

## ЕФЕКТИВНІ ПРУЖНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ В УМОВАХ ПОПЕРЕДНЬОГО ПОПЕРЕЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ

**Гребенюк С. М.**

*доктор технічних наук, професор,  
завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0002-5247-9004](https://orcid.org/0000-0002-5247-9004)  
[gsm1212@ukr.net](mailto:gsm1212@ukr.net)*

**Морозова І. Ю.**

*аспірант  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0001-8200-0140](https://orcid.org/0000-0001-8200-0140)  
[irina.oleynik.1997@gmail.com](mailto:irina.oleynik.1997@gmail.com)*

**Ключові слова:** *волокно, гомогенізація, ефективний модуль пружності, коефіцієнт Пуассона, композиційний матеріал, попередня деформація, матриця.*

У статті розглядається математичне моделювання механічної поведінки волокнистого композиту для визначення його напружено-деформованого стану в умовах попередньої деформації. Знайдено аналітичні співвідношення для ефективних характеристик волокнистого композиційного матеріалу, а саме модулів пружності та коефіцієнтів Пуассона, з урахуванням зміни об'ємного вмісту компонентів у процесі деформування.

В роботі для визначення ефективних характеристик застосовується метод представницького об'ємного елемента. Розглянуто спільне деформування порожнистого та суцільного циліндрів, що моделюють, відповідно, матрицю та волокно у композиті, з урахуванням того, що осьові переміщення і волокна й матриці сталі й однакові. Вважається, що в процесі деформації і матеріал матриці, і матеріал волокна підкоряються закону Гука, але в процесі деформації їх об'ємна частка в композиті змінюється. Ця зміна буде визначатися зміною площі поперечного перерізу ділянок елементарної комірки, зайнятих матрицею і волокном, враховуючи, що висота нескінченної комірки буде однаковою для матриці і волокна. Отримано співвідношення для напружено-деформованого стану ізотропного волокна та матриці, в яких передбачається, що незважаючи на лінійний характер деформування матриці та волокна, об'ємна частка компонентів змінюється при збільшенні зовнішнього навантаження й впливає на деформований стан компонентів.

Далі розглядається аналогічна задача для однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює поведінку композиційного матеріалу. Умовою узгодження для цієї задачі будуть виступати рівність осьових переміщень для довільної осьової координати та рівність радіальних переміщень на зовнішній частині циліндричної поверхні. Отримано аналітичні вирази для ефективних пружних характеристик при поперечному деформуванні із врахуванням зміни деформованого стану.

Досліджено залежність ефективних характеристик від зміни об'ємного вмісту волокна в композиті в процесі деформування.

## EFFECTIVE ELASTIC CHARACTERISTICS OF FIBER COMPOSITE MATERIAL UNDER PREVIOUS TRANSVERSE DEFORMATION

**Grebenyuk S. M.**

*Doctor of Technical Sciences, Associate Professor,  
Head of the Department of Fundamental and Applied Mathematics  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-5247-9004  
gsm1212@ukr.net*

**Morozova I. Yu.**

*Postgraduate Student  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-8200-0140  
irina.oleynik.1997@gmail.com*

**Key words:** *fiber, homogenization, effective modulus of elasticity, Poisson's ratio, composite material, preliminary deformation, matrix.*

The article deals with mathematical modeling of the mechanical behavior of a fiber composite to determine its stress-strain state under the conditions of previous deformation. Analytical relations were found for the effective characteristics of the fibrous composite material, namely the modulus of elasticity and Poisson's ratios, taking into account the change in the volume content of the components during the deformation process.

In the work, the method of the representative volume element is used to determine the effective characteristics. The joint deformation of hollow and solid cylinders simulating, respectively, the matrix and fiber in the composite, is considered, taking into account that the axial displacements of both fibers and matrices are constant and the same. It is believed that both the matrix material and the fiber material obey Hooke's law during the deformation process, but their volume fraction in the composite changes during the deformation process. This change will be determined by the change in the cross-sectional area of the areas of the unit cell occupied by the matrix and the fiber, given that the height of the infinite cell will be the same for the matrix and the fiber. The relationship for the stress-strain state of an isotropic fiber and matrix is obtained, in which it is assumed that despite the linear nature of the deformation of the matrix and fiber, the volume fraction of the components changes when the external load increases and affects the deformed state of the components.

