РОЗДІЛ I. ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

UDC 517.9
DOI https://doi.org/10.26661/2786-6254-2024-1-01

HYBRID ASYMPTOTIC APPROACH TO SOLVING NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS IN THE PRESENCE OF THE δ-FUNCTION

Gristchak V. Z.
Doctor of Technical Sciences, Professor,
Professor at the Department of Construction, Technical Aesthetics and Design
National Technical University "Dnipro Polytechnic"
Dmytro Yavornytskyi Ave., 19, Dnipro, Ukraine
orcid.org/0000-0001-8685-3191
Hryshchak.V.Z@nmu.one

Rudenko D. O.
Postgraduate Student
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0009-0007-8880-153X
dar.rudenko97@gmail.com

Key words: δ-*function, asymptotic method, hybrid approximation by perturbation and WKB-methods, variable coefficients, approximate analytical solution, singular nonlinear differential equation.*

When design engineers are creating new design methods, it is important for them to have analytical dependencies to assess the impact of the parameters and external loads of the system under study on its stability and dynamic behaviour. This is used to create heterogeneous structures for aerospace engineering, the construction industry, and mechanical engineering. The solution of a large number of mathematical physics problems that boil down to the necessity of solving singular differential equations with variable discontinuity coefficients is often based on the use of numerical methods that do not allow for a qualitative analysis of the dependencies obtained. A feature of this work is the development of a hybrid WKB-Galyorkin asymptotic approach to the solution of nonlinear singular (with a "small" parameter at the older derivative) differential equations with variable discontinuous coefficients in the presence of a δ-function in the right-hand side. An approximate algorithm of analytical solution suitable for solving of mathematical physics applied problems using the perturbation method, which allows estimating the influence of the nonlinear component of the equation and computer algebra. is proposed. As an example, a nonlinear Duffing type differential equation with variable coefficients is considered. Particular attention is paid to the influence of the nature of the change in the coefficients of the main singular differential equation on the effect of the presence of a δ-function in the first derivative. Numerical results of analytical solutions (depending on the value of the parameters of the asymptotic development in two approximations) and comparison of the approximate analytical solution with the direct numerical solution of the problem under study are provided. Using computer algebra software package "Mathematica", graphs of the results of calculations of the main equation of the problem are constructed by the direct numerical integration and the hybrid asymptotic method.

ГІБРИДНИЙ АСИМПТОТИЧНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ЗА НАЯВНОСТІ δ-ФУНКЦІЇ

Грищак В. З.
доктор технічних наук, професор,
професор кафедри конструювання, технічної естетики і дизайну
Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
просп. Дмитра Яворницького, 19, Дніпро, Україна
orcid.org/0000-0001-8685-3191
Hryshchak.V.Z@nmu.one

Руденко Д. О.
аспірантка
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0009-0007-8880-153X
dar.rudenko97@gmail.com

Ключові слова: *δ-функція, асимптотичний метод, гібридна апроксимація за методами збурення та ВКБ, змінні коефіцієнти, наближений аналітичний розв'язок, сингулярне нелінійне диференціальне рівняння.*

Для інженерів-конструкторів у створенні нових методів проектування важливо, щоб існували аналітичні залежності для оцінки впливу параметрів і зовнішніх навантажень досліджуваної системи на її стабільність і динамічну поведінку. Це використовується у створенні неоднорідних конструкцій аерокосмічної техніки, будівельної промисловості, машинобудування. Вирішення великої кількості задач математичної фізики, що зводяться до необхідності розв'язання сингулярних диференціальних рівнянь зі змінними розривними коефіцієнтами, частіше за все базуються на застосуванні чисельних методів, які не дозволяють якісно проаналізувати отримані залежності. Особливістю роботи є розвиток гібридного ВКБ-Гальоркін асимптотичного підходу до розв'язку нелінійних сингулярних (із «малим» параметром при старшій похідній) диференціальних рівнянь зі змінними розривними коефіцієнтами за наявності δ-функції у правій частині зі створенням алгоритму наближеного аналітичного розв'язку, придатного до вирішення прикладних задач математичної фізики із застосуванням методу збурення, який дозволяє оцінити вплив нелінійної складової частини рівняння, та комп'ютерної алгебри. Як приклад розглядається нелінійне диференціальне рівняння типу Дюффінга. Особлива увага приділена впливу характеру зміни коефіцієнтів основного сингулярного диференціального рівняння на ефект наявності δ-функції при першій похідній. Надані чисельні результати аналітичних розв'язків (залежно від величини параметрів асимптотичного розвинення у двох наближеннях) і порівняння наближеного аналітичного розв'язку із прямим чисельним розв'язком досліджуваної задачі. Із використанням програми комп'ютерної алгебри «Mathematica» побудовані графіки результатів обчислень основного рівняння задачі за прямим чисельним інтегруванням і гібридним асимптотичним методом.

