

## ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ВІДНОВЛЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЯКІ МАЮТЬ НЕ БІЛЬШЕ $m$ ВНУТРІШНІХ ЕКСТРЕМУМІВ

**Нечипоренко Н. О.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри прикладної математики  
Національний університет «Запорізька політехніка»  
вул. Жуковського, 64, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0003-3708-9777](https://orcid.org/0000-0003-3708-9777)  
[ninanechi@gmail.com](mailto:ninanechi@gmail.com)*

**Коротунова О. В.**

*кандидат технічних наук, доцент,  
доцент кафедри прикладної математики  
Національний університет «Запорізька політехніка»  
вул. Жуковського, 64, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0002-0883-5550](https://orcid.org/0000-0002-0883-5550)  
[evkor@zp.edu.ua](mailto:evkor@zp.edu.ua)*

**Ключові слова:** функція однієї змінної, відновлення, ізогеометричні властивості, оптимальність за точністю.

Відновлення функції за її експериментальними значеннями, які задані у вузлах регулярної сітки, є класичною задачею теорії апроксимації. Проблемі побудови інтерполяційних сплайнів присвячено велику кількість робіт. Область застосування таких сплайнів обмежена таблицями, що містять точні значення функції, яка інтерполюється. Однак в результаті експериментів, як правило, отримують наближені значення, які можуть не відповідати наявній апріорній інформації про ті чи інші властивості функції. В той же час на практиці часто виникає необхідність у збереженні функцією, що відновлюється, певних властивостей, які можуть бути отримані з апріорних уявлень про перебіг тих чи інших фізичних, економічних, соціальних процесів або явищ, описуваних шуканими функціями. У таких випадках стандартні методи апроксимації сплайнами не завжди дають задовільний розв'язок задачі відновлення функції. Так, наприклад, збереження монотонності та опуклості для інтерполяційних сплайнів вдається досягти лише за додаткових, досить жорстких обмежень на вихідні дані та вузли сітки. Табличні значення повинні відповідати геометричним властивостям функції. В експерименті ж, як правило, реструються «зашумлені» значення функції, які найчастіше не відповідають наявній апріорній інформації. Це означає, що у багатьох випадках необхідним етапом процесу обробки інформації є згладжування.

Таким чином, побудова оптимальних алгоритмів відновлення сіткових функцій, які враховують апріорну інформацію про геометрію відновлюваної функції, є актуальною задачею.

Метою даної роботи є побудова алгоритмів відновлення функцій, що задані своїми наближеними значеннями у вузлах довільної фіксованої сітки і мають задану кількість екстремумів в області визначення. Відновлювальні функції будуються на основі методу квазірішень. Наводяться покрокові алгоритми побудови відновлювальних функцій для вказаного класу функцій. Ці алгоритми дозволяють не тільки зберегти геометричні властивості відновлюваної функції, а й, як свідчать

результати чисельних експериментів, досягти достатньої точності відновлення. Якщо задана точність вхідних даних і відповідний клас функцій обмежений, то наведені алгоритми є оптимальними по порядку точності з константою порядку, що не перевищує 2.

---

## ON ONE PROBLEM OF RECOVERING FUNCTIONS WHICH HAVE NO MORE THAN $m$ INTERNAL EXTREMUMS

**Nechyporenko N. O.**

*Ph.D., Associate Professor,*

*Associate Professor at the Department of Applied Mathematics*

*National University "Zaporizhzhia Polytechnic"*

*Zhukovskogo str., 64, Zaporizhzhia, Ukraine*

*orcid.org/0000-0003-3708-9777*

*ninanechi@gmail.com*

**Korotunova O. V.**

*Ph.D., Associate Professor,*

*Associate Professor at the Department of Applied Mathematics*

*National University "Zaporizhzhia Polytechnic"*

*Zhukovskogo str., 64, Zaporizhzhia, Ukraine*

*orcid.org/0000-0002-0883-5550*

*evkor@zp.edu.ua*

**Key words:** *function of one variable, recovery, isogeometric properties, optimality by accuracy.*

Restoring the function according to its experimental values, which are set at the nodes of a regular grid, is a classic problem of approximation theory. A large number of publications are devoted to the problem of constructing interpolation splines. The scope of such splines is limited to tables containing exact values of the function being interpolated. However, as a result of experiments, as a rule, approximate values are obtained, which may not correspond to the available a priori information about certain properties of the function. At the same time, in practice, there is often a need for the restored function to preserve certain properties that can be obtained from a priori ideas about the course of certain physical, economic, social processes or phenomena described by the sought functions. In such cases, standard spline approximation methods do not always provide a satisfactory solution to the function recovery problem. So, for example, preservation of monotonicity and convexity for interpolation splines can be achieved only with additional, fairly strict restrictions on the initial data and grid nodes. Tabular values must correspond to the geometric properties of the function. In the experiment, as a rule, "noisy" values of the function are registered, which most often do not correspond to the available a priori information. This means that in many cases, smoothing is a necessary step in the information processing process.

Thus, the construction of optimal algorithms for the restoration of grid functions, which take into account a priori information about the geometry of the restored function, is an urgent task.

The purpose of this work is to build algorithms for restoring functions that are given by their approximate values at the nodes of an arbitrary fixed grid and have a given number of extrema in the domain of definition. Restorative functions are built on the basis of the method of quasi-solutions. Step-by-step algorithms for constructing restorative functions for the specified class of functions are presented. These algorithms allow not only to preserve the

geometric properties of the restored function, but also, as evidenced by the results of numerical experiments, to achieve sufficient restoration accuracy. If the specified accuracy of the input data and the corresponding class of functions is limited, then the given algorithms are optimal in order of accuracy with an order constant not exceeding 2.

