знайдено аналітичні співвідношення для ефективних характеристик волокнистого композиційного матеріалу, а саме модуля пружності та коефіцієнта Пуассона, з урахуванням ізотропних властивостей матриці та волокна.

У роботі для визначення ефективних характеристик застосовується метод представницького об'ємного елемента. Розглянуто спільне деформування порожнистого та суцільного циліндрів, що моделюють, відповідно, матрицю та волокно у композиті, з урахуванням того, що осьові переміщення і волокна й матриці сталі й однакові. Вважається, що в процесі деформації і матеріал матриці, і матеріал волокна підкоряються закону Гука, але в процесі деформації їх об'ємна частка в композиті змінюється. Ця зміна буде визначатися зміною площі поперечного перерізу ділянок елементарної комірки, зайнятих матрицею і волокном, враховуючи, що висота нескінченної комірки буде однаковою для матриці і волокна. Отримано співвідношення для напружено-деформованого стану ізотропного волокна та матриці, в яких передбачається, що незважаючи на лінійний характер деформування матриці та волокна, об'ємна частка компонентів змінюється при збільшенні зовнішнього навантаження й в результаті будемо мати нелінійну залежність.

Далі розглядається аналогічна задача для однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює поведінку композиційного матеріалу. Умовою узгодження для цієї задачі будуть виступати рівність осьових переміщень для довільної осьової координати та рівність радіальних переміщень на зовнішній частині циліндричної поверхні. Отримано формули для визначення поздовжнього модуля пружності композиційного матеріалу з ізотропними матрицею і волокном.

Досліджено залежність модуля пружності та коефіцієнта Пуассона від зміни об'ємного вмісту волокна в композиті в процесі деформування.

LONGITUDINAL EFFICIENT MODULE OF ELASTICITY OF FIBER COMPOSITE MATERIAL UNDER NONLINEAR DEFORMATION CONDITIONS

Grebenyuk S. M.

*Doctor of Technical Sciences, Associate Professor,
Head of the Department of Fundamental and Applied Mathematics
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-5247-9004
gsm1212@ukr.net*

Morozova I. Y.

*Postgraduate Student
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0001-8200-0140
irina.oleynik.1997@gmail.com*

Key words: *fiber,
homogenization,
effectivemodulusofelasticity,
Poisson'sratio,
compositematerial,
nonlineardeformations, matrix.*

The article considers mathematical modeling of the mechanical behavior of a fibrous composite to determine its stress-strain state under nonlinear deformation. Analytical relations were found for the effective characteristics of the fibrous composite material, namely the modulus of elasticity and Poisson's ratio, taking into account the isotropic properties of the matrix and fiber.

The method of representative three-dimensional element is used to determine the effective characteristics. The joint deformation of the hollow and solid cylinders, which simulate, respectively, the matrix and the fiber in the composite, taking into account the fact that the axial displacements and the fiber matrix have become the same.

It is believed that in the process of deformation both the matrix material and the fibrous material obey Hooke's law, but in the process of deformation their volume fraction in the composite changes. In addition, this change will be determined by the change in the cross-sectional area of the units of the unit cell occupied by the matrix and the fiber, given that the height of the infinite cell will be the same for the matrix and the fiber. The relations for the stress-strain state of the isotropic fiber and the matrix are obtained. In which it is assumed that despite the linear nature of the deformation of the matrix and the fiber, the volume fraction of the components changes with increasing external load and as a result we will have a nonlinear dependence.

Next, a similar problem is considered for a homogeneous transversely isotropic material that simulates the behavior of a composite material. The condition of agreement for this problem will be the equality of axial displacements for an arbitrary axial coordinate and the equality of radial displacements on the outer part of the cylindrical surface. The formula for determining the longitudinal modulus of elasticity of a composite material with isotropic matrix and fiber is obtained.

The dependence of the modulus of elasticity and Poisson's ratio on the change in the volumetric content of the fiber in the composite during deformation has been studied.

ВСТУП

Застосування композиційних матеріалів, які мають високу питому міцність і жорсткість, дозволяє у сучасних машинах та конструкціях знизити матеріаломісткість і підвищити корозійну стійкість, відкриває принципово нові можливості оптимального проектування та створення нових конструкцій.

При створенні нових конструкцій із композиційного матеріалу важливою задачею є визначення напружено-деформованого стану такої конструкції в реальних умовах експлуатації. При математичному моделюванні деформування конструкцій із композиційного матеріалу актуальним є описання механічних характеристик матеріалу. Зважаючи на те, що, як правило, частота армування волокнами є досить високою, а поперечний розмір волокна малим, створити математичну модель матеріалу, яка б враховувала кожне окреме волокно, досить проблематично. Тому неоднорідний композиційний матеріал представляється однорідним з механічними характеристиками, які називають ефективними і які залежать від механічних характеристик матриці та волокна і об'ємної частки кожного з них у композиційному матеріалі.