Introduction. Numerical calculation methods, which are often used to construct new structures with variable parameters dependent on coordinates and time, for example, multilayer plates and shells of revolution made of variable mass composite materials, which are subjected to external pressure dependent on time, do not provide reliable analytical results and require a significant amount of computer time. Therefore, the exact solution of nonlinear singular differential equations with variable coefficients and δ-function, with the help of which such structures are built, is an urgent problem for the theory of differential equations. As a result, in recent years, for the analytical solution of such problems, hybrid asymptotic methods based on perturbation methods and phase integrals (WKB method) have been used [1–10], which make it possible to construct fairly accurate approximations that do not depend on the value of the parameters in the first derivative. The purpose of the research is to create an algorithm for an approximate analytical solution of the equation. The object of the study is a non-homogeneous nonlinear differential equation with variable coefficients and a δ-function on the right-hand side.

1. Formulation of the problem of solving a nonlinear differential equation with a δ-function on the right-hand side. Approximate analytical solution using the hybrid asymptotic approach.

The basic differential equation of the problem of the dynamics of systems with discrete-continuous characteristics and time-varying coefficients in a nonlinear formulation has the form:

$$\begin{aligned} &y''(t)+\alpha(t)y'(t)+\omega^2(t)y(t)= \\ &=-N(t)y^3(t)-\gamma(t)y'(t)\delta(t-t_0), \end{aligned} \tag{1}$$

where $\omega(t)=\omega_0\beta(t)$.

Dividing both parts of the equation by ω_0^2, we have:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2\left[y''(t)+\alpha(t)y'(t)\right]+\beta(t)y(t)= \\ &=-\bar{N}(t)y^3(t)-\bar{\gamma}(t)y'(t)\delta(t-t_0), \end{aligned} \tag{2}$$

where $\varepsilon^2=\frac{1}{\omega_0^2}\ll 1$,

$\omega_0^2\gg 1$ – natural oscillation frequency,

$\delta(t-t_0)$ – the Dirac function,

$\bar{N}=\mu\bar{N}_0(t)$,

μ – nonlinearity parameter $(\mu<0)$.

The resulting equation is a prototype of the Duffing differential equation with cubic nonlinearity. To solve such an equation, we will use the hybrid asymptotic approach. Using the perturbation method, we present the function $y(t)$ in the form of an asymptotic series according to the parameter μ:

$$y(t)=y_0(t)+\mu y_1(t)+\mu^2y_2(t)+\ldots=\sum_{i=0}^{n}\mu^i y_i(t). \tag{3}$$

We obtain the equation in the first approximation after substituting equation (3) into equation (2):

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2\left[y_0''(t)+\alpha(t)y_0'(t)\right]+\beta(t)y_0(t)= \\ &=-\bar{\gamma}(t)y_0'(t)\delta(t-t_0). \end{aligned} \tag{4}$$

Using the WKB method (method of phase integrals), the homogeneous equation is:

$$\varepsilon^2\left[y_0''(t)+\alpha(t)y_0'(t)\right]+\beta(t)y_0(t)=0 \tag{5}$$

and solution will be obtained in the form:

$$\begin{aligned} y_0(t)=&C_1\exp\left[\int\left(i\varepsilon^{-1}\beta^{1/2}(t)-\frac{\alpha(t)}{2}\frac{\varphi_0'(t)}{\varphi_0(t)}\right)dt\right]+ \\ &+C_2\exp\left[\int\left(-i\varepsilon^{-1}\beta^{1/2}(t)-\frac{\alpha(t)}{2}\frac{\varphi_0'(t)}{\varphi_0(t)}\right)dt\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Considering that:

$$\varphi_{01,2}(t)=\pm i\beta^{1/2}(t) \tag{7}$$

solution (6) can be represented in the form:

$$\begin{aligned} &y_0(t)=\exp\left[\frac{1}{4}\int\alpha(t)\frac{\beta'(t)}{\beta(t)}dt\right]\cdot \\ &\cdot\left[C_1\cos(k(t))+C_2\sin(k(t))\right], \end{aligned} \tag{8}$$

where $k(t)=\int\varepsilon^{-1}\beta^{1/2}(t)dt.$ (9)

