УДК 514.177.2
DOI https://doi.org/10.26661/2786-6254-2025-2-02

АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ ФЕРМА – ТОРРІЧЕЛЛІ ДЛЯ ЧОТИРИКУТНИКІВ

Максимов І. І.
кандидат технічних наук, доцент,
завідувач кафедри вищої математики та фізики
Криворізький національний університет
вул. Віталія Матусевича, 11, Кривий Ріг, Україна
orcid.org/0000-0003-2999-4806
maksimov@knu.edu.ua

Кіяновська Н. М.
кандидат педагогічних наук, доцент,
доцент кафедри вищої математики та фізики
Криворізький національний університет
вул. Віталія Матусевича, 11, Кривий Ріг, Україна
orcid.org/0000-0002-0108-5793
kiyanovskaya.n.m@knu.edu.ua

Слободянюк В. К.
кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри відкритих гірничих робіт
Криворізький національний університет
вул. Віталія Матусевича, 11, Кривий Ріг, Україна
orcid.org/0000-0002-9977-3972
slobod_v@knu.edu.ua

Максимова І. І.
доктор економічних наук, доцент,
завідувач кафедри міжнародних відносин
Державний університет економіки і технологій
вул. Медична, 16, Кривий Ріг, Україна
orcid.org/0000-0001-9754-0414
maksimova_ii@kneu.dp.ua

Ключові слова: *точка Ферма – Торрічеллі, чотирикутник, рівнозважені точки, різнозважені точки, лінії рівня.*

Однією із задач оптимізації в геометрії є пошук оптимальної точки Ферма – Торрічеллі, що забезпечує знаходження мінімальної суми відстаней до вершин заданого многокутника. Але, незважаючи на майже чотирьохсотлітню історію задачі, натепер знайдено універсальні геометричні розв'язки лише для випадків рівнозважених вершин трикутників і чотирикутників. Це істотно обмежує її застосовність у практичних сферах. Водночас дана задача має велике практичне значення для широкого спектра прикладних завдань. Вона є фундаментальною для оптимального розміщення критично важливих об'єктів, як-от переробні підприємства, великі склади, а також для значної оптимізації транспортних і логістичних схем тощо. Але в перелічених вище завданнях найчастіше розглядають умову, коли задані вихідні точки многокутників

зазвичай мають різну значущість, або «вагу», що робить їх різнозваженими. Однак саме для різнозважених вершин досі відсутні навіть базові геометричні методи розв'язування, навіть для найпростіших випадків, що мають форму найпростіших фігур – трикутників і чотирикутників.

Складаючи математичну модель задачі для пошуку координат оптимальної точки, ми приходимо до системи ірраціональних рівнянь та неявних функцій високого порядку, що ускладнює аналітичне дослідження. Задача значно спрощується для випадків із симетричними чотирикутниками (зокрема, із квадратом і ромбом), де симетрія дозволяє застосовувати більш прямі аналітичні підходи.

У процесі даного дослідження нами було встановлено координати оптимальної точки Ферма – Торрічеллі як для різнозважених вершин чотирикутників, проведено аналіз впливу параметрів ромба й вагового коефіцієнта на положення оптимальної точки. Окрім того, встановлені умови, за яких вершина ромба може бути оптимальною точкою. Досліджені особливості зміни рівнозваженої і різнозваженої сум відстаней до вершин чотирикутника. Досліджений вплив вагового коефіцієнта на положення оптимальної точки.

Проведено дослідження форми ліній рівня (для випадків чотирикутників представлені чотирицентровими еліпсами), що надало можливість визначити вплив відхилення від оптимальної точки на збільшення основних показників.

ANALYTICAL STUDY OF THE FERMAT – TORRICELLI PROBLEM FOR QUADRANGLES

Maksymov I. I.
PhD (Engineering), Associate Professor,
Head of the Department of Higher Mathematics and Physics
Kryvyi Rih National University
Vitaly Matusevich str., 11, Kryvyi Rih, Ukraine
orcid.org/0000-0003-2999-4806
maksimov@knu.edu.ua

Kiianovska N. M.
PhD (Pedagogical), Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Higher Mathematics and Physics
Kryvyi Rih National University
Vitaly Matusevich str., 11, Kryvyi Rih, Ukraine
orcid.org/0000-0002-0108-5793
kiyanovskaya.n.m@knu.edu.ua

Slobodyanyuk V. K.
PhD (Engineering), Associate Professor,
Associate Professor at the Open-Cast Mining Department
Kryvyi Rih National University
Vitaly Matusevich str., 11, Kryvyi Rih, Ukraine
orcid.org/0000-0002-9977-3972
slobod_v@knu.edu.ua

Maksymova I. I.
PhD (Economics), Professor,
Head of the Department of International Economics
State University of Economics and Technology
Medychna str., 16, Kryvyi Rih, Ukraine
orcid.org/0000-0001-9754-0414
maksimova_ii@kneu.dp.ua

Key words: *Fermat – Torricelli point, quadrilateral, equiweighted and unequally weighted points, contour lines.*

