УДК 539.3
DOI https://doi.org/10.26661/2413-6549-2022-1-07

«ТРЕТЄ ТІЛО» ЯК МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КОНТАКТНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

Онишкевич В. М.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики і фізики
Національний лісотехнічний університет України
вул. Генерала Чупринки, 103, Львів, Україна
orcid.org/0000-0002-4657-5462
onyshkevych@nltu.edu.ua

Барабаш Г. М.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математичної економіки
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, Львів, Україна
orcid.org/0000-0003-3258-8518
galynabarabash71@gmail.com

Ключові слова: *тертя, теплоутворення, зношування, трибологія, контактна провідність, термічна проникність контакту.*

Температура тіл тертя істотно впливає на процеси, що відбуваються в місці контакту. Тому визначення температурних полів у тілах, що взаємодіють, у разі їх відносного ковзання є одним із найважливіших завдань трибології та триботехніки. Розмаїття природи чинників впливу на тепловий режим контактної пари зумовлює складність опису та математичного моделювання такого практичного завдання. Серед чинників впливу є як теплофізичні (теплопровідність, теплоємність, коефіцієнт лінійного розширення тіл, що взаємодіють, та інші), так і механічні (пружність, твердість тощо). Пропонується математично моделювати режими тертя, зношування та теплоутворення за допомогою розгляду так званого умовного «третього тіла» – тонких приповерхневих і проміжкових шарів тіл, що взаємодіють, фізико-механічні властивості яких відрізняються від властивостей тіл контактної пари, та мікрогеометрією поверхонь тіл у контактній зоні. Розглянуто метод визначення термопроникності контакту пари тертя. Оскільки у трибологічних задачах контактний тиск у різних точках є різним, то і контактна провідність теж не буде сталою величиною. На основі числового аналізу досліджено залежність термічної проникності контакту від різних вхідних чинників, побудовано відповідні графіки, виявлено неістотний або суттєвий вплив окремих вхідних чинників. Для визначення впливу вхідних параметрів на зміну температури та теплових потоків розглянуто контактну нестаціонарну задачу термопружності з теплоутворенням від дії сил тертя на межі двох півпросторів, яка за складністю відповідає суперпозиції двох одновимірних задач термопружності. Розв’язок задачі отримано з використанням інтегрального перетворення Лапласа. Розглянуто три різні найбільш типові випадки задання напружень. Отримано аналітичні вирази для розподілу температури та теплових потоків, побудовано відповідні графіки, проаналізовано вплив параметрів поверхонь, що контактують, на теплоутворення від тертя. Обчислені в одновимірних задачах значення термічної проникності контакту можуть використовуватись у моделюванні задач із неповним контактом.

"THIRD BODY" AS A MATHEMATICAL MODEL OF CONTACT THERMOELASTICITY

Onyshkevych V. M.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Physics and Mathematics
Ukrainian National Forestry University
General Chuprynka str., 103, Lviv, Ukraine
orcid.org/0000-0002-4657-5462
onyshkevych@nltu.edu.ua

Barabash G. M.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Mathematical Economy
Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str., 1, Lviv, Ukraine
orcid.org/0000-0003-3258-8518
galynabarabash71@gmail.com

Key words: *friction, heat generation, wear, tribology, contact conductance, contact thermal conductivity.*

The variety of factors affecting the thermal conditions of a frictional couple results in complexity of the simulation of this problem. Among these factors, thermophysical (thermal conductivity, specific heat, coefficient of linear expansion of bodies, etc.) and also mechanical ones (elasticity, hardness of contacting bodies, etc.) play an important role. The conditions of friction, wear and heat generation are also determined by the characteristics of the so-called "third body", i.e., thin near-surface and intermediate layers, the physical and mechanical properties of which differ from those of the interacting bodies, and by the microgeometry of their surfaces in the contact zone. The method of determination of thermal contact conductance in mathematical modelling of contact interaction with considering friction and hear generation by "third body" is presented. Using of modified conditions of heat contact in mathematical model of contact thermoelasticity taking into account of friction and heat generation is proposed. After numerical analysis, the graphs of dependence of thermal contact conductance on the input parameters are constructed and substantial influence of some of them is detected. In the trybological problems a contact pressure in the different points is different, so contact thermal conductivity is not constant value for this different points. The one-dimensional non-stationary contact problem of thermoelasticity with heat generation of friction on the border of two half-spaces for finding of the influence of some physical and mechanical parameters on the temperature and heat fluxes in the contact bodies is investigated. This contact problem is equivalent to superposition of two one-dimensional contact problems of thermoelasticity. The three most typical different cases of given stresses are investigated. The solution of problems by Laplace integral transformation is constructed. The analytical expressions for distributions of temperature and heat fluxes is obtained. On the base of numerical analysis, the dependence of thermal conductivity on different input factors is investigated, corresponding graphs are built, essential or not substantive influence of certain factors is detected.

