

УДК 539.3
DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2022-1-03>

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ОРТОТРОПНОЇ ПІВПЛОЩИНИ В УМОВАХ ПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

Дзундза Н. С.

*аспірантка кафедри загальної математики
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0003-4075-474X
natalii.dzundza@gmail.com*

Зіновєєв І. В.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
завідувач кафедри загальної математики
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-7392-2327
zinoveyev@gmail.com*

Ключові слова: пружна ортотропна півплощина, плоска деформація, напружено-деформований стан, функція напружень, інтегральне перетворення Фур'є.

Розглядається перша основна гранична задача теорії пружності про визначення напружено-деформованого стану ортотропної півплощини в умовах плоскої деформації. На межі $y = 0$ відомі навантаження. На нескінченності напруження прямують до нуля. Необхідно визначити напруження та переміщення в довільній точці півплощини.

Наводиться короткий огляд наукових праць, у яких висвітлюються методи та підходи розв'язання задач теорії пружності, міцності щодо визначення напружень і деформацій в ортотропних тілах, зокрема пластинах, плитах, балках.

Розв'язок поставленої граничної задачі для ортотропної півплощини шукається у просторі трансформант одновимірного інтегрального перетворення Фур'є. Усі основні рівняння задачі та граничні умови піддаються прямому перетворенню одновимірного інтегрального перетворення Фур'є.

Розв'язання сформульованої плоскої задачі базується на побудові трансформанти Фур'є функції напружень, яка задовольняє відповідному аналогу бігармонічного диференціального рівняння у просторі трансформант для випадку ортотропного матеріалу.

Вигляд трансформанти функції напружень залежить від значень пружних сталих ортотропного матеріалу, а саме від значень коренів отриманого у просторі трансформант характеристичного рівняння. Розглянуто один із трьох можливих випадків.

Установлюються співвідношення між трансформантою функції напружень і трансформантами напружень і переміщень. Трансформанти функції напружень виражаються через чотири допоміжні функції, які пов'язані з навантаженнями на поверхні півплощини. З умов на межі $y = 0$ знаходимо дві із чотирьох допоміжних функцій. Умови на нескінченності дозволили встановити зв'язок між двома знайденими допоміжними функціями та двома іншими. Після підстановки знайдених виразів у трансформанти напружень і переміщень і застосування оберненого інтегрального перетворення Фур'є отримуємо істинні значення напружень і переміщень в точках ортотропної півплощини.

Отримано розв'язки для конкретних випадків і проведено аналіз числових результатів. Отримані розрахунки свідчать про адекватність результатів і логічність застосування обраного методу для розв'язання поставленої задачі.

RESEARCH OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THE ORTHOTROPIC HALF-PLANE UNDER THE PLANAR DEFORMATION CONDITIONS

Dzundza N. S.

*Postgraduate Student at the Department of General Mathematics
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0003-4075-474X
natalii.dzundza@gmail.com*

Zinovieiev I. V.

*Philosophy Doctor, Associate Professor,
Professor at the Department of General Mathematics
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-7392-2327
zinoveyev@gmail.com*

Key words: *elastic orthotropic half-plane, planar deformation, stress-strain state, stress function, integral Fourier transformation.*

The first basic boundary problem of the elasticity theory connected with the determination of the stress-strain state of the orthotropic half-plane under the planar deformation conditions has been considered. The stresses at the boundary $y = 0$ are known. The stresses tend to zero at infinity. It is necessary to determine the stress and displacement at any point of the half-plane.

A brief overview of the scientific works which highlight the methods and approaches to solving the problems of the theory of elasticity, the strength as for the determination of stresses and deformations in orthotropic bodies, in particular plates, slabs, and beams is provided.

The solution of the given boundary problem for the orthotropic half-plane is sought in the transformant space of the one-dimensional integral Fourier transformation. At the same time, all the main equations of the problem and the boundary conditions are subjected to direct one-dimensional integral Fourier transformation.

The solution of the formulated planar problem is based on the construction of the Fourier transform of the stress function, which satisfies the corresponding analogue of the biharmonic differential equation in the transformant space for the case of an orthotropic material.

The form of the transformant of the stress function depends on the values of the orthotropic material elastic constants, namely on the values of the roots of the characteristic equation obtained in the transformant space. One of three possible cases have been considered.

The relations between the transformant of the stress function and the transformants of stresses and displacements are established. The transformants of the stress function are expressed in terms of four auxiliary functions, which are related to the loads on the surface of the half-plane. We find two auxiliary functions from the boundary condition ($y = 0$). The infinity conditions make it possible to establish the connection between two found auxiliary functions and the other two functions. After substituting the found expressions into transformants of stresses and displacements and applying the inverse integral

Fourier transformation, we obtain the true values of stresses and displacements at the points of the orthotropic half-plane. The solutions for the specific cases have been obtained and the numerical results have been analyzed. The obtained calculations demonstrate the adequacy of the results and the logic of using the chosen method for the solution of the given problem.

