

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ХАРАКТЕРИСТИК P-I-N-СТРУКТУР, ЩО ВЗАЄМОДІЮТЬ З ВИСОКОЧАСТОТНИМ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИМ ВИПРОМІНЮВАННЯМ, МЕТОДАМИ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ

**Мороз І. П.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
докторант кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики  
Національний університет водного господарства та природокористування  
вул. Соборна, 11, Рівне, Україна  
[orcid.org/0000-0001-6381-2266](https://orcid.org/0000-0001-6381-2266)  
[Igor\\_Moroz@yahoo.com](mailto:Igor_Moroz@yahoo.com)*

**Ключові слова:** *сингулярно збурена крайова задача, асимптотичний ряд, примежова поправка, електронно-діркова плазма, p-i-n-діод.*

Запропоновано математичну модель прогнозування характеристик електронно-діркової плазми активної області (і-області) p-i-n-структур, яка враховує вплив на формування просторового заряду струму зміщення, викликаного стороннім надвисокочастотним (НВЧ) електромагнітним полем. Основу моделі становить сингулярно збурена нелінійна крайова задача для системи рівнянь неперервності електронного і діркового струмів та Пуассона (рівняння Пуассона містить природним чином сформований малий параметр). Модельна нелінійна крайова задача шляхом залучення асимптотичних методів, зокрема методу пограничного шару, та методу комплексних амплітуд, приведена до рекурентної послідовності лінійних крайових задач для визначення розподілів концентрацій електронно-діркової плазми та електричного потенціалу в і-області. Особливістю запропонованої математичної моделі є те, що вона відображає роль пограничного шару в приконтактних зонах p-i-n-структури у формуванні просторового заряду і враховує дію струму зміщення, який викликаний НВЧ випромінюванням. Побудовано алгоритм прогнозування розподілу концентрацій носіїв заряду в електронно-дірковій плазмі. Показано, що стороннє НВЧ поле спричиняє додаткове зростання стаціонарної концентрації електронів і дірок в активній області, на фоні якої відбуваються коливання концентрації плазми на частоті НВЧ поля (поява вищих гармонік у моделі не враховується). В зонах p-i-, n-i- контактів ефект зростання стаціонарного складника концентрації виражений сильніше. Запропонована математична модель та розроблений алгоритм аналізу поставленої задачі важливі для розробників напівпровідникових елементів НВЧ електроніки, зокрема p-i-n-структур, які використовуються для комутації потужних електромагнітних полів і як захисних пристроїв вхідних трактів радіотехнічних систем.

# SIMULATION OF THE P-I-N-STRUCTURES CHARACTERISTICS INTERACTING WITH HIGH-FREQUENCY ELECTROMAGNETIC RADIATION BY PERTURBATION THEORY METHODS

**Moroz I. P.**

*Ph.D., Associate Professor,*

*Doctoral Student at the Department of Computer Science and Applied Mathematics*

*National University of Water and Environmental Engineering*

*Soborna str., 11, Rivne, Ukraine*

*orcid.org/0000-0001-6381-2266*

*Igor\_Moroz@yahoo.com*

**Key words:** *singularly perturbed boundary value problem, asymptotic series, boundary function, electron-hole plasma, p-i-n diode.*

The mathematical model is proposed for the electron-hole plasma characteristics predicting of the active region (i-region) of p-i-n structures, taking into account the effect of the displacement current (induced by an external microwave electromagnetic field) on the formation of a space charge. The model is based on a singularly perturbed nonlinear boundary value problem for the system of the electron-hole current continuity equations and Poisson's (the Poisson's equation contains a naturally formed small parameter). The model nonlinear boundary value problem is reduced to a recurrent sequence of linear boundary value problems for determining of the electron-hole plasma concentrations and the electric potential distributions in the i-region by using asymptotic methods, in particular, the boundary layer method and complex amplitudes. The proposed mathematical model feature is that it reflects the role of the boundary layer in the p-i-n structure contact zones in the formation of a space charge and takes into account the effect of a displacement current caused by microwave radiation. An algorithm for predicting the charge carrier concentrations distribution in the electron-hole plasma is constructed. It is shown that an extraneous microwave field entails an additional increase in the stationary concentration of electrons and holes in the active region, against which the plasma concentration fluctuates at the microwave field frequency (the appearance of higher harmonics is not taken into account in the model). The effect of the growth of the concentration stationary component is more pronounced in the zones of p-i-, n-i-contacts. The proposed mathematical model and the developed algorithm for analyzing the problem posed are important for developers of microwave electronics semiconductor elements, in particular, p-i-n structures used for switching powerful electromagnetic fields and as protective devices for the input paths of radio engineering systems.

## **Вступ.**

Проблема проектування керуючих напівпровідникових пристроїв НВЧ (зокрема, р-і-п-діодів [1]) стикається із необхідністю комп'ютерного моделювання фізичних процесів (стаціонарних / нестаціонарних), що протікають у відповідних напівпровідникових структурах, на які, зокрема, здійснює вплив НВЧ випромінювання. При цьому вирішуються складні задачі зі знаходження розподілів поля і концентрацій носіїв заряду в електродинамічній системі з відповідними активними елементами. Задачі визначення характеристик напівпровідникових структур у конкретних електродинамічних системах від рівня потужності діючого НВЧ сигналу є не досить вивче-

ними [1; 2]. Зі зростанням потужності сигналу та його частоти можливі істотні зміни властивостей напівпровідникових структур.

Базові математичні моделі в гідродинамічному наближенні стану електронно-діркової плазми активної області напівпровідникових пристроїв, які описують розподіли концентрації дірок ( $n$ ), електронів ( $p$ ) та потенціалу ( $\varphi$ ), містять рівняння неперервності діркового і електронного струмів та рівняння Пуассона [1; 2; 3]. Граничні умови будуються на основі уявлень про протікання на виділених ділянках межі активної області інжекційних, дифузійно-дрейфових та рекомбінаційних процесів [3] у разі прикладених до контактних ділянок заданих струму і напруги. Традиційно властивості напівпровідникових структур вивчають за умови

стаціонарності, малосигнальності за сталих коефіцієнтів моделі.

У випадку взаємодії напівпровідникових пристроїв з НВЧ електромагнітним випромінюванням на процеси протікання струму провідності накладаються низка кінетичних та теплових процесів, зумовлених дією НВЧ електромагнітного поля. Зокрема, змінюються значення характеристик матеріалів напівпровідникових структур у потужних НВЧ полях, спостерігається розігрів активної області напівпровідникових структур, мають місце нелінійні явища детектування НВЧ хвиль, породження вищих гармонік у хвильових процесах тощо [4; 5]. Одним із факторів впливу НВЧ поля є наведений струм зміщення [6], який необхідно враховувати в математичних моделях оцінки стану електронно-діркової плазми. Очевидно, базові математичні моделі потребують удосконалення.

Ефективними для розв'язання складних нелінійних задач теорії напівпровідникових пристроїв, що враховують комплексний вплив різних факторів, є асимптотичні методи [7; 8; 9; 10; 11], які дозволяють провести декомпозицію початкової нелінійної задачі моделювання, привести її до рекурентної послідовності простіших задач, які розв'язуються аналітичними або числовими методами. Можливість застосування асимптотичних методів, зокрема методу примезових поправок [7; 8; 9; 10; 11], зумовлена тим, що постановки відповідних задач містять природним чином сформовані малі параметри. Істотним також є те, що асимптотичні методи дозволяють встановити ступінь впливу певного фактора дії НВЧ поля на стан електронно-діркової плазми активної області.

