

НЕЙРОМЕРЕЖЕВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРЯМИХ І ОБЕРНЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Ярош А. О.

*аспірантка кафедри програмної інженерії
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0009-0003-3495-9009
yarosh.anastasiya@gmail.com*

Кудін О. В.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
професор кафедри програмної інженерії
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-5917-9127
avk256@gmail.com*

Ключові слова: *крайові задачі,
пряма задача, обернена
задача, рівняння Бюргерса,
нейронні мережі з фізичною
інформацією*

Розвиток наближених методів розв'язання диференціальних рівнянь є важливим для багатьох галузей науки та техніки. Чисельні методи дозволяють здійснювати розрахунки складних фізичних процесів. Ці методи необхідні для комп'ютерного моделювання та симуляції поведінки складних технічних систем. Класичні методи розв'язання диференціальних рівнянь (метод колокації, метод Гальоркіна, метод Рітца) потребують вибору базисних функцій для побудови наближеного розв'язку. Хибний вибір може призвести до некоректних результатів. Крім того, збільшення кількості базисних функцій для поліпшення точності може призвести до зростання обчислювальної складності, особливо для великих систем диференціальних рівнянь. Використання нейронних мереж із фізичною інформацією для розв'язання крайових задач має кілька переваг порівняно із класичними методами. По-перше, нейронні мережі дозволяють здійснювати апроксимацію складних фізичних процесів без потреби у виборі певних базисних функцій. По-друге, нейронні мережі здатні автоматично виявляти нелінійні залежності у даних, що робить їх ефективними для моделювання складних фізичних явищ. Крім того, нейронні мережі можуть адаптуватися до нових даних і змінювати умови задачі без необхідності перегляду аналітичних апроксимацій, що робить їх більш гнучкими та придатними для застосування у різних галузях фізики й інженерії. Нейромереві методи також ефективно використовуються для розв'язання обернених задач. Вони дозволяють визначати параметри системи або властивості середовища на основі вимірювань або спостережень. Невідомі константи оберненої задачі, що підлягають визначенню, вводяться у число параметрів нейронної мережі й оптимізуються під час навчання. У роботі розроблено архітектури нейронних мереж із фізичною інформацією для розв'язання прямих та обернених задач рівняння Бюргерса. Продемонстровано збіжність на декількох числових прикладах із різними крайовими умовами та параметрами задач.

NEURAL NETWORK METHODS FOR SOLVING FORWARD AND INVERSE PROBLEMS

Yarosh A. O.

*Postgraduate Student at the Department of Software Engineering
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0009-0003-3495-9009
yarosh.anastasiya@gmail.com*

Kudin O. V.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Professor at the Department of Software Engineering
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-5917-9127
avk256@gmail.com*

Key words: *boundary value problems, forward problem, inverse problem, Burgers equation, physics informed neural networks*

The development of the approximation methods for solving differential equations is important for many fields of science and technology. Numerical methods allow evaluation of the complex physical processes. These methods are necessary for computer modeling and simulation of technical systems. Classical methods of solving differential equations (collocation method, Galerkin method, Ritz method) require selection of the basis functions to construct an approximate solution. The wrong choice can lead to incorrect results. In addition, increasing the number of the basis functions to improve accuracy can lead to an increase in computational complexity, especially for large systems of differential equations. The use of physics informed neural networks for solving boundary value problems has several advantages compared to classical methods. First, neural networks allow approximation of complex physical processes without the need to select certain basis functions. Second, neural networks are able to automatically detect nonlinear dependencies in data, which makes them effective for modeling complex physical phenomena. In addition, neural networks can adapt to new data and change the conditions of the problem without the need to revise analytical approximations, which makes them more flexible and suitable for application in various fields of physics and engineering. Neural network methods are also effectively used to solve inverse problems. They allow the determination of system parameters or environmental properties based on measurements or observations. The unknown constants of the inverse problem to be determined are entered into the number of neural network parameters and optimized during training. In the paper, neural network architectures with physical information are developed for solving direct and inverse problems of the Burgers equation. Convergence is demonstrated on several numerical examples with different boundary conditions on the parameters of the problems.

Вступ. Розвиток нейромережових методів у застосуванні до наукових та інженерних задач набуває дедалі більшого значення. Зокрема, розвиваються напрями «scientific machine learning» (SciML) або «Physics-informed machine learning» (PIML) [1; 2], особливістю яких є застосування методів машинного навчання у моделюванні вимогливих до ресурсів наукових задач. Осно-

вою для таких методів є теореми про збіжність апроксимації нейронними мережами [3]. Ідея цих підходів полягає у заміні невідомої функції та її похідних нейронною мережею та застосування додаткової інформації з диференціальних рівнянь і граничних умов при навчанні мережі. Такі нейронні мережі із застосуванням додаткової інформації отримали назву мереж із

