УДК 539.3
DOI https://doi.org/10.26661/2413-6549-2022-1-04

ДОСЛІДЖЕННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОЇ СМУГИ ЗА ПІДСИЛЕННЯ СКІНЧЕННИМ ПРУЖНИМ СТРИНГЕРОМ

Діхтярук М. М.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань
Хмельницький національний університет
вул. Інститутська, 11, Хмельницький, Україна
orcid.org/0000-0002-0819-3842
mega-dihtyaruk@ukr.net

Кравчук О. А.
старший викладач кафедри вищої математики
та комп'ютерних застосувань
Хмельницький національний університет
вул. Інститутська, 11, Хмельницький, Україна
orcid.org/0000-0001-6937-5001
kravchukoa2@gmail.com

Ключові слова: *лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактні задачі, інтегральне перетворення Фур'є.*

У статті в рамках лінериазованої теорії пружності розглядається контактна задача про підкріплення скінченним пружним стрингером попередньо напруженої пружної смуги. Пружна смуга вільною від підкріплення і навантаження гранню жорстко защемлена з основою. Задачу розв'язано для випадків рівних і нерівних коренів визначального рівняння у випадку пружних потенціалів довільної структури. Дослідження проведено в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій у межах лінеаризованої теорії пружності за довільної структури пружного потенціалу. Припускається, що початковий напружений стан пружного стрингера та смуги в області контакту є однорідним. Дослідження проводяться в координатах початкового деформованого стану, які пов'язані з лагранжевими координатами (природного стану). Окрім того, зовнішнє зосереджене навантаження викликає невеликі збурення відповідних величин основного напружено-деформованого стану. Наведені загальні розв'язки основних диференціальних рівнянь лінеаризованої теорії пружності. Виходячи із припущення про те, що стрингер одночасно навантажується вертикальними і горизонтальними силами, потрібно зауважити, що пружний стрингер у вертикальному напрямку згинається як звичайна балка, а в горизонтальному напрямку стискається або розтягується, як звичайний стрижень зі скінченною жорсткістю, який перебуває в одноосьовому напружено-деформованому стані, задача математично формулюється як система інтегро-диференціальних рівнянь щодо невідомих контактних напружень. За допомогою перетворень Фур'є система розв'язується в замкнутому вигляді. У кінцевому результаті вирази для контактних напружень представлені у вигляді інтегралів Фур'є.

У випадку нерівних коренів для хімічно активної гуми СКУ-6 і потенціалу Трелоара (матеріал неогуківського типу) наведено результати чисельного аналізу, що подані у вигляді графіка, який ілюструє досить значний

вплив початкових напружень. Отже, вплив початкових напружень на напружено-деформований стан пружної смуги полягає в тому, що початкові напруження у смузі призводять у разі стиснення до зменшення напружень в області контакту, а в разі розтягу до їх збільшення. Щодо переміщень в області контакту стрингера зі смугою – усе відбувається навпаки.

INVESTIGATION OF CONTACT INTERACTION WITH STRIPE WITH INITIAL STRESSES IF SHE REINFORCED BY THE ELASTIC THIN FINITE STRINGER

Dikhtyaruk N. N.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Higher Mathematics
and Computer Applications
Khmelnytsky National University
Institutska str., 11, Khmelnytsky, Ukraine
orcid.org/0000-0002-0819-3842
mega-dihtyaruk@ukr.net

Kravchuk O. A.
Senior Lecturer at the Department of Higher Mathematics
and Computer Applications
Khmelnytsky National University
Institutska str., 11, Khmelnytsky, Ukraine
orcid.org/0000-0001-6937-5001
kravchukoa2@gmail.com

Key words: *linearized theory of elasticity, initial (residual) stresses, contact problems, integral Fourier transform.*

In this paper, within the framework of the linearized theory of elasticity, the contact problem of reinforcement of a prestressed elastic band by a finite elastic stringer is considered. Elastic strip, free from reinforcement and load face, rigidly clamped to the base. The problem is solved for the cases of equal and unequal roots of the defining equation in the case of elastic potentials of an arbitrary structure. The research is carried out in general for the theory of large initial deformations and two variants of the theory of small initial deformations within the linearized theory of elasticity at arbitrary structure of elastic potential. It is assumed that the initial stress state of the elastic stringer and the band in the contact area is homogeneous. The research is carried out in the coordinates of the initial deformed state, which are related to the Lagrangian coordinates (natural state). In addition, the external concentrated load causes small perturbations of the corresponding values of the ground stress-strain state. The general solutions of the basic differential equations of the linearized theory of elasticity are given. Assuming that the stringer is loaded with both vertical and horizontal forces, it should be noted that the elastic stringer bends in the vertical direction like a normal beam, and in the horizontal direction is compressed or stretched like a normal rod with finite stiffness, which is in uniaxial stress. deformed state, the problem is mathematically formulated as a system of integro-differential equations with respect to unknown contact stresses. Using the Fourier transform, the system is solved in a closed form. Ultimately, the expressions for the contact voltages are represented as Fourier integrals.

