РОЗДІЛ І. ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

УДК 531.383
DOI https://doi.org/10.26661/2786-6254-2022-2-01

ДОСЛІДЖЕННЯ СТРУКТУРНОЇ ВЛАСТИВОСТІ КЕРОВАНОСТІ ЗА ВИХОДОМ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ З ГІРОСКОПІЧНОЮ СТРУКТУРОЮ У РАЗІ ДІЇ ДИСИПАТИВНИХ СИЛ ТА СИЛ РАДІАЛЬНОЇ КОРЕКЦІЇ З УРАХУВАННЯМ ПЕВНОГО НЕЛІНІЙНОГО ЗМІШАНОГО ВИДУ ЗОВНІШНІХ ЗБУРЕНЬ

Леонтьєва В. В.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-9863-9712
vleonteva15@gmail.com

Кондрат'єва Н. О.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-6994-2536
nkondr100@gmail.com

Єременко А. О.
аспірант кафедри фундаментальної та прикладної математики
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0001-5965-0196
artem.eremenko.9797@gmail.com

Ключові слова: *динамічна система, гіроскопічна система, зовнішні збурення, модель у змінних стану, керованість за виходом, матриця керованості за виходом.*

Дослідження присвячене питанню аналізу керованості за виходом динамічної системи з гіроскопічною структурою у разі дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень, динаміка руху якої описується за допомогою побудованих за вихідними математичними моделями «вхід – вихід» математичних моделей «вхід – стан – вихід» для n- та $2n$ -мірної розмірності простору стану, які являють собою системи лінійних неоднорідних диференціальних та алгебраїчних рівнянь зі складеною нелінійною правою частиною, та кожна з яких подається у двох формах залежно від існування та відсутності можливості об'єднання зовнішніх збурень, що діють на досліджувану систему. За кожною з одержаних форм моделей «вхід – стан – вихід» проведено аналіз керованості за виходом системи, на основі якого встановлено, що для аналізованої системи виконуються умови повної керованості відносно вихідних змінних, що означає, що область керованості за виходом системи співпадає зі всім простором виходу системи, у який може бути переведено вихід системи за кінцевий час, причому на результати аналізу керованості за виходом

досліджуваної системи впливають тільки результати дослідження однієї з отриманих матриць керованості, складеної для випадку наявної можливості об'єднання збурюючих сил у моделі в n- або $2n$-мірному просторі стану системи. Використання інших форм подання моделей системи виявилось менш затребуваним у зв'язку з ускладненням відповідної матриці керованості за виходом поряд зі співпадінням отриманих результатів для зазначених моделей. Отримані результати є справедливими для систем будь-якої розмірності і можуть бути використані для розширення використання досліджуваних математичних моделей та підвищення динамічних властивостей досліджуваного об'єкта.

STUDY OF THE STRUCTURAL PROPERTY OF OUTPUT CONTROLABILITY OF A DYNAMICAL SYSTEM WITH A GYROSCOPIC STRUCTURE UNDER THE ACTION OF DISSIPATIVE FORCES AND FORCES OF RADIAL CORRECTION WITH A CERTAIN NONLINEAR EXTERNAL DISTURBANCES OF MIXED TYPE

Leontieva V. V.
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Fundamental and Applied Mathematics
Zaporizhzhya National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-9863-9712
vleonteva15@gmail.com

Kondratieva N. A.
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Fundamental and Applied Mathematics
Zaporizhzhya National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-6994-2536
nkondr100@gmail.com

Eremenko A. A.
Postgraduate Student at the Department of Fundamental and Applied Mathematics
Zaporizhzhya National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0001-5965-0196
artem.eremenko.9797@gmail.com

Key words: *dynamical system, gyroscopic system, external disturbances, state variable model, output controllability of the system, output controllability matrix.*

The research refers to the issue of analyzing the output controllability of a dynamical system with a gyroscopic structure under the influence of dissipative and radial correction forces with a certain nonlinear external disturbances of mixed type, movement dynamics of which is described with the refined mathematical "input-output" models that are accepted for work as initial ones. For each of such models are constructed the "input-state-output" models in an n- and 2n-dimensional state space that are presented in the form of linear non-homogeneous differential and algebraic equations with a compound nonlinear right-hand side and, depending from the certain physical limitations of the object, has two different forms of presentation – with the existing possibility (impossibility) of union of disturbing forces acting on the system. For each of obtained «input-state-output» models an analysis of the system's output controllability is carried out, according to which it is established that for the studied system the conditions of complete controllability in terms of output variables are satisfied, that means that the systems' output controllability subspace coincides with the entire systems' output space, into which the output of the system can be transferred in a finite time interval. Besides, it was observed that the results of the analysis of the output controllability are affected only by the results of the study of one of the obtained output controllability matrices compiled for the case of the existing possibility of combining disturbing forces in the n- and 2n-dimensional state-space models. The use of another form of representation of the models is turned out to be less popular due to the complication of the corresponding output controllability matrix along with the coincidence of the results obtained for the specified models.

ВСТУП

Одним із найбільш актуальних напрямів розвитку сучасної науки та техніки виступає застосування методів теорії автоматичного керування й регулювання у розробці нових, удосконалення наявних математичних моделей гіроскопічних систем та аналіз стану їх основних характеристик під дією зовнішніх збурень [1–5]. Доцільність керування й регулювання таких систем аргументується тим, що за їх використанням стає можливим змінити досліджувану систему (процес) таким чином, щоб характеризовувані нею показники відповідали певним встановленим відповідно до досліджуваної системи вимогам, наприклад, у випадках, коли є потреба у стабілізації нестійкої системи, покращенні динамічних її властивостей, а також немає можливості корегувати вхідні параметри моделі руху й поведінки досліджуваної складної системи і т. ін. [1; 6–8]. При цьому задачі керування й регулювання складними системами є розв'язуваними у разі виконання певних умов, які можуть бути знайдено безпосередньо під час здійснення додаткових проміжних обчислень для розв'язання задач, що своєю чергою є часто досить трудомістким та не завжди зручним процесом [6; 9]. На практиці часто для окреслених цілей використовують так звані критерії існування розв'язків задач керування й регулювання, за якими судження про існування відповідних розв'язків можна отримати, спираючись лише на вихідні дані задач. Для розв'язання саме задач керування й регулювання основними з таких критеріїв виступають критерії керованості системи – ефективні умови, що дозволяють судити про існування розв'язків досліджуваних проблем керування й регулювання за елементами вхідних матриць математичних моделей, що описують динаміку руху досліджуваних систем. При цьому для дослідження гіроскопічних систем практичний інтерес являє окремий вид структурної властивості системи – керованість за вихідним вектором змінних математичної моделі її руху. Важливість аналізу такої властивості пояснюється тим, що в умовах, коли досліджувані об'єкти та процеси, що функціонують особливо в умовах параметричної невизначеності, характеризуються властивістю повної або часткової (неповної) керованості відносно вихідних (регульованих та вимірюваних) змінних, застосування до досліджуваних об'єктів (процесів) окремих видів керування та/або регулювання вихідними змінними стають можливими, а отже, значно збільшується можливість побудови працездатних систем автоматичного керування (регулювання) із мінімальним ризиком отримання помилкових результатів [8; 10–14]. Крім того, володіння властивістю керованості за виходом стає й передумовою декомпозиційного синтезу задач стабілізації, стеження та спостереження відносно вихідних змінних, що в умовах сьогодення є особливо актуальним. Проведення ж аналізу керованості за вихідними змінними гіроскопічних систем, яким присвячене дослідження цієї роботи, має також визначальне значення у розв'язанні задач спостереження, ідентифікації, модального, програмного, оптимального, адаптивного та інших видів керування й регулювання [4; 15–18]. Результати аналізу володіння зазначеною властивістю в повному, частковому або нульовому обсязі (у разі некерованості системи) для функціонуючого під дією зовнішніх збурень такого об'єкта, дадуть можливість визначення й оцінки основних напрямів побудови таких коригуючих пристроїв, які за рахунок коригування структури або параметрів (наприклад, коефіцієнтів посилення, сталих часу в моделях динаміки і т.ін.) досліджуваної системи, забезпечили б приведення її динамічних властивостей та структурних особливостей до рівня бажаних з метою зняття значних обмежень на застосовувані методи й підходи керування й регулювання, а також зниження ймовірності погіршення техніко-економічних показників роботи системи. Саме з такою метою в цій роботі дослідження проблеми керованості за виходом проводиться для багатозв'язної динамічної системи з гіроскопічною структурою у разі дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень, описуваних за допомогою лінеаризованих диференціальних рівнянь зі складеною нелінійною правою частиною.