Вступ. У механіці особливе місце належить дослідженням напружено-деформованого стану конструкцій, пружних тіл із різних матеріалів. Ортотропні матеріали, що використовуються в багатьох галузях промисловості, мають високу міцність, жорсткість.

Сучасний стан досліджень задач на знаходження напружено-деформованого стану тіл представлений великою кількістю робіт, у яких застосовуються різні методи. У праці О.Г. Кучера [1] використовується метод скінчених елементів для розрахунку деформованого стану багатопарової криволінійної ортотропної пластини. У статті S.J. Antony, K. Chandrasherhara [2] застосовується комбінація методу скінчених елементів і аналітичного підходу до розрахунку деформації ортотропного тіла. Для підвищення точності розрахунків у порівнянні з методом скінчених елементів у роботах Н.В. Здолбіцької, М.В. Делявського [3; 4] було розроблено аналітико-числовий метод мікроелементів, який застосовано для розрахунку тонких ортотропних плит на пружній основі Вінклера. У своїх роботах О.В. Горик, С.Б. Ковальчук [5; 6] описують аналітичний метод розрахунку двохпорних багатопарових ортотропних балок. Також заслуговує на увагу робота М.В. Жука та Н.М. Щербини [7], у якій наведено підхід, що поєднує метод Канторовича і матрицантний числово-аналітичний метод розв'язування задачі на згин ортотропної пластини. Внесок у чисельно-аналітичні методи знаходження напружено-дефор-

мованого стану зробив також А.Я. Григоренко, який у своїй праці [8] запропонував поєднання методу сплайн-колокації та методу дискретної ортогоналізації для розв'язання прямокутної ортотропної пластини. J. Schroder, F. Gruttmann, J. Loblein у статті [9] представили скінченноелементну модель поведінки ортотропного пружно-пластичного матеріалу за скінчених деформацій, яка для одного окремого випадку зводиться до теорії Гріна-Нагді.

Отже, можна зробити висновок, що розроблення ефективних методів дослідження властивостей таких матеріалів, зокрема напружено-деформованого стану, є актуальною проблемою і нині.

Постановка завдання. Розглядається перша основна гранична задача теорії пружності про визначення напружено-деформованого стану ортотропної півплощини без дефектів в умовах плоскої деформації.

На межі $y=0$ відомі навантаження $\sigma_y(x,0) = f_1(x), \tau_{xy}(x,0) = f_2(x)$. На нескінченності напруження прямують до нуля. Ортотропна півплощина займає область $G(x,y): \{-\infty < x < +\infty, 0 \leq y < +\infty\}$. Для математичної постановки введемо систему координат так, як подано на рис. 1. Матеріал півплощини характеризується пружними константами $\nu_{xz}, \nu_{xy}, \nu_{yz}, \nu_{zy}, E_x, E_y$.

Потрібно визначити напруження та переміщення в довільній точці півплощини за умови, що деформація плоска.

