РОЗДІЛ І. ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

УДК 519.213
DOI https://doi.org/10.26661/2786-6254-2023-1-01

ЗАДАЧА ПРО МІНІМІЗАЦІЮ ДИСПЕРСІЇ

Григор'єв Ю. О.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики, фізики та астрономії
Одеський національний морський університет
вул. Мечникова, 34, Одеса, Україна
orcid.org/0000-0002-7114-834X
yurii.grigoryev@gmail.com

Кусік Л. І.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики, фізики та астрономії
Одеський національний морський університет
вул. Мечникова, 34, Одеса, Україна
orcid.org/0000-0003-1358-9566
lk09032017@gmail.com

Ключові слова: *екстремальна ляпуновська задача, метод множників Лагранжа, дисперсія випадкової величини, початкові моменти випадкової величини, щільність імовірності, математичне сподівання.*

Робота пов'язана із задачею знаходження щільності ймовірності неперервної випадкової величини таким чином, щоб дисперсія або початкові моменти цієї величини були б найменшими. Розв'язана задача про мінімізацію дисперсії за умови, що щільність $u(x)$ імовірності неперервної випадкової величини не перевищує задану функцію $q(x)$. Результатом роботи є отримання такої щільності: вона повинна дорівнювати заданій функції $q(x)$ в деякому інтервалі (α, β), поза цим інтервалом щільність повинна дорівнювати нулю. Числа α і β знаходяться із системи нелінійних рівнянь і входять у ці рівняння як границі визначених інтегралів. Також розглянуто задачу знаходження щільності ймовірності $u(x)$ випадкової величини за умовами

$$\begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^k u(x)\,dx \to \min, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx = 1, \quad 0 \le u(x) \le q, \end{cases}$$

де q та k – задані додатні числа. Окреслені задачі належать до класу ляпуновських екстремальних задач, що містять інтеграли. Під час їх розв'язання було застосовано принцип мінімуму та метод множників Лагранжа. Як наслідок із теореми Вейєрштрасса витікає, що знайдені стаціонарні точки є точками найменших значень розглянутих функціоналів. Підставивши розв'язок задачі в екстремальну умову, отримана нерівність для початкових моментів будь-якої неперервної випадкової величини, яка обмежена зверху додатною сталою q. Підкреслено, що визначення параметрів у результаті мінімізації дозволить визначити більш точні оцінки в інших значеннях та досягти ефективного рівня оптимізації параметрів. Наведено результати розв'язку математичних задач. Прикладним застосуванням наведеної задачі є реалізація адаптивного прогнозування

та статистичної ідентифікації нелінійних динамічних моделей фізичних та економічних процесів. Наукова новизна отриманого рішення полягає у тому, що вперше отримано систему, в якій математичне сподівання екстремальної випадкової величини розташовується посередині відрізка $[\alpha, \beta]$, завдяки чому, підставивши знайдену функцію в екстремальну умову, отримано найменше значення дисперсії для будь-якої неперервної випадкової величини.

THE PROBLEM OF MINIMIZING DISPERSION

Hryhoriev Yu. O.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Mathematics, Physics and Astronomy
Odesa National Maritime University
Mechnikova str., 34, Odesa, Ukraine
orcid.org/0000-0002-7114-834X
yurii.grigoryev@gmail.com

Kusik L. I.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Mathematics, Physics and Astronomy
Odesa National Maritime University
Mechnikova str., 34, Odesa, Ukraine
orcid.org/0000-0003-1358-9566
lk09032017@gmail.com

Key words: *extreme Lyapunov problem, method of Lagrange multipliers, variance of a random variable, initial moments of a random variable, probability density, mathematical expectation.*

The work is related to the problem of finding the probability density of a continuous random variable in such a way that the variance or initial moments of this variable would be the smallest. The problem of minimizing the variance is solved under the condition that the probability density $u(x)$ of a continuous random variable does not exceed a given function $q(x)$. The result of the work is obtaining such a density: it should be equal to the given function $q(x)$ in some interval (α, β), outside this interval the density should be zero. The numbers α and β are find from the system of nonlinear equations and are included in these equations as limits of definite integrals. By substituting the found function in the extreme condition, the smallest variance value for any continuous random variable is obtained. The problem of finding the probability density of a random variable is also considered under the conditions

$$\begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^k u(x)\,dx \to \min, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx = 1, \quad 0 \le u(x) \le q, \end{cases}$$