Solution (8) is simplified if $\alpha(t)=0$. We use a hybrid approach:

$$y_0(t)=C_1\cos(k(t))+C_2\sin(k(t)). \tag{10}$$

The method of variation of arbitrary constants makes it possible to obtain a solution of the inhomogeneous equation (4):

$$y_0(t)=C_1(t)\cos(k(t))+C_2(t)\sin(k(t)). \tag{11}$$

To find the constants $C_1(t)$ and $C_2(t)$, we substitute (11) in (4), we have the first derivative:

$$\begin{aligned} y_0'(t)=&k'(t)\left[-C_1(t)\sin(k(t))+C_2(t)\cos(k(t))\right]+ \\ &+C_1'(t)cos(k(t))+C_2'(t)sin(k(t)) \end{aligned} \tag{12}$$

The second derivative has the form:

$$\begin{aligned} y_0''(t)=&k''(t)\left[-C_1(t)\sin(k(t))+C_2(t)\cos(k(t))\right]+ \\ &+k'(t)\left[-C_1'(t)\sin(k(t))+C_2'(t)\cos(k(t))\right]+ \\ &+k'^2(t)\left[-C_1(t)\cos(k(t))-C_2(t)\sin(k(t))\right]. \end{aligned} \tag{13}$$

Provided that:

$$k'(t)=\frac{\beta^{1/2}(t)}{\varepsilon} \tag{14}$$

we substitute (11), (12) and (13) into equation (4):

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2\left[\begin{matrix}\left[\begin{matrix}k''(t)\left[-C_1(t)\sin(k(t))+C_2(t)\cos(k(t))\right]+ \\ +k'(t)\left[-C_1'(t)\sin(k(t))+C_2'(t)\cos(k(t))\right]+ \\ +k'^2(t)\left[-C_1(t)\cos(k(t))--C_2(t)\sin(k(t))\right]\end{matrix}\right]+ \\ \alpha(t)\left[\begin{matrix}k'(t)\left[-C_1(t)\sin(k(t))+C_2(t)\cos(k(t))\right]+ \\ +C_1'(t)cos(k(t))+C_2'(t)sin(k(t))\end{matrix}\right]\end{matrix}\right]+ \\ &+\square(t)\left[C_1(t)\cos(k(t))+C_2(t)\sin(k(t))\right]\square-\bar{\square}(t)\,\square_{\square}'(t)\,\square(t-t_{\square})\square \end{aligned} \tag{15}$$

After some simplifications we obtain a system of algebraic equations for finding the unknown constants $C_1(t)$ and $C_2(t)$, provided that $k''(t)$ can be neglected:

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos(k(t)) + C_2'(t)\sin(k(t)) = 0 \\ -C_1'(t)\sin(k(t)) + C_2'(t)\cos(k(t)) = F(t) \end{cases}, \quad (16)$$

where $F(t) = -\frac{\overline{\gamma}(t)}{k'(t)} y_0'(t)\delta(t - t_0)$. (17)

We find the functions $C_1(t)$ and $C_2(t)$, taking into account the properties of the Dirac δ-function and the function $F(t)$:

$$C_1(t) = \gamma_1(t_0) y_0'(t_0),$$
$$C_2(t) = \gamma_2(t_0) y_0'(t_0), \quad (18)$$

where $\gamma_1(t_0) = \frac{\overline{\gamma}(t_0)\sin(k(t_0))}{k'(t_0)}$,

$$\gamma_2(t_0) = \frac{\overline{\gamma}(t_0)\cos(k(t_0))}{k'(t_0)}. \quad (19)$$

Therefore, the general solution of the linear inhomogeneous problem in the first approximation has the form:

$$y_0(t) = \cos(k(t))\left[C_1 + \gamma_1(t_0) y_0'(t_0)\right] + $$
$$+\sin(k(t))\left[C_2 - \gamma_2(t_0) y_0'(t_0)\right]. \quad (20)$$

