

## РОЗДІЛ І. ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

UCD 004.94

DOI <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2025-2-01>

### МЕТАЕВРІСТИКИ НА БАЗІ ФРАГМЕНТАРНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПОКРИТТЯ МНОЖИН ТОЧОК НА ПЛОЩИНІ

**Козін І. В.**

*доктор фізико-математичних наук, професор,  
професор кафедри економічної кібернетики  
Запорізький національний університет  
вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0003-1278-8520](https://orcid.org/0000-0003-1278-8520)  
[ainc00@gmail.com](mailto:ainc00@gmail.com)*

**Сардак О. В.**

*аспірант спеціальності прикладна математика  
Запорізький національний університет  
вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0009-0001-2087-0287](https://orcid.org/0009-0001-2087-0287)  
[karnelcore@gmail.com](mailto:karnelcore@gmail.com)*

**Ключові слова:** дискретна оптимізація, задача покриття множини точок, метаввристики, орієнтована фрагментарна структура, фрагментарна модель.

Задача покриття кінцевих множин точок на площині фігурами різних типів належить до складних задач дискретної оптимізації. Існує досить багато варіантів цієї задачі, більшість яких належать до класу NP-важких задач.

Для пошуку точних розв'язків задач покриття відсутні алгоритми поліноміальної трудомісткості. Звичайно, існують точні алгоритми для цієї задачі, але всі вони зводяться до повного перебору варіантів. Навіть більше, невідомі й наближені алгоритми розв'язку таких задач із заданими оцінками точності. Тому значний інтерес становлять розроблення та дослідження евристичних методів оптимізації. Одним із перспективних напрямів є розроблення алгоритмів, заснованих на відомих метаввристичних підходах, які з успіхом використовуються для вирішення багатьох задач дискретної оптимізації.

Одним зі слабких місць використання метаввристик є наявність обмежень у багатьох задачах точкового покриття. Зокрема, це всілякі перепони, обмеження розміщення точок, обмеження, пов'язані з можливими перетвореннями точок у координатному просторі (зрушення, повороти). Тому найчастіше доводиться модифікувати відомі алгоритми. Це призводить до великої різноманітності метаввристик, які відомі за однією назвою (генетичний алгоритм, мурашиний алгоритм), але насправді орієнтовані на чітко визначене коло задач. Це призводить до труднощів у створенні програмних продуктів, які стають індивідуальними для різних задач.

Основна мета даної роботи – розробити універсальний підхід до розв'язання складних в обчислювальному сенсі задач, який дозволяє використовувати відомі метаввристики для різних класів задач покриття без суттєвих змін алгоритмів. Для цього запропоновано метод побудови гібридних алгоритмів, що є комбінацією фрагментарного алгоритму, який є індивідуальним для кожного виду задачі покриття, і метаввристики, яка вже не прив'язана до конкретного класу задач. Такий метод може бути легко перенесений і на інші класи задач дискретної оптимізації, для яких можна побудувати фрагментарну модель.

## THE SHUFFLE FROG LEAPING ALGORITHM FOR THE PRODUCTION LOCATION PROBLEM

**Kozin I. V.**

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,  
Professor at the Department of Economic Cybernetics  
Zaporizhzhia National University  
Universytetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0003-1278-8520  
ainc00@gmail.com*

**Sardak O. V.**

*Postgraduate Student in the Specialty "Applied Mathematics"  
Zaporizhzhia National University  
Universytetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0009-0001-2087-0287  
karnelcore@gmail.com*

**Key words:** *discrete optimization, multiply point problem, metaheuristics, oriented fragmentary structure, fragmentary model.*

The task of covering the end multiplicities of points on a plane with figures of various types can be extended to complex problems of discrete optimization. There are a lot of options for this problem, most of which fall into the class of NP-important problems. Thus, in order to find precise solutions to problems using daily polynomial complexity algorithms. It is important to find precise algorithms for this task, otherwise it will all be reduced to a complete enumeration of options. Moreover, there are unknown and close algorithms for decoupling such problems from given accuracy estimates. Therefore, it is of significant interest to develop and investigate heuristic optimization methods. One of the promising directions is the development of algorithms based on familiar meta-heuristic approaches that can be successfully used for a wide variety of discrete optimization problems.

