

ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ТРЬОХЕЛЕМЕНТНОЇ ПРИЗМАТИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З РІЗНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТЕПЛОВІДДАЧІ

Хапко Б. С.

кандидат фізико-математичних наук,

старший науковий співробітник

Інститут прикладних проблем механіки і математики

імені Я. С. Підстригача Національної академії наук України

вул. Наукова, 3-Б, Львів, Україна

orcid.org/0009-0003-3418-6835

bogdan.khapko@gmail.com

Ключові слова:

*теплопровідність, оболонка,
злами, кусково-постійні
коефіцієнти тепловіддачі,
прогин, зусилля, моменти.*

Досліджено термонапружений стан у тонкій пологій призматичній оболонці, складеній із трьох плоских елементів, з урахуванням конвективного теплообміну за різної температури навколишнього середовища на кожній із двох лицевих поверхонь оболонки. Коефіцієнти тепловіддачі на лицевих поверхнях кожного із трьох елементів оболонки є різними. Запропонована модель опису температурного поля у призматичній оболонці, зумовленого різницею температур навколишнього середовища на лицевих поверхнях. Задачу теплопровідності для оболонки зведено до розв'язування системи інтегральних рівнянь з інтегральними операторами Вольтерри та Фредгольма другого роду для функцій, що є лінійними комбінаціями температурних характеристик (середня температура та температурний момент). За допомогою методу квадратурних формул побудовано числову схему розв'язування інтегральних рівнянь. Зокрема, квадратурні формули Сімпсона використовуються для визначення інтегралів, а система інтегральних рівнянь з інтегральними операторами Вольтерри та Фредгольма другого роду зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Функцію напружень і прогин оболонки знайдено за допомогою скінченних інтегральних перетворень Фур'є. На краях оболонки зі зламами підтримується жорсткими вертикальними діафрагмами. Для визначення термонапруженого стану оболонки прийнято, що краї, на які виходять злами, теплоізовані, а температура інших торців дорівнює нулю. Наведено результати числового аналізу розподілу середньої температури, температурного моменту, прогину, моментів і зусиль за різних значень коефіцієнта тепловіддачі на верхніх лицевих поверхнях першого й третього елементів оболонки. Виявлено, що зменшення коефіцієнта тепловіддачі на крайніх елементах приводить до спадання середньої температури та температурного моменту оболонки зі зламами, згинних моментів і абсолютних величин прогину й зусиль зі зміщенням максимальної їх величини в бік елемента, де коефіцієнти тепловіддачі не змінювали.

THERMOSTRESSED STATE OF A THREE-ELEMENT PRISMATIC SHELL WITH DIFFERENT HEAT-TRANSFER COEFFICIENTS

Khapko B. S.

Ph. D. in Physics and Maths, Senior Research Fellow

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine

Naukova str., 3-B, Lviv, Ukraine

orcid.org/0009-0003-3418-6835

bogdan.khapko@gmail.com

Key words: *heat conduction, shell, folds, piecewise-constant heat transfer coefficients, deflection, internal forces, moments.*

The problem of determining the thermostressed state in a thin shallow prismatic shell composed of three flat elements is considered, taking into account convective heat exchange at different ambient temperatures on each of the two face surfaces of the shell. The heat-transfer coefficients at the face surfaces of each of the three shell elements are assumed to be different. A model is proposed for describing the temperature field in the prismatic shell, caused by the difference in ambient temperatures on the face surfaces. The heat conduction boundary value problem is reduced to a system of integral equations with Volterra and Fredholm integral operators of the second kind for functions that are linear combinations of the temperature characteristics (the mean temperature and the temperature moment). A numerical scheme for solving the system of integral equations is constructed using the quadrature method. In particular, Simpson's quadrature formulae are used to evaluate the integrals, reducing the system of integral equations with Volterra and Fredholm operators to a system of linear algebraic equations. The finite Fourier integral transforms are employed to determine the stress function and the deflection of the shell. The shell with folds is supported by rigid vertical diaphragms at its edges. The edges containing the folds of the mid-surface are assumed to be thermally insulated, while the temperature of the surrounding environment is taken as zero at the other edges. Numerical results for the distributions of the mean temperature, temperature moment, deflection, bending moments, and internal forces are presented for various values of the heat-transfer coefficients at the upper face surfaces of the first and third shell elements. It is revealed that a decrease in the heat-transfer coefficient in the outer elements leads to a reduction in the mean temperature, temperature moment, bending moments, absolute values of deflection and internal forces, and causes the location of their maximum values to shift toward the fold where the heat-transfer coefficient remains unchanged.

Вступ. Злами поверхонь тонкостінних елементів конструкцій істотно впливають на розподіл напружень і температури в тілі та можуть зумовити збільшення його загальної жорсткості. Тонкостінні оболонки з нерегулярними серединними поверхнями знайшли застосування в авіа- і ракетобудуванні, залізничному транспорті, будівельній індустрії, машинобудуванні й інших галузях техніки, тому завдання з їх дослідження є актуальними.

Концентрацію напружень в тонкостінних елементах конструкцій з геометричними неоднорідностями серединної поверхні у формі зламів проаналізовано у праці [1]. Тут злам змодельований розподіленням уздовж нього фіктивним нормальним навантаженням, пропорційним мембранному

зусиллю. На основі рівнянь теорії пологих оболонок і розвинення фіктивного навантаження в ряд Фур'є отримані вирази для прогину та функції зусиль. У праці [2] досліджено напружений стан оболонки, яка складена із двох півбезмежних пластин, спряжених під прямим кутом. Розрахунок зведено до задачі про сумісний плоский і згинний стан нескінченної пластинки з дефектом, що відповідає лінії спряження, при переході через який зусилля або переміщення мають стрибки. У праці [3] визначено власні частоти коливань коробчастих оболонок методом однорідних розв'язків. Методом скінченних елементів досліджено власні частоти й форми коливання сталевोї пологої оболонки зі зламами [4] та деформування,

стійкість і коливання пружних оболонок ступінчато-змінної товщини [5]. Прогин оболонок з недовсконалостями типу вм'ятини досліджено у праці [6]. Запропоновано аналітично-чисельний підхід до розв'язання задач про стійкість складених дискретно підкріплених проміжними шпангоутами тришарової оболонкової конструкції конус – циліндр [7] і оболонкової конструкції з різними знаками Гауссової кривини [8] за статичного комбінованого навантаження зовнішнім тиском, осьовими зусиллями й крутильним моментом.