In the case of uneven roots for chemically active rubber SKU-6 and Treloir potential (neogukov type material), the results of numerical analysis are presented, presented in the form of a graph illustrating a fairly significant effect of initial stresses. Therefore, the effect of initial stresses on the stress-strain state of the elastic band is that the initial stresses in the strip lead to a decrease in stress in the contact area in the case of compression, and in the case of tension to increase them. As for the movements in the area of contact of the stringer with the strip, the opposite is true.

Вступ. У всіх реальних конструкціях і деталях машин практично завжди існують початкові або залишкові напруження, причини їх виникнення можуть бути різними. Найчастіше початкові напруження в деталях і конструкціях створюються спеціально під час їх виготовлення або вони виникають у процесі виконання з'єднувальних робіт. Також вони можуть з'являтися у процесі експлуатації, як під впливом механічних чинників, як-от незворотні пластичні деформації, так і із причин, що мають немеханічний характер (локальна зміна агрегатного стану, фізико-хімічні процеси та структурні зміни в матеріалі). Нарешті, початкові напруження можуть бути зумовлені постійною дією масових (наприклад, гравітаційних) сил. Наявність початкових напружень позначається на всьому напружено деформованому стані тіл, тому може впливати на міцність конструкцій, призводити до внутрішньої втрати стійкості, сприяти локальному руйнуванню матеріалу. Взяття до уваги впливу залишкових напружень у розрахунках елементів конструкцій, машин і споруд дозволяє більш ефективно врахувати міцностні ресурси матеріалів, шляхом правильної оцінки запасів міцності. Натепер у техніці для поліпшення характеристик міцностних властивостей деталей, можливості їх використання в умовах підвищених температур або в агресивних середовищах широко застосовуються різні покриття (тонкі оболонки). Оскільки такі деталі часто є відповідальними елементами конструкцій, чиє руйнування може призвести до катастрофічних наслідків, необхідна їх регулярна діагностика. У теоретичному плані ця проблема може бути зведена до розгляду контактних задач за різних напружено-деформованих станів у нескінченному шарі чи смузі зі змішаними граничними умовами. Аналогічні завдання можуть виникати і в разі розрахунку важких фундаментних плит і будівельних перекриттів, що перебувають у полі дії гравітаційних сил. Характерною особливістю таких задач є те, що в математичному плані вони в основному є задачами зі змішаними граничними умовами (контактними задачами) для стисливих і нестисливих тіл за однорідних початкових умов і зводяться зазвичай до розв'язування інтегральних рівнянь. Однак за умови великих початкових напружень (деформацій) можна обмежитися розглядом лінеаризованої теорії пружності [1; 2; 6]. У статті в рамках лінеаризованої теорії пружності розглядається плоска контактна задача про передачу навантаження від нескінченного пружного стрингера до смуги з початковими напруженнями. Дослідження проведені в загальному вигляді для теорії великих (скінченних) початкових деформацій і різних варіантів теорії малих початкових деформацій, за довільної структури пружного потенціалу. За допомогою інтегрального перетворення Фур'є одержано основні інтегро-диференційні рівняння. Подальший розв'язок яких представлено у вигляді квазірегулярних нескінченних систем алгебраїчних рівнянь. Досліджено вплив наявних у смузі початкових (залишкових) напружень на закон розподілу контактних напружень за лінією її контакту зі скінченним стрингером [3–5].

Огляд літератури. Дослідження впливу початкових (залишкових) напружень стали активно проводитися в нашій країні та за кордоном лише наприкінці ХХ століття. Необхідно відзначити, що загалом сувора постановка таких завдань вимагає залучення апарату нелінійної теорії пружності, що істотно ускладнює побудову аналітичних розв'язків. Останнім часом наукові результати, що стосуються механіки твердих деформованих тіл та їх контактної взаємодії, охоплюють усе ширші кола питань. Ці результати представлені багатьма працями монографічного й оглядового характеру, серед яких [1; 3; 12]. У працях [2; 4] у межах лінеаризованої теорії пружності розглянуто контактну задачу для пружної смуги з початковими напруженнями, підсиленими нескінченним стрингером. У монографії [2] представлені методи розв'язку мішаних задач для пружної смуги з початковими напруженнями. В оглядових статтях [3; 10] академіком О.М. Гузем висвітлено проблеми некласичної механіки руйнування, що дало поштовх для вдосконалення та подальшого розвитку наукових досліджень із теорії механіки твердих деформованих тіл. Існує також низка узагальнювальних публікацій [8; 13; 14], які цілковито або частково пов'язані з тематикою даної статті. Метод аналітичного та чисельного розв'язку контактної задачі про підсилення попередньо напруженої смуги нескінченим пружним стрингером представлено у працях [11; 13]. Також, зважаючи на необхідність підвищення міцності конструкції завдяки підсиленню її деяких несучих елементів пружними стрингерами, пропонуються для ознайомлення дослідження, подані у працях [7; 9; 14].