фізичною інформацією (Physics Informed Neural Networks, PINN), вони відкривають нові можливості завдяки своїй універсальності та гнучкості, які дозволяють адаптуватися до різних фізичних умов і граничних умов без необхідності підбору апроксимуючих функцій на початковому етапі розв'язання. Однією із ключових переваг PINN є їх здатність інтегрувати фізичні закони або рівняння у розв'язок, що робить їх більш точними та фізично обґрунтованими. Крім того, нейромереві методи дозволяють ефективно використовувати експериментальні дані для покращення точності моделей і зменшення обчислювальних витрат порівняно із традиційними чисельними методами. Розвиток цих підходів відкриває нові перспективи у дослідженні різних галузей, де важливо розв'язувати складні крайові задачі, такі як фізика, інженерія, медицина та інші, що вимагають комплексного аналізу та моделювання систем із нелінійністю.

Об'єктом дослідження є нейронні мережі з фізичною інформацією, які застосовуються для розв'язання крайових задач.

Метою роботи є застосування PINN підходу до розв'язання прямих та обернених задач для рівняння Бюргерса та проведення обчислювальних експериментів для різних граничних умов і параметрів рівняння.

Основна гіпотеза дослідження полягає у тому, що нейромереві методи розв'язання прямих та обернених задач є однаково ефективними для різних крайових умов і параметрів диференціальних рівнянь.

Огляд літератури. Стаття [4] присвячена розробці загального методу розв'язання звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь у частинних похідних, який базується на використанні нейронних мереж для апроксимації невідомої функції. Метод використовує мережу прямого поширення сигналу, параметри якої налаштовуються шляхом мінімізації відповідної функції втрат. Сама функція втрат складається із двох частин: перший компонент відображає початкові або граничні умови задачі, а другий – відповідає вимогам, щоб нейронна мережа задовольняла диференціальне рівняння. Цей метод відрізняється тим, що його розв'язок представлений у замкнутій диференційованій формі, яку можна використовувати для подальших обчислень, відмінно від традиційних методів, що пропонують дискретні розв'язки (такі як метод Рунге-Кутта, послідовні наближення тощо). Демонструється збіжність запропонованого методу з точними розв'язками модельних задач.

У [5] розробляється підхід до навчання нейронних мереж на основі даних, котрі описують деякий фізичний процес. Автори пропонують використовувати апріорні знання про відповідні

фізичні закони та гіпотетичні залежності як регуляризатори функції втрат нейромережі. Залежно від характеристик наявних даних розроблено два типи моделей: із неперервною та дискретною часовою шкалою. Перший тип може використовуватися для апроксимації просторово-часових функцій. Моделі другого типу передбачають ітераційний процес із кроком за часом. У роботі розглянуто параметричні та нелінійні диференціальні рівняння у частинних похідних.

У [6] нейронні мережі з фізичною інформацією застосовуються у задачах оптимізації, а саме у задачах підйому маятника вгору для досягнення цільового стану, визначення найкоротшого шляху, що з'єднує дві задані точки, і знаходження траєкторії розгойдування з мінімальною тягою для космічного апарату.

Статті [4–6] присвячено розв'язанню прямих задач, тобто необхідно знайти розв'язок диференціального рівняння із заданими коефіцієнтами, визначеними граничними та початковими умовами. Не менш актуальними є обернені задачі, у яких за наявним розв'язком необхідно встановити параметри задачі [7].

У [8] розглядається керований даними розв'язок прямих та обернених задач для рівняння Хіроті зі змінними коефіцієнтами. Використовується варіант мереж PINN із локальними функціями активації. Результати, отримані у цій роботі, підтверджують, що прями й обернені проблеми, включаючи виявлення керованої даними функції рівняння зі змінними коефіцієнтами, можуть бути розв'язані на основі глибокого навчання.

Статтю [9] присвячено розв'язанню прямих та обернених проблем хаотичних систем, пов'язаних із системами Лоренца та Ресслера, за допомогою двох алгоритмів машинного навчання, а саме нейронних операторів Фур'є.

У роботах [10–11] PINN мережі використовуються для розв'язання задачі дифузії [10], параметричних диференціальних рівнянь [11].

Для тестування різних чисельних методів часто використовується рівняння Бюргерса, оскільки, незважаючи на те, що це є нелінійне рівняння, відомі точні розв'язки. У [12] розв'язується рівняння Бюргерса методом сплайнів. Проводяться обчислювальні експерименти з різними граничними умовами. Одновимірні обернені задачі для рівняння Бюргерса розглядаються у [13]. Визначаються діапазони параметрів для розв'язків із різними властивостями. Статтю [14] присвячено оберненим задачам для рівняння Бюргерса.

У [15; 16] PINN мережі використовуються для розв'язання обернених задач рівняння Бюргерса.

Отже, з аналізу літератури можна зробити висновок про перспективність застосування нейромеревих обчислювальних методів для розв'язання

прямих та обернених задач. Слід відзначити велику кількість публікацій, що розглядають саме розв'язання прямих задач, і відносно меншу кількість із застосування нейромереж до обернених задач.

