

УДК 539.3
DOI <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2023-1-03>

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛУ ТА УМОВ КОНТАКТУ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН У РАЗІ ВЗАЄМОДІЇ ШТАМПА ТА ПЛАСТИНИ

Шпорта А. Г.

*кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри прикладної математики
Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
просп. Дмитра Яворницького, 19, Дніпро, Україна
orcid.org/0000-0002-1260-7358
shporta.a.h@nmti.one*

Кагадій Т. С.

*доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри прикладної математики
Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
просп. Дмитра Яворницького, 19, Дніпро, Україна
orcid.org/0000-0001-6116-4971
kagadiy@i.ua*

Онопрієнко О. Д.

*доктор філософії,
доцент кафедри вищої математики, фізики
та загальноінженерних дисциплін
Дніпровський державний аграрно-економічний університет
вул. Сергія Єфремова, 25, Дніпро, Україна
orcid.org/0000-0002-3127-4616
onopriienko.oleg@gmail.com*

Ключові слова: *анізотропія, зчеплення, ковзання, розподіл напружень, вдавлювання, криволінійний сектор, штамп, метод збурень.*

У статті досліджуються результати, отримані під час застосування методу збурень до розв'язання контактних задач. Приділяється увага впливу властивостей матеріалів тіл взаємодії. Враховано також вплив складної геометрії зони контакту.

У роботі побудовано та розглянуто математичні моделі задач про взаємодію пружної ортотропної півнескінченної пластини з циліндричною анізотропією у вигляді криволінійного сектора. У процесі взаємодії штамп і пластини виникають ділянки ковзання і зчеплення.

Вихідні задачі теорії пружності, складні за своєю початковою постановкою, у процесі застосування методу збурень зводяться до послідовного розв'язання більш простих задач теорії функцій комплексної змінної.

Отримано аналітичні розв'язки задачі про взаємодію пружної анізотропної півнескінченної пластини у формі криволінійного сектора та жорсткого штамп з урахуванням наявності ділянок ковзання та зчеплення в зоні контакту. Як вагомі результати, що отримані після розв'язання сформульованих контактних задач, можна вказати знайдені закономірності розподілу напружень під штампом, а також залежність цього розподілу від розмірів ділянки контакту. Також проведено аналіз залежності розміру зони зчеплення від характеристик жорсткості сектора з урахуванням різних матеріалів (для сектора), кута розкриття сектора та розмірів штамп.

З метою подальшого розвитку методу та доведення зручності застосування методу збурень у складних мішаних крайових задачах проведено дослідження напружено-деформованого стану пружної анізотропної пластини для аналога задачі Галіна, при цьому розглянуто випадки для різних матеріалів пластини. Також було отримано відповідні аналітичні розв'язки. Проаналізовано залежність розміру площі зчеплення від розмірів штампа та кута розкриття сектора, а також від фізичних властивостей матеріалу сектора. У роботі виконано можливі граничні переходи та проведено порівняння з відомими науковими результатами. Запропонований авторами підхід дозволяє отримувати аналітичні рішення практично важливих проблем контактної взаємодії, проводити можливі оцінки напружено-деформованого стану товстостінних конструкцій з армуючими елементами, штампами, накладками тощо. Результати також можуть бути корисними у разі проектування гірничих виробок. При цьому враховуються такі важливі питання, як особливості фізичних властивостей матеріалів взаємодіючих тіл, складна геометрія зони контакту, виникнення ділянок ковзання та зчеплення в зоні контакту.

**STUDY OF THE MATERIAL PROPERTIES INFLUENCE
AND CONTACT CONDITIONS ON THE STRESS-STRAIN STATE
DURING THE INTERACTION OF A STAMP AND A PLATE**

Shporta A. H.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor at the Department of Applied Mathematics
Dnipro University of Technology
Dmytra Yavornytskoho Ave., 19, Dnipro, Ukraine
orcid.org/0000-0002-1260-7358
shporta.a.h@nmu.one*

Kagadiy T. S.

*Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
Professor at the Department of Applied Mathematics
Dnipro University of Technology
Dmytra Yavornytskoho Ave., 19, Dnipro, Ukraine
orcid.org/0000-0001-6116-4971kagadiy@i.ua*

Onopriienko O. D.