Методи дослідження. У межах лінеаризованої теорії пружності [1; 2; 5] результати дослідження представимо в загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій за довільної структури пружного потенціалу.

Розрізняють три стани попередньо напружених тіл: а) природний (відсутність напружень); б) початковий напружений стан; в) збурений стан (усі величини якого складаються із суми відповідних величин початкового стану та збурень). До того ж збурення від докладання зовнішнього навантаження вважаємо набагато меншими від відповідних величин початкового напруженого стану. Для розв'язку задачі застосуємо координати початкового деформованого стану (y_1, y_2), які пов'язані з лагранжевими координатами (x_1, x_2) співвідношеннями: $y_i = \lambda_i x_i$, де λ_i (i = 1,2) – коефіцієнт видовження вздовж координатної осі. Припустимо, що пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовані функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [2; 3], а початковий деформований стан є однорідним. Уважатимемо, що початкові напруження діють уздовж області контакту. Матеріали тіл будимо вважати ізотропним стисливими або нестисливими з довільною структурою пружного потенціалу.

Отже, сформулюємо задачу: нехай попередньо напружена смуга (товщини t), підсилена пружним стрингером скінченної довжини, перебуває під дією зосередженого навантаження $P\delta(y_1)$, у напрямку до осі Oy_1 під кутом α (рис. 1), де $\delta(y_1)$ – одинична функція Дірака.

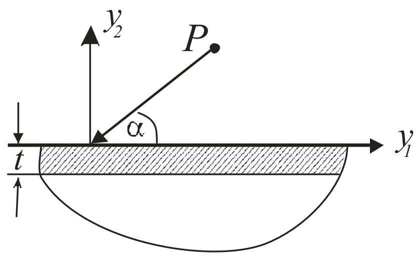

Рис. 1. Дія сили на смугу

Усі дослідження виконані для стисливих і нестисливих тіл у випадку пружних потенціалів довільної структури в загальному вигляді для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій. Для переходу до різних варіантів теорії малих початкових деформацій необхідно ввести спрощення, зазначене у [3; 4; 7].

Для визначення поля пружних переміщень і напружень (функції впливу) від прикладеної на її грані зосередженої сили $P\delta(y_1)$, прикладеної під кутом α до осі Oy_1, одержуємо такі граничні умови на кромці пружної смуги за $y_2 = 0$ (рис. 1):

$$Q_{22}(y_1,0) = -P\sin\alpha\cdot\delta(y_1);\;\; Q_{21}(y_1,0) = -P\cos\alpha\cdot\delta(y_1), \quad (1)$$

на лінії з'єднання пружної смуги та напівплощини за $y_2 = -t$:

$$u_1(y_1,-t) = 0; \quad u_2(y_1,-t) = 0. \qquad (2)$$

Дотримуючись [3; 10], вирази для переміщень і напружень граничних точок смуги з початковими напруженнями у випадку рівних і нерівних коренів визначального рівняння запишемо у вигляді:

$$u_1(y_1,x_j) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[L^+(A_1+A_2)+\alpha z_1\left[(B_1+B_2)\right]\exp(-i\alpha y_1)d\alpha\right.$$

$$u_2(y_1,x_j) = \frac{m_1}{2\pi\sqrt{n_1}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[L^+(B_1+s_1B_2)+\alpha z_1\left[(A_1+s_1A_2)\right]\exp(-i\alpha y_1)d\alpha\right. \qquad (3)$$

$$\tilde{Q}_{22}(y_1,x_j) = \frac{c_{44}(1+m_1)l_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[L^+(A_1+sA_2)+\alpha z_1\left[(B_1+sB_2)\right]\exp(-i\alpha y_1)d\alpha\right.$$

$$\tilde{Q}_{21}(y_1,x_j) = \frac{i}{2\pi}\cdot\frac{c_{44}(1+m_1)}{\sqrt{n_1}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[L^+(B_1+s_0B_2)+\alpha z_1\left[(A_1+s_0A_2)\right]\exp(-i\alpha y_1)d\alpha\right. .$$

Тут $z_i = (n_i)^{-\frac{1}{2}}y_2;\;\; s_0 = \dfrac{1+m_1}{1+m_2};\;\; s = s_0\dfrac{l_2}{l_1};\;\; s_1 = \dfrac{m_2-1}{m_1};$

$$L^+(A+Bz) = \begin{cases}(A+Bz)ch\alpha z_1 + B(\alpha z_1)sh\alpha z_1; & n_1 = n_2;\\ Ach\alpha z_1 + Bzch(\alpha z_2); & n_1 \neq n_2;\end{cases}$$

$$L^-(A+Bz) = \begin{cases}(A+Bz)(\alpha z_1)^{-1}sh\alpha z_1 + Bch\alpha z_1; & n_1 = n_2;\\ Ash\alpha z_1 + B(\alpha z_1)^{-1}sh\alpha z_2; & n_1 \neq n_2;\end{cases}.$$

Тут l_i, m_i, c_{44} – параметри, що визначають початковий напружений стан смуги, n_i – корені визначального рівняння [2,; 3] ($i = 1,2$).