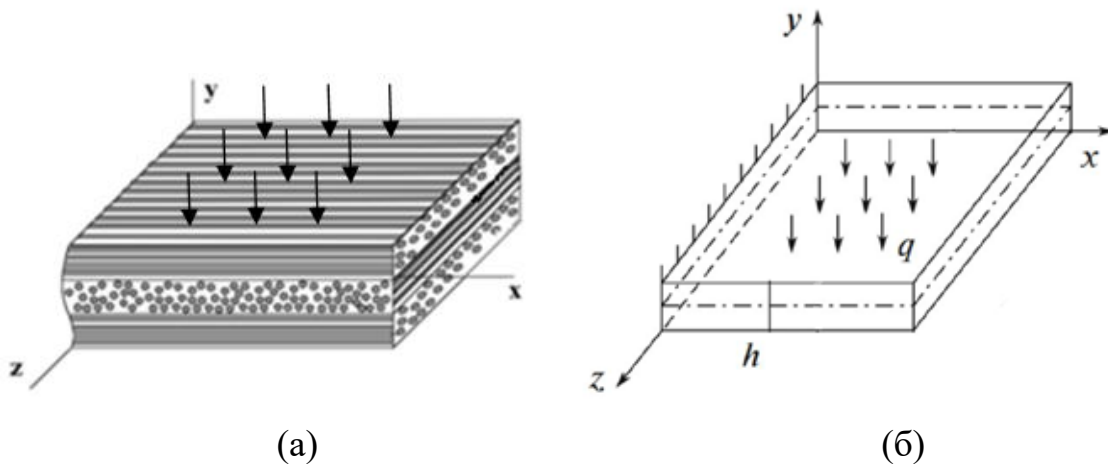


Рис. 1. Фізична (а) і геометрична (б) постановка завдання

Методи. Одним із методів розв’язання задач визначення напружено-деформованого стану тіл, необмежених у плані (шарів, багат шарових основ, півплощин), є метод інтегральних перетворень. Даний метод у поєднанні з методом функцій податливості для ізотропних матеріалів запропонований і розвинутий у роботах А.К. Приварникова та його учнів, наприклад: [10; 11; 12]. Поставимо за мету поширити метод, розроблений у роботах А.К. Приварникова, на випадок ортотропної півплощини.

Задача визначення напружено-деформованого стану півплощини має різні методи розв’язання. Одним із таких підходів є метод визначення напружень за допомогою функції напружень $\varphi(x, y)$ (функції Ері). Функція напружень може бути подана у вигляді алгебраїчних поліномів (у цілих функціях), тригонометричних рядів (розв’язок Файлона або Рів’єра) або за допомогою кінцевих різниць (метод сіток) [13]. Причому функція напружень $\varphi(x, y)$ обирається так, щоб тотожно задовольняла умовам:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (1)$$

Розглянемо підхід, що базується на застосуванні методу одновимірного інтегрального перетворення Фур’є [12] до функції напружень за змінною x .

$$\bar{\varphi}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) \cdot e^{i\xi x} dx, \varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\xi, y) \cdot e^{-i\xi x} d\xi. \quad (2)$$

Перша формула визначає пряме одновимірне інтегральне перетворення Фур’є для функції $\varphi(x, y)$, друга – обернене. Функція $\bar{\varphi}(\xi, y)$ називається трансформантою Фур’є функції $\varphi(x, y)$. Має місце властивість [10]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^k \varphi(x, y)}{\partial x^k} \cdot e^{i\xi x} dx = (-i\xi)^k \cdot \bar{\varphi}(\xi, y). \quad (3)$$

Беручи до уваги особливості ортотропного матеріалу, маємо не звичайне бігармонічне диференціальне рівняння, а його аналог, до якого застосуємо інтегральне перетворення Фур’є й отримаємо рівняння [15]:

$$A_1 \cdot \frac{d^4 \bar{\varphi}}{dy^4} - 2A_3 \xi^2 \cdot \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dy^2} + A_2 \xi^4 \cdot \bar{\varphi} = 0, \quad (4)$$

де

$$c_{11} = \frac{1 - \nu_{xz} \cdot \nu_{zx}}{E_x}, c_{22} = \frac{1 - \nu_{yz} \cdot \nu_{zy}}{E_y}, c_{33} = \frac{1}{G_{xy}},$$

$$c_{12} = c_{21} = \frac{\nu_{xy} + \nu_{xz} \cdot \nu_{zy}}{E_y} = \frac{\nu_{yx} + \nu_{zx} \cdot \nu_{yz}}{E_x},$$

$G_{xy} = \frac{\sqrt{E_x \cdot E_y}}{2 \cdot (1 + \sqrt{\nu_{xy} \cdot \nu_{yx}})}$ – константи пружності в законі Гука, $A_1 = c_{11}, A_2 = c_{22}, A_3 = \frac{c_{33}}{2} - c_{12}, \bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\xi, y)$ – трансформанта Фур’є за змінною x від $\varphi(x, y)$.

Запишемо відповідне до (4) характеристичне рівняння:

$$r^4 - \frac{2A_3 \lambda^2}{A_1} \cdot r^2 + \frac{A_2 \lambda^4}{A_1} = 0, \lambda = |\xi|.$$

Розв’язавши це рівняння, отримаємо корені:

$$r_{1,4} = \pm \sqrt{\frac{A_3 \lambda^2}{A_1} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{A_1 A_2}{A_3^2}}\right)} = \pm \lambda \cdot \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \cdot \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{A_1 A_2}{A_3^2}}}. \quad (5)$$

Залежно від умов задачі можливі три випадки $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} > 1, \frac{A_1 A_2}{A_3^2} < 1, \frac{A_1 A_2}{A_3^2} = 1$. Розглянемо задачу за умови $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} = 1$, тоді з (5) отримаємо дійсні кратні

корні $r_{1,2} = |\xi| \cdot \sqrt{\frac{A_3}{A_1}}$ і $r_{3,4} = -|\xi| \cdot \sqrt{\frac{A_3}{A_1}}$, а трансформанта функції напруження $\bar{\varphi}(\xi, y)$ може бути представлена у вигляді (6):

$$\bar{\varphi} = A sh(ry\sqrt{a}) + B\sqrt{a}y sh(ry\sqrt{a}) + C ch(ry\sqrt{a}) + D\sqrt{a}y ch(ry\sqrt{a}), \quad (6)$$

де $r = |\xi|, \sqrt{a} = \sqrt{\frac{A_3}{A_1}}, A, B, C, D$ – функції параметра ξ .

