

УДК 539.3  
DOI <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2022-2-03>

## ЕФЕКТИВНІ ПРУЖНІ СТАЛІ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТУ ІЗ ПОРИСТОЮ МАТРИЦЕЮ ПРИ ПОВЗДОВЖНЬОМУ РОЗТЯГНЕННІ

**Пожуєв В. І.**

*доктор фізико-математичних наук, професор,  
професор кафедри механіки  
Національний університет «Запорізька політехніка»  
вул. Жуковського, 64, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0002-9163-7888](https://orcid.org/0000-0002-9163-7888)  
[pozhuevvi@gmail.com](mailto:pozhuevvi@gmail.com)*

**Плечун В. В.**

*аспірант математичного факультету  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0002-3810-3916](https://orcid.org/0000-0002-3810-3916)  
[valeria.gashenko@gmail.com](mailto:valeria.gashenko@gmail.com)*

**Спиця О. Г.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри загальної математики  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0002-7150-7736](https://orcid.org/0000-0002-7150-7736)  
[spytso.o.g@gmail.com](mailto:spytso.o.g@gmail.com)*

**Кончинська Є. О.**

*магістр математичного факультету  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0003-2883-013X](https://orcid.org/0000-0003-2883-013X)  
[liza.zajtseva@gmail.com](mailto:liza.zajtseva@gmail.com)*

**Ключові слова:** *волокнистий композит, пориста матриця, ефективні характеристики, трансропний матеріал, гомогенізація, напруження, деформації.*

У статті розглядається проблема математичного моделювання механічних характеристик неоднорідного матеріалу. На основі методу представницького об'ємного елемента знайдено аналітичні співвідношення для ефективних поздовжнього модуля пружності та коефіцієнта Пуассона волокнистого композиційного матеріалу із пористою матрицею. Передбачалося, що пористий матеріал матриці є ізотропним, а матеріал волокна – трансропним. Схема армування композиційного матеріалу є гексагональною. Згідно з процедурою гомогенізації неоднорідний матеріал моделюється однорідним, механічні характеристики якого залежать від властивостей складових. Із масиву композиційного матеріалу виокремлюється представницький об'ємний елемент – волокно із оточуючою його матрицею гексагональної форми. Гексагональна комірка апроксимується циліндричною. Отримана циліндрична комірка складається із двох коаксialних циліндрів – суцільного, що моделює волокна, та порожнистого, що моделює

матрицю. Для отримання ефективного поєздовжнього модуля пружності розглядається дві вісесиметричні задачі для циліндричної комірки. Перша про сумісне поєздовжнє деформування пористої ізотропної матриці та трансропного волокна. Для моделювання пористих властивостей використано відомі моделі пористого матеріалу, отримані методом самоузгодження для пор сферичної форми. На межі розділу матриці та волокна передбачається ідеальне зчеплення, відсутність стрибка радіальних переміщень та напружень. В результаті маємо усі характеристики напружено-деформованого стану для такої складеної циліндричної комірки. Розв'язуємо аналогічну крайову задачу для суцільної циліндричної комірки, що моделює гомогенізований трансропний матеріал, з невідомими пружними характеристиками. Порівняння осьових переміщень точок обох циліндричних комірок дозволяє отримати аналітичні співвідношення для ефективних поєздовжнього модуля пружності та коефіцієнта Пуассона волокнистого композиту як функцію пружних характеристик матеріалу матриці, матеріалу волокна, пористості матриці та об'ємного вмісту волокна у композиті. За допомогою отриманих аналітичних співвідношень проаналізовано вплив пористості на ефективні пружні характеристики композиційного матеріалу.

---

## EFFECTIVE ELASTIC CONSTANTS OF A FIBER COMPOSITE WITH POROUS MATRIX IN LONGITUDINAL STRETCH

**Pozhuev V. I.**

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,  
Professor at the Department of Mechanics  
Zaporizhzhia Polytechnic National University  
Zhukovskoho str., 64, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-5284-4502  
pozhuevvi@gmail.com*

**Plechun V. V.**

*Postgraduate Student of the Faculty of Mathematics  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-3810-3916  
valeria.gashenko@gmail.com*

**Spytsia O. G.**

*PhD, Associate Professor,  
Associate Professor at thr Department of General Mathematics  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-7150-7736  
spytsa.o.g@gmail.com*