One of the weaknesses of using metaheuristics is the presence of restrictions in many point coverage problems. In particular, these are all sorts of obstacles, restrictions on the placement of points, restrictions associated with possible transformations of points in coordinate space (shifts, rotations). Therefore, it is often necessary to modify known algorithms. This leads to a wide variety of metaheuristics, which are known by one name (genetic algorithm, ant algorithm), but are actually focused on a clearly defined range of problems. In turn, this leads to difficulties in creating software products that become individual for different problems.

The main goal of this work is to develop a universal approach to solving computationally complex problems, which allows using known metaheuristics for different classes of coverage problems without significant changes to the algorithms. For this purpose, the method of randomized hybrid algorithms is proposed, which is a combination of a fragmented algorithm, which is individual for each type of problem, and meta-heuristics, which is no longer tied to a specific class of problems. This method can be easily transferred to other classes of discrete optimization problems, for which a fragmented model may be needed.

---

**Вступ.** Задачі покриття множин точок на площині вирізняються великим різновидом постановок. Серед них існують як задачі неперервного типу, так і задачі дискретні. Більшість класів дискретних задач оптимального покриття точок відносять до *NP*-важких задач [1–3], для яких

невідомі точні алгоритми пошуку оптимального розв'язку, складність яких обмежена поліномом від довжини умови задачі. Зокрема, до таких класів належать різні варіанти задачі покриття точок різноманітними фігурами на площині як без перетинів цих фігур, так і з можливими перетинами,

різні варіанти задач прямокутного розкрою [4–7], задачі покриття вершин графа типовими підграфами [8; 9] та багато інших [10; 11].

Такі задачі часто виникають у металургії, текстильній і деревообробній промисловості, землекористуванні й інших практично важливих напрямках діяльності. Відсутність точних алгоритмів розв’язання таких задач призводить до різноманітності різних наближених методів, які зазвичай не є універсальними та розраховані на використання в конкретних індивідуальних постановках. Узагальненням таких методів є метаевристики різних типів [12–14], які за розумний час дозволяють отримати наближені розв’язки задач (хоч і без теоретичного обґрунтування). Відносна простота метаевристик робить їх зручним і простим інструментом для створення комп’ютерних програм для різних завдань, які виникають на практиці.

Підтвердженням якості метаевристик є, по-перше, накопичений досвід їх використання, по-друге, перевірка на великій кількості тестових завдань. На жаль, різноманітність обмежень реальних задач призводить до того, що застосування метаевристик стають індивідуальними і не можуть бути просто перенесені на інші класи задач.

У роботі пропонується підхід до дискретних задач покриття множин точок із використанням орієнтованих фрагментарних структур. Використання цих об’єктів дозволяє розробити гібридний алгоритм на базі комбінації фрагментарного алгоритму й будь-якої метаевристики. До того ж усі обмеження задачі враховуються на етапі роботи фрагментарного алгоритму, а метаевристика стає універсальною і не залежить від обмежень задачі. **Огляд літератури.** У літературі відомо багато різних постановок задач покриття множин точок на площині. Почнемо з найбільш простих задач покриття множин точок однаковими фігурами [15–21].

Нехай задана кінцева множина точок площини  $X = \{A_1, \dots, A_n\} \subseteq R^2$ . Кожна точка  $A_i$  визначається своїми Декартовими координатами  $(x_i, y_i)$ .

*Задача покриття множини точок колами заданого радіуса.*

Розглянемо набір кіл заданого радіуса  $R$  із центрами в точках множини  $X$ . Задача полягає у відшукуванні мінімального числа кіл із цієї множини, які містять усі точки множини  $X$ . Тобто потрібно вибрати підмножину індексів  $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  мінімальної потужності так, що для будь-якого  $k = 1, 2, \dots, n$  знайдеться елемент  $i_0 \in I$  такий, що  $\sqrt{(x_k - x_{i_0})^2 + (y_k - y_{i_0})^2} \leq R$ .