МЕТА, ОБ'ЄКТ ТА ПРЕДМЕТ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою роботи є дослідження виконання властивості керованості за виходом динамічної системи з гіроскопічною структурою у разі дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного змішаного виду зовнішніх збурень; визначення умов, за якими система є повністю та/або частково керованою й некерованою відносно вихідних змінних моделей системи.

Об'єктом дослідження в роботі виступають побудовані математичні моделі у змінних стану динамічної системи з гіроскопічною структурою у разі дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та змішаного виду зовнішніх збурень, які описуються системами лінійних неоднорідних векторно-матричних диференціальних та алгебраїчних рівнянь та які одержуються за побудованими моделями «вхід – вихід», що базуються на уточнених лініаризованих неперервних математичних моделях досліджуваної динамічної системи.

Предметом дослідження є структурна властивість керованості динамічної системи з гіроскопічною структурою відносно вихідних змінних.

Для реалізації сформульованої мети були поставлені такі завдання:

– представлення уточнених лінеаризованих математичних моделей досліджуваної динамічної системи з гіроскопічною структурою у вигляді лінійних моделей «вхід – вихід» для випадків, коли враховується об'єднання зовнішніх збурень та їх відокремленість;

– виділення фазових змінних стану системи (описують або фізичні, або фізичні та додаткові, проміжні змінні системи) та функцій керування (описують нелінійного змішаного виду збурюючі сили, які діють на систему та можуть діяти за окремим відповідним законом збурення залежно від значень своїх коефіцієнтів) для різних розмірностей простору стану системи та випадків, коли враховується об'єднання зовнішніх збурень та їх відокремленість;

– зведення побудованих лінійних моделей «вхід – вихід» динамічної системи з гіроскопічною структурою у разі дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та певного змішаного виду зовнішніх збурень до математичних моделей «вхід – стан – вихід» (моделей у змінних стану), які дозволяють виробити підхід для розв'язання різних класів задач теорії керування з єдиних позицій, з урахуванням виділених фазових змінних стану системи та функцій керування для вибраних розмірностей простору стану системи та окреслених випадків можливості об'єднання та відокремленості виділених зовнішніх збурень;

– побудова матриць керованості за виходом досліджуваної системи, поведінка якої описується отриманими математичними моделями «вхід – стан – вихід» у 2n- та n-мірному просторах стану системи для випадків об'єднання й відокремленості зовнішніх збурень;

– проведення поелементного аналізу побудованих матриць керованості за виходом на відповідність алгебраїчному критерію повної керованості відносно вихідних змінних лінійної стаціонарної системи керування, описуваної отриманими в роботі векторно-матричними диференціальними й алгебраїчними рівняннями з матрицями сталих коефіцієнтів;

– визначення умов повної та/або часткової керованості й некерованості за виходом досліджуваної системи з гіроскопічною структурою за результатами проведеного аналізу матриць керованості відносно вихідних вимірюваних змінних моделей системи;

– формулювання загальних висновків за результатами проведеного в роботі дослідження та надання загальних рекомендацій у тому чи іншому випадку повної та/або часткової керованості та некерованості за виходом досліджуваної системи, а також за використанням побудованих моделей з урахуванням можливості об'єднання та відокремленості виділених зовнішніх збурень.

ПРОБЛЕМНО-ОРІЄНТОВАНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ РУХУ ДОСЛІДЖУВАНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

Вихідними математичними моделями для проведення дослідження керованості за виходом у роботі виступають математичні моделі «вхід – вихід» динамічної системи з гіроскопічною структурою з урахуванням дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та змішаного виду зовнішніх збурень, які в загальному вигляді представляються у формі векторного співвідношення (змінна v має сутність неперервного часу)

$$y(v) = \delta(u(v)), \tag{1}$$

а для аналізованої системи з гіроскопічною структурою будуються за представленими в роботі [17] уточненими лінеаризованими неперервними математичними моделями досліджуваної динамічної системи та описуються системами лінійних неоднорідних векторно-матричних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами з урахуванням об'єднання зовнішніх збурень або їх відокремленості, відповідно видів

$$\begin{cases} Ay_1^{(IV)} + 2b\dddot{y}_1 + \dfrac{b^2+H^2}{A}\ddot{y}_1 + 2\dfrac{kH}{A}\dot{y}_1 + \dfrac{k^2}{A}y_1 = \\ \quad = \ddot{u}_1 - \ddot{u}_2 \sin\beta_{сер} + \dfrac{b}{A}\left(\dot{u}_1 - \dot{u}_2 \sin\beta_{сер}\right) + \dfrac{H}{A}\dot{u}_3 + \dfrac{k}{A}u_3, \\ Ay_2^{(IV)} + 2b\dddot{y}_2 + \dfrac{b^2+H^2}{A}\ddot{y}_2 + 2\dfrac{kH}{A}\dot{y}_2 + \dfrac{k^2}{A}y_2 = \\ \quad = \ddot{u}_3 - \dfrac{H}{A}\left(\dot{u}_1 - \dot{u}_2 \sin\beta_{сер}\right) + \dfrac{b}{A}\dot{u}_3 - \dfrac{k}{A}\left(u_1 - u_2 \sin\beta_{сер}\right), \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} A\tilde{y}_1^{(IV)} + 2b\dddot{\tilde{y}}_1 + \dfrac{b^2+H^2}{A}\ddot{\tilde{y}}_1 + 2\dfrac{kH}{A}\dot{\tilde{y}}_1 + \dfrac{k^2}{A}\tilde{y}_1 = \ddot{\tilde{u}}_1 + \dfrac{b}{A}\dot{\tilde{u}}_1 + \dfrac{H}{A}\dot{u}_3 + \dfrac{k}{A}u_3, \\ A\tilde{y}_2^{(IV)} + 2b\dddot{\tilde{y}}_2 + \dfrac{b^2+H^2}{A}\ddot{\tilde{y}}_2 + 2\dfrac{kH}{A}\dot{\tilde{y}}_2 + \dfrac{k^2}{A}\tilde{y}_2 = \ddot{u}_3 - \dfrac{H}{A}\dot{\tilde{u}}_1 + \dfrac{b}{A}\dot{u}_3 - \dfrac{k}{A}\tilde{u}_1, \end{cases} \quad (3)$$

де A – екваторіальний момент інерції гіроскопічної системи; H – власний кінетичний момент; b – коефіцієнт сил опору; k – крутизна характеристики моментних датчиків; $u_i = u_i(t)$ $(i = \overline{1,3})$, $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_1(t)$ – вхідні сигнали системи:

$$u_i(t) = g_i^0 + g_i^1 t + g_i^2 t^2 + g_i^3 \sin(\omega_i t + \varepsilon_i),\ i = \overline{1,3},$$

$$\tilde{u}_1(t) = \tilde{g}_1^0 + \tilde{g}_1^1\, t + \tilde{g}_1^2\, t^2 + g_1^3 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + \tilde{g}_2^3 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2);$$

g_i^j, ω_i, ε_i ($i = \overline{1,3}$, $j = \overline{0,3}$), $\tilde{g}_1^j = g_1^j - g_2^j \sin\beta_{сер}$ $(j = \overline{0,2})$, $\tilde{g}_2^3 = -g_2^3 \sin\beta_{сер}$ – відомі сталі; $\sin\beta_{сер} = const$ – усереднене значення кута повороту β, отримуване у разі здійснення лінеаризації вихідних рівнянь динамічної системи за умови припущення про його мале змінювання в часі у тригонометричних виразах моделі [3]; $y_i = y_i(t)$, $\tilde{y}_i = \tilde{y}_i(t)$ $(i = 1,2)$ – вихідні сигнали гіроскопічної системи.

