

АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ В'ЯЗКОПРУЖНОСТІ

Столярова А. В.

доктор філософії,

*доцент кафедри програмної інженерії
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0003-2783-2889
stolyarova.a.v@znu.edu.ua*

Барау К.

*аспірант кафедри програмної інженерії
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0009-0002-4680-7267
kipz_mdk@znu.edu.ua*

Ключові слова: *нелінійна задача, параметри алгоритму, ефективність алгоритму, в'язкопружність, ітераційний процес, метод скінченних елементів, програмна реалізація.*

Розширення можливостей різноманітних девайсів для виконання різних задач проєктування елементів конструкцій вимагає покращення ефективності роботи залучених у розрахунках обчислювальних алгоритмів. У роботі описано два варіанти алгоритмів розв'язання задачі в'язкопружності для визначення напружено-деформованого стану конструкцій. Для описання в'язкопружної поведінки матеріалу конструкції використовуються інтегральні рівняння спадкової теорії Больцмана-Вольтера із ядрами різницевого типу. Для їх розв'язання використовується метод скінченних елементів у поєднанні з ітераційною процедурою за часовою змінною. Алгоритм ітераційної процедури передбачає дискретизацію відрізка часу із подальшим розв'язанням лінеаризованої задачі на кожному проміжку часу. Одним із варіантів дискретизації за часом є застосування рівномірного кроку. Іншим варіантом, що враховує особливості кривої деформування матеріалу, є обчислення кроку залежно від величини ядра релаксації віднесеного до кожного проміжку часу. Такий підхід дозволяє згустити сітку дискретних значень за часом у діапазоні, де кривизна кривої деформування більша, і зробити її розрідженою в діапазоні, де крива близька до прямої лінії. На основі обох варіантів алгоритму створено пакет прикладних програм для розв'язання просторових задач в'язкопружності. За допомогою програмного пакету проведено низку обчислювальних експериментів для розрахунку в'язкопружної задачі для гумового порожнистого циліндру під дією внутрішнього тиску із затисненою зовнішньою циліндричною поверхнею. Як різницеве ядро використано ядро Ю.М. Работнова. Чисельні розв'язки показують, що алгоритм розв'язання задачі в'язкопружності із другим варіантом вибору кроку дає більш адекватні результати, ніж при рівномірному розбитті. Машинний час розрахунків у обох випадках різниться несуттєво.

ANALYSIS OF THE EFFICIENCY OF ALGORITHMS FOR SOLVING THE VISCOCLASTIC PROBLEM

Stoliarova A. V.

*PhD, Associate Professor at the Department of Software Engineering
Zaporizhzhia National University Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0003-2783-2889
stolyarova.a.v@znu.edu.ua*

Baraou K.

*Postgraduate Student at the Department of Software Engineering
Zaporizhzhia National University Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0009-0002-4680-7267
kipz_mdk@znu.edu.ua*

Key words: *nonlinear problem, algorithm parameters, algorithm efficiency, viscoelasticity, iterative process, finite element method, software implementation.*

Expanding the capabilities of various devices to perform various tasks of designing structural elements requires improving the efficiency of the computational algorithms involved in the calculations. The work describes two variants of algorithms for solving the viscoelasticity problem for determining the stress-strain state of structures. To describe the viscoelastic behavior of the structural material, the integral equations of the hereditary Boltzmann-Wolterra theory with difference-type kernels are used. For their solution, the finite element method is used in combination with an iterative procedure based on the time variable. The algorithm of the iterative procedure involves the discretization of a time segment followed by the solution of a linearized problem at each time interval. One of the time discretization options is the use of a uniform step. Another option that takes into account the features of the material deformation curve is the calculation of the step depending on the value of the relaxation kernel assigned to each time interval. This approach makes it possible to thicken the grid of discrete values over time in the range where the curvature of the deformation curve is greater and to make it rarefied in the range where the curve is close to a straight line. Based on both variants of the algorithm, a package of application programs for solving spatial problems of viscoelasticity has been created. With the help of the software package, a number of computational experiments were carried out to calculate the viscoelastic problem for a rubber hollow cylinder under the action of internal pressure with a clamped external cylindrical surface. As a difference kernel, the kernel of Yu.M. Rabotnova Numerical solutions show that the algorithm for solving the viscoelasticity problem with the second step selection option gives more adequate results than with uniform partitioning. The machine calculation time in both cases differs slightly.