Then the function of the main equation in the second is approximated by the parameter μ:

$$y_1(t) = \cos(k(t))\left[d_1 + \int \tilde{N}_{0_1}(t)dt + \gamma_1(t_0) y_0'(t_0)\right] + $$
$$+\sin(k(t))\left[d_2 - \int \tilde{N}_{0_2}(t)dt + \gamma_2(t_0) y_0'(t_0)\right], \quad (21)$$

where $\tilde{N}_{0_1}(t) = \overline{N}_0 \sin(k(t))$,

$$\tilde{N}_{0_2}(t) = \overline{N}_0 \cos(k(t)). \quad (22)$$

The general solution of the nonlinear differential equation (1) will have the form:

$$y(t) = y_0(t) + \mu y_1(t) = \cos(k(t))\left[C_1 + \gamma_1(t_0) y_0'(t_0)\right] + $$
$$\sin(k(t))\left[C_2 + +\gamma_2(t_0) y_0'(t_0)\right] + $$
$$\mu \begin{Bmatrix} \cos(k(t))\left[d_1 + \gamma_1(t_0) y_0'(t_0) + \int \tilde{N}_{0_1}(t)dt\right] + \\ +\sin(k(t))\left[d_2 - \gamma_2(t_0) y_0'(t_0) - \int \tilde{N}_{0_2}(t)dt\right] \end{Bmatrix} = \quad (23)$$
$$= \cos(k(t))\left\{\overline{C}_1 + +(1+\mu)\gamma_1(t_0) y_0'(t_0) + \mu \int \tilde{N}_{0_1}(t)dt\right\} + $$
$$+\sin(k(t))\left\{\overline{C}_2 - (1 + +\mu)\gamma_2(t_0) y_0'(t_0) - \mu \int \tilde{N}_{0_2}(t)dt\right\},$$

where $\overline{C}_1 = C_1 + \mu d_1$,

$$\overline{C}_2 = C_2 + \mu d_2. \quad (24)$$

2. Numerical solution of the main differential equation of the problem. Comparison with the analytical solution.

As an example of a numerical solution, a differential equation of the form is considered:

$$\varepsilon^2 y''(t) + \beta(t) y(t) = -\overline{\gamma}(t) y'(t)\delta(t - t_0). \quad (25)$$

We set the functions $\beta(t)$ and $\overline{\gamma}(t)$:

$$\beta(t) = t^2,$$
$$\overline{\gamma}(t) = t. \quad (26)$$

The corresponding homogeneous equation takes the form:

$$\varepsilon^2 y_o''(t) + t^2 y_o(t) = 0 \quad (27)$$

under initial conditions:

$$y_0(0) = 1,$$
$$y_1'(0) = 0. \quad (28)$$

has a solution:

$$y_o(t) = \cos\left[\frac{t^2}{2\varepsilon}\right]. \quad (29)$$

Then the solution of the linear inhomogeneous problem has the form:

$$\tilde{y}_0(t) = \cos\left[\frac{t^2}{2\varepsilon}\right]\left\{C_1 + \gamma_1(t_0)\cos\left[\frac{t^2}{2\varepsilon}\right]\right\} + $$
$$+\sin\left[\frac{t^2}{2\varepsilon}\right]\left\{C_2 - \gamma_2(t_0)\cos\left[\frac{t^2}{2\varepsilon}\right]\right\}. \quad (30)$$

Provided that

$$\gamma_1(t_0) = \varepsilon \sin\left(\frac{t_0^2}{2\varepsilon}\right),$$
$$\gamma_2(t_0) = \varepsilon \cos\left(\frac{t_0^2}{2\varepsilon}\right) \quad (31)$$

the solution will be written as:

$$\tilde{y}_0(t) = \cos\left[\frac{t^2}{2\varepsilon}\right]\left\{C_1 + \varepsilon \sin\left[\frac{t_0^2}{2\varepsilon}\right]\cos\left[\frac{t^2}{2\varepsilon}\right]\right\} + $$
$$+\sin\left[\frac{t^2}{2\varepsilon}\right]\left\{C_2 - \varepsilon \cos\left[\frac{t_0^2}{2\varepsilon}\right]\cos\left[\frac{t^2}{2\varepsilon}\right]\right\}. \quad (32)$$

