

**Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет**

Заснований
у 1997 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого
засобу масової інформації
Серія КВ № 15436-4008 ПР,
22.06.2009 р.

Адреса редакції:

Україна, 69600,
м. Запоріжжя, МСП-41,
вул. Жуковського, 66

Телефон

для довідок:
(061) 289-12-52

Факс:

(061) 764-45-46

В і с н и к
Запорізького національного
університету

Фізико-математичні науки

№ 1, 2019

Запоріжжя 2019

Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2019. 160 с.

Затверджено як наукове фахове видання України, у якому можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (Наказ Міністерства освіти і науки України № 528 від 12.05.15 р.)

Вісник індексується під назвою «Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences» у таких наукометричних базах:

- INDEX COPERNICUS, ICV 2017: **74.51** (<https://journals.indexcopernicus.com/search/details?id=43958>);
- CiteFactor (<http://www.citefactor.org/>);
- ResearchBib (<http://paper.researchbib.com/>);
- Journal Factor (<http://www.journalfactor.org/>).

Рекомендовано до друку та поширення через мережу Інтернет (протокол засідання Вченої ради № 2 від 27.09.2019 р.)

РЕДАКЦІЙНА РАДА

- | | |
|--------------------------|--|
| <i>Грицак В. З.</i> | — доктор технічних наук, професор, головний редактор |
| <i>Гребенюк С. М.</i> | — доктор технічних наук, доцент, заступник головного редактора |
| <i>Гоменюк С. І.</i> | — доктор технічних наук, професор, відповідальний редактор |
| <i>Приварников А. К.</i> | — доктор фізико-математичних наук, професор, відповідальний редактор |
| <i>Клименко М. І.</i> | — кандидат фізико-математичних наук, доцент, відповідальний редактор |
| <i>Чопоров С. В.</i> | — кандидат технічних наук, доцент, відповідальний редактор |

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

- | | |
|----------------------------|--|
| <i>Андріанов І. В.</i> | — доктор фізико-математичних наук, професор (Рейнсько-Вестфальський технічний університет Аахена, Німеччина) |
| <i>Ванько В. І.</i> | — доктор технічних наук, професор (Московський державний технічний університет ім. Н.Е. Баумана, Росія) |
| <i>Гіржон В. В.</i> | — доктор фізико-математичних наук, професор |
| <i>Гоман О. Г.</i> | — доктор фізико-математичних наук, професор |
| <i>Гудрамович В. С.</i> | — доктор технічних наук, професор, член-кореспондент НАН України |
| <i>Козін І. В.</i> | — доктор фізико-математичних наук, професор |
| <i>Колаковські З.</i> | — доктор технічних наук, професор (Лодзинський технічний університет, Польща) |
| <i>Кондрат'єва Н. О.</i> | — кандидат фізико-математичних наук, доцент |
| <i>Кузьменко В. І.</i> | — доктор фізико-математичних наук, професор |
| <i>Маневич Л. І.</i> | — доктор технічних наук, професор (Московський інститут хімічної фізики ім. Н.Н. Семенова РАН, Росія) |
| <i>Морачковський О. К.</i> | — доктор технічних наук, професор |
| <i>Ольшанецький В. Ю.</i> | — доктор технічних наук, професор |
| <i>Перепелиця В. О.</i> | — доктор фізико-математичних наук, професор |
| <i>Пожуєв В. І.</i> | — доктор фізико-математичних наук, професор |
| <i>Толок О. В.</i> | — доктор технічних наук, професор (Московський державний технологічний університет «Станкін», Росія) |
| <i>Швидка С. П.</i> | — кандидат фізико-математичних наук, доцент |

ЗМІСТ

Ахундов В. М., Наумова И. Ю., Забродская А. А. ЭЛАСТОАРМИРОВАННАЯ ТРУБА ИЗ ТРЕХ СЛОЕВ С КОЛЬЦЕВЫМИ ВОЛОКНАМИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ	4	Хома Н. Г., Хома–Мозильська С. Г., Хохлова Л. Г. НОВА ПОСТАНОВКА КРАЙОВОЇ 2 π -ПЕРІОДИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В АСИМПТОТИЧНІЙ ТЕОРІЇ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ	89
Базилевич Ю. Н., Костюшко І. А., Левчук О. С. ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ВИРІШЕННЯ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ.....	14	Чопоров С. В., Манько Н. І.-В., Спиця О. Г., Гребенюк С. М. МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ «НАПІВНЕСКІНЧЕННОГО» СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ СЛАБКОСТИСЛИВОГО МАТЕРІАЛУ НА ОСНОВІ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ.....	98
Белова О. В., Щербина І. В. ОРТОТРОПНИЙ ПРЯМОКУТНИК ПІД ВПЛИВОМ ПЛОСКОГО ШТАМПА.....	20	Чопорова О. В., Кривохата А. Г. ОПТИМІЗАЦІЯ ЗГОРТКОВИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ ТА ЇХ АНСАМБЛІВ	107
Галішин О. З., Склепус С. М. НЕІЗОТЕРМІЧНА ПОВЗУЧИСТЬ ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА.....	25	Шевченко В. О., Лимаренко Ю. О., Попівцич В. І. АКТИВНЕ ГАСІННЯ КОЛИВАНЬ ВАЛА З ЛОПАТЯМИ ПОВОРОТНО- ЛОПАТЕВОЇ ГІДРОТУРБИНИ.....	116
Григоренко О. Я., Борисенко М. Ю., Бойчук О. В., Новицький В. С. ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИН НА ОСНОВІ РІЗНИХ ПІДХОДІВ.....	33	Шпорта А. Г., Кагадій Т. С. УРАХУВАННЯ ТЕРТЯ ТА ЗЧЕПЛЕННЯ В КОНТАКТНІЙ ЗАДАЧІ ДЛЯ КРИВОЛІНІЙНОГО СЕКТОРА.....	126
Дем'яненко А. Г., Гурідова В. О., Ключник Д. В. ДИНАМІКА ПРУЖНИХ СИСТЕМ З РУХОМИМ ІНЕРЦІЙНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ: МЕХАНІЧНІ, МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ, ЇХ ОСОБЛИВОСТІ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ.....	42	Ярош А. О., Леонтєва В. В., Кондрат'єва Н. О., Єлховська Я. А. ПОЗИТИВНІСТЬ ДИСКРЕТНОЇ ДИНАМІЧНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ П. ЛЕСЛІ ТА ЇЇ МОДИФІКАЦІЙ.....	134
Дихтярук Н. Н., Ярецкая Н. А. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОЙ И ДВУХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЁННЫХ ПОЛОС, УСИЛЕННЫХ БЕСКОНЕЧНЫМ СТРИНГЕРОМ	49	Galchenko A., Choporov S. BLOCK CIPHER MODES IN THE DENIABLE ENCRYPTION	146
Козлов В. І., Зінчук Л. П., Шевченко О. Ю. ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ ШАРУВАТИХ ТІЛ ОБЕРТАННЯ З В'ЯЗКОПРУЖНОГО МАТЕРІАЛУ	58	Вимоги до оформлення статей у «Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки»	154
Левчук С. А., Хмельницький А. А., Швидка С. П. ЗАСТОСУВАННЯ АПАРАТУ МАТРИЦЬ ТИПУ ГРІНА ТА МАТРИЧНОЇ АЛГЕБРИ В ЗАДАЧІ ПРО СТАТИЧНЕ ДЕФОРМУВАННЯ КРУГЛИХ ПЛАСТИН ДИСКРЕТНО-ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ.....	68	Процес рецензування.....	157
Сторожук Є. А., Максимюк В. А., Чернищенко І. С., Корнієнко В. Ф. КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ У НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНІЙ ОРТОТРОПНІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З ПРЯМОКУТНИМИ ОТВОРАМИ	75	Process of review.....	158
Сулим Г. Т., Турчин І. М., Василько Г. В. НЕСТАЦІОНАРНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ В ЦИЛІНДРІ З ПОКРИТТЯМ ПРИ ЗМІШАНОМУ НАГРІВАННІ.....	83		

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-01

ЭЛАСТОАРМИРОВАННАЯ ТРУБА ИЗ ТРЕХ СЛОЕВ С КОЛЬЦЕВЫМИ ВОЛОКНАМИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

В. М. Ахундов, И. Ю. Наумова, А. А. Забродская

Национальная металлургическая академия Украины
akhundov@ua.fm

Ключевые слова:

модель кусочно-однородной среды, волокна кольцевые, давление внутреннее, деформации большие, метод конечных разностей.

Представляется численное решение по модели кусочно-однородной среды задачи о деформировании трубы из трех слоев с кольцевыми волокнами квадратного сечения под воздействием внутреннего давления при больших перемещениях и деформациях. Трубу моделировали как сборку кольцевых элементов. Такие элементы представляют собой кольца квадратного сечения из связующего материала, включающие кольцевые волокна в качестве их армирующей сердцевины. Принимали расчетную схему трубы как длинной цилиндрической оболочки, осесимметрично деформируемой при нагружении давлением, когда центральные и крайние сечения кольцевых элементов перемещаются в плоскостях своего исходного положения.

ЕЛАСТОАРМОВАНА ТРУБА ІЗ ТРЬОХ ШАРІВ З КІЛЬЦЕВИМИ ВОЛОКНАМИ ПІД ВПЛИВОМ ВНУТРІШНЬОГО ТИСКУ

В. М. Ахундов, І. Ю. Наумова, Г. А. Забродська

Національна металургійна академія України
akhundov@ua.fm

Ключові слова:

модель кусково-однорідного середовища, волокна кільцеві, тиск внутрішній, деформації великі, метод кінцевих різниць.

Дослідження деформування м'яких композитних структур, коли істотно змінюється їх початкова конфігурація, залишається однією з проблем механіки композитних матеріалів. В якості однієї з таких структур розглянули довгу тонкостінну трубу з еластичних шарів з кільцевими волокнами з більш жорсткого еластичного матеріалу. Труби даної будови можуть застосовуватися для створення гнучких газо- і повітропроводів з метою транспортування речовин в розпиленому вигляді, для збирання екологічно шкідливих відходів виробництва.

Найбільш загальний підхід в дослідженні тіл волокнистої будови ґрунтується на застосуванні моделі кусково-однорідного середовища, коли матриця і волокна розглядаються як контактні взаємодіючі тіла. Представляється чисельне рішення задачі по даній моделі про деформацію труби з трьох шарів з кільцевими волокнами квадратного перетину під впливом внутрішнього тиску при великих переміщеннях і деформаціях. Трубу моделювали як збірку кільцевих елементів. Такі елементи являють собою кільця квадратного перетину зі сполучного матеріалу, що включають кільцеві волокна як армуючу сердцевину. Приймали розрахункову схему труби як довгої циліндричної оболонки, яка осесиметрично деформується при навантаженні тиском, коли крайні і центральні перетини кільцевих елементів переміщаються в площинах свого вихідного положення.

Крайову задачу для збірки кільцевих елементів оболонки формулювали, виходячи з рівнянь нелінійної теорії пружності для матриці і волокон в ній. Рішення задачі проводили за допомогою методу кінцевих різниць, похідні першого порядку від основних величин по осьовій та радіальній координатах апроксимували за допомогою кінцево-різницевого співвідношень другого порядку точності. Дискретний аналог задачі вирішували на основі процедури методу Ньютона. Одиначність рішення крайової задачі забезпечували продовженням рішення по тиску в трубі.

ELASTIC-REINFORCED PIPE FROM THREE LAYERS WITH RING FIBERS UNDER THE EXPOSURE OF INTERNAL PRESSURE

V. M. Akhundov, I. Yu. Naumova, A. A. Zbrodskaya

National Metallurgical Academy of Ukraine
akhundov@ua.fm

Key words:

model of a piecewise-homogeneous medium, fibers are annular, internal pressure, large deformations, finite difference method.

A numerical solution of the problem of deforming a three-layer pipe with annular square fibers under the influence of internal pressure with large displacements and deformations is presented by a model of a piecewise-homogeneous medium. The pipe was modeled as an assembly of ring elements. Such elements are square rings made of binder material, including ring fibers as their reinforcing core. The pipe design was accepted as a long cylindrical shell, which is axially deformable when loaded with pressure, when the central and extreme sections of the ring elements move in the planes of their original position.

The study of the deformation of soft composite structures, when their initial configuration changes significantly, remains one of the problems of the mechanics of composite materials. As one of these structures, we considered a long thin-walled tube of elastic layers with ring fibers of a more rigid elastic material. Pipes of this structure can be used to create flexible gas and air ducts, in order to transport substances in a spray form, to collect environmentally hazardous waste.

The most common approach in the study of the bodies of a fibrous structure is based on the use of a model of a piecewise-homogeneous medium, when the matrix and fibers are considered as contacting bodies. A numerical solution of the problem according to this model of the deformation of a pipe of three layers with annular square fibers under the influence of internal pressure during large displacements and deformations is presented. The pipe was modeled as an assembly of ring elements. Such elements are square rings made of binder material, including ring fibers as their reinforcing core. The pipe design was accepted as a long cylindrical shell, which is axially deformable when loaded with pressure, when the extreme and central sections of the ring elements move in the planes of their original position.

The boundary problem for assembling the ring elements of the shell was formulated on the basis of the equations of the nonlinear theory of elasticity for the matrix and the fibers in it. The problem was solved using the finite-difference method, first-order derivatives of the main quantities with respect to the axial and radial coordinates, and approximated using second-order finite-difference relations. The discrete analogue of the problem was solved on the basis of the Newton method procedure. The uniqueness of the solution of the boundary value problem was ensured by the continuation of the pressure solution in the pipe. As a result of solving the boundary value problem at a finite pressure value, the nodal values of displacements, strains, and stresses for the matrix () and fibers () were determined.

The boundary surfaces of the pipe acquire a wave-like shape (corrugated) with a period along the generatrix equal to the reinforcement period. Arrows of deflection (double amplitudes of wave formation) in the inner and outer surfaces of the pipe are not very different from each other. The middle surface of the pipe, due to its thin-walled state, remains in the deformed configuration almost cylindrical, when its deflections are small compared to the deflections in the boundary surfaces. The matrix material is extruded from the regions of the fiber matrix layer between the fibers into the region of the matrix layer. The bounding cylindrical surfaces of the annular fibers in the deformable pipe become convex, and their end surfaces become concave.

Введение. Отметим монографию [1], где рассматривается безмоментная цилиндрическая оболочка (труба), однонаправленно армированная волокнами, на основе использования эффективных модулей ее материала. В [2] изучаются двух- и четырехслойные цилиндрические оболочки с перекрестным расположением в них волокон. Материал каждого из слоев учитывается также с помощью его эффективных модулей. Основной материал цилиндрической оболочки, армированной по перекрестной схеме малорастяжимыми волокнами, рассматривается как физически нелинейный в [3]. В [4, 5] исследуется артерия как цилиндрическая труба из двух слоев при больших деформациях, в которых армирующими элементами являются коллагеновые волокна. Конкретный вид потенциального закона при нелинейно-упругом поведении требует только три материальные константы для каждого из слоев, чтобы учесть совместную реакцию стенки сосуда на воздействие осевого растяжения, давления и кручения.

В указанных работах задачи о деформировании цилиндрических оболочек решаются на основе моделирования материала с исходным строением как однородного анизотропного с макроскопически эквивалентными механическими свойствами. Преимущество подхода в том, что для его компьютерной реализации требуются сравнительно небольшие вычислительные ресурсы. Однако на его основе не выявляются внутренние поля в матрице и волокнах материала, анализ разрушения материала может быть лишь частичным.

Наиболее общий подход в исследовании тел волокнистого строения основывается на применении модели кусочно-однородной среды. Матрица и волокна рассматриваются как контактно взаимодействующие тела на основе уравнений механики деформирования с выявлением внутренних полей для композитной структуры. В силу ограниченности ресурсов данный подход можно применить лишь для сравнительно небольшого перечня тел, в основном однонаправлено армированных. В настоящей работе представляем результаты численного решения по модели кусочно-однородной среды задачи о

раздувании трубы из трех слоев с кольцевыми волокнами квадратного сечения при больших перемещениях и деформациях.

1. Постановка задачи. Исследовали деформирование эластичной тонкостенной трубы, армированной кольцевыми волокнами, под воздействием внутреннего давления. Применяются волокна квадратного сечения из более жесткого материала по сравнению с материалом матрицы (связующего), которые располагаются в матрице по схеме квадратной упаковки. На рис.1 показана конфигурация осевого сечения трубы в недеформированном состоянии. Труба включает три слоя толщиной h с волокнами в них, длина сторон квадратного сечения которых δ . Внутренний радиус оболочки $r = a$, внешний радиус $r = b = a + 3h$.

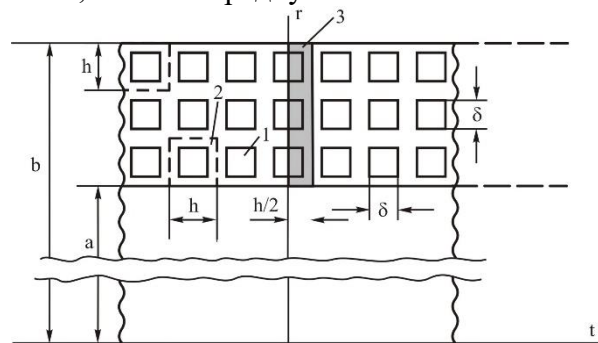


Рис. 1. Осевое сечение трехслойной трубы с кольцевыми волокнами в исходном состоянии:

- 1 – волокно квадратного сечения,
- 2 – кольцевой элемент,
- 3 – половина концентрической сборки кольцевых элементов справа от центрального сечения

Трубу моделировали как сборку кольцевых элементов. Такие элементы представляют собой кольца квадратного сечения $h \times h$ из связующего материала, включающие кольцевые волокна в качестве их армирующей сердцевины. Принимали расчетную схему трубы как длинной цилиндрической оболочки, осесимметрично деформируемой при нагружении давлением, когда крайние и центральные сечения кольцевых элементов перемещаются в плоскостях своего исходного положения. Задачу в силу условий симметрии решали для правой половины концентрической сборки из трех кольцевых элементов, включающей по одному элементу от каждого слоя. Такой половинный слой заключен между центральным поперечным сечением, в котором располагаются осевые

линии волокон в сборке, и крайней поверхностью сборки, являющейся центральным сечением для матричного слоя между двумя смежными рядами волокон с концентрическим расположением (см. также рис. 3,а).

Применяли систему материальных цилиндрических координат $\hat{\theta}^1, \hat{\theta}^2, \hat{\theta}^3$, которые в отсчетной конфигурации трубы обозначаем как t, φ, r – осевая, окружная и радиальная координаты соответственно. Осевую координату t отсчитываем от центрального поперечного сечения сборки. Наряду с радиальной координатой r применяли координату $z = r - a$, отмеряемую от внутренней поверхности трубы. Физические компоненты векторных и тензорных величин сопровождаем координатными индексами, заключенными в круглые скобки.

Величины, относящиеся к матрице и волокнам, отмечаем индексом n . Значение $n = 0$ отвечает матрице, значения $n = 1, 2, 3$ указывают на волокна и включающие их кольцевые элементы из состава сборки, для которой решается краевая задача; нумерация волокон и включающих их кольцевых элементов производится по направлению от внутренней поверхности трубы к внешней. При отсутствии индекса n величина относится к матрице и каждому из волокон или к трубе в целом.

2. Уравнения математической модели. Исходили из общих уравнений нелинейной механики, определяющих компоненты тензора меры деформации Коши–Грина [6]. Для компонент тензоров осесимметричной деформации матрицы и волокон в трубе приходим к выражениям, в соответствии с которыми они определяются как функции осевой и радиальной координат t и r :

$$g_{n(11)} = \lambda_{n1}^2 = \left(1 + \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{n(3)}}{\partial t}\right)^2,$$

$$g_{n(22)} = \lambda_{n2}^2 = \left(1 + \frac{u_{n(3)}}{r}\right)^2,$$

$$g_{n(33)} = \lambda_{n3}^2 = \left(1 + \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{n(1)}}{\partial r}\right)^2,$$

$$g_{n(13)} = \lambda_{n1}\lambda_{n3} \cos \omega_{n13} = \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial r} + \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial t} + \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial r} + \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial r}, \quad (2.1)$$

$$n = 0, 1, 2, 3$$

(компоненты векторных и тензорных величин, равные нулю при условиях симметрии решаемой задачи, не приводим), где $\lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \lambda_{n3}$ – кратности удлинений по направлениям координатных линий $\hat{\theta}^1, \hat{\theta}^2, \hat{\theta}^3$ (t, φ, r) соответственно; ω_{n13} – координатный угол между $\hat{\theta}^1$ и $\hat{\theta}^3$ – координатными линиями.

В случае сжимаемых материалов матрицы и волокон компоненты симметричных тензоров напряжений Пиола-Кирхгоффа связаны с компонентами тензоров деформации соотношениями

$$J \sigma_{n(ij)} = 2 \sum_{p=1}^q \frac{\partial W_n}{\partial I_{np}} \cdot \frac{\partial I_{np}}{\partial g_{n(ij)}}, \quad (2.2)$$

$$i, j = 1, \dots, 3, \quad n = 0, 1, 2, 3,$$

где

$W_n = W_n \left[I_{n1}(g_{n(ij)}), I_{n2}(g_{n(ij)}), \dots, I_{nq}(g_{n(ij)}) \right]$ – упругий потенциал материала матрицы ($n = 0$) или волокна ($n = 1, 2, 3$), определяемый в зависимости от инвариантов $I_{n1}, I_{n2}, \dots, I_{nq}$ тензора его деформации.

Применяя уравнения равновесия МДГТ при больших (конечных) деформациях, пришли к следующим уравнениям равновесия для связующего и волокон трубы при осесимметричной деформации в метрике отсчетной конфигурации:

$$\frac{\partial t_{n(11)}}{\partial t} r + \frac{\partial t_{n(31)}}{\partial r} r + t_{n(31)} = 0,$$

$$\frac{\partial t_{n(13)}}{\partial t} r + \frac{\partial t_{n(33)}}{\partial r} r + t_{n(33)} - t_{n(22)} = 0, \quad (2.3)$$

$$n = 0, 1, 2, 3.$$

Здесь $t_{n(ij)}$ – физические компоненты несимметричного тензора напряжений Пиола–Кирхгоффа для матрицы (связующего) и волокон, из которых отличные от нуля определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
 t_{n(11)} &= J_n \sigma_{n(11)} \left(1 + \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial t} \right) + J_n \sigma_{n(13)} \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial r}, \\
 t_{n(13)} &= J_n \sigma_{n(13)} \left(1 + \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial r} \right) + J_n \sigma_{n(11)} \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial t}, \\
 t_{n(31)} &= J_n \sigma_{n(31)} \left(1 + \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial t} \right) + J_n \sigma_{n(33)} \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial r}, \\
 t_{n(33)} &= J_n \sigma_{n(33)} \left(1 + \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial r} \right) + \\
 &\quad + J_n \sigma_{n(31)} \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial t}, \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

$$t_{n(22)} = J_n \sigma_{n(22)} \left(1 + \frac{u_{n(3)}}{r} \right). \quad (2.5)$$

Компоненты $J\sigma_{(ij)}$ симметричного тензора напряжений выражаются через компоненты p_{ij} векторов напряжений на $\hat{\theta}^i$ – координатных поверхностях, отнесенных к нормированному векторному базису системы координат в деформированной конфигурации цилиндра, по формулам [7]:

$$\begin{aligned}
 J\sigma_{(11)} &= \lambda_1^{-1} \lambda_2 \lambda_3 \sin \omega_{23} p_{11}, \\
 J\sigma_{(22)} &= \lambda_2^{-1} \lambda_1 \lambda_3 \sin \omega_{13} p_{22}, \\
 J\sigma_{(33)} &= \lambda_3^{-1} \lambda_1 \lambda_2 \sin \omega_{12} p_{33}, \\
 J\sigma_{(13)} &= \lambda_2 \sin \omega_{23} p_{13} \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

(индекс « n » принадлежности матрице или волокну опускаем).

3. Построение численного решения задачи. Геометрические уравнения (2.1), физические уравнения (2.2) и уравнения равновесия (2.3) вместе с (2.4), (2.5) являются разрешающими уравнениями краевой задачи для трубы как кусочно-однородного цилиндра. Компоненты векторов перемещений $u_{n(1)}$, $u_{n(3)}$ и компоненты тензоров напряжений $t_{n(11)}$, $t_{n(13)}$, $t_{n(31)}$, $t_{n(33)}$ в матрице и волокнах принимали в качестве основных величин. Содержащиеся в разрешающих уравнениях компоненты деформации $g_{n(11)}$, $g_{n(22)}$, $g_{n(33)}$, $g_{n(13)}$ и компоненты напряжений $t_{n(22)}$ выражали через основные величины с помощью (2.1), (2.2) и (2.5).