Next, we consider a similar problem for a homogeneous transversely isotropic material that models the behavior of a composite material. The agreement condition for this problem will be equality of axial displacements for an arbitrary axial coordinate and equality of radial displacements on the outer part of the cylindrical surface. Analytical expressions for the effective elastic characteristics during transverse deformation, taking into account the change in the deformed state, were obtained.

The dependence of the effective characteristics on the change in the volume content of the fiber in the composite during the deformation process was studied.

## Вступ

Композиційні матеріали отримали широке застосування завдяки своїм особливим властивостям та відмінними експлуатаційними характеристиками.

На основі композитів розроблено велику кількість матеріалів та конструкцій, які широко застосовуються як у важкій, так і в легкій промисловості. Завдяки своїм унікальним властивостям композити забезпечують виробу та конструкції високу міцність, зносостійкість, жорсткість та в цей же час легкість та малу вагу.

Застосування композиційних матеріалів, які мають високу питому міцність і жорсткість, дозволяє у сучасних машинах та конструкціях знизити матеріаломісткість і підвищити корозійну стійкість, відкриває принципово нові можливості оптимального проектування та створення нових конструкцій.

При створенні нових конструкцій із композиційного матеріалу важливою задачею є визначення напружено-деформованого стану такої конструкції в реальних умовах експлуатації. При математичному моделюванні деформування конструкцій із композиційного матеріалу актуальним є описання механічних характеристик матеріалу. Зважаючи на те, що, як правило, частота армування волокнами є досить високою, а поперечний розмір волокна малим, створити математичну модель матеріалу, яка б враховувала кожне окреме волокно, досить проблематично. Тому неоднорідний композиційний матеріал представляється однорідним з механічними характеристиками, які називають ефективними і які залежать від механічних характеристик матриці та волокна і об'ємної частки кожного з них у композиційному матеріалі.

Теоретичні основи визначення ефективних пружних сталей трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює поведінку композиційного матеріалу, представлені в роботах [1–5].

У [1] отримано формулу залежності поздовжнього модуля пружності для трансропного матеріалу, що моделює композит, від пружних характеристик матриці, волокна, перехідного шару, що утворюється між матрицею та волокном, та об'ємної долі кожного з них у композиті. Також у статті проаналізовано вплив наявності перехідного шару на величину ефективного поздовжнього модуля пружності.

Розглянуто відомі методики прогнозування пружних сталей для моделі композитного матеріалу [2], що армований односпрямованими волокнами, через мікромеханічні параметри його складових. Запропоновано методику врахування отриманих ефективних характеристик для цього типу композитного матеріалу у шарах розробленого багат шарового скінченного елемента тонкої неоднорідної оболонки.

У роботі [3] пропонується методика визначення ефективних в'язкопружних характеристик односпрямованого композиційного матеріалу. Застосування запропонованої методики дозволяє отримати пружні характеристики композиту у вигляді функцій пружних характеристик його складових та відносної частоти армування композиту.

Представлено підходи до визначення ефективних механічних характеристик композиційного матеріалу, армованого суцільними та порожнистими волокнами за допомогою методу представницького об'ємного елемента [4]. В результаті отримуємо трансропні ефективні пружні сталі композиційного матеріалу, армованого системою суцільних та порожнистих волокон. За допомогою представленого підходу проведено розрахунок ефективних пружних сталей однаково спрямованого композиційного матеріалу на основі полієфірної смоли, армованого порожнистими та суцільними скловолокнами. Проведено аналіз залежностей для деяких ефективних пружних сталей від об'ємного вмісту порожнини у волокні.