**Konchynska E. O.**

*Master's Student of the Faculty of Mathematics*

*Zaporizhzhia National University*

*Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine*

*orcid.org/0000-0003-2883-013X*

*liza.zajtseva@gmail.com*

**Key words:** *fiber composite, porous matrix, effective characteristics, transtropic material, homogenization, stresses, deformations.*

The problem of mathematical modeling of mechanics characteristics inhomogeneous material's have been considered in the article. On based of the representative method of volumetric element has been found the analytical relations for the effective longitudinal modulus of elasticity and Poisson's ratio of a fibrous composite material with a porous matrix. Has been assumed that the porous material matrix's is isotropic and the fiber material is transtropic.

The scheme of reinforcement of the composite material is hexagonal. According to the homogenization procedure, the inhomogeneous material is modeled homogeneous, the mechanical characteristics of which depend on the properties of the components. From the array of composite material stands out a representative volumetric element – a fiber with a surrounding matrix of hexagonal shape. The hexagonal cell is approximated by a cylindrical one. The resulting cylindrical cell consists of two coaxial cylinders – solid, which modeling the fibers, and hollow, which modeling the matrix.

To obtain an effective longitudinal modulus of elasticity, two axisymmetric problems for a cylindrical cell have been considered. The first one is about the compatible longitudinal deformation of the porous isotropic matrix and the transtropic fiber. To model the porous properties has been used the known models of porous material, which have been obtained by the method of self-matching for pores of spherical shape.

At the interface between the matrix and the fiber has been assumed perfect adhesion, no leaps of radial displacements and stresses. As a result, has been had all the characteristics of the stress-strain state for such a folded cylindrical cell. Has been solved a similar boundary value problem for a solid cylindrical cell modeling a homogenized transtropic material with unknown elastic characteristics.

Comparing the axial displacements of the points of both cylindrical cells allows to obtain analytical relations for the effective elastic longitudinal modulus and Poisson's ratio of fibrous composite as a function of elastic characteristics of matrix material, material of fiber, matrix porosity and volumetric fiber content in a composite. The influence of porosity on the effective elastic characteristics of the composite material has been analyzed with the help of the obtained analytical relations.

**Вступ.** Посилення вимог до конструкційних матеріалів приводить до необхідності створення нових видів матеріалів. Однією із сучасних тенденцій є розробка композиційних матеріалів. Основними напрямками удосконалення матеріалів є такі властивості, як міцність, теплопровідність, електромагнітні характеристики тощо. Завдяки комбінації різних матеріалів у композиті можна отримати матеріал із задалегідь визначеними характеристиками. Так, для збільшення міцності доцільно використовувати високомодульні армуючі матеріали, для зменшення теплопровідності перспективним є застосування пористих матриць. На стадії проектування значну економію як матеріальних, так і людських ресурсів забезпечує

використання математичних моделей створюваних матеріалів. Враховуючи велику кількість пор у матриці та волокон у композиті, створити математичну модель, яка б описувала кожен пору та волокно у композиті, практично дуже складно, як і використовувати її у подальшому. Тому перспективним є представлення неоднорідних матеріалів однорідними, властивості яких залежать від властивостей складових частин неоднорідного матеріалу. Така процедура називається гомогенізацією, а механічні характеристики гомогенізованого однорідного матеріалу – ефективними характеристиками. При розробці волокнистих композитів із пористими матрицями виникає необхідність у моделюванні пористого матері-

алу, а саме врахуванні форми, розмірів та розташування пор у матеріалі. Так само математична модель взаємодії матриці та волокна потребує врахування розмірів та форми волокон, їх розташування у композиті, умовах контактної взаємодії на межі «матриця-волокно».

Одними із найпоширеніших методів отримання ефективних механічних характеристик пористого матеріалу є метод самоузгодження [1], який було використано для ізотропного матеріалу із порами сферичної, голкоподібної та дискової форм, та варіаційний метод Хашина-Штрікмана [1] для ізотропних матеріалів із порами довільної форми.