Методи. Нейромережа може бути описана як складена нелінійна функція, яка складається з різних шарів або рівнів обчислень. Кожен рівень мережі (або шар) містить набір вагових коефіцієнтів і зсувів, що використовуються для обчислення зваженої суми вхідних даних [17].

У кожному шарі нейромережі вхідні дані змінюються за допомогою нелінійної функції активації, наприклад, сигмоїди, ReLU (Rectified Linear Unit), тангенса гіперболічного і т.д. Ці нелінійності дозволяють нейромережі моделювати складні залежності між вхідними та вихідними даними.

Отже, коли дані проходять через всі шари нейромережі, це призводить до виходу, який є результатом складеної нелінійної функції, що враховує взаємозв'язки між вхідними характеристиками. Вагові коефіцієнти та зсуви у кожному шарі нейромережі оптимізуються під час тренування, щоб максимально точно апроксимувати бажані вихідні значення на основі наданих вхідних даних [17].

Розглянемо одношарову нейронну мережу з вектором входу x , виходом y та матрицею ваг W , а також вектором зсуву b . Математично цю мережу можна описати таким чином:

$$y = f(Wx + b),$$

де

$f(\cdot)$ – активаційна функція, яка додає нелінійність до моделі.

Наведене рівняння відображає просту трансформацію вхідних даних x у вихід y . Активаційна функція важлива для того, щоб дати нейронній мережі можливість навчатися складніших взаємозв'язків і нелінійних шаблонів у даних [17].

Багатошарова нейромережа прямого поширення має кілька прихованих шарів нейронів між вхідними та вихідними шарами. Ця архітектура дозволяє моделювати складніші залежності між вхідними та вихідними даними, оскільки кожен прихований шар оброблює інформацію і використовується для поетапного виділення корисних ознак і підготовки даних для наступних шарів. Таким чином, багатошарова нейромережа може автоматично виявляти складніші шаблони та взаємозв'язки у даних, що дозволяє покращити точність і загальну ефективність моделі порівняно з одношаровою мережею, яка має обмежені можливості у виразності та моделюванні складних функцій.

Нехай маємо L шарів у багатошаровій нейронній мережі. Кожен шар має свою матрицю ваг $W^{[l]}$ та зсув $b^{[l]}$, а також активаційну функцію $f^{[l]}$.

Вхідний вектор позначений x , а вихідний вектор мережі – y . Опис функції мережі для одного прикладу може бути подано таким чином [17]:

$$z^{[l]} = W^{[l]} \cdot a^{[l-1]} + b^{[l]},$$

$$a^{[l]} = f^{[l]}(z^{[l]}),$$

де

l – індекс шару (від 1 до L),

$z^{[l]}$ – лінійна комбінація входів та параметрів шару,

$a^{[l]}$ – вихідний вектор шару після застосування активаційної функції.

Для багатошарової мережі вивід буде остаточним результатом останнього шару: $y = a^{[L]}$. Отже, загальна функція, яка описує багатошарову нейронну мережу прямого поширення сигналу, може бути визначена як композиція функцій, представлена таким чином [17]:

$$y = f^{[L]}(W^{[L]} \cdot f^{[L-1]}(W^{[L-1]} \cdot (\dots \cdot f^{[1]}(W^{[1]} \cdot x + b^{[1]}) + b^{[L-1]}) + b^{[L]}),$$

де

L – кількість шарів у нейронній мережі,

x – вхідний вектор,

$W^{[l]}$ та $b^{[l]}$ – ваги та зсуви шару l ,

$f^{[l]}(\cdot)$ – функція активації шару l .

Ця функція представляє собою послідовність лінійних і нелінійних операцій для обробки вхідного вектора й отримання вихідного результату. Кожен шар мережі вносить власний вклад у зміну структури та формування складної залежності між вхідними та вихідними даними.

Ваги $W^{[l]}$ та $b^{[l]}$ мережі є параметрами, які оптимізуються під час навчання для досягнення певного вихідного результату.

Оптимізація у багатошаровій мережі прямого поширення зазвичай виконується за допомогою алгоритму зворотного поширення помилки, який базується на методі градієнтного спуску. Під час навчання мережі зворотне поширення обчислює градієнти функції втрат відносно параметрів мережі, а потім використовує ці градієнти для оновлення параметрів із метою мінімізації функції втрат. Вибір правильної функції втрат є критичним, оскільки ця функція визначає, яким чином мережа оцінює свою власну точність [17].