*Задача покриття множини точок колами різних радіусів.*

Більш складною є задача покриття множини точок  $X$  колами, радіуси яких можуть бути різ-

ними. Розглядається множина різних позитивних чисел  $T = \{R_1, R_2, \dots, R_s\}$ . Потрібно покрити множину точок колами, радіуси яких належать множині  $T$ . Оптимальне покриття визначається двома критеріями – кількістю елементів покриття (має бути, за можливості, мінімальним) і сумарною площею кіл покриття. Другий критерій також має бути якнайменшим.

Ускладненням даних постановок є задача кратного покриття, в якій кожна точка множини  $X$  повинна покриватися не менш ніж  $k$  ( $k > 1$ ) елементами покриття. Також можна розглядати покриття фігурами, які не є колами.

*Задача покриття плоских фігур.*

Тепер розглянемо випадок, коли множина точок  $X$  є фігурою на площині (з нескінченною множиною точок). Найбільш відомими задачами цього класу є задачі прямокутного розкрою [4–7]. Задача гільйотинного розкрою розглядається в багатьох роботах. Для даного класу задач розроблено багато точних і наближених алгоритмів. Але вдосконалення цієї задачі, коли потрібно розташувати на заданій фігурі деякий набір заданих фігур, є досить складним.

*Задача покриття вершин графа.*

Окремо серед задач покриття стоїть задача покриття вершин графа [1–3]. Нехай задано граф  $G = (V, E)$  із множиною вершин  $V$  і множиною ребер  $E$ . Потрібно знайти набір підграфів, що містить всі вершини множини  $V$ . Зазвичай на підграфи накладаються обмеження щодо виду підграфа (ребро, зірка, трикутник тощо).

**Результати. Фрагментарна модель оптимізаційної задачі.** Орієнтованою фрагментарною структурою [13]  $(X, E)$  на кінцевій множині  $X$  називається сімейство впорядкованих наборів  $E = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  таких його елементів, що для будь-якої не пустої послідовності  $E_i = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in E$  будь-яка її початкова підпослідовність  $(x_1, x_2, \dots, x_{k'})$ ,  $k' < k$  також належить  $E$ .

Елементи із множини  $E$  називатимемо допустимими фрагментами. Елементарним фрагментом називатимемо допустимий фрагмент, що складається з одного елемента. Максимальний фрагмент – допустимий фрагмент, який не є підмножиною іншого фрагмента. Нехай  $A \in E$ . Умову для елемента  $x \in X$ , за якої  $A \cup \{x\} \in E$ , називатимемо умовою приєднання елемента  $x$ .

Визначимо фрагментарний алгоритм як алгоритм побудови максимального фрагмента фрагментарної структури.

Цей алгоритм належить до класу «жадібних» алгоритмів і складається з таких кроків:

а) на початковому кроці елементи множини  $X$  лінійно впорядковуються;

б) на першому кроці алгоритму обирається порожня множина  $X_0 = \emptyset$ ;

в) на кроці з номером  $k \geq 2$  вибирається перший за обраним упорядкуванням елемент  $x \in X \setminus X_{k-1}$ , такий, що має властивість приєднання  $X_{k-1} \cup \{x\} \in E$ ;

г) алгоритм закінчує роботу, якщо на черговому кроці не вдалося знайти елемент  $x \in X \setminus X_k$ , який задовольняє властивості приєднання.

Максимальний фрагмент, який є результатом роботи фрагментарного алгоритму, залежить від обраного упорядкування на множині  $X$ . Кожне упорядкування кінцевої множини задається перестановкою її елементів. Таким чином, будь-який максимальний фрагмент може бути описаний відповідною перестановкою елементів множини  $X$ .

Припишімо кожному допустимому фрагменту невід'ємну вагу, тобто визначимо функцію  $\rho: E \rightarrow R^+$ . Припустимо, що функція  $\rho$  монотонно зростає за включенням. Якщо  $A, B \in E$  і  $A \subseteq B$ , то  $\rho(A) \leq \rho(B)$ . Задача оптимізації на орієнтованій фрагментарній структурі – це задача відшукування допустимого фрагмента максимальної ваги. Очевидно, що для монотонно зростаючих ваг оптимальне рішення буде максимальним фрагментом.