Теоретичні основи визначення ефективних пружних сталих трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює поведінку композиційного матеріалу, представлені в роботах [1–6].

У роботі [1] розглянуто модель ефективних визначальних співвідношень трансверсально-ізотропного композита зі скінченними деформаціями. Запропоновано метод розділення зв'язних у задачах мікро- та макроскопічного деформування.

У роботі [2] описано методи та критерії накопичення пошкодження у волокнистих шаруватих композитах. Запропоновані підходи, що ґрунтуються на співвідношеннях теорії шарових пластин, що можуть бути використані при розрахунках, оптимізації та прогнозування механічної поведінки композитних матеріалів та елементів з них.

Роботу [3] присвячено математичному моделюванню механічної поведінки волокнистих композитів та програмній реалізації підходів до визначення їх напружено-деформованого стану.

У роботі [4] пропонується підхід до визначення ефективного модуля пружності для односпрямованого волокнистого композиційного матеріалу. Композит, що складається з ізотропної матриці та ізотропного волокна, моделюється суцільним однорідним трансверсально-ізотропним матеріалом. При цьому модулі пружності матриці та волокна розглядаються як випадкові величини з нормальними законами розподілу.

Розроблено метод розрахунку нелінійно-пружних характеристик композитів із скінченними деформаціями на основі асимптотичної теорії осереднення періодичних структур [5]. Використані визначальні співвідношення нелінійно-пружних середовищ із скінченними деформаціями, запропоновані автором раніше. Отримано аналітичні розв'язки локальних задач для шаруватих композитів із скінченними деформаціями.

У статті [6] запропоновано модель, що дозволяє на основі співвідношень теорії шаруватих пластин та апроксимації кривої деформування односпрямованого шару при зсуві в площині шару прогнозувати нелінійне деформування шаруватого вуглепластику. Отримані аналітичні співвідношення для матриць жорсткості й податливості пакета у вигляді добутку відповідних матриць пружних характеристик на матриці, що враховують нелінійні властивості пакета.

У роботі [7] проведено нелінійний аналіз вільної вібрації композитних ламінованих пластин і неглибоких циліндричних/сферичних/гіперболоїдних оболонок з урахуванням геометричної нелінійності з використанням неполіноміальної оберненої тригонометричної теорії деформацій зсуву вищого порядку з сімома ступенями вільності (DOFs). Ця теорія припускає параболічну зміну напружень поза площиною. Розроблено та застосовано нелінійну скінченно-елементну модель для отримання дискретних нелінійних рівнянь.

Теорія великих деформацій на основі деформацій Гріна з малими обертаннями [8] запропонована та використовується для аналізу на згин композитних пластин. Для виведення скінченно-елементних моделей використовується ізогеометричний аналіз спільно з теорією деформацій зсуву першого порядку. Сформульовано співвідношення деформація-зміщення в сенсі теорії фон-Кармана та запропонованої теорії. Досліджено числові приклади, включаючи ізотропні та ламіновані композитні пластини за різних граничних умов.

Однак у наявних роботах припускається, що процес деформування або лінійний, або нелінійність обмежується врахуванням окремих випадків й не може бути застосована для широкого кола композитів. Так, якщо розглянути один із видів волокнистих композитів – гумовокордні матеріали – то можна зауважити, що в процесі деформування гума може зазнавати значних деформацій, причому у межах закону Гука. Врдночас при такому деформуванні гума не змінює свій об'єм (коефіцієнт Пуасона близький до 0,5), а волокна (металеві або тканинні) при деформуванні свій об'єм змінюють (коефіцієнт Пуасона варіюється від 0,25-0,35 для металевих до 0,8 для тканинних), в результаті при деформуванні змінюються об'ємні частки волокна та матриці у композиті.

Метою дослідження цієї статті є визначення залежності повздовжнього модуля пружності та коефіцієнта Пуассона від об'ємного вмісту корда, з урахування нелінійності деформування волокнистого композиційного матеріалу.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

Розглянемо волокнистий композиційний матеріал із довгими волокнами при гексагональній схемі армування. Для виконання поставленої задачі скористаємося методом представницького об'ємного елемента. Виокремимо із об'єму композиту елементарну гексагональну комірку, що містить волокно та оточуючу його матрицю. Зважаючи, що композит армований довгими волокнами, будемо вважати довжину елементарної комірки нескінченною. Гексагональний поперечний переріз комірки апроксимуємо кругом, так щоб об'ємна частка волокна у комірці не змінилася. В результаті елементарний представницький елемент композиційного матеріалу буде складатися з нескінченного суцільного циліндра, що моделює волокно, та нескінченного порожнистого циліндра, що моделює матрицю (рис. 1).