Нейронні мережі з фізичною інформацією представляють собою підхід, який поєднує потужність нейронних мереж із диференціальними рівняннями для розв'язання завдань, пов'язаних із фізичними процесами. Нейронна мережа навчається на основі даних, де вхідні та вихідні пари відображають точки в домені (x, u) , де x – це точка у просторі, а u – відповідне значення фізичної величини. Причому точки у геометричній області визначення включають граничні та початкові умови. Функція витрат нейромережі

містить метрику відповідності нейромережі диференціальним рівнянням і граничним умовам. Це дозволяє моделі не лише апроксимувати дані, а й ураховувати фізичні обмеження та відомі закони. Під час оптимізації, PINN шукає розв'язок, який відповідає фізичним законам і навчальним даним, забезпечуючи таким чином фізичну правдоподібність та ефективність у вирішенні задач фізики й інженерії [5].

Нейронні мережі з фізичною інформацією також використовуються для розв'язання обернених задач [15; 16]. У параметри нейроної мережі вводяться невідомі коефіцієнти диференціального рівняння. Отже, під час пошуку розв'язку, який задовільняє крайовій задачі, налаштовуються не тільки ваги мережі, а також коефіцієнти, котрі необхідно визначити за умовами оберненої задачі. Вхідними даними для розв'язання оберненої задачі нейромережевими методами є розв'язок прямої задачі, отриманий будь-яким наближенням або точним методом.

Результати. Розглянемо застосування нейромереж із фізичною інформацією для розв'язання прямих та обернених задач рівняння Бюргерса [12; 18]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

де:

$u(t, x)$ – функція, що описує швидкість потоку (наприклад, швидкість руху рідини або газу) залежно від часу t і координати x .

ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості середовища, який визначає внутрішню тертя у рідині чи газі.

Рівняння Бюргерса є одним із фундаментальних нелінійних рівнянь у математичній фізиці, котре описує рух неідеальної рідини або газу з урахуванням ефектів дифузії та конвекції [18]. Поширеним є використання саме цього рівняння

для тестування наближених обчислювальних методів, оскільки є відомими точні розв'язки для різних початкових і граничних умов [18].

Далі наводяться приклади розв'язання прямих та обернених задач рівняння Бюргерса методом PINN мереж для п'яти крайових умов. Виконується порівняння з відповідними точними розв'язками, відомими з літератури.

Приклад 1. Область визначення $x \in [0, 1]$, $\nu = 0.01$. Граничні умови $u(0, t) = u(1, t) = 0$. Початкова умова:

$$u(x, 1) = \frac{x}{1 + \sqrt{\frac{t}{t_0}} e^{\left(\frac{x^2}{4\nu}\right)}}, t \geq 1, t_0 = e^{\left(\frac{1}{8\nu}\right)}.$$

Точний розв'язок має вигляд [12]:

$$u(x, t) = \frac{x/t}{1 + \sqrt{\frac{t}{t_0}} e^{\left(\frac{x^2}{4\nu t}\right)}}, t \geq 1.$$

На рис. 1 зображено точні та наближені розв'язки

Як метрику схожості точних і прогнозованих значень функції $u(t, x)$ використаємо коефіцієнт детермінації R^2 [19]. Значення $R^2 = 1$ означає, що всі спостереження точного розв'язку збігаються із прогнозованими значеннями. Для цього прикладу $R^2 = 0,996$.

Обернену задачу визначення коефіцієнта кінематичної в'язкості ν як параметра нейромережі ν_{PINN} розв'язано з відносною похибкою

$$\frac{|\nu - \nu_{PINN}|}{\nu} \cdot 100\% = 0,15\%.$$

Приклад 2. Область визначення, початкові та граничні умови такі ж, як у прикладі 1, відрізняється тільки коефіцієнт $\nu = 0.005$.

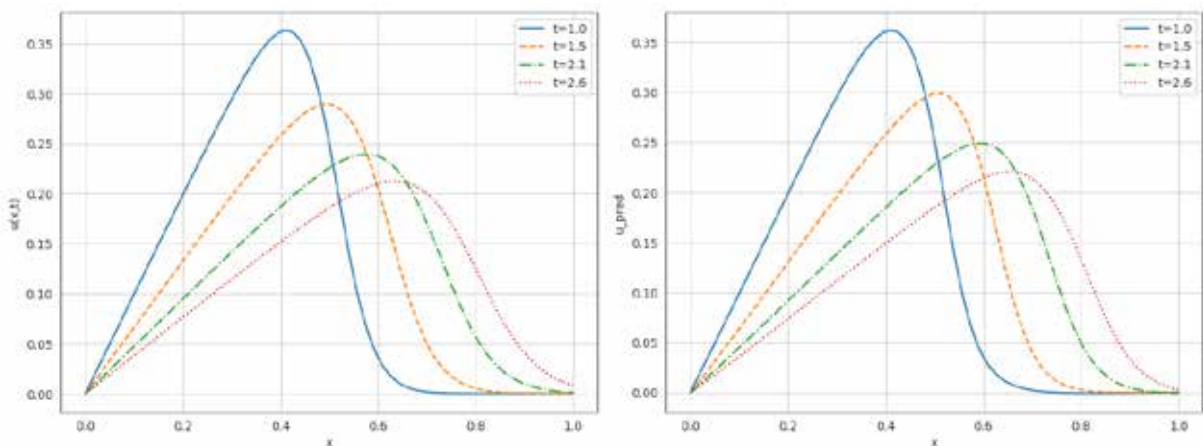


Рис. 1. Точний (u) та наближений (u_{pred}) розв'язки прикладу 1

На рис. 2 зображено точні та наближені розв'язки.

