

# РОЗДІЛ І. ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

УДК 539.3

DOI <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2024-2-01>

## АНАЛІТИЧНИЙ ТА ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ МІКРОТРІЩИНИ ВЗДОВЖ ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНОГО КРАЮ ТОНКОЇ НАКЛАДКИ

**Клєцков О. М.**

*аспірант*

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

*пр. Науки, 72, Дніпро, Україна*

*orcid.org/0000-0003-2587-4647*

*alex.kl87@i.ua*

**Лобода В. В.**

*доктор фізико-математичних наук, професор,*

*завідувач кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки*

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

*пр. Науки, 72, Дніпро, Україна*

*orcid.org/0000-0002-0432-629X*

*lobvv@ua.fm*

**Ключові слова:** *розкриття тріщини, швидкість звільнення енергії, товщина накладки, напруження, деформація.*

У статті розглянуто математичне моделювання механічної поведінки біматеріальних систем з мікротріщинами, що виникають внаслідок навантажень. Основна увага приділяється отриманню співвідношень для розподілу напружень, розкриття тріщини та швидкості звільнення енергії при різних товщинах накладки та типах навантажень.

Зокрема, встановлено, що при товщині накладки більше 5 мкм результати розкриття тріщини та розподілу напружень практично не відрізняються від відповідних результатів для півплощини. Це означає, що товсті накладки ефективно розподіляють навантаження, мінімізуючи локальні деформації. Водночас при товщині накладки менше 0,6 мкм спостерігається суттєва зміна поведінки системи, яка наближається до границі використання лінійної теорії пружності. Така поведінка може призвести до невільного прогнозування тріщиноутворення та руйнування матеріалу, якщо не враховувати ці особливості.

Розглянуто вплив зосередженої сили на розкриття тріщини. Аналіз проведено при різних значеннях сили та різних точках її прикладання. Виявлено, що збільшення зосередженої сили значно зменшує розкриття тріщини, а її подальше збільшення може призвести до повного закриття тріщини. Зміщення точки прикладання сили від центру тріщини до її краю також впливає на розкриття: максимальне зменшення спостерігається при прикладанні сили через центр тріщини, тоді як при зміщенні точки прикладання за межі тріщини вплив стає незначним.

Отримані результати дослідження свідчать про успішність застосування аналітичних методів для аналізу систем з мікротріщинами. Чисельна ілюстрація розв'язку, проведена для мікротріщини довжиною 2 мкм при різних товщинах накладки, дозволила виявити важливі закономірності в розподілі напружень та розкритті тріщини. Порівняння аналітичних і чисельних результатів показало їх високу узгодженість, що підтверджує надійність обраних методик.

Отримані висновки надають важливу інформацію для розробки нових моделей руйнування біматеріальних систем з мікротріщинами. Вони підкреслюють необхідність подальших досліджень у цьому напрямку з метою поліпшення прогнозування поведінки таких систем під навантаженням та розробки ефективних методів запобігання їх руйнуванню.

## ANALYTICAL AND NUMERICAL ANALYSIS OF A MICROCRACK ALONG THE RIGIDLY FIXED EDGE OF A THIN OVERLAY

**Kletskov O. M.**

*Postgraduate Student*

*Oles Honchar Dnipro National University*

*Nauki Ave., 72, Dnipro, Ukraine*

*orcid.org/0000-0003-2587-4647*

*alex.kl87@i.ua*

**Loboda V. V.**

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,*

*Head of the Department of Theoretical and Computer Mechanics*

*Oles Honchar Dnipro National University*

*Nauki Ave., 72, Dnipro, Ukraine*

*orcid.org/0000-0002-0432-629X*

*lobvv@ua.fm*

**Key words:** *crack opening,  
energy release rate, overlay  
thickness, stress, deformation.*

The article examines the mathematical modeling of the mechanical behavior of bimaterial systems with microcracks arising from loading. The main focus is on deriving relationships for stress distribution, crack opening, and energy release rate at different overlay thicknesses and loading conditions.

In particular, it has been established that for overlay thicknesses greater than 5 microns, the results of crack opening and stress distribution are practically indistinguishable from the corresponding results for a half-plane. This indicates that thick overlays effectively distribute the load, minimizing local deformations. However, for overlay thicknesses less than 0.6 microns, a significant change in the system's behavior is observed, approaching the limit of linear elasticity theory utilization. Such behavior may lead to inaccurate predictions of crack formation and material failure if these peculiarities are not considered.

The influence of concentrated force on crack opening has been investigated. The analysis was conducted at various force magnitudes and different application points. It was found that increasing the concentrated force significantly reduces crack opening, and further increase may lead to complete crack closure. Additionally, the displacement of the force application point from the crack center to its edge also affects crack opening: maximum reduction is observed when the force is applied through the crack center, whereas displacement beyond the crack's boundaries has a negligible effect.

The obtained research results demonstrate the effectiveness of applying analytical methods to analyze systems with microcracks. Numerical illustration of the solution, conducted for a 2-micron microcrack at various overlay thicknesses, revealed important patterns in stress distribution and crack opening. Comparison of analytical and numerical results showed their high consistency, confirming the reliability of the chosen methodologies.

The conclusions drawn provide important information for the development of new models for the failure of bimaterial systems with microcracks. They underscore the need for further research in this direction to improve predictions of such systems' behavior under loading and to develop effective methods to prevent their failure.

