УДК 539.3
DOI https://doi.org/10.26661/2786-6254-2022-2-04

ГОМОГЕНІЗАЦІЯ В’ЯЗКОПРУЖНОГО КОМПОЗИТА У РАЗІ ПОВЗДОВЖНЬОГО РОЗТЯГУ

Пожуєв В. І.
доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри механіки
Національний університет «Запорізька політехніка»
вул. Жуковського, 64, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-9163-7888
pozhuevvi@gmail.com

Артеменко А. О.
аспірант математичного факультету
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-6536-3086
krummisvafklettagja@gmail.com

Клименко М. І.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0001-5065-0341
m1655291@gmail.com

Скрипник К. В.
аспірант математичного факультету
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-8266-1093
kirillsripnik@gmail.com

Ключові слова: *в’язкопружна матриця, гомогенізація, ефективні характеристики, пружне волокно, транстропний композит, ядро релаксації.*

У статті розглядається задача математичного моделювання механічних характеристик в’язкопружного транстропного волокнистого композита. Об’єктдослідження–в’язкопружнийтрансверсально-ізотропнийкомпозит з періодичною структурою. Елементи його комірки – трансверсально-ізотропна в’язкопружна матриця та пружне волокно. Розв’язано задачу визначення ефективних характеристик для інтегрального оператора в’язкопружного композита. Цей оператор побудований у відповідності до спадкової теорії Больцмана-Вольтерра. Розв’язана задача для композита, коли складовими його елементами є в’язкопружна ізотропна матриця та транстропне пружне волокно. Ядро релаксації матриці є ядро Абеля. Із масиву композиційного матеріалу виокремлюється представницький елемент. Його фізико-механічні характеристики є типовими для всього композита. Він містить волокно з оточуючою його матрицею. У роботі отримано параметри ефективного повздовжнього модуля пружності. Для в’язкопружного матеріалу він є інтегральним оператором, у якому

потрібно визначити сталий миттєвий модуль пружності та ядро релаксації. Для визначення цих характеристик розв'язуються дві вісесиметричні задачі для циліндричної представницької комірки композита. Перша задача полягає у визначенні компонент напружено-деформованого стану у разі сумісного поздовжнього деформування ізотропної в'язкопружної матриці та транстропного волокна. На межі розділу матриці та волокна передбачається неперервність радіальних переміщень та напружень. Розв'язавши цю задачу, знаходимо всі компоненти напружено-деформованого стану для цієї складеної циліндричної комірки. Розв'язуємо аналогічну крайову задачу для суцільної циліндричної комірки, що моделює гомогенізований транстропний матеріал, з невідомими в'язкопружними характеристиками. Порівнявши осьові деформації точок обох циліндричних комірок, отримано формули для параметрів ефективного інтегрального оператора, що відображає розтяг в'язкопружного композита.

HOMOGENIZATION OF VISCOELASTIC COMPOSITE DURING LONGITUDINAL STRETCHING

Pozhuev V. I.
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Professor at the Department of Mechanics
Zaporizhzhia Polytechnic National University
Zhukovskoho str., 64, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0001-5284-4502
pozhuevvi@gmail.com

Artemenko A. O.
Postgraduate Student of the Faculty of Mathematics
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-6536-3086
krummisvafklettagja@gmail.com

Klymenko M. I.
PhD, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Fundamental and Applied Mathematics
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
m1655291@gmail.com

Scrypnyk K. V.
Postgraduate Student of the Faculty of Mathematics
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-8266-1093
kirillsripnik@gmail.com

 ISSN 2786-6254

Key words: *effective characteristics, elastic fiber, homogenization, relaxation kernel, transtropic composite, viscoelastic matrix.*

In the article the problem of mathematical modelling of mechanical characteristics of viscoelastic transtropic fibrous composite is considered. The object of the research is viscoelastic transversely isotropic composite with periodic structure. Elements of its cell are transversely isotropic viscoelastic matrix and elastic fiber. The problem of determination of effective characteristics for integral operator of viscoelastic composite. This operator is constructed in accordance to Boltzmann-Volterra's legacy theory. Problem for composite, when its constituent elements are isotropic viscoelastic matrix and elastic transtropic fiber is solved. Abel kernel is matrix relaxation kernel. From array of composite material the representative element is singled out. Its physical-mechanical characteristics are typical for entire composite. It contains fiber with matrix that surrounds it. In the paper parameters of effective longitudinal modulus of elasticity are obtained. For viscoelastic material it is integral operator in which one needs to determine constant momentary modulus of elasticity and relaxation kernel. For determination of these characteristics two axis-symmetrical problems for cylindrical representative cell of composite are being solved. First problem consists of determination of tensely-deformed condition components during compatible longitudinal deformation of isotropic viscoelastic matrix and transtropic fiber. On the edge of separation of matrix and fiber continuity of radial movings and tensions is foreseen. By solving this problem, we find all components of tensely-deformed condition for this composed cylindrical cell. We solve the similar boundary value problem for solid cylindrical cell, that models homogenized transtropic material with unknown viscoelastic characteristics. By comparison of axial deformations of points of both cylindrical cells, formulas for parameters of effective integral operator of viscoelastic composite are obtained.