Граничные условия для связующего и волокон трубы, при которых решали краевую задачу, выражают отсутствие осевых перемещений в поверхностях $t=0$ и $t=h/2$ и поперечных сдвигов из этих поверхностей:

$$\begin{aligned}
 u_{n(1)}|_{t=0} &= 0, \quad g_{n(13)}|_{t=0} = 0, \\
 u_{n(1)}|_{t=h/2} &= 0, \quad g_{n(13)}|_{t=h/2} = 0, \quad (3.1) \\
 n &= 0, 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

Для внутренней поверхности $r=a$ под воздействием давления p , как следящей нагрузки, компоненты несимметричного тензора Пиола–Кирхгоффа (2.4) выражали через компоненты симметричного тензора (2.2) и использовали связь последних (2.6) с компонентами вектора напряжений в поверхности. При свободной от нагрузок внешней поверхности $r=b$ напряжения в ней принимали равными нулю. В результате пришли к граничным условиям во внутренней и внешней поверхностях трубы (сборки блоков), которые записываем в виде

$$\begin{aligned}
 t_{m(31)}|_{r=a} &= -\lambda_{m3}^{-1} \lambda_{m1} \lambda_{m2} \frac{\partial u_{m(1)}}{\partial r} \Big|_{r=a} \cdot p, \\
 t_{m(33)}|_{r=a} &= \\
 &= -\lambda_{m3}^{-1} \lambda_{m1} \lambda_{m2} \left(1 + \frac{\partial u_{m(3)}}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} \cdot p, \quad (3.2) \\
 t_{m(31)}|_{r=b} &= 0, \quad t_{m(33)}|_{r=b} = 0,
 \end{aligned}$$

где индексом m отметили отдельно величины в граничных поверхностях как относящиеся к матрице (связующему).

Условия совместного деформирования задавали, исходя из равенств компонент векторов перемещений и напряжений для матрицы (связующего) и волокон между собой в границах их раздела. Эти условия приводим, отмечая величины, относящиеся к матрице, отдельно индексом m . В цилиндрических поверхностях раздела матрицы с n -волоком

$$\begin{aligned}
 u_{m(1)}(t, r) &= u_{n(1)}(t, r), \\
 u_{m(3)}(t, r) &= u_{n(3)}(t, r), \\
 t_{m(31)}(t, r) &= t_{n(31)}(t, r), \\
 t_{m(33)}(t, r) &= t_{n(33)}(t, r), \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

$$0 \leq t \leq \delta/2, \quad z = nh - (h + \delta)/2, \\ z = nh - (h - \delta)/2, \\ n = 1, 2, 3.$$

В поперечной плоскости $t = \delta/2$ раздела n -волокон с матрицей

$$u_{m(1)}(t, r) = u_{n(1)}(t, r), \\ u_{m(3)}(t, r) = u_{n(3)}(t, r), \\ t_{m(11)}(t, r) = t_{n(11)}(t, r), \\ t_{m(13)}(t, r) = t_{n(13)}(t, r), \quad (3.4)$$

$$t = \delta/2, \quad nh - (h + \delta)/2 \leq z \leq nh - (h - \delta)/2, \\ n = 1, 2, 3.$$

Производные первого порядка от основных величин по осевой и радиальной координатам t и r аппроксимировали с помощью конечно-разностных соотношений второго порядка точности [8]. Вместе с привлечением граничных условий (3.1), (3.2) и условий совместного деформирования матрицы и волокон (3.3), (3.4) формируется система нелинейных уравнений относительно

основных величин в узловых точках двумерной области $0 \leq t \leq h/2, a \leq r \leq b$. Данную систему уравнений решали на основе процедуры дискретного метода Ньютона [9]. Единственность решения краевой задачи обеспечивали на основе продолжения решения по давлению p в трубе. В результате решения краевой задачи при конечном значении давления с привлечением (2.6) определяли узловые значения перемещений $u_{n(i)}$, деформаций λ_{ni} , ω_{nij} и напряжений p_{nij} для матрицы ($n = 0$) и волокон ($n = 1, 2, 3$).

4. Результаты численного исследования. Результаты численного решения представляем для трубы, внутренний радиус которой $a = 100$ мм, внешний радиус $b = a + 3h = 103$ мм (см. рис. 1). Волокна в ней квадратного сечения $\delta \times \delta$ с длиной стороны сечения $\delta = 0,6$ мм. Коэффициент армирования трубы $k_f = \delta^2/h^2 = 0,36$. Физические уравнения для материала матрицы строили, используя потенциал Левинсона-Буржеса [10].

$$W_m = \frac{E_m}{4(1+\nu_m)} \left(2\beta_m + \frac{4\nu_m - 1}{1 - 2\nu_m} \right) (\sqrt{I_3} - 1)^2 \left[\beta_m (I_1 - 3) + (1 - \beta_m)(I_2 I_3^{-1} - 3) + \right. \\ \left. + 2(1 - 2\beta_m)(\sqrt{I_3} - 1) + \left(2\beta_m + \frac{4\nu_m - 1}{1 - 2\nu_m} \right) (\sqrt{I_3} - 1)^2 \right],$$

где I_1, I_2, I_3 – инварианты тензора меры деформации Коши–Лагранжа. Параметры E_m, ν_m характеризуют жесткость и сжимаемость материала матрицы; β_m – дополнительная константа материала. Для модуля

упругости связующего принимали $E_m = 4$ МПа, для параметра сжимаемости полагали $\nu_m = 0,40$, параметр β_m считали равным единице. Поведение материала волокон моделировали потенциалом Блейтца [11]

$$W_f = \frac{E_f}{4(1+\nu_f)} \left[(I_1 - 3) - \frac{2}{1 - 2\nu_f} \ln \sqrt{I_3} + \frac{4\nu_f}{1 - 2\nu_f} (\sqrt{I_3} - 3) \right]$$

с модулем упругости $E_f = 68$ МПа и параметром сжимаемости $\nu_f = 0,4$.

Материал матрицы с указанными параметрами соответствует механическим свойствам полиуретанового каучука, а материал волокон – свойствам полиуретановых нитей [12].

Результаты приводим на основе сетки узловых точек конечно-разностной схемы, при которой на осевых отрезках $0 \text{ мм} \leq t \leq 0,3 \text{ мм}$ и $0,3 \text{ мм} \leq t \leq 0,5 \text{ мм}$ по семь равноотстоящих узловых точек, а на радиальных отрезках для областей волокон по тринадцать и областей матрицы между волокнами по девять узловых точек. Точки на границах раздела связующего с волокнами,

в соответствии с компьютерным алгоритмом решения задачи, рассматривались как сдвоенные, принадлежащие разным компонентам материала (координатные линии, отвечающие данной сетке узловых точек, показаны на рис. 2). Задача при такой сетке узловых точек решалась с довольно высокой точностью. Так, удвоив указанное количество узловых точек по координатным

направлениям t и r , пришли к значениям радиальных перемещений во внутренней и внешней поверхностях трубы при давлении в ней $p = 0,2$ МПа, отличающихся от соответствующих значений при исходной дискретизации в пределах 0,15%.

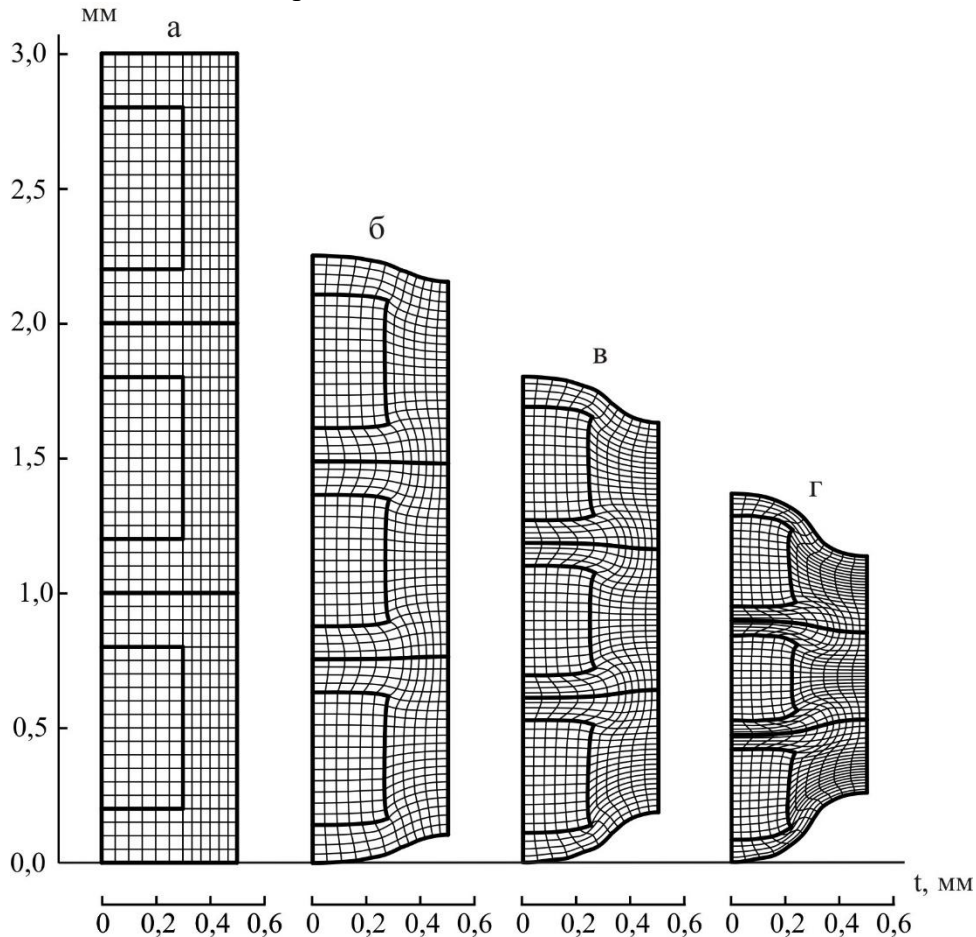


Рис. 2. Конфигурации концентрической сборки из кольцевых элементов трехслойной трубы справа от центрального сечения $t = 0$ мм: а – сборка при отсутствии давления в трубе; б, в, г – сборка при давлениях в трубе $p = 0,200$ МПа, $0,250$ МПа и предельном давлении $0,273$ МПа

На рис. 2 изображены четыре конфигурации осевого сечения концентрической сборки из трех кольцевых элементов справа от поперечного сечения $t = 0$. Конфигурации сборки представлены сетками материальных координатных линий $t = t_i$, $z = z_i$, проходящих через узловые точки (t_i, z_i) конечно-разностной схемы решения задачи. Координатные линии строили по интерполяционным кубическим сплайнам в параметрической форме [13]. Первая конфигурация относится к недеформированной трубе (сборке), приведена для сопоставления с ней

остальных трех деформированных конфигураций. Деформированные конфигурации на рис. 2, б-г создаются при значениях внутреннего давления $p = 0,200$ МПа, $0,250$ МПа и $0,273$ МПа соответственно. Давление $p = 0,273$ МПа, напомним, предельное, при котором конфигурация трубы начинает самопроизвольно развиваться до ее разрушения. (Возможно исследование дальнейшего статического развития конфигурации трубы при соответствующем падении в ней давления. Для этого следует от продолжения решения по давлению внутри

трубы перейти к продолжению по радиальному перемещению одной из точек в ее осевом сечении. Удобно использовать перемещение точки (удлинение радиуса окружности) во внутренней или внешней поверхности трубы по месту центрального сечения $t = 0$ мм).

Площадь поперечного сечения сборки уменьшается вместе с увеличением ее диаметра при возрастании внутреннего давления. Ввиду тонкостенности эластоармированной трубы конфигурация ее стенки в деформированном состоянии остается достаточно близкой к цилиндрически симметричной относительно срединной цилиндрической поверхности $r = a + 1,5h$ ($z = 1,5h$).

Ограничивающие поверхности трубы приобретают волнообразную форму (гофрируются) с периодом вдоль образующей, равном периоду армирования h . Стрелы прогибов (двойные амплитуды волнообразования) во внутренней и внешней поверхностях трубы, определяемые как разности по модулю перемещений в данных поверхностях по месту центрального $t = 0$ мм и крайнего $t = 0,5$ мм сечений

$$f_a = \left| u_{(3)} \Big|_{t=0, r=a} - u_{(3)} \Big|_{t=h/2, r=a} \right|,$$

$$f_b = \left| u_{(3)} \Big|_{t=0, r=b} - u_{(3)} \Big|_{t=h/2, r=b} \right|,$$

не очень существенно отличаются между собой. Так, в случае предельного состояния при $p = 0,273$ МПа, для которого прогибы в ограничивающих поверхностях наибольшие, $f_a = |198,894 - 199,151| = 0,257$ мм и $f_b = |197,260 - 197,028| = 0,232$ мм, их различие между собой равно 10,2%, (относим к среднему значению прогибов между собой $(f_a + f_b)/2$). Для конфигурации при $p = 0,200$ МПа $f_a = |48,848 - 48,952| = 0,104$ мм, $f_b = |48,099 - 48,002| = 0,097$ мм с отличием между собой 7,0%.

Срединная поверхность сборки (и трубы в целом) остается в деформированной конфигурации практически цилиндрической. Прогибы ее малы по сравнению с прогибами в ограничивающих поверхностях. Стрела прогиба в срединной поверхности при $p = 0,273$ МПа

$$f = \left| u_{(3)} \Big|_{t=0, r=(a+b)/2} - u_{(3)} \Big|_{t=0,5, r=(a+b)/2} \right|$$

равна лишь

$$f = |198,076 - 198,082| = 0,006 \text{ мм.}$$

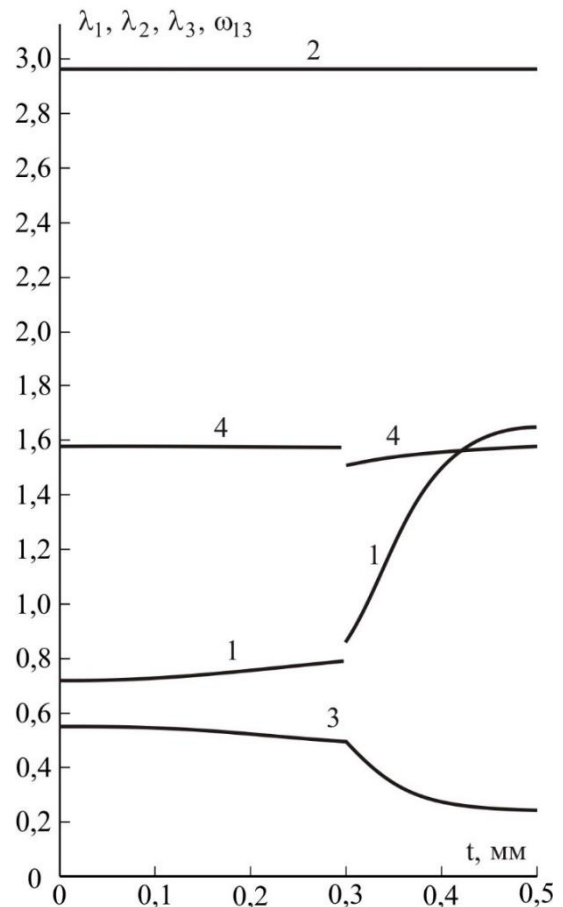


Рис. 3. Распределения кратностей удлинений λ_1 (1), λ_2 (2), λ_3 (3) и координатного угла ω_{13} (4) в срединной поверхности $z = 1,5h$ трехслойной трубы на протяжении половины сборки кольцевых элементов при предельном давлении $p = 0,273$ МПа

В качестве особенностей деформирования материала матрицы отметим его выдавливание из областей волоконно-матричного слоя между волокнами в область матричного слоя. Ограничивающие цилиндрические поверхности кольцевых волокон в деформируемой трубе становятся выпуклыми, а их торцевые поверхности – вогнутыми. Площадь поперечного сечения сборки, равно как осевого сечения трубы, в предельном состоянии становится примерно в 2,5 раза меньше, чем в исходном. Площадь поперечного сечения волокна при этом уменьшается в 2,4 раза. При этом объем, занимаемый в целом материалом трубы, увеличивается на 22% по сравнению с исходным – как

следствие сжимаемости применяемых в ней материалов связующего и волокон.

На рис. 3 приведены графики распределения линейных деформаций λ_1 , λ_2 , λ_3 и координатного угла ω_{13} как угловой деформации в срединной поверхности $z = 1,5$ мм для случая нагружения трубы предельным давлением $p = 0,273$ МПа.

Деформации λ_1 и ω_{13} претерпевают скачки по месту перехода от торцевой поверхности волокна к связующему – в соответствие с разными упругими свойствами контактируемых материалов. Возрастание всюду на интервале $0 \leq t \leq 0,5$ мм осевой деформации λ_1 сопровождается убыванием всюду на данном интервале радиальной деформации λ_3 .

Выводы. Провели исследование эластокомпозитной трубы из трех слоев, армированных кольцевыми волокнами квадратного сечения, под воздействием внутреннего давления. Деформирование трубы изучали при больших перемещениях и деформациях по модели кусочно-однородной среды. Выявили изменения материальной конфигурации трубы вместе с гофрированием во внутренней и внешней поверхностях при возрастании внутреннего давления. Обнаружили вытеснение связующего из областей между концентрически расположенными волокнами в примыкающие области матричного слоя. Определили предельное давление, когда труба начинает самопроизвольно развиваться по диаметральному размеру до разрушения.

Литература

1. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 572 с.
2. Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике эластомеров. Київ: Наук. думка, 2002. 655 с.
3. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Ленинград: Машиностроение, 1986. 336 с.
4. Holzapfel G. A., Gasser T. C., Ogden R. W. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. *J. of Elasticity*. 2000. Vol. 61. P. 1–48.
5. Holzapfel G. A., Gasser T. C., Stadler M. A structural model for the viscoelastic behavior of arterial walls: Continuum formulation and finite element analysis. *European J. of Mechanics A–Solids*. 2002. Vol. 21. P. 441–463.
6. Green A. E., Adkins J. E. Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics. Oxford: At the Clarendon Press, 1960.
7. Akhundov V. M. Analysis of elastomeric composites based on fiber-reinforced systems. 1. Development of design methods for composite materials. *Mechanics of Composite Materials*. 1998. Vol. 34, No. 6. P. 515–524.
8. Korn G. A. and Korn T. M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review. New-York: General Publ. Company, 2000. 1151 p.
9. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. Москва: Мир, 1975. 558 с.
10. Levinson M. and Burgess I. W. A comparison of some simple constitutive relations for slightly compressible rubber-like materials. *Int. J. Mech. Sci.* 1971. Vol. 13. P. 563–572.
11. Blatz P. J. and Ko W. L. Application of finite elastic theory to the deformation of rubber materials. *Trans. Soc. Rheology*. 1962. Vol. 7, No 6. P. 223–251.
12. Энциклопедия полимеров: у 3 т. / под ред. В. А. Кабанова и др. Москва: Советская энциклопедия, 1977. 1044 с.
13. Akhundov V. M., Kostrova M. M., Naumova I. Ju. Graphic Visualization of Deformed Fibre-Reinforced Materials. *Metallurgical and Mining Industry*. 2017. No. 2. P. 52–58.

References

1. Malmeyster, A. K., Tamuzh, V. P. & Teters, G. A. (1980). Strength of Polymer and Composite Materials. Riga: Zinatne.
2. Kirichevskiy, V. V. (2002). The finite element method in mechanic of elastomers. Kiev: Naukova dumka.
3. Chernykh, K. F. (1986). Nonlinear Elasticity Theory in Machine-Building Calculations. Leningrad: Mashinostroenie.
4. Holzapfel, G. A., Gasser, T. C. & Ogden, R. W. (2000). A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. *J. of Elasticity*, Vol. 61, pp. 1–48.
5. Holzapfel, G. A., Gasser, T. C. & Stadler, M. (2002). A structural model for the viscoelastic behavior of arterial walls: Continuum formulation and finite element analysis. *European J. of Mechanics A–Solids*, Vol. 21, pp. 441–463.
6. Green, A. E. & Adkins, J. E. (1960). Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics. Oxford: At the Clarendon Press.
7. Akhundov, V. M. (1998). Analysis of elastomeric composites based on fiber-reinforced systems. 1. Development of design methods for composite materials. *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 34, No. 6, pp. 515–524.
8. Korn, G. A. & Korn, T. M. (2000). *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review*. New-York: General Publ. Company.
9. Ortega, Dzh. & Rejnboldt, V. (1975). *Integration Methods for Solving of Nonlinear Systems of Equations with Many Unknowns*. Moscow: Mir.
10. Levinson, M. & Burgess, I. W. (1971). A comparison of some simple constitutive relations for slightly compressible rubber-like materials. *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 13, pp. 563–572.
11. Blatz, P. J. & Ko, W. L. (1962). Application of finite elastic theory to the deformation of rubber materials. *Trans. Soc. Rheology*, Vol. 7, No 6, pp. 223–251.
12. Kabanov, V. A. et al. (Eds.). (1977). *Encyclopedia of Polymers*. Vol. 3. Moscow: Sovets Entsikl.
13. Akhundov, V. M., Kostrova, M. M. & Naumova, I. Ju. (2017). Graphic Visualization of Deformed Fibre-Reinforced Materials. *Metallurgical and Mining Industry*, No. 2, pp. 52–58.

УДК 512.643:517.952

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-02

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ВИРІШЕННЯ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Ю. Н. Базилевич¹, І. А. Костюшко², О. С. Левчук³

¹Придніпровська державна академія будівництва та архітектури,

²Запорізький національний університет,

³Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»

bazilvch@ukr.net, kostushkoia5@gmail.com, olya.levchuck@gmail.com

Ключові слова:

системи лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку, приведення матриць, матриця перетворення.

Запропоновано новий підхід до вирішення систем лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку. Використовуються методи одночасного приведення декількох матриць до діагонального або до блочно-діагонального вигляду шляхом застосування методу комутуючої матриці. Цей метод полягає в знаходженні в безлічі всіх матриць, комутуючих із заданими матрицями початкової системи диференціальних рівнянь, такої матриці, яка має як мінімум два різні власні значення.

Якщо система диференціальних рівнянь містить матриці другого порядку, кількість яких більше двох, то за умови існування комутуючої матриці наведена система диференціальних рівнянь поділяється на два незалежні лінійні диференціальні рівняння першого порядку і, таким чином, завжди має аналітичний розв'язок.

У випадку, коли порядок матриць вихідної системи більше двох, за допомогою матричного методу можна привести вихідні матриці порядку n до блочно-діагональної форми, тобто розділити початкову систему на дві підсистеми. Надалі застосовується той самий метод комутуючої матриці для отриманих підсистем. Якщо отримані підсистеми далі не поділяються на підсистеми, то навіть у такому вигляді завдання значно спрощене.

ABOUT ONE APPROACH TO THE SOLUTION OF LINEAR EQUATIONS IN PRIVATE DERIVATIVES OF THE FIRST ORDER

Yu. N. Bazilevich¹, I. A. Kostushko², O. S. Levchuk³

¹Prydniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture,

²Zaporizhzhia National University,

³National Technical University of Ukraine National Technical University of Ukraine

"Kyiv Igor Sikorsky Polytechnic Institute"

bazilvch@ukr.net, kostushkoia5@gmail.com, olya.levchuck@gmail.com

Key words:

systems of first-order linear differential equations in partial derivatives, matrix reduction, a transformation matrix.

The paper proposes a new approach to solving systems of linear first-order partial differential equations. We use the methods of simultaneous reduction of several matrices. Sometimes, this allows to get an analytical solution or significantly simplify the problem.

Systems of linear partial differential equations of the first order arise in various application areas. We well know the case when the system is described by two matrixes of coefficients. In this paper, we consider the case when there are over two matrices.

For simplicity, we first consider a system of two partial differential equations for two unknown functions: For simplicity, we first consider a system of two partial differential equations for two unknown functions: $u = u(x, y)$; $v = v(x, y)$:

$$A \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Here A , B and G are constant square matrixes of coefficients. Nondegenerate linear transformations of the system (1) are the

replacement of variables and the multiplication of the system on the left by a non-singular matrix. Thus, transformations of matrices are reduced to their simultaneous multiplication on the left by one and on the right by another matrix.

When the matrix G is zero and one of the matrices (for example, B) is nondegenerate, the solution process corresponds to the reduction of the matrix pencil. The system is first multiplied on the left by the matrix inverse to B , and afterward, using a similarity transformation, the second matrix is reduced to its Jordan form. If this form is diagonal, we can divide the system into two independent equations and, thus, get a general solution of the system of equations. This case is analyzed in the literature. If the Jordan form is non-diagonal, the system can be reduced to a triangular form and one independent equation can be obtained, always integrable in quadrature. Substitution of this solution into the second equation allows us to get a general solution of the original system of differential equations.

If an equation of type (1) has over two matrices, then the similarity transformation applies to several matrices. We find the transformation using the method of the switching matrix. It consists in finding in the set of all matrices commuting with these matrices such a matrix T , which has at least two different eigenvalues. The columns of the desired similarity transformation matrix are the vectors of the canonical basis of the matrix T . Such a similarity transformation leads all the original matrices to the same block-diagonal form with two (at least) blocks on the main diagonal.

To find the set of all matrices that commute with these matrices, you can declare all the elements of the matrix as unknowns and make up the corresponding system of linear homogeneous algebraic equations. There are methods for finding a general solution to such a system of equations. If the dimension of the obtained general solution is greater than 1, then the splitting of the original system of equations is possible, otherwise, it is not. In the first case, we can divide the system into two independent equations and a general solution of the system of equations.

Next, we consider a system of equations with third-order matrices. First, we make an attempt using the commuting matrix method to bring the original matrices to a block-diagonal form, i.e. divide the equations into two subsystems of the first and second orders. Then - apply the same method for the obtained subsystem of the second order. If the subsystem of the second order is not divided into subsystems, then even in this form it considerably simplifies the task.

A similar approach is possible for higher order systems. Thus, the initial system of equations using matrix methods is divided into subsystems, which simplifies the process of their further solution.

Вступ. Системи лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку виникають у різних областях додатків. У разі, коли система описується двома матрицями коефіцієнтів, розв'язок може бути отриманим шляхом приведення пучка матриць. У роботі розглядається випадок, коли матриць більше двох, у тому числі коли і порядок матриць більше двох.

Для одночасного приведення декількох матриць до діагонального або до блочно-діагонального виду використовується метод комутуючої матриці.