На теперішній час основною тенденцією при гомогенізації композитів є врахування як можна більшої кількості властивостей складових у гомогенізованій моделі. Однією із суттєвих властивостей, що впливає на механічні характеристики композита, є анізотропія властивостей компонентів композиту, особливо армуючих волокон. У монографії [2] наведено отримані на основі дослідження представницького об'ємного елемента ефективні пружні характеристики для волокнистого композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропними компонентами. Для таких матеріалів, як гумокорд, актуальним є врахування в'язкопружних властивостей матеріалів при гомогенізації. У роботі [3] методом представницького об'ємного елемента отримано ефективні механічні характеристики композиційного матеріалу із трансверсально-ізотропними пружними волокнами та в'язкопружною матрицею, що моделюється на основі спадкової теорії Больцмана-Вольтерра. Вплив трансверсально-ізотропних порожнистих волокон на ефективні механічні характеристики композиційного матеріалу розглянуто у монографії [4]. У роботі [5] на основі аналітичної методики визначено ефективні пружні константи односпрямованих епоксидних вуглепластиків. На основі моделі кусково-однорідного тіла із використанням дворівневої каркасної теорії проведено дослідження односпрямовано-, перехресно- та триортогонально-армованих волокнистих композитів [6]. З використанням програмного комплексу ANSYS на основі методу скінченних елементів визначено напружено-деформований стан односпрямованого склопластику із урахуванням міжфазного шару та при його відсутності [7]. В роботі [8] запропоновано дворівневу гомогенізацію трикомпонентного матеріалу, згідно із яким волокно із міжфазним шаром замінюється на ефективні композитні волокна, які характеризуються еквівалентними модулями пружності.

Ціллю статті є отримання ефективних пружних сталих композиційного матеріалу із порожнистою пружною матрицею та трансверсально-ізотроп-

ним пружним волокном методом представницького об'ємного елемента.

**Постановка задачі.** Для математичного моделювання пористості матеріалу матриці скористаємося залежностями, що виражають залежність модуля зсуву  $G(p)$  та об'ємного модуля  $K(p)$  ізотропного пористого матеріалу від відповідних модулів пружності  $G(0)$  і  $K(0)$  непористого матеріалу та відносної щільності пористого матеріалу:  $\rho = 1 - p$ , де  $p$  – пористість. Метод самоузгодження для пор сферичної форми дає такі залежності:

$$\frac{G(p)}{G(0)} = 1 - \frac{1-p}{1 - \frac{2}{15} \frac{4-5\nu(0)}{1-\nu(0)} p}, \quad \frac{K(p)}{K(0)} = 1 - \frac{1-p}{1 - \frac{1+\nu(0)}{3(1-\nu(0))} p}. \quad (1)$$

де  $\nu(0)$  – коефіцієнт Пуассона матеріалу непористої матриці.

За допомогою формул

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad (2)$$

знайдемо модуль Юнга  $E^*(p)$  та коефіцієнт Пуассона  $\nu^*(p)$  для пористої матриці (тут і далі символом \* будемо позначати величини, що відносяться до матеріалу матриці):

$$E^*(p) = \left( 3E^*(0) - \frac{E^*(0)(3-\nu^*(0))(1-p)}{3(1+\nu^*(0)-(1+\nu^*(0))p)} \right) / \left( (1-2\nu^*(0)) \left( 1 - \frac{(3+\nu^*(0))(1-p)}{3(1-\nu^*(0)-p(1+\nu^*(0)))} + \frac{2(1+\nu^*(0))(15(1-\nu^*(0))-2(4-5\nu^*(0))p)}{(1-2\nu^*(0))(15(1-\nu^*(0))(2-p)-2p(4-5\nu^*(0)))} \right) \right), \quad (3)$$

$$\nu^*(p) = \frac{E^*(p)(1+\nu^*(0))(15(1-\nu^*(0))-2p(4-5\nu^*(0)))}{E^*(0)(15(1-\nu^*(0))(2-p)-2p(4-5\nu^*(0)))} - 1. \quad (4)$$