ВСТУП

Останнім часом у різних галузях промисловості суттєво розширилось застосування композитних матеріалів. Волокнисті композити широко застосовують у машинобудуванні, зокрема, автомобілебудуванні, судно- та авіабудуванні, а також електро- та радіотехніці. У зв'язку з цим актуальною є проблема раціонального проєктування конструкцій, що містять елементи, виготовлені з композитів. Для розрахунку їх напружено-деформованого стану потрібно знати механічні характеристики цих матеріалів як однорідних матеріалів (ефективні характеристики), тобто розв'язати задачу гомогенізації цих композитів. При цьому потрібно врахувати наявність в'язкопружних властивостей у багатьох композитах. Розробка нових і модифікація відомих методів прогнозування в'язкопружних характеристик композиційних матеріалів за відомих механічних характеристик їх складових елементів та відносної частки у структурі композита дозволить обґрунтувати задавання вимоги до їх складових елементів (фаз) та структури композитів.

Композиційні матеріали здебільшого, звичайно, складені з односпрямованості армованих шарів, викладених у певній послідовності. Механічні властивості таких композитів значною мірою залежать від часу. Це зумовлено значною мірою в'язкопружними властивостями з'єднувальних матеріалів та деяких типів волокон.

Для моделювання в'язкопружних властивостей широке застосування знайшла спадкова теорія Больцмана-Вольтерра, яка застосована у цьому дослідженні. Велике значення для побудови таких математичних моделей мають аналітичні форми задання ядра повзучості та релаксації. Досить складно побудувати аналітичні вирази, що добре описують експериментальні дані на великому проміжку часу. Для аналітичного розв'язування задачі гомогенізації застосовують такі основні підходи. Перший підхід називають теорією ефективних модулів. Теорію ефективних модулів складно застосовувати у разі великих деформацій. Інший підхід полягає у застосуванні теорії суміші. У межах цієї теорії розроблюються системи рівнянь, що моделюють взаємодію композитів. Складність визначення коефіцієнтів таких систем визначає обмеженість його застосування. Така робота розвиває підхід у межах теорії ефективних модулів, у напрямі побудови аналітичних залежностей для моделювання в'язкопружних властивостей композитів, що містять фази, в'язкопружну поведінку яких моделюють з використанням ядра релаксації Абеля.

Виконане дослідження сучасних публікацій з проблематики моделювання механічних властивостей композитних матеріалів свідчить про те, що невивченим залишається питання гомогенізації в'язкопружних транстропних волокнистих композитів з в'язкопружними фазами, у яких моделюються ядра релаксації з особливостями, зокрема, у початковий момент часу, а також такі, що дозволяють більш адекватно описувати механічні властивості у значеннях часу, близьких до початкових. Це й визначило мету цієї роботи.

Об'єктом дослідження є транстропний в'язкопружний односпрямований композит.

Метою цього дослідження є знаходження ефективного поздовжнього модуля пружності композита, складниками якого є матриця, в'язкопружні властивості якої визначаються ядром релаксації Абеля, та транстропне пружне волокно.

Використання ядра Абеля дозволяє більш точно моделювати в'язкопружні властивості композита на початковому проміжку часу з моменту прикладання навантаження.

Основною гіпотезою, прийнятою у дослідженні, є те, що в'язкопружні властивості композита задовольняють спадковій теорії Больцмана-Вольтерра. Правильність цієї гіпотези експериментально підтверджена для більшості реальних композитних матеріалів.

У монографії [1] висвітлені основні методи знаходження та отримані співвідношення для ефективних механічних характеристик для волокнистих композитів, зокрема, у випадку транстропних властивостей волокна та в'язкопружних властивостей матриці. Для моделювання цих властивостей використовували співвідношення спадкової теорії Больцмана – Вольтерра з ядром релаксації експоненціального типу. Тут запропонована методика гомогенізації, що ґрунтується на використанні кінематичних умов узгодження переміщень точок однорідної представницької комірки композита та відповідних точок його елементів. Саме ця методика використана для вирішення задачі гомогенізації у цій роботі.

У роботі [2] здійснюється аналітичне моделювання термопружних та термов'язкопружних характеристик односпрямованого композиту з термореактивної матриці, армованої скловолокном. У статті [3] визначено ефективний поперечний модуль пружності для трифазного композита з випадково розташованими односпрямованими круглими волокнами з урахуванням взаємодії між волокнами. Розглянуто випадок композита з нестисливою матрицею та круглими жорсткими волокнами. Пружні сталі трифазного композита (матриця, циліндричне волокно та пустота циліндричної форми, яка моделює порушення зчеплення волокна з матрицею) визначалися у цій роботі у вигляді комбінації тензорів пружних сталих матеріалу матриці й матеріалів включень. Матеріал матриці та волокна вважався ізотропним.

