

УДК 539.3

DOI <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2025-2-03>

ЕФЕКТИВНИЙ МОДУЛЬ ЗСУВУ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ З ПОРИСТОЮ МАТРИЦЕЮ

Плечун В. В.

*аспірант**Запорізький національний університет**вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна**orcid.org/0000-0002-3810-3916**valeria.gashenko@gmail.com*

Спиця О. Г.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,**доцент кафедри загальної математики**Запорізький національний університет**вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна**orcid.org/0000-0002-7150-7736**spytsa.o.g@gmail.com*

Ключові слова: композиційний матеріал, пориста матриця, трансропне волокно, ефективний модуль зсуву, гомогенізація.

Для математичного моделювання механічної поведінки волокнистих композиційних матеріалів з високою частотою армування використовують процедуру гомогенізації. Це дозволяє представити неоднорідний композиційний матеріал «уявним» гомогенізованим матеріалом, механічні властивості якого описуються ефективними пружними сталими. Для односпрямованого волокнистого композиційного матеріалу гомогенізований матеріал буде мати трансропні властивості із площиною ізотропії, перпендикулярною осі волокон. Для опису такого матеріалу необхідно знати п'ять ефективних пружних сталих. Для знаходження ефективного повздовжнього модуля зсуву застосовано метод представницького об'ємного елемента. Цей метод базується на тому, що із композиційного матеріалу вирізається представницький об'ємний елемент, що містить одне волокно з матрицею, що його оточує. Для цього елемента розв'язуються найпростіші задачі пружності. Для знаходження ефективного повздовжнього модуля зсуву розв'язується дві крайові задачі про повздовжній чистий зсув. Перша задача про сумісне деформування представницького об'ємного елемента, що складається з пористої матриці у формі порожнистого циліндра й ізотропного волокна у формі суцільного циліндра. На межі розділу матеріалу матриці та матеріалу волокна задаються умови неперервності ряду компонентів напружено-деформованого стану. Друга, аналогічна задача про деформування представницького об'ємного елемента гомогенізованого композиційного матеріалу у формі суцільного циліндра. Ефективний повздовжній модуль зсуву знаходиться з умови рівності осьових переміщень для будь-якої точки зовнішньої циліндричної поверхні в обох задачах. У результаті ефективний повздовжній модуль зсуву композиційного матеріалу є функцією пружних сталих матеріалу матриці та матеріалу волокна, пористості матриці й об'ємної частки волокна в композиті. За допомогою отриманої залежності проаналізовано залежність величини ефективного повздовжнього модуля зсуву від величини показників пористості матриці й об'ємної частки волокна в композиційному матеріалі.

EFFECTIVE SHEAR MODULUS OF FIBROUS COMPOSITE MATERIAL WITH POROUS MATRIX

Plechn V. V.

*Postgraduate Student
Zaporizhzhia National University
Universytetska str., 66 Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-3810-3916
valeria.gashenko@gmail.com*

Spytsia O. G.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of General Mathematics
Zaporizhzhia National University
Universytetska str., 66 Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-7150-7736
spytsa.o.g@gmail.com*

Key words: *composite material,
porous matrix, transtropic
fiber, effective shear modulus,
homogenization.*