where q and k are given positive numbers. The described problems belong to the class of Lyapunov extremal problems containing integrals. When solving them, the minimum principle and the method of Lagrange multipliers were applied. As a consequence of the Weierstrass theorem, it follows that the found stationary points are the points of the smallest values of the considered functionals. Substituting the solution of the problem into an extreme condition, an inequality for the initial moments of any continuous random variable, which is bounded from above by a positive constant q is obtained. It is emphasized that the determination of parameters as a result of minimization will allow to determine more accurate estimates in other values and to achieve an effective level of parameter optimization. The results of solving mathematical problems are given. An exemplary application of the given problem is the implementation of adaptive forecasting and statistical identification of nonlinear dynamic models of physical and economic processes. The scientific novelty of the obtained solution lies in the fact that, for the first time, a system was obtained in which the mathematical expectation of an extreme random variable is located in the middle of the segment $[\alpha, \beta]$, due to which, by substituting the found function in an extreme condition, the smallest variance value for any continuous random variable is obtained.

Вступ. Сучасна математична наука входить до фундаментальних надбань різноманітних галузей людського життя: від будівництва та конструювання деталей до фінансових ринків та соціологічних опитувань. Вдосконалення методів, алгоритмів, програм призводить до постійного руху наукової думки.

Зі статистичними методами обчислення інтегралів і розв'язання інтегральних рівнянь пов'язанt таке завдання: потрібно знайти випадкову величину, що має найменшу дисперсію.

Тематикою досліджень мінімальної дисперсії у ракурсі цієї статті є екстремальні задачі Ляпунова. А. Ляпунов отримав низку основних результатів та розробив ефективні методи дослідження стійкості рішень диференціальних рівнянь.

Ця робота присвячена розв'язанню задачі про мінімізацію дисперсії та початкових моментів за умови, що щільність імовірності випадкової величини не перевищує задану функцію $q(x)$ (або заданого додатного числа q). Об'єктом цього дослідження є поставлені екстремальні задачі. Предметом виступають щільності ймовірностей випадкових величин, що задовольняють умовам цих екстремальних задач.

Метою роботи є отримання розрахункових рівнянь на знаходження мінімальної дисперсії. Підставляючи розв'язок задачі в екстремальну умову, отримаємо нерівність, яка справедлива для будь-якої неперервної випадкової величини, щільність імовірностей якої обмежена зверху додатною сталою q .

Огляд літератури. В умовах сьогодення питання мінімізації дисперсії як моменту другого порядку випадкової величини розглядало чимало науковців. Кожен підхід до мінімізації ґрунтується насамперед на сфері впровадження та має причинно-наслідкові зв'язки.

Так, низка науковців здійснили дослідження [1], в якому розробили метод підвищення ефективності функціонування виробничих систем за рахунок складання оптимальних або близьких до оптимальних за енергетичним критерієм календарних планів. Підхід дозволяє мінімізувати витрати енергії за рахунок складання ефективних графіків. Авторами здійснено розрахунок та підтверджено ефективний вплив мінімізації дисперсії.

М. Кузнецов, О. Лисенко та О. Мельник [2] розглянули задачу оптимізації гібридної енергосистеми за рівнем дисперсії генерованої потужності. Науковцями сформовано задачу, розв'язок якої методом множників Лагранжа дозволяє отримати аналітичне рішення, яке забезпечує мінімальну дисперсію сумарної потужності.

У [3] отримано асимптотичні формули для дисперсії оцінок, які дають можливість дослідити залежність систематичної та середньоквадратичної похибок оцінювання від довжини відрізка реалізації, точки усічення корелограми, а також спектральних характеристик сигналу.

Ґрунтуючись на попередніх дослідженнях, які довели, що аналітичний метод може не забезпечити мінімальну дисперсію, автори у роботі [4] дійшли висновку, що у разі отримання дисперсії слід враховувати лише величину потоку. Далі для реалізації проєктного рішення петльові потоки повинні бути ациклічними. У дослідженні [4] запропоновано нове формулювання та нова методологія, що заснована на генетичному алгоритмі: для фіксації потоків у різних трубах для мінімізації дисперсії рядів потоків у трубах за умови дотримання безперервності потоку в різних вузлах.

У роботі [5] доведено, що задача з невідомими на мінімізацію дисперсії може бути переформульована як кінцева задача опуклої оптимізації. Цей результат забезпечує жорсткі межі кількісної оцінки невизначеності дисперсії.