Для визначення в'язкопружних ефективних сталих волокнистого композита в поперечному щодо волокна напрямі запропонована лінійна в'язкопружна модель поверхні розділу волокна та матриці у статті [4]. У цій роботі гомогенізація для елементарної комірки здійснювалась методом скінченних елементів, що дала змогу дослідити в'язкопружні властивості волокнистого композита. У дослідженні [5] підхід, що ґрунтується на мікромеханічному моделюванні, використаний для побудови в'язкопружної моделі композиції з урахуванням дії на них температурних полів. У [6] здійснено аналіз сучасних методів чисельного моделювання різних типів композитних матеріалів, але не розглянуті задачі моделювання в'язкопружності композитів.

Методи. Для досягнення мети дослідження використано методику, запропоновану в [1], що ґрунтується на використанні кінематичних умов узгодженості переміщень вибраних точок фаз композита та елементарної комірки однорідного композита. Для її реалізації відповідно потрібно розв'язувати дві крайові задачі. Спочатку розв'яжемо задачу про сумісне деформування компонентів представницького елементу композита (матриці та волокну) у разі їх рівномірного поздовжнього розтягу. Для розв'язування цієї задачі використаємо операційний метод.

Задача про сумісне деформування матриці та волокна. Визначимо компоненти осесиметричного напружено-деформованого стану представницького елементу композита, що є коаксіальним циліндром. Матриця подається у вигляді в'язко-пружного порожнистого циліндру, радіусу якого $a \le r \le b$, що містить суцільний пружний циліндр радіуса *a*, що моделює волокно. Задачу розв'язуємо у циліндричній системі координат (r, φ, z), де вісь Oz співпадає з напрямом армування композита волокном. Вважаємо, що радіальні переміщення та напруження на границі контакту матриці та волокна при $r = a$ є неперервними, осьові переміщення матриці та волокна рівні між собою. Переміщення, напруження та деформацій далі будемо позначати символом * для матриці, символ $^\circ$ – для волокна. Деформування представницької комірки композита здійснюється під дією сталого навантаження, що діє вздовж його осі. Отримуємо осесиметричну задачу теорії пружності. За такого навантаження осьове напруження волокна: $\sigma_z^\circ = \sigma_0^\circ$. Радіальні та тангенціальні напруження $\sigma_r^\circ = \sigma_r^\circ(r,t)$, $\sigma_\varphi^\circ = \sigma_\varphi^\circ(r,t)$ залежать від радіальної координати *r* та часу t, дотичні напруження дорівнюють нулю. З рівняння рівноваги, де напруження виражені через переміщення, знаходимо

$$u_r^\circ(r,t) = C(t)\,r\,. \qquad (1)$$

Використовуючи основні рівняння теорії пружності, знаходимо осьове переміщення та радіальне напруження волокна у вигляді:

$$u_z^{\circ}(z,t)=\frac{1}{1-\nu_{23}^{\circ}}\left(\frac{\sigma_0^{\circ}\left(1-\nu_{23}^{\circ}-2\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ}\right)}{E_1^{\circ}}-2C(t)\nu_{21}^{\circ}\right)z\,, \quad (2)$$

$$\sigma_r^{\circ}(t)=\frac{E_2^{\circ}}{1-\nu_{23}^{\circ}}\left(\frac{\sigma_0^{\circ}\nu_{12}^{\circ}}{E_1^{\circ}}+C(t)\right). \quad (3)$$

У виразах (2) та (3) E_1° и E_2° – модулі пружності, ν_{12}°, ν_{21}° та ν_{23}° – коефіцієнти Пуассона, у позначеннях індекс 1 відповідає осі z, що є перпендикулярною площині ізотропії.

Для матриці нормальні напруження: $\sigma_z^*=\sigma_0^*(t)$, $\sigma_r^*=\sigma_r^*(r,t)$, $\sigma_\varphi^*=\sigma_\varphi^*(r,t)$, дотичні напруження дорівнюють нулю. Радіальні переміщення точок матриці мають вигляд:

$$u_r^*(r,t)=A(t)r+\frac{B(t)}{r}. \quad (4)$$

Для моделювання в'язкопружних властивостей матеріалів будемо використовувати співвідношення спадкової теорії Больцмана – Вольтерра. Для цього застосуємо лінійний інтегральний оператор:

$$\bar{E}\left[x(t)\right]=E^*\cdot\left(x(t)-\int_0^t R(t-\tau)x(\tau)d\tau\right). \quad (5)$$