One fundamental optimization problem in geometry is determining the Fermat – Torricelli point, which minimizes the sum of distances to the vertices of a given polygon. Despite the problem's nearly four-century history, universal geometric solutions currently exist only for cases involving equi-weighted vertices of triangles and quadrilaterals. This significantly limits its practical applicability. Nevertheless, this problem holds substantial practical significance across a broad spectrum of applied problems. It is fundamental for the optimal placement of critical facilities such as processing plants and large warehouses, and for considerably optimizing transportation and logistics schemes. However, in the aforementioned applications, the given initial points (vertices) of the polygons typically possess varying significance or "weights", rendering them unequally-weighted. Crucially, for these unequally-weighted vertices, even basic geometric solution methods remain absent, even for the simplest polygonal configurations – namely, triangles and quadrilaterals.

When constructing a mathematical model for determining the coordinates of the optimal point, we arrive at a system of irrational equations and high-order implicit functions, which complicates analytical investigation. The problem is significantly simplified for cases involving symmetric quadrilaterals (specifically squares and rhombuses), where symmetry allows for more direct analytical approaches.

In the course of this study, we determined the coordinates of the optimal Fermat – Torricelli point for variably weighted vertices of quadrilaterals. An analysis was conducted to assess the influence of rhombus parameters and the weighting coefficient on the location of the optimal point. Furthermore, we identified the conditions under which a vertex of the rhombus may serve as the optimal point. Specific features of changes in the equally weighted and variably weighted sums of distances to the quadrilateral vertices were examined, as well as the impact of the weighting coefficient on the position of the optimal point.

A study was conducted on the shape of contour lines (represented by four-centered ellipses in the case of quadrilaterals), which enabled the assessment of the impact of deviations from the optimal point on the increase of key performance indicators.

Вступ. ***Проблема та її зв'язок з науковими та практичними завданнями.*** Пошук оптимальної точки Ферма – Торрічеллі має велике практичне значення і застосовується в багатьох оптимізаційних задачах. Найвідоміші з них – це задача оптимального розміщення переробного підприємства й оптимізація логістичних схем. Але наявні геометричні методи можна застосовувати лише для рівнозважених вершин трикутника та чотирикутника. Важливим науковим завданням є знаходження координат точки Ферма – Торрічеллі як для рівнозважених, так і для різнозважених точок, дослідження впливу вихідних даних на кінцевий результат. **Огляд літератури.** Класична задача Ферма полягала у знаходженні для трьох заданих точок на евклідовій площині такої точки, сума відстаней до якої від заданих трьох точок була мінімальною. Задача розглядалася для рівнозважених точок трикутника. Під *рівнозваженими* точками $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$, кожній з яких відповідає задане число $\{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n\}$, будемо розуміти такі точки, усі коефіцієнти яких рівні, тобто $k_1 = k_2 = k_3 = \ldots = k_n = k$. Точки будемо вважати *різнозваженими*, якщо коефіцієнти $\{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n\}$ різні.

Першим задачу Ферма розв'язав Е. Торрічеллі. Оптимальною буде така точка Т, з якої сторони трикутника видно під кутом 120° (ні доведення, ні метод не збереглися). Розв'язок задачі Ферма називають точкою Ферма – Торрічеллі. У XVII–XVIII ст. було знайдено кілька геометричних методів знаходження оптимальної точки, але тільки для рівнозважених вершин трикутника.

Пізніше було розглянуто розширення задачі Ферма для чотирьох неколінеарних точок у $\mathbb{R}^2$. Уперше оптимальну точку Ферма – Торрічеллі для чотирикутника знайшов італійський математик Джованні Фаньяно деї Тоски (1682–1766 рр.). Для опуклого чотирикутника оптимальною буде точка перетину діагоналей (рис. 1). Якщо чотири точки утворюють неопуклий чотирикутник, тоді оптимальною точкою Ферма буде його вершина, для якої внутрішній кут більше за 180° (Кавальєрі). Цей результат було показано за допомогою нерівностей трикутників. Якщо координати опуклого чотирикутника відомі, то координати оптимальної точки можна знайти як точку перетину двох прямих (діагоналей) [9; 10].

$$x_T = \frac{(y_3 \cdot x_1 - y_1 \cdot x_3) \cdot (x_4 - x_2) - (y_4 \cdot x_2 - y_2 \cdot x_4) \cdot (x_3 - x_1)}{(y_3 - y_1) \cdot (x_4 - x_2) - (y_4 - y_2) \cdot (x_3 - x_1)};$$

$$y_T = \frac{(x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3) \cdot (y_4 - y_2) - (x_4 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_4) \cdot (y_3 - y_1)}{(x_3 - x_1) \cdot (y_4 - y_2) - (x_4 - x_2) \cdot (y_3 - y_1)}.$$

Але наведені геометричний і алгебраїчний методи не дозволяють провести дослідження впливу