**Мета роботи** є розвиток методології моделювання розподілу концентрації електронно-діркової плазми в активній області р-і-п-діодів (плазмових діодів) з урахуванням впливу на стан системи струму зміщення, викликаного НВЧ полем, та розвиток асимптотичних методів розв'язання відповідних сингулярно збурених нелінійних задач, що забезпечує можливість отримання додаткової інформації про імпедансні властивості р-і-п-діодів.

#### Постановка задачі.

Електропровідні властивості р-і-п-структур в основному визначає розподіл концентрації носіїв заряду в активній області (область  $\Omega = \{(\rho, \theta, z) : 0 < \rho < R, 0 < \theta < 2\pi, 0 < z < w\}$ , рис. 1). Розподіл концентрації плазми знаходять у результаті розв'язання системи рівнянь неперервності електронно-діркових струмів та рівняння Пуассона за заданих граничних і початкових умов [1; 2; 3]. Дію стороннього електромагнітного поля пропонуємо враховувати у базовій математичній

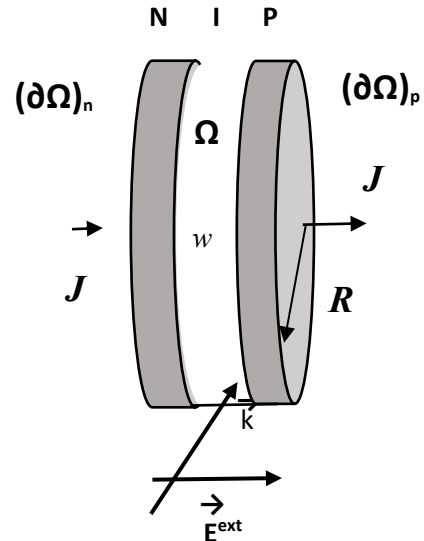


Рис 1. Схематичне зображення р-і-п-діода і проникаючої в діод НВЧ хвилі

моделі таким чином (дрейф носіїв заряду відбувається у стаціонарному електричному полі  $-\nabla\phi$ , на яке накладається проникаюче в і-область швидкозмінне стороннє поле  $\vec{E}^{ext}$ ):

$$\begin{cases} D_n \Delta n - \mu_n \nabla \cdot (n(\nabla\phi - \vec{E}^{ext})) - \frac{1}{\tau_n^*} n = \frac{\partial n}{\partial t}, \\ D_p \Delta p + \mu_p \nabla \cdot (p(\nabla\phi - \vec{E}^{ext})) - \frac{1}{\tau_p^*} p = \frac{\partial p}{\partial t}, \\ \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{e} \nabla \cdot (\nabla\phi - \vec{E}^{ext}) = -(p - n + N_l), \end{cases} \quad (1)$$

де  $p, n$  – функції розподілу концентрацій дірок і електронів відповідно;  $\phi$  – функція розподілу потенціалу;  $\vec{E}^{ext}$  – вектор напруженості електричної компоненти стороннього НВЧ поля;  $\tau_n^*, \tau_p^*$  – характерні релаксаційні часи життя електронів та дірок в і-області;  $e$  – заряд електрона;  $D_p, D_n$  – коефіцієнти дифузії,  $\mu_p, \mu_n$  – рухомості відповідно дірок та електронів ( $\mu_{n,p} = \frac{k_B T}{e} D_{n,p}$ , де  $T$  – температура (300 °К),  $k_B$  – стала Больцмана);  $\varepsilon, \varepsilon_0$  – відносна діелектрична проникність напівпровідника та діелектрична стала;  $N_l = N_a - N_d$  – задана функція профілю легування (описує різницю концентрацій акцепторів і донорів в активній області). Рівняння неперервності базової математичної моделі будуються із врахуванням уявлень про протікання струмів провідності і зміщення (викликаний швидкозмінним електричним полем і зв'язаною із ним змінною у часі концентрацією носіїв заряду) [6].

Граничні умови на інжектуючих контактах (поверхні  $(\partial\Omega)_n, (\partial\Omega)_p$ ) записуємо з урахуванням припущення про те, що через межу  $(\partial\Omega)_n$  струм переносять лише електрони, відповідно через

$(\partial\Omega)_p$  – дірки (у разі широкої активної області більша частина інжектованих носіїв заряду рекомбінує в і-області і не встигає потрапити в область протилежного контакту) [3]. Струм, який підводиться до контактних ділянок, в активній області р-і-п-діода розподіляється між дифузійною, дрейфовою і рекомбінаційною складовими частинами струму провідності та струмом зміщення ( $\bar{J}^{zm} = \frac{\partial \bar{D}^{ext}}{\partial t}$ ). В традиційних моделях струм зміщення не враховується, оскільки він відсутній у стаціонарному випадку і незначний у малосигнальному режимі роботи діода або у разі роботи на низьких частотах. Отримуємо:

$$\left. \frac{\partial n}{\partial v} + \frac{\mu_n}{D_n} n (E_v^{in} + E_v^{ext}) - 2\gamma_n n + \frac{J_v^{zm}}{eD_n} \right|_{(\partial\Omega)_n} = \frac{J}{eD_n},$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\mu_p}{D_p} p (E_v^{in} + E_v^{ext}) \right|_{(\partial\Omega)_n} = 0, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\mu_p}{D_p} p (E_v^{in} + E_v^{ext}) + 2\gamma_p p - \frac{J_v^{zm}}{eD_p} \right|_{(\partial\Omega)_p} = -\frac{J}{eD_p},$$

$$\left. \frac{\partial n}{\partial v} + \frac{\mu_n}{D_n} n (E_v^{in} + E_v^{ext}) \right|_{(\partial\Omega)_p} = 0, \quad (3)$$

де  $\bar{v}$  – вектор нормалі до поверхні;  $\gamma_n = \frac{\alpha_n}{D_n}$ ,  $\gamma_p = \frac{\alpha_p}{D_p}$ ,  $\alpha_{n,p}$  – коефіцієнти поверхневої рекомбінації відповідно електронів і дірок;  $\bar{E}^{in} = -\nabla\phi$  – внутрішнє електростатичне поле активної області.  $J_v^{zm} = \frac{\partial D_v^{ext}}{\partial t}$  – струм зміщення,  $D_v^{ext} = \varepsilon_0 \varepsilon E_v^{ext}$ ,  $E_v^{ext}$  – напруженість проникаючого в і-область НВЧ поля.

Функція потенціалу задовольняє такі граничні умови:

$$\phi|_{(\partial\Omega)_n} = 0, \quad \phi|_{(\partial\Omega)_p} = U + U^{ext}, \quad (4)$$

де  $U$  – стала, що визначає напругу на контактах р-і-п-структури;  $U^{ext}$  – наведена напруга НВЧ полем. Припускається (за умови дії високочастотного сигналу), що напруга у основному прикладена до високоомної ділянки р-і-п-структури, падінням напруги на інжектуючих п-і-, р-і- контактах нехтуємо.