У рівності (5) $E^*=\text{const}$ – миттєвий модуль пружності, тобто значення модуля пружності в'язко-пружного матеріалу у момент часу $t=0$, $R(t)$ – ядро релаксації. Оператор, зворотний до оператора (2), має вигляд:

$$\bar{E}^{-1}\left[y(t)\right]=\frac{1}{E^*}\cdot\left(y(t)+\int_0^t Q(t-\tau)y(\tau)d\tau\right),$$

де $Q(t)$ – ядро повзучості. Напруження та переміщення точок матриці знаходимо з використанням операторів $\bar{E}$ та $\bar{E}^{-1}$

$$\sigma_z^*(t)=\frac{\bar{E}\left[\left(1-\nu^*\right)\varepsilon_z^*+2\nu^*A(t)\right]}{\left(1+\nu^*\right)\left(1-2\nu^*\right)}.$$

де ν^* – коефіцієнт Пуассона для матриці.

$$u_z^*(r,t)=\left(\frac{\left(1+\nu^*\right)\left(1-2\nu^*\right)}{1-\nu^*}\bar{E}^{-1}\left[\sigma_0^*(t)\right]-\frac{2\nu^*A(t)}{1-\nu^*}\right)z\,. \quad (6)$$

$$\sigma_r^*=\frac{1}{1-\nu^*}\bar{E}\left[A(t)\right]-\frac{\bar{E}\left[B(t)\right]}{\left(1+\nu^*\right)r^2}+\frac{\nu^*}{1-\nu^*}\sigma_0^*(t). \quad (7)$$

Для однозначного визначення переміщень та напружень матриць та волокна за їх сумісного деформування використаємо крайові умови. На межі контакта матриці та волокна $r=a$ краєві умови неперервності радіальні переміщень та напружень:

$$u_r^*(a)=u_r^{\circ}(a), \quad (8)$$

$$\sigma_r^*(a)=\sigma_r^{\circ}(a). \quad (9)$$

Для довільного значення $z=h$ осьові переміщення матриці та волокна співпадають:

$$u_z^*(h)=u_z^{\circ}(h). \quad (10)$$

На межі $r=b$ комірки композита радіальні напруження дорівнюють нулю:

$$\sigma_r^*(b)=0. \quad (11)$$

Введемо позначення:

$$\alpha_1=\frac{1-\nu_{23}^{\circ}-2\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ}}{E_1^{\circ}\left(1-\nu_{23}^{\circ}\right)},\ \alpha_2=\frac{2\nu_{21}^{\circ}}{1-\nu_{23}^{\circ}},$$

$$\beta_1=\frac{\left(1+\nu^*\right)\left(1-2\nu^*\right)}{1-\nu^*},\ \beta_2=\frac{2\nu^*}{1-\nu^*},$$

$$\gamma_1=\frac{E_2^{\circ}\nu_{12}^{\circ}}{E_1^{\circ}\left(1-\nu_{23}^{\circ}\right)},\ \gamma_2=\frac{E_2^{\circ}}{1-\nu_{23}^{\circ}},\ f=\frac{a^2}{b^2},$$

$$m=\frac{1}{\left(\alpha_2-\beta_2\right)\left(1-\nu^*\right)f+\alpha_2\left(1+\nu^*\right)}.$$

$$k_1=m\alpha_1\left(1-\nu^*\right)f,$$

$$k_2=m\left(\alpha_2\nu^*\left(1+\nu^*\right)+\beta_1\left(1-\nu^*\right)f\right),$$

$$k_3=m\left(1+\nu^*\right)\alpha_1,\ k_4=m\left(1+\nu^*\right)\left(\nu^*\left(\alpha_2-\beta_2\right)-\beta_1\right),$$

$$k_5=\frac{m\alpha_1(f-1)}{\gamma_2},\ k_6=\frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

$$k_7=\frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{\nu^*}{1-\nu^*}-m\left(\frac{\alpha_2\nu^*\left(1+\nu^*\right)}{1-\nu^*}+\nu^*\left(\alpha_2-\beta_2\right)+\beta_1(f-1)\right)\right).$$

Співвідношення між напруженнями $\sigma_0^*(t)$ і σ_0° знаходимо з крайових умов:

$$\left(k_5h(t)-k_6-k_1-k_3\right)\sigma_0^{\circ}+k_7\sigma_0^*(t)=\left(k_4-k_2\right)\bar{E}^{-1}\left[\sigma_0^*(t)\right].$$

Після застосування до цієї рівності оператор $\bar{E}$ отримаємо інтегральне рівняння відносно $\sigma_0^*(t)$:

$$k_7\bar{E}\left[\sigma_0^*(t)\right]+\left(k_2-k_4\right)\sigma_0^*(t)=\bar{E}\left[k_1+k_3+k_6-k_5h(t)\right]\sigma_0^{\circ}. \quad (12)$$