**Вступ.** Під час обробки різних експериментальних даних однією з основних задач є задача відновлення функцій, які задані таблицями своїх наближених значень. При цьому часто виникає необхідність у збереженні відновлюваною функцією певних властивостей, таких як додатність, монотонність, опуклість, наявність прямолінійних ділянок і т.д. Ці властивості можуть бути отримані з апріорних уявлень про поведінку тих чи інших фізичних, економічних процесів або явищ, які описуються шуканими функціями. Стандартні методи апроксимації сплайнами не завжди дають задовільний розв'язок цієї задачі ізогометричної апроксимації. В даний час є значна кількість робіт (див., наприклад, [1–7]), які присвячені чисельним аспектам апроксимації поліноміальними сплайнами функцій одного невідомого, що пов'язані з локальним успадкуванням сплайном властивостей монотонності та опуклості (узагальненої опуклості, ковипуклості, комонотонності тощо) вихідних даних. Однак збереження монотонності та опуклості для інтерполяційних сплайнів вдається досягти лише при додаткових, досить жорстких обмеженнях на вихідні дані та сітки вузлів (див., наприклад, [2; 5; 7]), табличні значення повинні відповідати геометричним властивостям функції. На жаль, в експерименті реєструються, як правило, «зашумлені» значення функції, які найчастіше не відповідають наявній апріорній інформації. Згладжування, таким чином, у багатьох випадках постає як необхідний етап у процесі обробки інформації. Роботи [8; 9] присвячені побудові ізогометричного сплайну, що згладжує, який враховує апріорну інформацію у вигляді обмежень на значення функції та її похідних на заданих інтервалах. У запропонованій роботі в якості апріорної інформації про геометрію відновлюваної за наближеними даними функції є інформація про кількість внутрішніх екстремумів функції. Таким чином, задача побудови оптимальних алгоритмів відновлення сіткових функцій, які враховують апріорну інформацію про геометрію функції, є актуальною.

**Методи.** Нехай  $K_m[a, b]$ ,  $m \geq 0$ , – множина функцій  $f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , які мають на  $[a, b]$  не більше  $m$  внутрішніх екстремумів.

Уточнимо поняття внутрішнього екстремуму. Нехай  $I$  – деякий інтервал (замкнутий, напіввідкритий, відкритий) відрізка  $[a, b]$ .

Нехай також  $\varphi(x) = C = \text{const} \quad \forall x \in I$  та існують такі  $\alpha, \beta \in [a, b] \setminus I$  (причому,  $\alpha \leq \min_{x \in I} x$ ,  $\beta \geq \max_{x \in I} x$ ), що  $\varphi(x) < C$  або  $\varphi(x) > C \quad \forall x \in [\alpha, \beta] \setminus I$ . Будемо говорити, що число внутрішніх екстремумів функції  $\varphi(x)$  дорівнює мінімальному на  $[a, b]$  числу інтервалів з описаною вище властивістю.

Очевидно, якщо функція  $f(x)$  має  $m$  внутрішніх екстремумів на  $[a, b]$ , то мінімальна кількість інтервалів її монотонності (монотонність може бути несуворою) на  $[a, b]$  дорівнює  $m + 1$ .

Розглянемо задачу відновлення функції  $f(x) \in K_m[a, b]$  за її наближеними значеннями  $f_j$ ,  $j = 1, N$ , у вузлах  $x_j$  довільної фіксованої сітки  $\Delta: \{a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b\}$ .

Як відновлюючи будемо приймати одну з таких функцій:

1) функцію  $S_m(x)$ , яка побудована на основі методу квазірішень, тобто задовольняє умові:

$$\delta_m = \delta(S_m) = \inf_{\varphi \in K_m[a, b]} \max_{1 \leq i \leq N} |\varphi(x_i) - f_i| \quad (1)$$

2) функцію  $\bar{S}_m(x)$ , яка має мінімальну кількість внутрішніх екстремумів на  $[a, b]$  і задовольняє умові

$$\bar{\delta}_m = \max_{1 \leq i \leq N} |\bar{S}_m(x_i) - f_i| \leq \bar{\varepsilon} \quad (2)$$

де  $\bar{\varepsilon}$  – задане дійсне число.

Величини  $\delta_m$  і  $\bar{\delta}_m$  будемо називати відхиленнями відповідно функцій  $S_m(x)$  і  $\bar{S}_m(x)$  від точок  $(x_i, f_i)$ ,  $i = 1, N$ .

З подальших розглядів стане ясно, що вирішення кожної з поставлених задач існує і, власне кажучи, визначається не єдиним чином. Ми збудуємо одне з можливих рішень.

#### Алгоритми відновлення функцій.

Якщо  $S_0(x)$  – неспадна функція, то можна вказати такий покроковий алгоритм її побудови.

#### Алгоритм А.

Крок 1. Покласти  $k = 1$ ,  $p_0 = 0$ .

Крок 2. Знайти  $f_{p_k} = \min_{p_{k-1} + 1 \leq i \leq N} f_i$  та зафіксувати  $p_k$ .

Крок 3. Знайти  $f_{n_k} = \max_{p_{k-1} + 1 \leq i \leq p_k} f_i$ .

Крок 4. Перевірити  $p_k = N$ ? Якщо так, то перейти до кроку 5, інакше збільшити  $k$  на одиницю та перейти до кроку 2.

Крок 5. Покласти  $S_0(x) = \frac{f_{n_i} + f_{p_i}}{2}$ ,  $x \in [x_1, x_{p_i}]$ ,  
 $S_0(x) = \max_{1 \leq i \leq j} \frac{f_{n_i} + f_{p_i}}{2}$ ,  $x \in (x_{p_{j-1}}, x_{p_j}]$ ,  $j = 2, 3, \dots, k$  та  
 закінчити обчислення.