Якщо задовольнимо граничні умови (1) і (2) з урахуванням (3) після низки перетворень для визначення невідомих коефіцієнтів A_i, B_i $(i = 1,2)$ у випадку рівних і нерівних коренів визначального рівняння [2; 3; 12], одержимо системи алгебраїчних рівнянь.

Після розв'язання систем знайдемо коефіцієнти A_i, B_i $(i = 1,2)$, що виражаються через параметри, які визначають початковий напружений стан. Вирази для цих коефіцієнтів знаходимо відповідно:

– для рівних коренів визначального рівняння [2,5] $n_1 = n_2$ знаходимо коефіцієнти A_i, B_i $(i = 1,2)$:

$$\begin{aligned}A_1 &= \left\{-n_0\left[-s_1(s_0+1)sh^2\phi_1 - \phi_1^2 + (s_1 - s_0)\right] + m_0\left[-s\bar{s}_0 sh\phi_1 ch\phi_1 - sl_1\right]\right\}\xi_1^{-1}\\ A_2 &= \left\{n_0\left[(s_1 - s_0) - \bar{s}_1 sh^2\phi_1\right] + m_0\left[\phi_1 + \bar{s}_1 sh\phi_1 ch\phi_1\right]\right\}\xi_1^{-1}\end{aligned}\;; \quad (4)$$

$$\begin{aligned}B_1 &= \left\{-n_0\left[-s_0\bar{s}_1 sh\phi_1 ch\phi_1\right] + m_0\left[s\bar{s}_0 sh^2\phi_1 + \phi_1^2 - s\bar{s}_1\right]\right\}\xi_1^{-1}\\ B_2 &= \left\{n_0\left[-\bar{s}_1 sh^2\phi_1 ch\phi_1 + \phi_1\right] + m_0\left[-\bar{s}_1 sh^2\phi_1 + \bar{s}\right]\right\}\xi_1^{-1}\end{aligned}\;;$$

для нерівних коренів визначального рівняння [2; 5] $n_1 \neq n_2$ знаходимо A_i, B_i $(i = 1,2)$:

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{-n_0\left[s_0\omega_1(\alpha) - s_1 s_0\phi_1\omega_1(\alpha) - 2s_1 sh^2\phi^2 - s_1\right] - m_0\left[\overline{s}s_1\omega_2(\alpha) + s\omega_4(\alpha)\right]\right\}\xi_1^{-1}(\alpha) \\ A_2 &= \left\{n_0\left[s_0\left(\phi_1^2 - 2\right)sh^2\phi_1 + s_1\omega_1(\alpha) + \phi_1\omega_4(\alpha) - s_0\right] + m_0\left[s_1\phi_1\omega_2(\alpha) + \omega_3(\alpha)\right]\right\}\xi_2^{-1}(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \left\{n_0\left[s_0 s_1\omega_3(\alpha) - s_0\phi_1\omega_2(\alpha)\right] + m_0\left[ss_1\omega_1(\alpha) + s\phi_1\omega_2(\alpha) - s_1 ch2\phi_2\right]\right\}\xi_2^{-1} \\ B_2 &= \left\{n_0\left[\phi_1\omega_2(x) + s_1\omega_3(\alpha)\right] + m_0\left[s_1\left(\phi_1^2 - 2\right)sh^2\phi_1 - s_1\phi_1\omega_4(\alpha) + \omega_1(x) - s\right]\right\}\xi_2^{-1} \end{aligned} . \quad (5)$$

Підставимо значення (4) і (5) у (3) і знайдемо функцію впливу у пружній смузі з початковими напруженнями для рівних і нерівних коренів визначального рівняння у вигляді:

$$\begin{aligned} u_{11}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_{11}(\alpha_1 y_2)e^{-i\alpha y_1}d\alpha \\ u_{12}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_{12}(\alpha_1 y_2)e^{-i\alpha y_1}d\alpha \end{aligned} . \quad (6)$$

Розглянемо два випадки граничних точок $(y_2 = 0)$ пружної смуги з початковими напруженнями.

I. Одинична сила $\delta(y_1)\,(P \equiv 1)$ діє нормально до верхньої грані пружної смуги з початковими напруженнями.

II. Одинична сила $\delta(y_1)\,(P \equiv 1)$ діє тангенціально до верхньої грані пружної смуги з початковими напруженнями.