На бічній поверхні діода  $(\partial\Omega)_0$  шукані функції задовольняють умови аналогічні до (2)–(4):

$$\left. \frac{\partial n}{\partial v} - \gamma_n^* n \right|_{(\partial\Omega)_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial v} - \gamma_p^* p \right|_{(\partial\Omega)_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial v} \right|_{(\partial\Omega)_0} = 0. \quad (5)$$

Розглянемо задачу (1)–(5) за умови впливу слабого НВЧ поля на процеси переносу зарядів

в активній області:  $\nabla\phi \gg \bar{E}^{ext} = \mu\bar{E}^-$  ( $U \gg U^{ext}$ ). Також вважаємо, що в активній області структури відсутні донорні й акцепторні домішки (область нелегована):  $N_i = 0$ .

Після застосування процедури нормування рівняння системи (1) набувають такого вигляду:

$$\begin{cases} \Delta n - \nabla \cdot (n(\nabla\phi - \mu\bar{E}^- w)) - A_n n = B_n \frac{\partial n}{\partial t}, \\ \Delta p + \nabla \cdot (p(\nabla\phi - \mu\bar{E}^- w)) - A_p p = B_p \frac{\partial p}{\partial t}, \\ \mu\Delta\phi - \mu^2 \nabla \cdot \bar{E}^- w = -(p - n), \end{cases} \quad (6)$$

де  $\mu = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 k_B T}{e^2 w^2 N_i}$  (малий параметр задачі,  $\mu \sim 10^{-8}$ ),

$$A_n = \frac{w^2}{D_n \tau_n^*}, \quad A_p = \frac{w^2}{D_p \tau_p^*}, \quad B_n = \frac{w^2}{D_n}, \quad B_p = \frac{w^2}{D_p}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{w},$$

$$\tilde{z} = \frac{z}{w} \quad (0 < \tilde{z} < 1), \quad \tilde{\phi} = \frac{e\phi}{k_B T}, \quad \tilde{U} = \frac{eU}{k_B T}, \quad \bar{E}^- = \frac{e\bar{E}^{ext}}{k_B T},$$

$$\tilde{n} = \frac{n}{N_i} \quad (0 \leq \tilde{n} \leq \frac{n_{max}}{N_i}), \quad \tilde{p} = \frac{p}{N_i} \quad (0 \leq \tilde{p} \leq \frac{p_{max}}{N_i}), \quad \text{де}$$

$N_i$  – концентрація електронів у власному напівпровіднику, залежить від вибраного матеріалу напівпровідника. З метою спрощення запису рівнянь знак “~” в (6) і наступних викладках опущено.

Граничні умови при цьому набувають вигляду:

$$\left. \frac{\partial n}{\partial v} + n(E_v^{in} + \mu E_v^-) w - 2\gamma_n w n + \frac{J_v^{zm}}{eD_n} \frac{w}{N_i} \right|_{(\partial\Omega)_n} = \frac{J}{eD_n} \frac{w}{N_i},$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial v} - p(E_v^{in} + \mu E_v^-) w \right|_{(\partial\Omega)_n} = 0, \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial v} - p(E_v^{in} + \mu E_v^-) w + 2\gamma_p w p - \frac{J_v^{zm}}{eD_p} \frac{w}{N_i} \right|_{(\partial\Omega)_p} = -\frac{J}{eD_p} \frac{w}{N_i},$$

$$\left. \frac{\partial n}{\partial v} + n(E_v^{in} + \mu E_v^-) w \right|_{(\partial\Omega)_p} = 0,$$

$$\phi|_{(\partial\Omega)_n} = 0, \quad \phi|_{(\partial\Omega)_p} = U + U^{ext},$$

$$\left. \frac{\partial n}{\partial v} - \gamma_n^* w n \right|_{(\partial\Omega)_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial v} - \gamma_p^* w p \right|_{(\partial\Omega)_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial v} \right|_{(\partial\Omega)_0} = 0.$$

#### Алгоритм декомпозиції задачі.

Пошук розв’язку задачі ґрунтується на використанні методу примезових поправок [7; 8; 9] із залученням методів комплексних амплітуд [12], розділення змінних [12] та відповідних чисельних методів. Вважаємо, що характеристики (амплітуда, фаза) проникаючої в активну область діода

НВЧ хвилі відомі. Вважаємо, що напруженість електричного складника поля НВЧ хвилі змінюється в часі за гармонічним законом, причому ( $\omega$  – частота коливань,  $J^2 = -1$ ):

$$E_{\rho,\theta,z}^{\sim}(\rho, \theta, z, t) = \frac{1}{2} \left( E_{\rho,\theta,z}^*(\rho, \theta, z) e^{j\omega t} + E_{\rho,\theta,z}^*(\rho, \theta, z) e^{-j\omega t} \right), \quad (8)$$

де функції  $E_{\rho,\theta,z}^*(\rho, \theta, z)$  та  $E_{\rho,\theta,z}^*(\rho, \theta, z)$  комплексно спряжені; величини  $\sqrt{E_{\rho,\theta,z}^*(\rho, \theta, z) E_{\rho,\theta,z}^*(\rho, \theta, z)}$  визначають амплітуду коливального процесу.

На процеси протікання електронно-діркового струму накладається процес коливання просторового заряду, тому розподіли концентрацій носіїв заряду у плазмі і-області та потенціалу пропонуємо шукати у такому вигляді:

$$n(\rho, \theta, z, t) = n^{st}(\rho, \theta, z) + \frac{1}{2} \left( n_*(\rho, \theta, z) e^{j\omega t} + n^*(\rho, \theta, z) e^{-j\omega t} \right), \quad (9)$$

$$p(\rho, \theta, z, t) = p^{st}(\rho, \theta, z) + \frac{1}{2} \left( p_*(\rho, \theta, z) e^{j\omega t} + p^*(\rho, \theta, z) e^{-j\omega t} \right),$$

$$\phi(\rho, \theta, z, t) = \phi^{st}(\rho, \theta, z) + \frac{1}{2} \left( \phi_*(\rho, \theta, z) e^{j\omega t} + \phi^*(\rho, \theta, z) e^{-j\omega t} \right), \quad (10)$$

де  $n^{st}(\rho, \theta, z)$ ,  $p^{st}(\rho, \theta, z)$ ,  $\phi^{st}(\rho, \theta, z)$  – стаціонарні розподіли концентрацій електронів і дірок відповідно;  $n_*(\rho, \theta, z)$ ,  $p_*(\rho, \theta, z)$ ,  $\phi_*(\rho, \theta, z)$  – швидкозмінні складники, які мають зміст комплексних амплітуд;  $n^*(\rho, \theta, z)$ ,  $p^*(\rho, \theta, z)$ ,  $\phi^*(\rho, \theta, z)$  – комплексно спряжені амплітуди.

