УДК 539.3
DOI https://doi.org/10.26661/2413-6549-2022-1-05

ПЕРІОДИЧНЕ ПІДСИЛЕННЯ ДВОХ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ СМУГ СКІНЧЕННИМИ ПІДКРІПЛЮЮЧИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Діхтярук М. М.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань
Хмельницький національний університет
вул. Інститутська, 11, Хмельницький, Україна
orcid.org/0000-0002-0819-3842
petrenkoiv@khmnu.edu.ua

Ярецька Н. О.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань
Хмельницький національний університет
вул. Інститутська, 11, Хмельницький, Україна
orcid.org/0000-0002-3726-2878
yaretskano@khmnu.edu.ua

Кравчук О. А.
старший викладач кафедри вищої математики
та комп'ютерних застосувань
Хмельницький національний університет
вул. Інститутська, 11, Хмельницький, Україна
orcid.org/0000-0001-6937-5001
kravchukoa2@gmail.com

Ключові слова: *лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактні задачі, функції Якобі, інтегральне перетворення Фур'є.*

У статті досліджено якісний і кількісний вплив початкових (залишкових) напружень на закон розподілу контактних характеристик при взаємодії пружних скінчених накладок (стрингерів), при їх періодичному розміщенні, з двома попередньо напруженими смугами, що защемлені одним краєм. Дослідження проведено у загальному вигляді для теорії великих (скінченних) початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій в рамках лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу для стисливих та нестисливих тіл. Також використані методи інтегральних перетворень Фур'є, методи розв'язку гармонійних диференційних рівнянь, сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь та числових методів. Зроблено припущення, що в області контакту початковий напружений стан, з певним ступенем точності, вважаємо однорідним. Вважаємо, що пружна смуга з початковими (залишковими) напруженнями знаходиться в умовах плоскої деформації, а для пружної накладки, навантаженої одночасно вертикальними і горизонтальними силами, справедлива загальноприйнята модель згину балки в поєднанні з моделлю одновісного напружено-деформованого стану пружної накладки. Виведено сингулярне інтегрально-диференціальне рівняння з ядром Гілберта, що дозволяє розв'язати поставлену задачу. Аналітичний розв'язок рівняння знаходимо у вигляді рядів від функції Якобі. Для матеріалів з пружними потенціалами гармонічного типу (стисливі тіла) та пружними потенціалами Бартенєва-Хазановича і Трелоара (нестисливі тіла) проведені числові дослідження. Розглянуто випадок, коли всі періодично розміщені накладки, що підкріплюють пружні смуги з початковими напруженнями, навантажені тангенціальною силою. Аналіз числових результатів свідчить про суттєвий вплив початкових (залишкових) напружень на розподіл контактних характеристик періодично підсилених смуг тонкими підкріплюючими елементами. Отримані результати можуть бути використані для інженерних розрахунків на міцність та довговічність конструкцій з урахуванням початкових напружень для широкого вибору конструкційних матеріалів.

PERIODIC REINFORCEMENT OF TWO PRE-STRESSED STRIPS BY FINISHED SUPPORTING ELEMENTS

Dikhtyaruk N. N.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Higher Mathematics
and Computer Applications
Khmelnytsky National University
Institute str., 11, Khmelnytsky, Ukraine
orcid.org/0000-0002-0819-3842
petrenkoiv@khmnu.edu.ua

Yarets'ka N. O.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Higher Mathematics
and Computer Applications
Khmelnytsky National University
Institute str., 11, Khmelnytsky, Ukraine
orcid.org/0000-0002-3726-2878
yaretskano@khmnu.edu.ua

Kravchuk O. A.
Senior Lecturer at the Department of Higher Mathematics
and Computer Applications
Khmelnytsky National University
Institute str., 11, Khmelnytsky, Ukraine
orcid.org/0000-0001-6937-5001
kravchukoa2@gmail.com

Key words: *stress-strain state, initial (residual) stresses, contact tasks, Jacobi function, Fourier transform.*

The qualitative and quantitative influence of initial (residual) stresses on the law of distribution of contact characteristics at interaction of elastic finished overlays (stringers), at their placement, with two prestressed strips which are clamped by one edge. In general, the research was carried out for the theory of great initial (ultimate) and two variants of the theory of small initial deformations within the framework of linearized theory of elasticity with the elastic potential having arbitrary structure for compressible and incompressible bodies. Fourier integral methods, methods for solving harmonic differential equations, singular integral-differential equations and numerical methods were used too. It is assumed that in the contact area the initial stress state, with a certain degree of accuracy, is considered homogeneous. We make the assumption that the elastic band with initial (residual) stresses is in the conditions of plane deformation. Also, for an elastic lining loaded with both vertical and horizontal forces, the generally accepted model of beam bending in combination with the model of uniaxial stress-strain state of the elastic lining is valid. A singular integral-differential equation with the Gilbert kernel was derived, which allows us to solve this problem. We find the analytical solution of the equation in the form of series from the Jacobi function. Numerical studies were performed for materials with elastic potentials of harmonic type (compressible bodies) and elastic potentials of Bartenev-Khazanovich and Treloar (incompressible bodies). Numerical studies have been performed for materials with elastic potentials of harmonic type (compressible bodies) and elastic potentials of Bartenev-Khazanovich and Treloir (incompressible bodies). We have considered the case when all periodically placed pads that support elastic bands with the initial stresses were loaded with tangential force. Analysis of numerical results shows a significant effect of initial (residual) stresses on the distribution of contact characteristics of periodically reinforced strips with thin reinforcing elements. The results obtained can be used for engineering calculations for the strength and durability of structures, taking into account the initial stresses for a wide range of structural materials.