Вступ. Визначення температурних полів у тілах, що взаємодіють, у разі їх відносного ковзання є одним із найважливіших завдань трибології та триботехніки. Розмаїтість чинників впливу на тепловий режим трибологічної пари зумовлює складність опису та математичного моделювання такого практичного науково-технічного завдання. Серед чинників впливу є як теплофізичні (теплопровідність, теплоємність, коефіцієнт лінійного розширення тіл, взаємодіють, та інші), так і механічні (пружність, твердість тощо). Уперше умови неідеального теплового контакту, які враховують термічний опір тонкого проміжкового шару між тілами, було запропоновано в [1, с. 133]. Термопружна контактна взаємодія тіл за наявності поверхневих теплофізичних неоднорідностей уперше була досліджена у [2, с. 23]. Вплив різниці температур тіл на розподіл теплової енергії між ними було з'ясовано у [3, с. 410]. Аналітичному опису теплових процесів з урахуванням неоднорідностей структури тіл, що контактують, присвячено низку сучасних праць, зокрема [4; 5]. Однак вибір адекватних умов теплового контакту і математичне моделювання теплових процесів в елементах конкретної трибосистеми з максимальною точністю є складною проблемою.

Метою роботи є отримання й аналіз аналітичного розв'язку нестаціонарної контактної задачі термопружності з теплоутворенням від дії сил тертя на межі двох півпросторів, яка за складністю відповідає суперпозиції двох одновимірних задач термопружності. Пропонується математично моделювати режими тертя, зношування та теплоутворення за допомогою розгляду так званого умовного «третього тіла» [6, с. 82] – тонких приповерхневих і проміжкових шарів тіл, що контактують, фізико-механічні властивості яких відрізняються від властивостей тіл контактної пари, та мікрогеометрією поверхонь тіл у контактній зоні.

Модель «третього тіла». Для дослідження контактної термопружності з урахуванням тертя і теплоутворення за вихідні умови використаєм узагальнені умови теплового контакту, які враховують інтегральну характеристику – коефіцієнт термопроникності контакту h [2, с. 25]:

$$\lambda\Delta\left(t^{(1)}+t^{(2)}\right)+2\left(\lambda^{(1)}\frac{\partial t^{(1)}}{\partial n}-\lambda^{(2)}\frac{\partial t^{(2)}}{\partial n}\right)=c\left(\dot{t}^{(1)}+\dot{t}^{(2)}\right)-2Q\,, \quad (1)$$

$$\lambda\Delta\left(t^{(1)}-t^{(2)}\right)+2\left(\lambda^{(1)}\frac{\partial t^{(1)}}{\partial n}+\lambda^{(2)}\frac{\partial t^{(2)}}{\partial n}\right)-12h\left(t^{(1)}-t^{(2)}\right)=c\left(\dot{t}^{(1)}-\dot{t}^{(2)}\right), \quad (2)$$