Якщо функція  $S_0(x)$  незростаюча, вона буде-  
 ється аналогічно, лише операції *min* і *max* у наведе-  
 ному алгоритмі слід замінити на операції *max* і  
*min* відповідно.

З'ясувати, чи не зростає чи не спадає шукана  
 функція  $S_0(x)$ , можна таким чином.

Нехай  $f_v = \max_{1 \leq i \leq N} f_i$  і  $f_\mu = \min_{1 \leq i \leq N} f_i$ . Якщо  $x_v < x_\mu$ ,  
 то  $S_0(x)$  – незростаюча функція, в іншому  
 випадку – неспадна. У цьому легко переконатися  
 безпосередньо, обчисливши і порівнявши відхи-  
 лення відповідних функцій, що не зростають і не  
 зменшуються, від точок  $(x_i, f_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$  при при-  
 йнятих припущеннях.

Відповідно до наведеного алгоритму  $A$  відрізок  
 $[a, b]$  можна розбити на інтервали  $I_1 = [x_1, x_{p_1}]$ ,  
 $I_2 = [x_{p_1}, x_{p_2}]$ , ...,  $I_k = [x_{p_{k-1}}, x_N]$ , на кожному з  
 яких функція  $S_0(x)$  є сталою. Максимальне відхи-  
 лення функції  $S_0(x)$  від точок  $(x_i, f_i)$ , де  $x_i \in I_v$ ,  
 $v = \overline{1, k}$ , будемо позначати через  $\delta^v$ .

Отже,  $\delta_0 = \max_{1 \leq v \leq k} \delta^v$ . На кожному з інтервалів  
 $I_v$  існують принаймні два вузли  $x_v^+$ ,  $x_v^-$  сітки  
 $\Delta$ , в яких наближені задані значення шуканої  
 функції рівні відповідно значенням  $S_0(x_v^+) + \delta^v$   
 і  $S_0(x_v^-) - \delta^v$ . При цьому  $x_v^+ < x_v^-$ , якщо  $S_0(x)$   
 неспадна і  $x_v^- < x_v^+$ , якщо  $S_0(x)$  – незростаюча  
 функція.

**Лема 1.** Нехай  $I_{l_1}, I_{l_2}, \dots, I_{l_v}; l_1 < l_2 < \dots < l_v$  – інтер-  
 вали сталості функції  $S_0(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , для яких  
 справедлива умова:  $\delta^{l_i} = \delta_0$ ,  $i = \overline{1, v}$ .

І нехай  $x_{l_r} \in \Delta \cap I_{l_i}$ ,  $r = \overline{1, \mu_i}$ ,  $i = \overline{1, v}$  такі, що

$$x_{l_1} < x_{l_2} < \dots < x_{l_{\mu_i}} \text{ і } f_{l_r} = S_0(x_{l_r}) + (-1)^{\alpha+r} \delta_0, \quad (3)$$

де  $\alpha = -1$ , якщо  $S_0(x)$  неспадна і  $\alpha = 0$ , якщо  
 $S_0(x)$  – незростаюча функція.

Нехай також функція  $\varphi(x) \in K_m [a, b]$  і задо-  
 вольняє умові

$$\max_{1 \leq i \leq N} |\varphi(x_i) - f_i| \leq \delta_0. \quad (4)$$

Тоді функція  $\varphi(x)$  має на  $[a, b]$  не менше

$M = \sum_{i=1}^v \mu_i$  внутрішніх екстремумів, якщо

$l_1 > 1$ ,  $l_v < k$  і виконується умова

$$\max_{i | x_i \in I_j, j | l_v} f_i \geq S_0(x) + \delta_0, \quad \forall x \in I_v \text{ (при } \alpha = -1) \quad (5)$$

або

$$\min_{i | x_i \in I_j, j | l_v} f_i \leq S_0(x) - \delta_0, \quad \forall x \in I_v \text{ (при } \alpha = 0) \quad (6)$$

Вказана кількість  $M$  внутрішніх екстремумів  
 функції  $\varphi(x)$  зменшується щоразу на одиницю, як  
 тільки  $l_1 = 1$  або  $l_v = k$  або не виконується умова  
 (5) чи (6).

**Доведення.** Нехай для визначеності  $S_0(x)$  –  
 неспадна функція і  $\varphi(x)$  така, що має місце (4).  
 Тоді в силу умов (3) для інтервалу  $I_{l_i}$ ,  $1 \leq i < v$ ,  
 при  $l_1 > 1$  маємо:

$$\begin{aligned} \varphi(x_{l_1}) &> S_0(x_{l_1}) = S_i, \\ \varphi(x_{l_2}) &< S_0(x_{l_2}) = S_i, \\ \varphi(x_{l_3}) &> S_0(x_{l_3}) = S_i, \\ &\dots \\ \varphi(x_{l_{\mu_i}}) &< S_0(x_{l_{\mu_i}}) = S_i. \end{aligned} \quad (7)$$

Структура побудованої функції  $S_0(x)$  така, що

$$f_j = \min_{s | x_s \in I_{j-1}} f_s \leq \min_{s | x_s \in I_j} f_s,$$

отже,

$$\varphi(x_j) < S_i. \quad (8)$$

Враховуючи, що  $S_0(x)$  – неспадна функція та  
 $i < v$  маємо:

$$\varphi(x_{l_{i+1}}) > S_0(x_{l_{i+1}}) > S_i. \quad (9)$$

Зі співвідношень (7)-(9) випливає, що на інтер-  
 валі  $[x_j, x_{l_{i+1}}]$  функція  $\varphi(x)$  має щонайменше  $\mu_i$   
 екстремумів.

Якщо  $l_1 = 1$ , то вказати нерівність типу (8)  
 неможливо і з (7) та (9) випливає, що на інтервалі  
 $[x_1, x_{l_2}]$  функція  $\varphi(x)$  має не менше  $\mu_1 - 1$  вну-  
 трішніх екстремумів.