До цього рівняння застосуємо інтегральне перетворення Лапласа. Для інтегрального оператора типу згортки $\bar{E}\left[x(t)\right]$, що визначається рівністю (5), перетворення Лапласа має вигляд:

$$\bar{E}\left[x(t)\right]\div E\left(\tilde{X}(p)-\tilde{R}(p)\tilde{X}(p)\right)=E\tilde{X}(p)\left(1-\tilde{R}(p)\right), \quad (13)$$

де $\tilde{X}(p)\div x(t)$, $\tilde{R}(p)\div R(t)$ – це відповідні зображення у разі перетворення Лапласа. Знайдемо зображення функції $h(t)$, що є результатом дії інтегрального оператора $\bar{E}$ на одиничну функцію:

$$h(t)=\tilde{E}[1]\div\frac{E\left(1-\tilde{R}(p)\right)}{p}. \quad (14)$$

Застосувавши до рівняння (12), отримавши рівняння відносно $\tilde{S}(p)$ – зображення функції $\sigma_0^*(t)$:

$$k_7 E\tilde{S}(p)\left(1-\tilde{R}(p)\right)+\left(k_2-k_4\right)\tilde{S}(p)=$$

$$=\frac{E\left(k_1+k_3+k_6-k_5 E\left(1-\tilde{R}(p)\right)\right)\left(1-\tilde{R}(p)\right)}{p}\sigma_0^{\circ}.$$

Звідси визначаємо:

$$\tilde{S}(p)=\frac{E\left(k_1+k_3+k_6-k_5 E\left(1-\tilde{R}(p)\right)\right)\left(1-\tilde{R}(p)\right)}{p\left(k_7 E\left(1-\tilde{R}(p)\right)+k_2-k_4\right)}\sigma_0^{\circ} \div$$

$$\div\sigma_0^*(t)=\varphi(t)\sigma_0^{\circ}.$$

Отже, зв'язок між напруженнями матриці та волокна як функціями часу має вигляд:

$$\sigma_0^*(t)=\varphi(t)\sigma_0^{\circ},$$

де $\varphi(t)$ є оригіналом функції:

$$\tilde{\Phi}(p)=\frac{E\left(k_1+k_3+k_6-k_5 E\left(1-\tilde{R}(p)\right)\right)\left(1-\tilde{R}(p)\right)}{p\left(k_7 E\left(1-\tilde{R}(p)\right)+k_2-k_4\right)}.$$

Задача про деформування елементарної комірки композита. Отримавши розв'язок задачі про сумісне деформування матриці та волокна, розв'яжемо задачу про поздовжній розтяг транстропного в'язкопружного матеріалу, що моделює композит. Поле напружень для нього визначається рівностями:

$$\sigma_z=\sigma_0(t),\ \sigma_r=\sigma_\theta=\tau_{rz}=\tau_{r\theta}=\tau_{\theta z}=0. \quad (15)$$

Його в'язкопружні властивості моделюються лінійно інтегральним оператором, аналогічним за виглядом оператора (5):

$$\bar{E}_1\left[x(t)\right]=E_1\cdot\left(x(t)-\int_0^t R_1(t-\tau)x(\tau)d\tau\right), \quad (16)$$

$E_1=\text{const}$ – миттєвий модуль пружності, $R_1(t)$ – ядро релаксації.

Знаходимо деформацію ε_z та переміщення $u_z(z,t)$:

$$\varepsilon_z=\bar{E}_1^{-1}\left[\sigma_0(t)\right], \quad (17)$$

$$u_z(z,t)=\bar{E}_1^{-1}\left[\sigma_0(t)\right]\cdot z. \quad (18)$$

Значення $\sigma_0^*(t)$, σ_0° та $\sigma_0(t)$ повинні задовольняти умові рівноваги:

$$f\cdot\sigma_0^{\circ}+(1-f)\varphi(t)\cdot\sigma_0^{\circ}=\sigma_0(t). \quad (19)$$

Розв'язування задачі гомогенізації. Умовою узгодженості поздовжнього розтягу композита та елементарної комірки «матриця –волокно» вибираємо рівність осьових переміщень точок матриці, волокна та однорідного композита. Це дало можливість отримання лінійного інтегрального рівняння типу згортки відносного невідомого ядра $R_1(t)$ інтегрального оператора.

$$f+(1-f)\varphi(t)=\bar{E}_1\left[\alpha_1+\alpha_2 k_6-\alpha_2 k_5 h(t)-\alpha_2 k_7\varphi(t)\right]. \quad (20)$$