Представлені моделі «вхід – вихід», описувані диференціальними рівняннями (2), (3) (або в загальному поданні за співвідношенням (1)), являють собою моделі, що зв'язують відповідно відокремлені вхідні сигнали $u_i(t)$, $i = \overline{1,3}$ досліджуваної системи та їх відповідні похідні $u_i^{(j)}(t)$, $i = \overline{1,3}$, $j = 1,2$ (у системі (1)) або об'єднані вхідні сигнали $\tilde{u}_1(t)$, $u_3(t)$ та їх похідні $\tilde{u}_1^{(j)}(t)$, $u_3^{(j)}(t)$, $j = 1,2$ (у системі (2)) з вихідними сигналами відповідно $y_i(t)$, $i = \overline{1,2}$ (у системі (1)) або $\tilde{y}_i(t)$, $i = 1,2$ (у системі (2)) та їх відповідними похідними $y_i^{(k)}(t)$, $i = 1,2$, $k = \overline{1,4}$ (у системі (1)) або $\tilde{y}_i^{(k)}(t)$, $i = 1,2$, $k = \overline{1,4}$ (у системі (2)) на деякому часовому інтервалі $t \in [t_0, t_k]$, де t_0, t_k – початковий та кінцевий моменти часу аналізу досліджуваної системи. Такі моделі повністю визначають статичні та динамічні властивості системи керування, але поряд з цим під час здійснення синтезу та проведення аналізу систем керування, в тому числі й аналізу володіння системою властивості керованості (в будь-якому її тлумаченні), можуть не відображати деяких динамічних особливостей системи. Це особливо помітно під час розгляду саме структурних властивостей динамічних систем. У такому випадку може виникнути необхідність розгляду функціонування досліджуваних систем у нових, можливо, більш зручних для аналізу координатах. Крім того, зазначені моделі «вхід – вихід» на системному рівні мають суттєвий недолік, що виявляється у неоднозначності відповідності виходу одному й тому самому входу [7; 9]. Зазначений недолік усувається шляхом проведення процедури параметризації співвідношення (1) або для досліджуваної системи відповідних рівнянь (2), (3) таким чином, щоб з'явилася можливість отримання представлення моделей у загальному вигляді у формі векторного співвідношення

$$y(v) = \delta\left(x(v), u(v)\right), \quad (4)$$

у якому вектор параметрів x виступає як вектор стану динамічної системи, який своєю чергою повністю знімає окреслену невизначеність відносин «вхід – вихід» динамічної системи та за допомогою якого можна зробити поведінку динамічної системи незалежною від передісторії в такий спосіб, що за відомого стану $x(v_p)$ досліджуваної системи в деякий момент $v = v_p$ рух системи при $v - v_p \geq 0$ буде однозначно визначено заданим станом $x(v_p)$ та вибраним сигналом керування $u(v)$. З урахуванням усіх окреслених вище особливостей та невраховувань моделей «вхід – вихід» насамперед у роботі ставиться задача переходу від зазначених моделей до моделей у змінних стану (моделей «вхід – стан – вихід»), для яких дослідження структурних властивостей системи, в тому числі й властивості керованості об'єкта за вихідними змінними, стає можливим. При цьому для здійснення переходу до математичних моделей досліджуваної системи у змінних стану слід зазначити, що в загальному випадку як такі математичні моделі досліджуваної динамічної системи з гіроскопічною структурою у разі дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень (для випадків об'єднання та відокремленості збурюючих сил) виступають шестикомпонентні макровектори відповідно видів

$$\Sigma = \{\, U, X, Y, T, \lambda, \delta \,\}, \quad (4)$$

$$\tilde{\Sigma} = \{\, \tilde{U}, \tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{T}, \tilde{\lambda}, \tilde{\delta} \,\}, \quad (5)$$

де U, $\tilde{U}$ – множини миттєвих значень r-мірних вхідних керуючих впливів відповідно $U \subset R^r$ та $\tilde{U} \subset R^r$ системи; X, $\tilde{X}$ – множини n-мірних станів відповідно $X \subset R^n$ та $\tilde{X} \subset R^n$ системи; Y, $\tilde{Y}$ – множини миттєвих значень m-мірних виходів відповідно $Y \subset R^m$ та $\tilde{Y} \subset R^m$ системи; T – множина моментів часу, що утворюють інтервал керування та спостереження у системі; $\lambda : X \times T \times U \times T \Rightarrow X$, $\tilde{\lambda} : \tilde{X} \times T \times \tilde{U} \times T \Rightarrow \tilde{X}$ – функції переходу системи з деякого попереднього стану x (або $\tilde{x}$) в момент $\tau \in T$ у наступний стан x (або $\tilde{x}$) у момент t за допомогою вхідного керуючого впливу відповідно $U \times (\tau,t), (\tau,t) \in T$ та $\tilde{U} \times (\tau,t), (\tau,t) \in T$; $\delta : X \times T \times U \times T \Rightarrow Y$, $\tilde{\delta} : \tilde{X} \times T \times \tilde{U} \times T \Rightarrow \tilde{Y}$ – функції виходу системи, які визначають правила отримання миттєвого значення виходу Y (або $\tilde{Y}$) в момент $t \in T$ у разі переходу системи з деякого попереднього стану x (або $\tilde{x}$) у момент $\tau \in T$ під впливом виділеного вхідного керуючого впливу $U \times (\tau,t)$ (або $\tilde{U} \times (\tau,t)$) за умови, що $(\tau,t) \in T$. При цьому для моделей досліджуваної системи, описуваними співвідношеннями (4) або (5), характерними є нескінченність множин U, $\tilde{U}$, X, $\tilde{X}$, Y, $\tilde{Y}$, континуальність множини T ($T = \{\, t :\ t_0 \le t \le t_k \}$), подання функцій переходу λ, $\tilde{\lambda}$ відповідно у виглядах $\lambda : \dot{x}(t) = \lambda\left[x(t), u(t)\right]$, $\tilde{\lambda} : \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{\lambda}\left[\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)\right]$ при $x \in X \subset R^n$, $\tilde{x} \in \tilde{X} \subset R^n$, $u \in U \subset R^r$, $\tilde{u} \in \tilde{U} \subset R^r$, подання функцій виходу δ, $\tilde{\delta}$ відповідно у виглядах $\delta : y(t) = \delta\left[x(t), u(t)\right]$, $\tilde{\delta} : \tilde{y}(t) = \tilde{\delta}\left[\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)\right]$ при $x \in X \subset R^n$, $\tilde{x} \in \tilde{X} \subset R^n$, $u \in U \subset R^r$, $\tilde{u} \in \tilde{U} \subset R^r$, $y \in Y \subset R^m$, $\tilde{y} \in \tilde{Y} \subset R^m$.