Вступ. Актуальність наукових досліджень проблеми контактної взаємодії пружних тіл постійно зростає і вдосконалюються їхні методи, враховуючи розвиток сучасних інформаційних технологій та математичних обчислень. Це зумовлено актуальністю використання результатів таких досліджень під час будівництва споруд, виробництва та конструювання деталей машин та їх конструкцій.

Врахування початкових напружень під час дослідження контактних задач значно ускладнює математичні розрахунки, в зв'язку з ускладненням розрахункових формул, але водночас дає можливість отримати більш реальний результат процесів, які підлягають дослідженню.

Тематика дослідження контактної взаємодії пружних тіл з початковими напруженнями також є актуальною і для фундаментальних досліджень з механіки твердого деформованого тіла.

Таким чином, дана робота присвячена дослідженню питання контактної взаємодії попередньо напружених смуг з періодично розміщеними скінченними пружними накладками. Об'єктом даного дослідження є дві нескінченні, однакові, попередньо напружені смуги, які однією гранню жорстко защемлені, а іншими гранями з'єднані між собою періодично розміщеними скінченними пружними накладками. Предметом дослідження є вплив початкових напружень на закон розподілу контактних напружень і переміщень пружних тіл в області їхнього контакту.

Метою роботи є отримання розрахункових інтегро-диференційних рівнянь, розв'язки яких описують напружено-деформований стан в області контакту, а також отримання чисельних результатів у випадку пружних потенціалів конкретної структури. Дослідження проведено в рамках лінеаризованої теорії пружності в загальному вигляді для теорії великих (скінченних) початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу [1–3].

Огляд літератури. Контактна взаємодія тіл з початковими напруженнями належить до однієї з актуальних областей механіки деформівного твердого тіла. Розв'язок таких задач пов'язаний з широким кругом проблем, які виникають в машинобудуванні, будівельній галузі та інших галузях промисловості. Контактні задачі класичної теорії пружності в нашій країні і за кордоном в останні десятиліття одержали подальший розвиток як за глибиною нових підходів, так і за шириною досліджень. Про це свідчить велика кількість вчених, які працюють над заданою проблемою, і кількість поданих доповідей на симпозіуми, з'їзди та конференції як у нашій країні, так і за кордоном в останні десятиліття. Як відомо, початкові (залишкові) напруження практично завжди присутні в елементах конструкцій і деталях машин. Дія останніх викликає в попередньо напруженому тілі такий самий ефект, як і будь-які інші напруження, які можуть визвати деформації, руйнування, збільшити тенденцію до втрати стійкості і внутрішнього тертя. Тому вивчення і дослідження якісного і кількісного впливу початкових (залишкових) напружень на закон розподілу контактних напружень є досить актуальною проблемою як в теоретичному, так і в практичному аспектах. Не дивлячись на досить великий спектр досліджень з визначення закону розподілу контактних характеристик в конструкціях і деталях машин в класичній теорії пружності, неможливо (виходячи з прийнятої лінійної моделі) врахувати початковий (залишковий) напружено-деформований стан тіл, що перебувають в контакті. Попередньо напружений стан можна врахувати, використавши лінеаризовану теорію пружності, яка розроблена академіком НАН України О.М. Гузем в 70 роках минулого століття. Хоча в загальному випадку строга постановка таких задач вимагає застосування нелінійної теорії пружності [4]. Проте при досить великих величинах початкових (залишкових) напружень можна обмежитися її лінеаризованим варіантом. Історично дослідження контактних задач в рамках лінеаризованої теорії пружності складалося на двох напрямках. Перший пов'язаний з дослідженнями контактної взаємодії тіл з конкретною формою пружного потенціалу. Це праці В.М. Александрова, Н.Х. Арутюняна і їхніх учнів [5]. Другий підхід започаткований академіком НАН України О.М. Гузем і його учнями, професорами С.Ю. Бабичем і В.Б. Рудницьким – це дослідження просторових та плоских задач контактної взаємодії тіл з початковими (залишковими) напруженнями з довільною структурою пружного потенціалу для стисливих і нестисливих матеріалів у випадку теорії скінченних (великих) і декількох варіантів теорії малих початкових (залишкових) деформацій [1–3; 6–8]. Існує також ряд узагальнюючих публікацій [9–15], які повністю або частково пов'язані з тематикою даної статті. Приклад числового розв'язку контактних задач подано у статті [16]. Також, враховуючи необхідність підвищення міцності конструкції за рахунок підсилення її деяких несучих елементів пружними стрингерами, пропонуються для ознайомлення дослідження, подані у працях [16–19].