Розв'яжемо це рівняння операційним методом. Нехай зображення ефективного ядра релаксації композита $R_1(t)\div\tilde{R}_1(p)$. Оскільки зображення ефективного інтегрального оператора $\tilde{E}_1\left[x(t)\right]\div E_1\tilde{X}(p)\left(1-\tilde{R}_1(p)\right)$, то з урахуванням знайденого зображення функції $\varphi(t)$ отримуємо зображення останнього рівняння у вигляді:

$$\frac{f}{p}+\frac{(1-f)E\left(k_1+k_3+k_6-k_5 E\left(1-\tilde{R}(p)\right)\right)\left(1-\tilde{R}(p)\right)}{p\left(k_7 E\left(1-\tilde{R}(p)\right)+k_2-k_4\right)}=$$

$$=E_1\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2 k_6-\alpha_2 k_5 E\left(1-\tilde{R}(p)\right)}{p}-\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha_2 k_7 E\left(k_1+k_3+k_6-k_5 E\left(1-\tilde{R}(p)\right)\right)\left(1-\tilde{R}(p)\right)}{p\left(k_7 E\left(1-\tilde{R}(p)\right)+k_2-k_4\right)}\right)\left(1-\tilde{R}_1(p)\right).$$

Його розв'язок має вигляд:

$$\tilde{R}_1(p)=\frac{E_1 F_2(p)-F_1(p)}{E_1 F_2(p)}, \quad (21)$$

$$F_1(p)=f\left(k_7 E^*\left(1-\tilde{R}(p)\right)+k_2-k_4\right)+$$

$$+(1-f)E\left(k_1+k_3+k_6-k_5 E^*\left(1-\tilde{R}(p)\right)\right)\times\left(1-\tilde{R}(p)\right).$$

$$F_2(p)=\left(\alpha_1+\alpha_2 k_6\right)\left(k_7 E^*\left(1-\tilde{R}(p)\right)+k_2-k_4\right)-\alpha_2 k_5\left(1-\tilde{R}(p)\right)\times$$

$$\times E\left(E^* k_7\left(1-\tilde{R}(p)\right)+k_2-k_4\right)-$$

$$-\alpha_2 k_7 E^*\left(k_1+k_3+k_6-k_5 E^*\left(1-\tilde{R}(p)\right)\right)\left(1-\tilde{R}(p)\right).$$

Для знаходження ефективного миттєвого модуля пружності E_1 підставимо у рівняння (20) $t=0$ та врахуємо, що $\bar{E}_1\left[y(0)\right]=E_1 y(0)$. Знаходимо:

$$f+(1-f)\cdot\varphi(0)=E_1\left[\alpha_1+\alpha_2 k_6-\alpha_2 k_5 h(0)-\alpha_2 k_7\varphi(0)\right]. \quad (22)$$

Визначимо миттєвий модуль пружності та ядро релаксації в'язкопружного композита.

Знайдемо значення $\varphi(0)$. Для цього використавши, що для оригіналу у разі перетворення Лапласа $\varphi(t)$ із зображенням $\Phi(p)$, $\lim\limits_{p\to\infty} p\Phi(p)=\varphi(0)$ та, враховуючи, що для зображення $\tilde{R}(p)$ $\lim\limits_{p\to\infty}\tilde{R}(p)=0$, знаходимо $\varphi(0)$:

$$\varphi(0)=\lim_{p\to\infty}\frac{E^*\left(k_1+k_3+k_6-k_5 E^*\left(1-\tilde{R}(p)\right)\right)\left(1-\tilde{R}(p)\right)}{\left(k_7 E^*\left(1-\tilde{R}(p)\right)+k_2-k_4\right)}=$$

$$=\frac{E^*\left(k_1+k_3+k_6-k_5 E^*\right)}{k_7 E^*+k_2-k_4}=k.$$

Миттєвий модуль пружності E_1 визначаємо з рівності:

$$E_1=\frac{f+(1-f)\cdot k}{\alpha_1+\alpha_2\left(k_6-k_5 E^*-k_7 k\right)}. \quad (23)$$

Знайдемо оригінал $R_1(t)$ ядра перетворення $\bar{E}_1$ у ефективного оператора модуля пружності в'язкопружного композита. У [1] ця задача розв'язана, коли в'язкопружні властивості компонент композита моделюються ядрами експоненціального типу. Розв'яжемо таку задачу, коли використовують ядро Абеля. Використання експоненціальних функцій має суттєвий недолік, тому що неадекватно описують процес у початковий період часу у разі значень *t*, близьких до нуля. Тут як ядро доцільно використовувати функції, що мали слабкі, тобто інтегровані особливості при $t = 0$, наприклад, ядро Абеля.