Підстановка (9), (10) в (6) та виділення стаціонарних членів і швидкозмінних компонент (містять множники  $e^{j\omega t}$  та  $e^{-j\omega t}$ , що описують коливання на частоті стороннього поля) дають можливість отримати такі системи рівнянь:

$$\begin{cases} \Delta n^{st} - \nabla \cdot (n^{st} \nabla \phi^{st}) - A_n n^{st} = \frac{1}{4} \left( \nabla \cdot (n_* (\nabla \phi^* - \mu \vec{E}^* w)) + \nabla \cdot (n^* (\nabla \phi_* - \mu \vec{E}_* w)) \right), \\ \Delta p^{st} + \nabla \cdot (p^{st} \nabla \phi^{st}) - A_p p^{st} = -\frac{1}{4} \left( \nabla \cdot (p_* (\nabla \phi^* - \mu \vec{E}^* w)) - \nabla \cdot (p^* (\nabla \phi_* - \mu \vec{E}_* w)) \right), \\ \mu \Delta \phi^{st} = -(p^{st} - n^{st}), \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \Delta n_* - \nabla \cdot (n_* \nabla \phi^{st}) - (A_n + j\omega B_n) n_* = \nabla \cdot (n^{st} (\nabla \phi_* - \mu \vec{E}_* w)), \\ \Delta p_* + \nabla \cdot (p_* \nabla \phi^{st}) - (A_p + j\omega B_p) p_* = -\nabla \cdot (p^{st} (\nabla \phi_* - \mu \vec{E}_* w)), \\ \mu \Delta \phi_* - \mu^2 w \nabla \cdot \vec{E}_* = -(p_* - n_*), \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \Delta n^* - \nabla \cdot (n^* \nabla \phi^{st}) - (A_n - j\omega B_n) n^* = \nabla \cdot (n^{st} (\nabla \phi^* - \mu \vec{E}^* w)), \\ \Delta p^* + \nabla \cdot (p^* \nabla \phi^{st}) - (A_p - j\omega B_p) p^* = -\nabla \cdot (p^{st} (\nabla \phi^* - \mu \vec{E}^* w)), \\ \mu \Delta \phi^* - \mu^2 w \nabla \cdot \vec{E}^* = -(p^* - n^*). \end{cases} \quad (13)$$

Відзначимо, що системи рівнянь (11)–(13) описують поведінку стаціонарних компонент шуканих функцій і тих, що коливаються на частоті збурюючого НВЧ поля. Базова система (6) нелінійна і тут можлива поява коливальних компонент на вищих частотах, які в рамках цього дослідження не вивчаються.

Аналогічним способом перетворюються граничні умови (7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial n^{st}}{\partial \nu} - n^{st} (\nabla \phi^{st})_{\nu} - \frac{1}{4} n_* (\nabla \phi^* - \mu \vec{E}^* w)_{\nu} - \frac{1}{4} n^* (\nabla \phi_* - \mu \vec{E}_* w)_{\nu} - 2\gamma_n w n^{st} \Big|_{(\partial\Omega)_n} &= \frac{J}{eD_n} \frac{w}{N_i}, \\ \frac{\partial p^{st}}{\partial \nu} + p^{st} (\nabla \phi^{st})_{\nu} + \frac{1}{4} p_* (\nabla \phi^* - \mu \vec{E}^* w)_{\nu} + \frac{1}{4} p^* (\nabla \phi_* - \mu \vec{E}_* w)_{\nu} \Big|_{(\partial\Omega)_n} &= 0, \quad \phi^{st} \Big|_{(\partial\Omega)_n} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p^{st}}{\partial v} + p^{st} (\nabla \phi^{st})_v + \frac{1}{4} p_* (\nabla \phi^* - \mu \bar{E}^{*-} w)_v + \frac{1}{4} p^* (\nabla \phi_* - \mu \bar{E}_*^- w)_v + 2\gamma_p w p^{st} \Big|_{(\partial\Omega)_p} &= -\frac{J}{eD_p} \frac{w}{N_i}, \\
\frac{\partial n^{st}}{\partial v} - n^{st} (\nabla \phi^{st})_v - \frac{1}{4} n_* (\nabla \phi^* - \mu \bar{E}^{*-} w)_v - \frac{1}{4} n^* (\nabla \phi_* - \mu \bar{E}_*^- w)_v \Big|_{(\partial\Omega)_p} &= 0, \quad \phi^{st} \Big|_{(\partial\Omega)_p} = U, \\
\frac{\partial n^{st}}{\partial v} - \gamma_n^* w n^{st} \Big|_{(\partial\Omega)_0} &= 0, \quad \frac{\partial p^{st}}{\partial v} - \gamma_p^* w p^{st} \Big|_{(\partial\Omega)_0} = 0, \quad \frac{\partial \phi^{st}}{\partial v} \Big|_{(\partial\Omega)_0} = 0. \\
\frac{\partial n_*}{\partial v} - n^{st} (\nabla \phi_* - \mu \bar{E}_*^-)_v - n_* (\nabla \phi^{st})_v - \gamma_n w n_* + 2j\omega \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mu E_{*v}^-}{eD_n} \frac{w}{N_i} \Big|_{(\partial\Omega)_n} &= 0, \\
\frac{\partial p_*}{\partial v} + p^{st} (\nabla \phi_* - \mu \bar{E}_*^-)_v + p_* (\nabla \phi^{st})_v \Big|_{(\partial\Omega)_n} &= 0, \quad \phi_* \Big|_{(\partial\Omega)_n} = 0, \\
\frac{\partial p_*}{\partial v} + p^{st} (\nabla \phi_* - \mu \bar{E}_*^-)_v + p_* (\nabla \phi^{st})_v + \gamma_p w p_* - 2j\omega \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mu E_{*v}^-}{eD_p} \frac{w}{N_i} \Big|_{(\partial\Omega)_p} &= 0, \\
\frac{\partial n_*}{\partial v} - n^{st} (\nabla \phi_* - \mu \bar{E}_*^-)_v - n_* (\nabla \phi^{st})_v \Big|_{(\partial\Omega)_p} &= 0, \quad \phi_* \Big|_{(\partial\Omega)_p} = \frac{U^{ext}}{2}, \\
\frac{\partial n_*}{\partial v} - \gamma_n^* w n_* \Big|_{(\partial\Omega)_0} &= 0, \quad \frac{\partial p_*}{\partial v} - \gamma_p^* w p_* \Big|_{(\partial\Omega)_0} = 0, \quad \frac{\partial \phi_*}{\partial v} \Big|_{(\partial\Omega)_0} = 0. \\
\frac{\partial n^*}{\partial v} - n^{st} (\nabla \phi^* - \mu \bar{E}^{*-})_v - n^* (\nabla \phi^{st})_v - 2\gamma_n w n^* - j\omega \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mu E_{*v}^-}{eD_n} \frac{w}{N_i} \Big|_{(\partial\Omega)_n} &= 0, \\
\frac{\partial p^*}{\partial v} + p^{st} (\nabla \phi^* - \mu \bar{E}^{*-})_v + p^* (\nabla \phi^{st})_v \Big|_{(\partial\Omega)_n} &= 0, \quad \phi^* \Big|_{(\partial\Omega)_n} = 0, \\
\frac{\partial p^*}{\partial v} + p^{st} (\nabla \phi^* - \mu \bar{E}^{*-})_v + p^* (\nabla \phi^{st})_v + 2\gamma_p w p^* + j\omega \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mu E_{*v}^-}{eD_p} \frac{w}{N_i} \Big|_{(\partial\Omega)_p} &= 0, \\
\frac{\partial n^*}{\partial v} - n^{st} (\nabla \phi^* - \mu \bar{E}^{*-})_v - n^* (\nabla \phi^{st})_v \Big|_{(\partial\Omega)_p} &= 0, \quad \phi^* \Big|_{(\partial\Omega)_p} = \frac{U^{ext}}{2}, \\
\frac{\partial n^*}{\partial v} - \gamma_n^* w n^* \Big|_{(\partial\Omega)_0} &= 0, \quad \frac{\partial p^*}{\partial v} - \gamma_p^* w p^* \Big|_{(\partial\Omega)_0} = 0, \quad \frac{\partial \phi^*}{\partial v} \Big|_{(\partial\Omega)_0} = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Задача (11)–(16) є сингулярно збуреною [7; 8; 9; 10; 11], оскільки містить малий параметр за старшої похідної у рівнянні Пуассона. На структуру її розв'язку в основному впливають умови на контактних ділянках  $(\partial\Omega)_n$  та  $(\partial\Omega)_p$ , через які здійснюється наповнення  $i$ -області носіями заряду, тому пропонуємо шукати розв'язок поставленої задачі у вигляді таких асимптотичних рядів (показано структуру розв'язку для стаціонарних складників шуканих функцій):