Використання приведення пучка матриць. Система двох диференціальних рівнянь у частинних похідних відносно двох невідомих функцій $u = u(x, y)$; $v = v(x, y)$ має вигляд:

$$A \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Невироджені лінійні перетворення системи (1) – це:

а) заміна змінних $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$, де S – неособлива матриця, U, V – нові функції змінних x, y ;

б) множення системи ліворуч на неособливу матрицю H .

При цьому матриці A , B , G перетворюються до виду:

$$\hat{A} = HAS, \quad \hat{B} = HBS, \quad \hat{G} = HGS. \quad (2)$$

Випадок, коли матриця G – нульова і одна з матриць (наприклад, B) невивроджена, загальновідомий. У цьому випадку процес рішення відповідає приведенню пучка матриць $A + \lambda B$. Систему (1) можна претворити до вигляду:

$$A_1 \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

де $A_1 = B^{-1}A$, E – одинична матриця. Надалі можна застосувати для матриць перетворення подібності, яке не міняє одиничну матрицю, а іншу матрицю приводить до її жорданової форми. Якщо ця форма діагональна, то можна розділити систему на два незалежні між собою рівняння і, таким чином, отримати загальний розв'язок системи рівнянь [7].

Якщо жорданова форма матриці A_1 не діагональна, то систему можна привести до трикутного виду і отримати одне незалежне рівняння, завжди інтегроване в квадратурі. Підстановка цього рішення в друге рівняння дозволяє отримати загальний розв'язок початкової системи диференціальних рівнянь.

Постановка задачі. У наведеній роботі розглядається рішення (чи спрощення) системи рівнянь (1) і аналогічних за допомогою перетворення (2) у випадку, коли матриць більше двох, у тому числі коли і порядок матриць більше двох.

Метод комутуючої матриці. Цей метод запропонований одночасно А. К. Лопатіним і Е. Д. Якубович [1, 2]. При цьому використовуються теореми теорії матриць [3]. Метод комутуючої матриці вже давно використовується для спрощення інших систем рівнянь [1, 2, 4, 6].

Розглянемо множину $\Lambda(B_\nu)$ усіх матриць, що комутують із заданими матрицями $B_\nu (\nu = \overline{1, m})$. Ця множина є алгеброю над полем \mathbb{C} комплексних чисел і називається *централізатором* матриць $\{B_\nu\}$. Якщо існує матриця $T \in \Lambda(B_\nu)$, що має хоча б два різні власні числа, то перетворення подібності $\tilde{B}_\nu = S^{-1} \cdot B_\nu \cdot S$ (де S — матриця, стовпцями якої є вектори канонічного базису ма-

триці T) приводить усі матриці $\{B_\nu\}$ до однакового блочно-діагонального виду з двома (як мінімум) блоками на головній діагоналі.

Для знаходження централізатора (точніше кажучи, його базису) можна оголосити усі елементи матриці T невідомими і скласти систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь, що відповідає матричним рівнянням

$$B_\nu T = T B_\nu, \quad \nu = \overline{1, m}.$$

Отримуємо vn^2 рівнянь с n^2 невідомими. Загальний розв'язок такої системи (при невеликому n) можна отримати відомими методами. Найбільш ефективні обчислювальні алгоритми запропоновано в [5].

Позначимо базис централізатора $\Lambda(B_\nu)$ через W_1, W_2, \dots, W_r . Якщо розмірність r централізатора дорівнює 1, то увесь централізатор складається з матриць, кратних одиничній матриці. У цьому випадку приведення матриць B_ν до блочно-діагонального виду неможливо. Якщо $r > 1$, то в якості матриці T , яка використовується для знаходження перетворення, вибираємо матрицю базису W_k , що має хоч би два різні власні числа. Вектори її канонічного базису є стовпцями шуканої матриці S перетворення подібності. Особливий випадок, коли $r > 1$, але усі матриці базиса не мають різних власних чисел, розглянутий у [5].

Випадок, коли матриць більше двох. Для простоти викладання розглянемо застосування метода комутуючої матриці на наступному прикладі.

Розглядається система диференціальних рівнянь (1), у якій:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \\ G = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача полягає в спрощенні системи (1) шляхом «розщеплювання» її на два незалежні рівняння методом комутуючої матриці і подальшого отримання її загального розв'язку. Систему (1) помножимо ліворуч на матрицю B^{-1} , отримуємо нові матриці коефіцієнтів:

$$A_1 = B^{-1}A = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G_1 = B^{-1}G = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_1 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для матриць A_1 і G_1 знаходимо централізатор, тобто множину матриць T , що кому-тує одночасно з обома матрицями:

$$\begin{cases} A_1 T = T A_1; \\ G_1 T = T G_1. \end{cases} \quad (3)$$

Загальний розв'язок (3) має вигляд:

$$T = aE + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

де a і b – довільні сталі. У частинному випадку при $a = 0, b = 1$ матриця T стає наступною:

$$T^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Її власні числа дійсні і різні: $\lambda_{1,2} = \pm 1$, що означає можливість перетворення початкової системи (1) до двох незалежних рівнянь. Для цього складається матриця перетворення S , стовпцями якої є власні вектори матриці T^* :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Інакше кажучи, виконується заміна змінних:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U + V \\ U - V \end{pmatrix}, \quad (4)$$

де U, V – нові функції змінних x, y ; система перетвориться до вигляду:

$$A_2 \begin{pmatrix} U_x \\ V_x \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} U_y \\ V_y \end{pmatrix} = G_2 \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix},$$

де $A_2 = S^{-1}A_1S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, G_2 = S^{-1}G_1S = -\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Отримана система містить два незалежні лінійні диференціальні рівняння першого порядку:

$$\begin{cases} -U_x + U_y = -3U; \\ V_y = -V. \end{cases}$$

Розв'язок цих рівнянь має вигляд: $U = e^{3x} \cdot f(x + y); V = \varphi(x) \cdot e^{-y}$, де f, φ – довільні функції вказаних аргументів.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}.$$

З урахуванням (4), отримуємо остаточний розв'язок системи рівнянь (1):

$$\begin{aligned} u &= U + V = e^{3x} \cdot f(x + y) + \varphi(x) \cdot e^{-y}; \\ v &= U - V = e^{3x} \cdot f(x + y) - \varphi(x) \cdot e^{-y}. \end{aligned}$$

Зауважимо, якщо метод комутуючої матриці показав неможливість розділення рівнянь системи рівнянь (1) на підсистеми, то ніяка заміна змінних не дозволяє розділити систему (1) [5].

Порядок матриць більше двох. У випадку системи диференціальних рівнянь третього (і більше) порядку спочатку можна спробувати за допомогою методу комутуючої матриці привести матриці коефіцієнтів до блочно-діагонального вигляду, тобто розділити рівняння на дві підсистеми менших порядків. Далі – застосувати той же метод для отриманих підсистем.

Як приклад розглянемо систему трьох диференціальних рівнянь відносно невідомих u, v, w – функцій незалежних змінних x, y, z :

$$\begin{aligned} E \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \\ w_x \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \\ w_y \end{pmatrix} + \\ + B \cdot \begin{pmatrix} u_z \\ v_z \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 1 & 8 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} 20 & 6 & -6 \\ 3 & 20 & -3 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Структура матриць централізатора T наступна:

$$T = \begin{pmatrix} a + b + c & b & -b \\ a & a + b + c & -a \\ a & b & c \end{pmatrix},$$

тут a, b, c – довільні числа. Покладемо $a = 1, b = c = 0$, отримуємо комутуючу матрицю:

$$T^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

власні числа якої – дійсні і різні: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1; \lambda_3 = 0$.

Складемо матрицю перетворення S , стовпці якої – власні вектори матриці T^* :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Аналогічно до попереднього переходимо до нових невідомих функцій U, V, W з матрицею заміни змінних (6). Після цього система рівнянь приводиться до двох незалежних підсистем:

$$\begin{cases} U_x + 8U_y + 20U_z = 0; \\ V_x + 2U_y + 6V_y + 6U_z + 14V_z = 0; \end{cases} \quad (7)$$

$$\{W_x + 7W_y + 17W_z = 0. \quad (8)$$

Розв'язок (8) має вигляд: $W(x, y, z) = \vartheta(y - 7x, z - 17x)$, де ϑ – довільна функція своїх аргументів.

Для підсистеми (7) знову застосовуємо метод комутуючої матриці. Елемент централізатора для матриць $C = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$ може бути представлений наступним чином: $T^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тоді матриця заміни змінних має вигляд:

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Від змінних U, V переходимо до нових невідомих функцій \tilde{U}, \tilde{V} з матрицею заміни змінних (9). Після цього система рівнянь (7) приводиться до вигляду:

$$\begin{cases} \tilde{U}_x + 8\tilde{U}_y + 20\tilde{U}_z = 0; \\ \tilde{V}_x + 6\tilde{V}_y + 14\tilde{V}_z = 0, \end{cases}$$

загальні розв'язки яких мають наступний вигляд:

$$\tilde{U}(x, y, z) = \varphi(y - 8x, z - 20x);$$

$$\tilde{V}(x, y, z) = \psi(y - 6x, z - 14x),$$

де φ, ψ – довільні функції вказаних аргументів.

Надалі переходимо до змінних U, V за допомогою матриці перетворення (9) та враховуємо розв'язок для функції W , отриманий раніше. Потім за допомогою матриці (6) отримуємо остаточний розв'язок вихідної системи (5):

$$u(x, y, z) = \varphi(y - 8x, z - 20x) + \psi(y - 6x, z - 14x);$$

$$v(x, y, z) = \varphi(y - 8x, z - 20x) + \vartheta(y - 7x, z - 17x);$$

$$w(x, y, z) = \varphi(y - 8x, z - 20x) + \psi(y - 6x, z - 14x) + \vartheta(y - 7x, z - 17x).$$

У ряді випадків повне розділення системи n диференціальних рівнянь на n незалежні рівняння неможливо, проте застосування цього підходу дозволяє значне спрощення початкової системи.

Розглянемо систему рівнянь (5), у якій

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 32 & 3 & 4 \\ 8 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для матриць A і B знаходимо комутуючу матрицю $T^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ і відповідну матрицю заміни змінних S :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вказана заміна змінних приводить матриці коефіцієнтів системи (5) до вигляду:

$$A_1 = S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = S^{-1} \cdot B \cdot S = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 16 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, вихідна система (5) розбивається на дві підсистеми:

$$\begin{cases} U_x - 5U_z - V_z = 0, \\ V_x + 5V_y + 16U_z + 5V_z = 0; \end{cases} \quad (10)$$

$$\{W_x + 11W_z = 0. \quad (11)$$

Розв'язок рівняння (11) має простий аналітичний вигляд: $W = F(11x - z; y)$, де F – довільна функція. Перша підсистема (10) другого порядку не розбивається на підсистеми, оскільки будь-яка матриця, що комутує з матрицями коефіцієнтів, кратна одиничній. Але навіть у такому вигляді завдання значно спрощене.

Висновки. Розглянуто новий підхід до рішення систем лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку. За допомогою матричних методів початкова система розбивається на незалежні підсистеми, що значно спрощує процес їх подальшого рішення.

Література

1. Лопатин А. К. Об алгебраической приводимости систем линейных дифференциальных уравнений. *Дифференциальные уравнения*. 1968. Т. 4, № 3. С. 439–445.
2. Якубович Е. Д. Построение систем замещения для некоторого класса многомерных линейных систем автоматического управления. *Изв. вузов. Радиофизика*. 1969. Т. 12, № 3. С. 362–377.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Москва: Наука, 1967. 576 с.
4. Декомпозиционные методы в математическом моделировании и информатике: тезисы докладов 2-ой Моск. конф. / Под ред. Ю. Н. Павловского. Москва: ВЦ РАН, 2004. 213 с.
5. Базилевич Ю. Н. Численные методы декомпозиции в линейных задачах механики. Киев: Наук. думка, 1987. 156 с.
6. Базилевич Ю. Н., Костюшко И. А. О постановке задач точной декомпозиции линейных математических моделей. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2017. № 1. С. 77–82.
7. Колоколов И. В., Кузнецов Е. А., Мильштейн А. И. и др. Задачи по математическим методам физики. Москва: Эдиториал УРСС, 2000. 288 с.

References

1. Lopatin, A. K. (1968). The algebraic reducibility of systems of linear differential equations. I. Moscow: MAIK «Nauka /Interperiodika» *Differentsialnyie uravneniya*. Vol. 4, No. 3, pp. 439–445 (In Russian).
2. Yakubovich, E. D. (1969). Construction of replacement systems for a class of multidimensional linear automatic control systems. *Izv. Vuzov, Radiofizika*, Vol. 12, No. 3, pp. 362–377 (in Russian).
3. Gantmacher, F. R. (1977). *The Theory of Matrices*. Moscow: Nauka.
4. Pavlovskii, Yu. N. (Ed.). (2004). *Decomposition methods in mathematical modeling and computer science. Tezisy докладov 2-oy Moskovskoy konferentsii*. Moscow: VTs RAN (in Russian).
5. Bazilevich, Yu. N. (1987). *Numerical methods of decomposition in linear problems of mechanics* Kiev: Naukova dumka (in Russian).
6. Bazilevich, Yu. N., & Kostyushko, I. A. (2017). On Formulation of Problems of Precise Decomposition of Linear Mathematical Models. *Journal of Automation and Information Sciences*, Vol. 49, No. 2, pp. 43–49.
7. Kolokolov, I. V., Kuznetsov, E. A., Milshteyn, A. I. et al. (2000). *Tasks on mathematical methods of physics*. Moscow: Editorial URSS. (In Russian).

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-03

ОРТОТРОПНИЙ ПРЯМОКУТНИК ПІД ВПЛИВОМ ПЛОСКОГО ШТАМПА

О. В. Белова, І. В. Щербина

Національна металургійна академія України
okbelova@rambler.ru, sherbinaiv@ukr.net

Ключові слова:

асимптотичний метод, метод малого параметра, ортотропний матеріал, прямолінійна анізотропія, модельна задача.

Механізми пошкодження композиційних і анізотропних матеріалів суттєво відрізняються від механізмів пошкодження однорідних та ізотропних матеріалів. Застосування методів лінійної механіки руйнування до композитів обмежене із-за анізотропії і неоднорідності структури таких матеріалів. Асимптотичний аналіз дозволяє спрогнозувати подальшу поведінку матеріалу або конструкції, обрати найкращий обчислювальний метод та розібратися у числовому матеріалі. Такий аналіз особливо ефективний в тих областях значень параметрів, де машинні обчислення зустрічають серйозні утруднення. Згідно з таким підходом асимптотичний аналіз рівнянь теорії пружності для ортотропних тіл виконується з використанням параметрів, що характеризують анізотропію. При цьому вихідні задачі теорії пружності зводяться до рекурентної послідовності крайових задач теорії потенціалу. Розв'язана задача про втискання плоского штампа в пружну ортотропну напівплощину центральною прикладеною силою. Передбачалось, що на середній ділянці має місце зчеплення штампа із пружною півплощиною. На бічних ділянках області контакту має місце ковзання, причому як з тертям, так й без тертя. Довжина ділянки зчеплення невідома та підлягає визначенню. Наведена нижче задача розв'язується авторами методом збурень [3].

CONTACT INTERACTION OF THE STAMP WITH THE RECTANGULAR PLATE

O. V. Belova, I. V. Shcherbina

National Metallurgical Academy of Ukraine
okbelova@rambler.ru, sherbinaiv@ukr.net

Key words:

asymptotic method, small parameter method, orthotropic material, rectilinear anisotropy, model problem.

Mechanisms of damage of composite and anisotropic materials essentially differ from mechanisms of damage of homogeneous and isotropic materials. Application of a method of linear mechanics of destructions to aggregates is limited because of anisotropy and heterogeneity of structure of such materials. The asymptotic analysis allows to predict the further behaviour of a material or a construction, to choose the best computing method and to understand a numerical material. Such analysis is especially effective in those areas of value of parameters where computer evaluations are inconvenient. According to such approach the asymptotic analysis of the equations of the theory of an elasticity for orthotropic skew fields is fulfilled with application of the parameters describing anisotropy. Thus initial problems of the theory of an elasticity are reduced to recurrent sequence of boundary value problems of a potential theory.

Appreciable interest of researchers already enough long time is caused with contact problems in view of coupling and slippage. The problem about indentation of a flat die in resilient orthotropic half plane is solved is central by the enclosed force. It was supposed, that on an average site coupling a die with resilient half plane takes place. On lateral sites of area of contact sliding, and, both with friction [1], and without friction [2] takes place. The length of a site of coupling is unknown and is a subject to definition. In the further this problem was studied by many authors and various methods [3; 4]. The mentioned below problem is solved authors a method of indignations.

Вступ. Сьогодні особливий інтерес інженерів викликають конструкції з сучасних композиційних матеріалів. Проблеми контакту тіл з таких матеріалів визначають процеси міцності і довговічності споруд. Завдяки цьому можна обґрунтовано визначати доцільність застосування того чи іншого матеріалу в певних умовах експлуатації (при деформації, руйнуванні, дії зовнішніх сил). Наприклад, конструкцій з алюмінію, титану, сталі, армованих металевими волокнами композитів. Але сильно виражена анізотропія багатьох видів композитів призводить до значних складнощів при обчисленні основних характеристик їх напружено-деформованого стану.

Значний інтерес дослідників уже досить тривалий час викликають контактні задачі з урахуванням зчеплення та ковзання. Розв'язана задача про вдавнення плоского штампа в пружну ізотропну напівплощину центрально прикладеною силою. Передбачалося, що на середній ділянці має місце зчеплення штампа з пружною напівплощиною. На бічних ділянках області контакту має місце ковзання, причому як з тертям [1], так і без тертя [2]. Довжина ділянки зчеплення невідома і підлягає визначенню. Надалі ця задача вивчалася багатьма авторами і різними методами [3, 4]. Наведене нижче завдання вирішується авторами методом збурень [3].

Постановка задачі. Нехай пружний ортотропний прямокутник $0 \leq x \leq h$, $|y| \leq b$ закріплений по краях $y = \pm b$. Головні напрямки анізотропії матеріалу прямокутника збігаються з декартовими осями координат x , y . У вільну грань прямокутника $x = 0$, $|y| \leq b$ втискається жорсткий штамп з плоскою основою ширини $2l$ ($l < b$) центральною силою P_0 (штамп рухається поступально, паралельно осі Ox). Передбачається, що в області контакту штампа з прямокутником існують дві ділянки ковзання, що примикають до кінцевих точок області контакту, і ділянка зчеплення, що розташована між ними. У зонах ковзання зсувні зусилля спрямовані в протилежні сторони.

Граничні точки ділянки зчеплення $\pm a$, які заздалегідь невідомі і повинні бути визначені в результаті виконання задачі, розташовані симетрично щодо осі Ox . Напруження в цих точках повинні бути безперервними. Протилежна грань прямокутника $x = h$, $|y| < b$ залишається вільною. Прямокутник є пластиною товщини δ , працюючою в умовах узагальненого плоского напруженого стану. Потрібно визначити закон розподілу напружень під штампом, в прямокутнику і розмір ділянки зчеплення.

Поставлена задача може бути зведена до інтегрування рівнянь рівноваги прямокутника

$$B_1 u_{xx} + G u_{yy} + G(1 + \nu_2 B_1 / G) v_{xy} = 0,$$

$$G v_{xx} + B_2 v_{yy} + G(1 + \nu_1 B_2 / G) u_{xy} = 0$$

при наступних граничних умовах:

$$\sigma_{12} = \sigma_{11} = 0 \quad (x = h, |y| < b),$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0 \quad (x = 0, l < |y| < b),$$

$$u = const \quad (x = 0, |y| < l),$$

$$v = 0 \quad (x = 0, |y| < a),$$

$$u = v = 0 \quad (y = \pm b).$$

Метод розв'язання і результати. Математичні труднощі не дозволяють отримати точний аналітичний розв'язок такої задачі навіть для пружної ізотропної напівплощини. Тому для дослідження сформульованої задачі застосуємо асимптотический метод [2], який дозволяє розчленувати напружено-деформований стан пластини на дві складові. Кожна з цих складових знаходиться при послідовному розв'язанні крайових задач теорії потенціалу.

Установлено зв'язок між розмірами ділянки зчеплення в області контакту, коефіцієнтом тертя і жорсткостними характеристиками матеріалу пластини, причому вона виявляється такою ж, як і для напівсмуги. Це пояснюється характером даного напруженого стану (напружений стан типу граничного шару), який швидко змінюється в напрямку осі Ox .

На ділянці зчеплення отримаємо:

$$v_{x_2}^{2,0} = -\frac{2P_0}{2C_1\mu} \frac{\eta\sqrt{\alpha_*^2 - \eta^2}}{\pi l_1 \sqrt{GB_2}} \left(\sqrt{\frac{G}{B_1}} \frac{1}{(1-\eta^2)(\alpha_*^2 - \eta^2)} \left[(1-\alpha_*^2) \Pi\left(\varphi, \frac{\alpha_*^2 - \eta^2}{1-\eta^2}, \alpha_*\right) - (1-\eta^2) F(\varphi, \alpha_*) \right] + \frac{\rho}{(1-\eta^2)} \Pi_1\left(\frac{1-\alpha_*^2}{1-\eta^2}, \alpha_*\right) \right), \quad \eta = \eta_2/l_2, \quad (1)$$

де $\Pi_1(\vartheta, \alpha'_*)$ – повний еліптичний інтеграл третього роду, $\Pi(\varphi, s, \alpha_*)$ – неповний еліптичний інтеграл третього роду, $\varphi = \arcsin\left(\frac{(c^2 - 1)}{(c^2 - \alpha_*^2)}\right)^{1/2}$. Дотичне напруження під штампом ($x=0, |y| < l$) в першому наближенні знаходиться за формулами

$$\sigma_{12} = \text{sign}(y) \rho \sigma_{11}^{1,0} \quad (a < |y| < l),$$

$$\sigma_{12} = Gv_x^{2,0} = \left(\sqrt{GB_2}/l\right) v_{x_2}^{2,0} \quad (|y| < a).$$

Відзначимо, що при коефіцієнті тертя $\rho=0$ маємо $q=0, \alpha=0$, тобто ділянка зчеплення зникає. З ростом ρ ділянка зчеплення зростає. Розмір ділянки зчеплення залежить також від характеристик жорсткості матеріалу пластини. Причому зі зменшенням $(G/B_1)^{1/2}$ при постійному $\rho \neq 0$ ділянка зчеплення збільшується.

При скінченних, але досить великих значеннях β в обчисленнях $v_{x_2}^{2,0}$ за формулою (1) можна використовувати розміри α_* , знайдені із співвідношень

$$q = e^{-\pi\alpha},$$

$$\alpha = 4 \left(\left[\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} \right] \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \right]^{-1} \right)^2, \quad K = \frac{\pi}{2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \right). \quad (2)$$

Дійсно, оскільки $(c^2 - 1)/(c^2 - \alpha_*^2) = 1 - (1 - \alpha_*^2)/(c^2 - \alpha_*^2)$, то при $\alpha_* < 1, c > 1$ $(1 - \alpha_*^2)/(c^2 - \alpha_*^2) < 1$ і отримуємо

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{c^2 - 1}{c^2 - \alpha_*^2}} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1 - \alpha_*^2}{c^2 - \alpha_*^2} \right)^{1/2} - O \left(\left(\frac{1 - \alpha_*^2}{c^2 - \alpha_*^2} \right)^{3/2} \right).$$

Значення $\alpha_* = \alpha$, відповідне $\varphi = \pi/2$, знаходиться із співвідношень (1). Значення α_* , відповідне $\varphi \approx 1/c$, виявляється незначним і в першому наближенні ним можна знехтувати.