де індексами «1» та «2» позначено величини, які належать відповідно до першого і другого тіл; n – нормаль до поверхні контакту тіл; λ – зведена теплопровідність; Δ – двовимірний оператор Лапласа; c – зведена теплоємність; Q – інтенсивність теплових джерел, h – коефіцієнт термопроникності контакту. Проведений числовий аналіз показав, що нехтування коефіцієнтом λ незначно впливає на розподіл температурних полів у тілах пари тертя, а суттєвий вплив на результати має інтегральна характеристика – коефіцієнт термопроникності контакту h. Тому для практичних розрахунків можна рекомендувати такі спрощені теплофізичні умови на ділянці контакту:

$$\lambda^{(1)}\frac{\partial t^{(1)}}{\partial n}-\lambda^{(2)}\frac{\partial t^{(2)}}{\partial n}=\frac{c}{2}\left(\dot{t}^{(1)}+\dot{t}^{(2)}\right)-Q\,, \quad (3)$$

$$\lambda^{(1)}\frac{\partial t^{(1)}}{\partial n}+\lambda^{(2)}\frac{\partial t^{(2)}}{\partial n}-2h\left(t^{(1)}-t^{(2)}\right)=\frac{c}{6}\left(\dot{t}^{(1)}-\dot{t}^{(2)}\right). \quad (4)$$

З'ясовано [6, с. 85], що середня температура в області контакту тіл мало відрізняється від температури $t^{(1)}=t^{(2)}$ в разі ідеального теплового контакту тіл. Оскільки для знаходження коефіцієнта термопроникності контакту h, який пов'язує тепловий потік і різницю температур ($q=h\Delta t$), необхідно знати середню температуру, то розв'язок задачі із запропонованими спрощеними граничними умовами (3) – (4) за $h\to\infty$ можна розглядати і як перший етап для знаходження h. Чинники, від яких залежить h, як і весь процес теплоутворення, є численними та складними [7, с. 87]. Проведений числовий аналіз експериментальних даних дозволив установити суттєвий вплив на зміну термопроникності контакту деяких із них (рис. 1 та рис. 2).

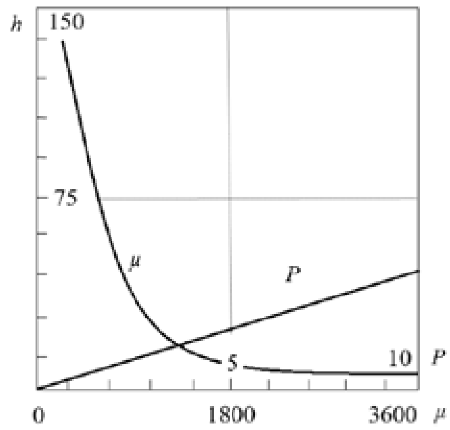

Рис. 1. Залежність коефіцієнта термопроникності контакту *h* (кВт/(м² · К)) від тиску *P* (МПа) та твердості за Мейєром μ (МПа)

Для визначення впливу вказаних параметрів на різницю температур і теплових потоків розглянуто нестаціонарну контактну задачу термопружності з теплоутворенням від дії сил тертя на межі двох півпросторів, яка за складністю відповідає суперпозиції двох одновимірних задач термопружності.

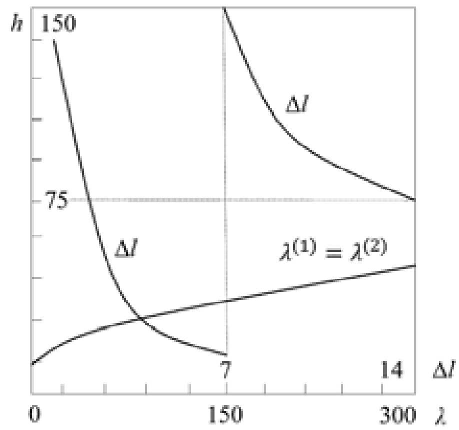

Рис. 2. Залежність коефіцієнта термопроникності контакту *h* (кВт/м²·К) від чистоти обробки поверхонь Δl (мкм) і коефіцієнтів теплопровідності (взято $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)}$, Вт/(м·К))

Математична постановка задачі. Припускаємо, що два пружні півпростори з нульовою температурою спочатку є нерухомими, а в момент часу $\tau = 0$ зближуються і з тертям починають переміщуватися з відносною сталою швидкістю V. Процес тертя на межі контакту супроводжується теплоутворенням, теплові граничні умови враховують коефіцієнт термопроникності контакту h. Математично задача полягає в розв'язанні рівнянь термопружності:

$$\frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial x_i^2} = \beta^{(i)} \frac{\partial t^{(i)}}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 t^{(i)}}{\partial x_i^2} = \frac{1}{a^{(i)}} \frac{\partial t^{(i)}}{\partial \tau}, \qquad (5)$$