$$\begin{pmatrix} \phi^{st}(\rho, \theta, z, \mu) \\ n^{st}(\rho, \theta, z, \mu) \\ p^{st}(\rho, \theta, z, \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi^{st}_{(m)}(\rho, \theta, z, \mu) \\ N^{st}_{(m)}(\rho, \theta, z, \mu) \\ P^{st}_{(m)}(\rho, \theta, z, \mu) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\Phi}^{st}_{(m)}(\rho, \theta, \underline{\xi}, \mu) \\ \underline{N}^{st}_{(m)}(\rho, \theta, \underline{\xi}, \mu) \\ \underline{P}^{st}_{(m)}(\rho, \theta, \underline{\xi}, \mu) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{\Phi}^{st}_{(m)}(\rho, \theta, \overline{\xi}, \mu) \\ \overline{N}^{st}_{(m)}(\rho, \theta, \overline{\xi}, \mu) \\ \overline{P}^{st}_{(m)}(\rho, \theta, \overline{\xi}, \mu) \end{pmatrix} = \quad (17)$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu}^i \phi_i^{st}(\rho, \theta, z) \\ \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu}^i n_i^{st}(\rho, \theta, z) \\ \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu}^i p_i^{st}(\rho, \theta, z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu}^i \Phi_i^{st}(\rho, \theta, \underline{\xi}) \\ \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu}^i N_i^{st}(\rho, \theta, \underline{\xi}) \\ \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu}^i P_i^{st}(\rho, \theta, \underline{\xi}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu}^i \overline{\Phi}_i^{st}(\rho, \theta, \overline{\xi}) \\ \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu}^i \overline{N}_i^{st}(\rho, \theta, \overline{\xi}) \\ \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu}^i \overline{P}_i^{st}(\rho, \theta, \overline{\xi}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \square_{\phi}^{st}(\rho, \theta, z, \mu) \\ \square_{n}^{st}(\rho, \theta, z, \mu) \\ \square_{p}^{st}(\rho, \theta, z, \mu) \end{pmatrix},$$

де  $\Phi^{st}_{(m)}(\rho, \theta, z, \mu)$ ,  $N^{st}_{(m)}(\rho, \theta, z, \mu)$ ,  $P^{st}_{(m)}(\rho, \theta, z, \mu)$  – регулярні частини асимптотик;  $\underline{\Phi}^{st}_{(m)}(\rho, \theta, \underline{\xi}, \mu)$ ,  $\underline{N}^{st}_{(m)}(\rho, \theta, \underline{\xi}, \mu)$ ,  $\underline{P}^{st}_{(m)}(\rho, \theta, \underline{\xi}, \mu)$ ,  $\overline{\Phi}^{st}_{(m)}(\rho, \theta, \overline{\xi}, \mu)$ ,  $\overline{N}^{st}_{(m)}(\rho, \theta, \overline{\xi}, \mu)$ ,  $\overline{P}^{st}_{(m)}(\rho, \theta, \overline{\xi}, \mu)$  – примежові поправки асимптотик відповідно в околах точок  $z=0$  і  $z=1$  ( $\underline{\xi} = \frac{z}{\sqrt{\mu}}$ ,  $\overline{\xi} = \frac{1-z}{\sqrt{\mu}}$  – регуляризуючі розтяги);  $R_{\phi}^{st}(\rho, \theta, z, \mu)$ ,  $R_{n}^{st}(\rho, \theta, z, \mu)$ ,  $R_{p}^{st}(\rho, \theta, z, \mu)$  – залишкові члени. Комплексні і комплексноспряжені амплітуди коливального процесу також шукаємо у вигляді, аналогічному до (17).

У результаті підстановки асимптотичних рядів (17) в рівняння і граничні умови (11)–(16) та групування відповідних доданків у степеневих рядах для кожної із незалежних змінних  $z, \underline{\xi}, \overline{\xi}$  отримуємо такі задачі для пошуку головних членів регулярних частин асимптотик:

$$\begin{cases} \Delta n_0^{st} - \nabla \cdot (n_0^{st} \nabla \phi_0^{st}) - A_n n_0^{st} = \frac{1}{4} (\nabla \cdot (n_{*0} \nabla \phi_0^*) + \nabla \cdot (n_0^* \nabla \phi_{*0})), \\ \Delta p_0^{st} + \nabla \cdot (p_0^{st} \nabla \phi_0^{st}) - A_p p_0^{st} = -\frac{1}{4} (\nabla \cdot (p_{*0} \nabla \phi_0^*) - \nabla \cdot (p_0^* \nabla \phi_{*0})), \\ p_0^{st} = n_0^{st}, \end{cases} \quad (18)$$

$$\left. \frac{\partial n_0^{st}}{\partial v} - n_0^{st} (\nabla \phi_0^{st})_v - \underline{N}_0 (\nabla \phi_0^{st})_v - \frac{1}{4} n_{*0} (\nabla \phi_0^*)_v - \frac{1}{4} n_0^* (\nabla \phi_{*0})_v - 2\gamma_n w n_0^{st} - 2\gamma_n w \underline{N}_0 \right|_{(\partial\Omega)_n} = \frac{J}{eD_n} \frac{w}{N_i},$$

$$\left. \frac{\partial p_0^{st}}{\partial v} + p_0^{st} (\nabla \phi_0^{st})_v + \underline{P}_0 (\nabla \phi_0^{st})_v + \frac{1}{4} p_{*0} (\nabla \phi_0^*)_v + \frac{1}{4} p_0^* (\nabla \phi_{*0})_v \right|_{(\partial\Omega)_n} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial p_0^{st}}{\partial v} + p_0^{st} (\nabla \phi_0^{st})_v + \overline{P}_0 (\nabla \phi_0^{st})_v + \frac{1}{4} p_{*0} (\nabla \phi_0^*)_v + \frac{1}{4} p_0^* (\nabla \phi_{*0})_v + 2\gamma_p w p_0^{st} + 2\gamma_p w \overline{P}_0 \right|_{(\partial\Omega)_p} = -\frac{J}{eD_p} \frac{w}{N_i},$$