Будемо вважати, що в процесі деформування і матеріал матриці, і матеріал волокна підкорюються закону Гука, але в процесі деформування змінюється їх об'ємна частка у композиті. Ця зміна буде визначатися зміною площі поперечного перерізу областей елементарної комірки, що займає матриця та волокно, враховуючи, що висота нескінченної комірки буде однаковою і для матриці, і для волокна.

З'ясуємо, як зміниться напружено-деформований стан елементарної комірки, якщо в процесі

деформування її радіус зміниться з b до $b+\Delta b$, а радіус волокна – з a до $a+\Delta a$ (рис. 1). Умовою контакту на межі розділу матеріалів в процесі деформування будемо вважати ідеальне зчеплення.

Розглянемо повздовжнє (у напрямку осі волокна) розтягнення елементарної комірки композиційного матеріалу.

Крайові умови підбрано таким чином, щоб вони відповідали експериментальним даним, отриманим для композиційного матеріалу. В місці зчеплення волокна з матрицею відсутній стрибок за радіальним переміщенням та радіальним напруженням, осьові переміщення і волокна матриці сталі й однакові:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{\circ}(a+\Delta a) &= \sigma_{rr}^*(a+\Delta a), u_r^{\circ}(a+\Delta a) = u_r^*(a+\Delta a), \\ u_z^{\circ}(h) &= u_z^*(h), \end{aligned} \quad (1)$$

Тут і далі символ \circ означає величини, що відносяться до волокна, а символом $*$ – величини, що відносяться до матриці.

Крім цього, крайові умови в напруженнях при сумісному деформуванні матриці й волокна запишуться таким чином:

$$\sigma_{rr}^*(b+\Delta b) = 0. \quad (2)$$

Радіальні переміщення трансверсально-ізотропного волокна запишуться у вигляді:

$$u_r^{\circ}(r+\Delta r) = C(r+\Delta r). \quad (3)$$

де C – стала, що визначається з граничних умов.

Тоді напружено-деформований стан трансверсально-ізотропного волокна буде описуватися, окрім (3), такими співвідношеннями:

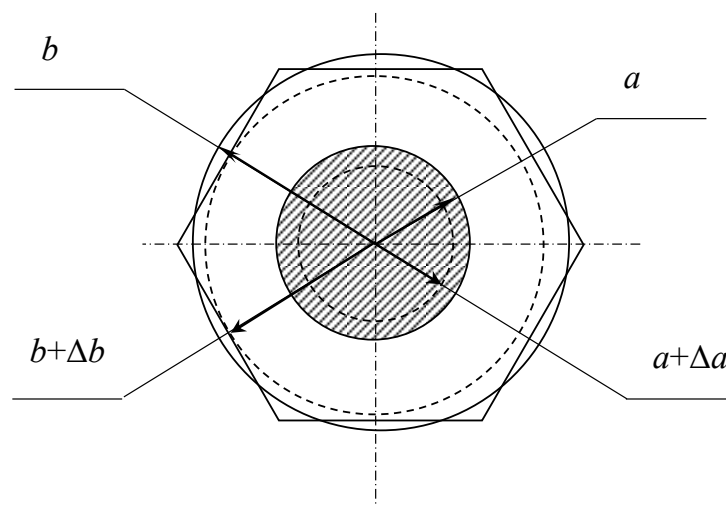


Рис. 1. Поперечний переріз елементарної комірки композиційного матеріалу

$$u_z^{\circ}(z + \Delta z) = \frac{1}{(1 - v^{\circ})} \left(\frac{(\sigma_0^{\circ} + \Delta\sigma_0^{\circ})(1 - v^{\circ} - 2(v^{\circ})^2) - 2Cv^{\circ}}{E^{\circ}} \right) (z + \Delta z), \quad (4)$$

$$\sigma_{rr}^{\circ}(r + \Delta r) = \frac{E^{\circ}}{(1 - v^{\circ})} \left(\frac{(\sigma_0^{\circ} + \Delta\sigma_0^{\circ})v^{\circ}}{E^{\circ}} + C \right);$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{\circ}(r + \Delta r) = \frac{E^{\circ}}{(1 - v^{\circ})} \left(\frac{(\sigma_0^{\circ} + \Delta\sigma_0^{\circ})v^{\circ}}{E^{\circ}} + C \right). \quad (5)$$

Аналогічно запишемо співвідношення, які описують напружено-деформований стан трансверсально-ізотропної матриці:

$$u_r^*(r + \Delta r) = A(r + \Delta r) + \frac{B}{(r + \Delta r)};$$

$$u_z^*(z + \Delta z) = \frac{1}{(1 - v^*)} \left(\frac{(\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*)(1 - v^* - 2(v^*)^2) - 2Av^*}{E^*} \right) (z + \Delta z), \quad (6)$$

$$\sigma_{rr}^*(r + \Delta r) = E^* \left(\frac{(\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*)v^*}{E^*(1 - v^*)} + \frac{A}{1 - v^*} - \frac{B}{(r + \Delta r)^2(1 + v^*)} \right);$$

$$\sigma_{\theta\theta}^*(r + \Delta r) = E^* \left(\frac{(\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*)v^*}{E^*(1 - v^*)} + \frac{A}{1 - v^*} - \frac{B}{(r + \Delta r)^2(1 + v^*)} \right). \quad (7)$$