**Вступ.** У сучасному світі, де технології постійно розвиваються, роль тонких плівок у захисті конструкцій від негативних факторів зовнішнього середовища набуває все більшої важливості. Від підвищення стійкості до збільшення ефективності – вони стають невід’ємною частиною сучасних технологій. Однак, при всій їхній корисності, виникає проблема: взаємодія між цими плівками та основним матеріалом не завжди є ідеальною. Це може призводити до появи дефектів, які, у свою чергу, загрожують цілісності конструкцій. Особливо важливо вивчення тріщин, які утворюються між тонкою плівкою та матрицею основного матеріалу. Ця проблема залишається недостатньо вивченою та вимагає подальших досліджень. Тому аналіз мікротріщин вздовж жорстко закріпленого краю тонкої накладки стає не лише актуальною, але й практично важливою задачею.

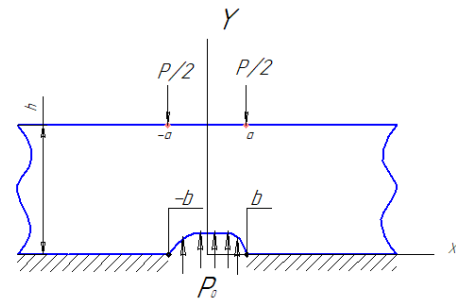
Цей аналіз може відкрити нові можливості для розуміння процесів, які відбуваються на мікrorівні, та допомогти вдосконалити виробу та технології, що базуються на використанні тонких плівок. Розуміння природи та механізмів утворення мікротріщин в цьому контексті відкриває шлях до розробки нових методів запобігання їх появи та подальшому удосконаленню захисних систем. Дослідження цієї проблеми має потенціал стати важливим кроком у забезпеченні стабільності та надійності конструкцій, що використовують тонкі плівки. Врахування взаємодії між тонкими плівками та базовим матеріалом важливо не лише для підвищення стійкості конструкцій, але й для оптимізації виробничих процесів та витрат матеріалів.

Отже, дослідження аналізу мікротріщин вздовж жорстко закріпленого краю тонкої накладки відкриває широкі перспективи для вдосконалення інженерних рішень, забезпечуючи більшу надійність, стійкість та ефективність майбутніх конструкцій.

Аналізу тріщини між двома матеріалами присвячена значна кількість робіт, серед яких можна відзначити публікації останніх років [1–5], тематика яких пов’язана з різними типами напружено-деформованого стану, різними матеріалами, навантаженням і геометрією тріщин. Спеціальної уваги заслуговують дослідження тріщин в однорідній полосі і між різнорідними полосами, яким присвячені роботи [6–9]. Зокрема, в роботі [6] проаналізовано напружено-деформівний стан трьох різнорідних матеріалів з внутрішніми та міжфазними тріщинами. Дослідженню тріщини в неоднорідному середовищі з постійним коефіцієнтом Пуассона і експоненціально змінним модулем Юнга присвячена робота [7], а в роботі [8] досліджено випадок, коли механічні характеристики одного з матеріалів є неоднорідними в зоні взає-

модії. В роботі [9] розглянута центральна тріщина в нескінченній полосі під дією внутрішнього тиску і зосереджених сил на сторонах полоси. Сформульоване сингулярне інтегральне рівняння, для якого побудований чисельний розв’язок. Слід відзначити, що вказані вище дослідження стосуються внутрішніх та міжфазних макротріщин. Але останнім часом значна увага приділяється дослідженню мікротріщин, які завжди присутні в досліджуваних об’єктах і часто є причиною їх руйнувань [10]. В даній роботі якраз і розглядається мікротріщина вздовж жорстко закріпленого краю тонкої накладки, яка знаходиться під дією комбінованого навантаження.

**Постановка задачі.** Розглянемо задачу плоскої деформації мікротріщини  $|x| \leq b$ , яка розташована вздовж жорстко закріпленого краю (при  $y=0$ ) ізотропного, лінійно пружного, нескінченного шару тонкої накладки товщини  $h$ . Тріщина вважається відкритою з рівномірним внутрішнім тиском  $p_0$  на її поверхню. На границю шару в точках  $(\pm a, +h)$  симетрично діє пара стискальних/розтягувальних зосереджених сил  $P/2$  (рис. 1).



**Рис. 1. Геометрія і навантаження задачі**

Для вирішення цієї задачі потрібно розв’язати змішану крайову задачу, яка описується системою диференціальних рівнянь другого порядку у частинних похідних

$$\mu \Delta^2 u(x, y) + \frac{2\mu}{\kappa - 1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right) = 0, \quad (1)$$

$$\mu \Delta^2 v(x, y) + \frac{2\mu}{\kappa - 1} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right) = 0, \quad (2)$$

з крайовими умовами, які завдяки симетрії можна записати у вигляді:

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq b, \quad (3)$$

$$\tau_{xy}(x, h) = 0, \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad (4)$$

$$\sigma_y(x, h) = \frac{P}{2} \delta(x - a), \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad (5)$$

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} = 0, \quad b \leq x \leq \infty \quad (6)$$

$$\sigma_y(x, 0) = -p_0, \quad 0 \leq x < b, \quad (7)$$

де  $\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{для плоскої деформації} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{для плоского напруженого стану} \end{cases}$ ,  
 $\mu$  і  $\nu$  – модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона, відповідно.