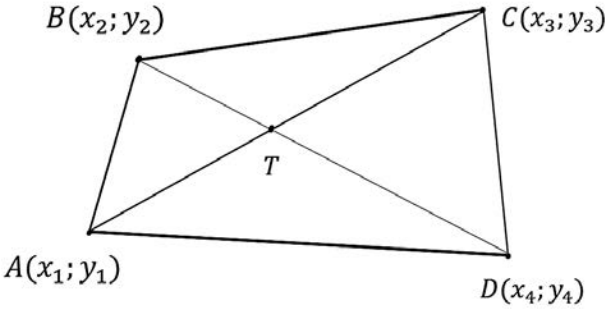

Рис. 1. Схема для визначення координат $T(x_T; y_T)$ оптимальної точки для чотирикутника

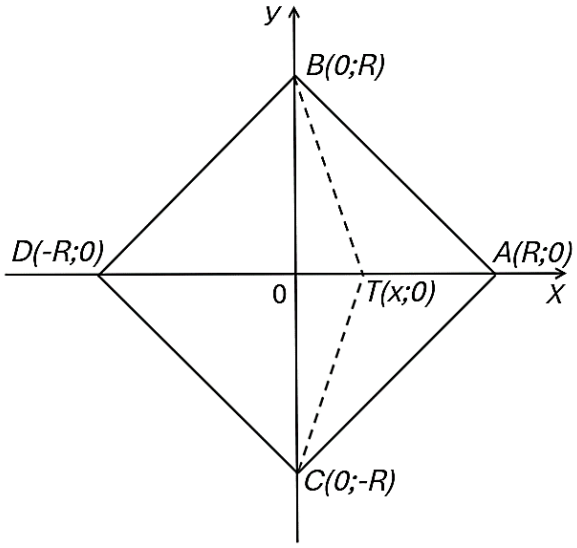

Рис. 2. Схема для визначення координат оптимальної точки Ферма – Торрічеллі для квадрата

елементів чотирикутника на положення оптимальної точки. Аналогічний недолік мають аналітичні та градієнтні методи знаходження координат оптимальної точки [1–8]. Окрім того, їх можна застосувати тільки для рівнозважених точок.

Застосування аналітичних методів приводить до появи функцій з декількома радикалами (відстані), або неявних функцій із двома невідомими в R^2 восьмого (для трикутників) та шістнадцятого (для чотирикутників) порядку, що ускладнює їх дослідження. Під час дослідження симетричних фігур одна з координат оптимальної точки відома, дослідження значно спрощується. У роботі [12] авторами наведено дослідження положення оптимальної точки й особливості зміни особливих показників для рівнобедрених трикутників (як для рівнозважених, так і для нерівнозважених вершин).

Метою статті є визначення координат оптимальної точки для різнозважених вершин чотирикутника. Проведення дослідження впливу вихідних параметрів на положення оптимальної точки на прикладі деяких видів чотирикутників.

Об'єктом дослідження у статті є оптимальна точка Ферма – Торрічеллі для чотирикутників з рівнозваженими і різнозваженими вершинами.

Методи. У процесі проведеного дослідження було використано комбінацію теоретичних методів (аналіз, синтез, узагальнення, математичне моделювання), математичних методів (аналітичні – для спрощених випадків, чисельні – для складних систем рівнянь, оптимізаційні – для пошуку мінімуму), комп'ютерні методів (для симуляції, візуалізації ліній рівня).

Результати. Сформулюємо зважену задачу Ферма – Торрічеллі для чотирьох неколінеарних точок у R^2: дано чотири неколінеарні точки A_1, A_2, A_3, A_4 та додатні дійсні числа (вага) k_i ($i = 1, 2, 3, 4$), що відповідають кожній точці A_i, знайти таку п'яту точку T, щоб сума зважених відстаней до цих чотирьох точок була мінімальною.

Розглянемо спочатку квадрат (рис. 2) та дослідимо закономірності зміни деяких показників. Оптимальною буде точка перетину діагоналей, де і розміщуємо початок системи координат. Сторона квадрата дорівнює a, а радіус описаного кола

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}\left(a = R \cdot \sqrt{2}\right).$$

Для рівнозважених точок мінімальна сума відстаней до вершин квадрата дорівнює $4R$. Розглянемо випадок, коли вершини квадрата нерівнозважені. Ваговий коефіцієнт вершини A дорівнює k ($k > 1$), а для інших вершин дорівнює одиниці ($k = 1$). Це відповідає задачі оптимального розміщення переробного підприємства, на яке з вершини A надходять обсяги сировини, що перевищують обсяги з інших точок.

Цільова функція має вигляд:

$$F(x) = (R + x) + k(R - x) + 2\sqrt{x^2 + R^2} \cdot min\,. \qquad (1)$$

Прирівнявши похідну до нуля, знаходимо координати оптимальної точки:

$$x_0 = R \cdot \frac{k-1}{\sqrt{4-(k-1)^2}}\,. \qquad (2)$$

Якщо $k = 1$, тоді $x_0 = 0$ точка перетину діагоналей.

За $k > 1$ оптимальна точка зміщується у сторону вершини A. Наприклад, за $k = 2$ $x_0 = \frac{R\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577 \cdot R$.