Уперше апарат узагальнених функцій для опису зламу оболонки застосовано у праці [9], де кривину поверхні аналітично виражено через δ -функцію, помножену на кут зламу. Це дало змогу описати напружено-деформований стан такої оболонки частково виродженими диференціальними рівняннями.

Перелічені вище праці стосуються дослідження напружено-деформованого стану оболонок зі зламами серединної поверхні за силових навантажень. Водночас багато складених оболонкових конструкцій зі зламами в енергетиці, ракетно-космічній техніці, на транспорті й інших галузях функціонують за дії високих температур, які зумовлюють істотний вплив на їхній напружено-деформований стан. Проте для його дослідження насамперед потрібно розвинути метод розв'язування рівнянь теплопровідності для оболонок зі зламами, а далі за отриманим полем температури визначити термічні напруження і деформації. За допомогою методу узагальнених функцій автор запропонував математичну модель температурного поля і зумовленого ним термонапруженого стану пологої сферичної оболонки, складеної з дев'яти квадратних елементів [10], та пологої призматичної оболонки, складеної із двох прямокутних елементів [11], за умови, що коефіцієнти тепловіддачі з лицевих поверхонь однакові. У праці [12] цей підхід узагальнено стосовно термонапруженого стану двохелементної призматичної оболонки за різних коефіцієнтів тепловіддачі з лицевих поверхонь. У праці [13] отримано рівняння теплопровідності для тонких пологих оболонок зі зламами вздовж координатних ліній і запропоновано спосіб зведення їх до системи інтегральних рівнянь. У працях [14–18] досліджено вплив сталих і кусково-сталих коефіцієнтів тепловіддачі на лицевих поверхнях на напружено-деформований стан пластинок і пологих оболонок без зламів.

Ця стаття присвячена дослідженню температурного поля і термонапруженого стану призматичної пологої оболонки, складеної із трьох плоских елементів, за теплового навантаження з різними коефіцієнтами тепловіддачі на лицевих поверхнях кожного з елементів. Запропоновано

спосіб зведення крайової задачі теплопровідності для оболонки зі зламами до системи інтегральних рівнянь з інтегральними операторами Вольтерри та Фредгольма другого роду щодо функцій, що є лінійними комбінаціями інтегральних характеристик температури. Використали теорію узагальнених функцій і методи варіації сталої та кінцевих інтегральних перетворень Фур'є для розрахунку термонапруженого стану розглядуваної оболонки як єдиного цілого. Проаналізовано залежність температури, прогину та згинних моментів на лініях зламів від зменшення коефіцієнта тепловіддачі на крайніх елементах верхньої лицевой поверхні оболонки.

Результати. Задача теплопровідності. Розглянемо тонку пологу оболонку зі сторонами r та d_1 , яка складена із трьох плоских елементів (рис. 1). Коефіцієнти теплопровідності всіх елементів однакові. Уздовж прямих у точках a та c оболонка має злами. Відповідно до теорії про пологі оболонки кути зламів θ_j ($j=1,2$) приймаємо малими. На лицевих поверхнях $z=\pm h$ пластинкових елементів відбувається конвективний теплообмін із середовищем температури $t_c^\pm$ за різних коефіцієнтів тепловіддачі на кожному з них:

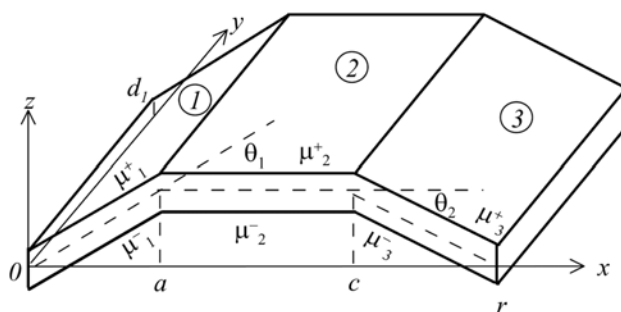


Рис. 1. Розрахункова схема оболонки

$$\mu^+(x) = \mu_1^+ + (\mu_2^+ - \mu_1^+) S_-(x-a) + (\mu_3^+ - \mu_2^+) S_-(x-c);$$

$$\mu^-(x) = \mu_1^- + (\mu_2^- - \mu_1^-) S_-(x-a) + (\mu_3^- - \mu_2^-) S_-(x-c),$$

де $\mu_1^\pm, \mu_2^\pm, \mu_3^\pm$ – коефіцієнти тепловіддачі на кожному з елементів верхньої та нижньої лицевих поверхонь оболонки відповідно; $\gamma=1,2,3$; $S_-(x-a) = \begin{cases} 1, & x \geq a, \\ 0, & x < a \end{cases}$ – функція Гевісайда.