Визначено співвідношення ефективних пружних характеристик волокнистого трансверсально-ізотропного матеріалу [5]. Розглянуто поперечне розтягнення та поперечне стиснення композиційної комірки, визначено напруження та переміщення матриці та волокна за умови їх спільної осесиметричної деформації. Проаналізовано залежність розрахункового співвідношення від об'ємної частки волокна в композиті.

Роботу [6] присвячено отриманню ефективних модулів пружності за допомогою методу асимптотичної гомогенізації для похилих двофазних волокнистих періодичних композитів з нерівномірними умовами неідеального контакту на межі розділу. Досліджено поведінку коефіцієнта пружності зсуву для масивів різної геометрії, пов'язану з кутом комірки.

Статтю [7] присвячено ефективним пружним властивостям композитів, армованих довгими волокнами, які мають поперечно-ізотропну поведінку матеріалу. Ефективні пружні властивості, отримані за допомогою шестикутного та квадратного розташування волокон у поєднанні з процедурою обертального середнього, порівнюються, і наявні розбіжності. Обговорюється вплив об'ємної частки та жорсткості між фазною поверхні на ефективні пружні властивості.

У роботі [8] на основі методів мікромеханічного моделювання та гомогенізації досліджено ефективні пружні та в'язкопружні властивості композитів, армованих короткими волокнами. Було запропоновано теоретичні моделі для виявлення механізмів впливу складових і мікроструктур на пружні та в'язкопружні властивості SFRC, які були чисельно підтверджені моделюванням

кінцевих елементів на основі репрезентативних моделей об'ємних елементів.

Однак, у існуючих роботах припускається, що процес деформування або лінійний, або врахування рівня деформування обмежується врахуванням окремих випадків й не може бути застосована для широкого кола композитів. Так, якщо розглянути один із видів волокнистих композитів – гумовокордні матеріали – то можна зауважити, що в процесі деформування гума може зазнавати значних деформацій, причому у межах закону Гука. У той же час при такому деформуванні гума не змінює свій об'єм (коефіцієнт Пуасона близький до 0,5), а волокна (металеві або тканинні) при деформуванні свій об'єм змінюють (коефіцієнт Пуасона варіюється від 0,25–0,35 для металевих до 0,8 для тканинних), в результаті при деформуванні змінюються об'ємні частки волокна та матриці у композиті.

**Метою дослідження** цієї статті є визначення залежності ефективних механічних характеристик при поперечній деформації від об'ємного вмісту корда, з урахування рівня деформування волокнистого композиційного матеріалу.

**Постановка задачі. Основні співвідношення.** Розглянемо волокнистий композиційний матеріал із довгими волокнами при гексагональній схемі армування. Для виконання поставленої задачі скористаємося методом представницького об'ємного елемента. Виокремимо із об'єму композиту елементарну гексагональну комірку, що містить волокно та оточуючу його матрицю. Зважаючи, що композит армований довгими волокнами, будемо вважати довжину елементарної комірки нескінченною. Гексагональний поперечний переріз комірки апроксимуємо кругом, так щоб об'ємна частка волокна у комірці не змінилася. В результаті елементарний представницький елемент композиційного матеріалу буде складатися з нескінченного суцільного циліндра, що моделює волокно, та нескінченного порожнистого циліндра, що моделює матрицю (рис. 1).

Будемо вважати, що в процесі деформування і матеріал матриці, і матеріал волокна підкорюються закону Гука, але в процесі деформування змінюється їх об'ємна частка у композиті. Ця зміна буде визначатися зміною площі поперечного перерізу областей елементарної комірки, що займає матриця та волокно, враховуючи, що висота нескінченної комірки буде однаковою і для матриці, і для волокна.

З'ясуємо, як зміниться напружено-деформований стан елементарної комірки, якщо в процесі деформування її радіус зміниться з  $b$  до  $b+\Delta b$ , а радіус волокна – з  $a$  до  $a+\Delta a$  (рис. 1). Умовою контакту на межі розділу матеріалів в процесі деформування будемо вважати ідеальне зчеплення.