Розглянемо тепер інтервал  $I_v$ . Якщо  $l_v < k$  і  
 має місце (5), то, як і у випадку  $I_{l_i}$ ,  $1 \leq i < v$ , легко  
 встановити співвідношення типу (9) і інтервал  
 $I_v$  в сенсі екстремумів функції  $\varphi(x)$  не відрізня-  
 ється від інтервалів  $I_{l_i}$ ,  $1 < i < v$ . Якщо  $l_v = k$  або  
 не виконується умова (5), то встановити умову  
 типу (9) неможливо і з (7), (8) слід, що функція  
 $\varphi(x)$  на  $(x_j, x_N]$  має не менше  $\mu_v - 1$  внутрішніх  
 екстремумів.

Підсумувавши кількість внутрішніх екстрему-  
 мів за всіма інтервалами  $I_{l_i}$ ,  $i = \overline{1, v}$ , отримаємо  
 необхідне.

Аналогічно доводиться випадок незростаючої  
 функції  $S_0(x)$ .

Лема доведена.

Надалі через  $x_s$ ,  $s = \overline{1, M}$ ,  $\bar{x}_i < \bar{x}_{i+1}$ , позначати-  
 мемо точки  $x_{l_j}$ , які задовольняють умовам леми 1  
 і нерівностям типу (7) – (9).

**Лема 2.** Існує така функція  $\varphi(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , для якої справедлива умова (4) і кількість внутрішніх екстремумів дорівнює значенню  $M$ , яке визначається лемою 1.

**Доведення.** Нехай  $I_1 = [x_1, x_1]$ ,  $I_2 = [x_1, x_2]$ , ...,  $I_{M+1} = [x_M, x_N]$  і  $\bar{f}_v$  – задане наближене значення функції у вузлі  $x_v \in \Delta$ .

(Зазначимо, що це позначення будемо використовувати і надалі).

Нехай  $\psi(x) = \psi_s(x)$ ,  $x \in I_s$ ,  $s = \overline{1, M+1}$ , (10)

де  $\psi_s(x)$  – неспадна функція, якщо  $\bar{x}_s$  задовольняє умову

$$\begin{aligned} \bar{f}_s &= S_0(\bar{x}_s) + \delta_0, \text{ при } 1 \leq s \leq M, \\ \bar{f}_{s-1} &= S_0(\bar{x}_{s-1}) - \delta_0, \text{ при } s = M+1 \end{aligned}$$

і незростаюча в іншому випадку; причому  $\psi_s(x)$  така, що

$$\max_{i|x_i \in I_s} |\psi_s(x_i) - f_i| = \inf_{\alpha_s(x) | x_i \in I_s} \max |\alpha_s(x_i) - f_i|.$$

У цій рівності нижня грань береться за усіма неспадними або незростаючими функціями. Очевидно,  $\psi_{s-1}(\bar{x}_{s-1}) = \psi_s(\bar{x}_{s-1})$ ,  $s = \overline{2, M+1}$ .

Згідно з визначенням, функція  $\psi(x)$  має не більше  $M$  внутрішніх екстремумів.

Покажемо, що

$$\delta(\psi) = \max_{1 \leq i \leq N} |\psi(x_i) - f_i| < \delta_0. \quad (11)$$

Розглянемо довільний інтервал  $I_k = [x_{k-1}, x_k] \equiv [x_{k_1}, x_{k_2}]$ . Нехай у цьому інтервалі  $\psi(x) = \psi_k(x)$  – незростаюча функція. Тоді в силу умови (3)

$$f_{k_1} = \max_{k_1 \leq i \leq k_2} f_i \text{ та } f_{k_2} = \min_{k_1 \leq i \leq k_2} f_i.$$

Враховуючи (3), неважко встановити, що інтервал  $I_k$  можна розбити деякою точкою  $x$  на дві частини так, що  $x_i < x$  і  $x_j > x$ , як тільки  $f_i = f_{k_1}$  і  $f_j = f_{k_2}$  відповідно. Звідси і зі способу побудови  $\psi_k(x)$  безпосередньо випливає (11) для  $x_i \in I_k$ .

Аналогічно можна розглянути випадок неспадної функції  $\psi_k(x)$  і цим встановити справедливість (11).

Відповідно до лем 1 та визначення функції  $\psi(x)$  ця функція має рівно  $M$  екстремумів.

Лема доведена.

Якщо  $S_0(x)$  має у точці  $x_j \in \Delta$  максимальне відхилення, яке дорівнює  $\delta_0$ , то, очевидно,  $\psi(x)$  у цій точці набуває екстремального значення, яке дорівнює  $f_j$ . Це впливає безпосередньо із способу побудови  $\psi(x)$ .

**Теорема 1.** Функція  $\psi(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , яка визначається формулою (10), задовольняє співвідношенню

$$\max_{1 \leq i \leq N} |\psi(x_i) - f_i| = \inf_{\beta \in K_m [a, b]} \max_{1 \leq i \leq N} |\beta(x_i) - f_i|.$$

**Доведення.** Нехай існує функція  $\varphi(x) \in K_m [a, b]$ , така що

$$\max_{1 \leq i \leq N} |\varphi(x_i) - f_i| < \max_{1 \leq i \leq N} |\psi(x_i) - f_i|, \quad (12)$$

і нехай максимальне відхилення  $\delta_M = \max_{1 \leq i \leq N} |\psi(x_i) - f_i|$  досягається на інтервалах  $I_{k_1}, I_{k_2}, \dots, I_{k_p}$ .

Розглянемо довільний інтервал  $I_{k_i} = [x_{s_1}, x_{s_2}]$ , на якому функція  $\psi(x)$  не спадає. З визначення  $\psi(x)$  безпосередньо випливає, що неспадна функція з мінімальним відхиленням на  $[x_{k_{i-1}}, x_{k_i}]$  збігається з  $\psi(x)$  на цьому відрізку.