Виходячи з крайових умов (1), (2) знайдемо тепер сталі A , B , C та залежність між σ_0° та σ_0^* . Із другої рівності (1) маємо:

$$C = A + \frac{B}{(a + \Delta a)^2}. \quad (8)$$

Із рівності (2) отримуємо:

$$A = \frac{B}{(b + \Delta b)^2} \frac{(1 - v^*)}{(1 + v^*)} - \frac{(\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*)v^*}{E^*}. \quad (9)$$

Тоді (8) запишеться у вигляді:

$$C = B \left(\frac{(f + \Delta f)(1 - v^*) + (1 + v^*)}{(a + \Delta a)^2(1 + v^*)} \right) - \frac{(\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*)v^*}{E^*}. \quad (10)$$

Із першої рівності (1) маємо:

$$\frac{E^{\circ}}{(1 - v^{\circ})} \left(\frac{(\sigma_0^{\circ} + \Delta\sigma_0^{\circ})v^{\circ}}{E^{\circ}} - \frac{(\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*)v^*}{E^*} \right) =$$

$$= \frac{B}{(a + \Delta a)^2} \left(\frac{E^*}{(1 + v^*)} ((f + \Delta f) - 1) - \right.$$

$$\left. - \frac{E^{\circ}}{(1 - v^{\circ})(1 + v^*)} ((f + \Delta f)(1 - v^*) + (1 + v^*)) \right),$$

$$B = \left(\frac{(\sigma_0^{\circ} + \Delta\sigma_0^{\circ})v^{\circ}}{E^{\circ}} - \frac{(\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*)v^*}{E^*} \right) \quad (11)$$

$$\frac{(a + \Delta a)^2 E^{\circ} (1 + v^*)}{E^* ((f + \Delta f) - 1)(1 - v^{\circ}) - E^{\circ} ((f + \Delta f)(1 - v^*) + (1 + v^*))},$$

Позначимо

$$f = \frac{a^2}{b^2},$$

$$\Delta f = \frac{(a + \Delta a)^2}{(b + \Delta b)^2} - \frac{a^2}{b^2},$$

$$d_1 = E^* ((f + \Delta f) - 1)(1 - v^{\circ}),$$

$$d_2 = E^{\circ} ((f + \Delta f)(1 - v^*) + (1 + v^*)). \quad (12)$$

Тоді

$$B = \frac{v^{\circ} (a + \Delta a)^2 (1 + v^*)}{d_1 - d_2} (\sigma_0^{\circ} + \Delta\sigma_0^{\circ}) -$$

$$- \frac{(a + \Delta a)^2 E^{\circ} (1 + v^*)}{d_1 - d_2} \frac{v^*}{E^*} (\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*);$$

$$C = \frac{d_2}{d_1 - d_2} \frac{v^{\circ}}{E^{\circ}} (\sigma_0^{\circ} + \Delta\sigma_0^{\circ}) -$$

$$- \frac{v^*}{E^*} \frac{d_1}{d_1 - d_2} (\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*);$$

$$A = \frac{(f + \Delta f)v^{\circ}(1 - v^*)}{d_1 - d_2} (\sigma_0^{\circ} + \Delta\sigma_0^{\circ}) -$$

$$- \frac{v^* (f + \Delta f)E^{\circ}(1 - v^*) + (d_1 - d_2)}{E^* (d_1 - d_2)} (\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*). \quad (13)$$

Нарешті, з третьої рівності (1) знаходимо співвідношення між σ_0° та σ_0^* :

$$\left(\frac{(1 - 2(v^{\circ})^2 - v^{\circ})(d_1 - d_2)}{E^{\circ}(1 - v^{\circ})} - \frac{2(v^{\circ})^2 d_2}{E^{\circ}(1 - v^{\circ})} + \frac{2(f + \Delta f)v^{\circ}v^*}{1} \right) (\sigma_0^{\circ} + \Delta\sigma_0^{\circ}) =$$

$$= \left[\frac{(1 - 2(v^*)^2 - v^*)(d_1 - d_2)}{E^*(1 - v^*)} + \frac{2(v^*)^2 ((f + \Delta f)E^{\circ}(1 - v^*) + d_1 - d_2)}{E^*(1 - v^*)} - \right.$$

$$\left. - \frac{2d_1 v^{\circ} v^*}{E^*(1 - v^*)} \right] (\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*). \quad (14)$$