Метод розв'язання проблеми. Застосовуючи до рівнянь (1), (2) інтегральні перетворення Фур'є

$$\bar{u}(\alpha, y) = \int_0^\infty u(x, y) \sin(\alpha x) dx,$$

$$\bar{v}(\alpha, y) = \int_0^\infty v(x, y) \cos(\alpha x) dx,$$

отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь. Знаходячи загальний розв'язок цієї системи і застосовуючи до нього обернене перетворення Фур'є

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \bar{u}(\alpha, y) \sin(\alpha x) d\alpha,$$

$$v(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \bar{v}(\alpha, y) \cos(\alpha x) d\alpha,$$

отримуємо

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [(A + By)e^{-\alpha y} + (C + Dy)e^{\alpha y}] \sin(\alpha x) d\alpha, \quad (8)$$

$$v(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[ A + \left(\frac{k}{\alpha} + y\right) B \right] e^{-\alpha y} + \left[ -C + \left(\frac{k}{\alpha} - y\right) D \right] e^{\alpha y} \cos(\alpha x) d\alpha, \quad (9)$$

де  $A, B, C$  і  $D$  є невідомі константи, які можуть бути знайдені із граничних умов (3)-(6) при  $y = h$  и  $y = 0$  відповідно.

Згідно до закону Гука необхідні компоненти тензора напружень обчислюються через компоненти вектора переміщень за формулами:

$$\sigma_{yy}(x, y) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u(x, y)}{\partial x},$$

$$\frac{1}{\mu} \tau_{xy}(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x},$$

де  $\lambda$  і  $\mu$  – пружні константи Ляме.

З останніх рівнянь і (8), (9) отримуємо

$$\frac{1}{2\mu} \tau_{xy}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \left[ -\alpha(A + By) - B \frac{\kappa - 1}{2} \right] e^{-\alpha y} + \left[ \alpha(C + Dy) - D \frac{\kappa - 1}{2} \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha. \quad (10)$$

$$\frac{1}{2\mu} \sigma_{yy}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \left[ -\alpha(A + By) - \frac{1 + \kappa}{2} B \right] e^{-\alpha y} + \left[ -\alpha(C + Dy) + \frac{1 + \kappa}{2} D \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha. \quad (11)$$

Введемо невідомі функції

$$f_1(x) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x}, \quad f_2(x) = \frac{\partial v(x, 0)}{\partial x} \quad \text{на } 0 \leq x \leq b. \quad (12)$$

Тоді, задовольняючи граничним умовам (4)-(6) і знаходячи невідомі константи, з урахуванням (12) одержуємо

$$\tau_{xy}(x, 0) = \frac{4\mu}{\pi} \int_0^\infty \{g_{\sigma 1}(\alpha) \bar{f}_1(\alpha) + g_{\sigma 2}(\alpha) \bar{f}_2(\alpha)\} \sin(\alpha x) d\alpha + S_1(x) \quad (13)$$

$$\sigma_{yy}(x, 0) = -\frac{4\mu}{\pi} \int_0^\infty \{g_{\sigma 1}(\alpha) \bar{f}_1(\alpha) + g_{\sigma 2}(\alpha) \bar{f}_2(\alpha)\} \cos(\alpha x) d\alpha + S_2(x) \quad (14)$$

де

$$g_{\tau 1}(\alpha) = \frac{-(1 + \kappa)[2\alpha h + sh(2\alpha h)]}{D_1(\alpha)},$$

$$g_{\tau 2}(\alpha) = \frac{(1 - \kappa)[1 - ch(2\alpha h)] + 4\alpha^2 h^2}{D_1(\alpha)}$$

$$g_{\sigma 1}(\alpha) = \frac{(1 - \kappa)[1 - ch(2\alpha h)] + 4\alpha^2 h^2}{D_1(\alpha)},$$

$$g_{\sigma 2}(\alpha) = \frac{(1 + \kappa)[2\alpha h - sh(2\alpha h)]}{D_1(\alpha)}$$

$$S_1(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{(-1 + \kappa)sh(\alpha h) - 2\alpha h ch(\alpha h)}{D_1(\alpha)} (1 + \kappa) P \cos(\alpha a) \right\} \sin(\alpha x) d\alpha$$

$$S_2(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{(1 + \kappa)ch(\alpha h) + 2\alpha h sh(\alpha h)}{D_1(\alpha)} (1 + \kappa) P \cos(\alpha a) \right\} \cos(\alpha x) d\alpha$$

$$\bar{f}_1(\alpha) = \int_0^\infty f_1(t) \cos(\alpha t) dt, \quad \bar{f}_2(\alpha) = \int_0^\infty f_2(t) \sin(\alpha t) dt, \quad (15)$$

Враховуючи поведінку функцій  $g_{\tau 1}(\alpha)$ ,  $g_{\tau 2}(\alpha)$ ,  $g_{\sigma 1}(\alpha)$  і  $g_{\sigma 2}(\alpha)$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ , представимо ці функції у наступному вигляді:

$$g_{\tau 1}(\alpha) = -\kappa_1 + \tilde{g}_{\tau 1}(\alpha), \quad g_{\tau 2}(\alpha) = \kappa_2 + \tilde{g}_{\tau 2}(\alpha),$$

$$g_{\sigma 1}(\alpha) = \kappa_2 + \tilde{g}_{\sigma 1}(\alpha), \quad g_{\sigma 2}(\alpha) = -\kappa_1 + \tilde{g}_{\sigma 2}(\alpha) \quad (16)$$

де  $\kappa_1 = \frac{\kappa + 1}{2\kappa}$ ,  $\kappa_2 = \frac{\kappa - 1}{2\kappa}$ , а функції  $\tilde{g}_{\tau 1}(\alpha)$ ,  $\tilde{g}_{\tau 2}(\alpha)$ ,  $\tilde{g}_{\sigma 1}(\alpha)$  і  $\tilde{g}_{\sigma 2}(\alpha)$  прямують до нуля при  $\alpha \rightarrow \infty$ .