Використавши такі позначення:

$$x = x(p) = 1 - \tilde{R}(p),$$

$$c_1 = E\left(\alpha_1 k_7 + \alpha_2\left(k_5\left(k_4 - k_2\right) - k_7\left(k_1 + k_3\right)\right)\right),$$

$$c_2 = (f-1)E^{*2}k_5, \; c_3 = E^*\left(fk_7 + (1-f)\left(k_1 + k_3 + k_6\right)\right),$$

$$c_4 = f\left(k_2 - k_4\right),$$

$$x_0 = \frac{\left(k_4 - k_2\right)\left(\alpha_1 + \alpha_2 k_6\right)}{c_1}.$$

Тоді зображення $\tilde{R}_1(p)$ набуває вигляду:

$$\tilde{R}_1(p) = \frac{E_1 c_1\left(x - x_0\right) - c_2 x^2 - c_3 x - c_4}{E_1 c_1\left(x - x_0\right)} = \frac{a_1 x^2 + a_2 x + a_3}{a_4 x + a_5}. \quad (24)$$

Тут коефіцієнти $a_i, i = 1,2,...,5$ визначаються рівностями: $a_1 = -c_2$, $a_2 = E_1 c_1 - c_3$, $a_3 = -E_1 c_1 x_0 - c_4$, $a_4 = E_1 c_1$, $a_5 = -a_4 x_0$.

Знайдемо ефективний модуль пружності для композита, в'язкопружною матрицею є гума 28Е, для якої $E^* = E_0^* = 0{,}0051$ ГПа, $E_\infty^* = 0{,}0034$ ГПа, $\nu^* = 0{,}5$. Її в'язкопружні властивості визначаються інтегральним оператором з ядром Абеля:

$$R[\varepsilon] = E^*\left(\varepsilon(t) - \int_0^t \frac{E^* - E_\infty^*}{E^*} \cdot \frac{(t-\tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\varepsilon(\tau)d\tau\right).$$

Тут $-1 < \alpha < 0$, $\Gamma(x)$ – гамма-функція. Розглядали ядро, для якого параметр $\alpha = -\frac{1}{2}$. Зображення ядра $\frac{At^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ є $\frac{A}{p^{1+\alpha}}$. Тут стала $A = \frac{E^* - E_\infty^*}{E^*} = 0{,}33$. При $\alpha = -\frac{1}{2}$ зображення ядра набуває вигляд $\tilde{R}(p) = \frac{A}{\sqrt{p}}$.

Отримані результати. Досліджувався композит з вуглеродним пружним транстропним волокном з пружними сталими $E_1^\circ = 226$ ГПа; $E_2^\circ = 12{,}9$ ГПа; $\nu_{12}^\circ = 0{,}31$; $\nu_{23}^\circ = 0{,}2$.

Тоді $x = 1 - \frac{A}{\sqrt{p}}$. Зображення (24) ядра ефективного оператора композита після перетворення набуває вигляду:

$$\tilde{R}_1(p) = \frac{b_1\sqrt{p} + b_2}{\left(d_1\sqrt{p} - d_2\right)\sqrt{p}}, \quad (25)$$

де $b_1 = -A\left(2a_1 + a_2\right)$, $b_2 = A^2$, $d_1 = a_4 + a_5$, $d_2 = a_4 A$.

Нехай $y_1 = \frac{b_1}{d_1}$, $y_2 = \frac{b_2}{d_1}$, $\lambda = -\frac{d_2}{d_1}$. Тоді

$$\tilde{R}_1(p) = \frac{b_1\sqrt{p} + b_2}{\left(d_1\sqrt{p} - d_2\right)\sqrt{p}} = \frac{y_1}{\sqrt{p} + \lambda} + \frac{y_2}{\left(\sqrt{p} + \lambda\right)\sqrt{p}}.$$

Оригінал цього зображення знайдемо, скориставшись таблицями зображень у разі перетворення Лапласа:

$$R(t) = \frac{y_1}{\sqrt{\pi t}} + \left(y_2 - y_1\lambda\right)e^{\lambda^2 t}\left(1 - \Phi\left(\lambda\sqrt{t}\right)\right). \quad (26)$$

Тут функція $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt = erf(x)$.

Отже, для моделювання в'язкопружних властивостей транстропного композита, що має в'язкопружну матрицю, отримали інтегральний оператор:

$$\bar{E} = \left[x(t)\right] = E_1\left[x(t) - \int_0^t R(t-\tau)x(\tau)d\tau\right]. \quad (27)$$

Внаслідок численного експерименту були отримані такі значення для характеристик інтегрального оператора (27), що моделює в'язкопружні властивості композита з наведеними вище характеристиками його компонентів.

Таблиця 1

Значення миттєвого модуля розтягу E_1 для значень відносної об'ємної частки *f* волокна у композиті

f	0,2	0,4	0,6	0,8
E_1	45.204158	90.403177	135.602157	180.801098

Як свідчать отримані числові значення миттєвого модуля розтягу, ця залежність є близькою до лінійної, у цьому можна пересвідчитись, побудувавши графік. З виразу (23) це не очевидно, враховуючи, що коефіцієнти у чисельнику та знаменнику залежать від *f*. Аналіз цих коефіцієнтів свідчить, що з рівності (21) при $f = 0$ отримаємо значення $E_1 = E^*$, при $f = 1$ маємо $E_1 = E_1^\circ$.