Диференціальні характеристики серединної поверхні пологої оболонки запишемо як [9]: $k = -\frac{1}{2}\theta_1\delta(x-a) - \frac{1}{2}\theta_2\delta(x-c)$, де δ – функція Дірака, k – кривина оболонки. Оболонка на торцях $x=0, r$ обмінюється теплом із зовнішнім середовищем температури t_c^j та коефіцієнтами тепловіддачі $\bar{b}_j$ відповідно, а також теплоізолювана на краях $y=0$ та $y=d_1$. За таких умов температура не залежить від координати y . Згідно з гіпотезою про лінійний за товщиною призматичної оболонки розподіл температури [15] стаціонарне температурне

поле в ній подано у вигляді $t(x, z) = T_1(x) + \frac{z}{h} T_2(x)$, де h – півтовщина оболонки, через інтегральні температурні характеристики – середню температуру $T_1(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t(x, z) dz$ і температурний момент $T_2(x) = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h z t(x, z) dz$, які визначаються із системи диференціальних рівнянь [13, с. 71]:

$$\begin{aligned} \Delta T_1(\eta) - \eta_1^+ (T_1(\eta) - t_1) - \eta_1^- (T_2(\eta) - t_2) &= \frac{1}{2} [\theta_1 \delta(\eta - x_1) + \theta_2 \delta(\eta - x_2)] T_2(\eta) + \\ &+ [(\eta_2^+ - \eta_1^+) (T_1(\eta) - t_1) + (\eta_2^- - \eta_1^-) (T_2(\eta) - t_2)] S_-(\eta - x_1) + \\ &+ [(\eta_3^+ - \eta_2^+) (T_1(\eta) - t_1) + (\eta_3^- - \eta_2^-) (T_2(\eta) - t_2)] S_-(\eta - x_2), \\ \Delta T_2(\eta) - 3(1 + \eta_1^+) (T_2(\eta) - t_2) - 3\eta_1^- (T_1(\eta) - t_1) &= \frac{3}{2} [\theta_1 \delta(\eta - x_1) + \theta_2 \delta(\eta - x_2)] T_1(\eta) + \\ &+ 3 [(\eta_2^+ - \eta_1^+) (T_2(\eta) - t_2) + (\eta_2^- - \eta_1^-) (T_1(\eta) - t_1)] S_-(\eta - x_1) + \\ &+ 3 [(\eta_3^+ - \eta_2^+) (T_2(\eta) - t_2) + (\eta_3^- - \eta_2^-) (T_1(\eta) - t_1)] S_-(\eta - x_2) + 3t_2 \end{aligned} \quad (1)$$

за крайових умов:

$$\begin{aligned} \frac{dT_j(\eta)}{d\eta} - b_j (T_j(\eta) - T_{j1}^c) &= 0, \text{ при } \eta = 0; \\ \frac{dT_j(\eta)}{d\eta} + b_j (T_j(\eta) - T_{j2}^c) &= 0, \eta = l; j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Тут } T_{j1}^c = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t_c^j dz, \quad T_{j2}^c = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h z t_c^j dz, \quad t_{1,2} = (t_c^+ \pm t_c^-) / 2;$$

$$\eta_1^+ = \frac{h(\mu_1^+ + \mu_1^-)}{2}, \quad \eta_1^- = \frac{h(\mu_1^+ - \mu_1^-)}{2}; \quad \Delta = \frac{d^2}{d\eta^2}; \quad \eta = x / h -$$

безрозмірна координата; $x_1 = a / h$; $x_2 = c / h$; $l = r / h$; $b_j = h b_j / \lambda$ – безрозмірні коефіцієнти тепловіддачі на торцях $\eta = 0$ та $\eta = l$ відповідно; λ – коефіцієнт теплопровідності.

Увівши заміни

$$T_1 = \frac{\lambda_2 (F_1 - \lambda_1 F_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} + t_1, \quad T_2 = \frac{\lambda_2 F_2 - F_1}{\lambda_2 - \lambda_1} + t_2, \quad (3)$$

систему (1) та крайові умови (2) запишемо через функції $F_1(\eta), F_2(\eta)$ у вигляді:

$$\begin{aligned} \Delta F_1 - a_1^2 F_1 &= p_1(\eta) + \frac{1}{2} [\theta_1 \delta(\eta - x_1) + \theta_2 \delta(\eta - x_2)] \left(\frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} F_2 - \frac{2}{\lambda_2 - \lambda_1} F_1 + t_2 + 3\lambda_1 t_1 \right) + 3t_1 \lambda_1 \\ \Delta F_2 - a_2^2 F_2 &= p_2(\eta) + \frac{1}{2} [\theta_1 \delta(\eta - x_1) + \theta_2 \delta(\eta - x_2)] \times \\ &\times \left(\frac{-1 + 3\lambda_2^2}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} F_1 + \frac{2}{\lambda_2 - \lambda_1} F_2 + \frac{t_2}{\lambda_2} + 3t_1 \right) + 3t_2. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_j}{\partial \eta} - b_j (F_j - F_{j1}^c) &= 0, \quad \eta = 0, \\ \frac{\partial F_j}{\partial \eta} + b_j (F_j - F_{j2}^c) &= 0, \quad \eta = l. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{Тут } p_1(\eta) = (d_1^* S_-(\eta - x_1) + \delta_1 S_-(\eta - x_2)) F_1 + (d_2 S_-(\eta - x_1) + \delta_2 S_-(\eta - x_2)) F_2,$$

$$p_2(\eta) = (d_3 S_-(\eta - x_1) + \delta_3 S_-(\eta - x_2)) F_1 + (d_4 S_-(\eta - x_1) + \delta_4 S_-(\eta - x_2)) F_2.$$

Вирази для сталих $d_1^*, d_2, d_3, d_4, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \lambda_{1,2}, a_j^2, F_{1j}^c, F_{2j}^c$ можна знайти у [13, с. 73].