Функція  $\psi(x)$ ,  $x \in I_{k_i}$  – кусково-постійна і існує, принаймні дві точки  $x_{v_1}$  і  $x_{v_2}$ , які належать  $I_{k_i} \cap \Delta$  такі, що

$$f_{v_1} - \psi(x_{v_1}) = \psi(x_{v_2}) - f_{v_2} = \delta_M.$$

Звідси з урахуванням (12)

$$\varphi(x_{v_1}) > \psi(x_{v_1}) \text{ та } \varphi(x_{v_2}) < \psi(x_{v_2}) = \psi(x_{v_1}).$$

Оскільки  $f_{v_1} \leq f_{s_2}$  і  $f_{v_2} \geq f_{s_1}$ , то

$$\varphi(x_{s_1}) < \psi(x_{v_1}) \text{ і } \varphi(x_{s_2}) > \psi(x_{v_1}).$$

Отже, функція  $\varphi(x)$  повинна мати на  $I_{k_i}$  принаймні два внутрішні екстремуми. Аналогічне твердження можна отримати, якщо  $\psi(x)$ ,  $x \in I_{k_i}$ , не зростає.

Із способу побудови  $\psi(x)$  випливають співвідношення:

$$\begin{aligned} \left| \bar{f}_k - \bar{f}_{k-1} \right| &\geq 2\delta_0, \quad k = \overline{2, M}, \\ \left| \bar{f}_1 - \bar{f}_1 \right| &\geq 2\delta_0, \quad \left| \bar{f}_M - \bar{f}_N \right| \geq 2\delta_0. \end{aligned}$$

Звідси, враховуючи (11) і (12), приходимо до висновку, що функція  $\varphi(x)$  повинна мати в околі точки  $x_k$  екстремум (максимум, якщо  $\psi(x)$  не спадає на  $I_{k-1}$ , і мінімум, якщо  $\psi(x)$  не зростає на  $I_{k-1}$ ). Таким чином, кількість внутрішніх екстремумів функції  $\varphi(x)$  виявляється більшою, ніж  $M$ . Отримане протиріччя доводить теорему.

Нехай побудовано функцію  $S_p(x)$ ,  $x \in [a, b]$ .

Відповідно до визначення (1) ця функція має в області визначення не більше  $p$  внутрішніх екстремумів. Як і раніше, нехай

$$I_1 = [x_1, x_1], \quad I_2 = [x_1, x_2], \quad \dots, \quad I_{s+1} = [x_s, x_N],$$

$x_i \in \Delta$ ,  $s \leq p$ , – мінімальна кількість інтервалів на

відрізку  $[a, b]$ , на кожному з яких функція  $S_p(x)$  не спадає або не зростає.

Припустимо, що структура функції  $S_p(x)$  така, що

$$\max_{i|x_i \in I_r} f_i = \bar{f}_r, 1 \leq r \leq s, \min_{i|x_i \in I_r} f_i = \bar{f}_{r-1}, 1 < r \leq s+1, \quad (13)$$

якщо функція  $S_p(x)$ ,  $x \in I_r$ , неспадна, і

$$\min_{i|x_i \in I_r} f_i = \bar{f}_r, 1 \leq r \leq s, \max_{i|x_i \in I_r} f_i = \bar{f}_{r-1}, 1 < r \leq s+1, \quad (14)$$

якщо функція  $S_p(x)$ ,  $x \in I_r$ , незростаюча.

Припустимо також, що  $s = p$ .

Очевидно, зазначені припущення мають місце для функцій  $S_0(x)$  та  $\psi(x)$ ,  $x \in [a, b]$  (10).

Нехай  $\varphi(x)$ ,  $x \in [a, b]$  – деяка функція, для якої справедлива умова

$$\max_{1 \leq i \leq N} |\varphi(x_i) - f_i| < \max_{1 \leq i \leq N} |S_p(x_i) - f_i| = \delta_p \quad (15)$$

і  $I_r$  – один із інтервалів монотонності функції  $S_p(x)$ , на якому досягається відхилення, що дорівнює  $\delta_p$ . Очевидно, для такого інтервалу справедливі твердження наведених лем 1 і 2 та теореми 1. Для визначеності вважатимемо, що  $S_p(x)$  на інтервалі  $I_r$  не спадає. Тоді існує принаймні дві точки  $x^+, x^- \in I_r \cap \Delta$ ,  $x^+ < x^-$ , такі, що

$$S_p(x^+) = S_p(x^-), f^+ - S_p(x^+) = S_p(x^-) - f^- = \delta_p,$$

де  $f^+$  і  $f^-$  – задані наближені значення шуканої функції в точках  $x^+$  і  $x^-$  відповідно. Отже, з огляду на (15) отримаємо

$$\varphi(x^+) > S_p(x^+), \varphi(x^-) < S_p(x^-) = S_p(x^+). \quad (16)$$

Крім того, відповідно до припущення про структуру функції  $S_p(x)$

$$\varphi(\bar{x}_r) > S_p(x^-). \quad (17)$$

Розглянемо тепер інтервал  $I_{r+1}$ , на якому  $S_p(x)$  не зростає. Якщо  $\bar{f}_{r+1} \leq \bar{f}_{r-1}$ , то із (15) випливає

$$\varphi(\bar{x}_r) > \varphi(\bar{x}_{r+1}). \quad (18)$$

Якщо  $\bar{f}_{r+1} > \bar{f}_{r-1}$ , то через припущення  $s = p$  маємо  $\bar{f}_r - \bar{f}_{r+1} > 2\delta_p$  і тому (18) також справедливо. З нерівностей (17) і (18) випливає, що в околі точки  $x_r$  має бути внутрішній екстремум (максимум) функції  $\varphi(x)$ .