Ураховуючи зв’язок функції напружень $\varphi(\xi, y)$ з напруженнями $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ та властивість перетворення Фур’є (3), отримаємо відповідні вирази у просторі трансформант Фур’є:

$$\bar{\sigma}_x(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot e^{i\xi x} dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \cdot e^{i\xi x} dx = \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2},$$

$$\bar{\sigma}_y(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot e^{i\xi x} dx = -\xi^2 \bar{\varphi},$$

$$\bar{\tau}_{xy}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot e^{i\xi x} dx = -\frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot e^{i\xi x} dx = i\xi \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}.$$

Враховуючи (6), отримаємо:

$$\bar{\sigma}_x(\xi, y) = r^2 a \bar{\varphi} + 2ra \cdot (B ch(ry\sqrt{a}) + D sh(ry\sqrt{a})), \bar{\sigma}_y(\xi, y) = -\xi^2 \bar{\varphi},$$

$$\bar{\tau}_{xy}(\xi, y) = i\xi \left((A\sqrt{a} + Bary + D\sqrt{a}) \cdot ch(ry\sqrt{a}) + (C\sqrt{a} + Dary + B\sqrt{a}) \cdot sh(ry\sqrt{a}) \right). \quad (7)$$

З формул $\varepsilon_x = c_{11} \sigma_x - c_{12} \sigma_y, \gamma_{xy} = c_{33} \tau_{xy}$ отримаємо трансформанти переміщень:

$$\begin{aligned}\bar{u}_x(\xi, y) &= \frac{i}{\xi} \cdot \left(\xi^2 \bar{\varphi} \cdot (c_{11}a + c_{12}) + 2rac_{11} \left(Bch(ry\sqrt{a}) + Dsh(ry\sqrt{a}) \right) \right), \\ \bar{u}_y(\xi, y) &= -\frac{2rac_{11}}{\xi^2} \cdot \left(Br\sqrt{a}sh(ry\sqrt{a}) + Dr\sqrt{a}ch(ry\sqrt{a}) \right) + (ac_{11} + c_{12} - c_{33}) \cdot \frac{d\bar{\varphi}}{dy}.\end{aligned}\quad (8)$$

Уведемо в розгляд функції $\alpha(\xi), \delta(\xi), \beta(\xi), \varepsilon(\xi)$, пов'язані з умовами на межі $y=0$ [10]:

$$\begin{aligned}\alpha(\xi) &= \bar{\sigma}_y|_{y=0} = -C\xi^2, \delta(\xi) = -\frac{i\xi}{r} \cdot \bar{\tau}_{xy}|_{y=0} = \sqrt{a} \cdot (Ar^2 + Dr), \\ \beta(\xi) &= \frac{r}{2ac_{11}} \cdot \bar{u}_y|_{y=0} = Dr\sqrt{a} + \frac{\delta(\xi) \cdot (ac_{11} + c_{12} - c_{33})}{2ac_{11}}, \\ \gamma(\xi) &= -\frac{i\xi}{2ac_{11}} \cdot \bar{u}_x|_{y=0} = Br - \frac{\alpha(\xi) \cdot (ac_{11} + c_{12})}{2ac_{11}}.\end{aligned}\quad (9)$$

Виразимо A, B, C, D через $\alpha(\xi), \delta(\xi), \beta(\xi), \varepsilon(\xi)$, отримаємо:

$$\begin{aligned}A &= \frac{-2ac_{11}\beta + 3ac_{11}\delta + c_{12}\delta - c_{33}\delta}{2a\sqrt{ar^2c_{11}}}, B = \frac{ac_{11}\alpha + 2ac_{11}\gamma + c_{12}\alpha}{2arc_{11}}, \\ C &= -\frac{\alpha}{r^2}, D = \frac{2ac_{11}\beta - ac_{11}\delta - c_{12}\delta + c_{33}\delta}{2a\sqrt{arc_{11}}}.\end{aligned}\quad (10)$$