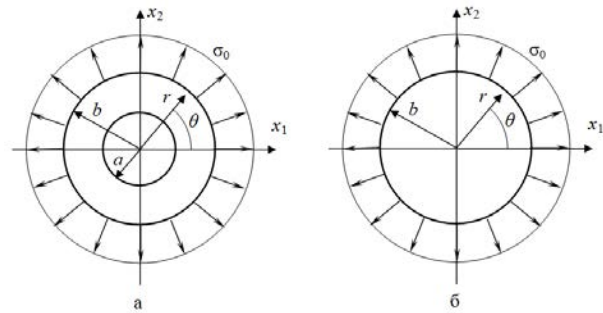
Розглянемо поперечне (у радіальному напрямку) розтягнення елементарної комірки композиційного матеріалу.

Крайові умови підібрано таким чином, щоб вони відповідали експериментальним даним, отриманим для композиційного матеріалу. В місці зчеплення волокна з матрицею відсутній стрибок за радіальним переміщенням та радіальним напруженням, осьові переміщення і волокна й матриці сталі й однакові:

$$\sigma_r^{\circ}(a + \Delta a) = \sigma_r^*(a + \Delta a), u_r^{\circ}(a + \Delta a) = u_r^*(a + \Delta a), u_z^{\circ}(h) = u_z^*(h), \quad (1)$$

Тут і далі символ  $\circ$  означає величини, що відносяться до волокна, а символом  $*$  – величини, що відносяться до матриці.

Розглянемо сумісне вісесиметричне поперечне розтягнення суцільного циліндра ( $0 \leq r \leq a$ ), який моделює волокно, та порожнистого циліндра ( $a \leq r \leq b$ ), який моделює матрицю (рис. 1а).



**Рис. 1. Поперечне розтягнення: а – сумісне деформування матриці та волокна; б – деформування композита**

**Розв'язання задачі методом представницького об'ємного елемента.** Напружено-деформований стан трансверсально-ізотропного волокна буде описуватися наступними співвідношеннями:

$$u_r^{\circ}(r + \Delta r) = C(r + \Delta r) \quad (2)$$

$$u_z^{\circ}(z + \Delta z) = \frac{1}{(1 - \nu^{\circ})} \left( \frac{(\sigma_0^{\circ} + \Delta \sigma_0^{\circ})(1 - \nu^{\circ} - 2(\nu^{\circ})^2) - 2C\nu^{\circ}}{E^{\circ}} \right) (z + \Delta z), \quad (3)$$

$$\sigma_{rr}^{\circ}(r + \Delta r) = \frac{E^{\circ}}{(1 - \nu^{\circ})} \left( \frac{(\sigma_0^{\circ} + \Delta \sigma_0^{\circ})\nu^{\circ}}{E^{\circ}} + C \right);$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{\circ}(r + \Delta r) = \frac{E^{\circ}}{(1 - \nu^{\circ})} \left( \frac{(\sigma_0^{\circ} + \Delta \sigma_0^{\circ})\nu^{\circ}}{E^{\circ}} + C \right), \quad (4)$$

де  $C$  – стала, що визначається з граничних умов.

Співвідношення, які описують напружено-деформований стан трансверсально-ізотропної матриці будуть мати наступний вигляд [9]:

$$u_r^*(r + \Delta r) = A(r + \Delta r) + \frac{B}{(r + \Delta r)};$$

$$u_z^*(z + \Delta z) = \frac{1}{(1 - v^*)} \left( \frac{(\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*)(1 - v^* - 2(v^*)^2)}{E^*} - 2Av^* \right) (z + \Delta z), \quad (5)$$

$$\sigma_{rr}^*(r + \Delta r) = E^* \left( \frac{(\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*)v^*}{E^*(1 - v^*)} + \frac{A}{1 - v^*} - \frac{B}{(r + \Delta r)^2(1 + v^*)} \right);$$

$$\sigma_{\theta\theta}^*(r + \Delta r) = E^* \left( \frac{(\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*)v^*}{E^*(1 - v^*)} + \frac{A}{1 - v^*} - \frac{B}{(r + \Delta r)^2(1 + v^*)} \right). \quad (6)$$