Результати розв'язання задачі, чисельний аналіз. Тиск під штампом ($x=0, |y| < l$) у розкладанні розв'язку по параметру $\varepsilon^{1/2}$ [3] після перших двох наближень визначається наступним чином:

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^{1,0} + \varepsilon^{1/2} \sigma_{11}^{1,1} + o(\varepsilon),$$

де $\varepsilon = G/B_1, \sigma_{11}^{1,1} = B_1(u_x^{2,0} + u_x^{1,1}), u_x^{2,0} = 0$, а $u_x^{1,1}$ виражається співвідношенням:

$$u_x^{1,1} = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{G}{B_1}} \frac{1}{l} \frac{m\rho P_0}{2\sqrt{B_1 B_2} c_1 \mu} \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - \eta_1^2}} \ln \frac{\ell_1 + \eta_1}{\ell_1 - \eta_1}.$$

Отже, тиск під штампом набуває вигляду

$$\sigma_{11} = -\frac{P_0}{\pi l} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \gamma \times \left(1 + \varepsilon^{1/2} \frac{m\rho}{\pi} \sqrt{\frac{G}{B_2}} \ln \frac{1+t}{1-t} + o(\varepsilon) \right), \quad t = \eta_1/\ell_1, \quad \gamma = \pi/(2c_1 \mu \ell_1). \quad (3)$$

Із співвідношення (3) отримаємо, що вплив границь прямокутника в порівнянні з напівплощиною виражається лише множником γ [1]. При врахуванні першого наближення по параметру ℓ_1/c_2 маємо

$$\text{arctg} \frac{2\sqrt{(\ell_1^2 - \eta_2^2)(c_2^2 - \ell_1^2)}}{c_2^2 + \eta_2^2 - 2\ell_1^2} = \frac{2\sqrt{(\ell_1^2 - \eta_2^2)}}{c_2} + o\left(\frac{\ell_1^2}{c_2^2}\right);$$

$$\ln \frac{c_2^2 + \eta_2^2 - 2\ell_1^2 - 2\sqrt{(\eta_2^2 - \ell_1^2)(c_2^2 - \ell_1^2)}}{c_2^2 - \eta_2^2} = -\frac{2\sqrt{(\eta_2^2 - \ell_1^2)}}{c_2} + o\left(\frac{\ell_1^2}{c_2^2}\right).$$

Тому на границі напівплощини ($\xi_2 = 0$) отримаємо:

$$\text{при } |\eta_2| < \ell_1, \quad u_x^{2,0} = -\frac{mG}{B_1\ell} \frac{P_0}{\pi\sqrt{B_1B_2c_1c_2\mu}};$$

$$\text{при } \ell_1 < |\eta_2| < c_2, \quad u_x^{2,0} = -\frac{mG}{B_1\ell} \times \left(\frac{\rho P_0}{\pi\sqrt{GB_2c_1\mu}} \frac{1}{\sqrt{\eta_2^2 - \ell_1^2}} + \frac{P_0}{\pi\sqrt{B_1B_2c_1c_2\mu}} \right);$$

$$\text{при } |\eta_2| > c_2, \quad u_x^{2,0} = -\frac{mG}{B_1\ell} \frac{\rho P_0}{\pi\sqrt{GB_2c_1\mu}} \times \frac{1}{\sqrt{\eta_2^2 - \ell_1^2}}.$$

Тоді функція $\varphi_1^1(\zeta_1)$ матиме вигляд

$$\begin{aligned} \varphi_1^1 &= \frac{1}{\pi i} \frac{m\rho P_0}{2\sqrt{B_1B_2c_1\mu}} \frac{1}{\sqrt{\zeta_1^2 - \ell_1^2}} \ln \frac{\ell_1 + \zeta_1}{\ell_1 - \zeta_1} + \\ &+ \frac{1}{\pi i} \frac{m}{\pi} \sqrt{\frac{G}{B_1}} \frac{P_0}{\sqrt{B_1B_2c_1c_2\mu}} \left(2i \left[\frac{\pi}{2} - \text{arctg} \sqrt{\frac{\ell_1^2 - \zeta_1^2}{c_2^2 - \ell_1^2}} \right] + \right. \\ &\left. + 2 \sqrt{\frac{\zeta_1 + \ell_1}{\zeta_1 - \ell_1}} \ln \frac{c_2 + \sqrt{c_2^2 - \ell_1^2}}{\ell_1} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

При цьому враховується, що $\ln(-1) = i\pi$ та при $\ell_1 < |\eta_2| < c_2$

$$\begin{aligned} \text{arctg} \left(i \sqrt{\frac{h_1^2 - \ell_1^2}{c_2^2 - \ell_1^2}} \right) &= \\ &= -\frac{i}{2} \ln \frac{\sqrt{c_2^2 - \ell_1^2} - \sqrt{h_1^2 - \ell_1^2}}{\sqrt{c_2^2 - \ell_1^2} + \sqrt{h_1^2 - \ell_1^2}}. \end{aligned}$$

У цьому випадку тиск під штампом визначається виразом

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{P_0}{\pi\ell} \gamma \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left\{ 1 + \varepsilon^{1/2} \frac{m}{\pi} \sqrt{\frac{G}{B_2}} \left[\rho \ln \frac{1+t}{1-t} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \sqrt{\frac{G}{B_1}} \frac{4\sqrt{1-t^2}}{\pi c_2} \left(\text{arctg} \sqrt{\frac{1-t^2}{c_2^2 - 1}} + \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. \left. + \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \ln \left(c_2 + \sqrt{c_2^2 - 1} \right) \right] \right\} + o(\varepsilon). \quad (5)$$

При $h \rightarrow \infty$ маємо відповідну задачу для напівсмуги. У цьому випадку

$$\gamma = \pi/2K(\sin(\pi/2\beta))\ell_1,$$

$$\ell_1 = (2\beta/\pi)\sin(\pi/2\beta),$$

$$c_2 = 1/\sin(\pi/2\beta), \quad \beta = b/\ell.$$

Якщо при цьому і $b \rightarrow \infty$ ($\ell_1 \rightarrow 1, \gamma \rightarrow 1, c_2 \rightarrow \infty$), то отримаємо розв'язок задачі для ортотропної напівплощини, а при $\rho = 0$ – розв'язки відповідних задач для гладкого штампа. особливість напружень σ_{11} (5) в кутових точках штампа $|y| = \ell$ ($|t| = 1$) з урахуванням тертя така ж, як і для напівплощини, і є собою розкладанням у ряд по параметру $\varepsilon^{1/2}$ точної особливості [3]. Для гладкого штампа особливість у (5) співпадає с точною.

Тепер вплив границь прямокутника на тиск під штампом у порівнянні з напівплощиною виражається не тільки множником γ , як у (4), але і другим доданком у квадратних дужках рівності (5).

У таблиці 1 наведена залежність коефіцієнта γ від висоти прямокутника h^* при $\beta = 2$; у таблиці 2 наведена залежність коефіцієнта γ від β . Ці залежності носять зростаючий характер, а для півплощини γ стає рівним 1.

Табл. 1

h^*	4	6	8	10	∞
γ	0,8459	0,9179	0,9341	0,9435	0,9456

Табл. 2

β	1,01	1,05	1,5	2,0	3,0
γ	≈ 0	0,6381	0,8808	0,9456	0,9758
β	5,0	7,0	10,0	20,0	
γ	0,9919	0,9969	0,9995	0,9999	

Література

1. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. Москва: Наука, 1980. 303 с.
2. Фалькович С. В. О давлении жесткого штампа на упругую полуплоскость при наличии участков сцепления и скольжения. *Прикладная математика и механика*. 1945. Т. 9., Вып. 5. С. 425–432.
3. Маневич Л. И., Павленко А. В. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов. Киев: Вища школа, 1991. 131 с.
4. Моссаковский В. И., Бискуп А. Г. Застосування інтегралів типу Коші до розв'язання плоских контактних задач. *Проблеми нелінійної механіки і фізики матеріалів*. 1999. С. 211–216.

References

1. Halyn, L. A. (1980). Contact problems of the theory of elasticity and viscoelasticity. Moscow: Nauka.
2. Falkovych, S. V. (1945). On the pressure of a hard stamp on an elastic half-plane in the presence of areas of adhesion and sliding. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, Vol. 9, Issue 5, pp. 425–432.
3. Manevych, L. I. & Pavlenko, A. V. (1991). Asymptotic method in micromechanics of composite materials Kiev: Vishcha shkola.
4. Mossakovs'kyu, V. I. & Byskup, A. H. (1999). Application of Cauchy type integrals to solving planar contact problems. *Problemy neliniynoyi mekhaniky i fizyky materialiv*, pp. 211–216.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-04

НЕІЗОТЕРМІЧНА ПОВЗУЧИСТЬ ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА**О. З. Галішин¹, С. М. Склепус²**¹*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,*²*Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України
plast@inmech.kiev.ua, snsklepus@ukr.net***Ключові слова:**

порожнистий циліндр, повзучість, залежність властивостей матеріалу від температури.

Розглянуто просторову задачу визначення осесиметричного напружено-деформованого стану порожнистого нерівномірно нагрітого циліндра при повзучості. Дослідження виконуються в припущенні, що пружні характеристики матеріалу, коефіцієнт лінійного температурного розширення і всі параметри повзучості у визначальних рівняннях залежать від температури. Характеристики матеріалу наведені в табличній формі для ряду фіксованих температур. Для проміжних значень температури пружні характеристики знаходять за допомогою лінійної інтерполяції. Деформація повзучості в одновісному законі повзучості визначається інтерполяцією за температурою відповідно до експоненційного закону Арреніуса. Це дозволяє отримати прості формули для знаходження параметрів повзучості у визначальних рівняннях. Для варіаційної постановки задачі використовується функціонал у формі Лагранжа. Для основних невідомих задачі повзучості (переміщень, напружень і деформацій) була сформульована задача Коші за часом. Для розв'язання сформульованої фізично нелінійної початкової крайової задачі розроблено чисельно-аналітичний метод, який базується на спільному застосуванні R-функцій, методів Рітца і Рунге-Кутта-Мерсона. Розв'язано задачу повзучості для порожнистого нерівномірно нагрітого циліндра, навантаженого внутрішнім тиском. Чисельні результати, отримані за запропонованою просторовою моделлю, було порівняно з аналогічними результатами, отриманими за допомогою уточненої теорії оболонок на основі гіпотези прямолінійного елемента. Співставлення показало, що уточнена теорія оболонок забезпечує задовільний збіг з просторовим розв'язком.

NON-ISOTHERMAL CREEP OF THE HOLLOW CYLINDER**A. Z. Galishin¹, S. N. Sklepus²**¹*S.P. Tymoshenko Institute of Mechanics, NAS of Ukraine,*²*A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems, NAS of Ukraine
plast@inmech.kiev.ua, snsklepus@ukr.net***Key words:**

hollow cylinder, creep, dependence of material properties on temperature.

In engineering practice we often meet structural elements in the form of hollow cylinders operating at high temperatures under creep conditions. Most often in calculations use models which describe isothermal deformation of cylinders at constant temperature. In the present work the spatial problem of definition of the axisymmetric stress-strain state of non-uniform heated hollow cylinder under creep conditions is considered. The research are performed in the assumption that elastic characteristics of material, the coefficient of linear temperature expansion and all parameters of creep in the constitutive equations depend on temperature. They are given in tabular form for a number of fixed temperatures. For intermediate temperature values, the elastic characteristics are found by linear interpolation. The deformation of creep in a uniaxial law of creep is determined by temperature interpolation in accordance with the exponential Arrhenius law. This allows you to obtain simple formulas for finding creep parameters in constitutive equations. For the variational statement of the problem, a functional in the Lagrange form is used. For the main unknowns of the creep problem (displacements, stresses and strains) the Cauchy problem with respect to the time was formulated. For solution of formulated physically nonlinear initial/boundary value

problem a numerical-analytical method was developed, which is based on the joint application of the R-functions, Ritz and Runge-Kutta-Merson methods. The creep problem for a hollow non-uniform heated cylinder under internal pressure was solved. The numerical results generated by the proposed spatial model have been compared for this example with analogous results of the refined shell theory based on the rectilinear element hypothesis. The comparison showed that shell theory provides a satisfactory coincidence with the spatial solution.

Вступ. Конструктивні елементи у вигляді порожнистих циліндрів широко використовуються в енергетиці, космічній техніці, хімічній промисловості та ін. Розрахунку напружено-деформованого стану (НДС) циліндрів, які працюють в умовах повзучості, присвячена велика кількість робіт. Найчастіше в розрахунках використовують моделі, які описують ізотермічне деформування рівномірно нагрітих циліндрів. У цьому випадку порівняно нескладно визначити константи матеріалу у визначальних рівняннях повзучості. Для дослідження повзучості нерівномірно нагрітих тіл необхідно знати фізико-механічні характеристики матеріалу в усьому діапазоні зміни температури. При цьому пружні властивості, коефіцієнти лінійного температурного розширення, а також параметри матеріалу у визначальних співвідношеннях повзучості залежатимуть від температури. Так, у роботах [1-4] для опису залежності від температури використовується функція Арреніуса [5]. У статті [6] використовуються рівняння дифузійної повзучості дрібнозернистих матеріалів, у припущенні, що швидкості деформацій повзучості обернено пропорційні абсолютній температурі. У роботі [7] при дослідженні повзучості нерівномірно нагрітого тіла обертання воно розбивається на області з трьома різними температурними діапазонами, у яких використовуються різні набори констант. На відміну від цього в цій статті ми будемо проводити дослідження в припущенні, що всі параметри повзучості у визначальних рівняннях залежать від температури.

Метою цієї роботи є:

- розробка методу дослідження неізотермічної повзучості осесиметрично навантажених порожнистих циліндрів;
- дослідження повзучості нерівномірно нагрітого циліндра з урахуванням залежності властивостей матеріалу від температури;

– співставлення просторового розв'язку задачі повзучості з розв'язком, отриманим у рамках уточненої теорії оболонок.

Модель деформування матеріалу при неізотермічному навантаженні. Нехай криві повзучості при одноосьовому напруженому стані описуються рівнянням

$$p = At^m \sigma^n, \quad (1)$$

де p – деформація повзучості; A , m , n – параметри, які визначаються з експериментів на повзучість при одноосьовому напруженому стані.

Для розв'язання задачі повзучості необхідно знати фізико-механічні характеристики матеріалу в усьому діапазоні зміни температури $T_1 \leq T \leq T_2$.

Залежність деформації повзучості від температури в більшості досліджень враховується шляхом подання параметра A у вигляді [5, 8, 9]

$$A(T) = A_0 \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right), \quad (2)$$

де R – універсальна газова стала, T – абсолютна температура, Q – енергія активації.

Відзначимо, що рівність (2) передбачає, що залежність від температури враховується лише за допомогою параметра $A(T)$, а інші параметри вважаються незмінними в усьому температурному інтервалі $T_1 \leq T \leq T_2$. Однак, як показали результати обробки експериментальних даних, для великих температурних інтервалів знайдені описаним вище способом розрахункові криві повзучості можуть помітно відрізнятися від експериментальних. На відміну від цього припускати, що всі параметри повзучості в (1) залежать від температури.

Нехай для кожного із значень температури T_i ($i = 1, 2$) задані модулі Юнга E_i , кое-

фіцієнти Пуассона ν_i та лінійного температурного розширення α_i матеріалу, а також увесь необхідний набір характеристик повзучості: A_i , m_i , n_i . Для проміжної температури $T_1 < T < T_2$ модуль Юнга $E(T)$, коефіцієнти Пуассона $\nu(T)$ та лінійного температурного розширення $\alpha(T)$ матеріалу можуть бути знайдені шляхом лінійної інтерполяції.

При обробці експериментальних даних виявилось, що для параметрів повзучості A , m , n лінійна інтерполяція за температурою є неприпустимою. У роботі [10] була розроблена методика визначення цих параметрів на основі експоненціального закону Арреніуса. Для цього необхідно мати експериментальні криві повзучості на перших двох ділянках при температурах T_1 і T_2 . Для проміжного значення температури $T_1 < T < T_2$ ці параметри визначаються за формулами

$$\begin{aligned} A(T) &= A_1^{1-r} A_2^r, \quad n(T) = (1-r)n_1 + rn_2, \\ m(T) &= (1-r)m_1 + rm_2, \\ r &= \frac{T-T_1}{T_2-T_1} \cdot \frac{T_2}{T}. \end{aligned} \quad (3)$$

Постановка і метод розв'язання початково-крайової задачі повзучості. Розглянемо ізотропний осесиметрично навантажений порожнистий циліндр у циліндричній системі координат $Or\varphi z$. Вісь Oz співпадає з віссю обертання. Вважаємо, що закон зміни температури в циліндрі $T = T(r, z, t)$ відомий. Задачу розв'язуватимемо в геометрично лінійній, квазістатичній постановці в припущенні, що в процесі деформування пластичні деформації не виникають. Компоненти тензора швидкостей повних деформацій $\dot{\varepsilon}_{ij}$ складаються з компонентів швидкостей пружних деформацій $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$, температурних $\dot{\varepsilon}_{ij}^T$ та компонентів швидкостей незворотних деформацій повзучості \dot{p}_{ij} :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^T + \dot{p}_{ij}, \quad (i, j = \overline{1, 3}).$$

Або в циліндричній системі координат:

$$\dot{\varepsilon}_{rr}(r, z, t) = \dot{\varepsilon}_{rr}^e(r, z, t) + \dot{\varepsilon}_{rr}^T(r, z, t) +$$

$$\begin{aligned} &+ \dot{p}_{rr}(r, z, t), \\ \dot{\varepsilon}_{zz}(r, z, t) &= \dot{\varepsilon}_{zz}^e(r, z, t) + \dot{\varepsilon}_{zz}^T(r, z, t) + \\ &+ \dot{p}_{zz}(r, z, t), \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}(r, z, t) &= \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^e(r, z, t) + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^T(r, z, t) + \\ &+ \dot{p}_{\varphi\varphi}(r, z, t), \\ \dot{\varepsilon}_{rz}(r, z, t) &= \dot{\varepsilon}_{rz}^e(r, z, t) + \dot{p}_{rz}(r, z, t). \end{aligned}$$

Температурні деформації обчислюються за формулами:

$$\varepsilon_{rr}^T = \varepsilon_{zz}^T = \varepsilon_{\varphi\varphi}^T = \alpha(T - T_0), \quad \varepsilon_{rz}^T = 0,$$

де T_0 – температура, за якої відсутні напруження та деформації. Тут і далі крапка над символами означає повну похідну за часом t .

Основні невідомі задачі повзучості в довільній точці циліндра можна знайти із розв'язку задачі Коші за часом для системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{du_r}{dt} &= \dot{u}_r, \quad \frac{du_z}{dt} = \dot{u}_z, \\ \frac{d\varepsilon_{rr}}{dt} &= \dot{u}_{r,r}, \quad \frac{d\varepsilon_{zz}}{dt} = \dot{u}_{z,z}, \quad \frac{d\varepsilon_{\varphi\varphi}}{dt} = r^{-1}\dot{u}_r, \\ \frac{d\gamma_{rz}}{dt} &= 2 \frac{d\varepsilon_{rz}}{dt} = \dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r}, \\ \frac{d\sigma_{rr}}{dt} &= \lambda(\dot{\varepsilon}_{zz} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{e}_{zz} - \dot{e}_{\varphi\varphi}) + \\ &+ \lambda_1(\dot{\varepsilon}_{rr} - \dot{p}_{rr} - \dot{e}_{rr}), \\ \frac{d\sigma_{zz}}{dt} &= \lambda(\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{e}_{rr} - \dot{e}_{\varphi\varphi}) + \\ &+ \lambda_1(\dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{e}_{zz}), \\ \frac{d\sigma_{\varphi\varphi}}{dt} &= \lambda(\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{e}_{rr} - \dot{e}_{zz}) + \\ &+ \lambda_1(\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{e}_{\varphi\varphi}), \\ \frac{d\sigma_{rz}}{dt} &= G(\dot{\gamma}_{rz} - 2\dot{p}_{rz}), \quad \frac{dp_{rr}}{dt} = \dot{p}_{rr}, \\ \frac{dp_{zz}}{dt} &= \dot{p}_{zz}, \\ \frac{dp_{\varphi\varphi}}{dt} &= \dot{p}_{\varphi\varphi}, \quad \frac{dp_{rz}}{dt} = \dot{p}_{rz}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут $u_r(r, z, t)$, $u_z(r, z, t)$ – переміщення уздовж осей Or та Oz відповідно; σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{rz} – компоненти тензора напружень;

$$\lambda(T) = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \lambda_1(T) = \lambda + 2G,$$

$$G(T) = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad \dot{e}_{rr} = \dot{p}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{rr}^T, \quad \dot{e}_{zz} = \dot{p}_{zz} + \dot{\varepsilon}_{zz}^T,$$

$$\dot{e}_{\varphi\varphi} = \dot{p}_{\varphi\varphi} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^T, \quad \dot{\varepsilon}_{rr}^T = \dot{\varepsilon}_{zz}^T = \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^T = \alpha \dot{T}.$$

У початковий момент часу $t=0$ деформації повзучості дорівнюють нулеві: $p_{rr} = p_{zz} = p_{\varphi\varphi} = p_{rz} = 0$. Початкові умови для решти шуканих функцій знаходимо із

$$\begin{aligned} \Lambda(\dot{\mathbf{U}}) = & 0,5 \iint_{\Omega} \left[\lambda_1 (\dot{u}_{r,r}^2 + \dot{u}_{z,z}^2 + r^{-2} \dot{u}_r^2) + G (\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r})^2 + 2\lambda (\dot{u}_{r,r} \dot{u}_{z,z} + r^{-1} \dot{u}_r (\dot{u}_{r,r} + \dot{u}_{z,z})) \right] r dr dz - \\ & - \iint_{\Omega} \left[\dot{u}_{r,r} \dot{N}_r^f + \dot{u}_{z,z} \dot{N}_z^f + r^{-1} \dot{u}_r \dot{N}_{\varphi\varphi}^f + \dot{N}_{rz}^f (\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r}) \right] r dr dz - \\ & - \iint_{\Omega} \left[\dot{u}_{r,r} \dot{N}_r^f + \dot{u}_{z,z} \dot{N}_z^f + r^{-1} \dot{u}_r \dot{N}_{\varphi\varphi}^f + \dot{N}_{rz}^f (\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r}) \right] r dr dz - \int_{\partial\Omega_p} (\dot{P}_n \dot{u}_n + \dot{P}_\tau \dot{u}_\tau) d\partial\Omega. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут $\dot{\mathbf{U}} = (\dot{u}_r(r, z, t), \dot{u}_z(r, z, t))$ – вектор кінематично можливих швидкостей переміщень; Ω – меридіанний переріз циліндра; $\partial\Omega_p$ – частина контуру $\partial\Omega$, де прикладені зовнішні сили, \dot{P}_n , \dot{P}_τ – швидкості нормальної і дотичної складових зовнішніх сил; \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ – зовнішня нормаль та дотична до контуру $\partial\Omega$; $\dot{u}_n = \dot{u}_r n_r + \dot{u}_z n_z$, $\dot{u}_\tau = \dot{u}_z n_r - \dot{u}_r n_z$; n_r , n_z – напрямні косинуси нормалі \mathbf{n} . Швидкості «фіктивних» сил, зумовлених температурними деформаціями і деформаціями повзучості, обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} \dot{N}_{rr}^f &= \left[\lambda_1 \dot{e}_{rr} + \lambda (\dot{e}_{zz} + \dot{e}_{\varphi\varphi}) \right], \\ \dot{N}_{zz}^f &= \left[\lambda_1 \dot{e}_{zz} + \lambda (\dot{e}_{rr} + \dot{e}_{\varphi\varphi}) \right], \\ \dot{N}_{\varphi\varphi}^f &= \left[\lambda_1 \dot{e}_{\varphi\varphi} + \lambda (\dot{e}_{rr} + \dot{e}_{zz}) \right], \\ \dot{N}_{rz}^f &= 2G \dot{p}_{rz}. \end{aligned} \quad (6)$$

Швидкості деформацій повзучості у функціоналі (5) вважаються відомими і не варіюються. Варіаційні задачі для функціонала (5) розв'язуються методом Рітца. При цьому координатні функції, які точно задовольняють заданим граничним умовам, будуються за допомогою методу R-функцій [12].

розв'язку задачі термопружного деформування.

Розв'язання початкової задачі для системи рівнянь (4) проводимо методом Рунге–Кутти–Мерсона (РКМ) з автоматичним вибором часового кроку. Праві частини рівнянь у фіксовані моменти часу $t \neq 0$, які відповідають схемі РКМ, знаходимо за допомогою розв'язку варіаційної задачі для функціонала у формі Лагранжа [11]

Розв'язання задачі на основі уточненої оболонкової моделі. Результати розрахунку, отримані за розробленою методикою, зіставлялися з розв'язком, отриманим у рамках уточненої теорії оболонок. При цьому постановка задачі базувалася на оболонковій моделі прямолінійного елемента, що враховує деформації поперечного зсуву. У довільний момент часу крайова задача зводилася до чисельного інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь [13]

$$\frac{d\vec{Y}}{dz} = P(z)\vec{Y} + \vec{f}(z),$$

$$\vec{Y} = \{N_r, N_z, M_z, u_r, u_z, \psi_z\}^T \quad (7)$$

при заданих на торцях граничних умовах виду

$$B_i \vec{Y} = \vec{b}_i. \quad (8)$$

У рівностях (7), (8) позначено: \vec{Y} – вектор розв'язувальних функцій, що складається з радіальної N_r та осьової N_z складових зусиль, діючих у перетині $z = \text{const}$; M_z – осьовий згинаючий момент; u_r , u_z – радіальна та осьова складові переміщення точки координатної поверхні; ψ_z – повний кут повороту прямолінійного елемента, що складається з кута повороту нормалі і кута пово-

роту, обумовленого поперечним зсувом. Величини $P(z)$ й $\vec{f}(z)$ означають матрицю системи і вектор вільних членів, а B_i й \vec{b}_i – матриці і вектори граничних умов. Компоненти матриці $P(z)$ залежать від характеристик жорсткості оболонки і знаходяться у результаті чисельного інтегрування за товщиною оболонки. Компоненти вектора $\vec{f}(z)$, крім цього, залежать від деформацій повзучості.

Числові результати. Розглянемо повзучість «вільно опертого» циліндра з нікелевого сплаву René 80. Циліндр навантажений внутрішнім тиском інтенсивності $P_{inn} = 25,0$ МПа. Температура на внутрішній поверхні $T = T_0 = 1073$ К, на зовнішній – $T = 1173$ К. Геометричні розміри циліндра: довжина $l = 0,1$ м, внутрішній і зовнішній радіуси: $r_1 = 0,095$ м, $r_2 = 0,105$ м, радіус середньої поверхні $r_0 = 0,1$ м.

При розв'язанні задачі вважалося, що температура по товщині циліндра змінюється за лінійним законом.

У табл. 1 наведені пружні характеристики матеріалу та коефіцієнт лінійного температурного розширення при температурах 1073 К і 1173 К [14].

Табл. 1

Характеристика	Температура, К	
	1073	1173
Модуль Юнга, МПа	$1,458 \cdot 10^5$	$1,2856 \cdot 10^5$
Коефіцієнт Пуассона	0,3	0,3
Коефіцієнт лінійного температурного розширення $\times 10^6$ (К ⁻¹)	15,1	16,0

У табл. 2 наведені характеристики повзучості при температурах 1033 К і 1255 К [14].