Враховуючи представлення (17) і (18) а також наступні інтегральні формули

$$\int_0^\infty e^{-\eta \alpha} \sin \alpha (x \mp y) d\alpha = \frac{1}{x \mp y} \quad \text{при } \eta \rightarrow 0.$$

$$\int_0^\infty f_1(t) \int_0^\infty \sin(\alpha t) \sin(\alpha x) d\alpha dt = \frac{\pi}{2} f_1(x) \quad (i = 1, 2),$$

вирази для напружень (15), (16) після низки перетворень можна представити у вигляді:

$$\frac{\tau_{xy}(x, 0)}{2\mu} = \frac{\kappa_1}{\pi} \int_{-b}^b \frac{f_1(t)}{t - x} dt + \kappa_2 f_2(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^b [f_1(t) \hat{R}_{11}(x, t) + f_2(t) \hat{R}_{12}(x, t)] dt + \frac{S_1(x)}{2\mu} \quad (17)$$

$$\frac{\sigma_{yy}(x, 0)}{2\mu} = -\kappa_2 f_1(x) + \frac{\kappa_1}{\pi} \int_{-b}^b \frac{f_2(t)}{t - x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^b [f_1(t) \hat{R}_{21}(x, t) + f_2(t) \hat{R}_{22}(x, t)] dt + \frac{S_2(x)}{2\mu}, \quad (18)$$

де  $\hat{R}_{11}(x, t) = \int_0^\infty [\tilde{g}_{\tau 1}(\alpha) \sin \alpha (x - t)] d\alpha$ ,  $\hat{R}_{12}(x, t) = \int_0^\infty \tilde{g}_{\tau 2}(\alpha) \cos \alpha (x - t) d\alpha$

$$\hat{R}_{21}(x, t) = -\int_0^\infty \tilde{g}_{\sigma 1}(\alpha) \cos \alpha (x - t) d\alpha, \quad \hat{R}_{22}(x, t) = \int_0^\infty \tilde{g}_{\sigma 2}(\alpha) \sin \alpha (x - t) d\alpha$$

Задовольняючи тепер граничним умовам (3) і (7), приходимо до наступної системи сингулярних інтегральних рівнянь:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \frac{f_1(t)}{t - x} dt + \mathcal{V}_1^+(x) + \int_{-b}^b [M_{11}(x, t) f_1(t) + M_{12}(x, t) f_2(t)] dt = -\frac{S_1(x)}{2\mu \kappa_1} \quad (19)$$

$$-\gamma f_1(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \frac{f_2(t)}{t-x} dt + \int_{-b}^b [M_{21}(x,t) f_1(t) + M_{22}(x,t) f_2(t)] dt = -\frac{S_2(x) + p}{2\mu k_1} \quad (20)$$

де  $\gamma = \frac{\kappa-1}{\kappa+1}$ ,  $M_{ij}(x,t) = \hat{R}_{ij}(x,t) / (\pi k_1)$ ,  $i, j = 1, 2$ .

Додаткові умови для цієї системи мають вигляд

$$\int_{-b}^b f_1(t) dt = 0, \quad \int_{-b}^b f_2(t) dt = 0 \quad (21)$$

### Чисельний аналіз.

Показано, що розв'язок системи (19), (20) має осцилюючу сингулярність біля вершин тріщини, але згідно [11] для знаходження глобальних параметрів руйнування і швидкості звільнення енергії (ШЗЕ) осциляцію можна не враховувати і розшуквати розв'язок цієї системи у формі:

$$f_i(t) = \frac{f_i^*(t)}{\sqrt{b^2 - t^2}} \quad (i=1,2) \quad (22)$$

Підставляючи (22) в (19)-(21) і переходячи за допомогою заміни  $x = br$ ,  $t = bs$  до проміжку  $[-1, 1]$ , одержуємо

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_1^*(s) ds}{(s-r)\sqrt{1-s^2}} + \frac{\gamma \psi_2^*(r)}{\sqrt{1-r^2}} + b \int_{-1}^1 [M_{11}(x,t) \frac{\psi_1^*(s)}{\sqrt{1-s^2}} + M_{12}(x,t) \frac{\psi_2^*(s)}{\sqrt{1-s^2}}] dt = \tilde{S}_1(r) \quad (23)$$

$$-\frac{\gamma \psi_1^*(r)}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_2^*(s) ds}{(s-r)\sqrt{1-s^2}} + b \int_{-1}^1 [M_{21}(x,t) \frac{\psi_1^*(s)}{\sqrt{1-s^2}} + M_{22}(x,t) \frac{\psi_2^*(s)}{\sqrt{1-s^2}}] dt = \tilde{S}_2(r) \quad (24)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\psi_1^*(s)}{\sqrt{1-s^2}} dt = 0, \quad \int_{-1}^1 \frac{\psi_2^*(s)}{\sqrt{1-s^2}} dt = 0 \quad (25)$$