Коефіцієнт детермінації точного та наближеного розв'язку становить $R^2 = 0,994$. Відносна похибка визначення коефіцієнта кінематичної в'язкості ν становить 0,11%.

Приклад 3. Коефіцієнт в'язкості $\nu = 0,0015$. Область визначення, початкові та граничні умови такі ж, як у прикладі 1.

Коефіцієнт детермінації точного та наближеного розв'язку становить $R^2 = 0,991$. Відносна похибка визначення коефіцієнта кінематичної в'язкості ν становить 2,18%.

На рис. 3 зображено точні та наближені розв'язки.

Приклад 4. Область визначення $x \in [0, 1.2]$, $\nu = 0,005$. Граничні умови $u(0, t) = u(1.2, t) = 0$. Початкова умова:

$$u(x, 1) = \frac{x}{1 + \exp\left(\frac{x^2 - 0.25}{4\nu}\right)}, t \geq 1$$

Точний розв'язок збігається з попередніми прикладами.

На рис. 4 зображено точні та наближені розв'язки

Коефіцієнт детермінації точного та наближеного розв'язку становить $R^2 = 0,997$. Відносна похибка визначення коефіцієнта кінематичної в'язкості ν становить 0,47%.

Приклад 5. Область визначення $x \in [0, 2]$, $\nu = 0,01$. Граничні умови $u(0, t) = u(2, t) = 0$. Початкова умова:

$$u(x, 0) = 2\nu\pi \frac{\sin(\pi x) + 4 \sin(2\pi x)}{4 + \cos(\pi x) + 2 \cos(2\pi x)}$$