Особливе значення в дослідженнях має випадок, коли вершина A стає оптимальною точкою. Підставляємо в рівняння (2) $x_0 = R$ і знаходимо $k_A = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}414$. Для порівняння, для правильного трикутника вершина A стає оптимальною точкою за $k_A = \sqrt{3} \approx 1{,}732$ [10; 11; 12]. В обох випад-

ках об'єм сировини з вершини A не перевищує сумарного об'єму сировини з інших точок. Для трикутника $\sqrt{3}<2$, а $\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}866$ (86,6%), а для квадрата $(1+\sqrt{2})<3$, а $(1+\sqrt{2})/3\approx 0{,}805$ (80,5%).

Розглянемо більш загальний випадок, коли чотири точки утворюють ромб. Вершина A віддаляється від початку координат (рис. 3).

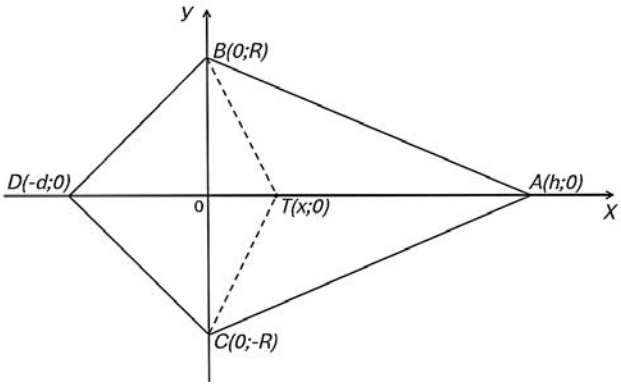

Рис. 3. Схема для визначення координат оптимальної точки Ферма – Торрічеллі для ромба

Вершини A і D розташовані на відстанях відповідно h і d від початку координат. Якщо вершини ромба рівнозважені, то положення оптимальної точки не залежить від віддалення чи наближення вершин A і D. Якщо вершина A має ваговий коефіцієнт k, то координати оптимальної точки визначаємо з мінімуму функції:

$$F(x)=(d+x)+k(h-x)+2\sqrt{x^2+R^2}\,. \qquad (3)$$

Прирівнявши похідну до нуля, знаходимо координати оптимальної точки:

$$x_0=R\cdot\frac{k-1}{\sqrt{4-(k-1)^2}}\,. \qquad (4)$$

Рівняння (2) і (4) ідентичні, розміщення оптимальної точки залежить тільки від довжини діагоналі $R=\frac{BC}{2}$ та вагового коефіцієнта k (не залежить від віддалення чи наближення вершин A і D).

Підставляємо в рівняння (4) $x_0=h$ і знаходимо значення вагового коефіцієнта, за якого вершина A стає оптимальною точкою.

$$k_A=1+\frac{2h}{\sqrt{h^2+R^2}}\,. \qquad (5)$$

Значення коефіцієнта k_A не залежить від положення вершини D, а тільки від величини діагоналі $R=\frac{CB}{2}$ та віддалення вершини A від початку координат h (рис. 4). За віддалення вершини A ($h\to\infty$) значення коефіцієнта k_A збільшується і наближається до 3. За $h=4R$, $k_A=2{,}94$.

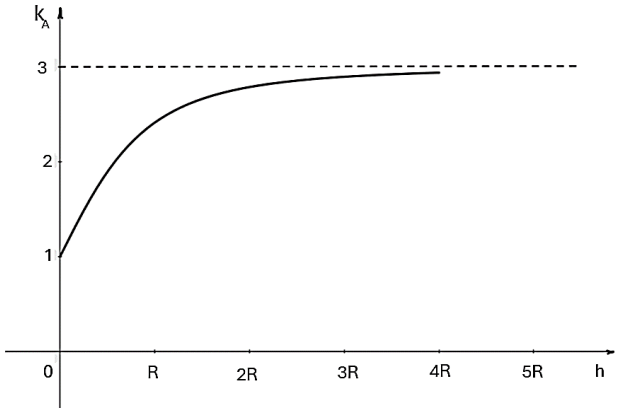

Рис. 4. Зміна значення вагового коефіцієнта k_A за віддалення вершини A від точки перетину діагоналей

Якщо відстань від вершини A до початку координат менше R, то вона може бути оптимальною за $k_A<1+\sqrt{2}$. За $h\to 0$, $k_A\to 1$.

Для нерівнозважених вершин положення оптимальної точки знаходять наближено за допомогою фізичної моделі, де використовують ваги пропорційні ваговим коефіцієнтам [6–8]. Встановлено, що вершина може бути оптимальною точкою, якщо $k_A\ge 2$ для трикутників і за $k\ge 3$ для чотирикутників. Проведеними дослідженнями показано, що це максимальні значення. Для правильних трикутників досить, щоб $k_A\ge\sqrt{3}\approx 1{,}73$, а для квадрата $k_A\ge 1+\sqrt{2}\approx 2{,}41$. У кожному конкретному випадку значення коефіцієнта k_A можна знайти за формулою (5).