Методи дослідження. Використаємо співвідношення лінеаризованої теорії пружності [1–3], причому дослідження представимо в загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Будемо розрізняти три стани попередньо напружених тіл: а) природний (відсутність напружень); б) початковий стан; в) збурений стан (всі величини якого складаються із суми відповідних величин початкового стану та збурень). До того ж, збурення вважаємо набагато меншими від відповідних величин початкового стану.

Для розв'язку задачі застосуємо координати початкового деформованого стану (y_1, y_2), які пов'язані з лагранжевими координатами (x_1, x_2) співвідношеннями: $y_i=\lambda_i x_i$, де λ_i (i=1,2) – коефіцієнти видовжень вздовж координатної осі y_1.

Припустимо, що дві нескінченні пружні смуги виготовлені з стисливого або нестисливого матеріалу з потенціалом довільної структури. Також припускаємо, що в них діють ідентичні початкові (залишкові) напруження. Нехай смуги з'єднані між собою на скінченних відрізках $\left[-a+2kl; a+2kl\right]$ ($l>a,\ k=0\pm1,\pm2....$), які періодично повторюються, пружними накладками малої товщини h. Початкові напруження в пружних накладках відсутні, модуль пружності матеріалу накладок E_l, коефіцієнт Пуассона ν_1 і вони знаходяться в умовах плоскої деформації. Товщина попередньо напружених смуг H. Потрібно дослідити вплив присутності початкових напружень в смугах на закон розподілу нормальних $p\left(y_1\right)$ і тангенціальних $q\left(y_1\right)$ контактних напружень в області контакту пружних накладок з попередньо напруженими смугами, коли на накладки діє горизонтальне періодичне навантаження з періодом $2l$ та інтенсивністю $q_0\left(y_1\right)$ (рис. 1).

Враховуючи періодичність представленої задачі, слід відмітити, що вплив початкових напружень під кожною тонкою пружною накладкою буде однаковим, тому можна обмежитись розглядом тільки однієї з них. Розглянемо, наприклад, накладку яка розміщена на відрізку $\left[-a,\, a\right]$. Як відомо, з основ опору матеріалів пружна накладка в вертикальному напрямку осі Oy_2 згинається як звичайний брус, а в горизонтальному напрямку осі Oy_1 стискується, або розтягується, як звичайний стрижень з скінченною жорсткістю, який знаходиться в одновісному напружено-деформованому стані [18]. Отже, матимуть місце такі рівняння:

$$\frac{du\ \left(y_1\right)}{dy_1}=\frac{1}{E_1 h}\int_{-a}^{y_1}\left[2q\left(\xi\right)-q_0\left(\xi\right)\right]d\xi\quad\left(-a<y_1<a\right),\quad(1)$$

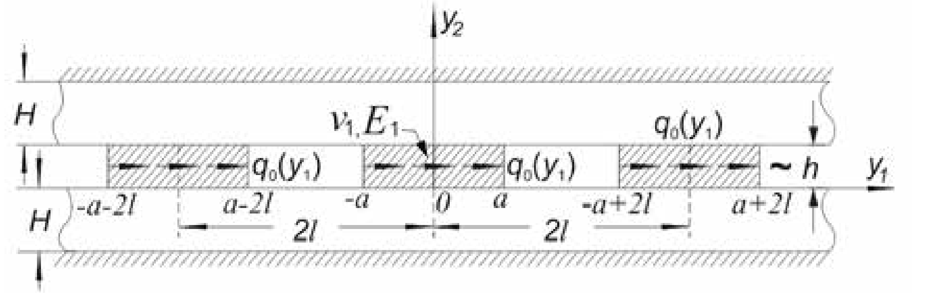

Рис. 1

$$\frac{d\nu\ (y_1)}{dy_1}=0\,,\ \forall y_1\in\left(-a<y_1<a\right),$$

де $u\left(y_1\right)$, $v\left(y_1\right)$ – переміщення граничних точок накладки.

Умови контакту накладки та смуги з початковими напруженнями мають вигляд:

$$u\left(y_1\right)=u_1\left(y_1\right);\ v\left(y_1\right)=u_2\left(y_1\right);\ \left(-a<y_1<a\right),\ (2)$$

де $u_1\left(y_1\right)$, $u_2\left(y_1\right)$ – переміщення граничних точок пружної смуги з початковими напруженнями. Граничні умови на кінцях пружної накладки внаслідок відсутності зовнішніх сил можна записати у вигляді: $Q(y_1)=0;\ P(y_1)=0;\ \ M(y_1)=0$ при $y_1=\pm a$, де

$$Q\left(y_1\right)=\int_{-a}^{y_1}\left[q\left(\tau\right)-q_0\left(\tau\right)\right]d\tau,\ \ \left|y_1\right|\le a;$$

$$P\left(y_1\right)=\int_{-a}^{y_1}\left[p\left(\tau\right)-p_0\left(\tau\right)\right]d\tau,\ \ \left|y_1\right|\le a;$$

$$M\left(y_1\right)=\int_{-a}^{y_1}\left(y_1-\tau\right)\left[p\left(\tau\right)-p_0\left(\tau\right)\right]d\tau,\ \ \left|y\right|\le a.$$

Тут $Q(y_1)$ – повздовжня сила; $P(y_1)$ – поперечна сила; $M(y_1)$ – згинаючий момент в поперечному перерізі накладки.