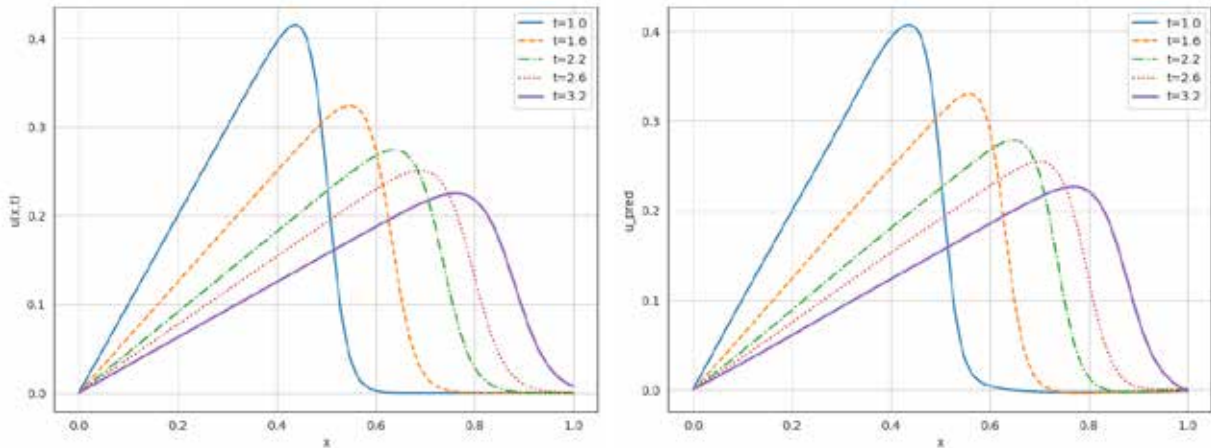


Рис. 2. Точний (u) та наближений (u_pred) розв'язки прикладу 2

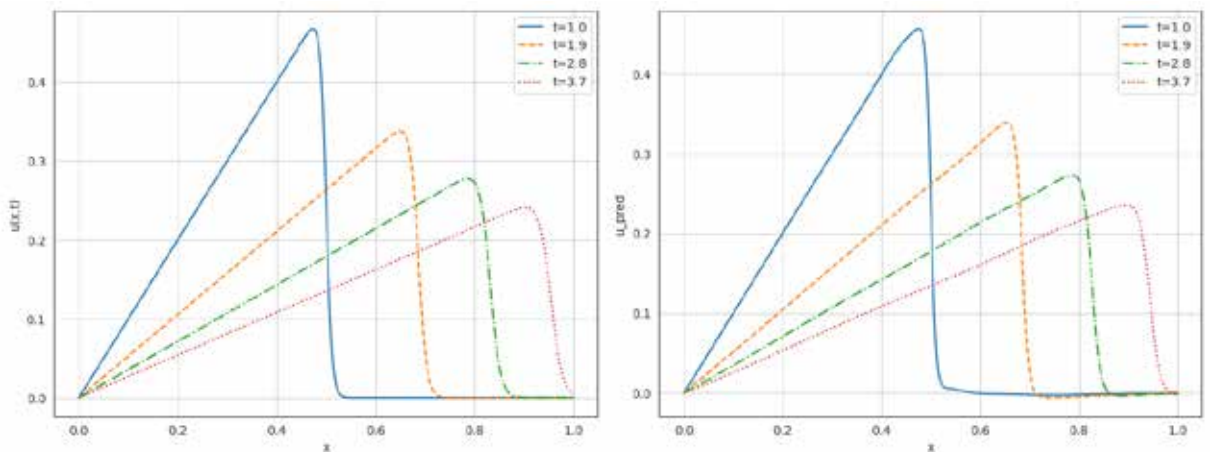


Рис. 3. Точний (u) та наближений (u_pred) розв'язки прикладу 3

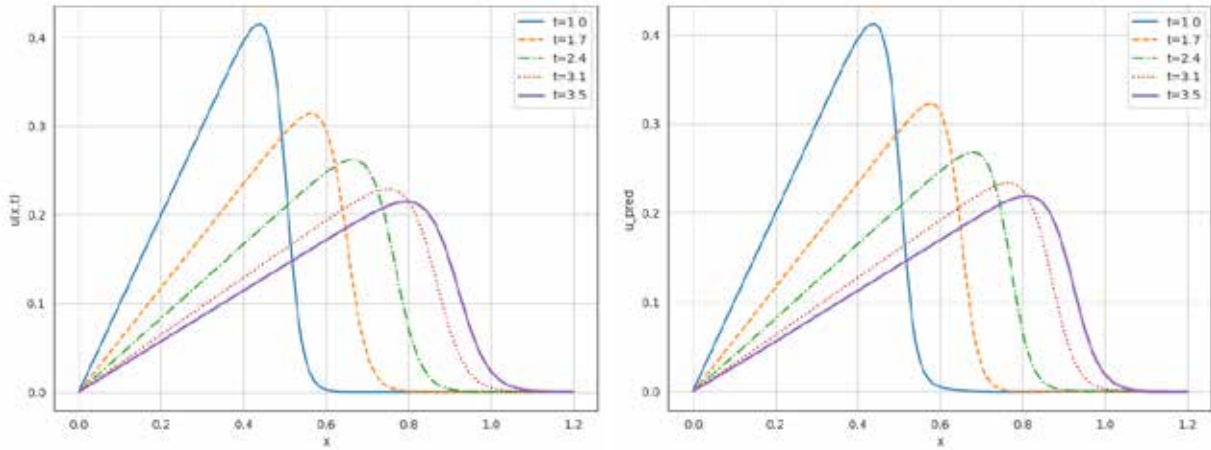


Рис. 4. Точний (u) та наближений (u_pred) розв’язки прикладу 4

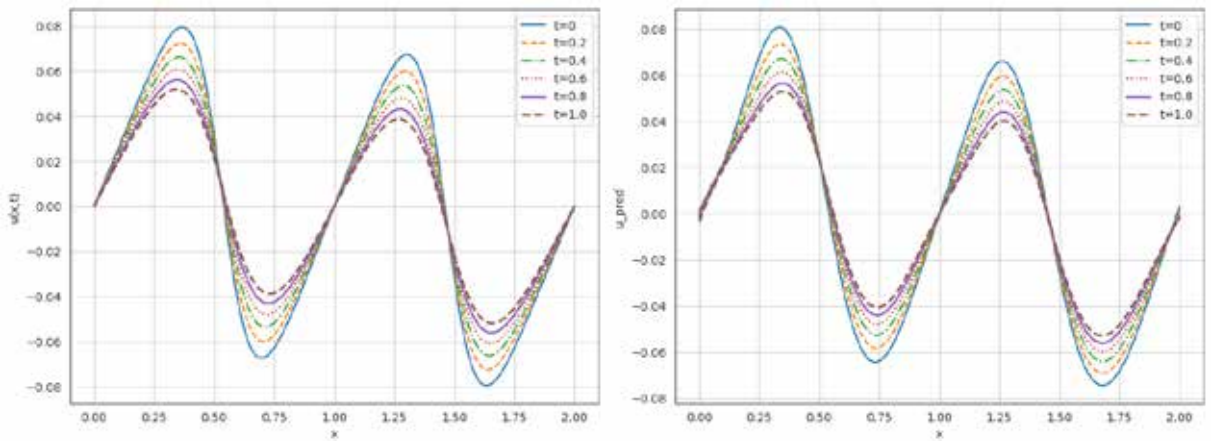


Рис. 5. Точний (u) та наближений (u_pred) розв’язки прикладу 5

Точний розв’язок [12; 19]:

$$u(x,t) = 2v\pi \frac{\sin(\pi x)e^{-\pi^2vt} + 4\sin(2\pi x)e^{-4\pi^2vt}}{4 + \cos(\pi x)e^{-\pi^2vt} + 2\cos(2\pi x)e^{-4\pi^2vt}}$$

На рис. 5 зображено точні та наближені розв’язки.