If $t_0 = 0,5$ and $\varepsilon = 0,1$, we present the solution in the form:

$$\tilde{y}_0(t) = \cos\left[5t^2\right]\left\{C_1 + 0,095\cos\left[5t^2\right]\right\} + $$
$$+\sin\left[5t^2\right]\left\{C_2 - 0,032\cos\left[5t^2\right]\right\}. \quad (33)$$

To find the coefficients C_1 and C_2, we substitute the initial conditions. The final solution of the equation has the form:

$$\tilde{y}_0(t) = \cos\left[5t^2\right]\left\{0,905 + 0,095\cos\left[5t^2\right]\right\} + $$
$$+\sin\left[5t^2\right]\left\{-0,032\cos\left[5t^2\right]\right\}. \quad (34)$$

Figures 1–4 present the results of calculations using the hybrid asymptotic method and direct numerical integration of the main equation of the problem using computer algebra based on the "Mathematics" software package:

ISSN 2786-6254

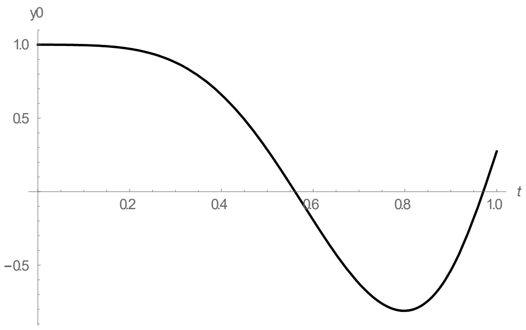

Fig. 1. The solution of the equation obtained on the basis of the hybrid asymptotic method ($\varepsilon = 0{,}1$)

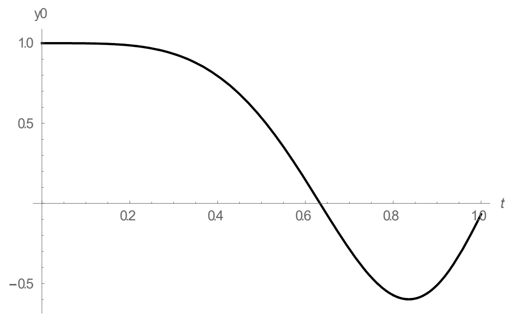

Fig. 2. Solution of the equation obtained on the basis of direct numerical integration ($\varepsilon = 0{,}1$)

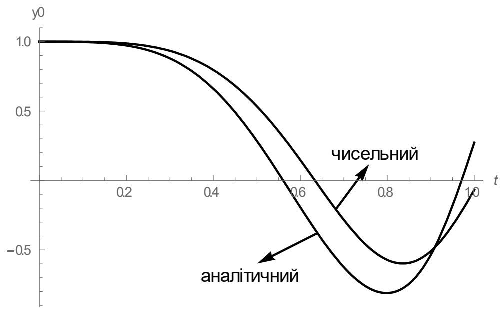

Fig. 3. Comparison of approximate analytical and numerical solutions for $\varepsilon = 0{,}1$

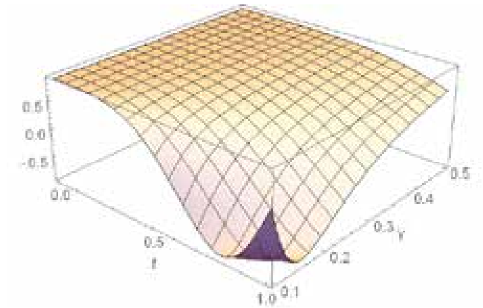

Fig. 4. Three-dimensional dependence of the solution on a small parameter ε

Conclusion. An approximate analytical solution in two approximations of an inhomogeneous differential equation with variable coefficients and a δ-function is presented. Sufficient convergence of numerical results based on approximate analytical and direct numerical calculations is shown. From the point of view of further development of this approach, it is considered expedient to study the influence of the presence of the δ-function and the nature of the nonlinearity (with the possible existence of "turning points") on the solution of singular differential equations with variable coefficients.