Табл. 2

Характеристика повзучості	Температура, К	
	1033	1255
$A \cdot 10^p$ (МПа ⁻ⁿ хв ^{-m})	1,95	1,361
n	7,397	2,324
m	0,2577	0,2044
p	23	8

Визначальні рівняння для швидкостей деформацій повзучості матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{rr} &= \frac{3}{2} A(T) m(T) t^{m(T)-1} \sigma_i^{n(T)-1} \left(\sigma_{rr} - \frac{1}{3} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}) \right), \\ \dot{\rho}_{zz} &= \frac{3}{2} A(T) m(T) t^{m(T)-1} \sigma_i^{n(T)-1} \left(\sigma_{zz} - \frac{1}{3} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}) \right), \\ \dot{\rho}_{\varphi\varphi} &= \frac{3}{2} A(T) m(T) t^{m(T)-1} \sigma_i^{n(T)-1} \left(\sigma_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}) \right), \\ \dot{\rho}_{rz} &= \frac{3}{2} A(T) m(T) t^{m(T)-1} \sigma_i^{n(T)-1} \sigma_{rz}, \end{aligned} \tag{8}$$

де $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{zz}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{zz} - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{rz}^2}$ – інтенсивність напружень.

Використовуючи дані таблиць 1, 2, пружні характеристики матеріалу і коефіцієнт лінійного температурного розширення знаходилися шляхом лінійної інтерполяції, а характеристики повзучості $A(T)$, $m(T)$, $n(T)$ в рівняннях (8) було знайдено за формулами (3).

Граничні умови на торцях циліндра $z = \pm l/2$ задавались у вигляді:

$$\dot{u}_r = 0, \quad \dot{\sigma}_{zz} = 0.$$

На внутрішній поверхні $r = r_1$:

$$\dot{\sigma}_{rr} = -\dot{P}_{inn} = 0, \quad \dot{\sigma}_{rz} = 0.$$

На зовнішній поверхні $r = r_2$:

$$\dot{\sigma}_{rr} = 0, \quad \dot{\sigma}_{rz} = 0.$$

Часткова структура розв'язку, яка задовольняє кінематичним граничним умовам для швидкостей переміщень, має вигляд:

$$\dot{u}_r = \omega_1 \Phi_1, \quad \dot{u}_z = z \Phi_2. \quad (9)$$

Тут Φ_1, Φ_2 – невизначені компоненти структури розв'язку; $\omega_1 = \frac{1}{l} \left(\frac{l^2}{4} - z^2 \right) \geq 0$ – смуга

Ω_1 , укладена між лініями $z = -\frac{l}{2}$ та $z = \frac{l}{2}$ ($\omega_1 = 0, \omega_n = -1$ на межі $\partial\Omega_1, \omega > 0$ всередині смуги) рівняння ділянки межі, де задані швидкості переміщень.

Рівняння межі області Ω , де відшукується наближений розв'язок задачі, може бути записано у вигляді

$$\omega(r, z) = \omega_1 \wedge_0 \omega_2 = 0, \quad (10)$$

де $\omega_2 = \frac{(r-r_1)(r_2-r)}{r_2-r_1} = 0$ – рівняння вільної від закріплення ділянки межі області Ω , а символ \wedge_0 позначає R-кон'юнкцію [12]:

$$f_1 \wedge_0 f_2 = f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2}.$$

Оскільки структура розв'язку (9) задовольняє тільки кінематичним граничним умовам, функція $\omega = \omega(r, z)$, що описує геометрію області, до неї не входить. Рівняння (10) використовувалося для просторової дискретизації задачі при знаходженні координат вузлів сітки інтегрування. Відзначимо, що розроблений метод може бути також використаний для дослідження повзучості осесиметрично навантажених тіл обертання з довільною формою меридіанного перетину.

При чисельній реалізації невизначені компоненти структури розв'язку подаємо у вигляді скінченних рядів $\Phi_i(r, z, t) = \sum_n C_n^{(i)}(t) f_n^{(i)}(r, z)$, ($i=1,2$), де $C_n^{(i)}(t)$ – невизначені коефіцієнти, які на кожному часовому кроці знаходимо методом Рунге; t – деякий фіксований момент часової дискретизації схеми РКМ або дискретизації за часом для видачі результатів обчислень; $\{f_n^{(i)}\}$ – системи лінійно незалежних функцій. У цій роботі $\{f_n^{(i)}\}$ вибирали у вигляді бікубічних сплайнів Шенберга. Системи сплайнів будували на регулярній сітці $K_r \times K_z$, де

K_r, K_z – кількість відрізків дискретизації уздовж осей Or та Oz відповідно.

Наближений розв'язок задачі повзучості циліндра, сформульованої в рамках просторової постановки, було отримано при наступних параметрах просторової та часової дискретизації: $N_r = 20, N_z = 10$, початковий крок за часом $\Delta t_0 = 10^{-3}$ хв, задана по-хибка обчислень у методі РКМ – $\delta = 10^{-3}$.

Для даної задачі граничні умови у рамках уточненої теорії оболонки формулювалися у вигляді

$$\text{при } z=0: N_r = u_z = \psi_z = 0,$$

$$\text{при } z=l/2: N_z = M_z = u_r = 0.$$

Розв'язання крайової задачі (7), (8) здійснювалося методом Рунге-Кутти з дискретною ортогоналізацією за С. К. Годуновим. Інтегрування задачі за часом виконувалося методом РКМ.

На рис. 1 показано графіки зростання за часом радіальних переміщень серединної поверхні циліндра $w = u_r(r_0, 0, t)$. На рис. 2, 3 зображено графіки зміни за часом інтенсивності напружень та колових деформацій повзучості на внутрішній поверхні у центрі циліндра. Суцільні лінії відповідають просторовому, а штрихові – оболонковому розв'язку.

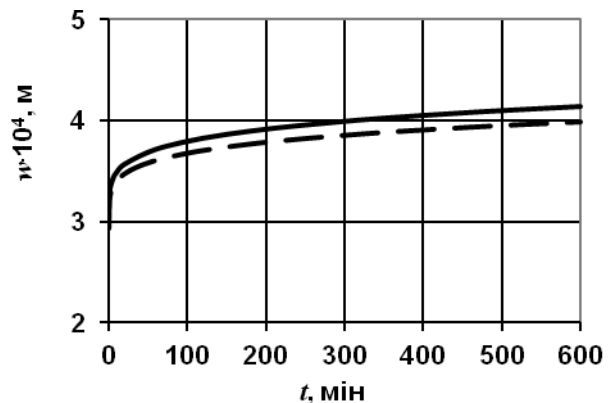


Рис. 1. Радіальні переміщення серединної поверхні циліндра

Представлені результати свідчать, що розв'язок початково-крайової задачі повзучості, отриманий на базі уточненої теорії оболонки, забезпечує добре узгодження з просторовим розв'язком для переміщень і напружень (відносне відхилення не перевищувало 3,7% для переміщень і 2,2% для напружень) і задовільне узгодження для де-

формацій повзучості (максимальне відхилення – 18,7%).

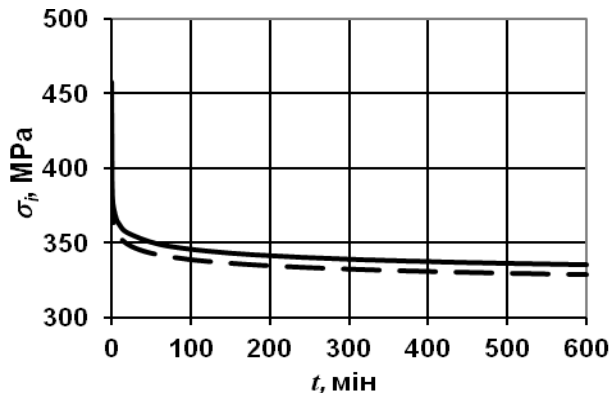


Рис. 2. Інтенсивність напружень на внутрішній поверхні циліндра

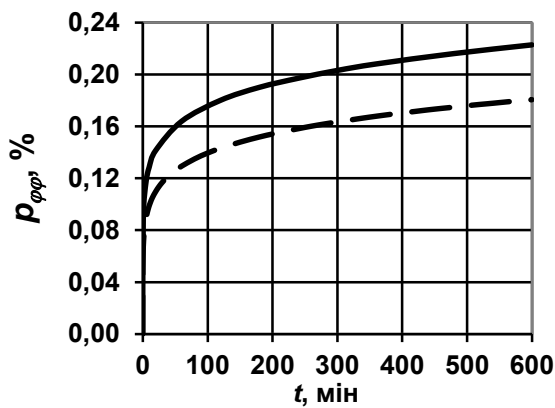


Рис. 3. Деформації повзучості на внутрішній поверхні циліндра

Висновок. Розроблено метод визначення напружено-деформованого стану при повзучості осесиметрично навантажених циліндрів, що знаходяться в умовах нерівномірного нагрівання. Пружні і реологічні властивості матеріалу передбачаються залежними від температури. Вони задаються в табличному вигляді для ряду фіксованих температур. Для проміжних значень температури пружні характеристики знаходяться шляхом лінійної інтерполяції. Деформація повзучості в одновісному законі визначається за допомогою інтерполяції за температурою відповідно до експоненціального закону Арреніуса. Це дозволяє отримати прості формули для знаходження параметрів повзучості у визначальних співвідношеннях.

Зіставлення результатів розрахунку, отриманих у рамках просторової постановки і за допомогою уточненої теорії оболонок, дозволяє зробити висновок, що для прийнятих у статті геометричних розмірів циліндра, умов закріплення і навантаження теорія оболонок забезпечує задовільний збіг з просторовим розв'язком.

Література

1. Singh T., Gupta V. K. Effect of material parameters on steady state creep in a thick composite cylinder subjected to internal pressure. *The Journal of Engineering Research*. 2009. Vol. 6, No. 2. P. 20–32.
2. Singh T., Singh H. Steady state creep behaviour of functionally graded thick cylinder. *International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering*. 2013. Vol. 7, No 12. P. 2499–2505.
3. Singh S., Saini S. Material parameter and effect of thermal load on functionally graded cylinders. *International Journal of Modern Engineering research*. 2015. Vol. 5, Issue 4. P. 8–19.
4. Гораш Е. Н., Лысенко С. В., Львов Г. И. Неизотермическая ползучесть и повреждаемость элементов паровых турбин. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин*. 2006. № 21. С. 75–88.
5. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. Москва: Наука, 1966. 752 с.
6. Jamian S., Sato H., Tsukamoto H., Watanabe Y. Creep analysis of functionally graded material thick-walled cylinder. *Applied Mechanics and Materials*. 2013. Vol. 315. P. 867–871.
7. Гораш Е. М. Застосування ізотропної та анізотропної концепцій пошкоджуваності до розрахунку тривалої міцності ротору парової турбіни в умовах високотемпературної повзучості. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин*. 2006. № 21. С. 66–75.
8. Perrin I. J., Hayhurst D. R. Creep constitutive equations for a 0.5Cr-0.5Mo-0.25V ferritic steel in the temperature range 600-675 °C. *Journal of Strain Analysis*. 1996. Vol. 31, No. 4. P. 299–314.
9. Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. Москва: Мир, 1986. 360 с.

10. Галишин А. З. Методика определения параметров ползучести и длительной прочности изотропных материалов при неизотермических процессах нагружения. *Проблемы прочности*. 2004. № 4. С. 21–30.
11. Sklepus S. M. Solution of the Axisymmetric Problem of Creep and Damage for a Piecewise Homogeneous Body with an Arbitrary Shape of a Meridional Section. *Journal of Mathematical Sciences*. 2015. Vol. 205, No. 5. P. 644–658.
12. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 552 с.
13. Galishin A. Z., Zolochovsky A. A., Sklepus S. N. Feasibility of shell model for determinity stress-strain state and creep damage of cylindrical shells. *International Applied Mechanics*. 2017. Vol. 53, No. 4. P. 398–406.
14. Zolochovsky A., Galishin A., Sklepus A., Gnitko V., Kühhorn A., Leyens C. Benchmark creep tests for thermal barrier coatings. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Машинознавство і САПР*. 2013. № 23(996). С. 159–178.

References

1. Singh, T. & Gupta, V. K. (2009). Effect of material parameters on steady state creep in a thick composite cylinder subjected to internal pressure. *The Journal of Engineering Research*, Vol. 6, No. 2, pp. 20–32.
2. Singh, T. & Singh, H. (2013). Steady state creep behaviour of functionally graded thick cylinder. *International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering*, Vol. 7, No 12, pp. 2499–2505.
3. Singh, S. & Saini, S. (2015). Material parameter and effect of thermal load on functionally graded cylinders. *International Journal of Modern Engineering research*, Vol. 5, Issue 4, pp. 8–19.
4. Gorash, E. N., Lysenko, S. V. & Lvov, G. I. (2006). Non-isothermal creep and damageability of steam turbine elements. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Dynamika i mitsnist' mashyn*, No. 21, pp. 75–88.
5. Rabotnov, Yu. N. (1966). *Creep of structural elements*. Moscow: Nauka.
6. Jamian, S., Sato, H., Tsukamoto, H. & Watanabe, Y. (2013). Creep analysis of functionally graded material thick-walled cylinder. *Applied Mechanics and Materials*, Vol. 315, pp. 867–871.
7. Gorash, E. M. (2006). Application of isotropic and anisotropic concepts of damage to the calculation of the long-term strength of the rotor of the steam turbine under conditions of high temperature creep. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Dynamika i mitsnist' mashyn*, No. 21, pp. 66–75.
8. Perrin, I. J. & Hayhurst, D. R. (1996). Creep constitutive equations for a 0.5Cr-0.5Mo-0.25V ferritic steel in the temperature range 600-675°C. *Journal of Strain Analysis*, Vol. 31, No. 4, pp. 299–314.
9. Boyle, J. & Spence, J. (1986). *Analysis of stress in creep structures*. Moscow: Mir.
10. Galishin, A. Z. (2004). Technique of Determination of Creep and Creep Rupture Strength Parameters of Isotropic Materials in Nonisothermic Loading Processes. *Problemy prochnosti*, No. 4, pp. 21–30.
11. Sklepus, S. M. (2015). Solution of the Axisymmetric Problem of Creep and Damage for a Piecewise Homogeneous Body with an Arbitrary Shape of a Meridional Section. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 205, No. 5, pp. 644–658.
12. Rvachev, V. L. (1982). *Theory of R-functions and some of its applications*. Kiev: Nauk. dumka.
13. Galishin, A. Z., Zolochovsky, A. A. & Sklepus, S. N. (2017). Feasibility of shell model for determinity stress-strain state and creep damage of cylindrical shells. *International Applied Mechanics*, Vol. 53, No. 4, pp. 398–406.
14. Zolochovsky, A., Galishin, A., Sklepus, A., Gnitko, V., Kühhorn, A. & Leyens, C. (2013). Benchmark creep tests for thermal barrier coatings. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Mashynoznavstvo i SAPR*, No. 23(996), pp. 159–178.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-05

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИН НА ОСНОВІ РІЗНИХ ПІДХОДІВ

О. Я. Григоренко¹, М. Ю. Борисенко¹, О. В. Бойчук², В. С. Новицький³

¹Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,

²Миколаївський національний аграрний університет,

³Миколаївський муніципальний колегіум ім. В. Д. Чайки

ayagrigorenko1991@gmail.com, mechanics530@gmail.com

Ключові слова:

метод скінченних елементів, метод Релея-Рітца, частоти і форми вільних коливань, квадратна пластина, жорстке закріплення.

Визначаються частоти та форми вільних коливань тонкої жорстко закріпленої квадратної пластини сталої товщини на основі двох чисельних методів. Дослідження проводились методом скінченних елементів (МСЕ), який реалізовано на ліцензійному програмному засобі FEMAP з розв'язувачем NX Nastran і методом Релея-Рітца, який модифіковано та реалізовано на ЕОМ у середовищі Delphi. Достовірність отриманих результатів забезпечується використанням обґрунтованої математичної моделі, коректністю постановки задачі, розв'язуванням тестових задач та практичною збіжністю розрахованих частот методом скінченних елементів і методом Релея-Рітца. У результаті дослідження у формулі методу Релея-Рітца виділено три коефіцієнти, що характеризують геометричні розміри пластини, фізико-механічні властивості матеріалу і форму коливань, зроблено уточнення останнього коефіцієнта, що підвищило точність розрахунку. Створено програму в середовищі Delphi та поширено МСЕ для розрахунку частот і форм вільних коливань. Результати розрахованих частот мають хорошу збіжність з результатами, отриманими іншими авторами експериментальним та чисельним методами. Проведено порівняльний аналіз частот і форм вільних коливань розглянутої пластини, розрахованих двома чисельними методами.

NUMERICAL ANALYSIS OF FREE VIBRATIONS OF RECTANGULAR PLATES BASED ON DIFFERENT APPROACHES

A. Ya. Grigorenko¹, M. Yu. Borysenko¹, O. V. Boychuk², V. S. Novytskyi³

¹S. P. Tymoshenko Institute of Mechanics NAS of Ukraine,

²Mykolayiv National Agrarian University,

³Mykolayiv municipal collegium

ayagrigorenko1991@gmail.com, mechanics530@gmail.com

Key words:

finite element method, Rayleigh-Ritz method, frequencies and modes of free oscillations, square plate, rigid fastening.

Plates of various shapes are the most common elements of thin-walled structures in various branches of modern technology. It is necessary to calculate the load-bearing elements of structures for the case of various suddenly arising dynamic loads when various engineering facilities are designing and constructing. Therefore, the study of the dynamic behavior of engineering structures elements taking into account the properties of the material and the impact of the environment during dynamic load is an actual problem. In this connection it is necessary to extend the numerical methods for studying the natural oscillations frequencies and forms of rigidly fixed square plates.

Modern science does not ignore this problem, so in [8] we give an overview of the works devoted to the calculation of the frequencies of free oscillations of a rectangular plate; the results of computational experiments are given. In [9] analytic expressions were constructed for the calculation of eigenfrequencies and forms of oscillations of a square homogeneous plate fixed along the contour. In [10; 11] the solution of the problems of free oscillations of rectangular plates with variable thickness is proposed with the aid of a numerical-analytic spline collocation method in conjunction with the discrete-orthogonalization method, for example

in [10], the problem of free oscillations of a square plate with a constant thickness fixed along the edges is solved as a mathematical model. The calculated frequencies are compared with the experimental data obtained by the method of holographic interferometry. In [11], the free oscillations frequencies of anisotropic rectangular plates with different thickness with different boundary conditions are calculated. In [12], orthotropic rectangular plates of variable thickness are considered based on the spline approximation method and the discrete orthogonalization method in conjunction with the step-by-step search method. One of the modern methods for calculating problems of dynamics using computers is the finite element method (FEM). In [13], a thin square plate with different physical-mechanical characteristics with free edges is investigated. The geometry modeling and numerical calculation of the frequencies and forms of free oscillation of plates are carried out by the finite element method, which is implemented using the computer program FEMAP with NASTRAN solving. A comparative analysis of the calculated eigenfrequencies with frequencies obtained numerically and experimentally by other authors is carried out.

Free oscillations frequencies and forms of a thin rigidly fixed square plate with constant thickness are determined based on two numerical methods. The research was carried out by the finite element method which is implemented on the licensed software FEMAP and the Rayleigh-Ritz method which is modified and implemented on a computer in the Delphi environment. The reliability of the results obtained is ensured by using a valid mathematical model, the correctness of the problem statement, the solution of test problems and the practical convergence of the calculated frequencies by the finite element method and the Rayleigh-Ritz method. As a result of the research in the Rayleigh-Ritz method formula three coefficients characterizing the geometric dimensions of the plate, the physical-mechanical properties of the material and the oscillations mode were separated, clarification of the last coefficient increased the accuracy of the calculation. The program was created in the Delphi environment and the finite element method was distributed to calculate frequencies and forms of free oscillations. The results of the calculated frequencies have good agreement with the results obtained by other authors by experimental and numerical methods. A comparative analysis of the frequencies and forms of free oscillations of the considered plate calculated by two numerical methods was carried out.

Постановка проблеми. У різних галузях сучасної техніки пластини різноманітних форм є найбільш поширеними елементами тонкостінних конструкцій. При проектуванні і будівництві різних інженерних споруд необхідно проводити розрахунок несучих елементів конструкцій на випадок дії різноманітних динамічних навантажень. Тому актуальним є вивчення динамічної поведінки елементів інженерних споруд з урахуванням властивостей матеріалу і впливу навколишнього середовища при динамічному навантаженні. У зв'язку з цим необхідно поширити чисельні методи дослідження частот і форм власних коливань жорстко закріплених квадратних пластин.

Дослідженню частот і форм вільних коливань прямокутних пластин присвячено

багато наукових праць. Однією з перших робіт, у якій проведено розрахунок основної частоти квадратної пластини, є робота С. Томотіка 1936 року [1]. У роботі [2] розглянуто 21 тип можливих для прямокутної пластини граничних умов. Огляд із застосування методу Релея-Рітца наведено в [3]. У рамках класичної теорії для визначення частот і форм вільних коливань використовуються багато різноманітних методів: метод Релея-Рітца, метод Бубнова-Гальоркіна, метод колокацій, метод збурень, метод рядів, метод сіток, метод початкових параметрів Б. Г. Коренева, метод Едмана, асимптотичний метод В. В. Болотіна та інші. Короткий виклад цих методів наводиться в роботах [4-6].

Зазначимо, що окрім аналітичних і чисельних методів, існують експериментальні методи дослідження вільних коливань пластин, у [7] обговорюється експериментальний аналіз вібраційних режимів пластин.

Сучасна наука також не залишає без уваги дану проблему, так, у [8] наводиться огляд робіт присвячених обчисленню частот вільних коливань прямокутної пластини, наведені результати обчислювальних експериментів, якими показано, що друга і третя частота квадратної пластинки – кратні, тобто відповідний власний підпростір – двовимірний. Наведено дві відповідні власні форми. У [9] побудовано аналітичні вирази для обчислення власних частот і форм коливань затисненої по контуру квадратної однорідної пластини. Дана оцінка похибки порівняння з відомими високоточними розрахунками. Зроблено порівняння аналітичних розрахунків з експериментальними даними, отриманими автором резонансним методом. Установлено, що аналітичні і відповідно чисельні результати збігаються з експериментальними з похибкою менше 1%. В [10, 11] запропоновано розв'язок задач про вільні коливання прямокутних пластин змінної товщини за допомогою чисельно-аналітичного методу сплайн-коллокації в поєднанні з методом дискретно-ортогоналізації, так в [10] як математичну модель розв'язано задачу про вільні коливання квадратної пластини з постійною товщиною, закріпленою по краях. Розраховані частоти порівнюються з експериментальними даними отриманими методом голографічної інтерферометрії. В [11] розраховані частоти власних коливань анізотропних прямокутних пластин різної товщини з різними граничними умовами. У [12] розглянуті ортотропні прямокутні пластини змінної товщини на основі методу сплайн-апроксимації і методу дискретної ортогоналізації в поєднанні з методом покрокового пошуку.

Одним із сучасних методів розрахунку задач динаміки за допомогою ЕОМ є МСЕ. У роботі [13] досліджується тонка квадратна пластинка з різними фізико-механічними характеристиками з вільними краями. Моделювання геометрії та чисельний розрахунок частот та форм вільних коливань пластин

виконано методом скінченних елементів, який реалізовано за допомогою комп'ютерної програми FEMAP з розв'язувачем NASTRAN. Проводиться порівняльний аналіз розрахованих власних частот з частотами, які отриманні чисельно та експериментально іншими авторами.

У зв'язку з цим є необхідним поширити чисельні методи дослідження частот і форм власних коливань жорстко закріплених квадратних пластин на основі методу скінченних елементів, реалізованого на FEMAP і методу Релея-Рітца, реалізованого в середовищі Delphi на ЕОМ.

Вихідні співвідношення задач динаміки пластин МСЕ. Рівняння руху пластини в МСЕ за відсутності демпфування має вигляд

$$\mathbf{K}\vec{\Phi}_j + \mathbf{M}\ddot{\vec{\Phi}}_j = 0, \quad (1)$$

де \mathbf{K} та \mathbf{M} – матриця жорсткості та матриця мас механічної системи відповідно, $\vec{\Phi}_j$ – вектор переміщень вузлів системи, що відповідає j -тому ступеню вільності, який відтворює j -ту форму коливань.

При вільних коливаннях пластини всі вузлові точки здійснюють гармонічні коливання як функції часу:

$$\vec{\Phi}_j(t) = \vec{\Phi}_j \sin \omega_j t. \quad (2)$$

Після підстановки функцій (2) у рівняння руху пластини визначення власних частот і форм коливань зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K}\vec{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{M}\vec{\Phi}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (3)$$

де ω_j – пульсація або частота гармонічних коливань.

NX Nastran для визначення частот і форм вільних коливань у випадку, коли дисипація енергії і демпфування не враховуються, використовує, як основний, метод Ланцоша (Lanczos) [14].