Коефіцієнт детермінації точного та наближеного розв’язку становить $R^2 = 0,993$. Відносна похибка визначення коефіцієнта кінематичної в’язкості ν становить 4,58%.

Репозиторій із програмною реалізацією наведених обчислювальних експериментів засобами бібліотеки PyTorch знаходиться за посиланням <https://github.com/avk256/AutoPINN>.

Висновки. Розглянуто застосування нейронних мереж із фізичною інформацією для розв’язання прямих та обернених крайових задач. Перевагами цього підходу є те, що нейронмережі можуть автоматично апроксимувати шукані функції, оскільки при навчанні використовується інформація про диференціальне рівняння та граничні умови, які

достатньо для розв’язання задачі. Отже, із процесу розв’язку виключається вибір базисних або пробних функцій, що сприяє автоматизації цього підходу.

Наведені числові приклади демонструють задовільну збіжність нейромережевого методу до точного розв’язку. Використано три різні початкові умови, діапазон коефіцієнта кінематичної в’язкості ν від 0,0015 до 0,01. Проведено порівняння з точними та наближеними результатами робіт [12; 18]. Продемонстровано задовільну збіжність результатів.

Середній коефіцієнт детермінації точного та наближеного розв’язку прямих задач становить $R^2 = 0,994$. Середня відносна похибка визначення коефіцієнта кінематичної в’язкості ν при розв’язанні обернених задач становить 1,57%.

Перспективи подальших досліджень полягають у розробці методів автоматичного налаштування гіперпараметрів нейронмереж із фізичною інформацією та розширенні цього підходу на інші класи задач.

ЖИТЕПАТЫПА

1. Karniadakis G.E., Kevrekidis I.G., Lu L., Perdikaris P., Wang S., Yang L., Physics-informed machine learning. *Nat Rev Phys*. 2021. Vol. 3. № 6. P. 422–440. doi: 10.1038/s42254-021-00314-5.
2. Willard J., Jia X., Xu S., Steinbach M., Kumar V. Integrating Scientific Knowledge with Machine Learning for Engineering and Environmental Systems. *ACM Comput. Surv.*, 2022, <https://doi.org/10.1145/3514228>
3. Cybenko G.V. Approximation by Superpositions of a Sigmoidal function. *Mathematics of Control, Signals and Systems*. 1989. Vol. 2. № 4. P. 303–314
4. Lagaris I.E., Likas A., Fotiadis D.I. Artificial Neural Networks for Solving Ordinary and Partial Differential Equations. arXiv:physics/9705023v1, 1997, <https://doi.org/10.1109/72.712178>
5. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*. № 378. 2019. P. 686–707.
6. Seo J. Solving real-world optimization tasks using physics-informed neural computing. *Scientific Reports*. № 14 (1). P. 202. 2024.
7. Vauhkonen M., Tarvainen T., Lähivaara T. Inverse Problems. *Mathematical Modelling*. Springer / Pohjolainen, S. (eds), Cham, 2016, https://doi.org/10.1007/978-3-319-27836-0_12
8. Huijuan Z., Juncai P., Yong C. Data-driven forward-inverse problems for the variable coefficients Hirota equation using deep learning method. <https://arxiv.org/abs/2210.09656>, 2022
9. Ming Z., Zhenya Y., Data-driven forward and inverse problems for chaotic and hyperchaotic dynamic systems based on two machine learning architectures. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. Vol. 446. 2023. P. 133656. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2023.133656>.
10. Yinlin Y., Hongtao F., Yajing L., Xinyi L., Hongbing Z. Deep neural network methods for solving forward and inverse problems of time fractional diffusion equations with conformable derivative. *Neurocomputing*. Vol. 509. 2022. P.177–192. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2022.08.030>.
11. Vadeboncoeur A., Akyildiz Ö.D., Kazlauskaitė I., Girolami M., Cirak F. Fully probabilistic deep models for forward and inverse problems in parametric PDEs. *Journal of Computational Physics*. Vol. 491. 2023. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2023.112369>.
12. Başhan A. Nonlinear dynamics of the Burgers' equation and numerical experiments. *Math Sci*. № 16. P. 183–205. 2022. <https://doi.org/10.1007/s40096-021-00410-8>
13. Apraiz J., Doubova A., Fernández-Cara E., Yamamoto M. Some inverse problems for the Burgers equation and related systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. Vol. 107. 2022. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2021.106113>.
14. Oanh N.T.N. On the inverse problem for one-dimensional Burgers' equation from the interior observation. *J Elliptic Parabol Equ*. № 9. P. 1329–1339. 2023. <https://doi.org/10.1007/s41808-023-00244-6>
15. Depina I., Jain S., Mar Valsson S., Gotovac H. Application of physics-informed neural networks to inverse problems in unsaturated groundwater flow. *Georisk. Assessment and Management of Risk for Engineered Systems and Geohazards*. № 16 (1). 2022. P. 21–36. <https://doi.org/10.1080/17499518.2021.1971251>
16. Garay J., Dunstan J., Uribe S., Costabal F.S. Physics-informed neural networks for blood flow inverse problems. 2023. <https://arxiv.org/abs/2308.00927>
17. Haykin S. *Neural Networks and Learning Machines*. Prentice Hall, 2009.
18. Benton E.R., Platzman G.W. A table of solutions of the one-dimensional Burgers equation. *Quarterly of Applied Mathematics*. № 30 (2). P. 195–212, 1972.
19. Devore J.L. *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences*. Boston, MA : Cengage Learning. 2011. P. 508–510.