Для того, щоб змодельовати поперечне вісесиметричне розтягнення, необхідно задати таку крайову умову:

$$\sigma_{rr}^*(b + \Delta b) = \sigma_0. \quad (7)$$

Об'ємний вміст волокон в композиті дорівнює  $f$ , то, враховуючи, що область, яку займає матриця в елементарній комірці, і область, яку займає волокно в елементарній комірці, мають однакову висоту, справедливе таке співвідношення:

$$f = \frac{a^2}{b^2}. \quad (8)$$

Відповідно, об'ємний вміст волокон в композиті після поперечного розтягнення буде мати наступний вигляд:

$$f + \Delta f = \frac{(a + \Delta a)^2}{(b + \Delta b)^2}.$$

Виходячи з крайових умов (1), (7), знайдемо сталі  $A$ ,  $B$ ,  $C$  та залежність між  $\sigma_0$  та  $\sigma_0^*$ ,  $\sigma_0^*$  – осьовими напруженнями, які діють на матеріал волокна й матриці, відповідно ( $\sigma_0^* = const$ ,  $\sigma_0 = const$ , виходячи з третьої рівності (1)). З другої рівності (1) маємо:

$$C = A + \frac{B}{(a + \Delta a)^2}. \quad (9)$$

З рівності (7) отримуємо:

$$\sigma_0 = E^* \left( \frac{\sigma_0^* v^*}{E^*(1 - v^*)} + \frac{A}{1 - v^*} - \frac{B}{(b + \Delta b)^2(1 + v^*)} \right), \quad (10)$$

звідки

$$A = \frac{(\sigma_0 + \sigma_0^*)(1 - v^*)}{E^*} - \frac{(\sigma_0^* + \sigma_0^*)v^*}{E^*} + \frac{B(1 - v^*)}{(b + \Delta b)^2(1 + v^*)}, \quad (11)$$

$$C = \frac{(\sigma_0 + \Delta\sigma_0)(1 - v^*)}{E^*} - \frac{(\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*)v^*}{E^*} + B \frac{f(1 - v^*) + (1 + v^*)}{(a + \Delta a)^2(1 + v^*)}. \quad (12)$$

З першої рівності (1), з урахуванням (9) та (10), маємо

$$B = \frac{(a + \Delta a)^2(1 + v^*)(E^*(1 - v^*) - (1 - v^*)E^*)}{E^*(d_2 - d_1)} (\sigma_0 + \Delta\sigma_0) - \frac{(a + \Delta a)^2(1 + v^*)v^*}{(d_2 - d_1)} (\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*) + \frac{(a + \Delta a)^2(1 + v^*)v^*E^*}{E^*(d_2 - d_1)} (\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*), \quad (13)$$

$$A = (\sigma_0 + \Delta\sigma_0) \frac{(1 - v^*)(E^*(1 + v^*) + E^*(1 - v^*))}{E^*(d_2 - d_1)} - (\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*) \frac{f v^*(1 - v^*)}{(d_2 - d_1)} + (\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*) \frac{v^*(d_1 - E^*(1 + v^*))}{E^*(d_2 - d_1)}, \quad (14)$$

$$C = (\sigma_0 + \Delta\sigma_0) \frac{2(1 - v^*)}{(d_2 - d_1)} - \frac{v^*(f(1 - v^*) + (1 + v^*))}{(d_2 - d_1)} (\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*) + \frac{v^*d_1}{E^*(d_2 - d_1)} + \frac{v^*d_1}{E^*(d_2 - d_1)} (\sigma_0^* + \sigma_0^*). \quad (15)$$