Коли змінюються вагові коефіцієнти для двох протилежних точок (k_1 для точки A і k_2 для точки D), знаходимо схожі формули:

$$x_0=R\cdot\frac{k_1-k_2}{\sqrt{4-(k_1-k_2)^2}}\,. \qquad (6)$$

Якщо $k_1>k_2$, то оптимальна точка x_0 розташована справа від початку координат, а якщо $k_1<k_2$, то зліва.

Вершина A стає оптимальною, якщо

$$k_A=k_2+\frac{2h}{\sqrt{h^2+R^2}}\,, \qquad (7)$$

за $h=Rk_A=k_2+\frac{\sqrt{2}}{2}$, а за $h\to\infty\, k_A\to k_2+2$.

Характер функції $F\ (x)$ значно відрізняється для рівнозважених і різнозважених вершин ромба. Значною мірою він залежить від вагового коефіцієнта k. Розглянемо випадок, коли $h=2R; d=R$.

За всіх значеннь вагового коефіцієнта k значення функції $F\ (x)$ за $x=2R$ (вершина A) збігається і дорівнює $\left(3+2\sqrt{5}\right)\cdot \mathrm{R}$.

На рисунку 5 показано залежність положення оптимальної точки Ферма – Торрічеллі від значення вагового коефіцієнта k: у разі збільшення коефіцієнта k від 0 до $k_A = 1 + \frac{4}{\sqrt{5}}$ положення оптимальної точки Ферма – Торрічеллі зміщується із крайнього лівого положення $x_0 = -R \cdot \sqrt{3}/3$ до крайнього правого $x_0 = 2R$. Зокрема, $x_0 = -R \cdot \sqrt{3}/3$ за $k = 0$; $x_0 = 0$ за $k = 1$; $x_0 = R \cdot \sqrt{3}/3$ за $k = 2$ і $x_0 = 2R$ за $k = k_A = 1 + \frac{4}{\sqrt{5}}$.

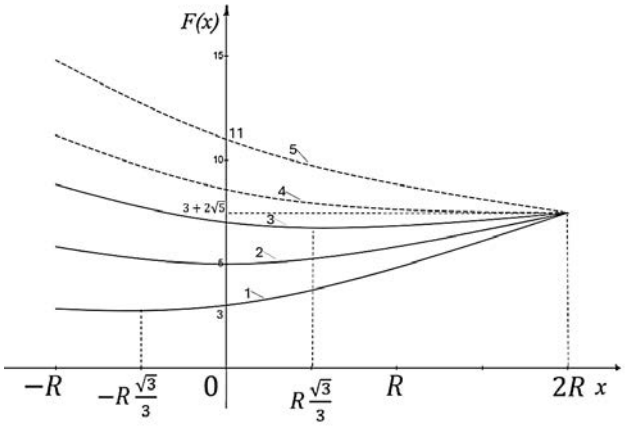

Рис. 5. Зміна функції *F (x)* за різних вагових коефіцієнтів *k*:
1 – (*k* = 0), 2 – (*k* = 1), 3 – (*k* = 2),
4 – (*k* = $k_A = 1 + \frac{4}{\sqrt{5}}$), 5 – (*k* = 4 > k_A)

Якщо $k \geq k_A = 3 + 2\sqrt{5}$, функція спадна й має мінімальне значення: $F_{min} = 3 + 2\sqrt{5}$ за $x_0 = 2R$. Якщо $k < 1$, оптимальна точка розташована лівіше точки перетину діагоналей, а якщо $k > 1$ – правіше.

Аналіз графіків на рисунку 5 показує, що в деякому околі оптимальної точки x_0 функція *F(x)* має незначний приріст. Іноді переробне підприємство або великий склад неможливо розмістити в оптимальній точці, а тільки на деякій відстані від неї. Це можуть бути гори, море, заповідна зона, значне порушення екологічних вимог та інші. У такому разі необхідно дослідити, як відхилення від оптимальної точки на деяку величину *l* впливає на приріст функції *F (x)*. Швидкість приросту функції в різних напрямках від оптимальної точки може бути різною. Тому найточнішим способом буде побудова кількох ліній рівня функції *F (x)*. Наприклад, брати збільшення значення функції на 2, 4, 6% тощо. Будувати лінії рівня, що відповідають значенням функції $F_{min} \cdot 1{,}02$;. $F_{min} \cdot 1{,}04$; $F_{min} \cdot 1{,}06$ тощо. Таким чином можна знайти розміщення переробного підприємства, що відповідає мінімально можливому значенню функції з урахуванням необхідних обмежень і вимог щодо його розміщення.

Розглянемо властивості ліній рівня для рівнозважених вершин квадрата (рис. 6).