REFERENCES

1. Karniadakis G.E., Kevrekidis I.G., Lu L., Perdikaris P., Wang S., Yang L. (2021) Physics-informed machine learning, *Nat Rev Phys*, vol. 3, no. 6, pp. 422–440, doi: 10.1038/s42254-021-00314-5.
2. Willard J., Jia X., Xu S., Steinbach M., Kumar V. (2022) Integrating Scientific Knowledge with Machine Learning for Engineering and Environmental Systems. *ACM Comput. Surv.*, 2022, <https://doi.org/10.1145/3514228>
3. Cybenko G.V. (1988) Approximation by Superpositions of a Sigmoidal function, *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 2 no. 4 pp. 303–314.
4. Lagaris I.E., Likas A., Fotiadis D.I. (1997) Artificial Neural Networks for Solving Ordinary and Partial Differential Equations. arXiv:physics/9705023v1, <https://doi.org/10.1109/72.712178>
5. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. (2019) Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics* 378, 686–707.

6. Seo J. (2024) Solving real-world optimization tasks using physics-informed neural computing. *Scientific Reports*, 14(1), 202.
7. Vauhkonen, M., Tarvainen, T., Lähivaara, T. (2016). Inverse Problems. In: Pohjolainen, S. (eds) *Mathematical Modelling*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-27836-0_12
8. Huijuan Z., Juncai P., Yong C. (2022) Data-driven forward-inverse problems for the variable coefficients Hirota equation using deep learning method. <https://arxiv.org/abs/2210.09656>
9. Ming Z., Zhenya Y. (2023) Data-driven forward and inverse problems for chaotic and hyperchaotic dynamic systems based on two machine learning architectures, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Volume 446, 133656, <https://doi.org/10.1016/j.physd.2023.133656>.
10. Yinlin Y., Hongtao F., Yajing L., Xinyi L., Hongbing Z. (2022) Deep neural network methods for solving forward and inverse problems of time fractional diffusion equations with conformable derivative, *Neurocomputing*, Volume 509, pp. 177–192, <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2022.08.030>.
11. Vadeboncoeur A., Akyildiz Ö.D., Kazlauskaitė I., Girolami M., Cirak F. (2023) Fully probabilistic deep models for forward and inverse problems in parametric PDEs, *Journal of Computational Physics*, Volume 491, <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2023.112369>.
12. Başhan A. (2022) Nonlinear dynamics of the Burgers' equation and numerical experiments. *Math Sci* 16, 183–205. <https://doi.org/10.1007/s40096-021-00410-8>
13. Apraiz J., Doubova A., Fernández-Cara E., Yamamoto M. (2022) Some inverse problems for the Burgers equation and related systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Volume 107, <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2021.106113>.
14. Oanh N.T.N. (2023) On the inverse problem for one-dimensional Burgers' equation from the interior observation. *J Elliptic Parabol Equ* 9, 1329–1339. <https://doi.org/10.1007/s41808-023-00244-6>
15. Depina I., Jain S., Mar Valsson S., Gotovac H. (2022) Application of physics-informed neural networks to inverse problems in unsaturated groundwater flow. *Georisk: Assessment and Management of Risk for Engineered Systems and Geohazards*, 16(1), 21–36. <https://doi.org/10.1080/17499518.2021.1971251>
16. Garay J., Dunstan J., Uribe S., Costabal F.S. (2023) Physics-informed neural networks for blood flow inverse problems, <https://arxiv.org/abs/2308.00927>
17. Haykin S. (2009) *Neural Networks and Learning Machines* (3rd Edition), Prentice Hall
18. Benton E.R., Platzman G.W. (1972) A table of solutions of the one-dimensional Burgers equation. *Quarterly of Applied Mathematics*, 30(2):195–212.
19. Devore J.L. (2011) *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences*. Boston, MA: Cengage Learning, pp. 508–510.