Функції $F_j(\eta)$ у правих частинах отриманих рівнянь (4) уважатимемо відомими. Тоді кожне із цих диференціальних рівнянь розв'язуємо мето-

дом варіації сталої. Урахувавши крайові умови (5), визначимо сталі інтегрування, підставлянням яких у знайдені загальні розв'язки кожного з рівнянь отримаємо систему інтегральних рівнянь з інтегральними операторами Вольтерри та Фредгольма другого роду для визначення невідомих функцій $F_j(\eta)$:

$$\begin{aligned} F_j(\eta) + \left(g_{j0} \frac{e^{a_j \eta}}{g_{j1}} + \frac{e^{-a_j \eta}}{g_{j1}} \right) \left(\int_0^l p_j(s) \text{cha}_j(l-s) ds + \frac{b_j}{a_j} \int_0^l p_j(s) \text{sha}_j(l-s) ds \right) - \\ - \frac{1}{a_j} \int_0^\eta p_j(s) \text{sha}_j(\eta-s) ds = C_j(\eta) + C_{j1}(\eta) F_1(x_1) + C_{j2}(\eta) F_2(x_1) + \\ + R_{j1}(\eta) F_1(x_2) + R_{j2}(\eta) F_2(x_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Позначення

$$C_j(\eta), C_{j1}(\eta), C_{j2}(\eta), R_{j2}(\eta), R_{j2}(\eta), g_{j0}, g_{j1}$$

через їхню громіздкість тут не наведені. Невідомі значення функції на лініях зламів $F_j(x_1), F_j(x_2)$ знаходимо із системи алгебраїчних рівнянь, яку отримуємо, беручи функції $F_j(\eta)$ у рівняннях (5) на лініях зламу $\eta = x_j$. Систему інтегральних рівнянь (5) розв'язуємо чисельно методом квадратурних формул [19]. Тоді зі співвідношень (3) знаходимо середню температуру $T_1(\eta)$ і температурний момент $T_2(\eta)$, необхідні для визначення термонапруженого стану в оболонці.

Термонапружений стан оболонки. Для визначення термонапруженого стану пологої призматичної оболонки зі зламами на лініях $\eta = x_j$ комплексну функцію напружень $\Phi(\eta, \xi)$ подамо через функцію напружень $\phi(\eta, \xi)$ та прогин $w(\eta, \xi)$ у вигляді [15] $\Phi(\eta, \xi) = w(\eta, \xi) + i\phi(\eta, \xi) / E_0$. Уважаємо, що на торцях $\eta = 0$ і $\eta = l$ оболонка вільно оперта на жорсткі вертикальні діафрагми [9] та на них задана нульова температура, для цього у граничних умовах (2) b_j спрямуємо в нескінченність та покладемо $T_{j1}^c = 0$ і $T_{j2}^c = 0, j = 1, 2$. Тоді комплексна функція напружень $\Phi(\eta, \xi)$ визначається із ключового рівняння [12, с. 203]:

$$\left(\frac{d^4}{d\eta^4} + \frac{d^4}{d\eta^2 d\xi^2} + \frac{d^4}{d\xi^4} \right) \Phi - i\sigma^2 h^2 \Delta_k \Phi = -\alpha_i \sigma^2 h^2 \Delta(iT_1 + v_0 T_2), \quad (7)$$

де

$$E_0 = \frac{2Eh}{\sigma^2}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{h} \sqrt{3(1-v^2)}, \quad v_0^2 = \frac{1+v}{3(1-v)},$$

$$\Delta_k = (-\theta_1 \delta(\eta - x_1) - \theta_2 \delta(\eta - x_2)) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2},$$

за крайових умов:

$$\text{за } \eta = 0 \text{ і } \eta = l \quad w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = 0;$$

$$\text{за } \xi = 0 \text{ і } \xi = d \quad w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = 0, \quad (8)$$

де $\xi = y / h$ – безрозмірна координата, $d = d_1 / h$.

Для розв'язання рівняння (7) скористаємося формулами для перетворень Фур'є, задовольнивши крайові умови (8), отримаємо:

$$\bar{\Phi}^* = \frac{\sigma^2 h^2}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \left[\frac{i}{l} \beta_n^2 (\theta \Phi^*(x_1, \beta_n) \sin \alpha_m x_1 + \theta_2 \Phi^*(x_2, \beta_n) \sin \alpha_m x_2) - \alpha_i (i \theta_1 + v_0 \theta_2) \right], \quad (9)$$

$$\text{тут } \bar{\Phi}^*(\alpha_m, \beta_n) = \frac{1}{dl} \int_0^d \int_0^l \varphi(\eta, \xi) \sin \alpha_m \eta \sin \beta_n \xi d\eta d\xi,$$

$$\beta_n = \frac{n\pi}{d}, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{l},$$

$$\Theta_1(\alpha_m, \beta_n) = \frac{1}{d\beta_n} \left((-1)^{n+1} + 1 \right) \left(\frac{1}{l} \int_0^l Y_1(\eta) \sin \alpha_m \eta d\eta + \theta_1 T_2(x_1) \sin \alpha_m x_1 + \theta_2 T_2(x_2) \sin \alpha_m x_2 \right),$$

$$\Theta_2(\alpha_m, \beta_n) = \frac{1}{d\beta_n} \left((-1)^{n+1} + 1 \right) \left(\frac{1}{l} \int_0^l Y_2(\eta) \sin \alpha_m \eta d\eta + 3\theta_1 T_1(x_1) \sin \alpha_m x_1 + 3\theta_2 T_1(x_2) \sin \alpha_m x_2 \right),$$

$$Y_1(\eta) = \eta_1^+ (T_1(\eta) - t_1) + [(\eta_2^+ - \eta_1^+) (T_1(\eta) - t_1) + (\eta_2^- - \eta_1^-) (T_2(\eta) - t_2)] S_-(\eta - x_1) +$$

$$+ [(\eta_3^+ - \eta_2^+) (T_1(\eta) - t_1) + (\eta_3^- - \eta_2^-) (T_2(\eta) - t_2)] S_-(\eta - x_2) + \eta_1^- (T_2(\eta) - t_2),$$

$$Y_2(\eta) = 3(1 + \eta_1^+) (T_2(\eta) - t_2) + 3[(\eta_2^+ - \eta_1^+) (T_2(\eta) - t_2) + (\eta_2^- - \eta_1^-) (T_1(\eta) - t_1)] S_-(\eta - x_1) +$$

$$+ 3[(\eta_3^+ - \eta_2^+) (T_2(\eta) - t_2) + (\eta_3^- - \eta_2^-) (T_1(\eta) - t_1)] S_-(\eta - x_2) + 3\eta_1^- (T_1(\eta) - t_1) + 3t_2.$$