де  $\psi_1^*(s) = f_1^*(bs)$ ,  $\psi_2^*(s) = f_2^*(bs)$ ,  $\tilde{S}_1(r) = -\frac{S_1(br)}{2\mu k_1}$ ,

$$\tilde{S}_2(r) = -\frac{S_2(br) + p_0}{2\mu k_1}$$

Розглядаємо рівняння (23), (24) у вузлах

$$r_i = \cos\left(\frac{\pi i}{N}\right), \quad i = 1, \dots, N-1,$$

і застосовуємо для обчислення інтегралів квадратурну формулу Гауса-Чебишева:

$$\int_{-1}^1 \frac{\psi_m^*(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds = \sum_{k=1}^N \frac{\pi}{N} \psi_m^*(s_k) \quad (26)$$

де  $s_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2N} \pi\right)$ ,  $k = 1, \dots, N$ .

Приходимо до системи:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\psi_1^*(s_k)}{s_k - r_i} + \gamma \frac{\psi_2^*(r_i)}{\sqrt{1-r_i^2}} + \frac{b\pi}{N} \sum_{k=1}^N [M_{11}(x_i, t_k) \psi_1^*(s_k) + M_{12}(x_i, t_k) \psi_2^*(s_k)] = \tilde{S}_1(r_i) - \gamma \frac{\psi_1^*(r_i)}{\sqrt{1-r_i^2}} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\psi_2^*(s_k)}{s_k - r_i} + \frac{b\pi}{N} \sum_{k=1}^N [M_{21}(x_i, t_k) \psi_1^*(s_k) + M_{22}(x_i, t_k) \psi_2^*(s_k)] = \tilde{S}_2(r_i), \quad (27)$$

де  $x_i = br_i$ ,  $t_k = bs_k$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ .

Оскільки вузли  $r_k$  знаходяться між вузлами  $s_k$  і  $s_{k+1}$ , то знаходимо  $\psi_m^*(r_k)$  через  $\psi_m^*(s_k)$  і  $\psi_m^*(s_{k+1})$  за допомогою лінійної інтерполяції:

$$\psi_m^*(r_k) = \frac{(r_k - s_{k+1})}{s_k - s_{k+1}} \psi_m^*(s_k) + \frac{(r_k - s_k)}{s_{k+1} - s_k} \psi_m^*(s_{k+1}) \quad m = 1, 2. \quad (28)$$

Підставляючи (28) в (27), одержуємо

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\psi_1^*(s_k)}{s_k - r_i} + \sum_{k=1}^N \frac{\gamma}{\sqrt{1-r_i^2}} \left[ \delta_{i,k} \frac{(r_k - s_{k+1})}{s_k - s_{k+1}} \psi_2^*(s_k) + \delta_{i,k+1} \frac{(r_k - s_k)}{s_{k+1} - s_k} \psi_2^*(s_{k+1}) \right] + \frac{b\pi}{N} \sum_{k=1}^N [M_{11}(x_i, t_k) \psi_1^*(s_k) + M_{12}(x_i, t_k) \psi_2^*(s_k)] = \tilde{S}_1(r_i) \quad (29)$$

$$-\sum_{k=1}^N \frac{\gamma}{\sqrt{1-r_i^2}} \left[ \delta_{i,k} \frac{(r_k - s_{k+1})}{s_k - s_{k+1}} \psi_1^*(s_k) + \delta_{i,k+1} \frac{(r_k - s_k)}{s_{k+1} - s_k} \psi_1^*(s_{k+1}) \right] + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\psi_2^*(s_k)}{s_k - r_i} + \frac{b\pi}{N} \sum_{k=1}^N [M_{21}(x_i, t_k) \psi_1^*(s_k) + M_{22}(x_i, t_k) \psi_2^*(s_k)] = \tilde{S}_2(r_i) \quad (30)$$

де  $\delta_{i,k}$  – символи Кронекера,  $i = 1, \dots, N-1$ .

Застосовуючи квадратурну формулу (26) до рівнянь (25), одержуємо

$$\sum_{k=1}^N \psi_1^*(s_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^N \psi_2^*(s_k) = 0. \quad (31)$$

Рівняння (29)-(31) являють собою систему  $2N$  лінійних алгебраїчних рівнянь із  $2N$  невідомими  $\psi_1^*(s_k)$  і  $\psi_2^*(s_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ).

Після розв'язку системи отримуємо:

$$f_m(bs_k) = \frac{f_m^*(bs_k)}{b\sqrt{1-s_k^2}}, \quad m = 1, 2; \quad k = 1, \dots, N,$$

а далі на основі (12) знаходяться похідні від переміщень верхнього берега тріщини, а за формулами

$$u(x, 0) = \int_{-b}^x \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} dx, \quad v(x, 0) = \int_{-b}^x \frac{\partial v(x, 0)}{\partial x} dx$$

визначаються самі переміщення. Напруження ж на продовженнях тріщини знаходяться за формулами (17), (18).

Згідно з [10] швидкість звільнення енергії  $G$  при розвитку тріщини може бути обчислена за формулою:

$$G = \frac{\pi b \mu}{\kappa + 1} \hat{K}^2 \quad (32)$$

$$\text{де } \hat{K} = \sqrt{[f_1^*(b)]^2 + [f_2^*(b)]^2}.$$

Чисельна ілюстрація одержаного розв'язку проведена для мікротріщини довжиною 2 мкм при товщинах накладки в діапазоні 0,6 мкм до 10 мкм (рис. 2). Крім того вважалось, що  $\nu = 0,3$ ,  $E = 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ H / мкм}^2$ ,  $p_0 = 10^{-10} \text{ H/мкм}^2$ . Зосередженна сила  $P$  вибиралась в діапазоні від 0 до  $10^{-10} \text{ H}$  при значеннях  $a$  від 0 до 1 мкм (рис. 1).