Задача може ставитися також іншим чином, без урахування монотонного зростання ваг, а саме: знайти максимальний фрагмент максимальної (або мінімальної) ваги.

Кожний максимальний фрагмент визначається відповідно заданим лінійним порядком перегляду елементарних фрагментів, тобто перестановкою  $s \in S_n$ , де  $n$  – кількість елементів множини  $X$ . Ця перестановка визначає результат роботи фрагментарного алгоритму, який побудує необхідний максимальний фрагмент. У кожній перестановці  $s \in S_n$  можна зіставити єдиний максимальний фрагмент, який їй породжується. Позначимо відповідне відображення через  $\varphi: S_n \rightarrow E$ . Має місце природна комутативна діаграма відображень:

$$\begin{array}{ccc} S_n & & \\ \varphi \downarrow & \searrow F \circ \varphi, & \\ E & \rightarrow & R^1 \end{array}$$

яка перетворює задачу оптимізації на орієнтованій фрагментарній структурі на задачу оптимізації на множині перестановок. Будь-яка перестановка є допустимою. Усі умови, які відповідають індивідуальній задачі, сховані в умові приєднання фрагментів. Для великих значень  $n$  задача пошуку оптимальної перестановки зазвичай є важкою в обчислювальному сенсі. Тож для таких задач виправдано застосування метаевристик на множині перестановок.

Деякі з таких метаевристик описано в наступному розділі.

Метаевристики для безумовної оптимізації на множині перестановок.

Розглянемо загальну задачу безумовної оптимізації на множині перестановок  $S_n$  з  $n$  елементів: знайти перестановку, для якої функція  $F: S_n \rightarrow R^+$  приймає найменше (або найбільше) значення.

Розглянемо метаевристики, що використовують метрику Кендала на просторі перестановок  $S_n$ . Відстанню між двома перестановками називається мінімальне число транспозицій, необхідне для перетворення першої перестановки на другу. Найпростіша з таких метаевристик – *локальний алгоритм з випадковим вибором початкової точки*.

Локальний алгоритм передбачає такі кроки:

а) на початковому етапі вибирається випадкова перестановка (наприклад, за допомогою алгоритму Фішера – Йетса) та обчислюється значення цільової функції на цій перестановці;

б) на етапі з номером  $k$  проглядається 1-окіл перестановки, вибирається як нове наближення точка, у якій значення цільової функції мінімальне(максимальне) в околі, що розглядається;

в) якщо отримана на черговому етапі перестановка збігається з перестановкою, отриманою на попередньому етапі, то алгоритм закінчує роботу.

Другим прикладом метаевристик, яку можна застосовувати для пошуку субоптимальних розв'язків на множині перестановок, є еволюційний алгоритм із геометричним оператором кросовера.

Використовується стандартна схема еволюційного алгоритму на перестановках. Наведемо коротко принцип роботи такого алгоритму [13; 19]. Як базова множина рішень вибирається множина всіх перестановок з  $n$  елементів. На початковому етапі застосовується оператор початкової популяції, що будує першу поточну популяцію рішень  $Y_0$ . На кроці з номером  $k(k \geq 0)$  алгоритму визначена поточна популяція  $Y_k$ , яка на початковому кроці збігається з  $Y_0$ . Для кожного з елементів  $s \in Y_k$  обчислюється значення критерію  $F(s)$ .

Далі за допомогою оператора відбору в поточній популяції  $Y_k$  вибирається множина пар для кросовера. До кожної пари з вибраної множини пар застосовується оператор кросовера *Cross*, а потім до результату кросовера застосовується оператор мутації. Нехай  $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  і  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  – дві довільні перестановки. Перестановка-нащадок будуватиметься як внутрішня точка відрізка, що з'єднує перестановки-батьки. У метриці Кендала таку точку можна отримати так: послідовності  $U$  і  $V$  проглядаються з початку. На черговому кроці вибирається найменший з перших елементів послідовностей і додається в нову перестанов-