Залежність між  $\sigma_0$  та  $\sigma_0^*$ ,  $\sigma_0^*$  знайдемо з третьої рівності (1):

$$\left( \frac{(1 - v^* - 2(v^*)^2)(d_2 - d_1)}{E^*(1 - v^*)} + \frac{2v^*E^*(v^*(f(1 - v^*) + (1 + v^*)) - f v^*(1 - v^*))}{E^*(1 - v^*)} \right) \sigma_0^* + \left( \frac{2(v^*)^2(1 - v^*)(d_1 - E^*(1 + v^*)) - 2v^*v^*d_1(1 - v^*) - (1 - v^* - 2(v^*)^2)(d_2 - d_1)(1 - v^*)}{E^*(1 - v^*)(1 - v^*)} \right) \sigma_0 = \frac{4v^*E^* - 2v^*(E^*(1 + v^*) + E^*(1 - v^*))}{E^*} \sigma_0. \quad (16)$$

Прийнявши такі позначення

$$d_1^* = -d^* = \frac{(E^*(f(1 - v^* - 2v^*v^*) + (1 + v^*)) + E^*(1 - f)(1 - v^* - 2(v^*)^2))}{E^*}$$

$$d_1^* = d^* = \frac{(E^*(f - 1)(1 - v^* - 2v^*v^*) - E^*(f(1 - v^* - 2(v^*)^2) + (1 + v^*)))}{E^*};$$

$$d_0 = \frac{(4v^*E^* - 2v^*(E^*(1 + v^*) + E^*(1 - v^*)))}{E^*}, \quad (17)$$

маємо

$$d^* \sigma_0^* - d^* \sigma_0 = d_0 \sigma_0. \quad (18)$$

Розглянемо тепер аналогічну задачу для однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює поведінку композиційного матеріалу (рис. 1б). У цьому випадку поле напружень буде визначатися такими співвідношеннями:

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = 0, \quad (19)$$

переміщення запишуться у вигляді:

$$u_r(r + \Delta r) = C_1(r + \Delta r), \quad u_z(z + \Delta z) = -\frac{2C_1 v}{(1 + v)}(z + \Delta z). \quad (20)$$

А вирази для напружень набудуть вигляду:

$$\sigma_{rr}(r + \Delta r) = \frac{C_1 E}{1 - v} = const, \quad \sigma_{\theta\theta}(r + \Delta r) = \frac{E C_1}{1 - v} = const. \quad (21)$$

Враховуючи граничну умову

$$\sigma_{rr}(b + \Delta b) = \sigma_0, \quad (22)$$

отримуємо

$$\sigma_{rr} = \sigma_0; \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_0. \quad (23)$$

З урахуванням (19), (23) рівняння стану трансверсально-ізотропного матеріалу набудуть вигляду:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_0(1 - v)}{E}; \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{2\sigma_0 v}{E}. \quad (24)$$

Тоді переміщення, згідно зі співвідношеннями Коші, визначатимуться формулами:

$$u_r(r + \Delta r) = \frac{\sigma_0(1 - v)}{E}(r + \Delta r) + C_1; \quad u_z(z + \Delta z) = -\frac{2\sigma_0 v}{E}(z + \Delta z) + C_2. \quad (25)$$

Сталі  $C_1 = C_2 = 0$  з урахуванням, що для цієї задачі будуть виконуватися умови  $u_r(0) = 0$  та  $u_z(0) = 0$ , тоді

$$u_r(r + \Delta r) = \frac{\sigma_0(1 - v)}{E}(r + \Delta r); \quad u_z(z + \Delta z) = -\frac{2\sigma_0 v}{E}(z + \Delta z). \quad (26)$$



Для того, щоб збігалися умови рівноваги для обох задач, необхідно, щоб виконувалася рівність:

$$\pi a^2(\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*) + \pi(b^2 - a^2)(\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*) = 0$$

або

$$(\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*)f + (\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*)(1 - f) = 0. \quad (27)$$

З урахуванням (18) отримуємо:

$$\sigma_0^* = \sigma_0 \frac{d_0 f}{d^* f + d^* (1 - f)}, \quad \sigma_0^* = \sigma_0 \frac{d_0 (f - 1)}{d^* f + d^* (1 - f)}. \quad (28)$$