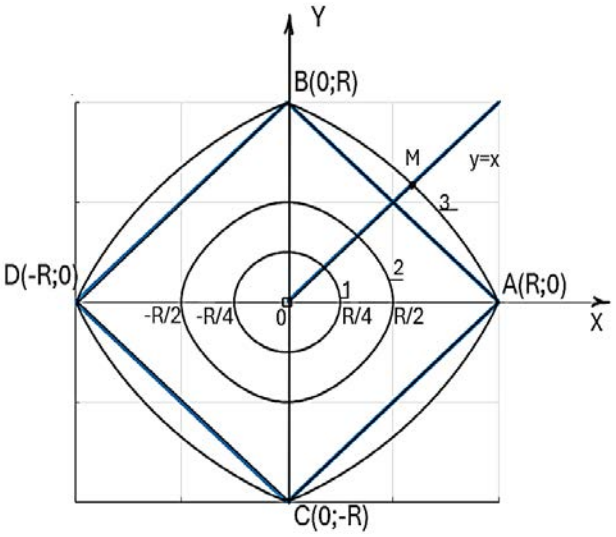

Рис. 6. Лінії рівня для рівнозважених вершин квадрата, що відповідають збільшенню суми відстаней до вершин

(1) – $F_{min} \cdot \frac{\left(4 + \sqrt{17}\right)}{8}$**; (2) –** $F_{min} \cdot \frac{\left(2 + \sqrt{5}\right)}{4}$**;**

(3) – $F_{min} \cdot \frac{\left(1 + \sqrt{2}\right)}{2}$

Для початку координат сума відстаней до вершин квадрата буде мінімальною і дорівнює $F_{min} = 4R$. Для лінії рівня (1) сума відстаней перевищує мінімальне значення на 1,54%, для лінії рівня (2) – на 5,9%, а для лінії рівня (3) – на 20,71%. За таких перевищень суми відстаней лінії рівня перетинають координатні осі *OX* та *OY* на відстані, від початку координат, відповідно $\frac{R}{4}; \frac{R}{2}$ і R. Форма ліній рівня відрізняється від кола. Якнайдалі від початку координат розміщені точки перетину ліній рівня з координатними осями, а найближче – точки перетину із прямими $y = \pm x, (\varphi = \pm 45°)$. Найбільше ця різниця буде для лінії (3). $OA = R$, а $OM = \frac{3 + \sqrt{2}}{2\sqrt{7}} \cdot R \approx 0.834 \cdot R$, на 16,6% менше. Для лінії (2) різниця відстаней становить 6,8%, а для лінії (1) – лише 1,5%. У разі зменшення відносного приросту функції *F (x)* форма лінії рівня наближається до кола.

У разі віддалення точки від оптимальної вздовж координатних осей на величину *l* відносну суму відстаней до вершин квадрата (F / F_{min}) (рис. 7) знаходимо за формулою:

$$\frac{F}{F_{min}} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{l}{R}\right)^2}\right), \left(\frac{l}{R}\right) \epsilon \, [0;1]. \qquad (8)$$

Оскільки форма ліній рівня близька до кола, особливо за $x < R/2$, то формулу (8) можна використовувати як наближену для довільного напрямку відхилення від оптимальної точки. За формулою (8) знаходимо:

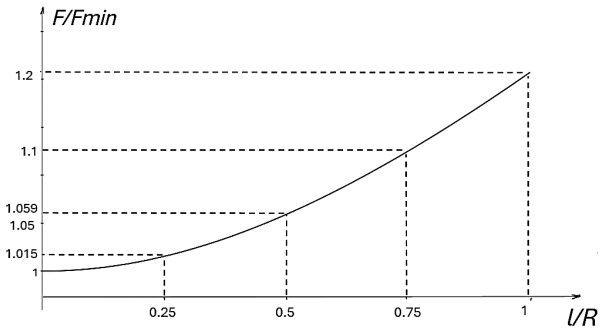

Рис. 7. Зростання відносної суми відстаней (F / F_{min}) у разі збільшення відстані від оптимальної точки вздовж координатних осей

$$l = 2 \cdot R\sqrt{\left(F / F_{min}\right)^2 - \left(F / F_{min}\right)}\,. \qquad (9)$$

Якщо відоме допустиме збільшення значення відносної величини суми відстаней до вершин квадрата на величину F / F_{min}, то допустиме відхилення від оптимальної точки в межах кола, радіус якого знаходимо за формулою (9).

На рисунку 8 наведені приклади ліній рівня для рівнозважених і різнозважених вершин квадрата й ромба $(h = 2R)$.

З рисунку 8 видно значення впливу на форму ліній рівня (чотирифокусні еліпси) віддалення вершини A $(h = 2R)$ та випадків, коли вершина A буде оптимальною точкою $k = k_A$. Наведені приклади показують необхідність подальших досліджень властивостей ліній рівня. Формули (8) і (9) можна використовувати як оціночні.

Висновки. Запропонований метод дозволяє провести дослідження тільки для симетричних фігур, на прикладі трикутника [12] та чотирикутника. Але це єдиний поки що метод, що надає можливість розглянути різнозважені точки та вплив вихідних даних на зміну основних показників (рівнозваженої і різнозваженої суми).