Якщо врахувати (2) і вирази для обчислення переміщень граничних точок в області контакту $y_1\in\left[-a,\,a\right]$ на грані $y_2=0$ пружної смуги з початковими напруженнями [18; 19], отримаємо відому систему інтегрально-диференціальних рівнянь. Якщо для цієї системи ввести нову функцію і зробити заміну

$$X\left(\tau\right)=\tilde{p}\left(\tau\right)+i\,\tilde{q}(\tau);\ \ (\tau=\xi,\,\eta);\ \ \delta=\pi a/l,\qquad (3)$$

то після деяких перетворень отримаємо сингулярне інтегральне рівняння з ядром Гільберта [17]:

$$\begin{gathered} i\beta_1X\left(\xi\right)+\int_{-\delta}^{\delta}X\left(\eta\right)ctg\frac{\xi-\eta}{2}d\eta-\int_{-\delta}^{\delta}\tilde{L}_{11}\left(\xi-\eta\right)X\left(\eta\right)d\eta-\\ -i\int_{-\delta}^{\delta}\tilde{L}_{12}\left(\xi-\eta\right)X\left(\eta\right)d\eta-\int_{-\delta}^{\delta}\tilde{L}_{22}\left(\xi-\eta\right)\bar{X}\left(\eta\right)d\eta+\\ +\beta_2\int_{-\delta}^{\delta}\left[X(\eta)-\bar{X}(\eta)\right]d\eta= \qquad (4)\\ =i\left[\beta_2\tilde{Q}_1\left(\xi\right)+\lambda_4\right]d\tau-\frac{\beta_1}{2\pi}\ \ \left(-\delta<\xi<\delta\right)\end{gathered}$$

з граничною умовою

$$\int_{-\delta}^{\delta}X\left(\eta\right)d\eta=\frac{i\pi}{l}.\qquad (5)$$

Де $\bar{X}\left(\eta\right)$ – функція комплексно спряжена до функции $X\left(\eta\right)$

$$\tilde{Q}_1\left(\xi\right)=\int_{-\delta}^{\delta}\tilde{q}_0\left(\eta\right)d\eta;\ \ Q_0=\int_{-a}^{a}q\left(\eta\right)d\eta;\ \ M_0=\int_{-a}^{a}\xi p\left(\xi\right)d\xi;$$

$$\tilde{p}\left(\tau\right)=p\left(\frac{l\tau}{\pi}\right)\frac{1}{Q_0};\ \ \tilde{q}\left(\tau\right)=q\left(\frac{l\tau}{\pi}\right)\frac{1}{Q_0};\ \ \tilde{q}_0\left(\tau\right)=q_0\left(\frac{l\tau}{\pi}\right)\frac{1}{Q_0}.\ (6)$$

Величини $\tilde{L}_{ij}\left(\tau\right),\,\beta_i,\,\lambda_4$ характеризують початковий напружений стан і визначаються для стисних і нестисливих матеріалів у випадку конкретних пружних потенціалів окремо для рівних та нерівних коренів визначального рівняння виразами [1]. Також, $\tilde{Q}_1(\xi)$ – функція розподілу тангенціальних контактних напружень вздовж лінії контакту накладки і пружної смуги з початковими напруженнями.

Таким чином, поставлена задача зводиться до розв'язування сингулярного інтегрального рівняння (4) з граничними умовами (5).

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді ряду за функціями Якобі [18; 20]:

$$X\left(\xi\right)=w\left(\xi\right)\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{X}_nP_n^{(\alpha,\beta)}\left(\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}\right)\ \ \left(\left|\xi\right|<\delta\right),\ (7)$$

де $\left\{P_n^{(\alpha,\beta)}(\operatorname{ctg}\delta/2-\operatorname{tg}\xi/2)\right\}_{n=0}^{\infty}$ – многочлени Якобі, що ортогональні на відрізку $[-\delta;\,\delta]$ відносно ваги $w\left(\xi\right)=\sec\frac{\xi}{2}\left(\sin\frac{\delta-\xi}{2}\right)^{\alpha}\left(\sin\frac{\delta+\xi}{2}\right)^{\beta}$,

$$\alpha=-\frac{1}{2}-i\alpha_1;\ \beta=-\frac{1}{2}+i\alpha_1;\ \alpha_1=\frac{\ln\left(3-4c_{44}\right)}{2\pi}.$$

Тут c_{44} – параметр, який визначає початковий напружений стан в смузі.