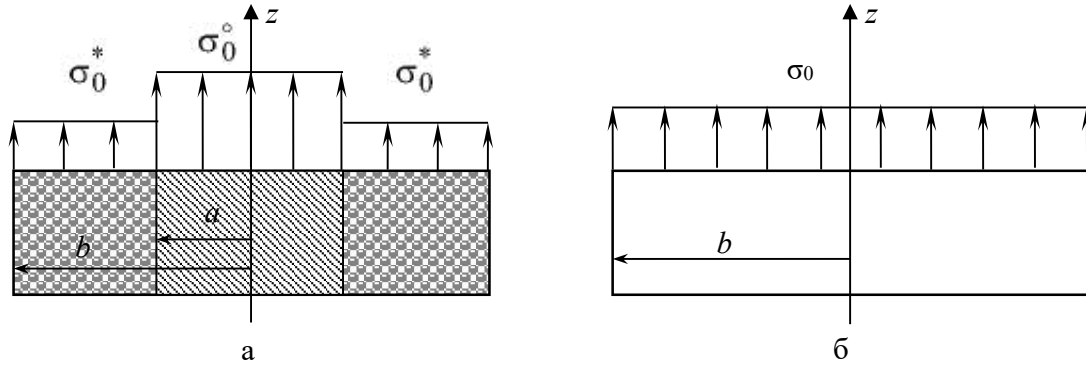
**Методи.** Сумісне поздовжнє розтягнення матриці та волокна. Розглянемо сумісне поздовжнє розтягнення (рис. 1а) суцільного циліндра ( $0 \leq r \leq a$ ), що описує матеріал волокна, і порожнистого циліндра ( $a \leq r \leq b$ ), що описує матеріал матриці.

З експериментальних даних відомо, як ведуть себе при повздовжньому розтягненні компоненти напружено-деформованого стану матриці й волокна на межі розділу та на певній висоті у напрямку розтягнення, тому сформуємо низку умов на цій межі таким чином:

$$\sigma_{rr}^\circ(a) = \sigma_{rr}^*(a), u_r^\circ(a) = u_r^*(a), u_z^\circ(h) = u_z^*(h). \quad (5)$$

Тут символ  $\circ$  означає приналежність відповідної величини до матеріалу волокна.

На боковій циліндричній поверхні комірки має виконуватися умова:



а – сумісне деформування пористої матриці та волокна;  
б – деформування гомогенізованого матеріалу;

Рис. 1. Поздовжнє розтягнення елементарної комірки

$$\sigma_{rr}^*(b) = 0. \quad (6)$$

Радіальні переміщення трансропного волокна визначаються виразом

$$u_r^\circ(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (7)$$

а з урахуванням того, що при  $r=0$   $u_r^\circ(0) = 0$ , випливає, що  $C_2 = 0$ , тоді вираз (7) прийме вид (позначимо  $C_1$  як  $C$ ):

$$u_r^\circ(r) = Cr. \quad (8)$$

Компоненти напружено-деформованого стану трансропного волокна визначатимуться, окрім (8), такими співвідношеннями:

$$u_z^\circ(z) = \frac{1}{(1-\nu_{23}^\circ)} \left( \frac{\sigma_0^\circ (1-\nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2C\nu_{21}^\circ \right) z, \quad (9)$$

$$\sigma_{rr}^\circ(r) = \frac{E_2^\circ}{(1-\nu_{23}^\circ)} \left( \frac{\sigma_0^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C \right), \quad \sigma_{\theta\theta}^\circ(r) = \frac{E_2^\circ}{(1-\nu_{23}^\circ)} \left( \frac{\sigma_0^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C \right). \quad (10)$$

Так само для пористої ізотропної матриці можемо записати такі вирази:

$$u_r^*(r) = Ar + \frac{B}{r};$$

$$u_z^*(z) = \frac{1}{(1-\nu^*(p))} \left( \frac{\sigma_0^*(p)(1-\nu^*(p)) - 2(\nu^*(p))^2}{E^*(p)} - 2Av^*(p) \right) z, \quad (11)$$

$$\sigma_{rr}^*(r) = E^*(p) \left( \frac{\sigma_0^* v^*(p)}{E^*(p)(1-\nu^*(p))} + \frac{A}{1-\nu^*(p)} - \frac{B}{r^2(1+\nu^*(p))} \right);$$

$$\sigma_{\theta\theta}^*(r) = E^*(p) \left( \frac{\sigma_0^* v^*(p)}{E^*(p)(1-\nu^*(p))} + \frac{A}{1-\nu^*(p)} - \frac{B}{r^2(1+\nu^*(p))} \right). \quad (12)$$