BIBLIOGRAPHY

1. Bologna M. Exact analytical approach to differential equations with variable coefficients. *The European Physical Journal Plus*. 2016. Vol. 131, no. 11.
2. Герасімов Т. С., Грищак В. З. Про підходи до розв'язання диференціального рівняння другого порядку із точкою повороту, засновані на використанні гібридних методів. Ч. 1. *Вісник Запорізького наіонального університету. Фізико-математичні науки*. 2002. № 3. С. 25–33.
3. Грищак В. З. Гібридні асимптотичні методи та техніка їх застосування. Запоріжжя : ЗНУ, 2009. 226 с.
4. Грищак В. З. Про ефективність гібридних асимптотичних методів у прикладних задачах математичної фізики. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. Дніпро, 2012. Вип. 19. С. 80–88.
5. Грищак В. З., Руденко Д. О. Силові коливання нелінійної механічної системи із залежністю параметрів від часу при нелінійному демпфуванні та випадковому зовнішньому навантаженні. *«Розробка та дизайн сучасних матеріалів і виробів»* : Друга Міжнародна науково-практична конференція, м. Дніпро, 9–10 листопада 2023 р. Дніпро, 2023.
6. Heading J. An Introduction to Phase-Integral Methods. New York : Dover Publications, 2013. 174 p.
7. Olver F. V. The asymptotic solution of linear differential equations of the second order for large values of a parameter and the asymptotic expansion of Bessel function of a large order. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*. London, 1954. Vol. 247. P. 307–327.

 ISSN 2786-6254

8. Руденко Д. О., Грищак В. З. Асимптотичний розв’язок диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами з нелінійністю у першій похідній. *Молода наука – 2019* : Збірник наукових праць студентів, аспірантів і молодих вчених, у 5 т., м. Запоріжжя, 15–17 квітня 2019 р. Запоріжжя, 2019. Т. 1. С. 52–53.
9. Руденко Д. О., Грищак В. З. Вплив параметру нелінійності першої похідної до розв’язку диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами. *Актуальні проблеми математики та інформатики* : Збірка тез доповідей Десятої Всеукраїнської, сімнадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників, м. Запоріжжя, 25–26 квітня 2019 р. Запоріжжя, 2019. С. 120–121.
10. Wells G. N., Kuhl E., Garikipati K. A discontinuous Galerkin method for the Cahn–Hilliard equation. *Journal of Computational Physics*. 2006. Vol. 218. P. 860–877.

REFERENCES

1. Bologna, M. (2016). Exact analytical approach to differential equations with variable coefficients. *The European Physical Journal Plus*, 131(11).
2. Gerasimov, T. S., Gristchak, V. Z. (2002). On approaches to solving a second-order differential equation with a turning point, based on the use of hybrid methods. P. 1. *Visnyk Zaporizhzhya National University*, (3), 25–33.
3. Gristchak, V. Z. (2009). *A Hybrid Asymptotic Methods and Technique of Application*. Zaporizhzhia National University.
4. Gristchak, V. Z. (2012). On the efficiency of hybrid asymptotic methods in applied problems of mathematical physics. *Problems of computational mechanics and strength of structures*, (19), 80–88.
5. Gristchak, V. Z., Rudenko, D. O. (2023). Force Vibration of Nonlinear Mechanical System, with Parameters Dependency upon Time, at Present of Nonlinear Damping and Casual External Loading. *2-nd International Scientific and Practical Conference “Development and Design of Modern Materials and Products”*. National Technical University “Dnipro Polytechnic”.
6. Heading, J. (2013). *An Introduction to Phase-Integral Methods*. Dover Publications.
7. Olver, F. V. (1954). The asymptotic solution of linear differential equations of the second order for large values of a parameter and the asymptotic expansion of Bessel function of a large order. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, (247), 307–327.
8. Rudenko, D. O., Gristchak, V. Z. (2019). Asymptotic solution of differential equations of the second order with variable coefficients with nonlinearity in the first derivative. *Young Science – 2019: Collection of scientific works of students, graduate students and young scientists, in 5 volumes* (p. 52–53). Zaporizhzhia National University. (in Ukrainian).
9. Rudenko, D. O., Gristchak, V. Z. (2019). Influence of the nonlinearity parameter of the first derivative on the solution of second-order differential equations with variable coefficients. *Current issues of mathematics and computer science: Collection of abstracts of the Tenth All-Ukrainian, seventeenth regional scientific conference of young researchers* (p. 120–121). Zaporizhzhia National University. (in Ukrainian).
10. Wells, G. N., Kuhl, E., Garikipati, K. (2006). A discontinuous Galerkin method for the Cahn–Hilliard equation. *Journal of Computational Physics*, (218), 860–877.