Слід відзначити, що $\tilde{X}_n$ – це нескінченний ряд невідомих комплексних коефіцієнтів, які потрібно визначити. Для їх визначення підставляємо значення (7) в рівняння (4). В подальшому, використавши властивості ортогональності многочленів Якобі [19; 20], для визначення невідомих величин $\tilde{X}_n$ отримуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{gathered} l_m\tilde{X}_m+\sum_{n=1}^{\infty}\left[D_{m,n}^{(1)}\tilde{X}_n+D_{m,n}^{(2)}\bar{\tilde{X}}_n\right]=\\ =-\left[D_m^{(0)}+D_m^{(1)}X_0+D_m^{(2)}\bar{X}_0\right]\ \ \left(m=1,\,2,\,...\right).\end{gathered}\qquad (8)$$

Тут введено позначення

$$l_m=\frac{4\pi\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\Gamma\left(m-\alpha\right)\Gamma\left(m-\beta\right)}{\operatorname{ch}\pi\alpha_1\ \left(m!\right)^2};$$

$$D_{m,n}^{(1)}=L_{m,n}^{(11)}+L_{m,n}^{(12)}+L_{m,n}^{(13)};\ \ D_{m,n}^{(2)}=L_{m,n}^{(22)}+L_{m,n}^{(23)};$$

$$D_m^{(1)}=L_m^{(11)}+L_m^{(12)}-L_m^{(13)};\ \ D_m^{(2)}=L_m^{(22)}+L_m^{(23)};$$

$$D_m^{(0)}=\int_{-\delta}^{\delta}Q_1^*(\xi)w_1\left(\xi\right)P_{m-1}^{(-\alpha,-\beta)}\left(\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}\right)d\xi;$$

$$L_{m,n}^{(j3)} = \lambda_1 \int_{-\delta}^{\delta} \left\{ \int_{-\delta}^{\xi} \left[(2-j)\, w(\eta) \cdot P_n^{(\alpha,\beta)} \left(\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\eta}{2} \right) + (j-1)\bar{w}(\eta) \bar{P}_n^{(\alpha,\beta)} \left(\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} \operatorname{tg}\frac{\eta}{2} \right) \right] d\eta \right\} w_1(\xi) \times$$

$$\times P_{m-1}^{(-\alpha,-\beta)} \left(\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\xi}{2} \right) d\xi;$$

$$L_m^{(j3)} = \lambda_1 \int_{-\delta}^{\delta} \left\{ \int_{-\delta}^{\xi} [(2-j)w(\eta) + (j-1)\bar{w}(\eta)]\, d\eta \right\} w_1(\xi)$$

$$P_{m-1}^{(-\alpha,-\beta)} \left(\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\xi}{2} \right) d\xi;$$

$$L_{m,n}^{(1j)} = \left[(2-j) + i(j-1) \right] \int_{-\delta}^{\delta} \left\{ \tilde{L}_{ij}(\xi-\eta) w(\eta) \cdot P_n^{(\alpha,\beta)} \left(\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\xi}{2} \right) d\xi \right\} \times$$

$$\times w_1(\xi) \cdot P_{m-1}^{(-\alpha,-\beta)} \left(\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\xi}{2} \right) d\xi, \;\; j = 1, 2\,;$$

$$L_{m,n}^{(22)} = \int_{-\delta}^{\delta} \left\{ \int_{-\delta}^{\delta} \tilde{L}_{22}(\xi-\eta)\, \bar{w}(\eta)\, d\eta \right\} w_1(\xi) P_n^{(-\alpha,-\beta)} \left(\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} \operatorname{tg}\frac{\xi}{2} \right) d\xi\,;$$

$$L_m^{(22)} = \int_{-\delta}^{\delta} \left\{ \int_{-\delta}^{\delta} \left[\beta_2 (\xi-\eta)^2 + \beta_3 \right] \bar{w}(\eta)\, d\eta \right\} w_1(\xi)$$

$$P_{m-1}^{(-\alpha,-\beta)} \left(\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\xi}{2} \right) d\xi,$$

де β_i, λ_1 – параметри, які визначають початковий напружений стан в смузі, $w_1(\xi) = \sec\frac{\xi}{2} \left(\sin\frac{\delta-\xi}{2} \right)^{\alpha} \left(\sin\frac{\delta+\xi}{2} \right)^{\beta}$.

Для використання числових методів при розв'язувані системи (8) необхідно ще визначити коефіцієнт X_0, який входить в праву частину системи [16; 18; 20]. Коефіцієнт X_0 можна знайти з граничної умови (5) за допомогою ряду (7). У результаті отримаємо

$$X_0 = \frac{\operatorname{ch}\pi\alpha_1 \cdot \cos\frac{\delta}{2}}{2l} i\,. \qquad (9)$$

Система (8) квазірегулярна, так вираз

$$L_m = l_m m^{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\varepsilon}} \left[\left| D_{m,n}^{(1)} \right| + \left| D_{m,n}^{(2)} \right| \right] \quad (m = 1, 2, \ldots)\,, \qquad (10)$$

та вільний член $d_m = l_m^* m^{\varepsilon} \left[\left\| D_m^0 \right| + \left| D_m^{(1)} \right| + \left| D_m^{(2)} \right\| \right]$, де $l_m^* = (ml_m)^{-1} = O(1)$, мають порядок $O\left(m^{-(1/2)+\varepsilon}\right)$ при $m \to \infty$. Такі оцінки дають можливість стверджувати, що система квазірегулярна для довільних значень фізичних і геометричних параметрів широкого класу конструкційних матеріалів.