The homogenization procedure is used for mathematical modeling of the mechanical behavior of fibrous composite materials with a high reinforcement frequency. This allows the representation of a heterogeneous composite material by an “imaginary” homogenized material, the mechanical properties of which are described by effective elastic constants. For a unidirectional fibrous composite material, the homogenized material will have transtropic properties with an isotropy plane perpendicular to the fiber axis. To describe such a material, it is necessary to know five effective elastic constants. The representative volume element method was applied to find the effective longitudinal shear modulus. This method is based on the fact that a representative volume element containing one fiber with its surrounding matrix is cut from the composite material. The simplest elasticity problems are solved for this element. To find the effective longitudinal shear modulus, two boundary value problems are solved for longitudinal pure shear. The first problem is about the joint deformation of a representative volume element consisting of a porous matrix in the form of a hollow cylinder and an isotropic fiber in the form of a solid cylinder. At the interface between the matrix material and the fiber material, the conditions of continuity of a number of components of the stress-strain state are set. The second, similar problem is about the deformation of a representative volume element of a homogenized composite material in the form of a solid cylinder. The effective longitudinal shear modulus is found from the condition of equality of axial displacements for any point of the outer cylindrical surface in both problems. As a result, the effective longitudinal shear modulus of the composite material is a function of the elastic constants of the matrix material and the fiber material, the porosity of the matrix, and the volume fraction of the fiber in the composite. Using the obtained dependence, the dependence of the effective longitudinal shear modulus on the matrix porosity and fiber volume fraction in the composite material was analyzed.

Вступ. Посилення вимог до сучасних пристроїв, машин і механізмів приводить до необхідності вдосконалення конструкційних матеріалів для їх виробництва. Одними з найбільш перспективних видів матеріалів є композиційні матеріали, які складаються із двох і більше ком-

понентів. Варіювання видами матеріалів компонентів, їх часткою в композиті дає змогу управляти властивостями матеріалу, що створюється. Для прогнозування властивостей майбутнього композиційного матеріалу на макрорівні та для їх моделювання під час розрахунків конструкцій

постає потреба у створенні математичних моделей для опису механічної поведінки. Беручи до уваги, що для створення композитів використовують значну кількість армувальних елементів, урахувати кожний із них у цих моделях дуже складно. Тому популярними є гомогенізовані моделі неоднорідних матеріалів, тобто коли композиційний матеріал представляється уявним однорідним, але таким, щоб його механічна поведінка максимально збігалась із поведінкою вихідного матеріалу. Механічні характеристики зазначених уявних матеріалів називають ефективними.

Визначення ефективних механічних характеристик є складним завданням і потребує максимального врахування особливостей механічних властивостей компонентів композиту та специфіки взаємодії цих компонентів у неоднорідному матеріалі. Якщо розглядати односпрямовані волокнисті композиційні матеріали, то гомогенізований матеріал, що їх представляє, доцільно вважати транстропним, із площиною ізоотропії, перпендикулярною осі волокон. Щоб повною мірою описати механічну поведінку транстропного матеріалу, необхідно визначити п'ять ефективних пружних сталей. **Огляд літератури.** Розв'язанню таких задач присвячена робота [3], у якій визначено ефективні в'язкопружні характеристики за поведінкою деформування односпрямованого волокнистого композиту методом представницького об'ємного елемента. Продовженням цієї роботи є стаття [7], де знайдено аналогічні в'язкопружні характеристики композиційного матеріалу, але закон стану матеріалу матриці на основі спадкової теорії Больцмана – Вольтерри описує релаксацію модуля зсуву, на відміну від роботи [3], де він застосовувався до модуля пружності матеріалу матриці.

У праці [9] визначаються ефективні пружні властивості композиту, армованого довгими волокнами, за наявності поперечної ізоотропії матеріалу. Ефективні пружні характеристики отримані методом представницького об'ємного елемента для двох схем армування волокнами (гексагонального та квадратного). Проаналізовано вплив об'ємної частки та жорсткості міжфазного середовища на ефективні механічні властивості композиту.

Стаття [10] присвячена моделюванню ефективних пружних і в'язкопружних властивостей композиційних матеріалів, армованих короткими волокнами. Дослідження проводилось для математичних моделей представницьких об'ємних елементів матеріалу за допомогою методу скінченних елементів.

У монографії [5] методом представницького об'ємного елемента досліджено ефективні механічні характеристики односпрямованого компо-

зиційного матеріалу із транстропними порожнистими волокнами.

Робота [6] присвячена визначенню пружних механічних сталей композиційного матеріалу за наявності пористого перехідного шару між матеріалом матриці та матеріалом волокна шляхом дворівневої гомогенізації спочатку включення та пористого шару, а потім – отриманого гомогенізованого матеріалу та матриці.