*Ph.D., Associate Professor at the Department of Higher Mathematics,
Physics and General Engineering Disciplines
Dnipro State Agrarian and Economic University
Serhii Efremov str., 25, Dnipro, Ukraine
orcid.org/0000-0002-3127-4616
onopriienko.oleg@gmail.com*

Key words: *anisotropy, adhesion, sliding, stress distribution, indentation, curvilinear sector, stamp, perturbation method.*

The article examines the results obtained when applying the perturbation method to the solution of individual contact problems. Attention is paid to the influence of non-ideal properties of materials of interaction bodies. The influence of the complex geometry of the contact zone is also taken into account.

In the article, mathematical models of problems on the interaction of an elastic orthotropic semi-infinite plate with cylindrical anisotropy in the form of a curvilinear sector are constructed and considered. In the process of interaction

between the stamp and the plate, there are areas of sliding and adhesion. The original problems of the theory of elasticity, difficult in their initial formulation, in the process of applying the perturbation method are reduced to the sequential solution of simpler problems of the theory of functions of a complex variable.

Analytical solutions to the problem of the interaction of an elastic anisotropic semi-infinite plate in the form of a curvilinear sector and a rigid stamp were obtained, taking into account the presence of areas of sliding and adhesion in the contact zone. As significant results obtained after solving the formulated contact problems, it is possible to indicate the found regularities of stress distribution under the stamp, as well as the dependence of this distribution on the dimensions of the contact area. An analysis of the dependence of the size of the coupling zone on the stiffness characteristics of the sector was also carried out, taking into account different materials (for the sector), the opening angle of the sector and the dimensions of the stamp.

In order to further develop the method and prove the convenience of applying the perturbation method in complex mixed boundary value problems, a study of the stress-strain state of an elastic anisotropic plate for an analogue of the Galin problem was carried out, while cases for different plate materials were considered. Corresponding analytical solutions were also obtained. The dependence of the size of the adhesion area on the dimensions of the stamp and the opening angle of the sector, as well as on the physical properties of the material of the sector, was analyzed. Possible boundary transitions are performed in the work and a comparison with known scientific results is made. The approach proposed by the authors makes it possible to obtain analytical solutions to practically important problems of contact interaction, to carry out possible assessments of the stress-strain state of thick-walled structures with reinforcing elements, stamps, overlays, etc. The results may also be useful when designing mining works. At the same time, such important issues as the peculiarities of the physical properties of the materials of the interacting bodies, the complex geometry of the contact zone, the occurrence of areas of sliding and adhesion in the contact zone are taken into account.

Вступ

Питання контактної взаємодії має вагоме значення для сучасного будівництва, створення деталей та механізмів, оскільки воно описує такі важливі процеси й питання, як знос, руйнування, міцність і надійність конструкцій та споруд. У зонах контакту виникають додаткові зусилля і тиски, тож потреба у проведенні коректної попередньої оцінки напружено-деформованого стану деталей взаємодії є цілком природною і виключно важливою. Для побудови адаптованих рівнянь апроксимації і проведення оцінки доцільності застосування різних гіпотез у сучасній теорії пружності широко використовується асимптотичний аналіз.

Безперечно, дослідження можуть бути проведені за допомогою чисельних методів, але наявність аналітичних розв'язків важлива для задач, де під час створення моделі необхідно врахувати складні властивості матеріалу. Наприклад, може йтися про наявність криволінійної анізотропії, оскільки це призводить до значних математичних труднощів під час необхідних розрахунків. Вагомим є також те, що аналітичні розв'язки дозво-

ляють визначити правильність результатів, отриманих іншими методами, досліджувати особливі точки.

Серед задач контактної взаємодії багато дослідників вивчають напружено-деформований стан пластини під дією жорсткого штампу або системи штампів. У цьому разі для отримання розв'язків плоских контактних задач теорії пружності зручно використовувати математичний апарат, основою якого є застосування теорії функцій комплексного змінного [1; 2; 3].