за таких умов:

$$t^{(i)}\Big|_{\tau=0} = 0, \; \sigma_{x_1} = \sigma_{x_2}, \; u^{(1)} + u^{(2)} = const, \qquad (6)$$

$$\lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial x_1} + \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial x_2} = fV\sigma_{x_1} = fV\sigma_{x_2}, \qquad (7)$$

$$\lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial x_1} - \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial x_2} - 2h\left(t^{(1)} - t^{(2)}\right) = 0, \qquad (8)$$

де f – коефіцієнт тертя між тілами, $\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$, λ, μ – коефіцієнти Ламе, α_t – температурний коефіцієнт лінійного розширення, $a^{(i)}$ – коефіцієнт температуропровідності для i-го тіла, i =1,2.

Нехай $t^{(i)}\Big|_{x_i \to \infty} = 0$, $\sigma_{x_i}\Big|_{x_i \to \infty} = -\sigma_{x_i}^{\infty}$, $\bar{\sigma}_{x_i}\Big|_{x_i \to \infty} = -\bar{\sigma}^{\infty}$, ($i$ = 1,2). Тоді розв'язок задачі (5) – (8) можна побудувати за допомогою інтегрального перетворення Лапласа:

$$\bar{t}^{(i)} = \frac{fV\bar{\sigma}^{\infty}}{2\Lambda_i\sqrt{p}} \left\{ 1 + \frac{h(\Lambda_i - \Lambda_j)}{2\Lambda_1\Lambda_2} \frac{1}{\sqrt{p} + \frac{h(\Lambda_1 + \Lambda_2)}{2\Lambda_1\Lambda_2}} \right\} \exp\left(-\sqrt{p/a^{(i)}}\right) x_i, \qquad (9)$$

$$\bar{q}^{(i)} = \frac{fV\bar{\sigma}^{\infty}}{2} \left\{ 1 + \frac{h(\Lambda_i - \Lambda_j)}{2\Lambda_1\Lambda_2} \frac{1}{\sqrt{p} + \frac{h(\Lambda_1 + \Lambda_2)}{2\Lambda_1\Lambda_2}} \right\} \exp\left(-\sqrt{p/a^{(i)}}\right) x_i. \qquad (10)$$

$$\bar{u}^{(i)} = a_i - \frac{\left(1 + \nu^{(i)}\right)\left(1 - 2\nu^{(i)}\right)}{E^{(i)}\left(1 - \nu^{(i)}\right)} \bar{\sigma}^{\infty} x_i -$$

$$-\beta^{(i)}\sqrt{a^{(i)}}\left(1 + \beta^{(i)}\right) \frac{fV\bar{\sigma}^{\infty}}{p} \frac{\Lambda_i\sqrt{p} + h}{2\Lambda_i\Lambda_j\sqrt{p} + h(\Lambda_1 + \Lambda_2)} \exp\left(-\sqrt{p/a^{(i)}}\right) x_i, \qquad (11)$$

де $\Lambda_i = \lambda^{(i)} \big/ \sqrt{a^{(i)}}$, i=1,2.

Розглянемо типові випадки для різних законів задання напружень $\sigma^{\infty}(\tau)$, які б дозволяли аналітично отримати зображення за Лапласом шуканих функцій.

Випадок 1. Нехай $\sigma^{\infty} = P_0 = const$ за $\tau \geq 0$, тобто $\sigma^{\infty}(\tau) = P_0 H(\tau)$, де $H(\tau) = \begin{cases} 1, \tau \geq 0 \\ 0, \tau < 0 \end{cases}$ – функція Хевісайда. Тоді у просторі зображень маємо $\bar{\sigma}^{\infty} = \frac{P_0}{p}$.

Випадок 2. Нехай $\sigma^{\infty} = P_0\left[H(\tau) - H(\tau - \tau_0)\right]$, де $P_0 = const$, $H(\tau)$ – функція Хевісайда. Тоді у просторі зображень $\bar{\sigma}^{\infty} = \frac{P_0}{p} - \frac{P_0}{p}\exp(-\tau_0 p)$.