Позначивши

$$d^{\circ} = \frac{E^* ((f + \Delta f) - 1)(1 - 2(v^{\circ})^2 - v^{\circ})}{E^{\circ}}$$

$$- ((f + \Delta f)(1 - v^* - 2v^{\circ}v^*) + (1 + v^*));$$

$$d^* = ((f + \Delta f) - 1)(1 - 2(v^{\circ})^2 - v^{\circ}) -$$

$$-\frac{E^{\circ} \left((f + \Delta f) (1 - v^* - 2v^{\circ} v^*) + (1 + v^*) \right)}{E^*}; \quad (15)$$

Отримуємо

$$d^{\circ} (\sigma_0^{\circ} + \Delta \sigma_0^{\circ}) = d^* (\sigma_0^* + \Delta \sigma_0^*) \quad (16)$$

Розглянемо тепер аналогічну задачу для однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює поведінку композиційного матеріалу. В цьому випадку поле напружень буде визначатися такими співвідношеннями:

$$\sigma_{zz} = \sigma_0, \quad \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = 0. \quad (17)$$

Причому для того, щоб збіглися умови рівноваги для обох задач, необхідно, щоб виконувалися умови:

$$\pi a^2 (\sigma_0^{\circ} + \Delta \sigma_0^{\circ}) + \pi (b^2 - a^2) (\sigma_0^* + \Delta \sigma_0^*) = \pi b^2 (\sigma_0 + \Delta \sigma_0),$$

або

$$(\sigma_0^{\circ} + \Delta \sigma_0^{\circ}) f + (\sigma_0^* + \Delta \sigma_0^*) (1 - f) = (\sigma_0 + \Delta \sigma_0), \quad (18)$$

З урахуванням (16) отримаємо:

$$\begin{aligned} \sigma_0^* + \Delta \sigma_0^* &= \frac{(\sigma_0 + \Delta \sigma_0) d^{\circ}}{d^{\circ} + (f + \Delta f)(d^* - d^{\circ})} \sigma_0^{\circ} + \\ &+ \Delta \sigma_0^{\circ} = \frac{(\sigma_0 + \Delta \sigma_0) d^*}{d^{\circ} + (f + \Delta f)(d^* - d^{\circ})}. \end{aligned} \quad (19)$$

З урахуванням (17) рівняння стану ізотропного матеріалу набудуть вигляду:

$$\varepsilon_{rr} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} (\sigma_0 + \Delta \sigma_0); \quad \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E_1} (\sigma_0 + \Delta \sigma_0). \quad (20)$$

Тоді переміщення, згідно з співвідношеннями Коші, будуть визначатися формулами

$$\begin{aligned} u_r(r + \Delta r) &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} (\sigma_0 + \Delta \sigma_0) (r + \Delta r) + C_1; \\ u_z(z + \Delta z) &= \frac{1}{E_1} (\sigma_0 + \Delta \sigma_0) (z + \Delta z) + C_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Сталі $C_1 = C_2 = 0$ з урахуванням того, що для цієї задачі будуть виконуватися умови $u_r(0) = 0$ та $u_z(0) = 0$, тоді

$$\begin{aligned} u_r(r + \Delta r) &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} (\sigma_0 + \Delta \sigma_0) (r + \Delta r); \\ u_z(z + \Delta z) &= \frac{1}{E_1} (\sigma_0 + \Delta \sigma_0) (z + \Delta z). \end{aligned} \quad (22)$$

Будемо вважати, що як умови узгодження для задачі про поздовжнє розтягнення однорідного

трансверсально-ізотропного композита та задачі про сумісне поздовжнє розтягнення матриці й волокна будуть виступати рівність осевих переміщень для довільної осевої координати та рівність радіальних переміщень на зовнішній частині циліндричної поверхні:

$$\begin{aligned} u_r(b + \Delta b) &= u_r^*(b + \Delta b), \\ u_z(h + \Delta h) &= u_z^{\circ}(h + \Delta h) = u_z^*(h + \Delta h), \end{aligned} \quad (23)$$

Тоді друге зі співвідношень (23) з урахуванням (6) та (22) запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - v^*)} \left(\frac{(\sigma_0^* + \Delta \sigma_0^*) (1 - v^* - 2(v^*)^2)}{E^*} - 2Av^* \right) (z + \Delta z) &= \\ &= \frac{1}{E_1} (\sigma_0 + \Delta \sigma_0) (z + \Delta z) \\ \frac{(\sigma_0^* + \Delta \sigma_0^*) (1 - v^* - 2(v^*)^2)}{E^* (1 - v^*)} - \frac{2Av^*}{(1 - v^*)} &= \frac{1}{E_1} (\sigma_0 + \Delta \sigma_0), \end{aligned} \quad (24)$$