Вступ. У сучасному світі процес цифровізації та діджиталізації швидко охоплює всі сфери життя: економіку, освіту, медицину, комунікації, культуру та технології. Застосування спеціального програмного забезпечення розширюється на різні гаджети для вирішення різноманітних завдань. Це дає можливість проводити безліч дослідницьких і виробничих процесів без прив'язки до конкретного місця та спеціального обладнання. Одним із сучасних напрямів розповсюдження програмного забезпечення є різноманітні системи автоматизованого проектування інженерного спрямування. Можна виокремити системи, які дозволяють авто-

матизувати процес розрахунку різноманітних конструкцій. Враховуючи, що сучасні гаджети мають різні функціональні можливості, написання програмного коду, який би ефективно працював на різних пристроях, вимагає розробки раціональних алгоритмів при розв'язанні різних задач.

При застосуванні САПР для проектування конструкцій основним видом розрахунку є дослідження міцності конструкцій, що включає низку задач механіки деформівного твердого тіла та передбачає визначення напружено-деформованого стану конструкції. Залежно від того, з яких матеріалів виготовлена конструкція, збір вихід-

них даних вимагає різних наборів механічних сталей. Так, при розрахунку конструкцій із пластиків, еластомерів та інших матеріалів важливим є врахування в'язкопружних властивостей. Процес в'язкопружності умовно можна поділити на дві складові частини – повзучість (зміна деформацій у часі при сталому навантаженні) та релаксація напружень (зміна напружень у часі при сталій деформації). У реальних матеріалах обидва ці процеси відбуваються одночасно. Тому виникає необхідність у розв'язанні задачі в'язкопружності, яка у найбільш загальному випадку описується інтегральним рівнянням, а, з огляду на геометричну складність більшості конструкцій, у результаті матимемо нелінійну задачу, яку розв'язати аналітичними методами для більшості конструкцій неможливо. Для розв'язання таких задач використовують чисельні методи (метод скінченних елементів, метод скінченних різниць, метод граничних елементів тощо) з використанням ітераційних процедур. При розв'язанні задачі в'язкопружності ітераційна процедура застосовується за часовою змінною. Враховуючи, що для більшості конструкцій витрати часу, пам'яті можуть бути значними, вибір раціональних параметрів ітераційного алгоритму без втрати стійкості та точності розв'язків є актуальними.

Аналіз попередніх досліджень і публікацій.

Вивченню різних аспектів в'язкопружних процесів, розробці підходів та алгоритмів дослідження, програмного забезпечення присвячена низка наукових праць. У статті [1] на основі експериментальних даних запропоновано математичну модель для часової залежності пружних сталей для моделювання в'язкопружних процесів. Результати чисельного моделювання показують, що запропонований підхід дає підвищену точність, є чисельно стабільним і не знижує швидкість обчислень.

Застосування методу скінченних різниць до дослідження сейсмічного хвильового поля у в'язкопружних середовищах з аналізом впливу процесів затухання представлено у [2].

Комп'ютерне моделювання фізико-механічних процесів у геологічних середовищах, властивості яких змінюються у часі, описане у роботі [3]. Підходи, отримані для пружних лінійної та нелінійної областей, узагальнено на випадок в'язкопружної квазілінійної поведінки. Запропоновано методику ідентифікації параметрів повзучості та чисельні алгоритми прогнозування поведінки в'язкопружного суцільного середовища.

Чисельні алгоритми для дослідження в'язкопружних процесів у полімерних матеріалах, що базуються на мультидисциплінарному підході, наведено у [4].

Ітераційний алгоритм розв'язання контактної задачі для в'язкопружних матеріалів із

довільними режимами навантаження представлений у [5].

В'язкопружність є основним змістом механіки твердого тіла, яка стала важливою частиною механіки суцільного середовища. Зазвичай він включає два аспекти: один – це опис в'язкопружних властивостей і вираження конститутивного зв'язку; інший – встановлення та вирішення крайової задачі. У статті [6] на основі перетворення Лежандра створено новий чисельний підхід, який дозволяє ефективно працювати із в'язкопружними граничними умовами.

Запропоновано новий підхід при моделюванні поведінки в'язкопружних матеріалів, що базується на визначенні властивостей в'язкопружності з результатів експериментів за допомогою нейронних мереж [7].

У роботі [8] на основі в'язкопружної штучної межі розв'язано проблему поширення хвилі у нескінченній області.

Різні підходи до створення алгоритмів розв'язання нелінійних задач запропоновані різними дослідниками. Так, у монографії [9] розроблені алгоритми розв'язання нелінійних задач пружності та в'язкопружності на основі методу спуску по параметру з перевіркою рівнянь рівноваги у поєднанні з модифікованим методом Ньютона – Канторовича. Запропоновано підхід на основі генетичних алгоритмів для розв'язання нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь [10].