Метод представницького об'ємного елемента використано в роботі [4] для знаходження аналітичних співвідношень для ефективних поздовжнього модуля пружності та коефіцієнта Пуассона волокнистого композиту із транстропного волокна й ізоотропної пористої матриці.

Метою дослідження є визначення ефективного поздовжнього модуля зсуву для односпрямованого волокнистого композиційного матеріалу із пористою матрицею та транстропним волокном.

Результати. Розв'язання задачі про поздовжній зсув методом представницького об'ємного елемента. Для знаходження аналітичного виразу для ефективного поздовжнього модуля зсуву скористаємося методом представницького об'ємного елемента. Виокремимо із композиту гексагональну комірку, що складається із циліндричного волокна радіуса a та матриці, що його оточує. Апроксимуємо зовнішню, гексагональну, поверхню комірки колом радіуса b так, щоб об'єм матеріалу матриці не змінився (рис. 1).

Тоді, маючи на увазі, що довжина як суцільного, та і порожнистого циліндра є нескінченною, для об'ємної частки волокна в композиті будемо мати:

$$f = \frac{\pi a^2}{\pi b^2} = \frac{a^2}{b^2}. \quad (1)$$

Задача про чистий поздовжній зсув (рис. 2) для циліндричного тіла із транстропними властивостями розглянута в роботі [1].

За деформування такого виду значна кількість компонентів напружено-деформований стану будуть дорівнювати нулю:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0;$$

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{r\theta} = 0.$$

Інші компоненти в загальному виді можна записати так:

$$\sigma_{zr} = \sigma_{zr}(r, \theta), \sigma_{\theta z} = \sigma_{\theta z}(r, \theta), \gamma_{zr} = \gamma_{zr}(r, \theta), \gamma_{\theta z} = \gamma_{\theta z}(r, \theta).$$

Для нескінченної циліндричної області в моделюванні чистого поздовжнього зсуву до зовнішньої циліндричної поверхні прикладається таке навантаження:

$$\sigma_{zr}(b, \theta) = \sigma_0 \cos \theta. \quad (2)$$

З урахуванням викладених особливостей деформування циліндричної області за чистого

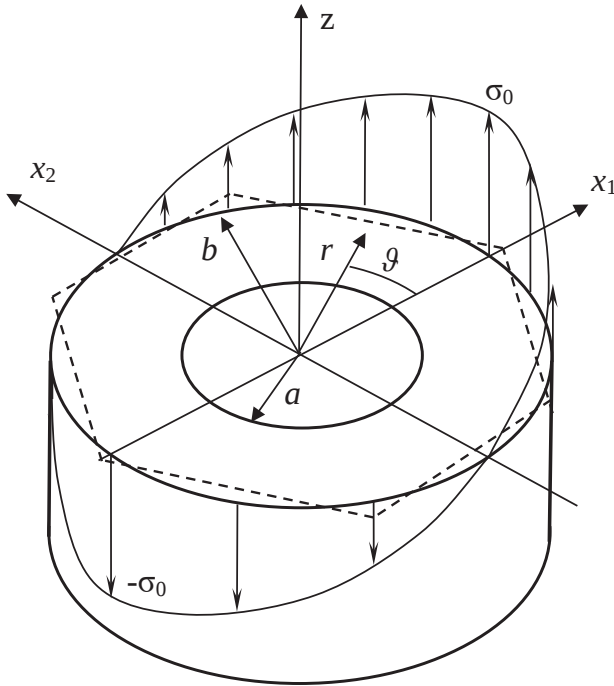


Рис. 1. Розподіл зовнішніх навантажень на межі кільця за поздовжнього зсуву

поздовжнього зсуву два із трьох рівнянь рівноваги перетворюються на тотожні рівності, залишиться лише одне рівняння в напруженнях:

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{zr}}{r} = 0.$$

У переміщеннях це рівняння рівноваги виглядатиме так:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} = 0. \quad (3)$$

Розв'язок цього рівняння відомий:

$$u_z(r, \theta) = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \cos \theta. \quad (4)$$

Скориставшись залежностями між переміщеннями та деформаціями, можемо визначити співвідношення для кутів зсуву:

$$\begin{aligned} \gamma_{\theta z}(r, \theta) &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = - \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right) \sin \theta; \\ \gamma_{zr}(r, \theta) &= \frac{\partial u_z}{\partial r} = \left(C_1 - \frac{C_2}{r^2} \right) \cos \theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Знаючи деформації і скориставшись законом Гука для трансропного матеріалу, будемо мати:

$$\begin{aligned} \sigma_{z\theta}(r, \theta) &= -G_{12} \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right) \sin \theta; \\ \sigma_{zr}(r, \theta) &= G_{12} \left(C_1 - \frac{C_2}{r^2} \right) \cos \theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Тепер, маючи загальні співвідношення для чистого поздовжнього зсуву для трансропного тіла, розв'яжемо задачу про сумісний поздовжній зсув трансропного волокна, що моделю-

ється суцільним циліндром ($0 \leq r \leq a$), та пористої ізотропної матриці, що моделюється порожнистим циліндром ($a \leq r \leq b$).

Для моделювання поздовжнього зсуву представницького об'ємного елемента необхідно визначити пружні характеристики пористої матриці, тому скористаємося варіаційним методом Хашина – Штрикмана [8] для випадкового просторового розподілення пор, опишемо ефективний модуль зсуву таким співвідношенням:

$$\frac{G(p)}{G(0)} = \left(1 + \frac{2}{3}(1-\rho) \left(\frac{10G(0)}{9K(0)-G(0)} \right) \right)^{-1}, \quad (7)$$

де $K(0), G(0)$ – об'ємний модуль пружності та модуль зсуву матеріалу матриці пористого матеріалу, $G(p)$ – модуль зсуву пористого матеріалу, ρ – відносна щільність пористого матеріалу ($p = 1 - \rho$ – пористість матеріалу).

Зі співвідношень (7) маємо вираз для ефективного модуля зсуву матриці композиційного матеріалу:

$$G^* = \frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho}, \quad (8)$$

де $G^* = G(p)$, $K_0^* = K(0)$, $G_0^* = G(0)$.

Тоді, з урахуванням (4) – (6) та (2), для пористої ізотропної матриці будемо мати:

$$u_z^*(r, \theta) = \left(Ar + \frac{B}{r} \right) \cos \theta; \quad (9)$$

$$\gamma_{\theta z}^*(r, \theta) = - \left(A + \frac{B}{r^2} \right) \sin \theta; \gamma_{zr}^*(r, \theta) = \left(A - \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta; \quad (10)$$

$$\sigma_{z\theta}^*(r, \theta) = - \frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} \left(A + \frac{B}{r^2} \right) \sin \theta;$$

$$\sigma_{zr}^*(r, \theta) = \frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} \left(A - \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta, \quad (11)$$

тут A, B – сталі, що визначаються із крайових умов.

А враховуючи (4) – (6), для трансропного волокна з урахуванням скінченності переміщень за $r = 0$, матимемо:

$$u_z^{\circ}(r, \theta) = C r \cos \theta; \quad (12)$$

$$\gamma_{\theta z}^{\circ}(\theta) = -C \sin \theta; \gamma_{zr}^{\circ}(\theta) = C \cos \theta; \quad (13)$$

$$\sigma_{z\theta}^{\circ}(\theta) = -G_{12}^{\circ} C \sin \theta; \sigma_{zr}^{\circ}(\theta) = G_{12}^{\circ} C \cos \theta, \quad (14)$$

де C – стала, що визначається із крайових умов.