Зазначимо, що для товщини накладки більшої 5 мкм результати розкриття тріщини фактично не відрізняються від відповідних результатів для півплощини, а для товщини меншої 0,6 мкм розкриття тріщини стають близькими до можливої границі використання лінійної теорії пружності.

Як видно з рис. 3 збільшення значення зосередженої сили приводить до значного зменшення розкриття тріщини. Її подальше збільшення призводить до закриття тріщини. Зміна положення прикладання зосередженої сили від центру тріщини до її краю призводить до зміни значення розкриття. Максимальне зменшення розкриття тріщини спостерігається при прикладанні зосе-



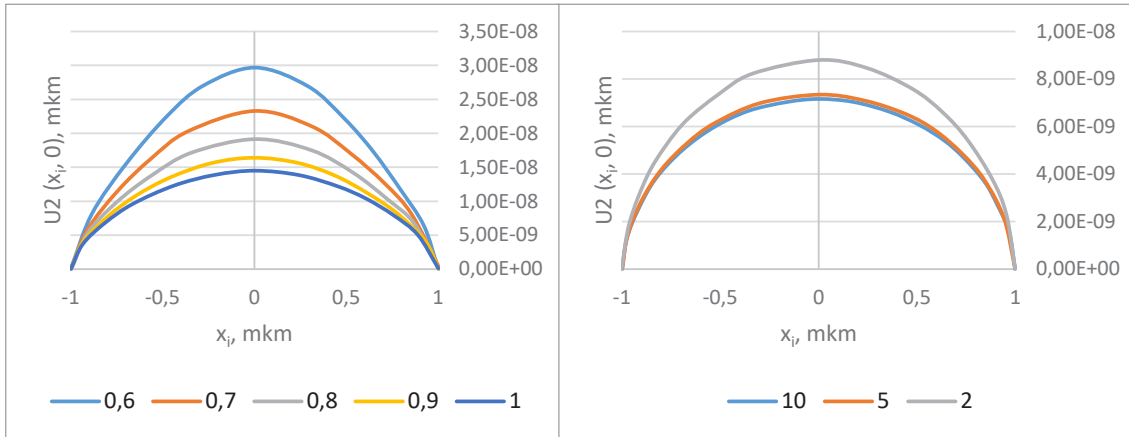


Рис. 2. Розкриття тріщини при  $h=0,6-10$  мкм ( $a=0,5$  мкм,  $P=0$ )

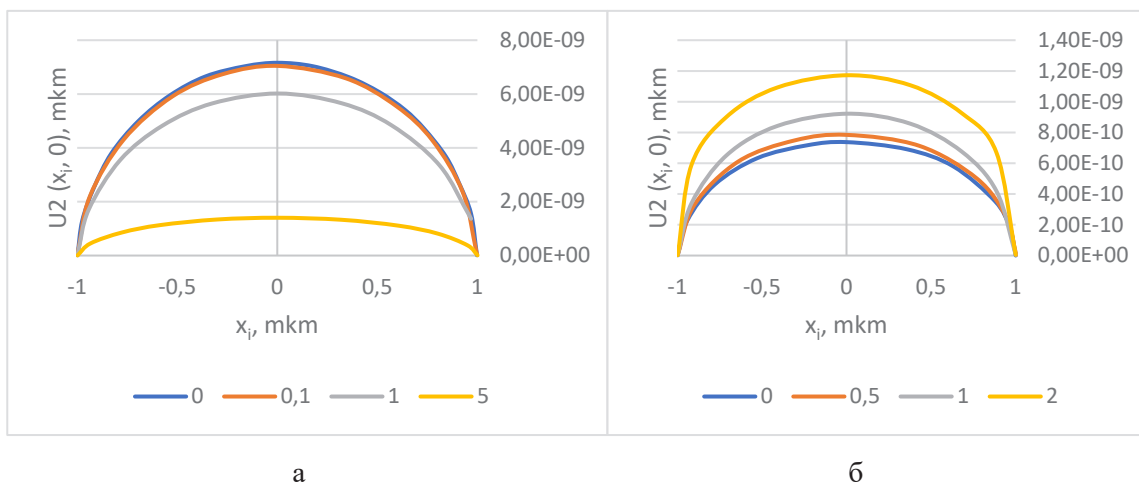


Рис. 3. Розкриття тріщини при:  
 а –  $h=10$  мкм,  $a=0,5$  мкм,  $P=0-5 \cdot 10^{-10}$  Н; б –  $h=9$  мкм,  $a=0-2$  мкм,  $P=5 \cdot 10^{-10}$  Н

редженної сили по прямій, що проходить через центр тріщини, тоді як при віддалені точки прикладання за межі тріщини вплив зосередженої сили на розкриття тріщини стає незначним.