Результати. Числовий аналіз проведеного дослідження представлений для гармонічного потенціалу (рис. 2) і потенціалу Бартенєва-Хазановича (рис. 3) за допомогою відомих параметрів початкового стану при $\lambda_1 = 0.7;\ 0.8;\ 0.9;\ 1;\ 1.1;\ 1.2$. Алгоритм числового розв'язку грунтується на методі редукції та реалізований у вигляді програми в пакеті Maple. Також зазначимо, що чисельне дослідження системи типу (8) на квазірегулярність представлене в [1].

Вплив початкових напружень на закон розподілу контактних характеристик для даної задачі представлено на рис. 2 та 3.

Тут $\frac{P}{ah}\tilde{Q}_{21}$ – безрозмірні контактні тангенціальні напруження; λ_1– початкові видовження вздовж осі Oy_1, які визначають переміщення початкового стану; P – вертикальне навантаження прикладене до накладки; $\tilde{Q}_{21} = q_0(y_1)\delta(y_1)$ – тангенціальна сила, яка діє на накладку, де $\delta(y_1)$– відома функція Дірака.

Значення $\lambda_1 = 1$ (на графіках пунктирна лінія) відповідає класичній теорії пружності і співпадає з результатами роботи [20]; $\lambda_1 = 0,7;\ 0,8;\ 0,9$ відповідають початковим напруженням стиску;

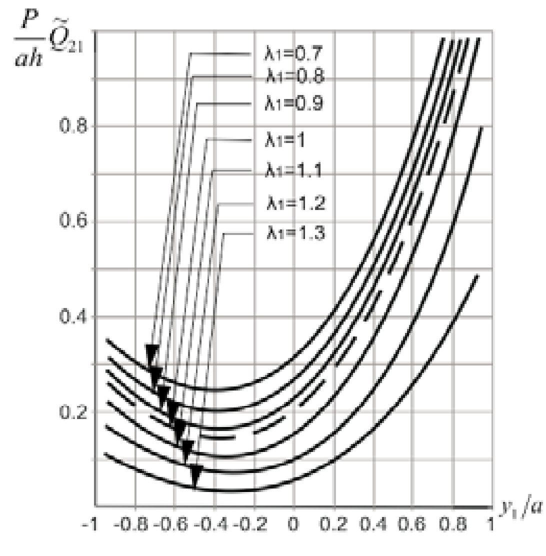

Рис. 2

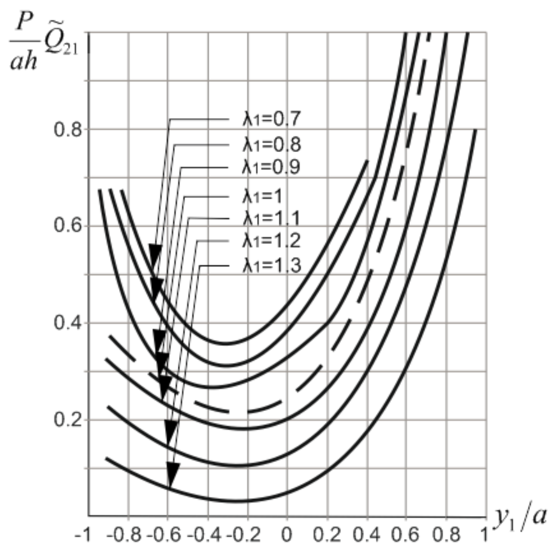

Рис. 3

$\lambda_1 = 1,1;\ 1,2;\ 1,3$ відповідають початковим напруженням розтягу; y_1 / a – безрозмірна координата початкового напруженого стану в пружних смугах з початковими напруженнями.

Дискусія. У результаті проведених досліджень розв'язок задачі представлений у вигляді нескінченних рядів, коефіцієнти яких визначаються з нескінченної квазірегулярної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (8). Ці коефіцієнти залежать від структури пружного потенціалу і параметрів, що задають початковий напружено-деформований стан.

Враховуючи проведене дослідження, для потенціалів гармонічного і Бартенєва-Хазановича вплив початкових напружень на напружено-деформований стан в області контакту пружних накладок з попередньо напруженими смугами виражається таким чином:

1. Початкові напруження при стиску призводять до зменшення сили напружень в області контакту, а при розтязі – до їх збільшення, у випадку переміщень все відбувається навпаки. Тобто наявність попередньо напруженого стану під час контактної взаємодії пружних тіл дає змогу регулювати контактні напруження та переміщення.

2. Відстань між накладками є важливим параметром їх взаємного впливу. Але було встановлено, що на закон розподілу контактних напружень, крім відстані між накладками, суттєвий вплив здійснюють початкові напруження в смугах.

3. Більш суттєвий вплив (у кількісному плані) початкові напруження здійснюють у високоеластичних матеріалах у порівнянні із більш жорсткими, але якісно їх вплив зберігається.

Наукова новизна результатів проведеного дослідження:

1. Отримано розв'язок плоскої контактної задачі лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями при довільній структурі пружного потенціалу для стисливих і нестисливих тіл.