Випадок 3. Нехай $\sigma^{\infty} = P_0 \big/ \sqrt{\pi\tau}$, де $P_0 = const$. Тоді у просторі зображень за Лапласом отримаємо $\bar{\sigma}^{\infty} = \frac{P_0}{\sqrt{p}}$.

Вказані три випадки дають змогу аналітично отримати шукані функції у просторі оригіналів [8]. Наприклад, для випадку 3 задання на безмежності напруження вигляду $\sigma\big|_{\infty} = P_0 \big/ \sqrt{\pi\tau}$ з використанням теорем обернення інтегрального перетворення Лапласа для розподілу температури і теплових потоків у контактуючих тілах за глибиною отримано такі формули:

$$t^{(i)}(x_i, \tau) = \frac{fVP_0}{2\Lambda_i(\Lambda_i + \Lambda_j)} \left\{ 2\Lambda_i erfc \frac{x_i}{2\sqrt{a^{(i)}\tau}} - \right.$$

$$-(\Lambda_i - \Lambda_j)\exp\left(\frac{h^2(\Lambda_i + \Lambda_j)^2}{4\Lambda_{ii}^2\Lambda_j^2}\tau + \frac{x_i h}{\sqrt{a^{(i)}}} \frac{\Lambda_i + \Lambda_j}{2\Lambda_i\Lambda_j} \right) \times$$

$$\left. \times erfc\left(\frac{x_i}{2\sqrt{a^{(i)}\tau}} + \frac{h(\Lambda_i + \Lambda_j)}{2\Lambda_i\Lambda_j}\sqrt{\tau} \right) \right\}, \qquad (12)$$

$$q^{(i)}(x_i, \tau) = \frac{fVP_0}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{x_i^2}{4a^{(i)}\tau} \right) + \frac{h(\Lambda_i - \Lambda_j)}{2\Lambda_i\Lambda_j} \times \right.$$

$$\times \exp\left(\frac{h^2\left(\Lambda_i+\Lambda_j\right)^2}{4\Lambda_{ii}^2\Lambda_j^2}\tau + \frac{x_i h}{\sqrt{a^{(i)}}}\frac{\Lambda_i+\Lambda_j}{2\Lambda_i\Lambda_j} \right)\times$$

$$\times erfc\left(\frac{x_i}{2\sqrt{a^{(i)}\tau}} + \frac{h\left(\Lambda_i+\Lambda_j\right)}{2\Lambda_i\Lambda_j}\sqrt{\tau} \right)\Bigg\}, \qquad (13)$$

де $erf\left(x\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ – функція помилок, $erfc\left(x\right)=1-erf\left(x\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}dt$ – доповнювальна функція помилок.

Числові результати. Досліджено залежність різниці температур $\Delta t=t^{(2)}-t^{(1)}$ (рис. 3–4) і теплових потоків $\Delta q=q^{(2)}-q^{(1)}$ (рис. 5–6) від різних ухідних параметрів, що впливають на термопроникність контакту: від тиску P між тілами на ділянці контакту; від твердості за Мейєром μ м'якшого матеріалу; від чистоти обробки поверхонь Δl; від коефіцієнтів теплопровідності $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ півпросторів, що контактують.

Висновки. За отриманими числовими результатами можна зробити такі висновки:

1) зі збільшенням теплопровідності тіл, що контактують, і тиску в зоні контакту термопроникність контакту зростає, а в разі збільшення жорсткості і твердості матеріалів тіл – спадає;

2) зі збільшенням теплопровідності нижнього тіла, жорсткості та твердості матеріалів пари тертя різниця температур тіл, що контактують, зростає, а зі збільшенням теплопровідності верхнього тіла – спадає;

3) зміна номінального тиску між тілами на ділянці контакту мало впливає на різницю температур і теплових потоків у тілах;

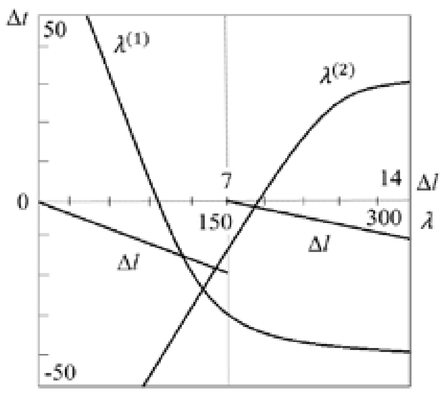

Рис. 3. Залежність різниці температур Δt (^{0}C) від чистоти обробки поверхонь Δl (мкм) і коефіцієнтів теплопровідності $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ (Вт/(м$\cdot$К))