Вихідні співвідношення задач динаміки пластин методу Релея-Рітца. Застосування формули Релея-Рітца [5] дає наближене значення для частоти вільних коливань:

$$\omega^2 = \frac{D}{\rho h} \cdot \frac{\int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \left\{ (\Delta w)^2 + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right] \right\} dx_1 dx_2}{\int_0^{a_1} \int_0^{a_2} w^2 dx_1 dx_2}. \quad (4)$$

Після інтегрування (4) [5] отримаємо формулу для наближеного визначення частот вільних коливань жорстко закріпленої прямокутної пластини:

$$\omega = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left(\frac{A_m^4}{a_1^4} + \frac{A_n^4}{a_2^4} + 2 \frac{B_m B_n}{a_1^2 a_2^2} \right)}, \quad (5)$$

$$A_m = \begin{cases} 1,506 & (m=1); \\ m+0,5 & (m \geq 2), \end{cases}$$

$$B_m = \begin{cases} 1,248 & (m=1); \\ A_m \left(A_m - \frac{2}{\pi} \right) & (m \geq 2). \end{cases} \quad (6)$$

Відзначимо, що за формулою (5) визначають циклічну частоту. Звільняються від розмірності частоти за допомогою формули:

$$\omega^* = \omega a_1^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}. \quad (7)$$

Оскільки пластина квадратна, то:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = a; \\ A_m &= A_n = A; \\ B_m &= B_n = B. \end{aligned} \quad (8)$$

Підставляючи (8) в (5), отримаємо:

$$\begin{aligned} \omega &= \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left(\frac{A^4}{a^4} + \frac{A^4}{a^4} + 2 \frac{B B}{a^2 a^2} \right)} = \\ &= \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left(\frac{2A^4 + 2B^2}{a^4} \right)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Розпишемо в (9) величину D згідно з формулою:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

у результаті отримаємо:

$$\omega = \pi^2 \sqrt{\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{\rho h} \left(\frac{2A^4 + 2B^2}{a^4} \right)}. \quad (10)$$

У виразі (10) згрупуємо величини за категоріями: константи; величини, що відповідають за геометрію пластини; величини, що характеризують матеріал пластини; величини, що характеризують форму коливань.

$$\omega = \left(\frac{\pi^2}{\sqrt{6}} \right) \cdot \left(\frac{h}{a^2} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \right) \times \left(\sqrt{A^4 + B^2} \right). \quad (11)$$

Оскільки формула (11) розраховує циклічну частоту, то для отримання результату в Гц достатньо (11) поділити на 2π .

$$f = \left(\frac{\pi}{2\sqrt{6}} \right) \cdot \left(\frac{h}{a^2} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \right) \times \left(\sqrt{A^4 + B^2} \right). \quad (12)$$

У результаті отримаємо зведену форму запису формули (5) розрахунку власних частот за методом Релея-Рітца, особливістю якої є розділення величин на коефіцієнти. Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned} G &= \frac{h}{a^2}; \quad M = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}; \\ F_{mn} &= \sqrt{A^4 + B^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

де G – коефіцієнт геометрії, M – коефіцієнт матеріалу; F_{mn} – коефіцієнт форми коливань; m, n – кількість півхвиль уздовж кожної із сторін пластини відповідно.

Підставимо (13) в (12), отримаємо

$$f = \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \cdot G \cdot M \cdot F_{mn}. \quad (14)$$

Тестова задача. Використовуючи формули (12), (9), були розраховані частоти і форми вільних коливань у середовищі програмування Delphi.

У якості об'єкта дослідження використовувалась жорстко закріплена алюмінієва (модуль Юнга $E = 71 ГПа$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,34$, густина $\rho = 2710 кг/м^3$) квадратна пластина постійної товщини $d = 3 мм$ розміром $a = 140 мм$.

Для перевірки правильності розрахунків створеної програми в середовищі Delphi застосовувався МСЕ, реалізований в ліцензійному програмному середовищі FEMAP [14]. Розбивка проводилась *plate*-елементами розмірами $1 мм \times 1 мм$ (рис. 1).

Частоти, розраховані власною програмою в середовищі Delphi і за допомогою FEMAP, представлені в таблиці 1, де ε – відхилення між результатами.

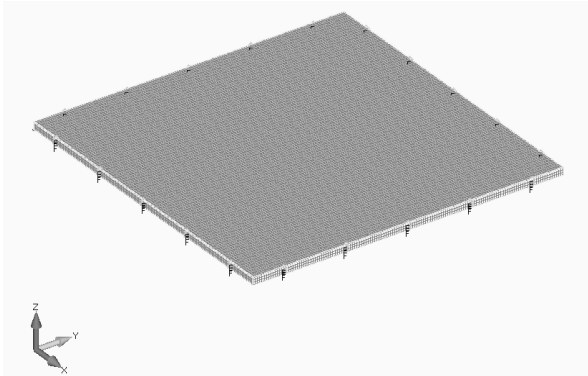


Рис. 1. Скінченно-елементна модель досліджуваної пластини

Табл. 1. Частоти вільних коливань, отримані при розрахунку на Delphi та FEMAP

m	n	f, Гц		ε, %
		Delphi	FEMAP	
1	1	1382,98	1373,10	0,71
1	2	2780,58	2789,16	0,31
2	1	3427,13	2789,16	0,31
2	2	4185,63	4095,74	2,15
1	3	5509,29	4971,83	9,76
3	3	8485,69	8137,38	4,10
1	4	9393,03	7804,66	16,91
3	4	11396,66	10886,67	4,47
4	3	12105,49	10886,67	10,07
2	5	14710,86	12479,79	15,17
5	2	16388,01	12479,79	23,85
4	4	14297,54	13551,30	5,22

Порівнюючи частоти вільних коливань, отримані при розрахунку на Delphi та FEMAP і представлені в таблиці 1, можна відзначити мале відхилення між першими частотами та частотами при $m = n$ і значні відхилення для інших форм коливань, тому є необхідність уточнити формули (12) і (14).

Результати. Нехай маємо еталонний відомий розрахунок пластини та розрахунок для будь-якої жорстко закріпленої квадратної пластини. Оскільки FEMAP широко використовується при різних інженерних розрахунках [14], а також апробований для розрахунків квадратних пластин з вільними краями [13], то результати, отримані за допомогою FEMAP (таблиця 1), вважатимемо еталонними.

Табл. 2. Уточнений коефіцієнт форми коливань

i	f_i^e	F_i^e
1	1373,10	2,570224
2	2789,16	5,220861
3	2789,16	5,220861
4	4095,74	7,666570
5	4971,83	9,306470
6	4997,01	9,353603
7	6210,51	11,625080
8	6210,51	11,625080
9	7899,70	14,786970
10	7899,70	14,786970

Запишемо формулу (14) для еталонної (e) та невідомої (unk) пластин

$$f_a = \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \cdot G_a \cdot M_a \cdot F_{mn}^a, \quad (15)$$

$$f_{unk} = \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \cdot G_{unk} \cdot M_{unk} \cdot F_{mn}^{unk}. \quad (16)$$

Розділимо (16) на (15). Після нескладних математичних перетворень отримаємо:

$$f_{unk} = f_e \cdot \frac{G_{unk}}{G_e} \cdot \frac{M_{unk}}{M_e} \cdot \frac{F_{mn}^{unk}}{F_{mn}^e}. \quad (17)$$

Формула (17) дає змогу за відомими параметрами еталонної пластини, а також відомими розмірами шуканої пластини та характеристиками її матеріалу визначити частоти шуканої пластини на відповідних формах коливань.

Припустимо, що еталонна і шукана пластина мають однакові геометричні розміри та виготовлені з одного матеріалу, це означає що два множника в (17) приймуть значення одиниці, тобто:

$$f_{unk} = f_e \cdot \frac{F_{mn}^{unk}}{F_{mn}^e}. \quad (18)$$

Розглянемо першу власну частоту еталонної пластини і першу власну частоту шуканої пластини, які візьмемо з таблиці 1,

$$f_e = 1373,10 \text{ Гц};$$

$$f_{unk} = 1382,98 \text{ Гц},$$

коефіцієнт першої форми коливань шуканої пластини розрахуємо за третьою формулою (13) із застосуванням формули (6):

$$F_1^{unk} = \sqrt{1,506^4 + 1,248^2} = \\ = \sqrt{6,7014913} \approx 2,588714.$$

З урахуванням наведених значень виразимо з (18) коефіцієнт першої форми коливань еталонної пластини:

$$F_1^e = F_1^{unk} \cdot \frac{\omega_1^e}{\omega_{unk}}; \quad (19)$$

$$F_1^e = 0,00187184 \cdot \omega_1^e. \quad (20)$$

Розраховані перші десять уточнених коефіцієнтів форм коливань за формулою, аналогічною (20) без класифікації по m і n , представлені в таблиці 2.

Внесемо корективи до формули (14)

$$f_i = \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \cdot G \cdot M \cdot F_i^e, \quad (21)$$

Табл. 4. Порівняння частоти вільних коливань, отриманих різними авторами

Метод	m:n		
	1:1	2:1	2:2
Релея-Рігца (перше наближення) [5]	37,46	74,81	108,13
Релея-Рігца [5]	35,99	73,41	108,27
Едмана [5]	35,999	73,405	108,237
Вайнштейна [5]	35,99	70	105
Саусвела [5]	32,816	67,87	97,86
Ігугі [5]	35,99	73,41	108,22
Метод рядів [5]	35,7	75,0	107,8
Метод сплай-колокацій [10]	36,04	73,48	109,24
Метод голографічної інтерферометрії [10]	35,986	72,83	108,00
Delphi	36,133	72,647	109,357
Delphi (уточнені коефіцієнти)	35,874	72,871	107,008

Для зручності порівняння розрахованої частоти з частотами, отриманими іншими авторами [5], застосуємо формулу (7).

Аналізуючи дані таблиць, можна дійти висновку, що розроблена програма працює з досить високою точністю, а уточнення коефіцієнтів форм підвищило точність розрахунків.

Для наочності отриманих результатів необхідно мати представлення про форми коливань. Оскільки програма розраховує

де F_i^e – уточнений коефіцієнт форми коливань, який записаний у таблиці 2.

Зроблені уточнення були враховані у нашій програмі та проведені повторні розрахунки для перших десяти власних частот. Отримані результати, розраховані за допомогою Delphi і FEMAP, наведено в таблиці 3. Порівняння трьох безрозмірних частот з частотами, отриманими іншими авторами [5], представлені в таблиці 4.

Табл. 3. Частоти вільних коливань, отримані з урахуванням уточнених коефіцієнтів форм коливань

Moda	f, Гц		ε, %
	Delphi	FEMAP	
1	1373,10	1373,10	0,00
2	2789,15	2789,16	0,00
3	2789,15	2789,16	0,00
4	4095,72	4095,74	0,00
5	4971,81	4971,83	0,00
6	4996,99	4997,01	0,00
7	6210,49	6210,51	0,00
8	6210,49	6210,51	0,00
9	7899,67	7899,70	0,00
10	7899,67	7899,70	0,00

квадратні пластини постійної товщини з однотипними граничними умовами, то форми коливань будуть мати однаковий порядок, який відповідає моді коливання.

Форми коливань, побудовані в FEMAP, Delphi, та форми побудовані іншим автором [8], наведені в таблиці 5, для кращого представлення розподілу переміщень поверхні пластини деякі форми коливань у просторі наведені в таблиці 6.

Табл. 5. Порівняння форм коливань

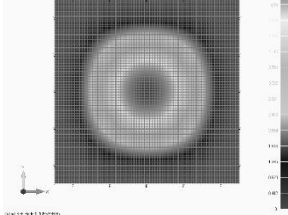
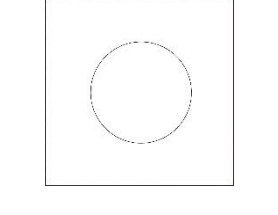
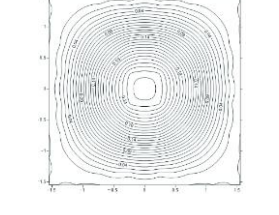
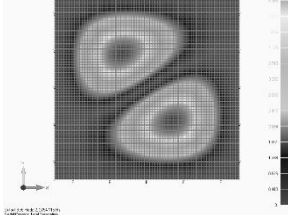
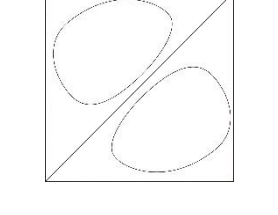
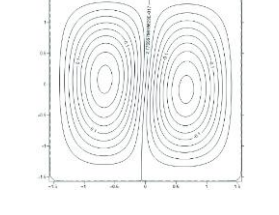
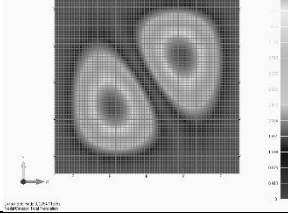
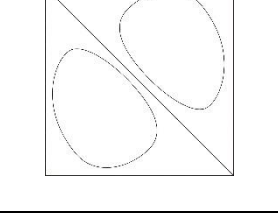
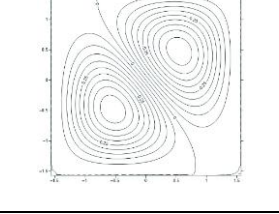
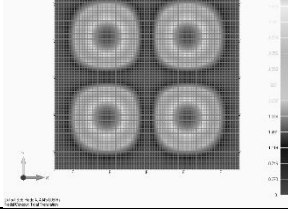
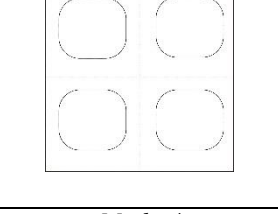
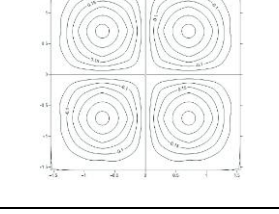
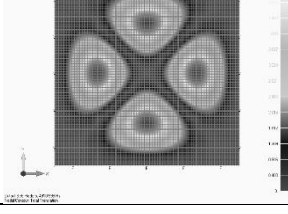
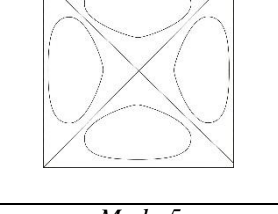
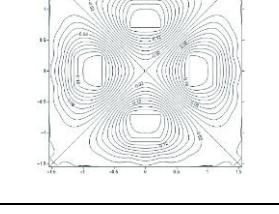
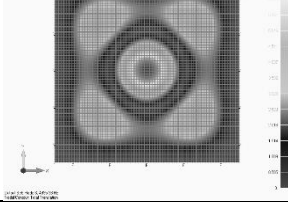
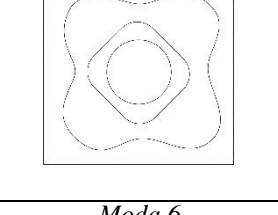
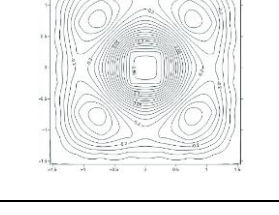
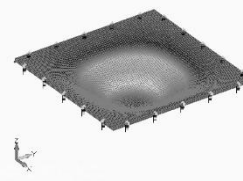
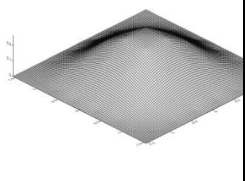
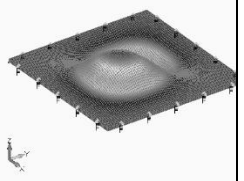
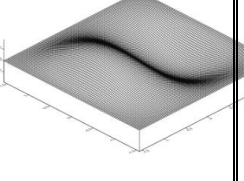
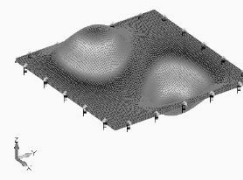
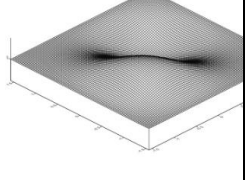
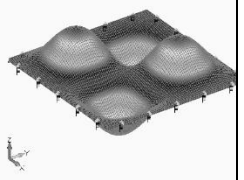
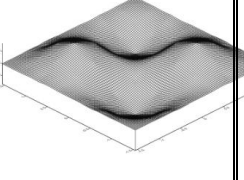
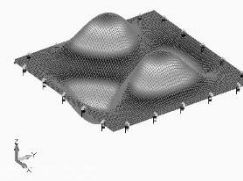
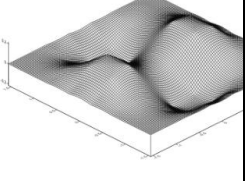
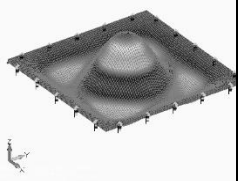
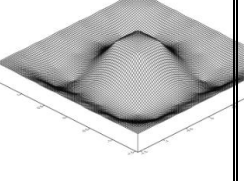
FEMAP	DELPHI	[8]
		
<i>Moda 1</i>		
		
<i>Moda 2</i>		
		
<i>Moda 3</i>		
		
<i>Moda 4</i>		
		
<i>Moda 5</i>		
		
<i>Moda 6</i>		

Табл. 6. Порівняння форм коливань у просторі

FEMAP	[8]	FEMAP	[8]
			
Moda 1		Moda 2	
			
Moda 3		Moda 4	
			
Moda 5		Moda 6	

Висновки. У результаті дослідження в формулі методу Релея-Рітца виділено три коефіцієнти, що характеризують геометричні розміри пластини, фізико-механічні властивості матеріалу і форму коливань, зроблено уточнення останнього коефіцієнту, що підвищило точність розрахунку. Створено програму в середовищі Delphi та поширено МСЕ для розрахунку частот і форм вільних

коливань. Результати розрахованих частот мають хорошу збіжність з результатами, отриманими іншими авторами експериментальним та чисельним методами. Проведено порівняльний аналіз частот і форм вільних коливань розглянутої пластини, розрахованої двома чисельними методами.

Література

1. Tomotika S. The transverse vibration of a square plate clamped at four edges. *Philosophical Magazine*. 1936. Ser.7 21 (142). P. 745–760.
2. Leissa A. W. The Free Vibration of Rectangular Plates. *Journal of Sound and Vibration*. 1973. 31. P. 257–293.
3. Leissa A. W. The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods. *Journal of Sound and Vibration*. 2005. 287. P. 961–978.
4. Гонткевич В. С. Собственные колебания пластинок и оболочек: справочник. Киев: Наук. думка, 1964. 288 с.
5. Прочность. Устойчивость. Колебания: справочник в 3 т. / под общей ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. Москва: Машиностроение, 1968. Т. 3. 567 с.
6. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. Москва: Наука, 1967. 444 с.
7. Ma C.-C., Huang C.-H. Experimental whole-field interferometry for transverse vibration of plates. *Journal of Sound and Vibration*. 2004. 271. P. 493–506.
8. Алгазин С. Д. Вычислительный эксперимент в задаче о свободных колебаниях прямоугольной пластинки. *Наука и техника транспорта*. 2016. № 4. С. 100–107.

9. Нестеров С. В. Изгибные колебания квадратной пластины, защемленной по контуру. *Механика твердого тела*. 2011. № 6. С. 159–165.
10. Grigorenko A. Ya., Tregubenko T. V. Numerical and experimental analysis of natural vibrations of rectangular plates with variable thickness. *International applied mechanics*. 2000. Vol. 36, № 2. P. 268–270.
11. Grigorenko A. Ya., Efimova T. L. Spline-approximation method applied to solve natural-vibration problems for rectangular plates of varying thickness. *International applied mechanics*. 2005. Vol. 41, № 10. P. 1161–1169.
12. Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya., Efimova T. L. Spline-based investigation of natural vibrations of orthotropic rectangular plates of variable thickness within classical and refined theories. *Journal of mechanics of materials and structures*. 2008. Vol. 3, No. 5. P. 929–952.
13. Комп'ютерне моделювання вільних коливань тонких пластин з різних матеріалів / М. Ю. Борисенко, О. В. Бойчук, І. А. Борисенко та ін. *Геометричне моделювання та інформаційні технології*. 2016. № 2. С. 29–33.
14. Рудаков К. Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций. Киев: НТУУ «КПИ», 2011. 317 с.

References

1. Tomotika, S. (1936). The transverse vibration of a square plate clamped at four edges. *Philosophical Magazine, Ser.7* 21 (142), pp. 745–760.
2. Leissa, A. W. (1973). The Free Vibration of Rectangular Plates. *Journal of Sound and Vibration*, 31, pp. 257–293.
3. Leissa, A. W. (2005). The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods. *Journal of Sound and Vibration*, 287, pp. 961–978.
4. Gontkevych, V. S. (1964). Natural oscillations of plates and shells. Kiev: Naukova dumka (in Ukrainian).
5. Byrger, I. A., & Panovko, Ya. G. (1968). Strength. Sustainability. Oscillations. Moscow: Mashinostroenie (in Russian).
6. Tymoshenko, S. P. (1967). Oscillations in engineering. Moscow: Nauka (in Russian).
7. Ma, C.-C., & Huang, C.-H. (2004). Experimental whole-field interferometry for transverse vibration of plates. *Journal of Sound and Vibration*, 271, pp. 493–506.
8. Alhazyn, S. D. (2016). Computational experiment in the problem of free oscillations of a rectangular plate. *Nauka i tehnika transporta*, No. 4, pp. 100–107.
9. Nesterov, S. V. (2011). Flexural vibration of a square plate clamped along its contour. *Mekhanika tverdogo tela*, No. 6, pp. 159–165.
10. Grigorenko, A. Ya., & Tregubenko, T. V. (2000). Numerical and experimental analysis of natural vibrations of rectangular plates with variable thickness. *International applied mechanics*, Vol. 36, No. 2, pp. 268–270.
11. Grigorenko, A. Ya., & Efimova, T. L. (2005). Spline-approximation method applied to solve natural-vibration problems for rectangular plates of varying thickness. *International applied mechanics*, Vol. 41, No. 10, pp. 1161–1169.
12. Grigorenko, Ya. M., Grigorenko, A. Ya., & Efimova, T. L. (2008). Spline-based investigation of natural vibrations of orthotropic rectangular plates of variable thickness within classical and refined theories. *Journal of mechanics of materials and structures*, Vol. 3, No. 5, pp. 929–952.
13. Borisenko, M. Yu, Boychuk, O. V., Borisenko, I. A., & Rogovtsov, Yu. O. (2016). Computer modeling of free vibrations of thin plates with different materials. *Geometrychne modelyuvannya ta informacijni tehnologiyi*, No. 2, pp. 29–33.
14. Rudakov, K. N. (2011). FEMAP 10.2.0. Geometric and finite-element modeling of structures. Kiev: NTUU «KPI».

УДК 539.3:534.1

10.26661/2413-6549-2019-1-06

ДИНАМІКА ПРУЖНИХ СИСТЕМ З РУХОМИМ ІНЕРЦІЙНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ: МЕХАНІЧНІ, МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ, ЇХ ОСОБЛИВОСТІ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ

А. Г. Дем'яненко, В. О. Гурідова, Д. В. Ключник

Дніпровський державний аграрно-економічний університет
anatdem@ukr.net

Ключові слова:

динаміка, частота, рухоме інерційне навантаження, критична швидкість.

Відомо, що метод Фур'є належить до методів математичної фізики, які дають можливість отримати розв'язки певного класу диференціальних рівнянь у частинних похідних. Лише у порівняно простих випадках маємо можливість побудувати явні розв'язки рівнянь у частинних похідних як суми часткових розв'язків у вигляді добутку відокремлених функцій. До таких рівнянь належать рівняння коливань струни, мембрани, балки та деякі інші. Пряме застосування такого методу до задач динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням у загальному випадку не є можливим. У зв'язку з цим зроблені спроби застосування цього методу шляхом його модифікації та узагальнення. Однією з перших відомих публікацій була праця Н. Steuding [10], у якій показано, що загальний розв'язок диференціального рівняння у частинних похідних, яке описує пружні коливання об'єкта за дії рухомого інерційного навантаження, являє лінійну комбінацію часткових розв'язків, які містять як симетричні, так і антисиметричні, зсунуті по фазі на прямий кут, форми коливань. Причому антисиметричні форми коливань обумовлені наявністю змішаної похідної непарної за часом, тобто силами інерції Коріоліса рухомого навантаження, і зв'язані через них з симетричними формами. Симетричні ж форми коливань при нерухомому навантаженні являють собою власні форми коливань навантаженої системи. Власне робота [10] започаткувала метод двохвильового подання коливань пружних систем за дії рухомого інерційного навантаження, фізична інтерпретація якого вперше була наведена О. О. Горошком [2]. При застосуванні до дослідження таких систем методу двохвильового подання коливань, який дозволяє у деяких випадках отримати точні розв'язки задач, загальний розв'язок диференціального рівняння подається у вигляді суми двох рядів, один з яких являє собою класичну частину розв'язку, а другий ту частину, яка обумовлена наявністю змішаної непарної за часом похідної, а саме – інерційністю рухомого навантаження, і не виявляється при традиційному застосуванні прямих методів математичної фізики. Форми першої групи названі власними формами, а форми другої групи – супровідними формами коливань пружної системи. Супровідні коливання обумовлені і нетривіальні лише за наявності рухомого інерційного навантаження. У роботі розглянуто головні особливості математичних моделей задач динаміки пружних об'єктів за дії рухомого інерційного навантаження. Як приклад, застосовуючи метод двохвильового подання, досліджено коливання і стійкість натягнутої мембрани за дії розподіленого рухомого інерційного навантаження. За дії рівномірно розподіленого рухомого навантаження виявлена нова якість руху мембрани, яка не виявляється прямими методами математичної фізики, а саме – наявність другої критичної швидкості руху інерційного навантаження.

DYNAMICS OF ELASTIC OBJECTS UNDER MOVABLE INERTIAL LOADING-MECHANICAL, MATHEMATICAL MODELS, FEATURES AND RESEARCH

A. G. Demianenko, V. O. Guridova, D. V. Kliushnik

Dniprovsk State University of Agriculture and Economics of Ukraine
 anatdem@ukr.net

Key words:

dynamics, frequency, mobile inertia load, critical speed.