Застосовуємо до (9) обернене перетворення Фур'є по α_m і отримуємо:

$$\Phi^*(\eta, \beta_n) = \Phi^*(x_1, \beta_n) i H_1(\eta, \beta_n) + \Phi^*(x_2, \beta_n) i H_2(\eta, \beta_n) - i \Gamma_1(\eta, \beta_n) - \Gamma_2(\eta, \beta_n), \quad (10)$$

$$\text{де } H_1(\eta, \beta_n) = \frac{1}{l} \sigma^2 h^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \theta_1 \sin \alpha_m x_1 \sin \alpha_m \eta,$$

$$H_2(\eta, \beta_n) = \frac{1}{l} \sigma^2 h^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \theta_2 \sin \alpha_m x_2 \sin \alpha_m \eta,$$

$$\Gamma_1(\eta, \beta_n) = \alpha_i \sigma^2 h^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \Theta_1 \sin \alpha_m \eta,$$

$$\Gamma_2(\eta, \beta_n) = \alpha_i \sigma^2 h^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} v_0 \Theta_2 \sin \alpha_m \eta.$$

Щоб визначити $\Phi^*(x_1, \beta_n)$ та $\Phi^*(x_2, \beta_n)$, треба в рівність (9) підставити точки x_1 і x_2 та розв'язати відповідну систему рівнянь із двома невідомими. Розв'язками такої системи будуть вирази:

$$\Phi^*(x_1, \beta_n) = -\chi_1 - i\chi_2, \quad \Phi^*(x_2, \beta_n) = -\chi_3 - i\chi_4, \quad (11)$$

$$\text{де } \chi_1 = \frac{\xi_1 \rho_1 - \xi_2 \rho_2}{\rho_1^2 + \rho_2^2}, \quad \chi_2 = \frac{\xi_2 \rho_1 + \xi_1 \rho_2}{\rho_1^2 + \rho_2^2}, \quad \chi_3 = \frac{\xi_3 \rho_1 - \xi_4 \rho_2}{\rho_1^2 + \rho_2^2},$$

$$\chi_4 = \frac{(\xi_4 \rho_1 + \xi_3 \rho_2)}{\rho_1^2 + \rho_2^2},$$

$$\xi_1 = v_0 \Gamma_2(x_1, \beta_n) + \Gamma_1(x_1, \beta_n) H_2(x_2, \beta_n) - \Gamma_1(x_2, \beta_n) H_2(x_1, \beta_n),$$

$$\xi_2 = \Gamma_1(x_1, \beta_n) - v_0 \Gamma_2(x_1, \beta_n) H_2(x_2, \beta_n) + v_0 \Gamma_2(x_2, \beta_n) H_2(x_1, \beta_n),$$

$$\xi_3 = v_0 \Gamma_2(x_2, \beta_n) + H_1(x_1, \beta_n) \Gamma_1(x_2, \beta_n) - \Gamma_1(x_1, \beta_n) H_1(x_2, \beta_n),$$

$$\xi_4 = \Gamma_1(x_2, \beta_n) - v_0 H_1(x_1, \beta_n) \Gamma_2(x_2, \beta_n) + v_0 H_1(x_2, \beta_n) \Gamma_2(x_1, \beta_n),$$

$$\rho_1 = 1 - H_1(x_1, \beta_n) H_2(x_2, \beta_n) + H_1(x_2, \beta_n) H_2(x_1, \beta_n),$$

$$\rho_2 = H_1(x_1, \beta_n) + H_2(x_2, \beta_n).$$

Підставимо вирази (11) у формулу (10) і отримаємо

$$\Phi^*(\eta, \beta_n) = \chi_2 H_1(\eta, \beta_n) + \chi_4 H_2(\eta, \beta_n) - v_0 \Gamma_2(\eta, \beta_n) - i(\chi_1 H_1(\eta, \beta_n) + \chi_3 H_2(\eta, \beta_n) + \Gamma_1(\eta, \beta_n)),$$

тоді прогин і функція напружень матимуть вигляд:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \Phi^*(\eta, \beta_n) \sin \beta_n \xi, \quad \varphi = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \text{Im} \Phi^*(\eta, \beta_n) \sin \beta_n \xi. \quad (12)$$

Зусилля та моменти з урахуванням (12) визначаємо за формулами:

$$N_1 = E_0 \frac{\partial^2 \varphi}{h^2 \partial \xi^2},$$

$$M_1 = -D_2 \left[\frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) + \frac{\alpha_i (1 + \nu)}{h} T_2 \right],$$

$$N_2 = E_0 \frac{\partial^2 \varphi}{h^2 \partial \eta^2},$$

$$M_2 = -D_2 \left[\frac{1}{h^2} \left(\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) + (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) + \frac{\alpha_i (1 + \nu)}{h} T_2 \right].$$

Аналіз числових результатів. Розглядали тонку призматичну оболонку з безрозмірними розмірами $l=1$, $d=1$, $x_2=0,66$, $x_1=0,33$ та кутами зламу $\theta_1=\theta_2=0,1$, коли температура середовища дорівнює нулю на нижній лицевій поверхні оболонки $z=-h$ і на торцях $\eta=0$ та $\eta=1$ ($t_c^- = t_c^+ = t_c^0 = 0^\circ \text{C}$) та дорівнює одному градусу на верхній поверхні $z=+h$ ($t_c^+ = 1^\circ \text{C}$). Уважали, що коефіцієнти тепловіддачі на нижніх поверхнях $z=-h$ трьох елементів однакові й рівні $\mu_1^- = \mu_2^- = \mu_3^- = 50$; на верхній лицевій поверхні $z=h$ другого елемента оболонки коефіцієнт тепловіддачі рівний $\mu_2^+ = 100$. Розглядали різні значення коефіцієнтів тепловіддачі на верхній лицевій поверхні першого елемента: ($\mu_1^+ = 100$; $\mu_1^+ = 95$; $\mu_1^+ = 90$) і різні значення коефіцієнтів тепловіддачі на верхній лицевій поверхні третього елемента: ($\mu_3^+ = 100$; $\mu_3^+ = 95$; $\mu_3^+ = 100$). На рис. 2–8 криві ілюструють розподіли температурних характеристик, прогину, моментів, зусиль вздовж лінії $\xi=0,5$. Суцільна крива відповідає однаковим коефіцієнтам тепловіддачі на верхніх і нижніх лицевих поверхнях; штрихова крива – зменшенню тепловіддачі на верхніх поверхнях першого й третього елементів на п'ять відсотків ($\mu_1^+ = \mu_3^+ = 95$); штрихпунктирна крива – зменшенню тепловіддачі на верхній поверхні першого елемента на десять відсотків ($\mu_1^+ = 90$).