а з урахуванням (23) та (29) отримаємо співвідношення:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_1} &= \frac{1}{d^{\circ} + (f + \Delta f)(d^* - d^{\circ})} \left(-\frac{2v^*(f + \Delta f)v^{\circ}}{d_1 - d_2} d^* + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{(1 - v^* - 2(v^*)^2)}{E^*(1 - v^*)} + \frac{2v^*}{(1 - v^*)} \frac{v^*(f + \Delta f)E^{\circ}(1 - v^*) + d_1 - d_2}{d_1 - d_2} \right) d^{\circ} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Після перетворень отримуємо формулу для визначення поздовжнього модуля пружності композиційного матеріалу з ізотропними матрицею і волокном:

$$E_1 + \Delta E_1 = \frac{(\alpha - 2v^{\circ}\beta)E^*(1 - (f + \Delta f)) + (\alpha - 2v^{\circ}\beta)E^{\circ}(f + \Delta f)}{\alpha - 2\beta v^{\circ} + 2(f + \Delta f)v^*E^{\circ}(v^{\circ} - v^*)} \quad (26)$$

з урахуванням співвідношень

$$\begin{aligned} \alpha &= E^*(1 - (f + \Delta f))(1 - v^{\circ}) + E^{\circ}((f + \Delta f)(1 - v^*) + (1 + v^*)); \\ \beta &= v^{\circ}E^*(1 - (f + \Delta f)) + v^*(f + \Delta f)E^{\circ}, \end{aligned} \quad (27)$$

отримаємо формулу для модуля пружності:

$$\begin{aligned} E_1 + \Delta E_1 &= \frac{\alpha E^*(1 - f) + \alpha E^{\circ}f + 2\beta f(v^{\circ}E^* - v^*E^{\circ}) +}{\alpha - 2\beta v^{\circ} + 2fv^*E^{\circ}(v^{\circ} - v^*) +} \\ &+ \frac{\Delta f \left[\alpha(E^{\circ} - E^*) + 2\beta(v^{\circ}E^* - v^*E^{\circ}) \right]}{\Delta f \left[2v^*E^{\circ}v^{\circ} - 2E^{\circ}(v^*)^2 \right]}. \end{aligned}$$

Із першої з умов (23) знайдемо співвідношення $-v_{12}/E_1$ для композиційного матеріалу. Тоді, з урахуванням виразу для A (23), отримуємо

$$\frac{(f + \Delta f)v^*(1 - v^*)}{d_1 - d_2} \Delta(\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*) - \frac{v_{12}}{E_1} \Delta \frac{(f + \Delta f)E^*(1 - v^*) + d_1 - d_2}{d_1 - d_2} \times$$

$$\times (\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*) + \frac{B}{(b + \Delta b)^2} = -\frac{v_{12}}{E_1} (\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*) \quad (28)$$

Підставляючи в останній вираз співвідношення для B (23), остаточно отримуємо:

$$-\frac{v_{12}}{E_1} = \frac{1}{(d^* + (f + \Delta f)(d^* - d^*))} \times$$

$$\times \left(\frac{2(f + \Delta f)v d^*}{d_1 - d_2} - \frac{v^*}{E^*} \frac{2(f + \Delta f)E^*(d_1 - d_2)d^*}{d_1 - d_2} \right).$$

Використовуючи співвідношення для ефективного поздовжнього модуля пружності композиційного матеріалу, отримуємо співвідношення для коефіцієнта Пуассона:

$$v_{12} + \Delta v_{12} = \frac{(\alpha - 2v\beta)v^* + f(2E^*v^* - 2E^*v^*) + \Delta f(2E^*v^* - 2E^*v^*)}{\alpha - 2\beta v^* + 2f(v^*E^*v^* - 2(v^*)^2 E^*) + \Delta f(2v^*E^*v^* - 2(v^*)^2 E^*)}. \quad (30)$$

Розглянемо гумовокордний матеріал з ізотропною матрицею та ізотропним кордом з такими пружними характеристиками: модуль пружності текстильного корда $E^o = 1,6 \cdot 10^3$ МПа, коефіцієнт Пуассона $v = 0,8$, модуль пружності гуми $E^* = 4,5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $v^* = 0,49$.