У першому випадку зміщення граничних точок $(y_2 = 0)$ пружної смуги з початковими напруженнями можна обчислити за формулами:

$$\begin{aligned} u_{11}(y_1, 0) = u_1(y_1, 0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_{11}(\alpha)\cos\alpha y_1 d\alpha \\ u_{12}(y_1, 0) = u_2(y_1, 0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_{12}(\alpha)\sin\alpha y_1 d\alpha \end{aligned} . \quad (7)$$

Тут за $n_1 = n_2$:

$$H_{11}(\alpha) = n_0\left[\left(s_0 sh^2\alpha\phi_1 + s_1 s_0 sh^2\alpha\phi_1 - \alpha\phi_1 N + (\alpha\phi_1)^2 - \overline{s}_1 N + \phi_1\right]\xi_1^{-1}(\alpha), \quad (8)$$

$$H_{12}(\alpha) = i\frac{n_0 m_1}{\sqrt{n_1}}\left[s_0 s_1 N_3 - s_0(\alpha\phi_1)N_2 + s_1\left((\alpha\phi_1)N_2 - s_1 N_3\right]\xi_1^{-1}(\alpha);$$

за $n_1 \neq n_2$:

$$H_{11}(\alpha) = n_0\left[\left(s_1 ch2\alpha\phi_1 + s_0 N_1 + s_1 s_0 N_1\alpha\phi_1 - \alpha\phi_1 N + s_0(\alpha\phi_1)^2 sh^2\alpha\phi_1 - s_0 ch^2\alpha\phi_1 + s_1 N_1 + \alpha\phi_1 N_4\right]\xi_2^{-1}(\alpha)\right.$$

$$H_{12}(\alpha) = i\frac{n_0 m_1}{\sqrt{n_1}}\left[s_0 s_1 N_3 - s_0(\alpha\phi_1)N_1 + s_1\left((\alpha\phi_1)N_2 - s_1 N - s_1 N_1\right]\right)\xi_2^{-1}(\alpha). \quad (9)$$

Окрім того, для функцій $H_{11}(\alpha), H_{12}(\alpha)$ слушні такі граничні співвідношення:

$$\lim_{\alpha\to 0} H_{11}(\alpha) = Q(1) \quad \lim_{\alpha\to 0} H_{12}(\alpha) = Q\left(\alpha^{-1}\right), \quad (10)$$

у другому випадку переміщення знайдемо за аналогічними формулами:

$$\begin{aligned} u_{21}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_{21}(\alpha)\sin\alpha y_1 d\alpha; \quad -\infty < y_1 < \infty \\ u_{22}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_{22}(\alpha)\cos\alpha y_1 d\alpha; \quad -\infty < y_1 < \infty \end{aligned} . \quad (11)$$

Тут за $n_1 = n_2$ $H_{21}(\alpha)$ і $H_{22}(\alpha)$ визначаються з виразів:

$$\begin{aligned} H_{21} &= m_0\left[-(s+1)\left(ssh\alpha\phi_1 \cdot ch\alpha\phi_1 - \alpha\phi_1\right) - ch^2\alpha\phi_1 - s_1 sh^2\alpha\phi_1 - s\right]\xi_1^{-1}(\alpha) \\ H_{22} &= \frac{im_0 m_1}{\sqrt{n_1}}\left[ss_1 ch^2\alpha\phi_1 + (\alpha\phi_1)^2 - \alpha\phi_1 N - s_1^2 ch^2(\alpha\phi_1) - ss_1\right]\xi_1^{-1}(\alpha) \end{aligned} ; \quad (12)$$

за $n_1 \neq n_2$:

$$\begin{aligned} H_{21}(\alpha) &= m_0\left[ss_1(\alpha\phi_1)N_2 - sN_3 + s(\alpha\phi_1)N_2 + N_3\right]\xi_2^{-1}(\alpha) \\ H_{22}(\alpha) &= \frac{im_0 m_1}{\sqrt{n_1}}\left[1 - s_1 ch(2\alpha\phi_1) + ss_1 N + s\alpha\phi_1 N_4 + ss_1(\alpha\phi_1)^2 sh\alpha\phi_1 - ss_1 ch^2\alpha\phi_1 - \right. \\ &\left. - s_2^2(\alpha\phi_1)N_4 + N_3\right]\xi_2^{-1}(\alpha); \end{aligned} . \quad (13)$$

Варто зазначити, що для функцій $H_{21}(\alpha)$ і $H_{22}(\alpha)$, як і у випадку (10), мають місце асимптотичні розклади:

$$\lim_{\alpha\to 0} H_{21}(\alpha) = Q(1) \quad \lim_{\alpha\to\infty} H_{22}(\alpha) = Q\left(\alpha^{-1}\right) . \quad (14)$$

Отже, переміщення в задачі I та горизонтальні переміщення у другій задачі в точці прикладання мають логарифмічну особливість.

За допомогою принципу суперпозиції переміщення точок пружної смуги з початковими напруженнями за напрямком осей Oy_1, Oy_2 від водночас діючих нормальних $p(y_1)$ і тангенціальних $q(y_1)$ напружень, згідно із (7) і (11), визначаються формулами:

$$\begin{aligned} u_1(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{11}\left(|y_1 - \tau|\right)p(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u_{12}(y_1 - \tau)q(\tau)d\tau \\ u_2(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{21}(y_1 - \tau)p(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u_{22}\left(|y_1 - \tau|\right)q(\tau)d\tau \end{aligned} , \quad (15)$$

де u_{ij}, $(ij = 1,2)$ – функції впливу.