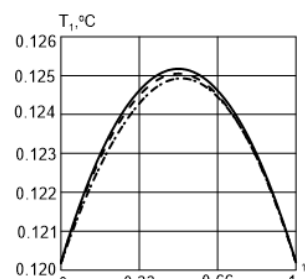


Рис. 2. Розподіл середньої температури T_1 за зміни коефіцієнтів тепловіддачі

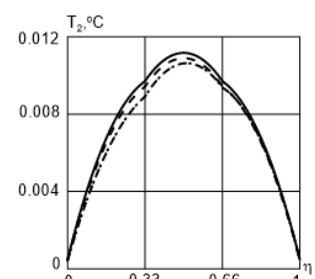


Рис. 3. Розподіл температурного моменту T_2 за зміни коефіцієнтів тепловіддачі

За однакових коефіцієнтів тепловіддачі з верхньої поверхні трьох елементів оболонки $\mu_1^+ = \mu_2^+ = \mu_3^+ = 100$ (суцільна крива) максимальне значення середньої температури T_1 досягається посередині другого елемента, а температурний момент T_2 досягає локальних мінімумів на лініях зламу. Коли коефіцієнти тепловіддачі з верхніх поверхонь першого й третього елементів оболонки стають на п'ять відсотків меншими (штрихова крива), то T_1 і T_2 зменшуються. Коли коефіцієнт тепловіддачі першого елемента верхньої лицевої поверхні оболонки стає на десять відсотків меншим, середня температура й температурний момент далі зменшуються, їхні максимуми зміщуються в напрямку третього елемента оболонки.

На рисунку 4 спостерігається зменшення абсолютної величини нормованого прогину $w^* = 10^5 w / (\alpha_c t_c h)$ оболонки (суцільна та штрихова криві) зі зменшенням коефіцієнтів тепловіддачі на верхній поверхні її першого й третього елементів на п'ять одиниць. Тоді прогин досягає локальних мінімумів на лініях зламів і локальних максимумів на кожному із трьох елементів оболонки та є симетричним щодо її середини $\eta = 0,5$. Зі зменшенням коефіцієнта тепловіддачі верхньої поверхні першого елемента до $\mu_1^+ = 90$ (штрихпунктирна крива) абсолютна величина прогину зменшується і її локальний мінімум на першому елементі вдвічі менший, ніж на третьому. Якщо порівняти прогин (суцільна крива) на рисунку 4 й аналогічні прогини в роботі [11] для двохелементної призматичної оболонки за однакових коефіцієнтів тепловіддачі з лицевих поверхонь та різних кутів зламу, бачимо, що якісна поведінка прогину на цих рисунках подібна. На лінії зламу прогин зменшується.

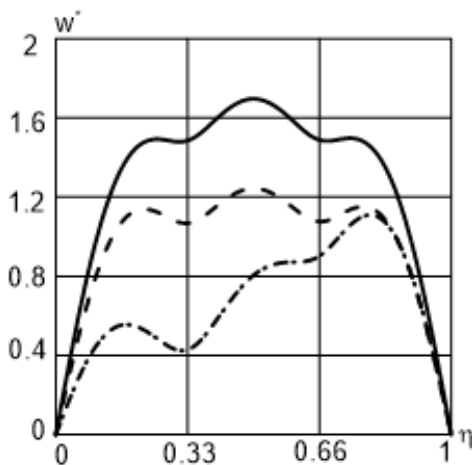


Рис. 4. Розподіл нормованого прогину w^* за зміни коефіцієнтів тепловіддачі

Нормований згинальний момент $M_1^* = 10^3 M_1 h / (\alpha_c t_c D_2)$ (рис. 5) та величина нормо-

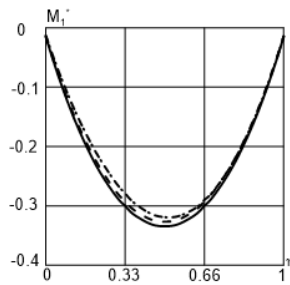


Рис. 5. Розподіл нормованого моменту M_1^* за зміни коефіцієнтів тепловіддачі

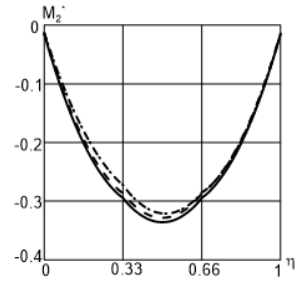


Рис. 6. Розподіл нормованого моменту M_2^* за зміни коефіцієнтів тепловіддачі

ваного зусилля $N_1^* = 10^2 N_1 h / (\alpha_c t_c E_0)$ (рис. 7), коли коефіцієнти тепловіддачі оболонки на кожній з лицевих поверхонь однакові (суцільна крива), спадають, досягаючи мінімуму на лінії $\eta = 0,5$. Зі зменшенням коефіцієнтів тепловіддачі на верхніх лицевих поверхнях першого й третього елементів оболонки вони збільшуються (штрихова й штрихпунктирна криві). Розподіл нормованого моменту $M_2^* = 10^3 M_2 h / D_2$ (рис. 6) та нормованого зусилля $N_2^* = 10^2 N_2 h^2 / (\alpha_c t_c E_0)$ (рис. 8) якісно аналогічний до розподілу моменту M_1^* і зусилля N_1^* . Максимальних значень моменти досягають на торцях.