З методики отримання E_1 зрозуміло, що формула (23) не залежить від ядра релаксації, що моделює в'язкопружні властивості. Зазначимо, що вона співпадає з формулою, отриманою у [1] для ядра релаксації експоненціального типу, а також аналогічних формул для пружних композитів, які можна розглядати як випадок з нульовим ядром релаксації.

ВИСНОВКИ.

1. Основний результат, отриманий у цій роботі, який і визначає її наукову новизну, – це формула (26) для ядра релаксації в'язкопружного транстропного композита. В'язкопружні властивості одного з його компонентів моделюються ядром релаксації Абеля.

2. Отриманий інтегральний оператор (27), що моделює ефективні властивості композита, якщо для описання в'язкопружних властивостей матриці використовують ядро Абеля. Його використання дозволяє більш адекватно з фізичної точки зору, порівняно з використанням ядра експоненціального типу, представити деформування композита за невеликих значень часу, близьких до початкового моменту часу деформування.

3. Виконане дослідження засвідчує, що гомогенізацію транстропного композита з в'язкопружною матрицею можна отримати шляхом узгодження розв'язків двох крайових задач: задачі про розтяг трансверсально-ізотропного в'язкопружного однорідного циліндра, що моделює композит, та задачі про розтяг системи порожнистого та суцільного циліндрів, що моделюють відповідно матрицю і волокно.

4. Перспективи подальших досліджень пов'язані з визначенням усіх ефективних характеристик для в'язкопружного трансверсального композита. При цьому можна розглянути різні типи ядер для моделювання поведінки в'язкопружних складників композита. Загалом для описання механічних властивостей таких композитів потрібно 5 ефективних характеристик, модулі пружності першого та другого роду є інтегральними операторами, які можна отримувати згідно з описаною у цій роботі методикою.

5. У майбутньому потрібно модифікувати методику узгодженості переміщень для гомогенізації термопружних характеристик в'язкопружного композита.

ЛІТЕРАТУРА

1. Клименко М.І., Гребенюк С.М., Гоменюк С.І. Ефективні механічні характеристики в'язкопружних композитів : монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика». 2019.
2. Klasztorny M., Nycz D.B. Modelling of linear elasticity and viscoelasticity of thermosets and unidirectional glass fibre reinforced thermoset-matrix composites. Part 2: Homogenization and numerical analysis. *Composites Theory and Practice.* 2022. No. 1, pp. 25–39.
3. Ko Y.-F., Ju J.W. New higher-order bounds on effective transverse elastic moduli of three-phase fiber-reinforced composites with randomly located and interacting aligned circular fibers. *Acta Mechanica*. 2012. Vol. 223, pp. 2437–2458.
4. Medeiros R. et al. Effective properties evaluation for smart composite materials. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering.* 2012. Vol. 34, pp. 362–370.
5. Chen Y., Shi X., Zhao Z., Guo Z., Li Y. A thermo-viscoelastic model for particle-reinforced composites based on micromechanical modeling. *Acta Mechanica Sinica*. 2021. No. 37, pp. 402–413.
6. Behera R.K., Pinisetty D., Luong D. Modeling and Simulation of composite Materials. *JOM*. 2019. Vol. 71. No. 11, pp. 3941–3950.

REFERENCES

1. Klyimenko, M.I., Grebenjuk, S.M., Gomenjuk, S.I. (2019). *Efektyvni mekhanichni kharakterystyky viazkopruzhnykh kompozytiv: monohrafiia* [Effective mechanical characteristics of viscoelastic composites]. Kherson: Vydavnychyi dim «Helvetyka» [in Ukrainian].
2. Klasztorny, M., Nycz, D.B. (2022). Modelling of linear elasticity and viscoelasticity of thermosets and unidirectional glass fibre reinforced thermoset-matrix composites. Part 2: Homogenization and numerical analysis. *Composites Theory and Practice.* No. 1, pp. 25–39.
3. Ko, Y.-F., Ju, J.W. (2012). New higher-order bounds on effective transverse elastic moduli of three-phase fiber-reinforced composites with randomly located and interacting aligned circular fibers. *Acta Mechanica*. Vol. 223, pp. 2437–2458.
4. Medeiros, R. et al. (2012). Effective properties evaluation for smart composite materials. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering.* Vol. 34, pp. 362–370.
5. Chen, Y., Shi, X., Zhao, Z., Guo, Z., Li, Y. (2021). A thermo-viscoelastic model for particle-reinforced composites based on micromechanical modeling. *Acta Mechanica Sinica*. No. 37, pp. 402–413.
6. Behera, R.K., Pinisetty, D., Luong, D. (2019). Modeling and Simulation of composite materials. *JOM*. Vol. 71. No. 11, pp. 3941–3950.

 ISSN 2786-6254