Задача про вплив штампа, що переміщується з певною сталою швидкістю на границі пружного тіла, була досліджена Л.А. Галінім. Також Л.А. Галін уперше сформулював і розв'язав задачу про вплив штампа на границю пружного тіла з тим уточненням, що в ділянці контакту з'являються ділянки зчеплення і ковзання. Дослідженню напружено-деформованого стану пружних тіл з включеннями та багатокомпонентних тіл присвячені роботи [4; 5; 6]. У дослідженнях [7; 8] відображене застосування методу збурень (асимптотичного методу) до розв'язання задач нелінійної теорії пружності. Аналіз сучасного

стану проблем контактної взаємодії підтверджує актуальність запропонованого підходу та отриманих у роботі розв'язків.

Метою цього дослідження є розв'язання контактної задачі теорії пружності про дію жорсткого штампа на пружний ортотропний криволінійний сектор з циліндричною анізотропією. Півнескінченна пластина закріплена за кромками. На вільну границю сектора діє жорсткий штамп нормальним зусиллям. Припускається, що в ділянці контакту штампа з пластиною існують дві ділянки ковзання, які примикають до кінцевих точок ділянки контакту, та ділянка зчеплення, що розташована між ними. Потрібно визначити і дослідити закони розподілу напружень під штампом і розмір ділянки зчеплення.

Метод

Для розв'язання контактної задачі був використаний метод збурень, запропонований та розроблений у роботах А.В. Павленко. Згідно з цим методом, асимптотичний аналіз рівнянь теорії пружності для ортотропних середовищ відбувається з використанням параметра, що характеризує анізотропні властивості матеріалу пластини (далі – малий параметр). У процесі розв'язання вихідні складні задачі теорії пружності зводяться до послідовного розв'язання крайових задач теорії потенціалу.

Постановка проблеми

Розглядається взаємодія жорсткого штампа та півнескінченної пружної анізотропної пластини в умовах узагальненого плоского напруженого стану. Припускається, що пружна пластина закріплена за кромками: $R_0 \leq r < \infty$, $-\gamma \leq \theta \leq \gamma$, $\theta = \pm \gamma$. Матеріал сектора є ортотропним, головні напрямки анізотропії відповідають полярним координатам.

У грань сектора $r = R_0$ на ділянці $-\lambda \leq \theta \leq \lambda$ з нормальним зусиллям P_0 вдавлюється жорсткий штамп, його основа співпадає з границею $r = R_0$. Припускається, що під штампом існують зони зчеплення та проковзування. Зона зчеплення розташована між двома ділянками проковзування, що примикають до кінцевих точок штампа (відшарування не виникає). Одним з основних завдань, що мають бути розв'язаними за такої постановки задачі, є знаходження положення точок розділу зон зчеплення та проковзування ($\theta = \pm \alpha$) (рис. 1) залежності від характеристик матеріалу сектора. В цих точках потрібно враховувати обов'язкову обмеженість та неперервність напружень. Крім того, в задачі потрібно визначити закони розподілу напружень під штампом і розмір ділянки зчеплення.

Результати

Шляхом введення безрозмірних координат ξ, η замість полярних координат ρ', φ за допо-

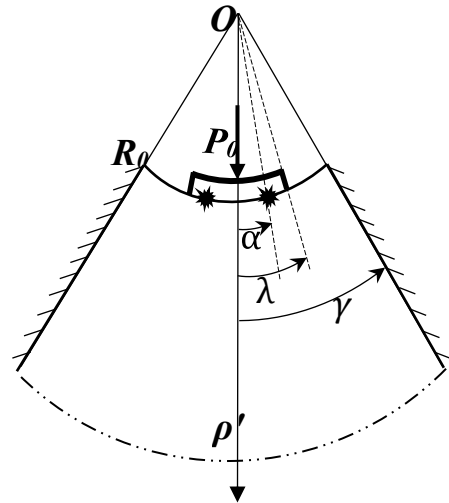


Рис. 1. Півнескінченна пластина під дією жорсткого штампа за наявності ділянок ковзання та зчеплення

могою перетворень $\rho' = R_0 e^\xi$, $\varphi = \eta$ початкова задача може зводитися до інтегрування рівнянь рівноваги плоского сектора у переміщеннях

$$B_1 u_{\xi\xi} + G u_{\eta\eta} - B_2 (v_\eta + u) + G m v_{\xi\eta} - G v_\eta = 0,$$

$$G v_{\xi\xi} + B_2 v_{\eta\eta} + B_2 u_\eta + G m u_{\xi\eta} + G (u_\eta - v) = 0$$