Проведеними дослідженнями встановлені координати оптимальної точки Ферма – Торрічеллі для квадрата й ромба для рівнозважених

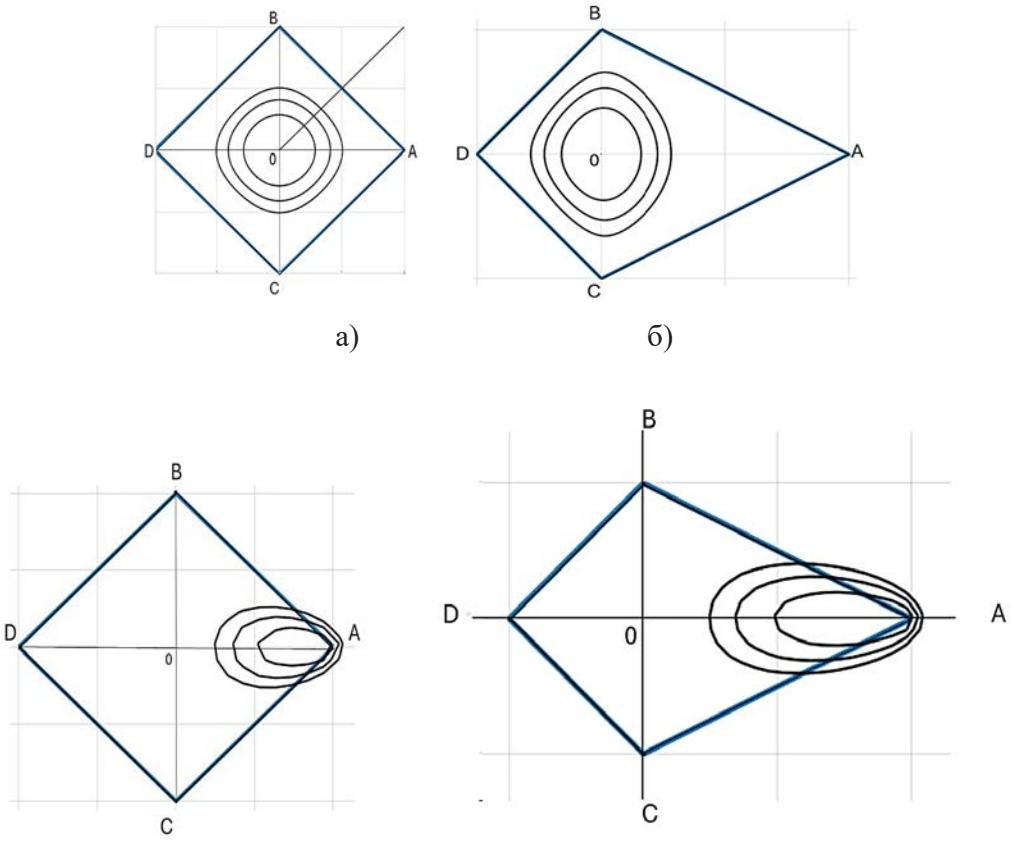

Рис. 8. Лінії рівня, що відповідають значенням функції $F_{min} \cdot 1{,}02$;. $F_{min} \cdot 1{,}04$; $F_{min} \cdot 1{,}06$. а) і б) рівнозважені точки; в) і г) різнозважені точки, де $k = k_A$, оптимальною точкою буде вершина A

і різнозважених вершин. Встановлені умови, за яких вершина чотирикутника може бути оптимальною точкою. Встановлені основні параметри, що впливають на положення оптимальної точки. Встановлений вплив величини відхилення від оптимальної точки на зростання транспортної роботи (суми відстаней до вершин квадрата).

Надалі планується продовжити дослідження для різних видів многокутників.