Застосувавши крайові умови (5), (6) знайдемо сталі  $A$ ,  $B$ ,  $C$  та залежність між  $\sigma_0^\circ$  та  $\sigma_0^*$ . Із другого співвідношення умов (5) маємо:

$$C = A + \frac{B}{a^2}. \quad (13)$$

Із рівності (6) маємо:

$$A = \frac{B(1-\nu^*(p))}{b^2(1+\nu^*(p))} - \frac{\sigma_0^* v^*(p)}{E^*(p)}. \quad (14)$$

Вираз (13) запишеться так:

$$C = B \left( \frac{f(1-\nu^*(p)) + (1+\nu^*(p))}{a^2(1+\nu^*(p))} \right) - \frac{\sigma_0^* v^*(p)}{E^*(p)}. \quad (15)$$

Перша умова у (5) дає:

$$\begin{aligned} & \frac{E_2^\circ}{(1-\nu_{23}^\circ)} \left( \frac{\sigma_0^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} - \frac{\sigma_0^* v^*(p)}{E^*(p)} \right) = \\ & = \frac{B}{a^2} \left( \frac{E^*(p)(f-1)}{(1+\nu^*(p))} - \frac{E_2^\circ (f(1-\nu^*(p)) + (1+\nu^*(p)))}{(1-\nu_{23}^\circ)(1+\nu^*(p))} \right), \quad (16) \\ & \times \frac{a^2 E_2^\circ (1-(\nu^*(p))^2)}{E^*(p)(f-1)(1-\nu_{23}^\circ) - E_2^\circ (f(1-\nu^*(p)) + (1+\nu^*(p)))}, \end{aligned}$$

Прийнявши

$$d_1 = E^*(p)(f-1)(1-\nu_{23}^\circ), d_2 = E_2^\circ (f(1-\nu^*(p)) + (1+\nu^*(p))), \quad (17)$$

Будемо мати

$$B = \frac{\nu_{21}^\circ a^2 (1+\nu^*(p))}{d_1 - d_2} \sigma_0^\circ - \frac{a^2 E_2^\circ (1+\nu^*(p))^2}{d_1 - d_2} \frac{\nu^*(p)}{E^*(p)} \sigma_0^*;$$

$$C = \frac{d_2}{d_1 - d_2} \frac{\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} \sigma_0^\circ - \frac{\nu^*(p)}{E^*(p)} \frac{d_1}{d_1 - d_2} \sigma_0^*;$$

$$A = \frac{fv_{21}^{\circ}(1-v^*(p))}{d_1-d_2} \sigma_0^{\circ} - \frac{v^*(p)}{E^*(p)} \frac{fE_2^{\circ}(1-v^*(p))+d_1-d_2}{d_1-d_2} \sigma_0^{\circ}. \quad (18)$$

Із третьої рівності (5) знаходимо співвідношення між  $\sigma_0^*$  та  $\sigma_0^{\circ}$ :

$$\left( \frac{(1-2v_{12}^{\circ}v_{21}^{\circ}-v_{23}^{\circ})(d_1-d_2)}{E_1^{\circ}(1-v_{23}^{\circ})} - \frac{2v_{12}^{\circ}v_{21}^{\circ}d_2}{E_1^{\circ}(1-v_{23}^{\circ})} + \frac{2fv_{21}^{\circ}E^*(p)}{1} \right) \sigma_0^{\circ} = \left( \frac{(1-2(v^*(p))^2-v^*(p))(d_1-d_2)}{E^*(p)(1-v^*(p))} + \frac{2(v^*(p))^2(fE_2^{\circ}(1-v^*(p))+d_1-d_2)}{E^*(p)(1-v^*(p))} - \frac{2v^*(p)v_{21}^{\circ}d_1}{E^*(p)(1-v_{23}^{\circ})} \right) \sigma_0^*. \quad (19)$$

Позначивши

$$d^{\circ} = \frac{E^*(p)(f-1)(1-v_{23}^{\circ}-2v_{12}^{\circ}v_{21}^{\circ})}{E_1^{\circ}} - \frac{E_2^{\circ}(f(1-v^*(p)-2v_{12}^{\circ}v^*(p))+1+v^*(p))}{E_1^{\circ}}; \quad d^* = \frac{E^*(p)(f-1)(1-v_{23}^{\circ}-2(v^*(p))^2v_{21}^{\circ})}{E^*(p)} - \frac{E_2^{\circ}(f(1-v^*(p)-2(v^*(p))^2)+1+v^*(p))}{E^*(p)}, \quad (20)$$