Крайові умови при цьому визначаються таким чином:

зовні штампу

$$\sigma_1 = B_1 (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\xi + \vartheta_2 (v_\eta + u)) = 0,$$

$$\tau = G (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\eta + v_\xi - v) = 0 \quad \text{для } (\xi = 0, \lambda < |\eta| < \gamma),$$

$$u = v = 0 \quad \text{для } (\eta = \pm \gamma);$$

$$u = const = c_0 \quad \text{для } (\xi = 0, |\eta| \leq \lambda),$$

$$v = 0 \quad \text{для } (\xi = 0, |\eta| \leq \alpha),$$

$\tau = sign(\eta) \rho \sigma_1$ для $(\xi = 0, \alpha < |\eta| < \lambda)$, – під штампом.

Переміщення та напруження на нескінченності вважаються рівними нулю. Крім того, необхідно дотримуватись виконання умов рівноваги штампа.

Метод збурень, використаний у роботі для розв'язання поставленої проблеми, дає змогу відокремити два типи напружено-деформованого стану плоского пружного сектора **на два складники**, що пов'язані між собою через крайові умови [8].

Дослідження **напружено-деформованого стану I типу** (відбувається повільна зміна пара-

метрів у напрямку координати ξ) у першому наближенні полягає в інтегруванні рівнянь рівноваги у переміщеннях [7] у разі таких крайових умов:

$$\begin{aligned}\sigma_1^{1,0} &= B_1 R_0^{-1} u_\xi^{1,0} = 0 \quad \text{для} \quad (\xi = 0, \lambda < |\eta| < \gamma); \\ \sigma_1^{1,0} &= B_1 R_0^{-1} u_\xi^{1,0} = 0 \quad \text{для} \quad (\xi = 0, \lambda < |\eta| < \gamma); \quad (1) \\ u^{1,0} &= \text{const} \quad \text{для} \quad (\xi = 0, |\eta| \leq \lambda), \\ u^{1,0} &= 0 \quad \text{для} \quad (\eta = \pm \gamma);\end{aligned}$$

Шукана функція та її похідні на нескінченності дорівнюють нулю.

Для знаходження нормального напруження σ_1^0 та складника дотичного напруження $\tau^{1,0}$, що відповідає функції $u^{1,0}$, використовуються такі формули:

$$\sigma_1^0 = \frac{B_1 u_\xi^{1,0}}{R_0 e^\xi} = \frac{\sqrt{G B_1} u_{x_1}^{1,0}}{R_0 e^\xi}, \quad \tau^{1,0} = \frac{G u_\eta^{1,0}}{R_0 e^\xi} = \frac{G u_{y_1}^{1,0}}{R_0 e^\xi}.$$

Безпосередньо під штампом нормальні напруження у першому наближенні визначаються з виразу:

$$\sigma_1^0 = -\frac{P_0 \pi}{4 \gamma K(l_1) \sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}}, \quad (2)$$

Формула для знаходження дотичного напруження $\tau^{1,0}$ при $\xi_1 = 0$, $|\eta_1| > \alpha_1$ виглядає в такому випадку так:

$$\tau^{1,0}(\eta_1) = -\frac{P_0}{4 \gamma K(l_1) (\eta_1^2 - l_1^2)} \sqrt{\frac{G}{B_1}}. \quad (3)$$

Визначення *напруженого стану II типу* (функції повільно змінюються у напрямку координати η) проводиться аналогічним чином.