Актуальність дослідження різних аспектів в'язкопружних процесів і розробки відповідних підходів та алгоритмів визначається широким спектром сучасних застосувань цих матеріалів і середовищ. Постійний розвиток нових методів, таких як ті, що базуються на математичних моделях, чисельних алгоритмах і нейронних мережах, підтверджує необхідність постійного вдосконалення та розширення знань у цій сфері, дозволяє досягати більшої точності й ефективності у прогнозуванні та розв'язанні складних інженерних задач.

Метою роботи є дослідження впливу різних параметрів ітераційного процесу та їх раціональний вибір для алгоритму розв'язання задачі в'язкопружності.

Викладення основного матеріалу. Одним із найбільш застосовуваних чисельних методів у САПР є метод скінченних елементів. Розглянемо алгоритм ітераційного розв'язання задачі в'язкопружності на основі цього методу. Для математичного моделювання в'язкопружних процесів у тривимірних об'єктах розглянемо інтегральне рівняння, що базується на основі спадкової теорії Больцмана – Вольтерра та може бути записане таким чином:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{C}^{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (1)$$

де \tilde{C}^{ijkl} – інтегральний оператор, що має вид:

$$\tilde{C}^{ijkl} \varphi = C_0^{ijkl} \left[\varphi(t) - \int_0^t R(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right], \quad (2)$$

тут φ – функція, на яку діє інтегральний оператор (виходячи з формули (1) це функція деформацій ε_{kl}), C_0^{ijkl} – компоненти тензора пружних сталей, які визначаються через компоненти метричного тензора g^{ij} та миттєві значення коефіцієнтів Ляме μ_0 та λ_0 :

$$C_0^{ijkl} = \mu_0 (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda_0 g^{ij} g^{kl}. \quad (3)$$

Ці співвідношення справедливі, якщо застосовується гіпотеза про релаксацію як зсувного, так і об'ємного модуля. Але для багатьох матеріалів слушною є гіпотеза про відсутність релаксації об'ємного модуля, тоді, використавши у (3) не сталі Ляме, а модуль об'ємного стиску $B_0 = \lambda_0 + 2/3 \mu_0$, вирази (1), (2) можна переписати так:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = C_0^{ijkl} \varepsilon_{kl}(t) - S_0^{ijkl} \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau, \quad (4)$$

де зсувна частина тензору пружних сталей має вигляд:

$$S_0^{ijkl} = \mu_0 \left(g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk} - \frac{2}{3} g^{ij} g^{kl} \right). \quad (5)$$

У формули (2), (4) у загальному вигляді входить різницеве ядро релаксації $R(t-\tau)$, яке для моделювання реальних процесів приймає різні вирази. Так, найбільш поширеними різницевиими ядрами є такі. Ядро А.Р. Ржаніцина [9]

$$R(t-\tau) = e^{-\beta(t-\tau)} (t-\tau)^\alpha \quad (-1 < \alpha < 0), \quad (6)$$

де α та β – сталі, що визначаються шляхом експерименту й описують реологічну поведінку матеріалу.

Іншим поширеним ядром для моделювання в'язкопружної поведінки матеріалів є ядро М.А. Колтунова [9]

$$K(t-\tau) = A e^{-\beta(t-\tau)} (t-\tau)^{\alpha-1}, \quad (7)$$

де A , α та β – сталі, що описують реологічну поведінку матеріалу.

Для опису широкого класу в'язкопружних матеріалів використовують різницеве ядро на основі Е-функції Ю.М. Работнова [9]

$$K(t-\tau) = \lambda \mathcal{E}_\alpha(-\beta-\lambda, t-\tau) = \lambda (t-\tau)^\alpha \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta-\lambda)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{[(n+1)(\alpha+1)]}, \quad (8)$$

де $-1 < \alpha < 0$; $\beta > 0$, $\lambda > 0$; α , β , λ – сталі матеріалу.

Використання інтегральних залежностей із вищезазначеними різницевиими ядрами дозволяє враховувати усі особливості процесу деформування, у тому числі швидко змінні процеси та той факт, що в момент прикладення навантаження ($t=0$) швидкість деформації прямує до нескінченності. Наявність у ядрах декількох сталих параметрів дозволяє шляхом їх підбору описати будь-який реальний процес деформування.

Наявність нелінійності, зумовлена необхідністю розв'язання інтегрального рівняння, стримує застосування аналітичних методів. Тому ця складність приводить до необхідності використання чисельних методів. Причому методи, що застосовуються до просторових і часових координат, зазвичай різняться. Застосування будь-якого чисельного методу (методу скінченних елементів, методу скінченних різниць та інших) до просторових координат призводить до необхідності розв'язання нелінійних відносно часу систем алгебраїчних рівнянь. Для їх розв'язання застосовуються різні обчислювальні схеми, які базуються на лінеаризації задачі та подальшому застосуванні ітераційного процесу.