ЛІТЕРАТУРА

1. Kupitz Ya. S., Martini H., Spirova M. The Fermat – Torricelli Problem, Part I: A Discrete Gradient-Method Approach. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2013. Vol. 158. № 2. P. 305–327.
2. Villiers M., Meyer J. Another concurrency related to the Fermat point of a triangle. *Mathematics Competitions.* 2024. Vol. 37. № 2. P. 33–40.
3. Hajja M., Zachos A. A complete analytical treatment of the weighted Fermat–Torricelli point for a triangle. *Journal of Geometry*. 2017. Vol. 108. № 1. P. 99–110.
4. Zachos A. Analytical solution of the weighted Fermat–Torricelli problem for convex quadrilaterals in the Euclidean plane: The case of two pairs of equal weights. *Mathematics. Optimization and Control*. 2014. https://doi.org/10.48550/arXiv.1406.2947
5. Courant R., Robbins H., Stewart I. What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods 2nd ed. *Oxford University Press*. 1996. 588 p.
6. Xu Bin, Chen Hongsheng, Cheng Yanxu. A network recovery strategy based on boundary nodes and tetrahedral approximation Fermat points in three-dimensional wireless sensor networks. *Scientific Reports*. 2025. № 15. DOI: 10.1038/s41598-025-15723-0
7. Liébana Rísquez E. Otros puntos notables de triángulos. TFM. Universidad de Granada. 2016.
8. Wang Huan, Gao Bingtuan, Zhao Dehui, Shen Huan, Liu Chuande. A grasping configuration planning method inspired by the geometric Fermat point. *Industrial Robot: the international journal of robotics research and application*. 2025. DOI: 10.1108/IR-12-2024-0565
9. Максимова І. І., Слободянюк Р. В. Особливості визначення раціонального положення перевантажувального пункту. *Перспективи розвитку будівельних технологій :* матеріали 11-ї Міжнародної науково-практичної конференції. 2017. Дніпропетровськ, 217. С. 43–47.
10. Maksymov I., Slobodyanyuk V., Maksymova I. Features of determining the coordinates of the Fermat – Torricelli point for isosceles triangles. *Internauka :* International scientific journal. 2023. № 8 (142). https://doi.org/10.25313/2520-2057-2023-8-8855.
11. Максимов І. І., Слободянюк В. К., Максимова І. І. Аналітичне визначення координат точки Ферма – Торрічеллі та мінімізація транспортної роботи. *Вчені записки Таврійського національного університету імені В. І. Вернадського.* Серія «Технічні науки». 2023. 34 (73). № 3. С. 1–7.
12. Максимов І. І., Кіяновська Н. М., Слободянюк В. К., Максимова І. І. Аналітичне дослідження задачі Ферма для рівнобедреного трикутника. *Наука і техніка сьогодні*. 2024. № 5 (33). https://doi.org/10.52058/2786-6025-2024-5(33)-1348-1362

REFERENCES

1. Kupitz, Ya. S., Martini, H., & Spirova M. (2013). The Fermat–Torricelli Problem, Part I: A Discrete Gradient-Method Approach. *Journal of Optimization Theory and Applications*. Vol. 158, № 2. P. 305–327.
2. Villiers, M., & Meyer, J. (2024). Another concurrency related to the Fermat point of a triangle. *Mathematics Competitions,* Vol. 37, № 2. P. 33–40.
3. Hajja, M., & Zachos, A. (2017). A complete analytical treatment of the weighted Fermat–Torricelli point for a triangle. *Journal of Geometry*. Vol. 108, № 1. P. 99–110.
4. Zachos, A. (2014). Analytical solution of the weighted Fermat–Torricelli problem for convex quadrilaterals in the Euclidean plane: The case of two pairs of equal weights. *Mathematics. Optimization and Control*. https://doi.org/10.48550/arXiv.1406.2947
5. Courant, R., Robbins, H., Stewart, I. (1996). What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods 2nd ed. *Oxford University Press*. 588 p.
6. Xu, Bin, Chen, Hongsheng, & Cheng, Yanxu. (2025). A network recovery strategy based on boundary nodes and tetrahedral approximation Fermat points in three-dimensional wireless sensor networks. *Scientific Reports*. 15. DOI: 10.1038/s41598-025-15723-0
7. Liébana Rísquez E. (2016). Otros puntos notables de triángulos. TFM. *Universidad de Granada*.
8. Wang, Huan, Gao, Bingtuan, Zhao, Dehui, Shen, Huan, & Liu, Chuande. (2025). A grasping configuration planning method inspired by the geometric Fermat point. *Industrial Robot: the international journal of robotics research and application*. DOI: 10.1108/IR-12-2024-0565

9. Maksymova, I. I., & Slobodyaniuk, R. V. (2017). *Osoblyvosti vyznachennia ratsionalnoho polozhennia perevantazhuval'noho punkta. Features of determining the rational position of the transshipment point. In Proceedings of the 11th International Scientific and Practical Conference "Perspektyvy rozvytku budivel'nykh tekhnolohii"* (pp. 43–47). Dnipro.
10. Maksymov, I., Slobodyanyuk, V., & Maksymova, I. (2023). Features of determining the coordinates of the Fermat – Torricelli point for isosceles triangles. *International scientific journal "Internauka"*. № 8 (142). https://doi.org/10.25313/2520-2057-2023-8-8855
11. Maksymov, I. I., Slobodyaniuk, V. K., & Maksymova, I. I. (2023). *Analitychne vyznachennia koordynat tochky Ferma – Torrichelli ta minimalizatsiia transportnoi roboty. Analytical determination of the coordinates of the Fermat – Torricelli point and minimization of transport work*. Scientific Notes of V. I. Vernadsky Taurida National University. Series: Technical Sciences, 34 (73) (3), 1–7.
12. Maksymov, I. I., Kiyanovska, N. M., Slobodyaniuk, V. K., & Maksymova, I. I. (2024). *Analitychne doslidzhennia zadachi Fermat dlia rivnobedrenoho trykutnyka. Analytical study of the Fermat problem for an isosceles triangle.* Science and Technology Today, 5 (33). https://doi.org/10.52058/2786-6025-2024-5(33)-1348-1362

Дата першого надходження рукопису до видання: 21.08.2025
Дата прийнятого до друку рукопису після рецензування: 18.09.2025
Дата публікації: 31.12.2025