Тепер підставимо отримані вирази у трансформанти напружень:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_x(\xi, y) &= (a^2c_{11}ry\alpha + 2a^2c_{11}ry\gamma + ac_{12}ry\alpha + 2ac_{11}\beta + ac_{11}\delta - c_{12}\delta + c_{33}\delta) \cdot \\ &\cdot \frac{sh(ry\sqrt{a})}{2\sqrt{ac_{11}}} + \frac{ch(ry\sqrt{a})}{2c_{11}} \cdot (2ac_{11}ry\beta - ac_{11}ry\delta - c_{12}ry\delta + c_{33}ry\delta + 4ac_{11}\gamma + 2c_{12}\alpha), \\ \bar{\sigma}_y(\xi, y) &= (a^2c_{11}ry\alpha + 2a^2c_{11}ry\gamma + ac_{12}ry\alpha - 2ac_{11}\beta + 3ac_{11}\delta + c_{12}\delta - c_{33}\delta) \cdot \\ &\cdot \frac{sh(ry\sqrt{a})}{-2a\sqrt{ac_{11}}} + \frac{ch(ry\sqrt{a})}{2ac_{11}} \cdot (-2ac_{11}ry\beta + ac_{11}ry\delta + c_{12}ry\delta - c_{33}ry\delta + 2ac_{11}\alpha), \\ \bar{\tau}_{xy}(\xi, y) &= (-2ac_{11}ry\beta + ac_{11}ry\delta + c_{12}ry\delta - c_{33}ry\delta + ac_{11}\alpha - 2ac_{11}\gamma - c_{12}\alpha) \cdot \\ &\cdot \frac{i\xi \cdot sh(ry\sqrt{a})}{-2\sqrt{ac_{11}}r} + \frac{i\xi \cdot ch(ry\sqrt{a})}{2c_{11}r} \cdot (ac_{11}ry\alpha + 2ac_{11}ry\gamma + c_{12}ry\alpha + 2c_{11}\delta).\end{aligned}\quad (11)$$

Аналогічно підставимо отримані вирази у трансформанти переміщень:

$$\begin{aligned}\bar{u}_x(\xi, y) &= (a^3c_{11}^2ry\alpha + 2a^3c_{11}^2ry\gamma + 2a^2c_{11}c_{12}ry\alpha + 2a^2c_{11}c_{12}ry\gamma + ac_{12}^2ry\alpha + 2a^2c_{11}^2\beta + a^2c_{11}^2\delta - 2ac_{11}c_{12}\beta + 2ac_{11}c_{12}\delta + ac_{11}c_{33}\delta + c_{12}^2\delta - c_{12}c_{33}\delta) \cdot \\ &\cdot \frac{ish(ry\sqrt{a})}{2a\sqrt{a\xi c_{11}}} + \frac{ich(ry\sqrt{a})}{2a\xi c_{11}} \cdot (2a^2c_{11}^2ry\beta - a^2c_{11}^2ry\delta + 2ac_{11}c_{12}ry\beta - 2ac_{11}c_{12}ry\delta + ac_{11}c_{33}ry\delta + 4a^2c_{11}^2\gamma - c_{12}^2ry\delta + c_{12}c_{33}ry\delta), \\ \bar{u}_y(\xi, y) &= (2a^2c_{11}^2ry\beta - a^2c_{11}^2ry\delta + 2ac_{11}c_{12}ry\beta - 2ac_{11}c_{33}ry\beta - 2ac_{11}c_{12}ry\delta + 2ac_{11}c_{33}ry\delta + a^2c_{11}^2\alpha + 6a^2c_{11}^2\gamma - c_{12}^2ry\delta + \\ &+ 2c_{12}c_{33}ry\delta - c_{33}^2ry\delta + 2ac_{11}c_{12}\alpha + ac_{11}c_{33}\alpha + 2ac_{11}c_{12}\gamma - 2ac_{11}c_{33}\gamma + c_{12}^2\alpha - c_{12}c_{33}\alpha) \cdot \frac{sh(ry\sqrt{a})}{2\sqrt{ac_{11}}r} + \frac{ch(ry\sqrt{a})}{2c_{11}r} \cdot \\ &\cdot (a^2c_{11}^2ry\alpha + 2a^2c_{11}^2ry\gamma + 2ac_{11}c_{12}ry\alpha - ac_{11}c_{33}ry\alpha + 2ac_{11}c_{12}ry\gamma - 2ac_{11}c_{33}ry\gamma + c_{12}^2ry\alpha - c_{12}c_{33}ry\alpha + 4ac_{11}^2\beta).\end{aligned}\quad (12)$$