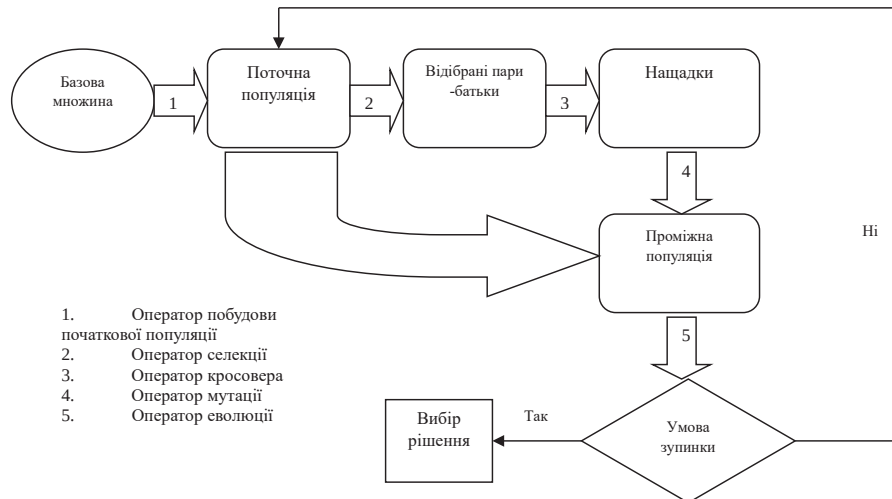


Рис. 1. Еволюційний алгоритм алгоритм

ку-нащадок. Потім цей елемент вилучається із двох послідовностей-батьків. Наприклад:

$Cross((4, 3, 1, 2, 8, 7, 6, 5), (3, 4, 2, 6, 1, 5, 8, 7)) = (3, 4, 1, 2, 8, 6, 5, 7)$ .

Оператор мутації  $Mut$  із заданою імовірністю  $\alpha \in (0,1)$  виконує випадкову транспозицію (заміну місцями двох елементів) у перестановці. Зауважимо, що існують також інші варіанти оператора мутації. Таким шляхом знаходиться множина  $\tilde{Y}$  елементів-нащадків. До проміжної популяції  $Y \cup \tilde{Y}$ , що є об'єднанням поточної популяції та множини нащадків, застосовується оператор еволюції, який виділяє в цій популяції нову поточну популяцію. Процес еволюції повторюється доти, доки буде дотримано умову зупинки еволюційного алгоритму. Блок-схема еволюційного алгоритму наведена на рисунку 1.

Натепер існує безліч метаевристик у метричному просторі, які можна використовувати для пошуку субоптимальної перестановки. Серед них алгоритм перемішаних стрибаючих жаб, алгоритм імітації відпалу, алгоритм мурашиної колонії тощо.

Нехай оптимізаційна задача може бути представлена в термінах фрагментарної моделі. Якщо за цільову функцію обирати накриваючу функцію фрагментарної моделі цієї задачі, отримаємо гібридний алгоритм для пошуку субоптимальних розв'язків задачі. Для отримання значень цільової функції використовується фрагментарний алгоритм, який є індивідуальним для кожного класу дискретних оптимізаційних задач з орієнтованою фрагментарною структурою. Як приклад побудови фрагментарної моделі розглянемо один з різновидів задачі покриття множини точок на площині.

Фрагментарні моделі задачі покриття множини точок на площині.

Будемо розглядати задачу покриття множини точок у такій загальній постановці. Нехай задана кінцева множина точок площини  $X = \{A_1, \dots, A_n\} \subseteq R^2$  і набір типів фігур, які можуть виступати елементами покриття. У кожній такій фігурі виділена точка, яку будемо називати базовою. Розташування цієї точки на площині повністю визначає позицію конкретної фігури. Наприклад, для кіл заданого радіуса – це центри кіл. У множині  $X$  виділено підмножину  $Y \subseteq X$  – точки, де можуть бути розташовані базові точки фігур – елементів покриття. Для кожної точки  $y \in Y$  визначено кінцевий набір фігур  $\Phi_y = \{\phi_y^1, \phi_y^2, \dots, \phi_y^{q_y}\}$ , базова точка яких може бути розташована в точці  $y$ . Такі фігури на площині будемо називати допустимими. Звичайно, допустима фігура, окрім точки  $y$ , покриває і деякі інші точки множини  $X$ . Для кожної фігури  $A$ , базова точка якої розташована в точці  $y$ , визначена позитивна вага  $\rho = \rho(A, y)$ . Допустимим розв'язком задачі покриття будемо називати пару  $U = (Z, A)$ , що складається із множини попарно незбіжних точок  $Z = \{y_1, y_2, \dots, y_s\} \subseteq Y$  і набору допустимих фігур  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_s\}$ , базові точки яких розташовані у відповідних точках множини  $Z$ , усі точки множини  $X$  містяться в об'єднанні фігур  $\bigcup_{i=1}^s A_i$ . Вагою допустимого розв'язку  $U$  називається число  $\rho(U) = \sum_{i=1}^s \rho(A_i, y_i)$ . Задача оптимізації полягає у відшуванні допустимого покриття, вага якого мінімальна.