Для знаходження сталих A, B, C у співвідношеннях (9) – (14) скористаємося крайовою умовою (2) та умовами неперервності на межі розділу матеріалу волокна й матеріалу матриці:

$$\sigma_{zr}^{\circ}(\theta) = \sigma_{zr}^*(a, \theta); \quad (15)$$

$$u_z^{\circ}(a, \theta) = u_z^*(a, \theta). \quad (16)$$

Скориставшись (2), маємо:

$$A = \sigma_0 \frac{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho}{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*} + \frac{B}{b^2}. \quad (17)$$

З урахуванням (17) і (16), отримуємо:

$$C = \sigma_0 \frac{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho}{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*} + B \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \right). \quad (18)$$

Скориставшись (15), з урахуванням співвідношень (17) та (18), матимемо:

$$B = \frac{\sigma_0 a^2 \left(G_{12}^* - \frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} \right)}{\frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} \left((f-1) - G_{12}^* (f+1) \right)}. \quad (19)$$

Тоді з (18) отримаємо:

$$C = \frac{-2\sigma_0}{\frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} (f-1) - G_{12}^* (f+1)}; \quad (20)$$

$$A = \frac{-\sigma_0 \left(\frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} + G_{12}^* \right)}{\frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} \left((f-1) - G_{12}^* (f+1) \right)}. \quad (21)$$

Беручи до уваги (19) і (21), запишемо основні співвідношення, що описують напружено-деформований стан матриці за чистого поздовжнього зсуву:

$$\begin{aligned} u_z^*(r, \theta) = & \frac{\sigma_0}{\frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} \left((f-1) - G_{12}^* (f+1) \right)} \times \\ & \times \left(- \left(\frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} + G_{12}^* \right) r + \right. \\ & \left. + \frac{a^2 \left(G_{12}^* - \frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} \right)}{r} \right) \cos \theta; \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\theta z}^*(r, \theta) = & \frac{\sigma_0}{\frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} \left((f-1) - G_{12}^* (f+1) \right)} \times \\ & \times \left(\frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} + G_{12}^* - \right. \\ & \left. - \frac{a^2 \left(G_{12}^* - \frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} \right)}{r^2} \right) \sin \theta; \quad (23) \end{aligned}$$

$$\gamma_{zr}^*(r, \theta) =$$

$$\begin{aligned} = & \frac{-\sigma_0}{\frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} \left((f-1) - G_{12}^* (f+1) \right)} \times \\ & \times \left(\frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} + G_{12}^* + \right. \\ & \left. + \frac{a^2 \left(G_{12}^* - \frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} \right)}{r^2} \right) \cos \theta; \quad (24) \end{aligned}$$

$$\sigma_{\theta z}^*(r, \theta) =$$

$$\begin{aligned} = & \frac{\sigma_0}{\frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} \left((f-1) - G_{12}^* (f+1) \right)} \times \\ & \times \left(\frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} + G_{12}^* - \right. \\ & \left. - \frac{a^2 \left(G_{12}^* - \frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} \right)}{r^2} \right) \sin \theta; \quad (25) \end{aligned}$$

$$\sigma_{zr}^*(r, \theta) =$$

$$\begin{aligned} = & \frac{-\sigma_0}{\frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} \left((f-1) - G_{12}^* (f+1) \right)} \times \\ & \times \left(\frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} + G_{12}^* + \right. \\ & \left. + \frac{a^2 \left(G_{12}^* - \frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} \right)}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (26) \end{aligned}$$