Розглянемо спочатку дискретизацію за часом рівняння (4) з урахуванням (5), для цього у будь-який спосіб розіб'ємо часовий відрізок $[0; t]$ на n частин, будемо мати:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = C_0^{ijkl} \varepsilon_{kl}(t) - S_0^{ijkl} \sum_{m=0}^{n-1} \int_{t_m}^{t_{m+1}} R(t-\tau) \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau. \quad (9)$$

З огляду на те, що крок за часом обирається досить невеликим, можна вважати, що на кожному підінтервалі часу переміщення та деформації змінюються лінійно і вираз для тензору напружень із урахуванням цієї лінеаризації можна записати так

$$\tilde{\sigma}^{ij} = C_0^{ijkl} \varepsilon_{kl}(t_n) - S_0^{ijkl} \sum_{m=0}^{n-1} \varepsilon_{kl}(t_m) \int_{t_m}^{t_{m+1}} R(t-\tau) d\tau. \quad (10)$$

Беручи до уваги, що значна частина чисельних методів базується на варіаційних принципах, запишемо варіацію потенціальної енергії в'язкопружного деформування з урахуванням (10), будемо мати:

$$\delta \Pi = \iiint_v \left[C_0^{ijkl} \varepsilon_{kl}(t_n) \delta \varepsilon_{ij} - \sum_{m=0}^{n-1} S_0^{ijkl} \varepsilon_{kl}(t_m) \delta \varepsilon_{ij} \right] dv - \delta A, \quad (11)$$

де δA – варіація роботи розподілених об'ємних P^i та поверхневих F^i сил:

$$\delta A = \iiint_v P^i \delta u_i dv + \iint_s F^i \delta u_i ds, \quad (12)$$

u_i – компоненти вектору переміщень,

$$R_m = \int_{t_m}^{t_{m+1}} R(t - \tau) d\tau.$$

Для реалізації ітераційного процесу розглянемо детально доданки у правій частині (11). Перший доданок у дужках є варіацією енергії пружної деформації, яка залежить від історії навантажень, але не залежить від закону зміни деформації у часі. Якщо за базовий метод взяти метод скінченних елементів, то цей перший доданок є основою для формування матриці жорсткості скінченного елемента $[K^{\mu\nu}]$ у певний момент часу:

$$\iiint_v C_0^{ijkl} \varepsilon_{kl}(t_n) \delta \varepsilon_{ij} dv = K^{\mu\nu}(t_n) u_\mu(t_n) \delta u_\nu. \quad (13)$$

Другий доданок у (11) є спадковою складовою частиною матриці жорсткості, яку можна представити так:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{n-1} R_m \iiint_v S_0^{ijkl} \varepsilon_{kl}(t_m) \delta \varepsilon_{ij} dv = \\ & = \sum_{m=0}^{n-1} R_m M^{\mu\nu}(t_m) u_\mu(t_m) \delta u_\nu, \end{aligned} \quad (14)$$

тут $M^{\mu\nu}(t_m)$ – матриця формозміни.

Вважаючи, що на тіло діють лише розподілені поверхневі сили, а згідно з варіаційним принципом потенціальна енергія в'язкопружного деформування повинна дорівнювати нулю, будемо мати:

$$\left[K^{\mu\nu}(t_n) u_\mu(t_n) - \sum_{m=0}^{n-1} R_m M^{\mu\nu}(t_m) u_\mu(t_m) - F^\nu(t_n) \right] \delta u_\nu = 0. \quad (15)$$

Аналізуючи останній вираз, можна зауважити, що у загальному випадку при дії сил варіація переміщень не може дорівнювати нулю, тому нулю повинен дорівнювати вираз у дужках, який і буде визначати лінеаризовану систему алгебраїчних рівнянь спадкової теорії в'язкопружності:

$$K_{(n)} \bar{u}_{(n)} = \sum_{m=0}^{n-1} \bar{Q}_{(m)} + \bar{P}_{(n)}, \quad (16)$$

Тут $K_{(n)}$ – матриця жорсткості для моменту часу t_n , $\bar{u}_{(n)}$ – невідомий вектор переміщень у момент часу t_n , $\bar{P}_{(n)}$ – вектор вузлових навантажень від дії поверхневих сил, $\bar{Q}_{(m)} = R_m M^{\mu\nu}(t_m) u_\mu(t_m)$ – вектор додаткового навантаження, що моделює спадкову складову частину деформування.