отримуємо

$$d^{\circ} \sigma_0^{\circ} = d^* \sigma_0^*. \quad (21)$$

Розв'яжемо аналогічну задачу для однорідного трансропного матеріалу, що моделює поведінку гомогенізованого матеріалу (рис. 16). Тоді поле напружень буде визначатися такими співвідношеннями:

$$\sigma_{zz} = \sigma_0, \sigma_{rr} = 0, \sigma_{\theta\theta} = 0, \sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = 0. \quad (22)$$

Щоб обидві задачі були еквівалентними необхідно, щоб збіглися умови рівноваги для обох задач, тобто щоб виконувалися умови:

$$\pi a^2 \sigma_0^{\circ} + \pi(b^2 - a^2) \sigma_0^* = \pi b^2 \sigma_0, \text{ або } \sigma_0^{\circ} f + \sigma_0^*(1-f) = \sigma_0. \quad (23)$$

З урахуванням (21) отримаємо:

$$\sigma_0^* = \frac{\sigma_0 d^{\circ}}{d^{\circ} + f(d^* - d^{\circ})}, \sigma_0^{\circ} = \frac{\sigma_0 d^*}{d^{\circ} + f(d^* - d^{\circ})}. \quad (24)$$

З урахуванням (22) співвідношення для деформацій набудуть вигляду:

$$\varepsilon_{rr} = -\frac{v_{21}}{E_2} \sigma_0, \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E_1} \sigma_0. \quad (25)$$

Тоді переміщення визначатися формулами:

$$u_r(r) = -\frac{v_{21}}{E_2} \sigma_0 r + C_1; u_z(z) = \frac{1}{E_1} \sigma_0 z + C_2. \quad (26)$$

Сталі  $C_1 = C_2 = 0$  маючи на увазі умови  $u_r(0) = 0$  та  $u_z(0) = 0$ , тобто

$$u_r(r) = -\frac{v_{21}}{E_2} \sigma_0 r, u_z(z) = \frac{1}{E_1} \sigma_0 z. \quad (27)$$

Як умови узгодження для обох задач використаємо рівність осьових переміщень для довільної осьової координати та рівність радіальних переміщень на зовнішній поверхні циліндричної комірки:

$$u_r(b) = u_r^*(b), u_z(h) = u_z^{\circ}(h) = u_z^*(h). \quad (28)$$

Тоді друге із умов (28) з використанням (11) та (27) запишеться у вигляді:

$$\frac{\sigma_0^{\circ}(1-v^*(p)-2(v^*(p))^2)}{E^*(p)(1-v^*(p))} - \frac{2Av^*(p)}{(1-v^*(p))} = \frac{1}{E_1} \sigma_0, \quad (29)$$

З урахуванням (18) та (24) після математичних перетворень отримуємо формулу для визначення поздовжнього модуля пружності композиційного матеріалу з ізотропною пористою матрицею і трансропним волокном:

$$E_1 = \frac{(\alpha - 2v_{12}^{\circ}\beta)E^*(p)(1-f) + (\alpha - 2v^*(p)\beta)E_1^{\circ}f}{\alpha - 2\beta v_{12}^{\circ} + 2fv^*(p)E_2^{\circ}(v_{12}^{\circ} - v^*(p))}, \quad (30)$$

де

$$\alpha = E^*(p)(1-f)(1-v_{23}^{\circ}) + E_2^{\circ}(f(1-v^*(p)) + (1+v^*(p))); \quad \beta = v_{21}^{\circ}E^*(p)(1-f) + v^*(p)fE_2^{\circ}. \quad (31)$$

Із першої з умов (28) знайдемо співвідношення  $-v_{21}/E_2$  для композиційного матеріалу, а з урахуванням виразів (18), (24) після перетворень матимемо

$$-\frac{v_{21}}{E_2} = \frac{1}{d^{\circ} + f(d^* - d^{\circ})} \left( \frac{2fv_{21}^{\circ}d^*}{d_1-d_2} - \frac{v^*(p)(2fE_2^{\circ} + d_1 - d_2)d^{\circ}}{E^*(p)(d_1-d_2)} \right). \quad (32)$$