$$\left. \frac{\partial n_0^{st}}{\partial v} - n_0^{st} (\nabla \phi_0^{st})_v - \overline{N}_0 (\nabla \phi_0^{st})_v - \frac{1}{4} n_{*0} (\nabla \phi_0^*)_v - \frac{1}{4} n_0^* (\nabla \phi_{*0})_v \right|_{(\partial\Omega)_p} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial n_0^{st}}{\partial v} - \gamma_n^* w n_0^{st} \right|_{(\partial\Omega)_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial p_0^{st}}{\partial v} - \gamma_p^* w p_0^{st} \right|_{(\partial\Omega)_0} = 0.$$

$$\begin{cases} \Delta n_{*0} - \nabla \cdot (n_{*0} \nabla \phi_0^{st}) - (A_n + j\omega B_n) n_{*0} = \nabla \cdot (n_0^{st} \nabla \phi_{*0}), \\ \Delta p_{*0} + \nabla \cdot (p_{*0} \nabla \phi_0^{st}) - (A_p + j\omega B_p) p_{*0} = -\nabla \cdot (p_0^{st} \nabla \phi_{*0}), \\ p_{*0} = n_{*0}, \end{cases} \quad (19)$$

$$\frac{\partial n_{*0}}{\partial v} - n_0^{st} (\nabla \phi_{*0})_v - n_{*0} (\nabla \phi_0^{st})_v - \underline{N}_{*0} (\nabla \phi_0^{st})_v - 2\gamma_n w n_{*0} - 2\gamma_n w \underline{N}_{*0} + j\omega \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mu E_{*v}^-}{e D_n} \frac{w}{N_i} \Big|_{(\partial\Omega)_n} = 0,$$

$$\frac{\partial p_{*0}}{\partial v} + p_0^{st} (\nabla \phi_{*0})_v + p_{*0} (\nabla \phi_0^{st})_v + \underline{P}_{*0} (\nabla \phi_0^{st})_v \Big|_{(\partial\Omega)_n} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{p}_{*0}}{\partial v} + \bar{p}_0^{st} (\nabla \phi_{*0})_v + \bar{p}_{*0} (\nabla \phi_0^{st})_v + \bar{P}_{*0} (\nabla \phi_0^{st})_v + 2\gamma_p w p_{*0} + 2\gamma_p w \bar{P}_{*0} - j\omega \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mu E_{*v}^-}{e D_p} \frac{w}{N_i} \Big|_{(\partial\Omega)_p} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{n}_{*0}}{\partial v} - \bar{n}_0^{st} (\nabla \phi_{*0})_v - \bar{n}_{*0} (\nabla \phi_0^{st})_v - \bar{N}_{*0} (\nabla \phi_0^{st})_v \Big|_{(\partial\Omega)_p} = 0,$$

$$\frac{\partial n_{*0}}{\partial v} - \gamma_n^* w n_{*0} \Big|_{(\partial\Omega)_0} = 0, \quad \frac{\partial p_{*0}}{\partial v} - \gamma_p^* w p_{*0} \Big|_{(\partial\Omega)_0} = 0.$$

Задачі для пошуку комплексно спряжених амплітуд та наступних членів регулярних частин асимптотик мають структуру, аналогічну до (18)–(19).

Формуємо задачі для знаходження головних членів примежових поправок (стаціонарних (20) та швидкозмінних (21)):

$$\frac{\partial^2 \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}^2} = -(\underline{P}_0 - \underline{N}_0), \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{N}_0}{\partial \underline{\xi}^2} - \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{N}_0 \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} \right) - n_0 \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}^2} = \frac{1}{4} \left( n_{*0} \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_0^*}{\partial \underline{\xi}^2} + \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{N}_{*0} \frac{\partial \underline{\Phi}_0^*}{\partial \underline{\xi}} \right) + n_0^* \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}^2} + \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{N}_0^* \frac{\partial \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}} \right) \right),$$

$$\frac{\partial^2 \underline{P}_0}{\partial \underline{\xi}^2} + \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{P}_0 \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} \right) + p_0 \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}^2} = -\frac{1}{4} \left( p_{*0} \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_0^*}{\partial \underline{\xi}^2} + \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{P}_{*0} \frac{\partial \underline{\Phi}_0^*}{\partial \underline{\xi}} \right) + p_0^* \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}^2} + \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{P}_0^* \frac{\partial \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}} \right) \right),$$

$$\frac{\partial \underline{N}_0}{\partial \underline{\xi}} - \underline{N}_0 \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} - n_0 \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} \Big|_{x=0} = \frac{1}{4} \left( (n_{*0} + \underline{N}_{*0}) \frac{\partial \underline{\Phi}_0^*}{\partial \underline{\xi}} + (n_0^* + \underline{N}_0^*) \frac{\partial \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}} \right), \quad \lim_{\underline{\xi} \rightarrow \infty} \underline{N}_0(\underline{\xi}) = 0,$$

$$-\frac{\partial \underline{P}_0}{\partial \underline{\xi}} - \underline{P}_0 \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} - p_0 \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} \Big|_{x=0} = \frac{1}{4} \left( (p_{*0} + \underline{P}_{*0}) \frac{\partial \underline{\Phi}_0^*}{\partial \underline{\xi}} + (p_0^* + \underline{P}_0^*) \frac{\partial \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}} \right), \quad \lim_{\underline{\xi} \rightarrow \infty} \underline{P}_0(\underline{\xi}) = 0,$$

$$\phi_0^{st} + \underline{\Phi}_0 \Big|_{\underline{\xi}=0} = 0, \quad \lim_{\underline{\xi} \rightarrow \infty} \underline{\Phi}_0(\underline{\xi}) = \frac{U}{2}.$$

$$\frac{\partial^2 \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}^2} = -(\underline{P}_{*0} - \underline{N}_{*0}), \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{N}_{*0}}{\partial \underline{\xi}^2} - \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{N}_{*0} \frac{\partial \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}} \right) - n_{*0} \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}^2} = \left( n_0 \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}^2} + \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{N}_0 \frac{\partial \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}} \right) \right),$$

$$\frac{\partial^2 \underline{P}_{*0}}{\partial \underline{\xi}^2} + \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{P}_{*0} \frac{\partial \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}} \right) + p_{*0} \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}^2} = - \left( p_0 \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}^2} + \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{P}_0 \frac{\partial \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}} \right) \right),$$

$$\frac{\partial \underline{N}_{*0}}{\partial \underline{\xi}} - \underline{N}_{*0} \frac{\partial \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}} - n_{*0} \frac{\partial \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}} \Big|_{x=0} = 0, \quad \lim_{\underline{\xi} \rightarrow \infty} \underline{N}_{*0}(\underline{\xi}) = 0,$$



$$\left. \frac{\partial P_{*0}}{\partial \xi} + P_{*0} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} + p_{*0} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} \right|_{x=0} = 0, \lim_{\xi \rightarrow \infty} P_{*0}(\xi) = 0, \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_{0z}}{\partial \xi} = -N_0, \\ \frac{\partial N_0}{\partial \xi} + (N_0 E_{0z}) = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \xi} (|\tilde{E}_{0z}|^2), \end{array} \right. \quad (24)$$

$$\phi_{*0} + \Phi_{*0} \Big|_{\xi=0} = 0, \lim_{\xi \rightarrow \infty} \Phi_{*0}(\xi) = \frac{U^{ext}}{4}.$$

Задачі для пошуку комплексно спряжених амплітуд ( $\underline{N}_0, \underline{P}_0, \Phi_0$ ) та наступних членів прилежових поправок мають структуру, аналогічну до (20)–(21). Задачі для знаходження прилежових поправок на межі області  $(\partial\Omega)_p$  ( $z=1$ ) також будуть аналогічними до (20)–(21).