Припустивши, що пружна накладка у вертикальному напрямку згинається як звичайна балка, тобто:

$$D\frac{d^4 u_2}{dy_1^4} = p(x) - p_0(x) \qquad -\infty \leq x \leq \infty, \quad (16)$$

де $u_2(y_1)$ – вертикальне переміщення точок пружної накладки, D – жорсткість накладки на згин.

А в горизонтальному напрямку розтягується або стискається як одновісно навантажений стрижень. З урахуванням умов рівноваги пружної накладки [2] для невідомих контактних напружень одержимо систему інтегро-диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} D\frac{d^4 u_2}{dy_1^4}\left\{\int_{-\partial}^{\infty} u_{11}\left(|y_1 - \tau|\right)p(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u_{12}(y_1 - \tau)q(\tau)d\tau\right\} &= p(y_1) - p_0(y_1) \\ \mathrm{E}_1 h\frac{d}{dy_1}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} u_{21}(y_1 - \tau)p(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u_{22}\left(|y_1 - \tau|\right)q(\tau)d\tau\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[q(\tau) - q_0(\tau)\right]d\tau \end{aligned} . \quad (17)$$

У разі дії тільки вертикальних сил $q_0(y_1) \equiv 0$ замість системи (17) будемо мати тільки одне інтегро-диференціальне рівняння:

$$D\frac{d^4}{dy_1^4}\left[\int_{-\infty}^{\infty} u_{11}\left(|y_1 - \tau|\right)p(\tau)d\tau\right] = p(y_1) - p_0(y_1), \quad |x| \leq \infty, \quad (18)$$

 ISSN 2413-6549

а в разі відсутності вертикальних сил $p_0(y_2) \equiv 0$ накладка лише розтягується, тоді одержимо:

$$E_1 \frac{d}{dy_1} \int_{-\infty}^{\infty} u_{22}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [q(y_1) - q_0(y_1)] dt \ . \ (19)$$

Результати. Чисельний аналіз проведеного дослідження представлений для потенціалу Трелоара (тіла неогуківського типу) у разі хімічно активної гуми СКУ-6 за таких параметрів видовжень: $\lambda_1 = 0.7;\ 0.8;\ 0.9;\ 1;\ 1.1;\ 1.2$. Алгоритм чисельного розв'язку базується на методі редукції та реалізований у вигляді програми в пакеті Maple. Також зазначимо, що чисельне дослідження системи типу (17) представлене в [1; 2].

Вплив початкових напружень на закон розподілу контактних характеристик для задачі про підсилення попередньо напруженої смуги, підсиленої стрингером скінченої довжини (скінченою пружною накладкою) у випадку потенціалу Трелоара, представлено на рис. 2.

Тут $q^*(\xi)$ – безрозмірні контактні тангенціальні напруження. Значення $\lambda_1 = 1$ (на графіку пунктирна лінія) відповідає класичній теорії пружності та збігається з результатами праці [8]; $\lambda_1 = 0,7; 0,8; 0,9$ – відповідають початковим напруженням стиску; $\lambda_1 = 1,1; 1,2; 1,3$ – відповідають початковим напруженням розтягу; ξ – безрозмірна координата початкового напруженого стану у пружній смузі з початковими напруженнями.

Дискусія. У результаті проведених досліджень розв'язок задачі представлений у вигляді інтегро-диференційних рівнянь, розв'язок яких за допомогою оберненого перетворення Фур'є зводиться до обчислення інтегралів відомої простої структури.

Беручи до уваги проведене дослідження, для потенціалу Трелоара, що відповідає нерівним кореням визначального рівняння [2], вплив початкових напружень на напружено-деформований стан в області контакту можна описати так:

1. Початкові напруження в разі стиску призводять до зменшення сили напружень в області контакту, а в разі розтягу – до їх збільшення, у разі переміщень все відбувається навпаки. Тобто