2. Встановлено аналітичні залежності, які дозволяють досліджувати поведінку напружень та переміщень в області контакту для періодично розміщених пружних накладок і смуг з початковими напруженнями.

3. За допомогою числової реалізації методу дослідження встановлено особливість впливу початкових напружень на закон розподілу контактних напружень і переміщень в області контакту, а також представлено порівняння отриманих результатів з випадком відсутності початкових напружень.

Отже, можна зробити висновок про те, що вплив початкових напружень на контактну взаємодію пружних тіл достатньо сильний і суттєво впливає на закон розподілу контактних характеристик. Тому його врахування дозволить значно покращити точність інженерних обчислень при розрахунках на міцність конструкцій та деталей машин, а також дозволить суттєво зменшити матеріалоємність конструкцій.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н., Рудницкий В.Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями : монография. Хмельницький : вид. ПП Мельник, 2006. 710 с.
2. Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями : навч. посіб. Київ : Вища шк., 1995. 305 с.
3. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями : монография. Германия : Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.
4. Guz A. N. Nonclassical Problems of Fracture / Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of Research (Review). *III. International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55, No 4. P. 343–415. URL: https://doi.org/10.1007/s10778-019-00960-4.
5. Aleksandrov V. M., Arutyunyan N. Ky. Contact problems for prestressed deformed bodies. *Soviet Applied Mechanics*. 1984. Vol. 20, No 3. P. 209–215. URL: https://doi.org/10.1007/BF00883134.
6. Babich S.Yu., Guz A.N., Rudnitsky V.B. Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches. *International Applied Mechanics*. 2004. Vol. 40, No 7. P. 744–765.
7. Guz, O.M., Babych, S.Y., Glukhov, A.Y. Axisymmetric Waves in Prestressed Highly Elastic Composite Material. Long Wave Approximation. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57, No 2. P. 134–147. URL: https://doi.org/10.1007/s10778-021-01068-4.
8. Babych S.Y., Yarets'ka N.O. Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57, No 3. P. 297–305. URL: https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7.
9. Vasu, T. S., and Bhandakkar, T. K. A Study of the Contact of an Elastic Layer–Substrate System Indented by a Long Rigid Cylinder Incorporating Surface Effects. *ASME. J. Appl. Mech*. 2016. Vol. 83, No 6. P. 061009. URL: https://doi.org/10.1115/1.4033079(April 6, 2016).

10. Yaretskaya N.A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *Int. Appl. Mech*. 2014. Vol. 50, No 4. P. 378–388. URL: https://doi.org/10.1007/s10778-014-0641-y.
11. Bagno, O.M. Effect of Finite Initial Strains on the Wave Process in the System of an Incompressible Half-Space and an Ideal Liquid Layer. *Int Appl Mech.* 2021. Vol. 57, No 6. P. 644–654. URL: https://doi.org/10.1007/s10778-022-01114-9.
12. Petinrin M.O., Oyedele A.A., Ajide O.O. Numerical Analysis of Thermo-Elastic Contact Problem of Disc Brakes for Vehicle on Gradient Surfaces. *World Journal of Engineering and Technology*. 2016. Vol. 4, No 1. P. 51–58.
13. Босаков С. В. Две контактные задачи о вдавливании кольцевого штампа в упругое полупространство. *Наука и техника*. 2018. № 6(17). С. 458–464. URL: https://doi.org/10.21122/2227-1031-2018-17-6-458-464.
14. Semenyuk, N.P., Zhukova, N.B. Stability of a Sandwich Cylindrical Shell with Core Subject to External Pressure and Pressure in the Inner Cylinder. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56, No 1. P. 40–53.
15. Meish, V.F., Meish, Y.A. & Kornienko, V.F. Dynamics of Three-Layer Shells of Different Geometry with Piecewise-Homogeneous Core Under Distributed Loads. *Int Appl Mech.* 2021. Vol. 57, No 6. P. 659–668. URL: https://doi.org/10.1007/s10778-022-01116-7.
16. Рудницький В.Б., Ярецька Н.О., Венгер В.О. Застосування IT технологій в механіці деформованого твердого тіла. *Проблеми трибології.* Хмельницький : ХНУ. 2017. Том 84, No 2. С. 32–40.
17. Діхтярук М.М. Визначення функції впливу для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями. *Пр. 4-го Міжнародного симпозіуму з трибофатики (ISTF) (м. Тернопіль, 23-27 вересня 2002 р.)* / відп. ред. В.Т. Трощенко. Тернопіль : Терноп. держ. техн. ун-т ім. Івана Пулюя, 2002. С. 426–431.
18. Dikhtyaruk N.N. Equilibrium of a Prestressed Strip Reinforced with Elastic Plates. *Int. Appl. Mech*. 2004. Vol. 40, No 3. P. 290–96.
19. Rudnitsky V.B., Dikhtyaruk N.N. A prestressed elastic strip with elastic reinforcements. *Int. Appl. Mech*. 2002. Vol. 38, No 11. P. 1354–1360.
20. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками : монография. Ереван : Изд. Ереван. ун-та, 1983. 260 с.