Використовуючи співвідношення між коефіцієнтами Пуассона і модулями пружності анізотропного матеріалу, отримуємо співвідношення для коефіцієнта Пуассона  $v_{12}$ :

$$v_{12} = \frac{(\alpha - 2\beta v_{12}^{\circ})v^*(p) + 2E_2^{\circ}f(v_{12}^{\circ} - v^*(p))}{\alpha - 2\beta v_{12}^{\circ} + 2fv^*(p)E_2^{\circ}(v_{12}^{\circ} - v^*(p))}. \quad (33)$$

**Числові розрахунки.** З'ясуємо вплив пористості та об'ємного вмісту волокна у композиті на значення ефективних механічних характеристик. Розглянемо композиційний матеріал, матрицею для якого є алюмінієвої, а волокна з бору, які будемо

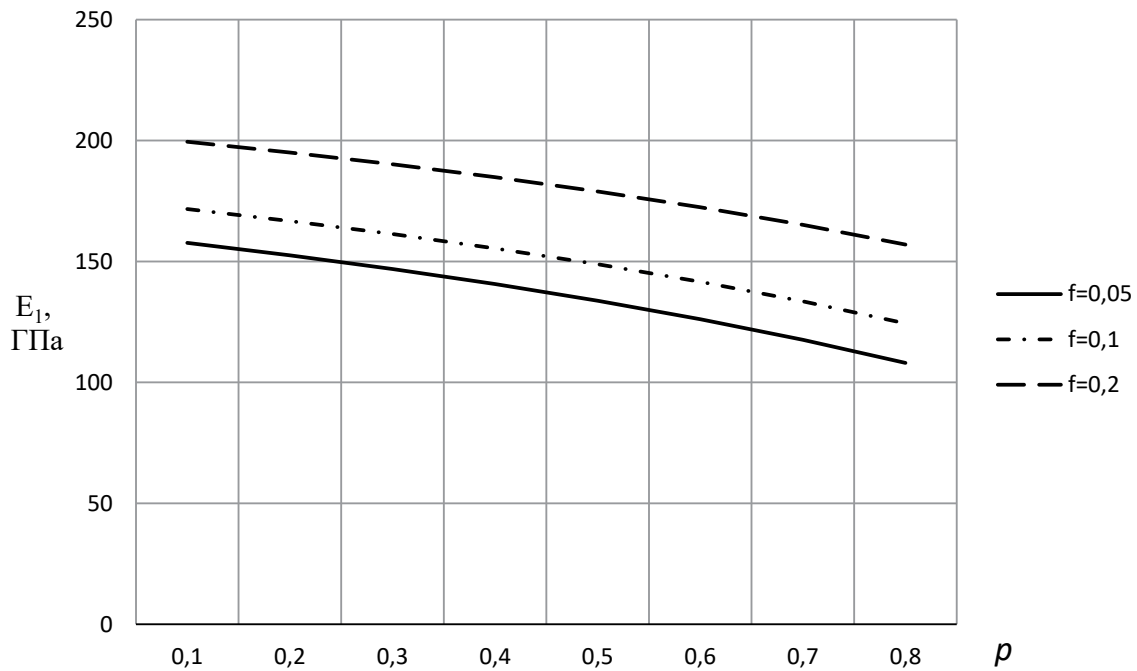


Рис. 2. Залежність ефективного модуля  $E_1$  від пористості  $\rho$

вважати ізотропними. Матеріал матриці має такі механічні характеристики  $E^* = 70 \text{ ГПа}$ ,  $\nu^* = 0,32$ , матеріал волокна –  $E^\circ = 416,5 \text{ ГПа}$ ,  $\nu^\circ = 0,2$  [9]. Побудуємо залежності поздовжнього модуля пружності композиційного матеріалу від пористості матриці, отриманий за формулою (30), для різних значень об'ємного вмісту волокна  $f$  (рис. 2).

Як і очікувалося, зростання об'ємного вмісту високомодульних волокон призводить до збільшення ефективного поздовжнього модуля пружності (при збільшенні  $f$  від 0,05 до 0,2 модуль збільшується приблизно на 30%). Збільшення ж пористості матриці, навпаки, приводить до змен-

шення ефективною характеристики й носить слабо виражений нелінійний характер (див. рис. 2).