Скориставшись знайденим співвідношенням (20) для C , отримаємо вирази, що описують напружено-деформований стан волокна у предствницькій об'ємній комірниці за сумісного поздовжнього зсуву:

$$u_z^*(r, \theta) = \frac{-2\sigma_0 r \cos \theta}{\frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} (f-1) - G_{12}^* (f+1)}; \quad (27)$$

$$\gamma_{\theta z}^*(\theta) = \frac{2\sigma_0 \sin \theta}{\frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} (f-1) - G_{12}^* (f+1)}; \quad (28)$$

$$\gamma_{zr}^*(\theta) = \frac{-2\sigma_0 \cos \theta}{\frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} (f-1) - G_{12}^* (f+1)}; \quad (29)$$

$$\sigma_{\theta z}^*(\theta) = \frac{-2\sigma_0 G_{12}^* \cos \theta}{\frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} (f-1) - G_{12}^* (f+1)}; \quad (30)$$

$$\sigma_{z\theta}^*(\theta) = \frac{2\sigma_0 G_{12}^* \sin \theta}{\frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*\rho} (f-1) - G_{12}^* (f+1)}. \quad (31)$$

Тепер визначимо напружено-деформований стан представницького об'ємного елемента гомогенізованого композиційного матеріалу в тих самих умовах чистого поздовжнього зсуву. Для цього елементарну комірку представимо як суцільний нескінченний циліндр радіуса b , а крайові умови візьмемо незмінними – у вигляді (2). Тоді, скориставшись загальними співвідношеннями (4) – (6), знайдемо напружено-деформований стан елементарної представницької комірки гомогенізованого композиційного матеріалу:

$$u_z(r, \theta) = \tilde{A} r \cos \theta; \quad (32)$$

$$\gamma_{\theta z}(r, \theta) = -\tilde{A} \sin \theta; \quad (33)$$

$$\gamma_{rz}(r, \theta) = \tilde{A} \cos \theta; \quad (34)$$

$$\sigma_{rz}(r, \theta) = \tilde{A} G_{12} \cos \theta; \quad (35)$$

$$\sigma_{z\theta}(r, \theta) = -\tilde{A} G_{12} \sin \theta. \quad (36)$$

Скориставшись крайовою умовою (2), знайдемо сталу $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \frac{\sigma_0}{G_{12}}.$$

Тоді співвідношення (32) – (36) виглядатимуть так:

$$u_z(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}} r \cos \theta; \quad (38)$$

$$\gamma_{\theta z}(r, \theta) = -\frac{\sigma_0}{G_{12}} \sin \theta; \quad (39)$$

$$\gamma_{rz}(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}} \cos \theta; \quad (40)$$

$$\sigma_{rz}(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}} G_{12} \cos \theta; \quad (41)$$

$$\sigma_{z\theta}(r, \theta) = -\frac{\sigma_0}{G_{12}} G_{12} \sin \theta. \quad (42)$$

Тобто в результаті розв'язання двох крайових задач про чистий поздовжній зсув визначено напружено-деформований стан двох представницьких об'ємних комірок – сумісного деформування для комірки з матеріалу матриці та матеріалу волокна й комірки з гомогенізованого матеріалу. Для знаходження ефективного модуля зсуву скористаємося, як умовою узгодження, рівністю осевих переміщень у будь-якій точці зовнішньої межі для обох представницьких комірок:

$$u_z(b, \theta) = u_z^*(b, \theta). \quad (43)$$

З урахуванням рівності (43), матимемо:

$$G_{12} = \frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*p} \left(\frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*p} (1-f) + G_{12}^*(f+1) \right) = \frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{G_{12}^*(1-f) + \frac{3(9K_0^* - G_0^*)G_0^*}{27K_0^* + 17G_0^* - 20G_0^*p} (f+1)}. \quad (44)$$

Аналіз чисельних результатів. Обчислимо ефективний поздовжній модуль зсуву волокнистого композиційного матеріалу з пористою матрицею за формулою (44). Проаналізуємо зміну його величини залежно від пористості матриці й об'ємного вмісту волокна в композиті. Як матеріал матриці візьмемо алюміній, а як матеріал волокна – бор. Для матриці пористого матеріалу будемо мати такі механічні сталі [2]: модуль пружності $E^* = 70$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu^* = 0,32$, для матеріалу ізотропного волокна – $E^* = 416,5$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu^* = 0,2$. Для об'ємного модуля пружності та модуля зсуву матриці пористого матеріалу будемо, відповідно, мати $K_0^* = E^* / (3(1-2\nu^*))$; $G_0^* = E^* / (2(1+\nu^*))$. Для модуля зсуву матеріалу волокна – $G_{12}^* = G^* = E^* / (2(1+\nu^*))$. Результати чисельних розрахунків представлені на рисунку 2.