За вихідними неперервними моделями досліджуваної гіроскопічної системи, описуваними системами (1), (2) диференціальних рівнянь $2n$-го порядку, залежно від використовуваних підходів до обрання виду функцій λ, δ (або $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\delta}$) переходу від моделей «вхід – вихід» до моделей «вхід – стан – вихід», отримано моделі динамічної системи у змінних стану для різних випадків урахування представлення збурюючих сил та різних розмірностей простору стану:

а) моделі в n-мірному просторі станів з урахуванням об’єднання зовнішніх збурень або їх відокремленості, описувані у векторно-матричній формі відповідними диференціальними та алгебраїчними рівняннями [17; 19]

$$\begin{cases} \lambda : \dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t), \\ \delta : y(t) = \tilde{C}x(t), \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \tilde{\lambda} : \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{\tilde{B}}\tilde{u}(t), \\ \tilde{\delta} : \tilde{y}(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t), \end{cases} \tag{7}$$

де $x(t) = \left[x_1(t), \dots, x_n(t)\right]^T$, $\tilde{x}(t) = \left[\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t)\right]^T$ – n-мірні вектори стану системи; n – розмірність простору станів системи: $n = 4$; $u(t) = \left[N(t), R(t), L(t)\right]^T = \left[u_1(t), u_2(t), u_3(t)\right]^T$ – m-мірний вектор керування, $m = 3$; $\tilde{u}(t) = \left[N(t) - \sin\beta_{сер} R(t), L(t)\right]^T = \left[\tilde{u}_1(t), u_3(t)\right]^T$ – $\tilde{m}$-мірний вектор керування, $\tilde{m} = 2$; $N = N(t)$, $L = L(t)$, $R = R(t)$ – моменти зовнішніх сил, які діють на гіроскопічну систему відповідно вздовж зовнішньої, внутрішньої та головної осей системи та змінюються у часі відповідно до певного закону, зазвичай гармонійного [1; 3; 5; 17]; $y(t) = \left[y_1(t), y_2(t)\right]^T$, $\tilde{y}(t) = \left[\tilde{y}_1(t), \tilde{y}_2(t)\right]^T$ – r-мірні вектори виходу системи, $r = 2$; $\tilde{A} = \left[\tilde{a}_{ij}\right]_{n \times n}$ – матриця стану системи – основна матриця системи, структура якої визначає характер перехідної матриці стану та від якої залежить характер як вимушеного, так і вільного розв’язків систем; $\tilde{B} = \left[\tilde{b}_{ij}\right]_{n \times m}$, $\tilde{\tilde{B}} = \left[\tilde{\tilde{b}}_{ij}\right]_{n \times \tilde{m}}$ – матриці керуючих впливів (передавання керування) системи, структура яких визначає характер зв’язку входу системи зі змінними стану; $\tilde{C} = \left[\tilde{c}_{ij}\right]_{r \times n}$ – матриця виходу системи, структура якої визначає характер зв’язку між змінними стану та виходом системи; матриці $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{\tilde{B}}$, $\tilde{C}$ визначаються таким чином:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{k}{A} & -\frac{b}{A} & \frac{H}{A} \\ -\frac{k}{A} & 0 & -\frac{H}{A} & -\frac{b}{A} \end{bmatrix}; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & -\frac{\sin\beta_{сер}}{A} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A} \end{bmatrix}; \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

б) моделі в $2n$-мірному просторі станів з урахуванням об'єднання зовнішніх збурень або їх відокремленості, описувані відповідними диференціальними й алгебраїчними векторно-матричними рівняннями:

$$\begin{cases} \bar{\lambda}: \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t), \\ \bar{\delta}: \bar{y}(t) = \bar{C}\bar{x}(t), \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \tilde{\bar{\lambda}}: \dot{\tilde{\bar{x}}}(t) = \bar{A}\tilde{\bar{x}}(t) + \tilde{\bar{B}}\tilde{u}(t), \\ \tilde{\bar{\delta}}: \tilde{\bar{y}}(t) = \bar{C}\tilde{\bar{x}}(t), \end{cases} \tag{9}$$

де $\bar{x}(t) = [\bar{x}_1(t), \ldots, \bar{x}_{2n}(t)]^T$, $\tilde{\bar{x}}(t) = [\tilde{\bar{x}}_1(t), \ldots, \tilde{\bar{x}}_{2n}(t)]^T$ – $2n$-мірні вектори стану системи; $2n$ – розмірність простору стану: $2n = 8$; $u(t) = [u_1(t), u_2(t), u_3(t)]^T$, $\tilde{u}(t) = [\tilde{u}_1(t), u_3(t)]^T$ – відповідно m, $\tilde{m}$-мірні вектори керування, аналогічні попереднім моделям, $m = 3$, $\tilde{m} = 2$; $\bar{y}(t) = [\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t)]^T$, $\tilde{\bar{y}}(t) = [\tilde{\bar{y}}_1(t), \tilde{\bar{y}}_2(t)]^T$ – r-мірні вектори виходу системи, $r = 2$; $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]_{2n \times 2n}$ – матриця стану; $\bar{B} = [\bar{b}_{ij}]_{2n \times m}$, $\tilde{\bar{B}} = [\tilde{\bar{b}}_{ij}]_{2n \times \tilde{m}}$ – матриці вхідних керуючих впливів; $\bar{C} = [\bar{c}_{ij}]_{r \times 2n}$ – матриця виходу; матриці $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\tilde{\bar{B}}$, $\bar{C}$ визначаються у вигляді

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix};$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & -\frac{1}{A}\sin\beta_{cep} & 0 \\ \frac{b}{A^2} - \frac{a_3}{A} & -\left(\frac{b}{A^2} - \frac{a_3}{A}\right)\sin\beta_{cep} & \frac{H}{A^2} \\ -a_3\left(\frac{b}{A^2} - \frac{a_3}{A}\right) - \frac{a_2}{A} & \left(a_3\left(\frac{b}{A^2} - \frac{a_3}{A}\right) + \frac{a_2}{A}\right)\sin\beta_{cep} & \frac{k}{A^2} - a_3\frac{H}{A^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A} \\ -\frac{H}{A^2} & \frac{H}{A^2}\sin\beta_{cep} & \frac{b}{A^2} - \frac{a_3}{A} \\ -\left(\frac{k}{A^2} - a_3\frac{H}{A^2}\right) & \left(\frac{k}{A^2} - a_3\frac{H}{A^2}\right)\sin\beta_{cep} & -a_3\left(\frac{b}{A^2} - \frac{a_3}{A}\right) - \frac{a_2}{A} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{\bar{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & 0 \\ \frac{b}{A^2} - \frac{a_3}{A} & \frac{H}{A^2} \\ -a_3\left(\frac{b}{A^2} - \frac{a_3}{A}\right) - \frac{a_2}{A} & \frac{k}{A^2} - a_3\frac{H}{A^2} \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A} \\ -\frac{H}{A^2} & \frac{b}{A^2} - \frac{a_3}{A} \\ -\left(\frac{k}{A^2} - a_3\frac{H}{A^2}\right) & -a_3\left(\frac{b}{A^2} - \frac{a_3}{A}\right) - \frac{a_2}{A} \end{bmatrix};$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

a_i, $i = \overline{0,3}$ – коефіцієнти характеристичного поліному матриці $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{n \times n}$: $a_0 = \frac{k^2}{A^2}$, $a_1 = 2\frac{kH}{A^2}$, $a_2 = \frac{b^2 + H^2}{A^2}$, $a_3 = 2\frac{b}{A}$.

Слід зазначити, що досліджувана система, динаміка руху якої описується поданими системами векторно-матричних рівнянь (6), (7), (8) або (9), характеризується тим, що керування системи є енергетично найслабшою змінною, тоді як вихід системи зазвичай вимагає досить помітних енергетичних витрат. За цією особливістю у моделях «вхід – стан – вихід», описуваних зазначеними системами, відсутні матриці «керування – вихід» [5; 6; 7; 9], які безпосередньо зв'язують вектор керування системи з вектором виходу та структурно визначають, яким чином змушуючі функції на вході впливають на різні виходи, а отже, й прямі зв'язки зі входу на вихід, представлені такими матрицями, в досліджуваній системі є відсутніми. Зазначені матриці надалі можуть бути визначені з метою коригування структури моделей для покращення динамічних властивостей досліджуваної системи.