У результаті додавання першого і другого рівняння у системах (18)–(19) та врахування умови рівності концентрацій електронів і дірок у активній області отримуємо:

$$\Delta n_0^{st} - \frac{(A_n + A_p)}{2} n_0^{st} = 0, \quad (22)$$

$$\left. \frac{\partial n_0^{st}}{\partial z} - \gamma_n w n_0^{st} - \gamma_n w N_0 \right|_{z=0} = \frac{wJ}{2eD_n N_i},$$

$$\left. \frac{\partial n_0^{st}}{\partial z} + \gamma_p w n_0^{st} + \gamma_p w \bar{P}_0 \right|_{z=1} = -\frac{wJ}{2eD_p N_i},$$

$$\left. \frac{\partial n_0^{st}}{\partial \rho} - \frac{(\gamma_n^* + \gamma_p^*)}{2} w n_0^{st} \right|_{\rho=\frac{R}{w}} = 0.$$

$$\Delta n_{*0} - \left[ \frac{(A_n + A_p)}{2} + i\omega \frac{(B_n + B_p)}{2} \right] n_{*0} = 0, \quad (23)$$

$$\left. \frac{\partial n_{*0}}{\partial z} - \gamma_n w n_{*0} - \gamma_n w N_{*0} + j\omega \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mu E_{*v}^{\sim}}{2eD_n} \frac{w}{N_i} \right|_{z=0} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial p_{*0}}{\partial z} + \gamma_p w p_{*0} + \gamma_p w \bar{P}_{*0} + j\omega \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mu E_{*v}^{\sim}}{2eD_p} \frac{w}{N_i} \right|_{z=1} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial n_{*0}}{\partial \rho} - \frac{(\gamma_n^* + \gamma_p^*)}{2} w n_{*0} \right|_{\rho=\frac{R}{w}} = 0.$$

Постановки задач (20)–(21) перепишемо з урахуванням даних про те, що прилежові поправки з концентрації дірок відсутні ( $\underline{P}_0 = P_0 = P_0^* = 0$ ) [5] (на границі  $z=1$  викладки аналогічні за умови, що тут відсутні прилежові поправки з концентрації електронів) і умов  $p_0^{st} = n_0^{st}$ ,  $p_{*0} = n_{*0}$ . Також врахуємо співвідношення  $E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$ . Отримуємо:

де  $|\tilde{E}_{0z}|^2 = E_{*0z} E_{0z}^*$ , граничні умови для шуканих функцій:  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} N_0(\xi) = 0$ ,  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} E_{0z}(\xi) = \frac{E_{max}}{2}$  ( $E_{max}$  стала, яка знаходиться на основі граничних умов для потенціалу  $\int_0^1 (E_{0z} + \bar{E}_{0z}) dz = U$ ).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_{*0z}}{\partial \xi} = -N_{*0}, \\ \frac{\partial N_{*0}}{\partial \xi} + (N_{*0} E_{0z}) = -(N_0 E_{*0z}), \end{array} \right. \quad (25)$$

при  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} N_{*0}(\xi) = 0$ ,  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} E_{*0z}(\xi) = \frac{E_z^{ext}}{4}$ . Зауважимо, що  $E_z^{ext}$  – усереднене щодо просторових координат у площині  $z=1/2$  при  $\rho \leq R$  значення напруженості електричної компоненти НВЧ поля. Для отримання значення електричної індукції  $\varepsilon \varepsilon_0 E_v^{ext}(z=0)$  (умови на межі області  $z=1$  отримуємо в результаті аналогічних міркувань) скористаємось теоремою Гаусса [6]:  $\varepsilon \varepsilon_0 E_v^{ext}(z=0) = \varepsilon_i \varepsilon_0 E_v^{ext} - \int_0^\infty e N_{*0}(\xi) d\xi$ . Задачі (24)–(25) розв’язуються сумісно. На наступному етапі знаходимо розв’язки задач (22)–(23). В результаті отримуємо головні члени асимптотик, які дають можливість прогнозувати розподіл концентрації просторового заряду в активній області  $p$ -і-п-структур з точністю порядку  $\sqrt{\mu}$  ( $\sim 10^{-4}$ ).

Оцінку залишкових членів ( $R_{\phi(m)}^{st}(z, \sqrt{\mu})$ ,  $R_{n(m)}^{st}(z, \sqrt{\mu})$ ,  $R_{p(m)}^{st}(z, \sqrt{\mu})$ ,  $R_{*z(m)}^{st}(z, \sqrt{\mu})$ ,  $R_{*n(m)}^{st}(z, \sqrt{\mu})$ ,  $R_{*p(m)}^{st}(z, \sqrt{\mu})$ ,  $R_{\phi(m)}^*(z, \sqrt{\mu})$ ,  $R_{n(m)}^*(z, \sqrt{\mu})$ ,  $R_{p(m)}^*(z, \sqrt{\mu})$ ) проводимо аналогічно до [13] за додаткових умов гладкості та їх узгодженості. Встановлюємо, що всі вони мають порядок малості  $O(\sqrt{\mu}^m)$ .

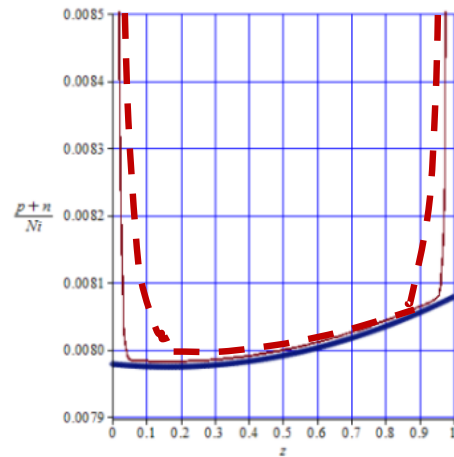
### Аналіз результатів та висновки

Тестова задача вирішувалась засобами математичного пакета Maple за таких вхідних даних: відстань між інжектуючими контактами  $w=30$  мкм; концентрація носіїв заряду у власному напівпровіднику  $N_i=10^{16}$  см<sup>3</sup>; елементарний заряд  $e=16 \cdot 10^{-20}$  Кл; коефіцієнти дифузії відповідно електронів і дірок  $D_n=35$  см<sup>2</sup>/с,  $D_p=25$  см<sup>2</sup>/с;

температура  $T_0=300$  К; час життя носіїв заряду  $\tau_n^*=\tau_p^*=10^{-7}$  с; прикладені напруга і струм  $U=5$  В,  $J=2\cdot 10^5$  А/см<sup>2</sup>; сталі  $\varepsilon=11$ ,  $\varepsilon_0=885\cdot 10^{-14}$  Ф/м; значення малого параметра  $\mu=6.25\cdot 10^{-6}$ ; швидкості поверхневої рекомбінації  $\alpha_n=2\cdot 10^5$  см/с,  $\alpha_p=10^5$  см/с; напруженість електричної компоненти НВЧ хвилі  $E_0^{ext}=2\cdot 10^4$  В/м.