**Розрахунок за допомогою методу скінченних елементів**

Для випадку тонкої накладки скінченної довжини, що контактує з пружною основою скінченних розмірів (рис. 4) аналіз проведено за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ). Розглядалась мікротріщина довжиною  $a=2$  мкм при товщинах накладки в діапазоні  $l=0,6-10$  мкм. Крім того вибирались  $L=40$  мкм,  $H=60$  мкм,  $h=10$  мкм,  $\nu = 0,3$ ,  $E = 2,6 \cdot 10^{-2}$  н / мкм<sup>2</sup>,  $p_0 = 10^{-10}$  н/мкм<sup>2</sup>

При моделюванні методом скінченних елементів проводилось ущільнювання сітки скінченних елементів в деякому okolí тріщини (рис. 5). Ступінь ущільнення, а також розмір елементів варіювався в залежності від товщини накладки.

Отримані розподіли напружень, розкриття тріщини та швидкості звільнення енергії для різних механічних характеристик складових біматері-

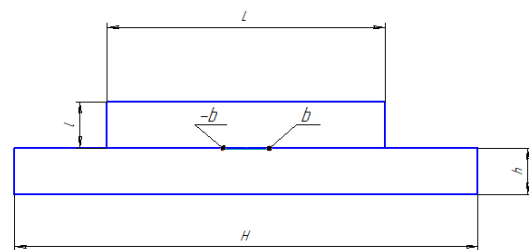


Рис. 4. Схема тонкої накладки для аналізу МСЕ

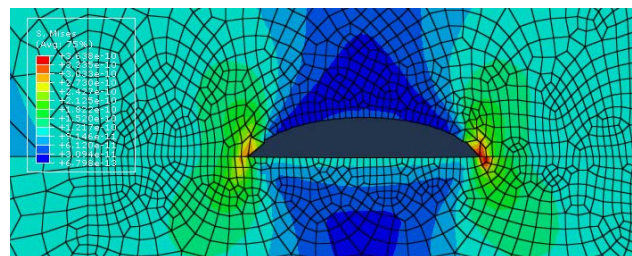
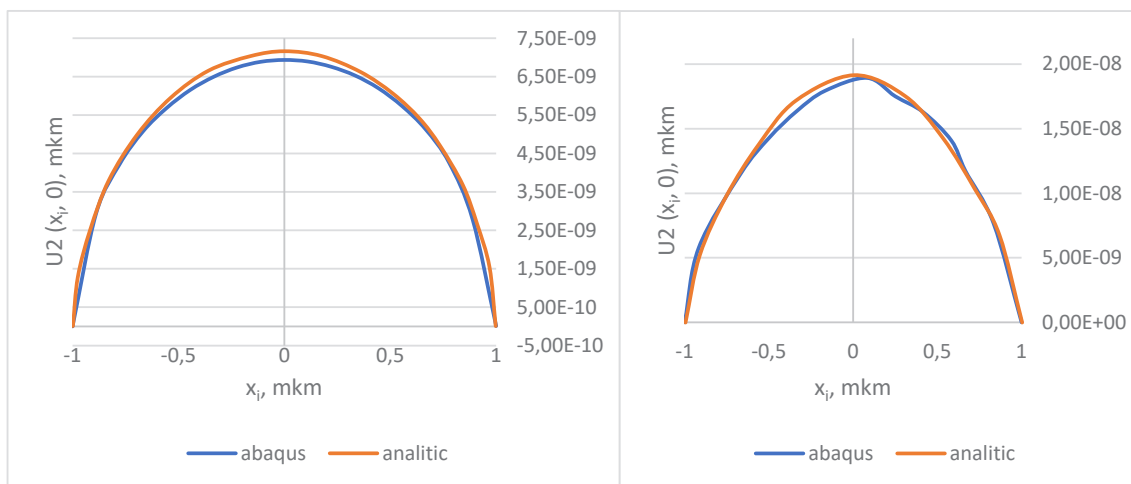


Рис. 5. Приклад сітки з розподілом напружень Мізеса при  $h=5$  мкм ( $a=0,5$  мкм,  $P=0$ )

Таблиця 1

Товщина накладки $h$ , мкм	ШЗЕ-10 <sup>-19</sup> [Н·м] (аналітичний розрахунок)	ШЗЕ-10 <sup>-19</sup> [Н·м] (розрахунок МСЕ)
10	5,385	5,346
5	5,675	5,725
2	7,775	7,747
1	15,917	15,995
0,9	18,663	18,576
0,8	22,663	22,588
0,7	28,831	28,781
0,6	39,099	39,044

Рис. 6. Порівняльний аналіз розкриття тріщини при:  $h=10$  мкм та  $h=0,8$  мкм

алу, їх різних геометричних характеристик і різних навантажень. Для випадку, коли жорсткість основи набагато більша жорсткості накладки, а її довжина набагато більша довжини тріщини, проведено порівняння аналітичних і чисельних результатів (табл. 1, рис. 6).

Наведені графіки та таблиці показують хороше узгодження результатів, отриманих аналітичним методом та МСЕ. Аналітичним та чисельним методами проаналізована також зміна форми розкриття тріщини зі зміною довжини накладки та її товщини, а також варіації швидкості звільнення енергії в залежності від зміни товщини накладки. Виявлено суттєвий ріст останнього фактору при зменшенні її товщини.

**Висновки.** Отримані результати дослідження свідчать про успішність застосування аналітичних методів для аналізу систем з мікротріщинами. Чисельна ілюстрація розв'язку, проведена для мікротріщини довжиною 2 мкм при різних

товщинах накладки, дозволила виявити важливі закономірності в розподілі напружень та розкритті тріщини. Зокрема, встановлено, що для товщини накладки більше 5 мкм результати практично не відрізняються від відповідних результатів для півплощини, а при товщині менше 0,6 мкм спостерігається наближення до можливої границі використання лінійної теорії пружності.