Отримані моделі «вхід – стан – вихід», описувані системами векторно-матричних рівнянь (6), (7) (у разі розгляду n-мірного простору станів системи) та (8), (9) (у разі розгляді $2n$-мірного простору станів) пов'язують відповідні вхідні сигнали $u_i(t)$, $i = \overline{1,m}$ (у випадку відокремленості на фізичному рівні діючих на систему збурюючих сил) або $\tilde{u}_i(t)$, $i = \overline{1,\tilde{m}}$ (у випадку об'єднання збурюючих сил) з відповідними вихідними сигналами $y_i(t)$, $\bar{y}_i(t)$ або $\tilde{y}_i(t)$, $\tilde{\bar{y}}_i(t)$, $i=\overline{1,r}$ через відповідні проміжні змінні $x_i(t)$ $(i=\overline{1,n})$, $\bar{x}_i(t)$ $(i=\overline{1,2n})$ або $\tilde{x}_i(t)$ $(i=\overline{1,n})$, $\tilde{\bar{x}}_i(t)$ $(i=\overline{1,2n})$ стану досліджуваної динамічної системи. Для такої форми представлення моделей досліджуваної системи є можливим та зручним, порівняно з моделями «вхід – вихід», проведення аналізу структурних властивостей систем керування, до яких належить і керованість системи відносно вихідних (регульованих та вимірюваних) змінних моделей руху, аналіз якої виступає предметом дослідження в роботі.

ДОСЛІДЖЕННЯ СТРУКТУРНОЇ ВЛАСТИВОСТІ КЕРОВАНОСТІ ЗА ВИХОДОМ ГІРОСКОПІЧНОЇ СИСТЕМИ

Перш ніж перейти до проведення безпосереднього аналізу керованості досліджуваної динамічної системи відносно вихідних (регульованих та вимірюваних) змінних моделей руху, розкриємо поняття керованості системи керування за виходом, пов'язане з існуванням та єдиністю розв'язків основних задач керування за виходом, та визначимо основні критерії повної (часткової) керованості та некерованості відносно вихідних змінних для лінійних стаціонарних систем, представлених моделями у змінних стану.

Вивчення питання керованості за виходом (вихідної керованості) в задачах дослідження систем керування, які зазвичай містять певний комплекс окремих об'єктів або елементів, поведінка яких у часі може змінюватися під впливом вибраних цілеспрямованих зовнішніх збурень, відіграє досить важливу роль. Пов'язано це з тим, що виконуваність такої властивості вказує на те, що досліджуваній системі керування притаманна здатність її зовнішнього входу, вибраного належним чином, переміщувати вихід з будь-якого початкового положення в будь-яке кінцеве положення за кінцевий інтервал часу. Крім того, на результати дослідження такої керованості спираються й дослідження інших структурних властивостей відносно вихідних змінних моделей динамічних систем, які відображають принципові можливості здійснення процесів керування, спостереження, ідентифікації, стеження й адаптації для заданої системи керування.

Спираючись на фундаментальні постулати теорії керованості автоматичного керування, які виступають основою для здійснюваних у роботі досліджень, вихідна керованість (керованість за виходом) системи керування, математична модель у змінних стану якої представлена системою у векторно-матричній формі виду

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = F\mathbf{X}(t) + G\mathbf{U}(t), \\ \mathbf{Y}(t) = P\mathbf{X}(t) + S\mathbf{U}(t) \end{cases} \qquad (10)$$

при $\mathbf{X}(t)=\left[x_1(t),\ldots,x_n(t)\right]^T$, $\mathbf{U}(t)=\left[u_1(t),\ldots,u_m(t)\right]^T$, $\mathbf{Y}(t)=\left[y_1(t),\ldots,y_r(t)\right]^T$, $F=\left[f_{ij}\right]_{n\times n}$, $G=\left[g_{ij}\right]_{n\times m}$, $P=\left[p_{ij}\right]_{r\times n}$, $S=\left[s_{ij}\right]_{r\times m}$, визначає, що вихід системи може бути переведений з будь-якого визначеного початкового $\mathbf{Y}(t_0)=\left[y_1(t_0),\ldots,y_r(t_0)\right]^T$ в будь-який заданий кінцевий $\mathbf{Y}(T)=\left[y_1(T),\ldots,y_r(T)\right]^T$ за кінцевий час $t\in\left[t_0,T\right]$ шляхом застосування допустимого керування $\breve{\mathbf{U}}(t)=\left[\breve{u}_1(t),\ldots,\breve{u}_m(t)\right]^T$ [10–12; 18]. Іншими словами, вихідна керованість визначає можливість приведення виходу системи керування у задану точку. При цьому сформульоване поняття керованості досить сильно пов'язане із поняттям керованості системи за станом, за яким система керування, математична модель якої описується рівняннями (10), може бути переведена з будь-якого визначеного початкового стану $\mathbf{X}(t_0)=\left[x_1(t_0),\ldots,x_n(t_0)\right]^T$ в будь-який заданий кінцевий стан $\mathbf{X}(T)=\left[x_1(T),\ldots,x_n(T)\right]^T$ за кінцевий час $t\in\left[t_0,T\right]$ шляхом застосування допустимого керування $\mathbf{U}(t)=\left[u_1(t),\ldots,u_m(t)\right]^T$ з використанням інформації про всі змінні стану $\mathbf{X}(t)=\left[x_1(t),\ldots,x_n(t)\right]^T$ системи керування [4; 7; 8; 13– 17]. Хоча ці поняття є дуже схожими, слід зазначити, що керованість за станом, будучи властивістю диференціального рівняння стану, характеризує можливість змінювання стану системи за допомогою вхідних сигналів, тоді як керованість за виходом, будучи властивістю як рівняння стану, так і алгебраїчного рівняння виходу системи, характеризує вже можливість змінювання виходу системи за допомогою аналогічних вхідних сигналів. Поряд з цим потрібно зауважити, що система, керована за станом, буде не обов'язково керованою за виходом, та навпаки: система, керована за виходом, буде не обов'язково керованою за станом. Отже, для отримання повної інформації про керованість (у наведених формулюваннях) досліджуваної системи, потрібно дослідити обидві зазначені структурні властивості.

Як критерій, за яким система керування, описувана рівняннями типу (10), буде визначатися повністю керованою відносно вихідних змінних $y_1(t),\ldots,y_r(t)$, виступає алгебраїчний критерій вихідної керованості, згідно з яким має виконуватись рангова умова для відповідної матриці керованості за виходом, представлена за умови, що матриця «керування – вихід» $S = \left[s_{ij} \right]_{r \times m}$ є не нульовою, в формі [18]

$$rank\left[W_{kep}^{вих} \right]_{r \times (n+1)m} = rank\left[PG \vdots PFG \vdots PF^2G \vdots \ldots \vdots PF^{n-1}G \vdots S \right]_{r \times (n+1)m} = r \quad (11)$$

або за умови, що матриця $S = \left[s_{ij} \right]_{r \times m}$ є нульовою, в формі [10–12; 18]

$$rank\left[W_{kep}^{вих} \right]_{r \times nm} = rank\left[PG \vdots PFG \vdots PF^2G \vdots \ldots \vdots PF^{n-1}G \right]_{r \times nm} = r\,. \quad (12)$$

Згідно з цим критерієм, у випадку повністю керованої за виходом $\mathbf{Y}(t)$ системи, ранг матриці керованості $W_{kep}^{вих}$ співпадатиме із розмірністю r простору виходу системи (10), тобто область керованості системи за виходом, яка складається з усіх точок простору виходу, в які може бути переведено вихід керованої системи допустимим керуванням з початкового виходу за кінцевий час, співпадатиме зі всім простором виходу системи; якщо $0 < rank\left[W_{kep}^{вих} \right]_{r \times nm} < r$, то, відповідно, система керування вважатиметься частково (не повністю) керованою відносно вихідних змінних, а отже, область керованості за виходом збігатиметься з підпростором керованості за виходом, який породжується сукупністю незалежних стовпців матриці керованості за виходом; при $rank\left[W_{kep}^{вих} \right]_{r \times nm} = 0$ система вважатиметься некерованою за виходом, що своєю чергою означатиме, що досліджувана система є недоступною для здійснення керування за виходом, а отже, потрібно застосовувати методи синтезу систем автоматичного керування, за якими структурно змінювати систему, щоб досягти виконання затребуваної властивості керованості за виходом та, таким чином, зробити її придатною для отримання розв'язків задач, які висуває практика.