Побудуємо фрагментарну модель загальної задачі покриття. Визначимо розмір перестановки за формулою  $N = \sum_{i=1}^n q_{y_i}$ . Перенумеруємо послідовно всі пари  $(y_i, \phi_{y_i}^j)_{i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,q_{y_i}}$  числами від 1 до  $N$ . Візьмемо будь-яку перестановку цих чисел і послідовність пар  $(y_i, \phi_{y_i}^j)$ , що відповідає цій перестановці. Побудуємо допустимий розв'язок задачі покриття, що відповідає заданій перестановці. Для цього потрібно визначити фрагментарний алгоритм,

що по перестановці буде допустимий розв'язок задачі покриття. На початковому кроці алгоритму, на кожному кроці  $k$  фрагментарного алгоритму буде побудовано пару  $U_k = (Z_k, A_k)$ . Визначимо умову приєднання чергового елемента  $(y_i, \varphi_{y_i}^j)$  до пари  $U_r$ . Щоб побудувати наступну пару  $U_{k+1} = (Z_{k+1}, A_{k+1})$  за правилом:

$$Z_{k+1} = Z_k \cup \{y_i\}; \quad A_{k+1} = A_k \cup \{\varphi_{y_i}^j\},$$

потрібно дотримання таких умов: 1)  $y_i \notin Z_k$ ; 2) підмножина точок множини  $X$ , що міститься в об'єднанні фігур набору  $A_k \cup \{\varphi_{y_i}^j\}$  хоча б на одну точку більше за підмножину точок множини  $X$ , що містяться в об'єднанні фігур набору  $A_k$ . Будь-який допустимий розв'язок задачі може бути досягнутий належним вибором перестановки із множини  $S_N$ .

Розглянемо як приклад задачу покриття заданої множини  $X = \{A_1, \dots, A_n\} \subseteq R^2$  точок площини колами радіуса  $R$  із центрами в цій же множині точок. Вага кожного кола дорівнює одиниці. Задача оптимізації полягає у знаходженні мінімального числа кіл із центрами в точках множини  $X$ , які містять усі

точки множини  $X$ . Тобто базовою точкою є центр кола радіуса  $R$ .

Беремо перестановку чисел  $i_1, i_2, \dots, i_n$  від 1 до  $n$ . Будемо множини кіл відповідно до умови: коло із центром в точці  $A_{i_k}$  додається до цієї множини, якщо воно містить хоча б одну точку множини  $X$ , яка не ввійшла в об'єднання вже обраних кіл. Алгоритм закінчує роботу тоді, коли всі точки множини  $X$  увійдуть в об'єднання обраних кіл. Вага розв'язку – це кількість кіл, які до нього ввійшли. Для пошуку субоптимального розв'язку можна використовувати будь-яку метаевристику на множині перестановок.