Тепер розглянемо алгоритми розв'язання системи алгебраїчних рівнянь (16) ітераційними методами на основі модифікованого методу Ньютона – Канторовича. При моделюванні реологічного процесу будемо вважати деформації досить малими, що дозволяє розв'язувати задачу у геометрично лінійній постановці й, відповідно, вважати матрицю жорсткості сталою у процесі деформування.

Тоді основні етапи роботи алгоритму можна охарактеризувати таким чином.

Перший етап: розв'язання задачі лінійної пружності.

1. За відомими координатами вузлових точок, відомими пружними характеристиками матеріалу знаходимо матрицю жорсткості $K_{(n)}$ (враховуючи, що вона є сталою, позначимо її як K).

2. Задаємо граничні умови, а саме враховуємо відомі значення вузлових переміщень і формуємо вектор зовнішнього навантаження $\bar{P}_{(n)}$ (будемо його вважати незмінним у часі, тому позначимо \bar{P}).

3. Формуємо та розв'язуємо систему алгебраїчних рівнянь лінійної теорії пружності:

$$K \bar{u}_{(0)} = \bar{P}. \quad (0)$$

Розв'язком системи буде вектор $\bar{u}_{(0)}$, де нижній індекс відповідає розв'язку пружної задачі, тобто для часу, що дорівнює нулю.

4. Для перевірки точності розв'язання задачі за знайденим значенням вектору переміщень починається внутрішній ітераційний процес ($k=0$) щодо виконання умови рівноваги у вузлових точках.

4.1. За знайденим вектором переміщень $\bar{u}_{(0)}$ знаходяться компоненти тензору деформацій і потім компоненти тензору напружень за формулою (4) у кожній вузловій точці (при $t=0$). У кожному вузлу знаходиться сума як зовнішніх, так і внутрішніх (напруження) сил – знаходимо вектор вузлових відхилів $\bar{R}_{(0)}^{(k)}$ (при точному розв'язку вони всі повинні дорівнювати нулю).

4.2. Знаходимо суму квадратів вузлових відхилів, яку позначимо $\bar{R}_{(0)}^{(k)}$, і як величину для порівняння знайдемо суму квадратів вузлових значень зовнішніх сил \bar{P} .

4.3. Критерієм того, що знайдений вектор переміщень $\bar{u}_{(0)}$ задовольняє умови рівноваги із заданим ступенем точності ε , можна вважати такий

$$\bar{R}_{(0)}^{(k)} < \varepsilon \bar{P}. \quad (17)$$

4.4. Якщо умова (17) задовольняється, то розв'язок пружної задачі записується як $\bar{u}_{(0)} = \bar{u}_{(0)}^{(k)}$, й переходимо до виконання пункту II; якщо не задовольняється, то переходимо до виконання наступного пункту 4.5.

4.5. Вектор вузлових відхилів $\bar{R}_{(n)}^{(k)}$ вважаємо за додаткове навантаження та підставляємо його у систему лінеаризованих рівнянь

$$K \Delta \bar{u}_{(0)}^{(k+1)} = \bar{R}_{(0)}^{(k)}.$$

4.6. Розв'язавши останню систему, знаходимо вектор переміщень $\bar{u}_{(0)}^{(k+1)}$ й підсумуємо його з $\bar{u}_{(0)}^{(k)}$, будемо мати новий вектор переміщень:

$$\bar{u}_{(0)}^{(k+1)} = \bar{u}_{(0)}^{(k)} + \Delta \bar{u}_{(0)}^{(k+1)}.$$

4.7. Номер внутрішньої ітерації збільшується на одиницю $k=k+1$ й алгоритм продовжує роботу з пункту 4.1.

Другий етап: розв'язання задачі в'язкопружності.

1. Часовий відрізок $[0; T]$ розбиваємо на n підвідрізків системою дискретних точок t_m ($m = 0, \dots, n$), причому $t_0 = 0$, $t_n = T$. Номеру зовнішньої ітерації присвоюємо значення $m=0$.

2. Обчислюється значення ядра релаксації

$$R_m = \int_{t_m}^{t_{m+1}} R(t - \tau) d\tau.$$

3. Знаходиться вектор додаткового навантаження, зумовлений реологічними властивостями:

$$\bar{Q}_{(m)} = R_m M^{uv}(t_m) u_{(m)}.$$

4. Формуємо та розв'язуємо систему алгебраїчних рівнянь лінійної теорії в'язкопружності:

$$K \bar{u}_{(m+1)} = \bar{P} + \sum_{l=0}^m \bar{Q}_{(l)}.$$

Розв'язком системи буде вектор $\bar{u}_{(m+1)}^{(0)}$.

5. Для перевірки точності розв'язання задачі за знайденим значенням вектору переміщень починається внутрішній ітераційний процес ($k=0$) щодо виконання умови рівноваги у вузлових точках.