У такому формулюванні проводиться аналіз керованості за виходом досліджуваної в роботі динамічної системи з гіроскопічною структурою, динаміка руху якої описується математичними моделями «вхід – стан – вихід» для різних випадків розмірностей простору стану системи, які залежно від існування принципової можливості на фізичному рівні об'єднання діючих на систему збурюючих сил подаються системами векторно-матричних диференціальних рівнянь стану та алгебраїчних рівнянь виходу відповідно видів (6), (7) (у n-мірному просторі стану) та (8), (9) (в $2n$-мірному просторі стану).

Використовуючи представлений у формі рангової умови (12) (матриця $S = \left[s_{ij} \right]_{r \times m}$, як було сформульовано раніше, у побудованих моделях «вхід – стан – вихід» складається з нульових елементів) критерій керованості за виходом до досліджуваної динамічної системи, описуваної рівняннями у змінних стану (6), (7) (у n-мірному просторі стану) та (8), (9) (у $2n$-мірному просторі стану), отримано такі матриці керованості за виходом:

– у випадку, коли існує принципова можливість об'єднання збурюючих сил, що діють на систему, для моделей, описуваних у n-мірному просторі стану системою (6) та в $2n$-мірному просторі стану системою (8):

$$\begin{gathered} \tilde{W}_{kep}^{вих} = \tilde{W}_{kep_{(n)}}^{вих} = \tilde{W}_{kep_{(2n)}}^{вих} = \\ = \left[\tilde{W}_1 \quad \tilde{W}_2 \quad \tilde{W}_3 \quad \tilde{W}_4 \quad \tilde{W}_5 \quad \tilde{W}_6 \quad \tilde{W}_7 \quad \tilde{W}_8 \quad \tilde{W}_9 \quad \tilde{W}_{10} \quad \tilde{W}_{11} \quad \tilde{W}_{12} \right]_{2 \times 12}; \end{gathered} \quad (13)$$

– у випадку, коли об'єднання збурюючих сил, що діють на систему, є не можливим для моделей, описуваних у n-мірному просторі стану системою рівнянь (7) та в $2n$-мірному просторі стану системою рівнянь (9):

$$\begin{gathered} \tilde{\tilde{W}}_{kep}^{вих} = \tilde{\tilde{W}}_{kep_{(n)}}^{вих} = \tilde{\tilde{W}}_{kep_{(2n)}}^{вих} = \\ = \left[\tilde{W}_1 \quad \tilde{W}_3 \quad \tilde{W}_4 \quad \tilde{W}_6 \quad \tilde{W}_7 \quad \tilde{W}_9 \quad \tilde{W}_{10} \quad \tilde{W}_{12} \right]_{2 \times 8}, \end{gathered} \quad (14)$$

де $\tilde{W}_{kep_{(n)}}^{вих} = \left[\tilde{C}\tilde{B} \vdots \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} \vdots \tilde{C}\tilde{A}^2\tilde{B} \vdots \tilde{C}\tilde{A}^3\tilde{B} \right]$, $\tilde{\tilde{W}}_{kep_{(n)}}^{вих} = \left[\tilde{C}\tilde{\tilde{B}} \vdots \tilde{C}\tilde{A}\tilde{\tilde{B}} \vdots \tilde{C}\tilde{A}^2\tilde{\tilde{B}} \vdots \tilde{C}\tilde{A}^3\tilde{\tilde{B}} \right]$ – матриці керованості для моделей у n-мірному просторі стану системи відповідно для випадків об'єднання та відокремлення збурюючих сил; $\tilde{W}_{kep_{(2n)}}^{вих} = \left[\bar{C}\bar{B} \vdots \bar{C}\bar{A}\bar{B} \vdots \bar{C}\bar{A}^2\bar{B} \vdots \bar{C}\bar{A}^3\bar{B} \right]$, $\tilde{\tilde{W}}_{kep_{(2n)}}^{вих} = \left[\bar{C}\bar{\bar{B}} \vdots \bar{C}\bar{A}\bar{\bar{B}} \vdots \bar{C}\bar{A}^2\bar{\bar{B}} \vdots \bar{C}\bar{A}^3\bar{\bar{B}} \right]$ – матриці керованості для моделей у $2n$-мірному просторі стану системи відповідно для випадків об'єднання та відокремлення збурюючих сил; $\tilde{W}_i$ $\left(i = \overline{1,12} \right)$ – стовпці матриць керованості (13), (14) за виходом системи:

$$\tilde{W}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};\ \tilde{W}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};\ \tilde{W}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};\ \tilde{W}_4 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{A} \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{W}_5 = \begin{bmatrix} -\dfrac{\sin\beta_{сер}}{A} \\ 0 \end{bmatrix};\ \tilde{W}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{A} \end{bmatrix};\ \tilde{W}_7 = \begin{bmatrix} -\dfrac{b}{A^2} \\ -\dfrac{H}{A^2} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{W}_8 = \begin{bmatrix} \dfrac{b\sin\beta_{сер}}{A^2} \\ \dfrac{H\sin\beta_{сер}}{A^2} \end{bmatrix};\ \tilde{W}_9 = \begin{bmatrix} \dfrac{H}{A^2} \\ -\dfrac{b}{A^2} \end{bmatrix};\ \tilde{W}_{10} = \begin{bmatrix} -\dfrac{H^2 - b^2}{A^3} \\ \dfrac{2bH - Ak}{A^3} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{W}_{11}=\begin{bmatrix}\dfrac{\left(H^2-b^2\right)\sin\beta_{cep}}{A^3}\\-\dfrac{\left(2bH-Ak\right)\sin\beta_{cep}}{A^3}\end{bmatrix};\ \tilde{W}_{12}=\begin{bmatrix}-\dfrac{2bH-Ak}{A^3}\\-\dfrac{H^2-b^2}{A^3}\end{bmatrix}.$$

Аналізуючи отримані в (13) та (14) матриці керованості $\tilde{W}_{kep}^{вих}$ та $\tilde{\tilde{W}}_{kep}^{вих}$ за виходом системи, отримуємо такі результати:

а) в матриці керованості $\tilde{W}_{kep}^{вих}$ за виходом стовпці $\tilde{W}_2$ й $\tilde{W}_3$, $\tilde{W}_5$, $\tilde{W}_8$, $\tilde{W}_{11}$ є лінійно залежними від стовпців $\tilde{W}_1$, $\tilde{W}_4$, $\tilde{W}_7$ та $\tilde{W}_{10}$ відповідно;

б) в матриці керованості $\tilde{\tilde{W}}_{kep}^{вих}$ за виходом, порівняно з матрицею $\tilde{W}_{kep}^{вих}$, стовпці $\tilde{W}_2$, $\tilde{W}_5$, $\tilde{W}_8$ та $\tilde{W}_{11}$ є відсутніми у зв'язку з тим, що матриця $\tilde{\tilde{B}}$ (або $\tilde{\tilde{B}}$) не містить другого стовпця (порівняно з матрицею $\tilde{B}$ або $\bar{B}$), усі інші стовпці в матрицях $\tilde{W}_{kep}^{вих}$ та $\tilde{\tilde{W}}_{kep}^{вих}$ співпадають. У цьому зв'язку можна зробити висновок, що на результати аналізу керованості за виходом досліджуваної системи істотним чином впливають тільки результати дослідження матриці керованості $\tilde{\tilde{W}}_{kep}^{вих}$ за виходом;

в) якщо порівняти стовпці матриці

$$\tilde{\tilde{W}}_{kep}^{вих}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dfrac{1}{A} & 0 & -\dfrac{b}{A^2} & \dfrac{H}{A^2} & -\dfrac{H^2-b^2}{A^3} & -\dfrac{2bH-Ak}{A^3}\\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{A} & \dfrac{H}{A^2} & -\dfrac{b}{A^2} & \dfrac{2bH-Ak}{A^3} & -\dfrac{H^2-b^2}{A^3}\end{bmatrix},$$

можна побачити, що третій її стовпець утворює з четвертим стовпцем діагональну матрицю

$$L=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{A} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{A}\end{bmatrix},$$

для якої $\det\left(L\right)=\dfrac{1}{A^r}=\dfrac{1}{A^2}\neq 0$, а отже, вказані третій та четвертий стовпці є лінійно незалежними і ранг матриці керованості $\tilde{\tilde{W}}_{kep}^{вих}$ за виходом дорівнює числу ненульових строк отриманої діагональної матриці L (для досліджуваної системи $rank\left[\tilde{\tilde{W}}_{kep}^{вих}\right]_{2\times 8}=rank\left[L\right]_{2\times 2}=2$), тобто виконується рангова умова $rank\left[\tilde{\tilde{W}}_{kep}^{вих}\right]_{r\times nm}=rank\left[L\right]_{r\times m}=r$, що означає, що досліджувана динамічна система з моделлю, описуваною рівняннями (7) або (9), є повністю керованою за виходом. При цьому при $A\neq 0$ та будь-яких допустимих значеннях сталих H, b, k лінійна незалежність зазначених стовпців матриці $\tilde{\tilde{W}}_{kep}^{вих}$ зберігається, що означає, що для досліджуваної системи не існує випадків, коли вона є не повністю керованою або некерованою за виходом.