As it is known, Fourier method of mathematical physics allows to get solutions of some class of partial differential equations. Only in relatively simple cases it is possible to build up the solutions of partial differential equations as a sum of particular solutions in the form of product of the separated functions. To those equations belong the equations of (eigen) oscillations of the string, the beam and some others. The direct applying of this method to the dynamic problem of elastic systems under movable inertia loading is not possible in general cases. That is why some authors tried to use this method by the way of its modifying and generalizing. One of the first publications was H. Steuding [10], where general solution of the partial differential equation of elastic oscillations under movable inertia loading could be obtained as a linear combination of particular solutions, those contain symmetric and antisymmetric forced forms shifted by 90 degrees in their phase. Moreover, antisymmetric forms occurred due to the mixed derivative odd-order by time and Coriolis' inertia forces caused by movable loading and related through them to symmetrical forced forms. The symmetrical forced forms under non-movable loading are matched to the eigenforms of the loaded system. Actually work [10] initiated a two-wave representation of oscillations of the elastic system under movable inertia loading and its physics interpretation had been provided by O. A. Goroshko [2]. Using the method of two-wave representation of the oscillations for research of those system, that allows in some cases to obtain analytical solutions, the general solution of the differential equations could be found as a sum of two infinity series the first series is a classical part of the solution and the second one is the part of the solution caused by presence of odd-order by time mixed derivative and inertia of movable loading, that could not be discovered by using of traditional direct methods of mathematical physics. The forms of the first group are called as eigenforms and the forms from the second group are accompanying oscillation forms of an elastic system. Accompanying oscillations could be non-trivial if the elastic system is loaded by movable inertia loading. The modes of the first group called eigenmodes, and the modes from the second one are called as accompanying modes of the elastic system oscillations. Accompanying modes are induced and non-trivial when the movable inertia loading is present. This paper describes some features of the mathematical models for the elastic elements with movable load. In these systems two forms of own oscillations – the own component and the accompanying one, displaced in phase to the right angle correspond to every frequency of the system. As an example, using the two-wave representation method, the oscillations and stability of the stretched membrane were investigated by the action of a distributed moving inertial load. Under the action of a uniformly distributed moving load, a new quality of the membrane motion, which is not detected by direct methods of mathematical physics, is found, namely, the presence of a second critical velocity of the inertial load.

Вступ. У травні 2019 року виповнилося 172 роки з дня виникнення та початку досліджень проблеми динамічної дії рухомого навантаження на пружні конструкції і спо-

руди. Приводом послужило руйнування Честерського мосту в Англії у травні 1847 року. У відомому огляді, присвяченому 100-річчю з дня виникнення проблеми, відомий фахівець з МТДТ Пановко Я. Г. писав

[4, 7]: «Проблема динамического действия подвижной нагрузки, столетний юбилей которой исполнился в 1947 году, до наших дней не утратила своей актуальности, жизнь продолжает ставить все новые задачи и тем вызывает дальнейшее движение теории вперед». У динамічному ХХ–ХХІ сторіччі суттєве збільшення мас і швидкостей руху ставить нові задачі, потребує їх вирішення, викликаючи своєю чергою появу нових підходів у механічному та математичному моделюванні, нових і удосконалення старих методів їх дослідження, які дозволяють більш повно виявити усі кількісні та якісні особливості кінематичних та динамічних характеристик процесу руху таких систем. Підвищений інтерес до цієї проблеми останнім часом обумовлений появою і застосуванням інформаційних технологій, які дозволяють більш повно та детально досліджувати математичні моделі та аналізувати отримані результати. Суттєво змінилося і традиційне уявлення про механічні системи з рухомим інерційним навантаженням. Простими прикладами таких систем є мости з рухомим потоком транспорту, трубопроводи, стержні, пластинки, оболонки під дією рухомого потоку рідини чи газу. До цього класу задач у рамках певних аналогій [2, 3] можна віднести об'єкти змінної за часом довжини та об'єкти, які рухаються у поздовжньому напрямку, такі як нитки, дроти, профільні стержні у прокатному виробництві, смугові та ланцюгові пили, паски пасових передач, канати шахтних підймальних машин і таке інше.

Аналіз механічних моделей. Залежно від способу схематизації інерційних властивостей пружної конструкції і рухомого навантаження є чотири принципово різних варіанти постановки задачі про вплив рухомого навантаження на пружні конструкції та споруди [3, 4]. Найбільш складним з точки зору практики є четвертий варіант, де враховуються як сили інерції самої конструкції, так і сили інерції рухомого навантаження [4]. Багато задач динаміки деформівних систем з рухомим інерційним навантаженням відносяться до неконсервативних. У зв'язку з цим безпосереднє застосування класичних, прямих методів математичної фізики до до-

слідження динаміки консервативних механічних систем не завжди коректне для дослідження таких механічних систем. Теоретичні дослідження задач динаміки пружних деформівних систем у переважній більшості базуються на класичній теорії згину на основі гіпотези плоских перерізів Бернуллі–Ейлера, згідно з якою плоскі поперечні перерізи до деформації залишаються плоскими і нормальними поздовжніми волокнами в процесі деформації. Узагальнення класичної теорії поперечних коливань стержнів враховує інерцію повороту поперечних перерізів, що вперше було зроблено Дж. Релеєм, та водночас інерції повороту елементів стержня і деформації поперечного зсуву, що було зроблено С. П. Тимошенко. Диференціальне рівняння поперечних коливань стержня, отримане в основі гіпотези плоских перерізів, називають класичним рівнянням коливання балки, або рівнянням Бернуллі–Ейлера, рівняння з урахуванням тільки інерції повороту – рівнянням Релея, а з урахуванням водночас інерції повороту і деформацій зсуву – рівнянням Тимошенка, або рівнянням балки Тимошенка. Ціла низка задач динаміки деформівних систем з рухомим інерційним навантаженням відносяться до неконсервативних. У зв'язку з цим безпосереднє застосування класичних, прямих методів математичної фізики до дослідження динаміки консервативних механічних систем не завжди коректне для дослідження таких механічних систем. Для дослідження задач динаміки будівельної механіки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням найбільш часто застосовують математичні методи:

1. Метод Шаленкампа.
2. Метод Інґліса–Болотіна.
3. Метод А. П. Філіппова і С. С. Кохманюка.
4. Метод двохвильового подання коливань.
5. Метод інтегральних перетворень Лапласа і Фур'є.
6. Метод кінцевих елементів.

Математичні моделі, їх особливості та дослідження. Дослідження якісних та кількісних характеристик руху пружних деформівних систем за дії рухомого інерційного

навантаження зводиться до аналізу математичної моделі

$$L\left(x, t, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)w = L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot q(x, t)$$

з відповідними крайовими і початковими умовами, де за сталої швидкості руху

$$q(x, t) = -\frac{q_0 + q_1}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\frac{q_1 v}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} - \frac{q_1 v^2}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Основними особливостями математичних моделей таких задач, по-перше, є наявність у диференціальних рівняннях у тому чи іншому вигляді інерційного оператора $q(x, t)$, який визначає силову дію на пружний об'єкт рухомого масового навантаження. Характерним є той факт, що силова дія залежить як від інтенсивності $q_1(x, t)$ і швидкості руху v потоку навантаження, так і від деформації пружного об'єкта $w(x, y, t)$, причому чітко видно залежність силової дії від прискорення деформації $w_{tt}(x, y, t)$, швидкості кутової деформації $w_{tx}(x, y, t)$ та зміни кривини пружної лінії об'єкта $w_{xx}(x, y, t)$, тобто в таких системах силова дія не є заздалегідь визначеною, а обумовлена поточним деформованим станом системи і є слідкуюча за ним. Це є другою особливістю задач динаміки пружних систем у полі сил інерції рухомих навантажень. Третьою суттєвою особливістю є наявність в математичній моделі у тій чи іншій формі непарної за часом змішаної похідної, яка обумовлена прискоренням Коріоліса рухомого масового навантаження і не дозволяє розділити просторову x і часову t змінні за класичною схемою Фур'є в дійсній області шуканих функцій. Математичні моделі задач динаміки пружних тіл за дії рухомого інерційного навантаження, які мають цілу низку специфічних особливостей та суттєву значимість для практики, можна віднести до неklasичних задач математичної фізики, а самі задачі складають самостійний і важливий розділ у будівельній механіці. У зв'язку з неможливістю прямого застосування класичного методу Фур'є до цих задач у загальному випадку зроблені спроби його модифікації та узагальнення [9, 10]. Саме для розвитку цього напрямку професор Горошко О. О. започаткував метод двохвильового подання коливань пружних систем за дії рухомого інерційного навантаження та надав його чітку і прозору фізичну інтерпретацію [2]. При застосуванні до дослідження таких систем методу двохвильового подання коливань, який дозволяє у деяких випадках побудувати точні розв'язки [2-4], загальний розв'язок диференціального рівняння (1) отримуємо у вигляді суми двох рядів

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n a_n \varphi_n(x) \cos(\omega_n t + \beta_n) + \sum a_n \psi_n(x) \sin(\omega_n t + \beta_n),$$

один з яких – це класична частина розв'язку, а другий – частина, яка обумовлена наявністю змішаної непарної за часом похідної а саме інерційністю рухомого навантаження, і не виявляється при традиційному застосуванні прямих методів математичної фізики. Форми першої групи названі власними формами, а форми другої групи – супровідними формами коливань пружної системи. Супровідні коливання обумовлені і нетривіальні лише за наявності рухомого інерційного навантаження або інших чинників системи [2-4]. Згодом розвиток таких методів з практичної площини перейшов у чисто фізико-математичну та набув узагальнень у працях школи П. І. Каленюка [5], які знаходять і без сумніву знайдуть своє подальше застосування. Більш повному та детальному дослідженню цього класу задач будівельної механіки методом двохвильового подання сприяють сучасні інформаційні технології. Як прозорий приклад застосування методу двохвильового подання коливань до задач динаміки пружних об'єктів за дії рухомого інерційного навантаження розглянемо коливання гнучких елементів, які знаходяться у полі дії сил інерції рухомого навантаження. Як самі елементи, так і рухоме інерційне навантаження можуть бути як однорідними, так і неоднорідними – з дискретними включеннями, наявністю зосереджених сил.

Коливання і стійкість мембрани. Математичні моделі, що відображають динамічну поведінку гнучких вантажних органів у неоднорідному полі масових та поверхневих сил, мають деякі особливості, які властиві тільки задачам цього класу. Головною особливістю є наявність у математичній моделі інерційного оператора, за яким визначаємо силову дію на орган зі сторони рухомого навантаження, яка не є заздалегідь визначеною, а залежить від деформації елемента, котра своєю чергою змінюється в залежності від дії рухомого інерційного навантаження. Інерційний оператор містить непарну за часом змішану похідну, яка виражає наявність сил інерції Коріоліса і не дозволяє відокремити в математичній моделі змінні за класичною схемою Фур'є. Розглянемо поперечні коливання прямокутної $a \times b$ мембрани, закріпленої по краях, вздовж якої паралельно стороні a , яка паралельна осі x , рухається зі сталою швидкістю v розподілене навантаження з дискретними регулярними включеннями інтенсивності

$$m_2(x) = m_1(x) + \sum_k m_k \delta(x - x_k),$$

де $m_1(x)$ – інтенсивність розподіленого навантаження, m_k – маса k -го дискретного включення. При дослідженні процесу коливань такої системи відносно квазістатичного стану приходимо до розв'язування наступного диференціального рівняння у частинних похідних [3, 8]

$$N\Delta u = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + m_2(x) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u \quad (1)$$

з граничними

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = 0, \quad u(a, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, b, t) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

та початковими умовами

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) = f_1(x, y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = f_2(x, y), \end{aligned} \quad (3)$$

де $m_0, m_2(x)$ відповідно до інтенсивності мас одиниці площі мембрани і розподіленого рухомого навантаження, N, v – розтягуюча сила, швидкість руху навантаження вздовж осі x . Зауважимо, що поклавши $m_0 = 0$, отримаємо рівняння поперечних коливань неоднорідної мембрани, яка рухається у повздовжньому напрямку. Розв'язок диференціального рівняння (1) відшукуємо у вигляді [2, 6]

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = \varphi(x, y) \cos \omega t + \\ + \psi(x, y) \sin \omega t. \end{aligned} \quad (4)$$

Розділивши змінні у рівнянні (1) за відомою схемою відокремлення змінних за допомогою виразу (4), отримаємо систему зв'язаних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} N\Delta\varphi - 2m_2v\omega \frac{\partial\varphi}{\partial x} - m_2v^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \\ + (m_0 + m_2)\omega^2\varphi = 0, \\ N\Delta\psi + 2m_2v\omega \frac{\partial\psi}{\partial x} - m_2v^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \\ + (m_0 + m_2)\omega^2\psi = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

після застосування до якої методу комплексного згортання прийдемо до крайової задачі

$$\begin{aligned} c_1^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + c_2^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + 2ib\omega \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \omega^2\Phi = 0, \quad (6) \\ \Phi(0, y) = 0, \quad \Phi(a, y) = 0, \\ \Phi(x, 0) = 0, \quad \Phi(x, b) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

яку розв'язуватимемо за класичною схемою відокремлення змінних, а саме – покладемо

$$\Phi(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (8)$$

і підставивши вираз (8) в (6), отримаємо

$$c_1^2 X''(x) + 2ib\omega X'(x) + \lambda^2 X = 0, \quad (9)$$

$$Y''(y) + \mu^2 Y = 0 \quad (10)$$

при граничних умовах

$$\begin{aligned} X(0) = 0; \quad X(a) = 0, \\ Y(0) = 0; \quad Y(b) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

де сталі λ^2 і μ^2 зв'язані між собою співвідношенням

$$\mu^2 = (\omega^2 - \lambda^2) / c_2^2. \quad (12)$$

Таким чином, маємо задачу Штурма-Ліувілля на власні значення, де коефіцієнти рівнянь є функціями x

$$c_1^2 = \frac{N - m_2(x)v^2}{m_0 + m_2(x)}, \quad c_2^2 = \frac{N}{m_0 + m_2(x)},$$

$$b = \frac{m_2(x)v}{m_0 + m_2(x)}, \quad (13)$$

$m_2(x) = m_1(x) + \sum_k m_k \delta(x - x_k)$, а тому записати їх розв'язки в загальному випадку не вдається. Знайдемо наближені розв'язки математичної моделі (1)-(3), які в подальшому можуть уточнюватися, наприклад, асимптотичним методом. Скористаємося для цього відомим способом [1], а саме – «розмажемо» розподілене рухоме навантаження до рівномірно розподіленого з інтенсивністю m_p по всій площі мембрани, при цьому прийдемо до крайової задачі (9), але зі сталими коефіцієнтами

$$c_1^2 = \frac{N - m_p v^2}{m_0 + m_p}, \quad b = \frac{m_p v}{m_0 + m_p},$$

$$m_p = \left(\int_0^a m_1(x) dx + \sum_k m_k \right) / a, \quad (14)$$

або

$$c_1^2 = \frac{N}{m_n} - \varepsilon v^2, \quad c_2^2 = \frac{N}{m_n}, \quad b = \varepsilon v, \quad (15)$$

де

$$\varepsilon = m_p / m_n, \quad m_n = m_0 + m_p. \quad (16)$$

Розв'язками крайових задач (9), (10) з урахуванням (11) при такому наближенні будуть функції [3, 6]

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\frac{c_2^2 - \varepsilon v^2}{(c_2^2 - (1 - \varepsilon)\varepsilon v^2)}} \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 (c_2^2 - \varepsilon v^2) + c_2^2 \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right], \quad (20)$$

звідки визначаємо два значення критичної швидкості руху навантаження

$$v_1^* = \sqrt{c_2^2 / \varepsilon}, \quad v_2^* = \sqrt{c_2^2 / (1 - \varepsilon)\varepsilon}, \quad (21)$$

при яких відбувається втрата стійкості мембрани [2, 3].

Аналіз результатів та висновки. Проведене дослідження математичної моделі

$$X(x) = \exp\left(-i \frac{b\omega x}{c_1^2}\right) \sin \theta x, \quad Y(y) = \sin \mu y,$$

де

$$\theta^2 = \frac{\omega^2 b^2 + c_1^2 \lambda^2}{c_1^4}, \quad \mu^2 = \frac{\omega^2 - \lambda^2}{c_2^2}, \quad (17)$$

а параметри θ і μ мають нескінченну множину значень, виходячи з крайових умов

$$(11) \quad \theta = \frac{n\pi}{a}, \quad \mu = \frac{m\pi}{b}.$$

Остаточно частинні розв'язки рівняння (6) отримуємо у вигляді

$$\Phi_{n,m}(x, y) = \exp\left(-\frac{ib}{c_1^2} \omega x\right) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y,$$

а загальний розв'язок рівняння (1) з умовами (2) при обмеженнях (14) набирає вигляду

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m} a_{n,m} \left[\varphi_{n,m}(x, y) \cos(\omega_{n,m} t + \alpha_{n,m}) + \psi_{n,m}(x, y) \sin(\omega_{n,m} t + \alpha_{n,m}) \right], \quad (18)$$

де власні і супровідні форми коливань мають вигляд

$$\varphi_{n,m} = \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \cos \frac{b}{c_1^2} \omega_{n,m} x,$$

$$\psi_{n,m}(x, y) = -\sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{b}{c_1^2} \omega_{n,m} x. \quad (19)$$

Зауважимо, що супровідні форми коливань $\psi_{n,m}(x, y)$ обумовлені рухомим інерційним навантаженням і нетривіальні лише при його наявності. Для визначення частот поперечних коливань гнучкої натягнутої мембрани за дії рухомого інерційного навантаження отримаємо наступний вираз

показує, що для пружних гнучких об'єктів за дії рухомого інерційного навантаження маємо два значення критичної швидкості руху інерційного навантаження, чого не виявляється застосуванням прямих методів математичної фізики до задач цього класу. Рух гнучкої мембрани за дії рухомого інер-

ційного навантаження, як видно з (18), відбувається у вигляді суперпозиції двох груп коливань – власних і супровідних, які зсунуті по фазі на прямий кут. Супровідні форми коливань обумовлені рухомим інерційним навантаженням і нетривіальні лише при його наявності. На основі наведеного методу двохвильового подання коливань мо-

жуть бути побудовані точні розв'язки та досліджені задачі про поперечні коливання зубчастого паска з натяжним роликком, звантаженої нерівномірно, з дискретними включеннями, конвеєрної стрічки, які рухаються у поздовжньому напрямку та інші задачі динаміки пружних систем за дії рухомого інерційного навантаження.

Література

1. Андрианов И. В., Лесничая В. А., Маневич Л. И. Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. Москва: Наука, 1995. 223 с.
2. Горошко О. А. Собственные и сопровождающие колебания в системе с подвижными инерционными нагрузками: труды V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям, (г. Киев, 1970 г.). Киев, 1970. С. 215–219.
3. Горошко О. О., Дем'яненко А. Г., Киба С. П. Двохвильові процеси в механічних системах. Київ: Либідь, 1991. 188 с.
4. Дем'яненко А. Г., Гурідова В. О. Короткий нарис досліджень динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням неklasичним методом відокремлення змінних. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2017. № 2. С. 47–57.
5. Каленюк П. І., Нитребич З. М. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. Львів: Вид-во Нац. ун-ту «Львівська політехніка», 2002. 292 с.
6. Киба С. П., Дем'яненко А. Г. Узагальнення методу розділення змінних та деякі його застосування в механіці. Київ: НМК ВО МОУ, 1991. 120 с.
7. Пановко Я. Г. Исторический очерк развития теории динамического действия подвижной нагрузки. *Труды Ленинградского КВВИА*. 1946. Вып. 17. С. 54–69.
8. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1966. 724 с.
9. Steuding H. Die Schwingung von Tragern bei bewegten Lasten. *Jng. Acch.* 1934. P. 275–305.
10. Housner G. W. Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid. *Journal of Applied Mechanics. Trans ASME*. 1952. Vol. 19, No 2. P. 205–209.

References

1. Andrianov, I. V., Lesnichaya, V. A. & Manevich, L. I. (1995). Averaging method in statics and dynamics of ribbed shells. Moscow: Nauka.
2. Horoshko, O. A. (1970). Own and accompanying oscillations in a system with moving inertial loads. Proceedings of the V International Conference on Nonlinear Oscillations, (pp. 215–219). Kiev.
3. Horoshko, O. O., Demianenko, A. G. & Kiba S.P. (1991). Two-wave processes in mechanical systems. Kiev: Lybid.
4. Demianenko, A. G. & Guridova, V. O. (2017). A brief outline of the studies of the dynamics of elastic systems with moving inertial loading by the nonclassical method of separating the variables. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*, No. 2, pp. 47–57.
5. Kalenyuk, P. & Nytrebych, Z. (2002). Generalized scheme of separation of variables. Differential-symbol method. Lviv: Vydavnytstvo Natsional'noho universytetu "L'vivs'ka politekhnik".
6. Kiba, S. P. & Demianenko, A. G. (1991). Generalization of the method of separation of variables and some of its application in mechanics. Kiev: NMK VO MOU.
7. Panovko, Ia. G. (1948). Historical essay on the development of the theory of dynamic action of a moving load. *Trudy Leningradskogo KVVIA*, Issue 17, pp. 8–38.
8. Tikhonov, A. N. & Samarskiy, A. A. (1966). Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka.
9. Steuding, H. (1934). Die Schwingung von Tragern bei bewegten Lasten. *Jng. Acch.*, pp. 275–305.
10. Housner, G. W. (1952). Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid. *Journal of Applied Mechanics. Trans ASME*, Vol. 19, No. 2, pp. 205–209.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-07

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОЙ И ДВУХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЁННЫХ ПОЛОС, УСИЛЕННЫХ БЕСКОНЕЧНЫМ СТРИНГЕРОМ

Н. Н. Дихтярук, Н. А. Ярецкая

Хмельницький національний університет
mega-dihtyaruk@ukr.net, massacrane2@ukr.net

Ключевые слова:

линеаризованная теория упругости, начальные (остаточные) напряжения, контактная задача, интегральное преобразование Фурье, стрингер.

В рамках линеаризованной теории упругости рассматриваются плоские контактные задачи, касающиеся передачи нагрузки от бесконечного стрингера к одной и к двум одинаковым полосам с начальными (остаточными) напряжениями. Силы трения не учитываются. Исследования проведены в общем виде для теории больших (конечных) начальных деформаций и двух вариантов теории малых начальных деформаций, для произвольной структуры упругого потенциала.

КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНІЄЇ ТА ДВОХ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ СМУГ, ПІДСИЛЕНИХ НЕСКІНЧЕННИМ СТРИНГЕРОМ

М. М. Діхтярук, Н. О. Ярецька

Хмельницький національний університет
mega-dihtyaruk@ukr.net, massacrane2@ukr.net

Ключові слова:

лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактна задача, інтегральне перетворення Фур'є, стрингер.

У рамках лінеаризованої теорії пружності розглядаються плоскі контактні задачі, що стосуються передачі навантаження від нескінченного стрингера до однієї і до двох однакових смуг з початковими (залишковими) напруженнями. Сили тертя не враховуються. Дослідження проведені в загальному вигляді для теорії великих (скінченних) початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій, для довільної структури пружного потенціалу. У статті робиться припущення, що: 1) нескінченні пружні смуги виготовлені з однакових стисливих або нестисливих матеріалів з потенціалом довільної структури; 2) у смугах діють однакові початкові (залишкові) напруження; 3) під дією вертикальних і горизонтальних сил інтенсивності стрингер у вертикальному напрямку згинається як звичайна балка, а в горизонтальному розтягується (стискається) як одночасно напружений стрижень. Дослідження даної задачі виконано в координатах початкового (залишкового) деформованого стану. За допомогою інтегрального перетворення Фур'є у статті одержано основні інтегро-диференціальні рівняння, розв'язок яких представлено у вигляді нескінченних систем алгебраїчних рівнянь. Визначено закон розподілу нормальних і тангенціальних контактних напружень вздовж лінії з'єднання стрингера з попередньо напруженими смугами. Досліджено вплив наявності початкових (залишкових) напружень у смугах (смугі) на закон розподілу контактних напружень по лінії контакту з нескінченим стрингером. Проілюстровано вплив початкових напружень у пружних смугах на закон розподілу контактних напружень під стрингером від дії тангенціальної сили. У статті запропоновано спосіб розв'язування даного типу контактних задач для смуг з початковими (залишковими) напруженнями, які підкріплені нескінченною пружною накладкою (стрингером) з використанням інтегральних перетворень Фур'є.

CONTACT TASKS FOR ONE AND TWO PRELIMINARY STRESSED STRIPS STRENGTHENED BY AN INFINITE STRINGER

N. N. Dikhtiaruk, N. A. Yaretskaia

Khmelnytsky National University

mega-dihtyaruk@ukr.net, massacran2@ukr.net

Key words:

linearized elasticity theory, initial (residual) stresses, contact problem, integral Fourier transform, stringer.

The article is devoted to the research of problems of contact interaction of infinite elastic stringer with one and two identical clamped along one edge of pre-stressed strips. In general, the research was carried out for the theory of great initial and different variants of the theory of small initial deformations within the framework of linearized theory of elasticity with the elastic potential having arbitrary structure. The integral integer-differential equations are obtained using the integral Fourier transform. In the article alsaw was investigated the influence of the initial (residual) stresses in strips on the law of distribution of contact stresses along the line of contact with an infinite stringer.