З першої умови (29), з урахуванням (28), маємо такий пружний коефіцієнт:

$$\frac{1 - \nu_{23}}{E_2} = \frac{E^*(1 - \nu^*)(f + \Delta f)(1 + \nu^*) + (1 - \nu^*) + E^*(1 + \nu^*)(1 - \nu^*)(1 - (f + \Delta f))}{E^*(d_2 - d_1)} + \frac{d_0(f + \Delta f)(f + \Delta f - 1)(\nu^* E^*(1 + \nu^*) + E^*(\nu^*(1 - \nu^*) - 2\nu^*))}{E^*(d_2 - d_1)(d^* f + d^*(1 - (f + \Delta f)))} \quad (30)$$

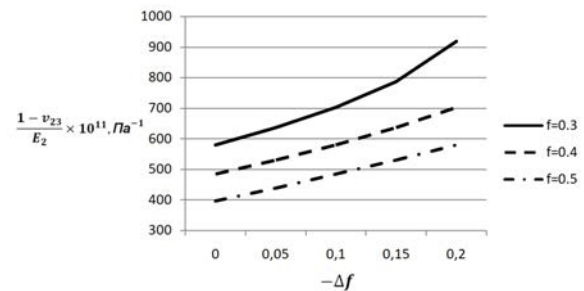
З другої умови (29), з врахуванням (28), отримуємо співвідношення:

$$-\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{d_0(f + \Delta f)(d_2 - d_1 + 2E^*\nu^*(f + \Delta f - 1) - 2f(\nu^*)^2 E^*)}{2E^*(d_2 - d_1)(d^*(f + \Delta f) + d^*(1 - (f + \Delta f)))} - \frac{\nu^*(E^*(1 + \nu^*) + E^*(1 - \nu^*))}{E^*(d_2 - d_1)}. \quad (31)$$

**Обговорення чисельних результатів розрахунку.** Розглянемо гумовокордний матеріал з ізотропною матрицею та ізотропним кордом з такими пружними характеристиками: модуль пружності текстильного корда  $E^o = 1,6 \cdot 10^3$  МПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu^o = 0,8$ , модуль пружності гуми  $E^* = 4,5$  МПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu^* = 0,49$ .

Як можна зауважити, кожна з ефективних пружних сталей композиційного матеріалу залежить від пружних сталей матриці і волокна та об'ємного вмісту матриці й волокна в композиті. На рис. 2 можна замітити, що величина  $\frac{1 - \nu_{23}}{E_2}$  зменшується при зростанні об'ємної долі волокна. Це пояснюється тим, що волокна є більш жорсткими й ефективний поперечний модуль зростає при збільшенні частки волокна у композиті. В процесі

деформування об'ємна частка матриці зростає завдяки її слабкій стисливості й відповідно величина  $\frac{1 - \nu_{23}}{E_2}$  зростає, причому ця залежність має нелінійний характер. Аналогічна ситуація показана на рис. 3 для співвідношення  $-\frac{\nu_{12}}{E_1}$ , його величина зростає завдяки слабкій стисливості гуми, об'ємна частка якої в процесі деформування зростає. Представленні на рис. 3 залежності мають лінійний характер.



**Рис. 3. Відношення ефективних механічних характеристик  $-\frac{\nu_{12}}{E_1}$  в залежності від об'ємного вмісту волокна**

**Висновки.** На основі представницького об'ємного елемента визначено напружено-деформований стан елементарної комірки для сумісного деформування матриці та волокна при поперечному розтягненні із врахуванням зміни об'ємної долі кожного із компонентів композиційного матеріалу в процесі деформування. Аналогічну задачу розв'язано для гомогенізованого транслопного матеріалу. Порівняння певних складових напружено-деформованого стану у обох задачах дозволило визначити співвідношення для ефективних механічних характеристик композиційного матеріалу.