Порівнюючи інші стовпці матриці $\tilde{\tilde{W}}_{kep}^{вих}$ керованості за виходом, можна побачити, наприклад, що третій її стовпець утворює з п'ятим (аналогічно і з шостим, сьомим та восьмим) стовпцем відповідно матриці

$$L_{3,5}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{A} & -\dfrac{b}{A^2}\\ 0 & -\dfrac{H}{A^2}\end{bmatrix},\ L_{3,6}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{A} & \dfrac{H}{A^2}\\ 0 & -\dfrac{b}{A^2}\end{bmatrix},$$

$$L_{3,7}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{A} & -\dfrac{H^2-b^2}{A^3}\\ 0 & \dfrac{2bH-Ak}{A^3}\end{bmatrix},\ L_{3,8}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{A} & -\dfrac{2bH-Ak}{A^3}\\ 0 & -\dfrac{H^2-b^2}{A^3}\end{bmatrix},$$

для яких, відповідно, $\det\left(L_{3,5}\right)=-\dfrac{H}{A^3}\neq 0$, $\det\left(L_{3,6}\right)=-\dfrac{b}{A^3}\neq 0$, $\det\left(L_{3,7}\right)=\dfrac{2bH-Ak}{A^4}\neq 0$, $\det\left(L_{3,8}\right)=\dfrac{b^2-H^2}{A^4}\neq 0$, оскільки $A\neq 0$ та величини H, b та k за своїм фізичним тлумаченням одночасно не є нульовими, а отже, вказані стовпці є також лінійно незалежними і ранг матриці $\tilde{\tilde{W}}_{kep}^{вих}$ у цих випадках дорівнює числу ненульових строк кожної з отриманих матриць $L_{3,5}$, $L_{3,6}$, $L_{3,7}$, $L_{3,8}$ (для досліджуваної системи $rank\left[\tilde{\tilde{W}}_{kep}^{вих}\right]_{2\times 8}=rank\left[L_{3,5}\right]_{2\times 2}=\ldots=rank\left[L_{3,8}\right]_{2\times 2}=2$), тобто також виконується рангова умова $rank\left[\tilde{\tilde{W}}_{kep}^{вих}\right]_{r\times nm}=r$, що підтверджує, що досліджувана динамічна система з моделями, описуваними системами (6), (7), (8) або (9), є повністю керованою за виходом, а її область керованості за виходом співпадає зі всім простором виходу системи, у який може бути переведено вихід системи за кінцевий час.

Зауважимо, що у разі здійснення аналізу вихідної керованості досліджуваної системи, користуючись ранговою умовою (12), отримано висновки за відсутності впливу керування на вихідні змінні моделей. У випадку визначення ненульової матриці «керування – вихід» за рахунок або виділення зазначених керувань, або за рахунок структурного змінювання моделей досліджуваної системи, отримувані остаточні висновки щодо керованості системи відносно вихідних змінних мають формулюватись на основі проведення досліджень за ранговою умовою (11) критерію повної вихідної керованості системи, враховуючи при цьому, що у разі структурного змінювання моделей досліджуваної системи з одночасним змінюванням вхідних матриць стану, входу та виходу на результати дослідження матриця «керування – вихід» зможе впливати у разі лінійної залежності стовпців матриці вихідної керованості, побудованої за умовою (12), тоді як у разі виділення допустимих керувань у векторі виходу моделі системи, у разі незмінності вхідних матриць стану, входу та виходу, на результати дослідження вихідної керованості матриця «керування – вихід» впливати не буде, оскільки n перших блокових матриць у матрицях керованості в обох випадках співпадатимуть.

Також, спираючись на результати проведених досліджень керованості системи за її виходом, визначено, що неврахування об'єднання зовнішніх сил у математичних моделях «вхід – вихід» досліджуваної системи, описуваних векторно-матричними рівняннями (1), (2) відповідно, а отже, і в побудованих на їх основі моделях «вхід – стан – вихід», описуваних відповідними рівняннями (6), (7) (у n-мірному просторі стану) або (8), (9) (в 2n-мірному просторі стану), не тільки не впливає, а й значно ускладнює матрицю керованості $\tilde{W}_{кер}^{вих}$ за виходом, складену для випадку, коли зазначене об'єднання зовнішніх сил у правій частині перших рівнянь із систем (6) (у n-мірному випадку) та (8) (у 2n-мірному випадку) не видається можливим. Тому, якщо структурно досліджувана динамічна система дозволяє проводити таке з'єднання зовнішніх збурень, можна рекомендувати використання математичних моделей, описуваних для кожного з розглядуваних просторів стану системи відповідними рівняннями (7) та (8).

ВИСНОВКИ

У роботі проведено дослідження структурної властивості керованості за виходом динамічної системи з гіроскопічною структурою у разі дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень, динаміка руху якої описується за допомогою побудованих за вихідними математичними моделями «вхід – вихід» математичних моделей «вхід – стан – вихід» для n- та 2n-мірної розмірності простору стану, які являють собою системи векторно-матричних лінійних неоднорідних диференціальних та алгебраїчних рівнянь зі складеною нелінійною правою частиною, та кожна з яких подається у двох формах залежно від існування та відсутності можливості об'єднання діючих на досліджувану систему зовнішніх збурень, прийнятих у роботі за допустимі керування.

За результатами проведеного дослідження керованості за виходом для досліджуваної системи визначено, що за будь-яких значень основних параметрів для досліджуваної системи не існує випадків, коли вона є не повністю керованою або некерованою за виходом, тобто досліджувана система є повністю керованою відносно всіх своїх вихідних (вимірюваних та регульованих) змінних, а її область керованості за виходом співпадає зі всім простором виходу системи, у який може бути переведено вихід системи за кінцевий час, а отже, досліджувана система є доступною для проведення аналізу структурних властивостей відносно вихідних змінних динамічних систем, а також для здійснення подальшого керування та регулювання за виходом системи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Новицкий В.В. Керування гіроскопічними системами та інші задачі аналітичної механіки. *Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування*. Київ : Інститут математики НАН України. 2008. Т. 78. 124 с.
2. Кириченко Н.Ф., Матвиенко В.Т. Оптимальный синтез структур для линейных систем управления. *Проблемы управления и информатики*. 1996. № 1, 2. С. 162–171.
3. Лазарєв Ю.Ф., Бондар П.М. Основи теорії чутливих елементів систем орієнтації. Київ : Політех, 2010. 625 с.
4. Леонтьева В.В., Кондратьева Н.А. Вопросы методологии анализа, управления, регулирования, идентификации и наблюдения гироскопических систем. *Вісник Запорізького національного університету :* збірник наукових статей. *Фізико-математичні науки*. Запоріжжя : ЗНУ. № 2, 2017. С. 157–169.
5. Меркин Д.Р. Гироскопические системы. Москва : Наука, 1974. 344 с.
6. Chen C.T. Linear system theory and design. New York : Oxford University press, 1999. 334 p.
7. Kvakernaak H., Siwan R. Linear Optimal Control Systems. New York : Wiley-lnterscience, 1972. 575 p.
8. Шэнь К., Неусыпин К. А. Исследование критериев степеней наблюдаемости, управляемости и идентифицируемости линейных динамических систем. *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2016. № 17 (11). С. 723–731.
9. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2016. 440 с.