**Висновки.** У роботі було наведено принцип побудови гібридних алгоритмів для розв'язання задачі покриття множини точок на площині. Для пошуку субоптимальних розв'язків задачі покриття запропоновано використання гібридного алгоритму, який засновано на комбінації фрагментарного алгоритму й однієї зі стандартних метаевристик на множині перестановок. Запропонована методика побудови гібридних алгоритмів легко може бути розширена й для інших варіантів задач покриття точок.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Garey M. R., Johnson D. S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. San Francisco, CA : W. H. Freeman, 1979. 175 p.
2. Papadimitriou C. H., Steiglitz K. Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity. Prentice-Hall, 1982. 496 p.
3. Roth R. Computer solution to minimum-cover problems. Operat. Res., 1969. 17. № 3. P. 455–465.
4. Kantorovich L. V. Mathematical methods of organizing and planning production. *Management Science*. 1960. № 6 (4). P. 366–422.
5. Особливості розробки САПР розкрою матеріалів / Я. Грицишин та ін. IEEE AIS'02 CAD. 2002. С. 404–409.
6. Nthabiseng Ntene. An Algorithmic Approach to the 2D Oriented Strip Packing Problem. 2007. 217 p.
7. Гуляницький Л. Ф., Турінський В. В. Застосування метаевристичних алгоритмів для розв'язання одного класу задач розміщення прямокутників на напівнескінченній стрічці. *Analysis and Information Techns* : Proc. 15-th Int. Conf., May 27–31, 2013, Kyiv, Ukraine. SAIT. 2013.
8. Донець Г. П. Екстремальні задачі на перестановках зі спеціальною генерацією. *Комбінаторні конфігурації та їх застосування* : матеріали XI Міжвузівського науково-практичного семінару. Кіровоград, 2011. С. 41–48.
9. Graham R. L., Hell P. On the history of the minimum spanning tree problem. *Annals of the History of Computing*. 1985. Vol. 7. № 1. P. 43–57.
10. Yakovlev S. V. The method of artificial expansion of space in the problem of optimal placement of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. № 53 (5). P. 825–832.
11. Кісельова О. М. Становлення та розвиток теорії оптимального розбиття множин. Теоретичні і практичні застосування. Дніпро : Ліра, 2018. 532 с.
12. Sean L. Essentials of Metaheuristics. Lulu. URL: <http://cs.gmu.edu/~sean/book/metaheuristics/>
13. Kozin I. V., Maksyshko N. K., Perepelitsa V. A. Fragmentary Structures in Discrete Optimization Problems, *Cybernetics and Systems Analysis*. November 2017. Vol. 53. Issue 6. P. 931–936. DOI: 10.1007/s10559-017-9995-6
14. Козін І. В., Нарзуллаєв У. Х., Алломов З. К. Алгоритм перемішаних стрибаючих жаб у задачі розміщення виробництва. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2023. № 1. P. 11–17.
15. Kershner R. The number of circles covering a set. *Amer. J. Math.* 1939. Vol. 61. № 3. P. 665–671.
16. Energyefficient models for coverage problem in sensor networks with adjustable ranges / N. D. Nguen et al. *Ad Hoc & Sensor Wireless Networks*. 2012. Vol. 16. P. 1–28.
17. Toth F. G. Covering the plane with two kinds of circles. *Discrete Comput. Geometry*. 1995. Vol. 13. № 3. P. 445–457.

18. Wu J., Dai F. Virtual backbone construction in MANETs using adjustable transmission ranges. *IEEE Trans. Mobile Comput.* 2006. Vol. 5. № 9. P. 1188–1200.
19. Wu J., Yang S. Energy-efficient node scheduling models in sensor networks with adjustable ranges. *Int. J. Foundat. Comput. Sci.* 2005. Vol. 16. № 1. P. 3–17.
20. Energy-efficient area coverage by sensors with adjustable ranges / V. Zalyubovskiy et al. *Sensors*. 2009. Vol. 9. P. 2446–2460.
21. Козін І. В., Полюга С. І., Сардак В. І. Фрагментарна модель розміщення виробництва. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія «Фізико-математичні науки»*. Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. Вип. 19. С. 35–40.