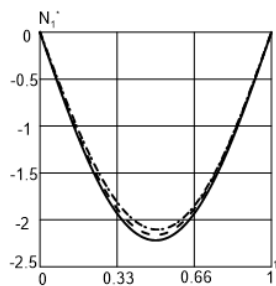


Рис. 7. Розподіл нормованого зусилля N_1^* за зміни коефіцієнтів тепловіддачі

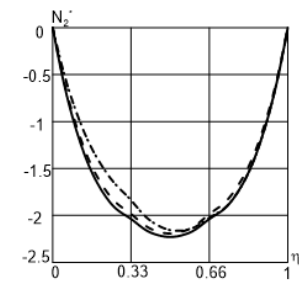


Рис. 8. Розподіл нормованого зусилля N_2^* за зміни коефіцієнтів тепловіддачі

Висновки. Дослідження напружено-деформованого стану оболонок зі зламами у працях [1–9] проведено для силового навантаження. Для випадку рівності коефіцієнтів тепловіддачі з лицевих поверхонь досліджено напружено-деформований стан складеної пологої оболонки сферичної форми та призматичної оболонки, складеної із двох однакових елементів, у працях [10; 11]. За різних коефіцієнтів тепловіддачі з лицевих поверхонь напружено-деформований стан призматичної оболонки, складеної із двох елементів, проведено у праці [12]. У даній роботі вивчено ефект впливу зламів на термонапружений стан у тонкій пологій складеній із трьох плоских елементів призматичній оболонці за конвективного теплообміну з навколишнім середовищем на лицевих поверхнях. На кожній із шести лицевих поверхонь оболонки різні коефіцієнти тепловіддачі. Задачу теплопровідності для оболонки зі зламами зведено до системи інтегральних рівнянь

з інтегральними операторами Вольтерри та Фредгольма другого роду, із застосуванням методу варіації сталої. Розв'язок задачі термонапружності знайдено за допомогою комплексної функції напружень, яку подано через функцію напружень та прогин. На торцях оболонка зі зламами вільно оперта на жорсткі вертикальні діафрагми. Торці, на які виходять злами серединної поверхні, теплоізоляовані, а на інших задана нульова температура. Функції напружень та прогину знайдено завдяки скінченним інтегральним перетворенням Фур'є. Наведено результати числового аналізу розподілу середньої температури, температур-

ного моменту, прогину, моментів і зусиль за різних значень коефіцієнта тепловіддачі на верхніх лицевих поверхнях першого й третього елементів оболонки. За зменшення коефіцієнтів тепловіддачі на крайніх елементах середня температура, температурний момент, згинні моменти й абсолютні величини прогину й зусиль спадають зі зменшенням максимальної їх величини в бік елемента, де коефіцієнти тепловіддачі не змінювали. Варто зауважити, що вздовж зламів поведінка розподілу температурних характеристик, прогину, зусиль та моментів у працях [10–12] та даній роботі має якісно аналогічний характер.

ЛІТЕРАТУРА

1. Garncarek R. Efekty nieciągłości katowych powierzchni w statyce powłok cienkościennych. *Archivum budowy maszyn*. Warszawa, 1975. № 2. S. 163–183.
2. Grishin V. A., Popov G. Ya., Reut V. V. Analysis of box-like shells of rectangular cross-section. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1990. 54. № 4. P. 501–507.
3. Моссаковський В. І., Куліков Д. В. Метод однорідних розв'язків коробчастих оболонок при динамічному навантаженні. *Доп. АН УРСР. Сер. А*. 1987. С. 24–27.
4. Гайдайчук В. В., Кошевий О. О. Чисельне рішення задач оптимального проектування при обмеженні власних частот коливання пологої оболонки зі зламами. *Сучасні проблеми архітектури та містобудування*. Архітектура будівель і споруд. 2018. Вип. 51. С. 416–425.
5. Кривенко О. П., Лізунов П. П., Ворона Ю. В., Калашніков О. Б. Використання моментної схеми скінченних елементів при дослідженні тонких пружних оболонок неоднорідної структури. *Управління розвитком складних систем*. Інформаційні технології проектування. 2023. Вип. 53. С. 52–62.
6. Derveni F., Gueissaz W., Yan D., Reis P. M. Probabilistic buckling of imperfect hemispherical shells containing a distribution of defects. *Philos. Trans. R.* 2023. Soc. A. 381 (2244). P. 20220298.
7. Gristchak V. Z., Hryshchak D. V., Dyachenko N. M., Sanin A. F., Sukhyu K. M. Bifurcation state and rational design of three-layer reinforced compound cone-cylinder shell structure under combined loading. *Space Science and Technology*. 2023. 29. № 6 (145). P. 26–41.
8. Gristchak V. Z., Hryshchak D. V., Dyachenko N. M., Baburov V. V. The influence of the Gaussian curvature sign of the compound shell structure's middle surface on local and overall buckling under combined loading. *Space Science and Technology*. 2022. 28. № 4 (137). С. 31–38.
9. Назаров А.Г. Некоторые контактные задачи теории оболочек. *Доклады АН Арм. ССР*. 1948. Т. 9. № 2. С. 61–66.
10. Хапко Б. С. Термонапруження складеної пологої оболонки сферичної форми. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2001. № 6. С. 124–126.
11. Хапко Б. С. Полога призматична оболонка в нерівномірному температурному полі. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2005. № 2. С. 33–38.
12. Хапко Б. С. Термонапружений стан двохелементної призматичної оболонки з різними коефіцієнтами тепловіддачі. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. Математичне моделювання і прикладна механіка*. Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2015. № 1. С. 199–210.
13. Шве́ц Р. Н., Хапко Б. С., Чи́ж А. И. Уравнения теплопроводности для оболочек с изломами при переменных коэффициентах теплоотдачи. *Теоретическая и прикладная механика*. 2010. Вып. 1 (47). С. 69–76.
14. Підстригач Я. С., Коляно Ю. М. Температурне поле в тонких пластинках при змінному коефіцієнті тепловіддачі з бокових поверхонь. *Доп. АН УРСР. Сер. А*. 1971. № 1. С. 75–78.
15. Подстригач Я. С., Шве́ц Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. Киев : Наукова думка, 1978. 344 с.
16. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Громовык В. И., Лозбень В. Л. Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи. Киев : Наук. думка, 1977. 158 с.
17. Sugano Y., Chiba R., Hirose K., Takahashi K. Material design for reduction of thermal stress in a functionally graded material rotating disk. *JSME international journal. Series A*. 2004. 47. № 2. P. 189–197.
18. Хапко Б. С., Чи́ж А. І. Про вплив змінних коефіцієнтів тепловіддачі на термонапруження у скінченній циліндричній оболонці. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2014. 57. № 2. С. 195–203.
19. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. Киев : Наук. думка, 1978, 292 с.