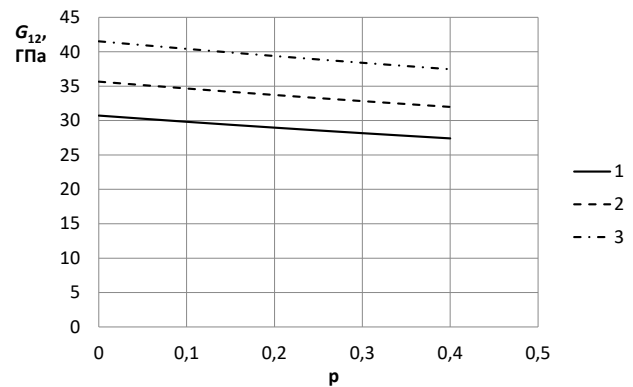


Рис. 2. Залежність ефективного поздовжнього модуля зсуву G_{12} від пористості матриці p (формула (44)) та від об'ємного вмісту корда: 1 – $f = 0,1$; 2 – $f = 0,2$; 3 – $f = 0,3$

Зазначимо, що збільшення об'ємного вмісту волокна приводить до збільшення ефективного поздовжнього модуля зсуву композиційного матеріалу, що зумовлено більш високою жорсткістю матеріалу волокна. Наявність пор, навпаки, зменшує величину ефективного поздовжнього модуля зсуву, ця залежність близька до лінійної. Так, збільшення пористості від 0 до 0,4 зменшує значення модуля зсуву композиту на 10–15%.

Висновки. За допомогою методу представницького об'ємного елемента знайдено аналітичний вираз для ефективного поздовжнього модуля зсуву композиційного матеріалу із пористої матриці та транспортного волокна, який є функцією пружних сталей матеріалу матриці та матеріалу волокна, пористості матриці й об'ємної частки волокна в композиті. За допомогою отриманої формули проаналізовано вплив величини пористості матриці й об'ємної частки волокна на значення ефективного поздовжнього модуля зсуву композиційного матеріалу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гребенюк С. М., Гоменюк С. І., Клименко М. І. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2019. 350 с.
2. Композиционные материалы: справочник / под ред. Д. М. Карпиноса. Киев : Наукова думка, 1985. 592 с.
3. Пожуєв В. І., Артеменко А. О., Клименко М. І., Скрипник К. В. Гомогенізація в'язкопружного композиту в разі повздовжнього розтягу. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2022. Вип. 2. С. 35–42. URL: <https://journalsofznu.zp.ua/index.php/compscience/article/view/3145/2986>
4. Пожуєв В. І., Плечун В. В., Спиця О. Г., Кончинська Є. О. Ефективні пружні сталі волокнистого композиту із пористою матрицею при повздовжньому розтягненні. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2022. Вип. 2. С. 27–34. <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2022-2-03>
5. Столярова А. В. Ефективні механічні характеристики композиційних матеріалів із транстропними порожнистими волокнами : монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2021. 104 с.
6. Хорошун Л. П., Левчук О. І. Эффективные упругие свойства зернистых стохастических композитов при несовершенной адгезии. *Доповіді Національної академії наук України*. 2017. Вип. 12. С. 33–44. URL: <http://jnas.nbuv.gov.ua/article/UJRN-0000867454>
7. Bulat A. F., Dyrda V. I., Grebenyuk S. N., Klymenko M. I. Determination of Effective Characteristics of a Fibrous Composite with Account of Viscoelastic Deformation of its Components. *Strength of Materials*. 2020. Vol. 52. № 5. P. 691–699. URL: <https://www.researchgate.net/publication/347288115>
8. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1963. Vol. 11. № 2. P. 127–140.
9. Xu Y., Du S., Xiao J., Zhao Q. Evaluation of the effective elastic properties of long fiber reinforced composites with interphases. *Computational Materials Science*. 2012. № 61. С. 34–41.
10. Yang P., Chen Y., Guo Z., Hu N., Sun W. Modeling the effective elastic and viscoelastic properties of randomly distributed short fiber reinforced composites. *Composites Communications*. 2022. № 35. P. 78–84.