5.1. За знайденим вектором переміщень $\bar{u}_{(m+1)}^{(k)}$ знаходяться компоненти тензору деформацій і потім компоненти тензору напружень за формулою (4) у кожній вузловій точці. У кожному вузлі знаходиться сума як зовнішніх, так і внутрішніх (напруження) сил – знаходимо вектор вузлових відхилів $\bar{Q}_{(m)}^{(k)}$.

5.2. Знаходимо суму квадратів вузлових відхилів, яку позначимо $\bar{Q}_{(m)}^{(k)}$, і як величину для порівняння використаємо суму квадратів вузлових значень зовнішніх сил \bar{P} .

5.3. Критерієм того, що знайдений вектор переміщень $\bar{u}_{(m+1)}^{(k)}$ задовольняє умови рівноваги із заданим ступенем точності ε , можна вважати

$$\bar{Q}_{(m)}^{(k)} < \varepsilon \bar{P}. \tag{18}$$

5.4. Якщо умова (18) задовольняється, то розв'язок в'язкопружної задачі записується як $\bar{u}_{(m+1)} = \bar{u}_{(m+1)}^{(k)}$, й переходимо до виконання пункту 6; якщо не задовольняється, то переходимо до виконання наступного пункту 5.5.

5.5. Вектор вузлових відхилів $\bar{Q}_{(m)}^{(k)}$ вважаємо за додаткове навантаження та підставляємо його у систему лінеаризованих рівнянь

$$K \Delta \bar{u}_{(m+1)}^{(k+1)} = \bar{Q}_{(m)}^{(k)}.$$

5.6. Розв'язавши останню систему, знаходимо вектор переміщень $\bar{u}_{(0)}^{(k+1)}$ й підсумуємо його з $\bar{u}_{(0)}^{(k)}$, будемо мати новий вектор переміщень:

$$\bar{u}_{(0)}^{(k+1)} = \bar{u}_{(0)}^{(k)} + \Delta \bar{u}_{(0)}^{(k+1)}.$$

5.7. Номер внутрішньої ітерації збільшується на одиницю $k=k+1$, й алгоритм продовжує роботу з пункту 5.1.

6. Номер зовнішньої ітерації збільшується на одиницю: $m=m+1$.

7. На кожному кроці проводиться підсумовування спадкових складових частин напружень.

8. Проводиться перевірка завершення ітераційного процесу:

$$m = n. \tag{19}$$

9. Якщо умова (19) виконується, то робота алгоритму завершується, в іншому разі алгоритм переходить до виконання пункту 2.

Окремо обговоримо пункт 1 другого етапу виконання алгоритму, тобто дискретизацію за часом. У більшості алгоритмів обирають просту формулу, згідно з якою досліджуваний проміжок часу $[0; T]$ розбивається на n частин системою рівновіддалених точок:

$$t_m = t_0 + m \frac{T}{n}, (m = 0, \dots, n). \tag{20}$$

Враховуючи особливості деформування реальних матеріалів, коли значні деформації відбуваються відразу після прикладання сили, на початку відрізка $[0; T]$, а із плином часу змінюються дуже повільно, доцільно спочатку згустити сітку часових значень, а потім зробити її більш розрідженою. Варіант такого розбиття можна запропонувати такий: крок за часом обирається так, щоб усі $R_m = const$ ($m = 0, \dots, n-1$), тобто у розділі розв'язання задачі в'язкопружності перший пункт буде таким:

1. Обчислюємо

$$R_{\Sigma} = \int_0^T R(t - \tau) d\tau.$$

Знаходимо крок:

$$\Delta R_n^* = \frac{R_n^*}{n}.$$

Прийmemo $t_0 = 0, t_n = T$. Перше наближення до значення t_1 прийmemo таким:

$$t_1 = t_0 + \frac{T}{n}.$$

Це та наступні значення $t_m (m=0, \dots, n-1)$ підберемо в ітераційному процесі, спочатку $m=0, k=0$:

а) обчислимо ядро релаксації:

$$R_m^{*(k)} = \int_{t_m}^{t_{m+1}} R(t-\tau) d\tau;$$

б) перевіримо умову:

$$\left| R_m^{*(k)} - \Delta R_n^* \right| \leq \delta, \tag{21}$$

тут δ – мале додатне число, що характеризує точність обчислення вузлових точок.

Якщо умова (21) не виконується, то корегуємо значення t_{m+1} :

$$t_{m+1} = t_{m+1} \left(1 + \frac{\Delta R_n^* - R_m^{*(k)}}{\Delta R_n^*} \right), \tag{22}$$

присвоюємо $k=k+1$ і переходимо до пункту а).