У статті [6] пропонується виважений алгоритм мінімізації дисперсії WPMAVM. Зокрема, WPMAVM – це допуск до цільової функції алгоритму VMM, він поділяється на суму мінімізації дисперсії, щоб придушити спотворення, спричинене допуском. Зважений член w, який визначається як функція відстані від точки до зваженого середнього, вводиться для придушення спотворення, спричиненого аномальним припущенням.

Стохастичне зменшення дисперсії довело свою ефективність у прискоренні алгоритмів першого порядку для вирішення задач оптимізації з кінцевою сумою, таких як мінімізація емпіричного ризику. Включення додаткової інформації другого порядку виявилося корисним для подальшого підвищення продуктивності цих методів першого порядку. Однак відносно мало відомо про переваги використання зменшення дисперсії для прискорення популярних стохастичних методів другого порядку. У [7] запропоновано алгоритм мінімізації з кінцевою сумою, який має всі переваги методів другого порядку: простий розмір одиничного кроку, крупнопакетні операції, що легко розпаралелюються, і швидка локальна збіжність. Використовується перевага зменшення дисперсії для досягнення поліпшеної швидкості збіжності (за прохід даних) для гладких і опуклих завдань. Запропонований алгоритм може прискорити багато стохастичних методів другого порядку, а також ітераційні розв'язки найменших квадратів, і він вигідно відрізняється від популярних методів першого порядку зі зменшенням дисперсії.

У роботі [8] запропоновано метод адаптивного зменшення дисперсії під назвою ADASPIDER для мінімізації L-гладких, не випуклих функцій зі структурою кінцевої суми. ADASPIDER є першим не випуклим методом зменшення дисперсії без параметрів у тому сенсі, що він не вимагає знання параметрів, що залежать від завдання, таких як константа гладкості L, цільова точність або обмеження на норми градієнта.

Методи дослідження. Розглянемо задачу знаходження щільності qмовірності $u(x)$ випадкової величини з мінімальною дисперсією за умови, що невід'ємна щільність імовірності не перевищує задану функцію $q(x)$. Математична модель задачі має такий вигляд:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 u(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xu(x)dx\right)^2 \to \min,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dx = 1,\ \ 0 \le u(x) \le q(x).$$

Позначимо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xu(x)dx = \gamma.$$

Отримаємо задачу знаходження функції $u(x)$ та числа γ за умовами:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 u(x)dx - \gamma^2 \to \min,\ \int_{-\infty}^{+\infty} xu(x)dx = \gamma,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dx = 1,\ 0 \le u(x) \le q(x).$$

Задача належить до ляпуновських екстремальних задач [9]. Схожа задача була розв'язана в роботі [10]. Різниця в тому, що там γ задане число, а тут – шукане.

Результати. Принцип мінімуму приводить до задачі знаходження $u(x)$ за умовою

$$\min_x u\left(x^2 + \mu x + \lambda\right),$$

де λ та μ – невідомі множники Лагранжа. Розв'язком цієї задачі є функція

$$u(x) = \begin{cases} q(x), & x \in (\alpha,\beta), \\ 0, & x \overline{\in} (\alpha,\beta), \end{cases}$$

де α та β – корені рівняння $x^2 + \mu x + \lambda = 0$, $\alpha < \beta$. Ці числа можна знайти, розв'язавши наступну задачу на умовний екстремум:

$$\int_{\alpha}^{\beta} x^2 q(x)dx - \left(\int_{\alpha}^{\beta} xq(x)dx\right)^2 \to \min,\ \int_{\alpha}^{\beta} q(x)dx = 1.$$

Складемо функцію Лагранжа, позначивши через λ – множник Лагранжа:

$$L(\alpha,\beta,\lambda) = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 q(x)dx - \left(\int_{\alpha}^{\beta} xq(x)dx\right)^2 + \lambda\int_{\alpha}^{\beta} q(x)dx.$$

Продиференціювавши її по α та β, отримаємо

$$\beta^2 q(\beta) - 2\beta q(\beta)\int_{\alpha}^{\beta} xq(x)dx + \lambda q(\beta) = 0,$$

$$\alpha^2 q(\alpha) - 2\alpha q(\alpha)\int_{\alpha}^{\beta} xq(x)dx + \lambda q(\alpha) = 0.$$

Значення α та β, за яких функція $q(x)$ дорівнює нулю, загалом не розв'язують задачу. Тому система прийме вигляд:

$$\beta^2 - 2\beta\int_{\alpha}^{\beta} xq(x)dx + \lambda = 0,\ \alpha^2 - 2\alpha\int_{\alpha}^{\beta} xq(x)dx + \lambda = 0.$$

Виключивши з цієї системи λ, прийдемо до наступної системи для визначення α та β:

$$\int_{\alpha}^{\beta} xq(x)dx = \frac{\alpha+\beta}{2},\ \int_{\alpha}^{\beta} q(x)dx = 1.$$

Виходить, що математичне сподівання шуканої випадкової величини повинно ділити відрізок $[\alpha,\beta]$ навпіл.