10. Qiu D., Wang Q., Zhou Y. Steady-state output controllability and output controllability of linear systems. *Computational Intelligence and Industrial Applications.* Wuhan, China : IEEExplore, 2009. P. 147–150.
11. Danhane B., Lohéac J., Jungers M. Contributions to output controllability for Linear Time Varying systems. *IEEE Control Systems Letters*. 2021. No. 6. P. 1064–1069.
12. Lazar M., Lohéac J. Output controllability in a long-time horizon. *Automatica*. 2020. Vol. 113, P. 108762.
13. Dath M., Jouan P. Controllability of linear systems on Heisenberg groups H^n. *International Journal of Control*. 2021. Vol. 94:4. P. 1010–1019.
14. Moreau C. Local Controllability of a Magnetized Purcell's Swimmer. *IEEE Control Systems Letters*. 2019. Vol. 3:3. P. 637–642.
15. Jafarpour S. On Small-Time Local Controllability. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2019. Vol. 58:1. P. 425–446.
16. Vrabel R. Local null controllability of the control-affine nonlinear systems with time-varying disturbances. *European Journal of Control*. 2018. Vol. 40. P. 80–86.
17. Леонтьева В.В., Кондратьева Н.А. Керованість динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень. *Вісник Запорізького національного університету :* збірник наукових статей. *Фізико-математичні науки*. Запоріжжя : ЗНУ. № 2, 2019. С. 90–100.
18. Doḿınguez-Garćıa J.L., Garćıa-Planas M.I. Output controllability and steady-output controllability analysis of fixed speed wind turbine. *5th International Conference on Physics and Control (PhysCon 2011).* Leon, Spain, 5–8 of September of 2011*: proceedings*. St. Petersburg : The Laboratory «Control of Complex Systems», IPME RAS. 2011. P. 1–5.
19. Леонтьєва В.В., Кондрат'єва Н.О., Єлховська Я.А. Ідентифікованість за станом динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень. *Вісник Запорізького національного університету :* збірник наукових статей. *Фізико-математичні науки.* Запоріжжя : ЗНУ. 2020. № 1. С. 46–54.

REFERENCES

1. Novitsky, V.V. (2008). Keruvannya hiroskopichnymy systemamy ta inshi zadachi analitychnoyi mekhaniky [Control of gyroscopic systems and other problems of analytical mechanics]. *Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. Mathematics and its application*. Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Vol. 78 [in Ukrainian].
2. Kirichenko, N.F., Matvienko, V.T. (1996). Optimal'nyj sintez struktur dlya linejnyh sistem upravleniya [Optimal synthesis of structures for linear control systems]. *Problemy upravleniya i informatiki* [Problems of control and informatics]. No. 1, 2, pp. 162–171 [in Russian].
3. Lazarev, Yu.F., Bondar, P.M. (2010). Osnovy teoriyi chutlyvykh elementiv system oriyentatsiyi [Fundamentals of the theory of sensitive elements of orientation systems]. Kyiv: Polytech [in Ukrainian].
4. Leontieva, V.V., Kondratieva, N.A. (2017). Voprosy metodologii analiza, upravleniya, regulirovaniya, identifikatsii i nablyudeniya giroskopicheskikh sistem [Questions about methodology of analysis, control, regulation, identification and observation of gyroscopic systems]. *Visnyk Zaporiz'koho natsional'noho universytetu: zb. nauk. statey. Fizyko-matematychni nauky.* Zaporizhzhya: ZNU, No. 2, pp. 157–169 [in Russian].
5. Merkin, D.R. (1974). Giroskopicheskiye sistemy [Gyroscopic systems]. Moscow: Nauka [in Russian].
6. Chen, C.T. (1999). Linear system theory and design. New York: Oxford University press.
7. Kvakernaak, H., Siwan, R. (1972). Linear Optimal Control Systems. New York: Wiley-interscience.
8. Shen, K., Neusypin, K. A. (2016). Issledovanie kriteriev stepenej nablyudaemosti, upravlyaemosti i identificiruemosti linejnyh dinamicheskih sistem [Study of the Criteria for the Degrees of Observability, Controllability and Identifiability of the Linear Dynamical Systems]. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie* [Mechatronics, Automation, Control]. No. 17 (11), pp. 723–731 [in Russian].
9. Kim, D.P. (2016). Teoriya avtomaticheskogo upravleniya. T. 2. Mnogomernye, nelinejnye, optimal'nye i adaptivnye sistemy [The theory of automatic control. T. 2. Multidimensional nonlinear, optimal and adaptive systems]. Moscow: FIZMATLIT [in Russian].
10. Qiu, D., Wang, Q., Zhou, Y. (2009). Steady-state output controllability and output controllability of linear systems. *Computational Intelligence and Industrial Applications.* Wuhan, China: IEEExplore, pp. 147–150.
11. Danhane, B., Lohéac, J., Jungers, M. (2021). Contributions to output controllability for Linear Time Varying systems. *IEEE Control Systems Letters*, No. 6, pp. 1064–1069.

12. Lazar, M., Lohéac, J. (2020). Output controllability in a long-time horizon. *Automatica*. Vol. 113, pp. 108762.
13. Dath, M., Jouan, P. (2021). Controllability of linear systems on Heisenberg groups H^n. *International Journal of Control*. Vol. 94:4, pp. 1010–1019.
14. Moreau, C. (2019). Local Controllability of a Magnetized Purcell's Swimmer. *IEEE Control Systems Letters*. Vol. 3:3, pp. 637–642.
15. Jafarpour, S. (2019). On Small-Time Local Controllability. *SIAM Journal on Control and Optimization*. Vol. 58:1, pp. 425–446.
16. Vrabel, R. (2018). Local null controllability of the control-affine nonlinear systems with time-varying disturbances. *European Journal of Control*. Vol. 40, pp. 80–86.
17. Leontieva, V.V., Kondratieva, N.A. (2019). Kerovanist' dynamichnoyi systemy z hiroskopichnoyu strukturoyu pry diyi dysypatyvnykh syl ta syl radial'noyi korektsiyi z urakhuvannyam pevnoho neliniynoho zmishanoho vydu zovnishnikh zburen' [Controllability of a dynamical system with a gyroscopic structure under the action of dissipative forces and forces of radial correction with a certain nonlinear external disturbances of mixed type]. *Visnyk Zaporiz'koho natsional'noho universytetu: zb. nauk. statey. Fizyko-matematychni nauky.* Zaporizhzhya: ZNU, No. 2, pp. 90–100 [in Ukrainian].
18. Doḿınguez-Garćıa, J.L., Garćıa-Planas, M.I. (2011). Output controllability and steady-output controllability analysis of fixed speed wind turbine. *5th International Conference on Physics and Control (PhysCon 2011). Leon, Spain, 5–8 of September of 2011: proceedings*. St. Petersburg: The Laboratory «Control of Complex Systems», IPME RAS, pp. 1–5.
19. Leontieva, V.V., Kondratieva, N.A., Yelkhovska, Ya.A. (2020). Identifikovanist' za stanom dinamichnoyi sistemi z giroskopichnoyu strukturoyu pri diyi disipativnih sil ta sil radial'noyi korekciyi z urahuvannyam pevnogo nelinijnogo zmishanogo vidu zovnishnih zburen' [State identifiability of a dynamical system with a gyroscopic structure under the action of dissipative forces and forces of radial correction with a certain nonlinear external disturbances of mixed type]. *Visnyk Zaporiz'koho natsional'noho universytetu: zb. nauk. statey. Fizyko-matematychni nauky.* Zaporizhzhya: ZNU. No. 1, pp. 46–54 [in Ukrainian].