Отримані розподіли напружень, розкриття тріщини та швидкості звільнення енергії вказують на важливість врахування різних механічних та геометричних характеристик складових біматеріалу при аналізі його поведінки. Порівняння аналітичних і чисельних результатів показує їх високу узгодженість, що підтверджує надійність обраних методик.

Отримані висновки надають важливу інформацію для розробки нових моделей руйнування біматеріальних систем з мікротріщинами та підкреслюють необхідність подальших досліджень в цьому напрямку.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Hu K. Q.; Jin H.; Yang Z.; Chen X. Interface crack between dissimilar one-dimensional hexagonal quasicrystals with piezoelectric effect. *Acta Mechanica*. 2019. № 230. С. 2455–2474. DOI: 10.1007/s00707-019-02404-z.

2. Sheveleva A.; Loboda V.; Lapusta Y. A conductive crack and a remote electrode at the interface between two piezoelectric materials. *Applied Mathematical Modeling*. 2020. № 87. C. 287–299. DOI: 10.1016/j.apm.2020.06.003.
3. Verma, P. R. Magnetic-yielding zone model for assessment of two mode-III semi-permeable collinear cracks in piezo-electro-magnetic strip. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2022. № 29. C. 1529–1542.
4. Loboda, V., Sheveleva, A., Chapelle, F., Lapusta, Y. A set of electrically conducting collinear cracks between two dissimilar piezoelectric materials. *International Journal of Engineering Science*. 2022. № 178. C. 103725.
5. Онопрієнко О.Д., Говоруха В.Б., Кагадій Т.С., Шпорта А.Г. Аналіз тріщин та ефекти екранування в сучасних матеріалах. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2023. № 2. C. 59–95.
6. Erdogan, F., Gupta, G.D. Layered composites with an interface flaw. *International Journal of Solids and Structures*. 1971. № 7. C. 1089–1107.
7. Delale, F., Erdogan, F. The crack problem for a nonhomogeneous plane. *Journal of Applied Mechanics*. 1983. № 50. C. 609–614.
8. Delale, F., Erdogan, F. Interface crack in a nonhomogeneous elastic medium. *International Journal of Engineering Science*. 1988. № 26(6). C. 559–568.
9. Ahmet Birinci, Fatma Birinci, Fevzi L. Cakiroglu, Ragip Erdol. An internal crack problem for an infinite elastic layer. *Archive of Applied Mechanics*. 2010. № 80. C. 997–1005.
10. Jianlin Liu, Runni Wu, and Re Xia. Surface effects at the nanoscale based on Gurtin's theory: a review. *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*. 2014. № 23(5-6). C. 141–151.
11. Zhang A.B., Wang B.L. An opportunistic analysis of the interface crack based on the modified interface dislocation method. *International Journal of Solids and Structures*. 2013. № 50. C. 15–20.

#### REFERENCES

1. Hu K. Q.; Jin H.; Yang Z.; Chen X. (2019) Interface crack between dissimilar one-dimensional hexagonal quasicrystals with piezoelectric effect. *Acta Mechanica*, № 230, pp. 2455–2474. DOI: 10.1007/s00707-019-02404-z.
2. Sheveleva A.; Loboda V.; Lapusta Y. (2020) A conductive crack and a remote electrode at the interface between two piezoelectric materials. *Applied Mathematical Modeling*, № 87, pp. 287–299. DOI: 10.1016/j.apm.2020.06.003.
3. Verma, P. R. (2022) Magnetic-yielding zone model for assessment of two mode-III semi-permeable collinear cracks in piezo-electro-magnetic strip. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, № 29, pp. 1529–1542.
4. Loboda, V., Sheveleva, A., Chapelle, F., Lapusta, Y. (2022) A set of electrically conducting collinear cracks between two dissimilar piezoelectric materials. *International Journal of Engineering Science*, № 178, p. 103725.
5. Onopriienko O. D., Govorukha V. B., Kagadii T. S., Shporta A. H. (2023) Analysis of cracks and shielding effects in modern materials. *Computer Science and Applied Mathematics*, № 2, pp. 59–95. (in Ukrainian)
6. Erdogan, F., Gupta, G.D. (1971) Layered composites with an interface flaw. *International Journal of Solids and Structures*, № 7, pp. 1089–1107.
7. Delale, F., Erdogan, F. (1983) The crack problem for a nonhomogeneous plane. *Journal of Applied Mechanics*, № 50, pp. 609–614.
8. Delale, F., Erdogan, F. (1988) Interface crack in a nonhomogeneous elastic medium. *International Journal of Engineering Science*, № 26(6), pp. 559–568.
9. Ahmet Birinci, Fatma Birinci, Fevzi L. Cakiroglu, Ragip Erdol. (2010) An internal crack problem for an infinite elastic layer. *Archive of Applied Mechanics*, № 80, pp. 997–1005.
10. Jianlin Liu, Runni Wu, and Re Xia. (2014) Surface effects at the nanoscale based on Gurtin's theory: a review. *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, № 23(5-6), pp. 141–151.
11. Zhang A.B., Wang B.L. (2013) An opportunistic analysis of the interface crack based on the modified interface dislocation method. *International Journal of Solids and Structures*, № 50, pp. 15–20.