Визначено залежність ефективних механічних характеристик при поперечній деформації від об'ємного вмісту корда в наслідок деформування волокнистого композиційного матеріалу.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Столярова А.В., Гребенюк С.М., Клименко М.І. Поздовжній модуль пружності волокнистого композита з перехідним шаром. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2012. № 2. С. 130–142.
2. Соловей М.О., Кривенко О.П., Міщенко О.О. Визначення ефективних фізико-механічних характеристик односпрямованого волокнистого композитного матеріалу. *Опір матеріалів та теорія споруд*. 2014. № 92. С. 33–52.
3. Клименко М.И., Гребенюк С.Н., Богуславская А.М. Характеристики композиционного материала с трансверсально-изотропными вязкоупругими матрицей и волокном. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2015. № 3. С. 94–102.
4. Столярова А.В., Коваль Р.А., Гаценко А.В., Діоба Н.О. Визначення пружних сталей композиційного матеріалу із суцільними та порожистими однаково спрямованими волокнами. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 57–64.
5. Grebenyuk S., Klymenko M., Smoliankova T., Koval R. Effective Characteristics of the Multi-Modular Composites under Transverse Stretching. *Materials Science Forum*. 2019. № 968. С. 511–518.

6. Lopez-Reapozo J.C., Rodriguez-Ramoz R., Guinovart-Diaz R. Effective elastic shear stiffness of a periodic fibrous composite with non-uniform imperfect contact between the matrix and the fibers. *International Journal of Solids and Structures*. 2014. № 51. С. 1253–1262.
7. Yaoling Xu, Sansan Du, Junhua Xiao, Qimxin Zhao. Evaluation of the effective elastic properties of long fiber reinforced composites with interphases. *Computational Materials Science*. 2012. № 61. С. 34–41.
8. Pingping Yang, Yang Chen, Zaoyang Guo, Ning Hu, Weifu Sun. Modeling the effective elastic and viscoelastic properties of randomly distributed short fiber reinforced composites. *Composites Communications*. 2022. № 35. С. 78–84.
9. Столярова А.В. Ефективні механічні характеристики композиційних матеріалів із транстропними порожнистими волокнами: монографія. *Видавничий дім «Гельветика»*. 2021. 104 с.

#### REFERENCES

1. Stolyarova A.V., Grebeniuk S.M., Klymenko M.I. (2012) Longitudinal modulus of elasticity of a fibrous composite with a transition layer. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical sciences*, № 2, pp. 130–142.
2. Solovei M.O., Kryvenko O.P., Mishchenko O.O. (2014) Determination of effective physical and mechanical characteristics of unidirectional fibrous composite material. *Resistance of materials and theory of structures*, № 92, pp. 33–52.
3. Klymenko M.Y., Grebeniuk S.N., Boguslavskaya A.M. (2015) Characteristics of composite material with transversely isotropic viscoelastic matrix and fiber. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical science*, № 3, pp. 94–102.
4. Stolyarova A.V., Koval R.A., Gatsenko A.V., Dioba N.O. (2016) Determination of elastic constants of a composite material with continuous and hollow fibers of the same direction. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical sciences*, № 1, pp. 57–64.
5. Grebenyuk S., Klymenko M., Smoliankova T., Koval R. (2019) Effective Characteristics of the Multi-Modular Composites under Transverse Stretching. *Materials Science Forum*, № 968, pp. 511–518.
6. Lopez-Reapozo J.C., Rodriguez-Ramoz R., Guinovart-Diaz R. (2014) Effective elastic shear stiffness of a periodic fibrous composite with non-uniform imperfect contact between the matrix and the fibers. *International Journal of Solids and Structures*, № 5, pp. 1253–1262.
7. Yaoling Xu, Sansan Du, Junhua Xiao, Qimxin Zhao (2012) Evaluation of the effective elastic properties of long fiber reinforced composites with interphases. *Computational Materials Science*, № 61, pp. 34–41.
8. Pingping Yang, Yang Chen, Zaoyang Guo, Ning Hu, Weifu Sun (2022) Modeling the effective elastic and viscoelastic properties of randomly distributed short fiber reinforced composites. *Composites Communications*, № 35, pp. 78–84.
9. Stolyarova A.V. (2021) Effective mechanical characteristics of composite materials with transropical hollow fibers: monograph. *Helvetica Publishing House* (in Ukrainian.)