REFERENCES

1. Guz’, A.N., Rudnickij V.B. (2006). *Osnovy teorii kontaktnogo vzaimodejstvija uprugih tel s nachal’nymi (ostatochnymi) naprjazhenijami*. Hmel’nic’kij, vyd. PP Mel’nik. [in Russian]
2. Huz O.M., Babych S.Iu., Rudnytskyi V.B. (1995). *Kontaktna vzaiemodiia pruzhnykh til z pochatkovymy napruzhenniamy*. K. : Vyshcha shk. [in Ukranian]
3. Guz’, A. N., Babich, S. Yu., & Glukhov, Yu. P.(2015). *Smeshannye zadachi dlya uprugogo osnovaniya s nachal’nymi napryazheniyami* [Mixed problems for an elastic base with initial stresses]. LAP LAMBERT Academic Publishing. [in Russian]
4. Guz A. N. (2019). *Nonclassical Problems of Fracture / Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of Research (Review)*. III. International Applied Mechanics. 55(4), 343–415. https://doi.org/10.1007/s10778-019-00960-4
5. Aleksandrov V. M., Arutyunyan N. Ky. (1984) *Contact problems for prestressed deformed bodies.* Soviet Applied Mechanics. 20(3), 209–215. https://doi.org/10.1007/BF00883134
6. Babich S.Yu., Guz A.N., Rudnitsky V.B. (2004). *Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches*. International Applied Mechanics. 40(7), 744 – 765.
7. Guz, O.M., Babych, S.Y., Glukhov, A.Y. (2021). *Axisymmetric Waves in Prestressed Highly Elastic Composite Material. Long Wave Approximation*. International Applied Mechanics. 57(2), 134 – 147. https://doi.org/10.1007/s10778-021-01068-4
8. Babych S.Y., Yarets’ka N. O. (2021). *Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses*. International Applied Mechanics. 57(3), 297 – 305. https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7
9. Vasu, T. S., and Bhandakkar, T. K. (April 6, 2016). *A Study of the Contact of an Elastic Layer–Substrate System Indented by a Long Rigid Cylinder Incorporating Surface Effects*. ASME. J. Appl. Mech. 83(6): 061009. https://doi.org/10.1115/1.4033079
10. Yaretskaya N.A. (2014). *Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses*. Int. Appl. Mech. 50(4), 378 – 388. https://doi.org/10.1007/s10778-014-0641-y

11. Bagno, O.M. (2021). *Effect of Finite Initial Strains on the Wave Process in the System of an Incompressible Half-Space and an Ideal Liquid Layer*. Int Appl Mech. 57(6), 644–654. https://doi.org/10.1007/s10778-022-01114-9
12. Petinrin M.O., Oyedele A.A., Ajide O.O. (2016). *Numerical Analysis of Thermo-Elastic Contact Problem of Disc Brakes for Vehicle on Gradient Surfaces*. World Journal of Engineering and Technology, 4(1), 51–58.
13. Bosakov S. V. (2018). *Dve kontaktnyie zadachi o vdavlivanii koltsevogo shtampa v uprugoe poluprostranstvo* [Two contact problems on the indentation of an annular stamp into an elastic half-space]. Nauka i tehnika, 6(17), 458–464. (in Russian)
14. Semenyuk, N.P., Zhukova, N.B. (2020) *Stability of a Sandwich Cylindrical Shell with Core Subject to External Pressure and Pressure in the Inner Cylinder*. International Applied Mechanics, 56(1), 40–53.
15. Meish, V.F., Meish, Y.A. & Kornienko, V.F. (2021). *Dynamics of Three-Layer Shells of Different Geometry with Piecewise-Homogeneous Core Under Distributed Loads*. Int Appl Mech. 57(6), 659–668. https://doi.org/10.1007/s10778-022-01116-7
16. Rudnytskyi V.B.,Iaretska N.O.,Venher V.O. (2017). *Zastosuvannia IT tekhnolohii v mekhanitsi deformovanoho tverdoho tila*. Problemy trybolohii. Khmelnytskyi: KhNU. 84(2), 32-40. [in Ukranian]
17. Dikhtiaruk M.M. (2002). *Vyznachennia funktsii vplyvu dlia pruzhnoi smuhy z pochatkovymy (zalyshkovymy) napruzhenniamy*. [Title]. Pr. 4-ho Mizhnarodnoho sympoziumu z trybofatyky (ISTF), (m. Ternopil, Ukraina, 23 – 27 veresnia 2002 r.) / Vidp. red. V.T. Troshchenko. Ternopil: Ternop. derzh. tekhn. un-t im. Ivana Puliuia, 426 – 431. [in Ukranian]
18. Dikhtyaruk N.N. (2004). *Equilibrium of a Prestressed Strip Reinforced with Elastic Plates*. Int. Appl. Mech. 40(3), 290 – 296.
19. Rudnitsky V.B., Dikhtyaruk N.N. (2002). *A prestressed elastic strip with elastic reinforcements*. Int. Appl. Mech. 38(1), 1354 – 1360.
20. Sarkisyan V.S. (1983). *Kontaktnyye zadachi dlya poluploskostey i polos s uprugimi nakladkami*. Yerevan : Izd. Yerevan. un-ta. [in Russian]