У такий же спосіб можна розглянути випадок, коли  $S_p(x)$  не зростає на інтервалі  $I_r$ .

З вищезазначеного випливає, що кількість внутрішніх екстремумів функції  $\varphi(x)$  обмежена величиною  $s + t$ , де  $t$  – кількість внутрішніх екстремумів на тих інтервалах монотонності функції

$S_p(x)$ , на яких досягається відхилення, що дорівнює  $\delta_p$ .

Аналогічно доведенню леми 2 можна показати, що існує функція, яка має вказану кількість  $s + t$  внутрішніх екстремумів і відхилення менше, ніж  $\delta_p$ .

Крім того, зафіксувавши точки  $\bar{x}_i$ ,  $i = \overline{1, s}$ , і точки  $x_j \in \Delta$ , в яких відхилення  $|S_p(x_j) - f_j| = \delta_p$  і розташувавши їх у зростаючому порядку, можна розбити відрізок  $[a, b]$  на інтервали  $I_1, I_2, \dots, I_{s+t+1}$ , які аналогічні зазначеним у доказі леми 2 і аналогічно функції  $\psi(x)$  (10) може бути побудована функція  $\gamma(x)$ , інтервали незростання та неспадання якої чергуються і

$$\max_{i|x_i \in \Delta \cap I_j} |f_i - \gamma(x_i)| = \inf_{\alpha_j(x)} \max_{i|x_i \in \Delta \cap I_j} |f_i - \alpha_j(x_i)|, \quad j = \overline{1, s+t+1},$$

де нижня грань береться за всіма неспадними або незростаючими функціями.

Як і при доведенні теореми 1, можна показати, що на такій функції досягається мінімальне відхилення при обраному числі екстремумів, тобто  $S_{s+t}(x) = \gamma(x)$ . Структура функції  $S_{s+t}(x)$  така сама, як і функції  $\psi(x)$  (10) і вона задовольняє умовам типу (13) і (14).

Ці результати дають можливість вказати такі покрокові алгоритми  $B$  та  $C$  побудови функцій  $S_m(x)$  та  $S_n(x)$  відповідно.

**Алгоритм B.**

Крок 1. Покласти  $k = 0$ ,  $X_k = \{x_1, x_N\}$ .

Крок 2. Побудувати функцію  $S_0(x)$ , покласти  $\psi(x) = S_0(x)$ ,  $x \in [a, b]$ .

Крок 3. Визначити  $\delta_k = \max_{1 \leq i \leq N} |f_i - S_k(x_i)|$  та зафіксувати  $L_1, L_2, \dots, L_n$  – інтервали сталості  $S_k(x)$ .

Крок 4. Визначити множину  $R = \{x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_s}\}$ ,  $r_1 < r_2 < \dots < r_s$ , де

$x_{r_i}$  – вузли сітки  $\Delta$ , для яких виконуються умови:

$$|f_{r_i} - S_k(x_{r_i})| = \delta_k, i = \overline{1, s},$$

$$f_{r_i} - S_k(x_{r_i}) = S_k(x_{r_{i+1}}) - f_{r_{i+1}}, i = \overline{1, s-1}.$$

Крок 5. Покласти  $M = k + s$ .

Крок 6. Покласти  $M = M - 1$  та зафіксувати множину  $R = R \setminus x_1$ , якщо  $x_{r_1} \in L_1$ .

Крок 7. Покласти  $M = M - 1$  та зафіксувати множину  $R = R \setminus x_{r_s}$ , якщо  $x_{r_s} \in L_n$  або не виконуються умова

$$\max_{i > r_s} f_i \geq S_k(x_{r_s}) + \delta_k \quad (\text{якщо } S_k(x) \text{ не спадає на } [x_{r_{s-1}}, x_{r_s}])$$

або умова  $\min_{i>r_s} f_i \leq S_k(x_{r_s}) - \delta_k$  (якщо  $S_k(x)$  не зростає на  $[x_{r_{s-1}}, x_{r_s}]$ ).

Крок 8. Перевірити  $M > m$ ? Якщо так, то покласти  $S_m(x) \equiv \psi(x)$ ,  $x \in [a, b]$  та закінчити обчислення.

Крок 9. Визначити множину  $X_M = X_k \cup R$  та розташувати її елементи в порядку зростання:

$$X_M = \{x_1, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_M, x_N\}.$$

Крок 10. Зафіксувати множини

$$I_1 = [x_1, \bar{x}_1], I_2 = [\bar{x}_1, \bar{x}_2], \dots, I_{M+1} = [\bar{x}_M, x_N].$$

Крок 11. Покласти  $\psi(x) \equiv \psi_s(x)$ ,  $x \in I_s$ ,  $s = \overline{1, M+1}$ , де  $\psi_s(x)$  – неспадна функція, якщо

$$\bar{f}_s = S_k(\bar{x}_s) + \delta_k \text{ при } 1 \leq s \leq M,$$

$$\bar{f}_{s-1} = S_k(\bar{x}_{s-1}) - \delta_k \text{ при } s = M+1,$$

незростаюча в іншому випадку і для якої

$$\max_{i|x_i \in I_s} |\psi_s(x_i) - f_i| = \inf_{\alpha_s(x) | x_i \in I_s} \max |\alpha_s(x_i) - f_i|,$$

нижня грань береться по всіх функціях, що не спадають або не зростають.

Крок 12. Покласти  $k = M$ ,  $S_k(x) \equiv \psi(x)$ ,  $x \in [a, b]$  та перейти до кроку 3.

**Алгоритм С.**

Крок 1. Виконати кроки 1,2 алгоритму В.

Крок 2. Перевірити:  $\max_{1 \leq i \leq N} |S_k(x_i) - f_i| \leq \varepsilon$ ?