Розглянемо окремий випадок:

$$q(x) = q = const > 0.$$

Обидва рівняння системи приведуть до рівності

$$\beta - \alpha = \frac{1}{q},$$

а дисперсія будь-якої неперервної випадкової величини задовольняє нерівність

$$DX \ge \frac{1}{q^2},$$

де q – найбільше значення щільності ймовірності випадкової величини.

Ще розглянемо задачу знаходження щільності ймовірності $u(x)$ випадкової величини за умовами

$$
\begin{cases}
\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^k u(x)\,dx \to \min, \\
\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx = 1, \quad 0 \le u(x) \le q,
\end{cases}
$$

де q та k – задані додатні числа.

Ця задача також належить до ляпуновських екстремальних задач та розв'язується так само, як і попередня. Її розв'язок має вигляд

$$
u(x) = \begin{cases}
q, & x \in \left(-\dfrac{1}{2q}, \dfrac{1}{2q}\right), \\
0, & x \,\overline{\in}\, \left(-\dfrac{1}{2q}, \dfrac{1}{2q}\right).
\end{cases}
$$

Підставляючи розв'язок задачі в екстремальну умову, отримаємо нерівність

$$
\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^k u(x)\,dx \ge \frac{1}{(2q)^k (k+1)}.
$$

Ця нерівність справедлива для будь-якої неперервної випадкової величини, щільність імовірностей якої обмежена зверху додатною сталою q.

Дискусія. У результаті проведених досліджень розв'язок задачі про мінімізацію дисперсії представлено у вигляді нерівності, яка справедлива для будь-якої неперервної випадкової величини, щільність імовірностей якої обмежена зверху додатною сталою q. Умова щодо невід'ємної щільності ймовірності не перевищує задану функцію $q(x)$. Особливістю поданої методики є отримання такої щільності, яка дорівнює заданій функції $q(x)$ у деякому інтервалі (α, β), а поза цим інтервалом щільність дорівнює нулю. Зміст отриманої системи відрізняється від наявних тим, що математичне сподівання екстремальної випадкової величини розташовується посередині відрізка $[\alpha, \beta]$, на основі чого, підставивши знайдену функцію в екстремальну умову, отримано найменше значення дисперсії для будь-якої неперервної випадкової величини.

Фундаментальний складник представленого рішення належить до класу ляпуновських екстремальних задач, що містять інтеграли. Результуючим складником є реалізація методу множників Лагранжа та принципу мінімуму, а знайдені стаціонарні точки є точками найменших значень розглянутих функціоналів.

Отже, можна зробити висновок, що визначення параметрів у результаті мінімізації дозволить визначити більш точні оцінки в інших значеннях та досягти ефективного рівня оптимізації параметрів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Жданова О.Г., Клименко В.М., Сперкач М.О. Складання енергетично ефективних календарних планів для функціонування виробничих систем. *Вісник Вінницького політехнічного інституту*. 2020. № 6. С. 54–61. URL: https:// doi.org/ 10.31649/1997-9266-2019-147-6-54-61.
2. Кузнецов М., Лисенко О., Мельник О. Задача оптимізації гібридної енергосистеми за рівнем дисперсії генерованої потужності. *Відновлювана енергетика*. 2022. С. 17–26. URL: https://doi.org/10.36296/1819-8058.2022.1(68).
3. Юзефович Р., Яворський І., Мацко І., Варивода М. Аналіз дисперсії когерентної оцінки взаємоспектральної густини періодично корельованих випадкових процесів. *IV Міжнародна науково-технічна конференція «Теоретичні та прикладні аспекти радіотехніки, приладобудування і комп'ютерних технологій»*. Тернопіль, 2019. № 1. P. 75–78.
4. Nabira Maheshwari Rathi S., Gupta R. Genetic Algorithm for Minimization of Variance of Pipe Flow-Series for Looped. *Water Distribution Networks*. 2022. URL: https://doi.org/ 10.1007/978-3-030-81358-1_16.
5. Birrell Jeremiah. Distributionally Robust Variance Minimization: Tight Variance Bounds over f-Divergence Neighborhoods. 2020. URL: https://doi.org/ 10.1109/TIT.2022.3160659.
6. Lv R., Liu H., Wang Z., Zhu D. WPMAVM: Weighted plus-and-minus allowance variance minimization algorithm for solving matching distortion. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*. 2022. № 76. URL: https:// doi.org/102320.10.1016/j.rcim.2022.102320.
7. Dereziński M. Stochastic Variance-Reduced Newton: Accelerating Finite-Sum Minimization with Large Batches. 2022. URL: https://doi.org/ 10.48550/arXiv.2206.02702.
8. Kavis A., Skoulakis S., Antonakopoulos K., Dadi L., Cevher V. Adaptive Stochastic Variance Reduction for Non-convex Finite-Sum Minimization. *NeurIPS 2022*, 2022. URL: https:// doi.org/ 10.1137/20M1374614.
9. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи : учебное пособие. / Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. М. Наука, 1984.
10. Григор'єв Ю.О. Задача про мінімізацію дисперсії. *П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 15–17 травня, 2014 р., Київ. Матеріали конф. Т. 3. Теорія ймовірностей та математична статистика*. Київ : НТУУ «КПІ», 2014. С. 141–142.