Формули (11) для трансформант напружень є лінійними комбінаціями функцій $sh(ry\sqrt{a}), ch(ry\sqrt{a})$ і $rysh(ry\sqrt{a}), ry ch(ry\sqrt{a})$, кожна з яких за $r \neq 0$ і $y \rightarrow \infty$ необмежено зростає. Водночас $Ash(ry\sqrt{a}) + Bch(ry\sqrt{a})$, і $Crysh(ry\sqrt{a}) + Dry ch(ry\sqrt{a})$ прямує до 0 за нескінченності у випадках $A + B = 0$ та $C + D = 0$. З яких ми отримуємо функції:

$$\beta(\xi) = \frac{-(a\sqrt{ac_{11}} + \sqrt{ac_{12}}) \cdot \alpha(\xi) - 2a\sqrt{ac_{11}} \gamma(\xi) + (ac_{11} + c_{12} - c_{33}) \cdot \delta(\xi)}{2ac_{11}},$$

$$\gamma(\xi) = \frac{(ac_{11} - c_{12}) \cdot \alpha(\xi) - 2\sqrt{ac_{11}} \cdot \delta(\xi)}{2ac_{11}}. \quad (13)$$

Отримані вирази підставляємо в (11), (12), отримуємо остаточні вирази для трансформант напружень і переміщень. Отримані вирази піддаємо оберненому інтегральному перетворенню й отримуємо істинні значення. В окремих випадках вдається отримати аналітичні вирази, у разі неможливості застосовується чисельне інтегрування за допомогою формул високого ступеня точності.

Числові розрахунки. Розглянемо ортотропну півплощину, матеріал якої характеризується пружними константами $E_x = 1.73 \cdot 10^3$ МПа, $E_y = 3.31 \cdot 10^3$ МПа, $\nu_{xz} = 0.235$, $\nu_{xy} = 0.26$, $\nu_{yz} = 0.17$, $\nu_{zy} = 0.3$.

На межі $y = 0$ задано навантаження $\sigma_y(x, 0) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $\tau_{xy}(x, 0) = e^{-|x|}$. За $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ напруження дорівнюють нулю.

За формулами (2), (9), (13) маємо:

$$\alpha(\xi) = \pi \cdot e^{-|\xi|}, \delta(\xi) = -\frac{2i\xi}{(\xi^2 + 1) \cdot r},$$

$$\gamma(\xi) = \frac{1.175320840 \cdot re^{-|\xi|} (\xi^2 + 1) + 2.352246170i\xi}{(\xi^2 + 1) \cdot r},$$

$$\beta(\xi) = \frac{-2.671142753 \cdot re^{-|\xi|} (\xi^2 + 1) - 0.7482324860i\xi}{(\xi^2 + 1) \cdot r}.$$

Застосовуючи обернене перетворення Фур'є (2) до (11), (12), отримуємо істинні значення напружень і переміщень точок півплощини (рис. 2).

Як бачимо з наведених розрахунків, найбільші значення в околі $x = 0$. У разі віддалення від нуля значення зменшуються. Отримані результати свідчать про дотримання межових умов і умов на нескінченності $\sigma_y(0, 0) = 1$ та $\tau_{xy}(0, 0) = 1$.

На рис. 3 наведено числові розрахунки для переміщень u_x, u_y .

Отримані результати цілком узгоджуються з очікуваною фізичною картиною розподілу напружень і переміщень у півплощині.

Висновки. Розглянутий підхід визначення напружено-деформованого стану ортотропної півплощини, що базується на застосуванні методу одновимірного інтегрального перетворення Фур'є до функції напружень.

На базі отриманих аналітичних розв'язків для ортотропної півплощини були зроблені числові розрахунки, побудовані графіки та виконаний їх аналіз. Отримані розрахунки свідчать про адекватність результатів і логічність застосування обраного методу для розв'язання поставленої задачі.

Наступним етапом досліджень є поширення описаного підходу на клас задач про визначення напружено-деформованого стану пружних шарів і багат шарових основ з урахуванням ортотропії матеріалу шарів.

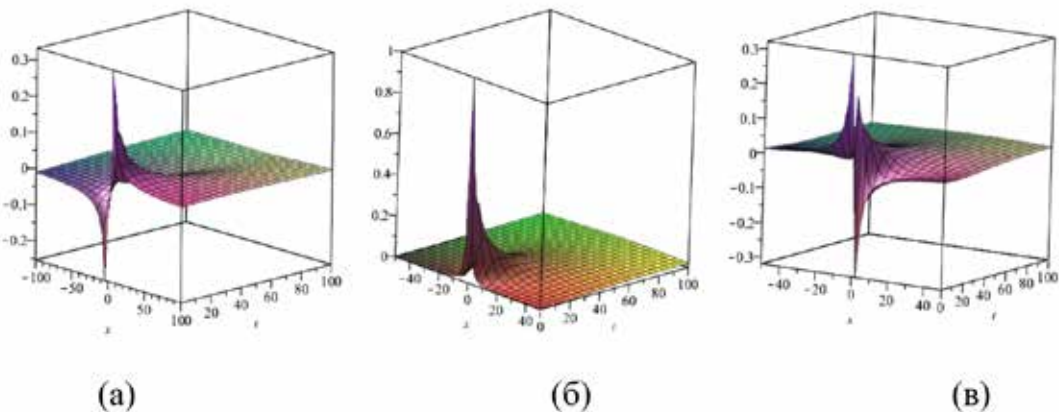


Рис. 2. Істинні значення напружень $\tilde{A}_x(x, y)$ (а), $\tilde{A}_y(x, y)$ (б) та $\tilde{A}_{xy}(x, y)$ (в)