**Висновки.** Отже, у роботі за допомогою методу представницького об'ємного елемента вперше отримані аналітичні співвідношення для ефективних поздовжнього модуля пружності  $E_1$  та коефіцієнта Пуассона  $\nu_{12}$  волокнистого композиційного матеріалу із пористою матрицею як функцій механічних характеристик матриці та волокна, об'ємного вмісту волокон у композиті та пористості матриці. Досліджено вплив пористості на ефективний поздовжній модуль пружності  $E_1$  волокнистого композиту із пористою алюмінієвою матрицею.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Ковальченко М.С. Механические свойства изотропных пористых материалов. *Порошковая металлургия*. 2002. № 5/6. С. 105–127.
2. Гребенюк С.Н., Гоменюк С.І., Клименко М.І. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів : монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2019. 350 с.
3. Клименко М.І., Гребенюк С.М., Гоменюк С.І. Ефективні механічні характеристики в'язкопружних композитів : монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2019. 300 с.
4. Столярова А.В. Ефективні механічні характеристики композиційних матеріалів із трансропними порожнистими волокнами : монографія. Одеса : Видавничий дім «Гельветика», 2021. 104 с.
5. Рубашевський В.В., Заразовський М.М., Шукаєв С.М. Аналіз методів визначення констант пружності однонаправленого шару композиційних матеріалів. *Mechanics and Advanced Technologies*. 2017. № 2(80). С. 107–112. DOI: 10.20535/2521-1943.2017.80.109634.
6. Akhundov V.M., Kostrova M.M., Naumova I.Ju. Graphic visualization of deformed fibre-reinforced materials. *Metallurgical and Mining Industry*. 2017. Vol. 2. P. 52–58.
7. Ашихмин В.А., Мерзлякова Н.А., Шапаєв И.В. Влияние межфазного слоя на упругие характеристики волокнистого материала с гексагональной структурой. *Научно-практический электронный журнал «Аллея Науки»*. 2018. № 4(20). С. 1–11.

8. Хорошун Л.П., Левчук О.И. Эффективные упругие свойства стохастических однонаправленных волокнистых композитов при несовершенной адгезии. *Доповіди Національної академії наук України*. 2018. № 9. С. 51–63. DOI: 10.15407/dopovidi2018.09.051.
9. Композиционные материалы : справочник / под ред. Д.М. Карпиноса. Киев : Наукова думка, 1985. 592 с.

#### REFERENCES

1. Kovalchenko M. S. Mechanical properties of isotropic porous materials. *Powder metallurgy*. 2002. № 5/6. pp. 105–127 (in Russian).
2. Grebenyuk S.N., Gomenyuk S.I., Klymenko M.I. Stress-strain state of spatial structures based on homogenization of fibrous composites: monograph. Kherson: «Helvetyka» Publishing House, 2019. 350 p (in Ukrainian).
3. Klymenko M. I., Grebenyuk S. M., Gomenyuk S. I. Effective mechanical characteristics of viscoelastic composites: monograph. Kherson: "Helvetyka" Publishing House, 2019. 300 p (in Ukrainian).
4. Stolyarova A.V. Effective mechanical characteristics of composite materials with transtropical hollow fibers: monograph. Odesa: "Helvetika" Publishing House, 2021. 104 p (in Ukrainian).
5. Rubashevskiy V.V., Zarazovskiy M.M., Shukaev S.M. Analysis of methods for determining elasticity constants of a unidirectional layer of composite materials. *Mechanics and Advanced Technologies*. 2017. № 2 (80). P.107–112. DOI: 10.20535/2521-1943.2017.80.109634.
6. Akhundov V. M., Kostrova M. M., Naumova I. Ju. Graphic visualization of deformed fibre-reinforced materials. *Metallurgical and Mining Industry*. 2017. Vol. 2. P. 52–58.
7. Ashykhmyn V. A., Merzliakova N. A., Shapaev Y. V. Influence of the interfacial layer on the elastic characteristics of a fibrous material with a hexagonal structure. *Scientific and practical electronic journal "Avenue of Science"*. 2018. No. 4 (20). pp. 1–11 (in Russian).
8. Khoroshun L. P., Levchuk O. I. Effective elastic properties of stochastic unidirectional fibrous composites with imperfect adhesion. Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. 2018. № 9. С. 51–63. DOI: 10.15407/dopovidi2018.09.051.
9. Composite materials: reference book / ed. D. M. Karpinos. Kyiv: Scientific opinion, 1985. 592 p (in Russian).