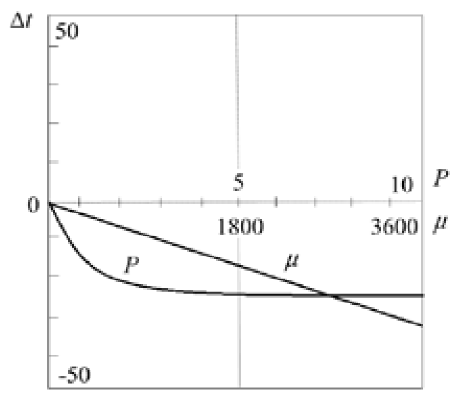

Рис. 4. Залежність різниці температур Δt (^{0}C) від тиску P (МПа) і твердості за Мейєром μ (МПа)

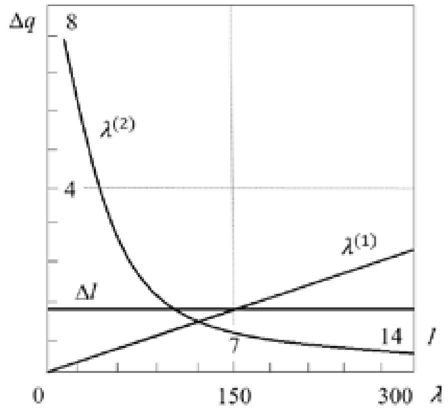

Рис. 5. Залежність теплових потоків Δq (кВт/(м$^2\cdot$К)) від чистоти обробки поверхонь Δl (мкм) і коефіцієнтів теплопровідності $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ (Вт/(м$\cdot$К))

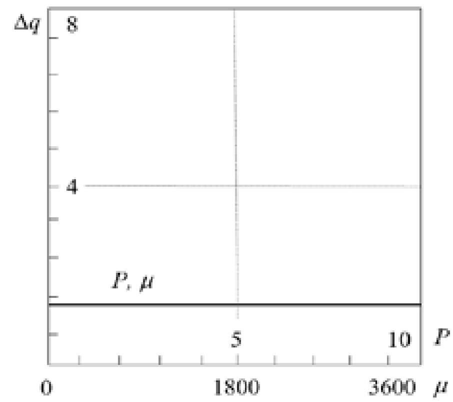

Рис. 6. Залежність теплових потоків Δq (кВт/(м$^2\cdot$К)) тиску P (МПа) і твердості за Мейєром μ (МПа)

ISSN 2413-6549

4) зі збільшенням теплопровідності верхнього тіла різниця теплових потоків тіл, що контактують, зростає, для нижнього тіла ефект протилежний;

5) зміна твердості та жорсткості матеріалів тіл, що контактують, мало впливає на різницю теплових потоків у них.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в тому, що проведений аналіз впливу параметрів контакту і стану поверхонь, що контактують, на температурні поля та теплові потоки через інтегральну характеристику h – коефіцієнт термопроникності контакту дозволив уперше використати математичну модель «третього тіла» для отримання аналітичного розв’язку нестаціонарної задачі термопружності з теплоутворенням від дії сил тертя на межі двох півпросторів. У розвиток досліджень [6; 7] розглянуто три різні закони задання напружень, які дають можливість побудови аналітичного розв’язку. У частинному випадку ідеального теплового контакту тіл отримані числові результати якісно узгоджуються із [3], де питома потужність тепловиділення приймається сталою чи задається конкретною числовою залежністю. Побудовані розв’язки одновимірних задач дозволяють внести поправку в обчисленні коефіцієнта термопроникності контакту за станом поверхонь, які контактують [4]. З іншого боку, у результаті порівняння експериментальних даних і виведення теоретичного розв’язку на експериментальний можна робити висновки про шорсткість поверхонь, що контактують, контактний тиск, площу контакту тощо, що матиме велике значення для коректної математичної постановки задач із неповним контактом у наступних дослідженнях.