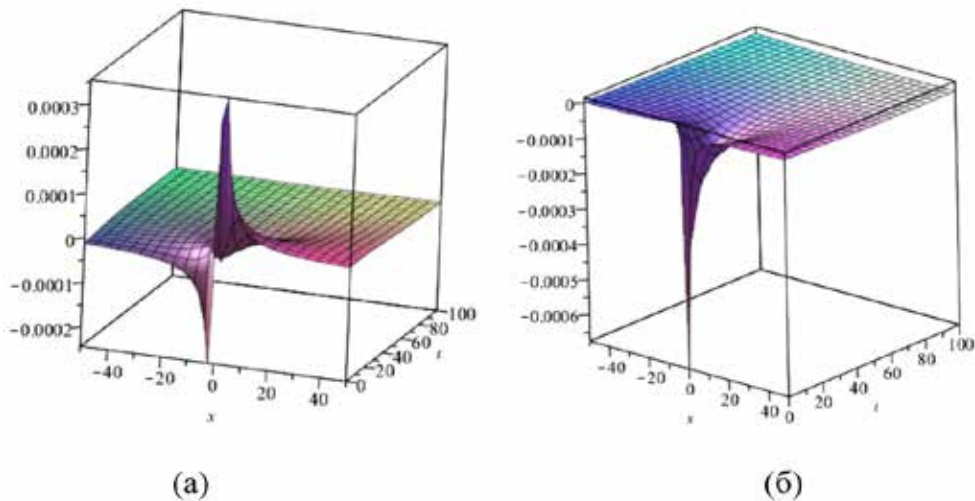


Рис. 3. Істинні значення переміщень $u_x(x, y)$ (а), $u_y(x, y)$ (б)

ЛІТЕРАТУРА

1. Кучер О.Г., Харитон В.В. Розрахунок деформованого стану криволінійної багатошарової пластини методом скінченних елементів із числовим визначенням матриці жорсткості. *Вісник Національного авіаційного університету*. 2004. № 1 (1). С. 92–97.
2. Antony S.J., Chandrashekhara K. Contact Stresses for a Footing on an Orthotropic Elastic Medium. *Strain: an international Journal for Experimental Mechanics*. 1997. Vol. 33 (4). P. 127–132. DOI: 10.1111/j.1475-1305.1997.tb01060.x.
3. Напружено-деформований стан тонкої ортотропної плити на пружній основі / Н.В. Здолбіцька та ін. *Сучасні проблеми механіки і математики*. 2008. Т. 2. С. 40–42.
4. Визначення напружено-деформованого стану в тонких плитах ортотропних плит на пружній основі Вінклера / М.В. Делявський та ін. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2014. Т. 50. № 6. С. 15–22.
5. Kovalchuk S., Gorik A. Major stress-strain state of double support multilayer beams under concentrated load. Part 1. Model construction. *Journal of Mechanical Engineering*. 2018. Vol. 21 (4). P. 30–36.
6. Kovalchuk S., Gorik A. Major stress-state of double support multilayer beams under concentrated load. Part 2 : Model implementation and calculation results. *Journal of Mechanical Engineering*. 2019. Vol. 22 (1). P. 24–32. DOI: 10.15407/pmach2019.01.024.
7. Аналітико-числовий підхід до розв'язування задачі про згин прямокутних ортотропних пластин на пружній основі / М. Жук та ін. *Вісник Львівського університету. Серія «Прикладна математика та інформатика»*. 2014. № 21. С. 84–98.
8. О напруженно-деформированном состоянии ортотропных толстостенных прямоугольных пластин / А.Я. Григоренко и др. *Доповіді Національної академії наук України. Серія «Математика, природознавство, технічні науки»*. 2011. № 9. С. 49–55.
9. A simple orthotropic finite elasto–plasticity model based on generalized stress-strain measures / J. Schröder et al. *Computational Mechanics*. 2002. Vol. 30. P. 48–64. DOI: 10.1007/s00466-002-0366-3.
10. Приварников А.К. Двумерные граничные задачи теории упругости для многослойных оснований. Запорожье : Запорожский государственный университет, 1990. 84 с.
11. Приварников А.К., Ламзюк В.Д. Упругие многослойные основания. Днепропетровск : Днепропетровский университет, 1985. 162 с.
12. Приварников А.К. О контакте слоя с упругим полупространством. *Механика твердого тела*. 1972. № 4. С. 163–167.
13. Бейгул О.О., Лепетова Г.Л. Методи теорії пружності для дослідження та розрахунків обладнання : навчальний посібник. Дніпродзержинськ : Дніпродзержинський держ. техн. ун-т, 2016. 56 с.
14. Перетворення Фур'є, Лапласа: узагальнення та застосування : навчально-методичний посібник / Г.П. Лопушанська та ін. Львів : Видавництво Львівського університету, 2014. 153 с.
15. Дзундза Н.С., Зіновєєв І.В. Алгоритм знаходження напружено-деформованого стану пружного ортотропного шару. *Scientific discussion*. 2022. Vol. 1 (64). P. 16–20.