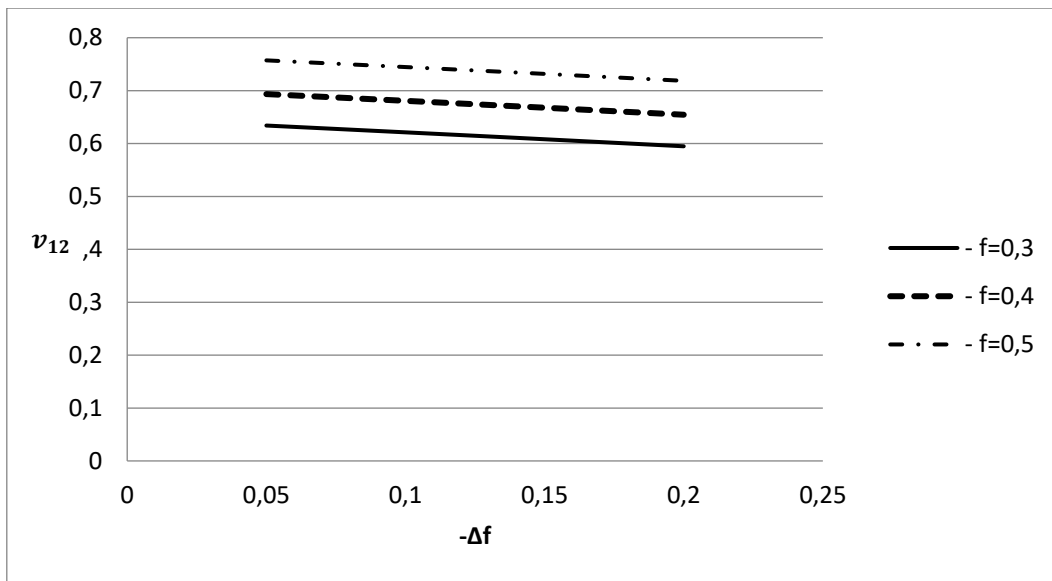


Рис. 2. Залежність коефіцієнта Пуассона від об'ємного вмісту корда у композиті

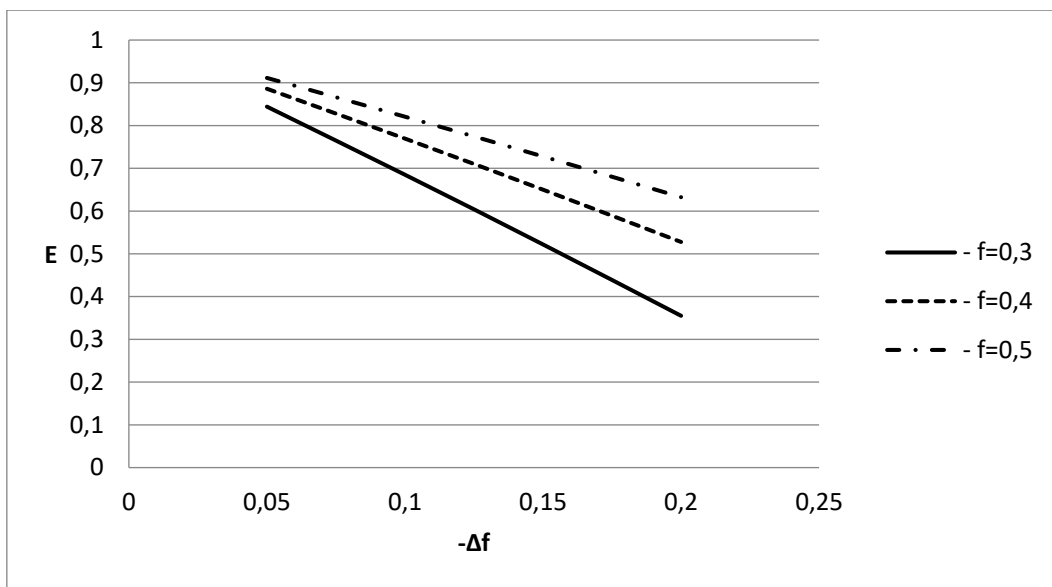


Рис. 3. Залежність модуля пружності від об'ємного вмісту корда у композиті

Отримані результати у частинному випадку ізотропії співпадають з результатами роботи [3] для лінійного випадку, а значення модуля пружності із збільшенням рівня деформацій зменшується. Аналогічна картина спостерігається й для коефіцієнта Пуассона.

Як можна зауважити з наведених графіків, для реальних композиційних матеріалів, при зміні об'ємного вмісту волокна до 15% в процесі деформування, значно впливає на ефективний повздовжній модуль пружності, який змінюється у 1,5–2 рази для різних значень початкового об'ємного вмісту волокна (рис. 3). Для

ефективного коефіцієнта Пуассона цей вплив менш суттєвий – до 10% (рис. 2). Хоча характер залежностей і нелінійний, для досліджуваного композиційного матеріалу він досить близький до лінійного при заданих параметрах деформування матеріалу.

У роботі вперше отримано аналітичні залежності для ефективних характеристик односпрямованого волокнистого композиційного матеріалу – повздовжнього модуля пружності та коефіцієнта Пуассона – із врахуванням рівня деформування, що відображається у зміні об'ємного вмісту компонентів у композиті.