REFERENCES

1. Grebenyuk, S. M., Gomenyuk, S. I., & Klimenko, M. I. (2019). Napruzhenno-deformovaniy stan prostorovikh konstruktsey na osnovi gomogenizatsii voloknistikh kompozitiv [Stress-strain state of spatial structures based on homogenization of fibrous composites]. Kherson: Helvetica Publishing House. (in Ukrainian)
2. Kompozitsionnyye materialy: spravochnik [Composite materials: reference book] / ed. Karpinos, D. M. (1985). Kyiv: Naukova dumka. (in Russian).
3. Pozhuev, V. I., Artemenko, A. O., Klymenko, M. I., Scrypnyk, K. V. (2022). Homohenizatsiya v'yazkopruzhnogo kompozyta u razi povzdovzhn'oho roztyahu [Homogenization of a viscoelastic composite in the case of longitudinal tension]. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2, 35–42. <https://journalsofznu.zp.ua/index.php/compscience/article/view/3145/2986> (in Ukrainian).
4. Pozhuev, V. I., Plechun, V. V., Spytzia, O. G., Konchynska, E. O. (2022). Efektyvni pruzhni stali voloknistoho kompozytu iz porystoyu matrytseyu pry povzdovzhn'omu roztyahnenni [Effective Elastic Constants of a Fiber Composite with Porous Matrix in Longitudinal Stretch]. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2, 27–34. <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2022-2-03> (in Ukrainian).
5. Stolyarova, A. V. (2021). Efektyvni mekhanichni kharakterystyky kompozytsiynykh materialiv iz transtropnymi porozhnystymy voloknamy: monohrafiya [Effective mechanical characteristics of composite materials with transtropical hollow fibers: monograph]. Kherson: Helvetica Publishing House. (in Ukrainian).
6. Khoroshun, L. P., Levchuk, O. I. (2017). Effektivnyye uprugie svoystva zernistyykh stokhasticheskikh kompozitov pri nesovershennoy adgezii [Effective elastic properties of granular stochastic composites with imperfect adhesion]. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*. 12, 33–44. <http://jnas.nbuv.gov.ua/article/UJRN-0000867454> (in Russian).
7. Bulat, A. F., Dyrda, V. I., Grebenyuk, S. N., & Klymenko, M. I. (2020). Determination of Effective Characteristics of a Fibrous Composite with Account of Viscoelastic Deformation of its Components. *Strength of Materials*. 52 (5), 691–699. <https://www.researchgate.net/publication/347288115>
8. Hashin, Z., & Shtrikman, S. (1963). A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 11 (2), 127–140.
9. Xu, Y., Du, S., Xiao, J., & Zhao, Q. (2012). Evaluation of the effective elastic properties of long fiber reinforced composites with interphases. *Computational Materials Science*. 61, 34–41.
10. Yang, P., Chen, Y., Guo, Z., Hu, N., & Sun, W. (2022). Modeling the effective elastic and viscoelastic properties of randomly distributed short fiber reinforced composites. *Composites Communications*. 35, 78–84.

Дата першого надходження рукопису до видання: 29.08.2025

Дата прийнятого до друку рукопису після рецензування: 26.09.2025

Дата публікації: 31.12.2025