Якщо так, покласти  $\bar{S}_m(x) \equiv S_k(x)$ ,  $x \in [a, b]$  та закінчити обчислення.

Крок 3. Виконати кроки 3-7 та 9-11 алгоритму В.

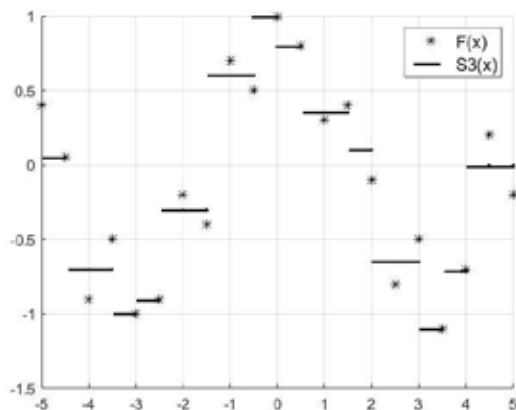
Крок 4. Покласти  $k = M$ ,  $S_k(x) \equiv \psi(x)$  та перейти до кроку 2.

Іноді на практиці може виникнути необхідність у тому, щоб відновлююча функція, яка є розв’язанням задачі (1) або (2), мала неперервну першу похідну. По точкам  $(x_i, S_m(x_i))$  або  $(x_i, \bar{S}_m(x_i))$ ,  $i = \overline{1, N}$  шукану відновлюючу функцію можна отримати за допомогою інтерполяційних сплайнів, що зберігають монотоність [1;2;7]. Очевидно, що у цій функції збережеться величина відхилення  $\delta_m$  або  $\bar{\delta}_m$ .

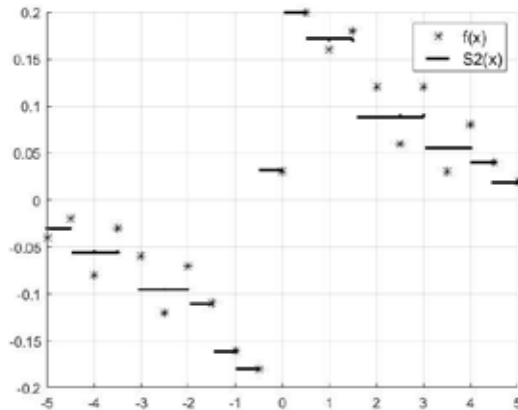
**Результати.** Опишемо деякі з проведених чисельних експериментів відновлення функцій. Нехай функція  $f(x)$  належить класу функцій  $K_m[a, b]$ . Вхідна інформація для розв’язання задачі відновлення формувалася в такий спосіб. На відрізку  $[a, b]$  вибиралася рівномірна з кроком  $h$  сітка  $x_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . На цій сітці обчислювалися значення функції  $f(x_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , на які потім накладався деякий вектор помилок  $\delta_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  і в якості вихідних даних використовувалися  $y_i = f(x_i) + \delta_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . При цьому величини  $\delta_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  є рівномірно розподіленими випадковими величинами.

В якості прикладів розглядалися, наприклад, такі:

$$f_1(x) = \cos x, x \in [-5; 5], h = 0,5 \text{ і } f_2(x) = \frac{x}{1+5x^2}, x \in [-5; 5], h = 0,5.$$



а)



б)

**Рис. 1. Відновлення функцій: а)  $f_1(x) = \cos x$ ; б)  $f_2(x) = \frac{x}{1+5x^2}$**

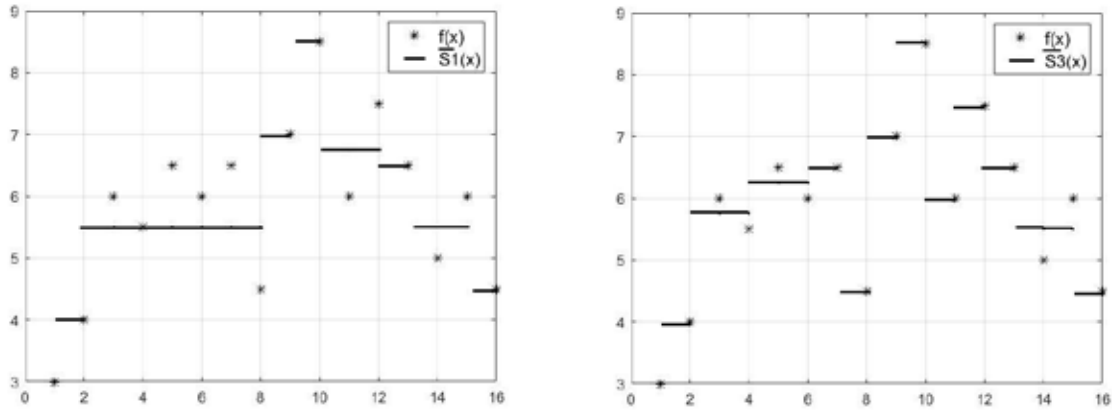


Рис. 2. Відновлення функції  $f_3(x)$  на класах: а)  $K_1 [0,16]$ ; б)  $K_3 [0,16]$

При цьому  $\delta = \max_{1 \leq i \leq N} \delta_i$  для функції  $f_1(x)$  становило  $0,49 \cdot \max_{1 \leq i \leq N} |f_1(x_i)|$ , а для функції  $f_2(x) - 0,27 \cdot \max_{1 \leq i \leq N} |f_2(x_i)|$ . З використанням алгоритму В функція  $f_1(x)$  відновлювалась на класі  $K_3 [-5,5]$ , а функція  $f_2(x)$  на класі  $K_2 [-5,5]$ .

На рис. 1 наведені графіки відновлених функцій  $S_3(x)$  і  $S_2(x)$  відповідно.