REFERENCES

1. Kucher O.G., Kharyton V.V. (2004). Definition of the deformed shape of a layered curved plate by final elements method with numerical definition of the stiffness matrix. *Visnyk of the National Aviation University*, 1 (1), pp. 92–97 (in Ukrainian).
2. Antony S.J., Chandrashekhara K. (1997). Contact Stresses for a Footing on an Orthotropic Elastic Medium. *Strain: an international Journal for Experimental Mechanics*, 33 (4), pp. 127–132. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1475-1305.1997.tb01060.x>.
3. Zdolbitska N., Delyavskyy M., Zdolbitskyy A. (2008). Stress-strain state of a thin orthotropic plate on an elastic basis. *Modern problems of mechanics and mathematics*. Vol. 2. Pp. 40–42 (in Ukrainian).
4. Delyavskyy M., Zdolbitska N., Zdolbitskyy A., Onishko L. (2014). Determination of the stress-strain state in thin orthotropic plates resting on the elastic Vinkler's foundation. *Physicochemical Mechanics of Materials*. 50 (6), pp. 15–22 (in Ukrainian).
5. Kovalchuk S., Gorik A. (2018). Major stress-strain state of double support multilayer beams under concentrated load. Part 1. Model construction. *Journal of Mechanical Engineering*. Vol. 21 (4), pp. 30–36.
6. Kovalchuk S., Gorik A. (2019). Major stress-state of double support multilayer beams under concentrated load. Part 2. Model implementation and calculation results. *Journal of Mechanical Engineering*. Vol. 22 (1), pp. 24–32. DOI: <https://doi.org/10.15407/pmach2019.01.024>.
7. Zhuk M., Kindybaljuk Adrana, Shcherbyna N. (2014). Analytically-numerical approach to solution of the problem of bending of orthotropic rectangular plates resting on an elastic foundation. *Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics*. Vol. 21. Pp. 84–98 (in Ukrainian).
8. Grigorenko A.Ya., Bergulyov A.S., Yaremchenko S.N. (2011). Stress-strain state of thick-walled orthotropic rectangular plates. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*. Vol. 9. Pp. 49–55 (in Russian).
9. Schröder J., Gruttmann F., Löblein J. (2002). A simple orthotropic finite elasto-plasticity model based on generalized stress–strain measures. *Computational Mechanics*. Vol. 30, pp. 48–64. DOI: 10.1007/s00466-002-0366-3.
10. Privarnikov A.K. Two-dimensional boundary value problems of the theory of elasticity for multilayer based. Zaporizhzhia : Zaporizhzhia National University, 1990. 84 p. (in Russian).
11. Pryvarnikov A.K., Lamzyuk V.D. Elastic multi-layer foundations. Dnipropetrovsk University. Dnipropetrovsk, 1985. 162 p. (in Russian).
12. Privarnikov A.K. (1972). On the contact of a layer with an elastic half-space. *Solid body mechanics*. Vol. 4. Pp. 163–167 (in Russian).
13. Beigul O., Lepetova G. Methods of the theory of elasticity for research and calculations of equipment: textbook. Dniprodzerzhynsk : Dniprodzerzhynsk state. tech. university, 2016. 56 p. (in Ukrainian).
14. Lopushanska G.P., Lopushanskyj A., Myaus O. Fourier transform, Laplace: generalization and application. Lviv : LNU, 2014. 153 p. (in Ukrainian).
15. Dzundza N., Zinovieiev I. (2022). Algorithm of finding the stress-strain state deforming of the elastic orthotropic layer. *Scientific discussion*. Vol. 1 (64), pp. 16–20 (in Ukrainian).