## REFERENCES

1. Garey M. R. and Johnson D. S. (1979) *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. San Francisco: W. H. Freeman. San Francisco, CA.
2. Christos H. Papadimitriou, Kenneth Steiglitz. (1982) *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Mineola, New York: Prentice-Hall.
3. Roth R. (1969) Computer solution to minimum-cover problems. *Operation Reserch*. V. 17 (3), pp. 455–465.
4. Kantorovich L. V. (1960). Mathematical methods of organizing and planning production Management. *Science LSU V6* (4). pp. 366–422.
5. Ghrycyshyn Ja., Lobur M., Tkachenko S., Chura I. (2002) Osoblyvosti rozrobky SAPR rozkroju materialiv. *IEEE AIS'02 CAD*. 2002. pp. 404–409.
6. Nthabiseng Ntene. (2007). *An Algorithmic Approach to the 2D Oriented Strip Packing Problem*. (PhD Thesis). Stellenbosch, South Africa: Department of Logistics, University of Stellenbosch.
7. Ghuljanyckyj L. F., Turinskyj V. V. (2013). Zastosuvannja metaevrystychnykh alghorytmiv dlja rozv'jazannja odnogo klasu zadach rozmishennja prjamokutnykh na napivneskinchennij strichci. *Analysis and Information Techns: Proc. 15-th Int. Conf., May 27–31, 2013, Kyiv, Ukraine. SAIT*.
8. Donecj Gh. P. Ekstremalni zadachi na perestanovkakh zi special'noju gheneracijeju. (2011). *Proceedings of the Kombinatorni konfighuraciji ta jikh zastosuvannja, Ukraine, Kirovograd, April 15–16, 2011*, pp. 41–48.
9. Graham R. L., Hell P. (1985). On the history of the minimum spanning tree problem. *IEEE Annals of the History of Computing*. Vol. 7 (1), pp. 43–57.
10. Yakovlev S. V. (2017) The method of artificial expansion of space in the problem of optimal placement of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. V. 53 (5). New York: Springer, pp. 825–832.
11. Kiseljova O. M. (2018). Stanovlennja ta rozvytok teorii optymal'nogho rozbyt'tja mnozhyn. *Teoretychni i praktychni zastosuvannja*. Dnipro: Lira (in Ukranian).
12. Sean L. (2013). *Essentials of Metaheuristics*, Lulu, second edition, available for free at <http://cs.gmu.edu/~sean/book/metaheuristics/>.
13. Kozin I. V., Maksyshko N. K., Perepelitsa V. A. (2017). Fragmentary Structures in Discrete Optimization Problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. V. 53( 6). New York: Springer, pp. 931–936.
14. Kozin I. V., Narzullajev U. Kh., Allomov Z. K. (2023). Alghorytm peremishanykh strybyachykh zhab u zadachi rozmishennja vyrobnyctva. *Computer Science and Applied Mathematics*, V.1, Samarkand, pp.11–17.
15. Kershner R. (1939). The number of circles covering a set *Amer. J. Math.* Vol. 61 (3). New York, pp. 665–671.
16. Nguen N. D., Zalyubovskiy V., Minh T. H., Hyunseung C. (2012). Energyefficient models for coverage problem in sensor networks with adjustable ranges *Ad Hoc & Sensor Wireless Networks*. V.16, pp. 1–28.
17. Toth F. G. (1995). Covering the plane with two kinds of circles. *Discrete Comput. Geometry*. V. 13 (3). New York: Springer, pp. 445–457.
18. Wu J., Dai F. (2006). Virtual backbone construction in MANETs using adjustable transmission ranges. *IEEE Trans. Mobile Comput.* V.5 (9). pp. 1188–1200.
19. Wu J., Yang S. (2005). Energy-efficient node scheduling models in sensor networks with adjustable ranges. *Int. J. Foundat. Comput. Sci.* V. 6 (1). pp. 3–17.
20. Zalyubovskiy V., Erzin A., Astrakov S., Choo H. (2009). Energy-efficient area coverage by sensors with adjustable ranges. *Sensors*. V. 9 (4), pp. 2446–2460.
21. Kozin I. V., Poljugha S. I., Sardak V. I. (2019). Fraghmentarna modelj rozmishennja vyrobnyctva. *Sb. Matematychni ta komp'yuterne modeljuvannja Serija Fyzyko-matematychni nauky. Kam'janecj-Podiljskyj nacional'nyj universytet im. Ivana Oghijenka*, V.19, pp. 35–40.

Дата першого надходження рукопису до видання: 29.08.2025  
 Дата прийнятого до друку рукопису після рецензування: 26.09.2025  
 Дата публікації: 31.12.2025