Аналіз результатів показує, що відновлення функції  $f_1(x)$  за допомогою функції  $S_3(x)$  дозволяє зменшити відносну похибку в вузлах з 49% до 26%, а відновлення функції  $f_2(x)$  за допомогою функції  $S_2(x)$  – з 27% до 16%. При цьому зберігається апріорна інформація про кількість внутрішніх екстремумів кожної функції.

Розглядалась також задача відновлення функції  $f_3(x)$ , яка задана таблицею своїх наближених значень:

$x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$y_i$	3	4	6	5.5	6.5	6	6.5	4.5	7	8.5	6	7.5	6.5	5	6	4.5

Передбачалося відомим, що максимальна абсолютна похибка вихідних даних у вузлах не перевищує  $\varepsilon = 1$ . Згідно з алгоритмом С визначено мінімальну кількість екстремумів відновлюючої функції, при якій похибка відновлення у вузлах не перевищує заданого  $\varepsilon$ .

На рис. 2 наведені графіки відновлених функцій  $S_1(x)$  і  $S_3(x)$ , що мають один і три екстремуми відповідно.

Відновлення функцією  $S_1(x)$  (з одним екстремумом) не забезпечує задану точність. Необхідна точність  $\varepsilon$  досягається при відновленні функцією  $S_3(x)$  (з трьома екстремумами) і тому немає потреби у подальших побудовах.

Відновлені функції є кусково-постійними. Даний етап відновлення можна розглядати як попередній етап для подальшого застосування інтерполяційних ізогеометричних сплайнів, що володіють необхідною гладкістю.

**Висновки.** У статті наведено алгоритми відновлення функції  $f(x)$ , що задана своїми наближеними значеннями у вузлах довільної фіксованої сітки і має задану кількість екстремумів в області визначення. В якості відновлюючої приймається функція, яка побудована на основі методу квазірішень. Ці алгоритми дозволяють не тільки зберегти ізогеометричні властивості відновленої функції  $f(x)$ , а й, як свідчать результати чисельних експериментів, досягти достатньої точності відновлення. Таке згладжування може бути використане для обробки експериментальних даних як препроцесор для подальшого застосування інтерполяційних ізогеометричних сплайнів. Зауважимо також, якщо задана точність  $\varepsilon$  вхідних даних  $f(x_i)$ ,  $i = 1, N$  і відповідний клас функцій обмежений, то наведені алгоритми є оптимальними по порядку точності з константою порядку, що не перевищує 2.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Kvasov, V. I. Methods of Shape-Preserving Spline Approximation. World Scientific. Singapore., 2000.
2. Kvasov, V. I. Monotone and convex interpolation bay weighted cubic splines. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2013.
3. Нечипоренко Н.А. О равномерном восстановлении функций, имеющих не более двух точек перегиба. *Вісник ЗНУ. Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 165–173.



4. N. C. Gabrielides, N. S. Sapidis. «C sign, monotonicity and convexity preserving Hermite polynomial splines of variable degree» *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 343 (2018). P. 662–707.
5. Yu. S. Volkov, V. V. Bogdanov, V. L. Miroshnichenko, V. T. Shevaldin, “Shape-Preserving Interpolation by Cubic Splines”, *Math. Notes*. 88:6 (2010). P. 798–805.
6. V. V. Bogdanov, Yu. S. Volkov, “Shape-preservation conditions for cubic spline interpolation”. *Siberian Adv. Math.* 29:4 (2019). P. 231–262.
7. Yu. N. Subbotin, “Inheritance of monotonicity and convexity in local approximations”. *Comput. Math. Math. Phys.* 33:7 (1993). P. 879–884.
8. Березовский М.В., Воскобойников Ю.Е. Изогеометрические сглаживающие сплайны. *Научный вестник НГТУ*. 1999. № 2(7). С. 3–13.
9. Березовский М.В. Построение сплайнов с заданной геометрией. *Труды НГАСУ*. 2003. Т. 6. № 6 (27). С. 27–31.

#### REFERENCES

1. Kvasov, V. I. (2000). *Methods of Shape-Preserving Spline Approximation*. World Scientific. Singapore.
2. Kvasov, V. I. (2013). Monotone and convex interpolation by weighted cubic splines. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 53. № 10, pp. 1428-1439.
3. Nechyporenko, N.A. & Korotunova, E.V. (2016). O ravnomernom vosstanovlenii funktsiy, imeyushchikh ne boleye dvukh tochek peregiba [On uniform restoration of functions which have no more than two points of inflection]. *Visnyk ZNU. Fyzyko-matematychni nauky*, vol. 1, pp. 165-173.
4. Gabrielides, N.C. & Sapidis, N.S. (2018). C sign, monotonicity and convexity preserving Hermite polynomial splines of variable degree. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 343, pp. 662-707.
5. Volkov, Yu. S., Bogdanov, V. V., Miroshnichenko, V. L. & Shevaldin, V. T. (2010). Shape-Preserving Interpolation by Cubic Splines. *Math. Notes*, 88:6, pp.798-805.
6. Bogdanov, V. V. & Volkov, Yu. S. (2019). Shape-preservation conditions for cubic spline interpolation. *Siberian Adv. Math*, 29:4, pp.231-262.
7. Subbotin, Yu. N. (1993). Inheritance of monotonicity and convexity in local approximations. *Comput. Math. Math. Phys.* 33:7, pp. 879-884.
8. Berezovsky, M.V. & Voskoboinikov, Yu. E. (1999). Izogeometricheskiye sglazhivayushchiye splayny [Isogeometric smoothing splines]. *Nauchnyy vestnik NGTU*, vol. 2 (7), pp. 3-13.
9. Berezovsky, M.V. (2003). Postroyeniye splaynov s zadannoy geometriyey [Construction of splines with given geometry]. *Trudy NGASU*, tom 6, vol. 6(27), pp. 27-31.