REFERENCES

1. Garncarek R. (1975). Efekty nieciaglosci katowych powierzchni w statyce powlok cienkosciennych. *Archivum budowy maszyn*. Warszawa, № 2. P. 163–183.
2. Grishin V. A., Popov G. Ya., Reut V. V. (1990). Analysis of box-like shells of rectangular cross-section. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 54, № 4. P. 501–507.
3. Mosakovs'kyi V. I., Kulykov D. V. (1987). Metod odnorodnykh rozv'yazkiv korobchastykh obolonok pry dynamichnomu navantazhenni. *Dop. AN URSSR. Ser. A*. S. 24–27.
4. Haidaichuk V. V., Koshevyi O. O. (2018). Chyselne rishennia zadach optymalnoho proektuvannia pry obmezheni vlasnykh chastot kolyvanannia polohoi obolonky zi zlamamy. *Suchasni problemy arkhitektury ta mistobuduvannia*. Arkhitektura budivel i sporud. Vyp. 51. S. 416–425.
5. Kryvenko O. P., Lizunov P. P., Vorona Yu. V., Kalashnikov O. B. (2023). Vykorystannia momentnoi skhemy skinchennykh elementiv pry doslidzhenni tonkykh pruzhnykh obolonok neodnorodnoi struktury. *Upravlinnia rozvytkom skladnykh system*. Informatsiini tekhnolohii proektuvannia. Vyp. 53. S. 52–62.
6. Derveni F., Gueissaz W., Yan D., and Reis P. M. (2023). Probabilistic buckling of imperfect hemispherical shells containing a distribution of defects. *Philos. Trans. R. Soc. A*, 381 (2244), p. 20220298.
7. Gristchak V. Z., Hryshchak D. V., Dyachenko N. M., Sanin A. F., Sukhyi K. M. (2023). Bifurcation state and rational design of three-layer reinforced compound cone-cylinder shell structure under combined loading. *Space Science and Technology*. 29, № 6 (145). P. 26–41. <https://doi.org/10.15407/knit2023.06.026>
8. Gristchak V. Z., Hryshchak D. V., Dyachenko N. M., Baburov V. V. (2022). The influence of the Gaussian curvature sign of the compound shell structure's middle surface on local and overall buckling under combined loading. *Space Science and Technology*. 28, № 4 (137). C. 31–38. <https://doi.org/10.15407/knit2022.04.031>
9. Nazarov A. H. (1948). Nekotorye kontaktnye zadachi teorii obolochek. *Doklady AN Arm. SSR*. V. 9, № 2. Pp. 61–66.
10. Khapko B. S. (2001). Thermal stress of a folded shallow spherical shell. *Physicochemical mechanics of materials*. № 6. Pp. 124–126.
11. Khapko B. S. (2005). Shallow Prismatic Shell in a Nonuniform Temperature Field. *Physicochemical mechanics of materials*. № 2. Pp. 33–38.
12. Khapko B. S. (2015). Termonapruzheny stan dvokholementnoyi pryzmatychnoyi obolonky z riznymy koefitsiyentamy teploviddachi. *Visnyk Zaporiz'koho natsional'noho universytetu. Fizyko matematychni nauky. Matematychni modelyuvannya ta prykladna mekhanika*. – Zaporizhzhya: Zaporiz'kyi natsional'nyi universytet, № 1. S. 199–210.
13. Shvets R. M., Khapko B. S., Chyzh A. I. (2010) Heat conduction equations for shells having breaks with variable heat transfer coefficients. *Theoretical and applied mechanics*. Issue 1 (47). Pp. 69–76.
14. Pidstryhach Ya. S., and Kolyano Yu. M. (1971). Temperaturne pole v tonkykh plastynkakh pry zminnomu koefitsiyenti teploviddachi z bokovykh poverkhon'. *Dop. AN URSSR, Ser. A*. № 1. Pp. 75–78.
15. Podstrigach Ya. S., and Shvec R. N. (1978). Termouprugost tonkich obolochek [Thermoelasticity of thin shells], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.
16. Podstrigach Ya. S., Kolyano Yu. M., Gromoviyk V. I., and Lozben V. L. (1977). Termouprugost tel pri peremennykh koeffitsiyentax teplootdachi [Thermoelasticity of Bodies with Variable Heat-Transfer Coefficients], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.
17. Sugano Y., Chiba R., Hirose K., Takahashi K. (2004). Material design for reduction of thermal stress in a functionally graded material rotating disk. *JSME international journal, Series A*. 47, № 2. P. 189–197.
18. Khapko B. S., Chyzh A. I. (2014). On effect of variable heat exchange coefficients on thermal stresses in finite cylindrical shell. *Mathematical methods and physicomathematical fields*. 57, № 2. Pp. 195–203.
19. Verlan A. F., and Sizikov V.S. (1978). Metody resheniya integralnykh uravneniy s programmami dlya EVM [Methods for the Solution of Integral Equations using Computer Programs], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.

Дата першого надходження рукопису до видання: 26.08.2025
 Дата прийнятого до друку рукопису після рецензування: 23.09.2025
 Дата публікації: 31.12.2025