Тут дотичні напруження у ділянці дотику ($\xi = 0$, $|\eta| < \lambda$) в першому наближенні визначаються за допомогою наведених нижче формул:

$$\begin{aligned}\tau &= \text{sign}(\eta) \rho \sigma_1^0 \quad \text{для} \quad \alpha \leq |\eta| < \lambda, \\ \tau &= \frac{G v_\xi^{2,0}}{r_0} = \frac{v_{x_2}^{2,0} \sqrt{G A_2}}{r_0} \quad \text{для} \quad |\eta| \leq \alpha.\end{aligned}$$

У процесі послідовного розв'язання задач теорії функції комплексного змінного, до яких за рахунок застосування методу збурень зводиться початкова задача, серед інших важливих результатів було знайдено значення параметра α_* , що характеризує розмір ділянки зчеплення між гранню сектора і жорстким штампом. Наведене нижче рівняння пов'язує параметр α_* і характеристики жорсткості матеріалу, враховуючи при цьому вплив коефіцієнта тертя і розміру ділянки контакту:

$$F(\gamma, \alpha_*) = \rho \cdot K'(\alpha_*) \cdot \sqrt{\frac{B_1}{G}}.$$

Тут ρ – коефіцієнт тертя, $\gamma = \arcsin \sqrt{\frac{1 - \alpha_1^2}{1 - \tilde{\alpha}_1^2}}$, $\tilde{\alpha}_1 = \sin \frac{\pi \alpha}{2 \gamma}$, $F(\gamma, \alpha_*)$ – неповний еліптичний інтеграл першого роду, а $K'(\alpha_*)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду.

З метою проведення достовірного та коректного аналізу числових результатів вихідного складника задачі розглянуто декілька випадків матеріалів сектора та залежність від різних значень коефіцієнта тертя ρ . Під час дослідження враховується також той факт, що коефіцієнт тертя – це насамперед емпірична величина, що залежить від багатьох факторів.

Для отримання представлених у роботі числових результатів та їх подальшого аналізу були використані значення коефіцієнта тертя, наведені в літературних джерелах для конкретних матеріалів залежно від способу обробки їх поверхонь. Для зручності обчислень і запису введено величину $\sqrt{G/B_1}$, що є важливою з точки зору опису пружних властивостей матеріалу. Ця величина враховує відношення характеристик жорсткості і для вибраних до розгляду матеріалів приймає такі значення: $\sqrt{G/B_1} = 0.154$ – різновид композитного вуглепластика, $\sqrt{G/B_1} = 0.407$ – різновид композитного склопластика, $\sqrt{G/B_1} = 0.524$ – свинець.

З рис. 2 видно, що зі зростанням значення коефіцієнта тертя ρ збільшується ділянка зчеплення між плоским сектором і штампом. Суттєво впливають також пружні характеристики матеріалу, з якого виготовлена пластина. Показано (рис. 2), що для вуглепластика $\sqrt{G/B_1} = 0.154$ і склопластика $\sqrt{G/B_1} = 0.407$, як для матеріалів з більш яскраво вираженими анізотропними властивостями, збільшення розмірів ділянки зчеплення відбувається швидше, ніж для свинцю $\sqrt{G/B_1} = 0.524$. Отримані залежності між коефіцієнтом тертя і розміром ділянки зчеплення порівнювались зі знайденими раніше іншими методами [2], при цьому можна зазначити, що криві якісно співпадають. У роботі підтверджується також висновок інших авторів [3], що коефіцієнт тертя і коефіцієнт Пуассона безпосередньо впливають на розмір ділянки зчеплення.

Дослідження впливу розмірів поверхонь взаємодії на напружено-деформований стан сектора в ділянці контакту проведемо з використанням параметра λ/γ . Цей параметр введено для зручності і він добре описує відношення розміру ділянки контакту до розміру вільної границі пластини.

Нехай напруження під штампом має вигляд $\sigma^* = -\frac{4\gamma}{Q\pi} \sigma_1^0$, тоді з урахуванням формули (6) отримаємо:

$$\sigma^* = \frac{1}{K(\alpha_1)} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 - \eta_1^2}} = \frac{1}{K(\alpha_1) \cdot \alpha_1} \left(1 - \left(\frac{\eta_1}{\alpha_1} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Якщо позначити $l = \frac{\eta_1}{\alpha_1} = \frac{\sin(\pi\gamma_1/2\gamma)}{\sin(\pi\lambda/2\gamma)}$ при $x_1 = 0, |y_1| < \lambda$ і врахувати, що вплив тертя на розподіл напружень під штампом з'являється лише з третього наближення, маємо:

$$\sigma^* = \frac{1}{K(\alpha_1) \cdot \alpha_1} \frac{1}{\sqrt{1-l^2}} \quad \text{для } -1 < \alpha_1 < 1; \quad -1 < l < 1.$$

Величина σ^* залежить від $\alpha_1 = \sin(\pi\lambda/2\gamma)$, що характеризує розмір ділянки під штампом за рахунок своєї залежності від параметра λ/γ . Встановимо залежність $\alpha_1 = \sin(\pi\lambda/2\gamma)$ від відношення λ/γ (таблиця 1).