REFERENCES

1. Zhdanova, O.H., Klymenko, V.M., Sperkach, M.O. (2020). *Skladannia enerhetychno efektyvnykh kalendarnykh planiv dlya funktsionuvannia vyrobnychykh system.* Visnyk Vinnyts'koho politekhnichnoho instytutu. 2020. № 6. S. 54–61. Retrieved from: https://doi.org/10.31649/1997-9266-2019-147-6-54-61 [in Ukrainian].
2. Kuznetsov, M., Lysenko, O., Mel'nyk, O. (2022). *Zadacha* optymizatsiyi hibrydnoyi enerhosystemy za rivnem dyspersiyi henerovanoyi potuzhnosti. Vidnovlyuvana enerhetyka. 2022. S. 17–26. Retrieved from: https://doi.org/10.36296/1819-8058.2022.1(68) [in Ukrainian].
3. Yuzefovych, R., Yavors'kyy, I., Matsko, I., Varyvoda, M. (2019). Analiz dyspersiyi koherentnoyi otsinky vzayemospektral'noyi hustyny periodychno korel'ovanykh vypadkovykh protsesiv. IV Mizhnarodnoyi naukovo-tekhnichnoyi konferentsiya "Teoretychni ta prykladni aspekty radiotekhniky, pryladobuduvannya i komp'yuternykh tekhnolohiy". Ternopil', 2019. № 1. P. 75–78 [in Ukrainian].
4. Nabira Maheshwari Rathi S., Gupta R. (2022). *Genetic Algorithm for Minimization of Variance of Pipe Flow-Series for Looped.* Water Distribution Networks. Retrieved from: https:// doi.org/ 10.1007/978-3-030-81358-1_16.
5. Birrell Jeremiah. (2020). *Distributionally Robust Variance Minimization: Tight Variance Bounds over f-Divergence Neighborhoods*. Retrieved from: https://doi.org/10.1109/TIT.2022.3160659.
6. Lv, R., Liu, H., Wang, Z., Zhu, D. (2022). *WPMAVM: Weighted plus-and-minus allowance variance minimization algorithm for solving matching distortion*. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. № 76. Retrieved from: https:// doi.org/ 102320. 10.1016/j.rcim.2022.102320.
7. Dereziński, M. (2022). *Stochastic Variance-Reduced Newton: Accelerating Finite-Sum Minimization with Large Batches*. Retrieved from: https://doi.org/10.48550/arXiv.2206.02702.
8. Kavis, A., Skoulakis, S., Antonakopoulos, K., Dadi, L., Cevher, V. (2022). *Adaptive Stochastic Variance Reduction for Non-convex Finite-Sum Minimization*. NeurIPS 2022. Retrieved from: https://doi.org/10.1137/20M1374614.
9. Alekseev, V.M., Haleev, E.M., Tykhomyrov, V.M. (1984). Sbornik zadach po optimizatsii. Teoriya. Primery. Zadachi. Uchebnoye posobiye. Moskva: Nauka [in Russian].
10. Hryhoriev, Yu.O. (2014). Zadacha pro minimizatsiyu dyspersiyi. P'yatnadtsyata mizhnarodna naukova konferentsiya im. akad. Mykhayla Kravchuka, 15–17 travnya, 2014 r., Kyiv. Materialy konf. T. 3. Teoriya ymovirnostey ta matematychna statystyka. Kyiv: NTUU «KPI». S. 141–142 [in Ukrainian].