Література

1. Подстригач Я.С. Термоупругое поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя. *Инженерно-физический журнал.* 1963. Т. 6. № 10. С. 129–136.
2. Швец Р.Н., Мартыняк Р.М. Термоупругое контактное взаимодействие тел при наличии поверхностных теплофизических неоднородностей. *Математические методы и физико-механически поля.* 1988. Вып. 27. С. 23–28.
3. Berry G.A., Barber J.R. Division of frictional heat: guide to the nature of sliding contact. *ASME Journal of tribology.* 1984. Vol. 106. P. 405–415.
4. Thermomechanical slip in elastic contact between identical materials / Y. Streliaiev et al. *Acta mechanica et automatica.* 2021. Vol. 15. № 4. P. 187–192.
5. Трансформація кільцевого зазору між півпростором і жорсткою основою під дією розподілених по колу стоків тепла / М.М. Микитин и др. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* 2021. Вип. 33. С. 126–136. DOI: 10.15421/ 4221011.
6. Левицький В.П., Онишкевич В.М. Дослідження впливу властивостей «третього тіла» на теплоутворення від тертя. Математичні методи та фізико-механічні поля. 1999. Вип. 42. № 1. С. 82–86.
7. Онишкевич В.М., Барабаш Г. М. Моделювання контактної взаємодії «третім тілом» у трибологічних задачах. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія «Фізико-математичні науки».* 2021. № 3. С. 85–88. DOI: 10.17721/1812-5409.2021/3.15.
8. PriMat. URL: https://primat.org/news/prjamoe_i_obratnoe_preobrazovanie_ laplasa/2014-11-30-871.

REFERENCES

1. Podstrigach Ya.S. (1963). Termouprugoye pole v sisteme tvyordych tel, sopryazhonnyh s pomoshchyu tonkogo promezhutochnogo sloya. [Thermoelastic field in the system of rigid bodies, conjugated with help of thin intermediate layer]. *IFZh,* vol. 6, № 10, pp. 129–136 (in Russian).
2. Shvec R.N., Martynyak R.M. (1988). Termouprugoye kontaktnoye vzaimodeystviye tel pri nalichii poverhnostnyh teplofizicheskih neodnorodnostey. [Thermoelastic contact interaction of bodies in the presence of surface heat-physical non-homogeneouses]. *Mat. metody i fiz.-meh. polia*, vol. 27, pp. 23–28 (in Russian).
3. Berry G.A., Barber J.R. (1984). Division of frictional heat: guide to the nature of sliding contact. *ASME Journal of tribology*, vol. 106, pp. 405–415.
4. Streliaiev Y., Martynyak R., Chumak K. (2021). Thermomechanical slip in elastic contact between identical materials. *Acta mechanica et automatica*, vol. 15, № 4, pp. 187–192.
5. Mykytyn M.M., Martynyak R.M., Serednytska Kh.I. (2021). Transformaciya kilcevogo zazoru mizh pivprostorom i zhorstkoyu osnovoyu pid diyeyu rozpodilenyh po kolu stokiv tepla [Transformation of the annular gap between half-space and rigid base under the action of heat sinks distributed around the circle]. *Problemy obchysliuvalnoyi mechaniky i micnosti konstrukciy,* vol. 33, pp. 126–136 (in Ukrainian).

6. Levytskyi V.P., Onyshkevych V.M. (1999). Doslidjennia vplyvu vlastyvostey “tretiogo tila” na teploutvorennia vid tertia [Investigation of influence of “third body” properties on heat generation due to friction]. *Mat. metody ta fiz.-meh. polia*, vol. 42, № 1, pp. 82–86 (in Ukrainian).
7. Onyshkevych V.M., Barabash G.M. (2021). Modeliuvannia kontaktnoyi vzayemodiyi “tretim tilom” u trybologichnyh zadachah [Modelling of contact interaction by “third body” in tribological problems]. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series “Physics and Mathematics”*, vol. 3, pp. 85–88 (in Ukrainian).
8. PriMat. URL: https://primat.org/news/prjamoe_i_obratnoe_preobrazovanie_ laplasa/2014-11-30-871.