Якщо ж умова (21) виконується, то прогнозуємо наступне значення:

$$t_{m+2} = t_{m+1} + (t_{m+1} - t_m),$$

присвоюємо $m=m+1$, робимо перевірку

$$m = n,$$

якщо так, переходимо до наступного пункту 2, якщо ні, то присвоюємо $k=k+1$ й переходимо до пункту а).

Чисельні результати та їх обговорення. За допомогою програмної реалізації вищеописаних алгоритмів розглянемо розв’язання задачі в’язкопружної поведінки порожнього циліндру, що знаходиться під внутрішнім тиском (на внутрішній циліндричній поверхні) та затиснений зовні (на зовнішній циліндричній поверхні). Розміри циліндру: внутрішній радіус $a = 0,025$ м, зовнішній радіус $b = 0,1$ м. Матеріал циліндру – гума марки 2959 з модулем зсуву $G_0 = 1,76$ МПа та коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,49$. Як різницеве ядро візьmemo ядро Ю.М. Работнова з параметрами $\alpha = -0,6, \beta = 1,062, \lambda = 0,58$. Внутрішній тиск – $q = 0,2$ МПа.

Результати розрахунків при сітці розбиття $15 \times 15 \times 3$ наведені на рис. 1.

Як можна зазначити, розв’язок за допомогою другого алгоритму дає більш плавну криву, яка за формою збігається із точним розв’язком, порівняно із розв’язком, отриманим за першим алгоритмом, який більше нагадує ламану лінію. Певна різниця між точним розв’язком і наближеними зумовлена застосуванням чисельного методу. Похибка, отримана при пружному розв’язку, яка трохи більше 2,5 %, залишається приблизно такою і при в’язкопружному розв’язку, що свідчить про адекватність розроблених алгоритмів.

Висновки. Таким чином, у роботі для алгоритму розв’язання задачі в’язкопружності запропоновано спосіб вибору часового кроку, досліджено вплив цього вибору на точність отриманих числових розв’язків.