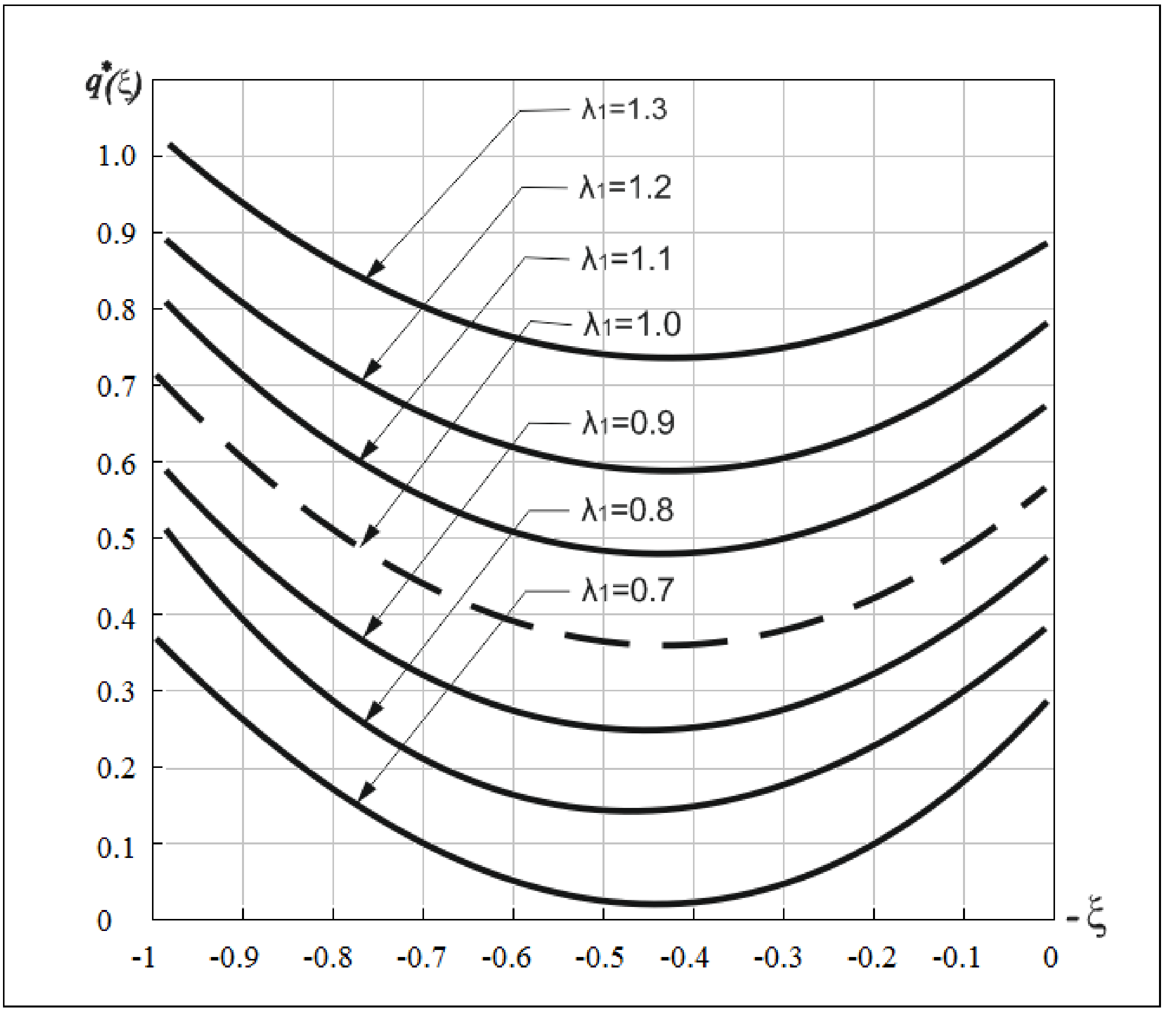

Рис. 2. Розподіл напружень в області контакту

наявність попередньо напруженого стану під час контактної взаємодії пружних тіл дає змогу регулювати контактні напруження та переміщення.

2. Більш суттєво, у кількісному плані, початкові напруження діють у високоеластичних матеріалах у порівнянні з більш жорсткими, але їхній якісний вплив зберігається.

3. За допомогою числової реалізації методу дослідження встановлено особливість впливу наявності початкових напружень на закон розподілу контактних напружень і переміщень в області контакту, порівняно з випадком відсутності початкових напружень.

Отже, можна зробити висновок про те, що вплив початкових напружень на контактну взаємодію пружних тіл досить сильний і суттєво діє на закон розподілу контактних характеристик. Тому його врахування дасть можливість значно покращити точність інженерних обчислень у розрахунках на міцність конструкцій і деталей машин.