У подальшому дослідженні (з використанням розрахункових результатів з таблиці 1) встановлено залежність нормального напруження під штампом від значень відношення розміру ділянки контакту до розміру вільної грані пластини (таблиця 2).

Таким чином, розмір штампа також має суттєвий вплив на значення нормальних напружень, що виникають у ділянці контакту. При цьому чітко відстежується така закономірність: зі збільшенням розміру ділянки контакту між штампом і пластиною (йдеється про величину α_1) значення нормальних напружень під штампом спадають.

Висновки

Використання застосованого підходу дає можливість проведення попередньої оцінки напружено-деформованого стану конструкцій, механізмів або деталей за різних умов контакту. За допомогою метода збурень можуть бути отримані аналітичні розв'язки різноманітних практично важливих і актуальних контактних задач.

У статті проаналізовано *вплив характеристик жорсткості матеріалу* півнескінченної

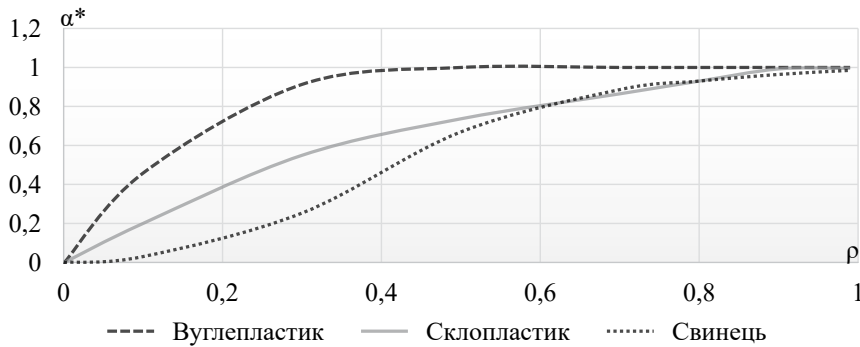


Рис. 2. Залежність розміру ділянки зчеплення α_* для ортотропного сектора з вуглепластика, склопластика і свинцю від значення коефіцієнта тертя ρ

Таблиця 1

Залежність $\alpha_1 = \sin(\pi\lambda/2\gamma)$ від виразу λ/γ .

λ/γ	0,007	0,059	0,1301	0,3321	0,409	0,5901	0,869	0,974
α_1	0,018	0,1895	0,3661	0,7642	0,5992	0,8462	0,9509	0,9968

Таблиця 2

Розподіл нормальних напружень під штампом з урахуванням впливу розміру вільної грані пластини та розміру штампа

$l =$		0	0,2	0,3	0,5	0,6	0,8	0,9
$\sigma^* =$	$\alpha_1 = 0,4971$	1,0942	1,1011	1,1283	1,2511	1,3622	1,4011	2,4533
	$\alpha_1 = 0,5991$	0,8413	0,8694	0,8982	0,9872	1,0941	1,1312	1,9713
	$\alpha_1 = 0,7989$	0,5491	0,5643	0,5961	0,6223	0,6832	0,7141	1,3211
	$\alpha_1 = 0,9992$	0,2092	0,2151	0,2251	0,2443	0,2611	0,2751	0,4822

пластини на розподіл напружень під штапом за **різних значень геометричного параметра** λ / γ (відношення розміру ділянки контакту до кута розкриття пластини). Графічно побудовано відповідні залежності і досліджено вплив на напружено-деформований стан пластини таких параметрів: розмір ділянки взаємодії, кут розкриття сектора, коефіцієнт тертя.