На рис. 2 показано результати чисельно-аналітичного моделювання для стаціонарних головних членів асимптотик. Суцільна потовщена крива відображає розподіл концентрації носіїв заряду згідно з класичної моделі амбіполярної дифузії (моделі лінеаризації) [1; 2; 3], суцільна тонка – результати моделювання із залученням методу пограничного шару без врахування наведених НВЧ випромінюванням напруги і струмів в активній області р-і-п-структури і пунктирна крива – з урахуванням впливу НВЧ випромінювання. Також в активній області з'являються коливальні складники концентрації плазми (відіграють ключову роль у реактивній складовій частині імпедансу р-і-п-структури), які співставні за величиною із стаціонарною концентрацією.

Застосований у разі виконання дослідження асимптотичний метод (метод пограничного шару) дозволяє обійти обчислювальні проблеми, пов'язані із наявністю в досліджуваній області ділянок із великими градієнтами шуканих функцій [14]. Відзначимо, що вже на етапі пошуку головних членів асимптотик отримуємо результати, які забезпечують необхідний рівень адекватності



**Рис. 2. Розподіл концентрації зарядів в активній області ( $R=0$ , стаціонарна компонента)**

розв'язання відповідних електродинамічних задач НВЧ техніки. Результати математичного моделювання узгоджуються із відповідними даними експериментів [15].

Запропонована математична модель та розроблений алгоритм аналізу поставленої задачі важливі для розробників напівпровідникових елементів НВЧ електроніки, зокрема р-і-п-структур, які використовуються для комутації потужних електромагнітних полів і як захисних пристроїв входних трактів радіотехнічних систем.

### Література

1. Sze S., Kwok K. Physics of Semiconductor Devices. New York : Wiley-Interscience, 2006. 815 p. DOI: <https://doi.org/10.1002/0470068329>.
2. Kwok K. Complete Guide to Semiconductor Devices. New York : Wiley-Interscience, 2002. 740 p. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/book/5271197>.
3. Адирович Э.И., Карагеоргий-Алкалаев П.М., Лейдерман А.Ю. Токи двойной инжекции в полупроводниках. / Под ред. Гальперина. Москва : Сов. радио, 1978. 320 с.
4. Bonch-Bruевич V.L., Kalashnikov S.G. Physics of Semiconductors. Berlin : VEB, 1982.
5. Бомба А.Я., Мороз І.П. Математичне моделювання дифузійно-дрейфового процесу в активній області р-і-п діодів з врахуванням розігріву та рекомбінації методами теорії збурень. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*, 2021. № 1(135). С. 29–35.
6. Tamm I.E. Fundamentals of the Theory of Electricity. Central Books Ltd, 1980. 684 p.
7. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры. *Математический сборник*, 1952. № 31(73), 3, С. 575–586.
8. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. *УМН*, 1957. № 12(5). С. 3–122.
9. Vasil'eva A.B., Butusov V.F., Kalachev L.V. The Boundary Function Method for Singular Perturbation Problems. SIAM, Philadelphia, 1995.
10. Smith D.R. Singular-Perturbation Theory. An Introduction with Applications. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1985. 520 p.
11. Bomba A., Safonyk A., Fursachik E. Identification of Mass Transfer Distribution Factor and Its Account for Magnetic Filtration Process. *Modeling Journal of Automation and Information Sciences*, 2013. No. 45. 4. P. 16–22.
12. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of mathematical physics. Courier Corporation, 2013. 800 p.

13. Бомба А.Я. Про асимптотичний метод наближеного розв'язання однієї задачі масопереносу у разі фільтрації в пористому середовищі. *Український математичний журнал*, 1982. № 34(4). С. 37–40.
14. Polsky B.S., Rimshans J.S. Numerical simulation of transient processes in 2-D bipolar transistor. *Solid State Electron.*, 1981. No. 24. P. 1081–1085.
15. Usanov D.A., Gorbatov S.S., Kvasko V.Y., Fadeev A.V., Kalyamin A.A. Spatial oscillations of the electric field and the charge density in a silicon p-i-n diode. *Technical Physics Letters*, 2014. No. 40. 11. P. 984–986.

#### References

1. Sze, S., Kwok, K. (2006). *Physics of Semiconductor Devices*. New York: Wiley-Interscience, 815. DOI: <https://doi.org/10.1002/0470068329>.
2. Kwok, K. (2002). *Complete Guide to Semiconductor Devices*. New York: Wiley-Interscience, 740. Retrieved from: <https://ieeexplore.ieee.org/book/5271197>.
3. Adirovich, E.I., Karageorgii-Alkalaev, P.M., Leiderman, A.Iu. (1978). Toki dvoynoi inzhetskii v poluprovodnikakh [Currents double injection in semiconductors]. Moscow: Sov. radio, 320 [in Russian].
4. Bonch-Bruevich, V.L., Kalashnikov, S.G. (1982). *Physics of Semiconductors*. Berlin: VEB.
5. Bomba, A., Moroz, I. (2021). Matematychnе modeluvannya dyfuzijno-drejfovogo protsesu v aktivnij oblasti p-i-n diodiv z vrahuvannyam rozigrivu ta rekombinatsiji metodamy teorii zburеn'. *Journal obchyslual'noji ta prykladnoji matematyky*, 1 (135), 29–35 [in Ukrainian].
6. Tamm, I.E. (1980). *Fundamentals of the Theory of Electricity*. Central Books Ltd, 684.
7. Tikhonov, A.N. (1952). Sistemy differentsyal'nyh uravnenij, sodergaschie malye parametry. *Mat. Sb.*, 31(73), 3, 575–586 [in Russian].
8. Vishik, M., Lusternik, L.A. (1957). Reguljarnoe vyroждение i pogranichnyi sloi dlya lineinyh differentsyal'nyh uravnenij s malym parametrom. *Usp. Mat. Nauk.*, 12(5), 3–122 [in Russian].
9. Vasil'eva, A.B., Butusov, V.F., Kalachev, L.V. (1995). *The Boundary Function Method for Singular Perturbation Problems*. SIAM, Philadelphia.
10. Smith, D.R. (1985). *Singular-Perturbation Theory. An Introduction with Applications*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 520.
11. Bomba, A., Safonyk, A., Fursachik, E. (2013). Identification of Mass Transfer Distribution Factor and Its Account for Magnetic Filtration Process Modeling *Journal of Automation and Information Sciences*, 45, 4, 16–22.
12. Tikhonov, A.N., Samarskii, A.A. (2013). *Equations of mathematical physics*. Courier Corporation, 800.
13. Bomba, A. (1982). Pro asymptotychnyi metod nablygennogo rozv'yazannya odniji zadachi masoperenosu pry fil'tratsii v porystomu seredovyschi. *Ukr. Math. J.* 34(4), 37–40 [in Ukrainian].
14. Polsky, B.S., Rimshans, J.S. (1981). Numerical simulation of transient processes in 2-D bipolar transistor. *Solid State Electron.*, 24, 1081–1085.
15. Usanov, D.A., Gorbatov, S.S., Kvasko, V.Y., Fadeev, A.V., Kalyamin, A.A. (2014). Spatial oscillations of the electric field and the charge density in a silicon p-i-n diode. *Technical Physics Letters*, 40, 11, 984–986.