ЛІТЕРАТУРА

1. Контактна взаємодія тіл з початковими напруженнями : навчальний посібник / О.М. Гузь та ін. Київ : Вища школа, 1995. 305 с.
2. Гузь А.Н., Рудницкий В.Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями : монография. Хмельницький, 2006. 710 с.
3. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями : монография. Германия : Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.
4. Діхтярук М.М. Визначення функції впливу для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями. *Матеріали 4-го Міжнародного симпозіуму із трибофатики (ISTF), м. Тернопіль, 23–27 вересня 2002 р.* / відп. ред. В.Т. Трощенко. Тернопіль : Терноп. держ. техн. ун-т ім. Івана Пулюя, 2002. С. 426–431.
5. Дихтярук Н.Н. О равновесии полосы с начальными напряжениями, усиленной упругими накладками. *Прикладная механика.* 2004. 40. № 3. С. 63–70.
6. Рудницкий В.Б., Дихтярук Н.Н. Упругая полоса с начальными напряжениями, усиленная упругими накладками. *Прикладная механика.* 2002. 38. № 11. С. 81–88.
7. Рудницкий В.Б., Дихтярук Н.Н. Контактная задача о взаимодействии бесконечного стрингера и двух одинаковых полос с начальными напряжениями. *Прикладная механика.* 2017. 53. № 2. С. 41–48.
8. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками : учебное пособие. Ереван : Изд. Ереван. ун-та, 1983. 260 с.
9. Rudnitskii V. B., Dikhtyaruk N. N. Interaction Between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. International Applied Mechanics. 2017. 53, № 2. P. 149–155.
10. Guz A.N. Nonclassical Problems of Fracture. *Failure Mechanics: On the Occasion of the 50'th Anniversary of Research : Review. III. International Applied Mechanics.* 2019. Vol. 55. № 4. P. 343–415.
11. Yaretskaya N.F. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics : Review.* 2018. Vol. 54. № 5. P. 539–543. DOI: 10.1007/s10778-018-0906-y.
12. Бабич С.Ю., Ярецька Н.О. Контактна взаємодія попередньо напружених кільцевого штампу і півпростору. *Доповіді НАН України.* 2020.
13. Babich S.Yu., Dikhtyaruk N.N. Load transfer from an infinite inhomogeneous stringer to an elastic strip clamped by one face with initial stresses. *International Applied Mechanics.* 2020. Vol. 56. № 6. P. 346–356.
14. Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses / S.Yu. Babich et al. *International Applied Mechanics.* 2019. Vol. 55. № 6. P. 629–635.

REFERENCES

1. Huz O.M., Babych S.Iu., Rudnytskyi V.B. (1995). Kontaktna vzaiemodiia pruzhnykh til z pochatkovymy napruzhenniamy. K. : Vyshcha shk. [in Ukranian].
2. Guz', A.N., Rudnickij V.B. (2006). Osnovy teorii kontaktnogo vzaimodejstvija uprugih tel s nachal'nymi (ostatochnymi) naprjazhenijami. Hmel'nic'kij, vyd. PP Mel'nik [in Russian].
3. Guz', A.N., Babich, S.Yu., & Glukhov, Yu.P. (2015). Smeshannye zadachi dlya uprugogo osnovaniya s nachal'nymi napryazheniyami [Mixed problems for an elastic base with initial stresses]. LAP LAMBERT Academic Publishing [in Russian].
4. Dikhtiaruk M.M. (2002). Vyznachennia funktsii vplyvu dlia pruzhnoi smuhy z pochatkovymy (zalyshkovymy) napruzhenniamy [Title]. Pr. 4-ho Mizhnarodnoho sympoziumu z trybofatyky (ISTF) (m. Ternopil, Ukraina, 23–27 veresnia 2002 r.) / Vidp. red. V.T. Troshchenko. Ternopil : Ternop. derzh. tekhn. un-t im. Ivana Puliuia. P. 426–431 [in Ukranian].

5. Dikhtyaruk N.N. (2004). Equilibrium of a Prestressed Strip Reinforced with Elastic Plates. *Int. Appl. Mech.* 40 (3). P. 290–296.
6. Rudnitsky V.B., Dikhtyaruk N.N. Elastic strip with initial stresses, reinforced with elastic pads. *App. mechanics.* 2002. 38, № 11. P. 81–88 (in Russian).
7. Rudnitsky V.B., Dikhtyaruk N.N. Contact problem on the interaction of an infinite stringer and two identical bands with initial voltages. *App. mechanics.* 2017. 53. № 2. P. 41–48 (in Russian).
8. Sargsyan V.S. Contact tasks for half-planes and strips with elastic overlays. Yerevan : Ed. Yerevan. University, 1983. 260 p. (in Russian).
9. Rudnitskii V.B., Dikhtyaruk N.N. Interaction Between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. *International Applied Mechanics.* 2017. 53. № 2. P. 149–155.
10. Guz A.N. Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: On the Occasion of the 50'th Anniversary of Research (Review). III. *International Applied Mechanics.* 2019. Vol. 55. № 4. P. 343–415.
11. *Yaretskaya N.F.* Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *Int. Appl. Mech. Rew.* 2018. Vol. 54. № 5. P. 539–543. DOI: //doi.org/10.1007/s10778-018-0906-y.
12. Babich S.Yu., Yaretskaya N.O. Contact interaction of pre-stressed annular stamp and half-space. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine.* 2020 (in Ukrainian).
13. Babich S.Yu., Dikhtyaruk N.N. Load transfer from an infinite inhomogeneous stringer to an elastic strip clamped by one face with initial stresses. *International Applied Mechanics.* 2020. Vol. 56. № 6. P. 346–356.
14. Babich S.Yu., Dikhtyaruk N.N., Degtyar S.V. Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses. *International Applied Mechanics.* 2019. Vol. 55. № 6. P. 629–635.