ЛІТЕРАТУРА

1. Димитриєнко Ю.И., Губарева Е.А., Каримов С.Б., Кольжанова Д.Ю. Моделирование эффективных характеристик трансверсально-изотропных несжимаемых композитов с конечными деформациями. *Математическое моделирование и численные методы*. 2018. № 1. С. 72–91.
2. Думанский А.М. Накопление повреждений и деформирование волокнистых композитов. *Научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*. 2014. № 1. С. 250–257.
3. Гребенюк С.М., Гоменюк С.І., Клименко М.І. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2019. 350 с.
4. Гребенюк С.М., Клименко М.І. Визначення ефективного модуля пружності композита при нормальному розподілі модулів пружності волокна та матриці. *Вестник Херсонского национального технического университета*. 2014. Вип. 3(№ 50). С. 254–258.
5. Димитриєнко Ю.И. Моделирование нелинейно-упругих характеристик композитов с конечными деформациями методом асимптотического осреднения. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 2015. № 11. С. 6–77.
6. Русланцев А.Н., Думанский А.М. Модель нелинейного деформирования и накопление повреждений в полимерных композитах. *Машиностроение и компьютерные технологии*. 2014. № 2. С. 324–331.
7. Suganyadevi Sarangan, Singh B. N. Nonlinear free vibration analysis of laminated composite plates and shell panels using non-polynomial higher-order sheared deformation theory. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2021. № 6. С. 14–25.
8. Tuan Le-Manh, Jaehong Lee. Isogeometric analysis for flexural behavior of composite plates considering large deformation with small rotations. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2016. № 23. С. 328–336.
9. Емельянов А.Н. Эффективные характеристики волокнистых композитов в линейной моментной теории упругости. *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика*. 2016. № 3. С. 66–70.
10. Стружанов В.В., Бурмашева Н.В. Теория упругости: основные положения : учеб. пособие. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2019. 204 с.

REFERENCES

1. Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Karimov S.B., Kolzhanova D.Yu. (2018) *Modelirovanie effektivnykh kharakteristik transversal'no-izotropnykh neshzimaemykh kompozitov s konechnymi deformatsiyami* [Modeling of effective characteristics of transversely-isotropic incompressible composites with finite deformations]. *Moscow State Technical University*, no.1, pp. 72–91.
2. Dumansky A.M. (2014) *Nakoplenie povrezhdeniy i deformirovanie voloknistykh kompozitov* [Accumulation of damages and deformation of fibrous composites]. *Moscow State Technical University. N.E. Bauman*, no.1, pp. 250–257.
3. Grebenyuk S.M., Gomenyuk S.I., Klimenko M.I. (2019) *Napruzhenno-deformovaniy stan prostorovikh konstruksiy na osnovi gomogenizatsii voloknistykh kompozitiv* [Stress-strain state of spatial structures based on homogenization of fibrous composites] Kherson: *Helvetica Publishing House*. (in Ukrainian)
4. Grebenyuk S.M., Klimenko M.I. (2014) *Viznachennya efektyvnoho modulya pruzhnosti kompozita pri normal'nomu rozpodili moduliv pruzhnosti volokna ta matritsi* [Determination of the effective modulus of elasticity of the composite at a normal distribution of modulus of elasticity of the fiber and matrix], vol. 3, no.50, pp. 254–258.

5. Dimitrienko Yu.I. (2015) *Modelirovanie nelineynno-uprugikh kharakteristik kompozitov s konechnimi deformatsiyami metodom asimptoticheskogo osredneniya* [Modeling of nonlinear-elastic characteristics of composites with finite deformations by the method of asymptotic averaging]. *MSTU im. N.E. Bauman*, no.11, pp. 68–77.
6. Ruslantsev A. N., Dumansky A. M. (2014) *Model' nelineynogo deformirovaniya i nakoplenie povrezhdeniy v polimernykh kompozitakh* [Nonlinear deformation and damage accumulation model in polymer composites]. *MSTU im. N.E. Bauman*, no. 2, pp. 324–331.
7. Suganyadevi Sarangan, Singh B. N. (2021) [Nonlinear free vibration analysis of laminated composite plates and shell panels using non-polynomial higher-order sheared formation theory]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, no. 6, pp. 14–25.
8. TuanLe-Manh, TuanLuu-Anh, JaehongLee (2016), "Isogeometric analysis for flexural behavior of composite plates considering large deformation with small rotations", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, no. 23, pp. 328–336.
9. Emelyanov A.N. (2016) *Effektivnye kharakteristiki voloknistykh kompozitov v lineynoy momentnoy teorii uprugosti* [Effective characteristics of fibrous composites in the linear moment theory of elasticity]. *Moscow State University. M.V. Lomonosov*, no.3, pp. 66–70.
10. Struzhanov V.V., Burmasheva N.V. (2019) *Teoriya uprugosti: osnovnye polozheniya : ucheb. posobie* [Theory of elasticity: the main provisions: textbook]. *Ural Publishing House*. p. 204. (in Russian)