Метод збурень, застосований авторами для розв'язання поставленої проблеми, може бути успішно використаний для розв'язування задач з урахуванням в'язкопружних, фізично або геометрично нелінійних властивостей матеріалів. Він також може бути корисний у вивченні проблем електропружності і проблем, пов'язаних з механікою руйнування.

ЛІТЕРАТУРА

1. Experimental and computational issues for automated extraction of plasticity parameters from spherical indentation / J.E. Campbell et al. *Mechanics of Materials*. 2018. Vol. 124. P. 118–131. URL: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2018.06.004> (дата звернення: 09.03.2023).
2. Улітко А., Острик В. Фрикційний контакт жорсткого конуса з пружним півпростором. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2015. Т. 55, № 4. С. 106–116.
3. Antipov Y.A., Mkhitaryan S.M. A crack induced by a thin rigid inclusion partly debonded from the matrix. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 2017. Vol. 70. No. 2. P. 153–185.
4. Гоменюк С.І., Спиця О.Г. Аналітичний та чисельний підходи до розв'язання задач теорії пружності для багат шарових середовищ : монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2018. 128 с. ISBN 978-966-916-713-2.
5. Николаев А.Г., Танчик Е.А. Упругая механика многокомпонентных тел. Харьков : Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». 2014. 272 с.
6. Николаев А.Г., Танчик Е.А. Распределение напряжений в области четырех сжатых сфероидальных включений в упругом пространстве. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2015. Т. 3. С. 189–198.
7. Stressed-strained state of a layered basic with a fastening element / T.S. Kagadiy et al. *Applied Questions of Mathematical Modeling*. 2020. Vol. 3, No. 2.1. URL: <https://doi.org/10.32782/kntu2618-0340/2020.3.2-1.10> (дата звернення: 10.03.2023).
8. Шпорта А.Г. Контактна взаємодія стрингера та ортотропної пластини з криволінійною. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2020. Т. 1. № 30. С. 185–194. URL: <https://doi.org/10.15421/4219037> (дата звернення: 09.03.2023).

REFERENCES

1. Campbell, J.E., Thompson, R.P., Dean, J., & Clyne, T.W. (2018). Experimental and computational issues for automated extraction of plasticity parameters from spherical indentation. *Mechanics of Materials*, 124, 118–131. Retrieved from: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2018.06.004>.
2. Ulitko, A.F., & Ostryk, V.I. (2015). Fryktsiinyi kontakt zhorstkoho konusa z pruzhnyim pivprostorum. *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polia*, 55(4), 106–116.
3. Antipov, Y.A., & Mkhitaryan, S.M. (2017). A crack induced by a thin rigid inclusion partly debonded from the matrix. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 70(2), 153–185.
4. Homeniuk, S., & Spytysia, O. (2018). *Analitychnyi ta chyselnyi pidkhody do rozv'iazannia zadach teorii pruzhnosti dlia bahatosharovykh seredovyshch: monohrafiia*. Kherson: Vydavnychii dim «Helvetyka». ISBN: 978-966-916-713-2.
5. Nykolaiev, A.H., & Tanchyk, E.A. (2014). *Upruhaia mekhanyka mnohokomponentnykh tel: monohrafiia*. Nats. aerokosmych. un-t ym. N.E. Zhukovskoho, Kharkovskiy avyatsyonnyi ynstitut. ISBN: 978-613-4-93597-5.
6. Nykolaiev, A.H., & Tanchyk, E.A. (2015). Raspredelenye napriazheniy v oblasti chetyrekh szhatykh sferoidalnykh vkluchenyi v uprugom prostranstve. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Fizyko-matematychni nauky*, (3), 189–198.
7. Kagadiy, T.S., Shporta, A.H., Bilova, O.V., & Scherbina, I.V. (2020). Stressed-strained state of a layered basic with a fastening element. *Applied Questions of Mathematical Modeling*, 3(2.1). Retrieved from: <https://doi.org/10.32782/kntu2618-0340/2020.3.2-1.10>.
8. Shporta, A.H. (2019). Kontaktna vzaemodiia strynhera ta ortotropnoi plastyny z kryvoliniinoiu anizotropiieiu. *Problemy obchysliuvalnoi mekhaniky i mitsnosti konstruksyi*, (30), 185–194. Retrieved from: <https://doi.org/10.15421/4219037>.