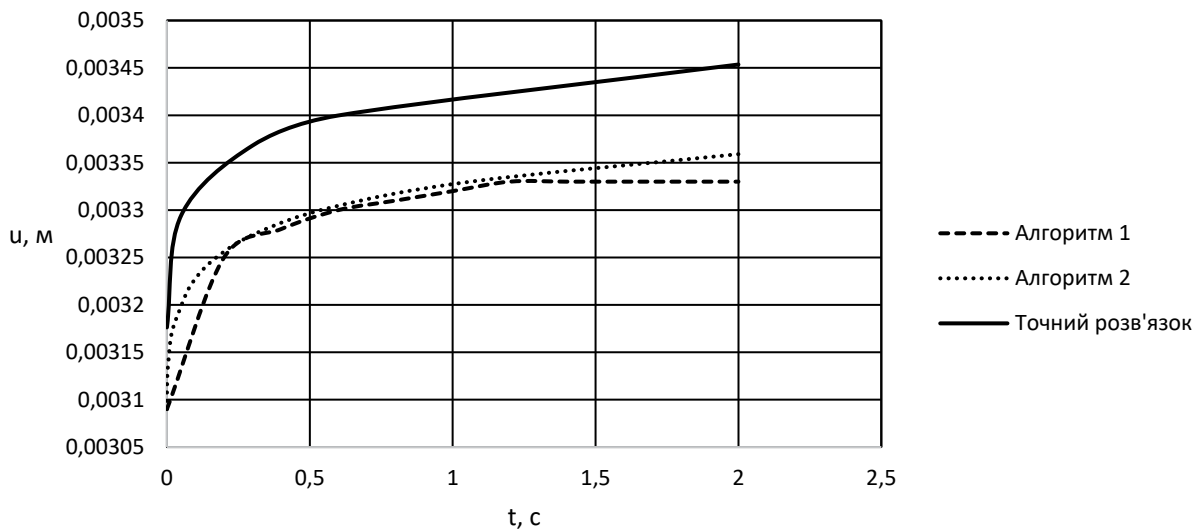


Рис. 1. Переміщення внутрішньої точки циліндричної поверхні

ЛІТЕРАТУРА

1. Xu Q., Engquist B., Solaimanian M., Yan K. A new nonlinear viscoelastic model and mathematical solution of solids for improving prediction accuracy. *Scientific Reports*. 2020. Vol. 10. Issue 2202. P. 1–10. DOI: 10.1038/s41598-020-58240-y.
2. Numerical modeling of seismic wave propagation in viscoelastic isotropic media in the presence of topography / Liu X. et. al. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*. 2017. P. 4039–4044. DOI: 10.1190/segam2017-17634331.1.
3. Маслов Б.П. Застосування квазілінійної моделі в'язкопружності для прогнозування повзучості неоднорідного геологічного середовища. *Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія фізико-математичні науки*. 2019. № 1. С. 122–125.
4. Cho K.S. *Springer Series in Materials Science*. Dordrecht : Springer, 2016. Vol. 241 : Viscoelasticity of Polymers: Theory and Numerical Algorithms. 612 p. DOI: 10.1007/978-94-017-7564-9.
5. Spinu S., Cerlinca D. A robust algorithm for the contact of viscoelastic materials. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering: proceeding of the ModTech International Conference – Modern Technologies in Industrial Engineering IV (Iasi, Romania, 15–18 June 2016)*. 2016. Vol. 145. Issue 4. № 042034. DOI: 10.1088/1757-899X/145/4/042034.
6. Zhang W.X., Yang L.M. A New Computational Approach for Viscoelasticity. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science: proceeding of the 4th International Conference on Water Conservancy, Hydropower and Building Engineering (Lanzhou, China, 3–5 July 2020)*. 2020. Vol. 560. № 012021. DOI: 10.1088/1755-1315/560/1/012021.
7. Xu K., Tartakovsky A. M., Burghardt J., Darve E. Learning viscoelasticity models from indirect data using deep neural networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2021. Vol. 387. № 114124. DOI: 10.1016/j.cma.2021.114124.
8. Bao X., Liu J.-B., Li S.-T., Wang F. A new viscoelastic artificial boundary with improved numerical stability in explicit calculation of wave propagation problems in infinite domains. *Computers and Geotechnics*. 2022. Vol. 145. № 104698. DOI: 10.1016/j.compgeo.2022.104698.
9. Киричевский В.В. Метод конечных элементов в механике эластомеров. Киев : Наукова думка, 2002. 655 с.
10. Вакал Л.П. Генетичні алгоритми як інструмент розв'язання нелінійних крайових задач. *Комп'ютерні засоби, мережі та системи*. 2015. № 14. С. 16–23.

REFERENCES

1. Xu, Q., Engquist, B., Solaimanian, M., & Yan, K. (2020). A new nonlinear viscoelastic model and mathematical solution of solids for improving prediction accuracy. *Scientific Reports*, 10(2202), 1–10. DOI: 10.1038/s41598-020-58240-y.
2. Liu, X., Chen, J., Zhao, Z., Lan, H., & Liu, F. (2017). Numerical modeling of seismic wave propagation in viscoelastic isotropic media in the presence of topography. *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2017*, 4039–4044. DOI: 10.1190/segam2017-17634331.1.
3. Maslov, B.P. (2019). Zastosuvannia kvaziliniinoi modeli viazkoprzhnosti dlia prohnozuvannia povzuchosti neodnorodnoho heolohichnoho seredovishcha. [Application of a quasilinear viscoelastic model for prediction of creep in a heterogeneous geological medium]. *Bulletin of T. Shevchenko Kyiv National University. Series Physical and Mathematical Sciences*, 1, 122–125. (in Ukrainian).
4. Cho, K.S. (2016). *Viscoelasticity of Polymers: Theory and Numerical Algorithms*. Dordrecht : Springer. DOI: 10.1007/978-94-017-7564-9.
5. Spinu, S., & Cerlinca, D. (2016). A robust algorithm for the contact of viscoelastic materials. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 145(4), 042034. DOI: 10.1088/1757-899X/145/4/042034.
6. Zhang, W.X., & Yang, L.M. (2020). A New Computational Approach for Viscoelasticity. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 560, 012021. DOI: 10.1088/1755-1315/560/1/012021.
7. Xu, K., Tartakovsky, A. M., Burghardt, J., & Darve, E. (2021). Learning viscoelasticity models from indirect data using deep neural networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 387, 114124. DOI: 10.1016/j.cma.2021.114124.
8. Bao, X., Liu, J.-B., Li, S.-T., & Wang, F. (2022). A new viscoelastic artificial boundary with improved numerical stability in explicit calculation of wave propagation problems in infinite domains. *Computers and Geotechnics*, 145, 104698. DOI: 10.1016/j.compgeo.2022.104698.
9. Kyrychevskiy, V.V. (2002). *Metod konechnykh jelementov v mehanike jelastomerov*. [Finite element method in elastomer mechanics]. Kyiv : Naukova dumka. (in Russian).
10. Vakal, L.P. (2015). Henetychni alhorytmy yak instrument rozv'язannia neliniinykh kraiovykh zadach. [Genetic algorithms as a tool for solving nonlinear boundary value problems]. *Computer means, networks and systems*, 14, 16–23. (in Ukrainian).