The studies presented in the paper allow us to make generalized conclusions of the influence of initial stresses on the law of distribution of contact forces under an infinite stringer:

1. In general case for equal and unequal roots of the defining equation the general method of solution for the problems considered within the framework of linearized theory of this class of problems is formulated. This gives an opportunity to get the solution of the set tasks, if known the solution of analogous linear (without initial stresses) problems.
2. The contact stresses on the contact line with stringer of significantly dependent on the initial stresses. A more significant effect of quantitative nature of initial stresses is caused in highly elastic materials compared with more stiff materials. Qualitative effect of the initial stresses is identical nature.
3. When initial stresses is approximate to value corresponding to the surface instability, there are phenomena of "resonant" nature, which consist in the fact that the stresses and displacements in the field of contact a sharp of change their value, and the elastic strips with initial stresses are in a state of neutral equilibrium.

Постановка проблемы. Исследование вопросов контактного взаимодействия твердых тел представляется весьма актуальной проблемой в связи с тем, что одним из наиболее распространенных на практике способов передачи внешних усилий является контактное взаимодействие. Эта проблема актуальна как с точки зрения развития фундаментальных разработок по механике твердого деформированного тела, так и с точки зрения приложений к различным отраслям современной техники. Особенно широкое применение теория контактных задач находит в машиностроении, так как передача усилий в узлах и механизмах машин сопровождается контактным взаимодействием деталей. Методы, развиваемые в теории контактных задач, позволяют найти распределение давления в местах контакта, изу-

чить концентрацию напряжений и разработать критерии ее снижения, а также исследовать напряженно-деформированное состояние.

Одним из известных факторов, которые влияют на надёжность и долговечность инженерных конструкций и деталей машин, есть наличие в них начальных (остаточных) напряжений.

Анализ известных результатов исследований. Несмотря на существенное достижение в развитии контактных задач, все же вопрос учета начальных напряжений при контактном взаимодействии остался почти полностью неразработанным до последнего времени. Как известно, практически во всех элементах конструкции присутствуют начальные напряжения. Последние могут быть вызваны различного рода причинами, например технологическими операциями,

проводимыми при изготовлении целого ряда материалов или сборкой конструкции. В случае композиционных материалов начальные напряжения, как правило, соответствуют напряжениям вдоль армирующих элементов.

При строгой постановке контактных задач для упругих тел с начальными напряжениями [1, 2], возникает необходимость привлечения аппарата нелинейной теории упругости, что существенно усложняет построение аналитических решений. Но в случае больших (конечных) напряжений (деформаций) можно ограничиться рассмотрением линейризованной теории упругости [1, с. 195]. Исторически исследования контактных задач в рамках линейризованной теории упругости складывались по двум направлениям. Первое было связано с исследованиями контактного взаимодействия тел с конкретной формой упругого потенциала [1, с. 188]. Во втором – задача ставилась в общем виде для сжимаемых (несжимаемых) тел с потенциалом произвольной структуры на основе линейризованной теории упругости [2-13].

В данной статье с использованием соотношений линейризованной теории упругости [1, 2] представлены решения контактных задач о контактном взаимодействии бесконечного стрингера с одной и двумя предварительно напряженными полосами. Исследование выполнено в общем виде для сжимаемых и несжимаемых тел для теории больших (конечных) начальных деформаций и двух вариантов теории малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала.

Цель работы. Исследовать в рамках линейризованной теории упругости две плоские контактные задачи, что касаются передачи нагрузки от бесконечного стрингера к одной и к двум одинаковым полосам с начальными напряжениями без учета сил трения. Решения задач представить в общем виде для теории больших (конечных) начальных деформаций и двух вариантов теории малых начальных деформаций, для произвольной структуры упругого потенциала. Выявить влияние начальных напряже-

ний в полосах на закон распределения контактных напряжений по линии контакта с бесконечным стрингером.

Постановка задачи. Следуя [2-4], все исследования проведем в координатах начального деформированного состояния y_i , которые связаны с лагранжевыми координатами x_i соотношениями $y_i = \lambda_i x_i$ ($i = 1, 2$), где λ_i – коэффициенты удлиненные, определяющие перемещение начального состояния в направлениях осей координат.

Будем считать, что всегда выполняются четыре положения [2], которые являются основными в теории контактного взаимодействия тел с начальными (остаточными) напряжениями и, следовательно, определяют область ее применения.

В области контакта упругой полосы с начальными напряжениями имеют место условия при $y_2 = 0$:

$$u(y_1) = u_1(y_1); \quad v(y_1) = u_2(y_1) \quad (1)$$

$$(y_2 = 0, -\infty < y_1 < \infty).$$

Как известно из [1, 2], условия (1) эквивалентны условиям:

$$\frac{du}{dy_1} = \frac{du_1}{dy_1}, \quad \frac{dv}{dy_1} = \frac{du_2}{dy_1} \quad (2)$$

$$(y_2 = 0, -\infty < y_1 < \infty).$$

Условия (1) и (2) отличаются друг от друга только постоянной интегрирования, что выражает жесткое смещение полосы с начальными напряжениями, вместе с условием равновесия:

$$p = \int_{a_k}^{y_1} \tau(t) dt \quad (3)$$

замыкают постановку линейризованных задач о контактном взаимодействии упругих накладок, что усиливают упругую полосу.

Задача 1. Контактное взаимодействие бесконечного стрингера с предварительно напряженной полосой. Пусть упругая бесконечная полоса с начальными напряжениями имеет толщину t и зашпечена одним краем (находясь в условиях

плоской деформации), а другим (свободным) краем усиленная бесконечно длинным стрингером, толщина которого h (рис. 1).

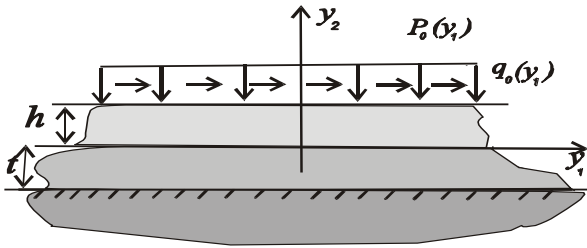


Рис. 1. Действие сил на усиленную полосу

Будем считать, что под действием вертикальных и горизонтальных сил интенсивности стрингер в вертикальном направлении сгибается как обычная балка, а в горизонтальном – растягивается (сжимается) как одноосный напряженный стержень. Следовательно, можно записать:

$$\frac{du^{(1)}(y_1)}{dy_1} = \frac{1}{E_1 h} \int_{-\infty}^{y_1} [q(t) - q_0(t)] dt \quad (4)$$

$$(-\infty < y_1 < \infty),$$

$$D_1 \frac{d^4 v^{(1)}(y_1)}{dy_1^4} = p(y_1) - p_0(y_1) \quad (5)$$

$$(-\infty < y_1 < \infty),$$

где $u^{(1)}(y_1)$, $v^{(1)}(y_1)$ – компоненты вектора перемещений в упругом стрингере, D_1 – коэффициент жесткости стрингера на изгиб, E_1 – модуль Юнга, $p_0(y_1)$, $p(y_1)$, $q_0(y_1)$, $q(y_1)$ – интенсивности вертикальных и горизонтальных сил соответственно.

$$D_1 \frac{d^4}{dy_1^4} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(y_1 - \tau) q(\tau) d\tau \right] = p(\tau) - p_0(\tau) \quad (-\infty < y_1 < \infty),$$

$$E_1 h \frac{d}{dy_1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(y_1 - \tau) p(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} h_{22}(|y_1 - \tau|) q(\tau) d\tau \right] = \int_{-\infty}^{\infty} [q(\tau) - q_0(\tau)] d\tau. \quad (8)$$

При условии, что на накладку действуют только вертикальные силы $p_0(y_1)$, а $q_0(y_1) = 0$, то система (8) сводится к одному интегро-дифференциальному уравнению:

$$D_1 \frac{d^4}{dy_1^4} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau \right] = p(y_1) - p_0(y_1) \quad (-\infty < y_1 < \infty). \quad (9)$$

Уравнение (9) описывает изгиб упругой накладки на упругой полосе с начальными

При условии полного контакта следует отметить, что должны выполняться условия:

$$\frac{dv^{(1)}(y_1)}{dy_1} = \frac{du_2^{(2)}(y_1)}{dy_1},$$

$$\frac{du^{(1)}(y_1)}{dy_1} = \frac{du_1^{(2)}(y_1)}{dy_1} \quad (6)$$

$$(-\infty < y_1 < \infty),$$

где $u_1^{(2)}(y_1)$, $u_2^{(2)}(y_1)$ – компоненты вектора перемещений в упругой полосе с начальными напряжениями.

Если учесть условия (4), (5), при выполнении условия (6) перемещения граничных точек, свободных от защемления, имеют вид:

$$u_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(|y_1 - t|) p(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(y_1 - t) q(t) dt \quad (-\infty < y_1 < \infty),$$

$$u_2(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(y_1 - t) p(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} h_{22}(|y_1 - t|) q(t) dt, \quad (7)$$

где h_{ij} ($i, j = 1, 2$) – функции влияния для упругой полосы с начальными (остаточными) напряжениями, выражения которых задаются в [4].

Учитывая (4)-(7), получим следующую систему интегро-дифференцированных уравнений:

напряжениями. В случае, когда под действием горизонтальных сил $q_0(y_1)$ ($p_0(y_1) = 0$) упругая накладка только растягивается, получим следующее уравнение:

$$E_1 h \frac{d}{dy_1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_{22}(|y_1 - \tau|) q(\tau) d\tau \right] = \int_{-\infty}^{y_1} [q(\tau) - q_0(\tau)] d\tau \quad (-\infty < y_1 < \infty). \quad (10)$$

Для решения системы интегро-дифференциальных уравнений (8) применим интегральные преобразования Фурье по пере-

менной y_1 , в результате получим выражения для нахождения контактных напряжений $p(y_1)$ и $q(y_1)$:

$$p(y_1) = \frac{\mu}{\pi} \left[Q \int_0^{\infty} H_{21}^*(\alpha) \cdot H^{-1}(\alpha) \cdot \alpha^2 \sin \alpha y_1 d\alpha - P \int_0^{\infty} H_{22}^* H^{-1}(\alpha) \cos \alpha y_1 d\alpha \right] \quad (-\infty < y_1 < \infty)$$

$$q(y_1) = \frac{\mu}{\pi} \left[Q \int_0^{\infty} H_{11}^*(\alpha) \cdot H^{-1}(\alpha) \cos \alpha y_1 d\alpha - P \int_0^{\infty} H_{12}^* H^{-1}(\alpha) \sin \alpha y_1 d\alpha \right]. \quad (11)$$

Здесь величины P , Q – вертикальные и горизонтальные внешние силы, которыми загружена упругая накладка, а H_{ij}^* ($i, j = 1, 2$) выражаются через известные функции, H_{ij} ($i, j = 1, 2$), которые определяются для равных и неравных корней определяющего уравнения [2] согласно с [4].

Задача 2. Контактное взаимодействие бесконечного стрингера с двумя предварительно напряженными полосами. Пусть бесконечные упругие полосы изготовлены из одинаковых сжимаемых или несжимаемых материалов с потенциалом произвольной структуры. В данных полосах

действуют одинаковые начальные (остаточные) напряжения, причем толщины полос – t . По краям при $y = \pm t$ полосы ущемлены и находятся в условиях плоской деформации.

Будем считать, что бесконечные упругие полосы соединены между собой бесконечным упругим стрингером с модулем упругости материала E_1 и коэффициентом Пуассона ν_1 . Пусть также предварительно напряженные полосы загружены горизонтальной силой $Q_0 \delta(y_1)$, которая действует в средней точке стрингера (тут $\delta(y_1)$ – дельта-функция Дирака). Исследование данной задачи проведем в координатах начального (остаточного) деформированного состояния Oy_1y_2 (рис. 2).

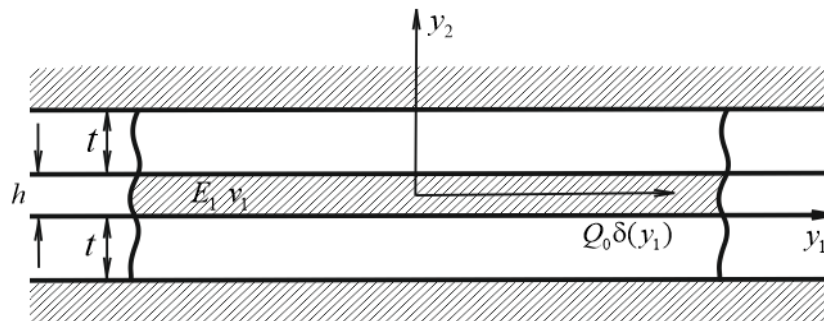


Рис. 2. Действие сил на полосы

Определим закон распределения нормальных и тангенциальных контактных напряжений вдоль линии соединения стрингера с предварительно напряженными полосами. При этом для случая усиления двух одинаковых полос система (4)-(5) из предыдущей задачи примет вид:

$$\frac{du^{(1)}(y_1)}{dy_1} = \frac{1}{E_1 h} \int_{-\infty}^{y_1} [2q(t) - Q_0 \delta(t)] dt \quad (12)$$

$$(-\infty < y_1 < \infty),$$

$$\frac{dv^{(1)}(y_1)}{dy_1} = 0 \quad (-\infty < y_1 < \infty), \quad (13)$$

а выражениями для вертикальных и горизонтальных перемещений граничных точек свободных от защемления будут

$$u_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(|y_1 - t|) p(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(y_1 - t) q(t) dt \quad (-\infty < y_1 < \infty),$$

$$u_2(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(y_1 - t) p(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} h_{22}(|y_1 - t|) q(t) dt. \quad (14)$$

Из (12)-(14) относительно неизвестных контактных напряжений получим следующую систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dy_1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(|y_1-t|) p(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(y_1-t) q(t) dt \right] = 0 \quad (-\infty < y_1 < \infty),$$

$$\frac{d}{dy_1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(y_1-t) p(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} h_{22}(|y_1-t|) q(t) dt \right] = \int_{-\infty}^{y_1} [2q(t) - Q_0 \delta(t)] dt, \quad (15)$$

где h_{ij} ($i, j=1,2$) – функции влияния для упругой полосы с начальными напряжениями [6]. Применяв формулы Крамера и обратное преобразование Фурье, получим решение системы интегро-дифференциальных уравнений (15). Это решение дает выражения для искомых контактных напряжений в виде:

$$q(y_1) = \frac{Q_0}{\pi} \mu \int_0^{\infty} \frac{H_{11}^*(\alpha)}{H^*(\alpha)} \cos \alpha y_1 d\alpha,$$

$$p(y_1) = \frac{Q_0}{\pi} \mu \int_0^{\infty} \frac{H_{11}^*(\alpha)}{H^*(\alpha)} \sin \alpha y_1 d\alpha \quad (16)$$

$$q(y_1) = -\frac{Q_0}{2\pi} \cdot \left[c_2 (\cos c_2 y_1 ci(c_2 y_1) + \sin c_2 y_1 si(c_2 y_1)) - \int_0^{\infty} \frac{2\mu(c_2 + \alpha) H_{11}^*(\alpha) - c_2 H^*(\alpha)}{(c_2 + \alpha) H^*(\alpha)} \cos \alpha y_1 d\alpha \right], \quad (17)$$

где

$$si(c_2 y_1) = - \int_{c_2 y_1}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha,$$

$$ci(c_2 y_1) = - \int_{c_2 y_1}^{\infty} \frac{\cos \alpha}{\alpha} d\alpha$$

– интегральный синус и косинус соответственно.

Анализ численных результатов исследования. Для формулы (11) был проведен численный расчет [8], результаты которого представлены на графиках (рис. 3, 4). Все

$$(-\infty < y_1 < \infty).$$

Исследовав на сходимость несобственные интегралы, входящие в (16), а также учитывая значение $H_{ij}^*(\alpha)$ и значение $H_{ij}(\alpha)$, [6] и асимптотические формулы для $H_{ij}(\alpha)$, упуская громоздкие преобразования для контактных касательных напряжений [7], для случая действия только горизонтальной внешней силы $Q_0 \delta(y_1)$, получим при $(-\infty < y_1 < \infty)$:

выводы получены для сжимаемых и не сжимаемых материалов в случае равных (гармоничный потенциал, потенциал Бартенева-Хазановича) и неравных (потенциал Трелоара) корней определяющего уравнения [2].

Числовые расчеты проведены на ПК по лицензионному программному обеспечению Maple [13] согласно безразмерным величинам: $hP^{-1}p(t)$ – нормальные контактные напряжения; $hQ^{-1}q(t)$ – тангенциальные контактные напряжения.

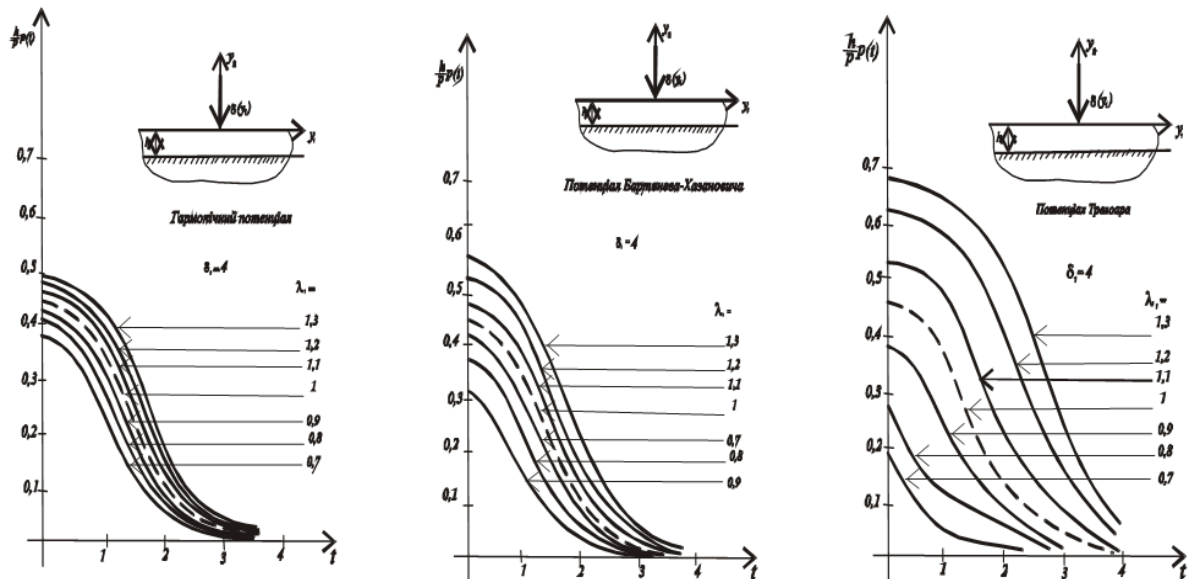


Рис. 3. Интенсивности нормальных контактных напряжений под стрингером

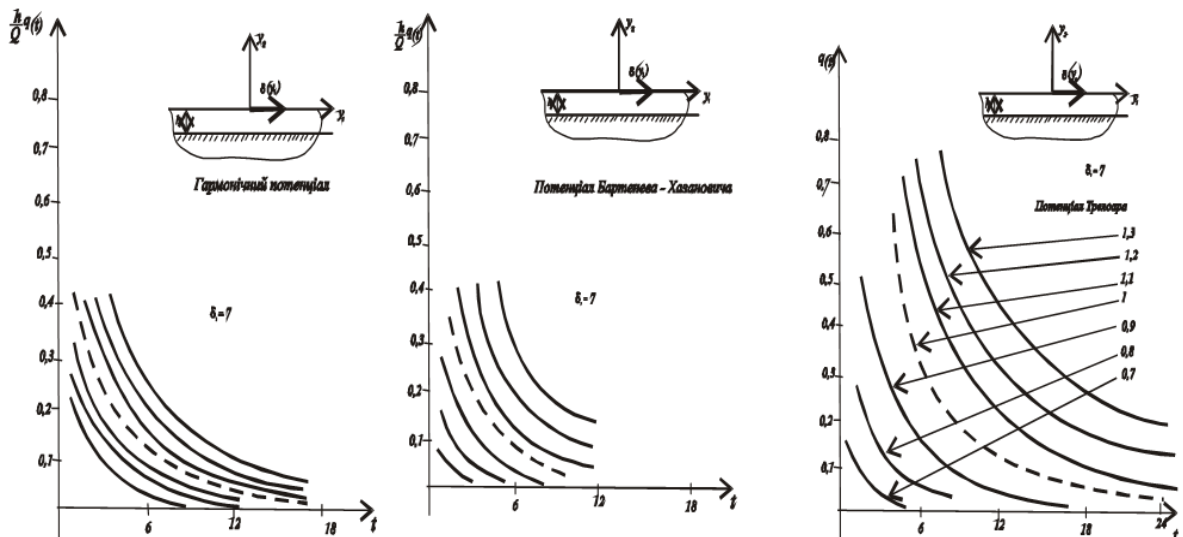


Рис. 4. Интенсивности тангенциальных контактных напряжений под стрингером

На рис. 3, 4 проиллюстрировано влияние начальных напряжений в упругих полосах на закон распределения контактных напряжений под стрингером для безразмерных величин $hQ^{-1}q(t)$ и $hP^{-1}p(t)$, где $hQ^{-1}q(t)$, $hP^{-1}p(t)$ – безразмерные контактные тангенциальные и нормальные напряжения, соответственно. Значению $\lambda_1 = 1$ (пунктирная линия на рис. 3, 4) – соответствует классической теории упругости и совпадает с результатами работы [9]; $\lambda_1 = 0,7; 0,8; 0,9$ – соответствуют начальным напряжением сжатия, а $\lambda_1 = 1,1; 1,2; 1,3$ – напряжением растяжения; t – безразмерная координата начального напряженного состояния в упругих полосах.

Выводы. Полученные результаты проведенного исследования позволяют сделать ряд обобщающих выводов, о влиянии начальных напряжений на закон распределения контактных усилий под бесконечной накладкой, которая взаимодействует с одной и с двумя предварительно напряженными полосами.

1. В общем случае при равных и неравных корнях определяющего уравнения [2, с. 110] для данного типа задач, в рамках линейризованной теории упругости, сформулирован общий метод их решения, который дает возможность получить решения поставленных задач, если известно решение

аналогичных линейных задач (без начальных напряжений).

2. В случае равных корней определяющего уравнения [2, с. 110] для тел с упругими потенциалами произвольной структуры напряжения и перемещения на концах упругих накладок имеют особенность, что полностью совпадает с особенностью в аналогичных задачах классической линейной теории упругости. В случае неравных корней идентичность указанных особенностей доказать не удастся.

3. Анализ численных результатов показывает, что в случае сжатия ($\lambda_1 < 1$) наличие начальных напряжений в упругой полосе приводит к значительному уменьшению контактных напряжений, в случае растяжения ($\lambda_1 > 1$) – к их увеличению. А с проиллюстрированных графиков (рис. 3, 4) следует, что более существенное влияние начальных напряжений наблюдается в высокоэластичных материалах.

Литература

1. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Рудницкий В. Б. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. *Развитие идей Л. А. Галина в механике*. Москва–Ижевск: Инст-т компьютер. исследований, 2013. 480 с.
2. Гузь А. Н., Рудницкий В. Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. Хмельницький: Изд-во «ПП Мельник», 2006. 710 с.
3. Дихтярук Н. Н., Куриненко О. В., Поплавская Е. А., Самарук Н. Н. Контактные задачи для преднапряженных деформируемых тел. *Прикладная механика*. 2019. Т. 56, № 1. С. 91–98.
4. Дихтярук Н. Н. О равновесии полосы с начальными напряжениями, усиленной упругими накладками. *Прикладная механика*. 2004. Т. 40, № 3. С. 63–70.
5. Діхтярук М. М. Передача навантаження від нескінченного стрингера до двох затиснених по одному краю однакових смуг з початковими (залишковими) напруженнями. *Вісник ТНТУ*. 2016. Т. 83, № 3. С. 51–60.
6. Рудницкий В. Б., Дихтярук Н. Н. Упругая полоса с начальными напряжениями, усиленная упругими накладками. *Прикладная механика*. 2002. Т. 38, № 11. С. 81–88.
7. Рудницкий В. Б., Дихтярук Н. Н. Контактная задача о взаимодействии бесконечного стрингера и двух одинаковых полос с начальными напряжениями. *Прикладная механика*. 2017. Т. 53, № 2. С. 41–48.
8. Dikhtyaruk N. N. Equilibrium of a prestressed strip reinforced with elastic plates. *International Applied Mechanics*. March 2004. Vol. 40, Issue 3. P. 290–296.
9. Rudnitskij V. B., Dikhtyaruk N. N. A prestressed elastic strip with elastic reinforcements. *International Applied Mechanics*. November 2002. Vol. 38, Issue 11. P. 1354–1360.
10. Rudnitskij V. B., Dikhtyaruk N. N. Interaction Between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. *International Applied Mechanics*. 2017. Vol. 53, Issue 2. P. 149–155.
11. Yaretskaya N. A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *International Applied Mechanics*. July 2014. Vol. 50, Issue 4. P. 378–388.
12. Yaretskaya N. F. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. October 2018. Vol. 54, Issue 5. P. 539–543.
13. Рудницький В. Б., Ярецька Н. О., Венгер В. О. Застосування ІТ технологій в механіці деформованого твердого тіла. *Проблеми трибології*. 2017. № 2. С. 32–40.

References

1. Guz, A. N., Babich, S. Yu. & Rudnitskiy, V. B. (2013). Contact interaction of elastic bodies with initial (residual) stresses. *Razvitie idey L. A. Galina v mehanike*. Moscow-Izhevsk: Institut kompyuternykh issledovaniy (in Russian).
2. Guz, A. N. & Rudnitskiy, V. B. (2006). Fundamentals of the theory of contact interaction of elastic bodies with initial (residual) stresses. Hmelniyskiy: vyid. PP Melnik (in Russian).
3. Dihtyaruk, N. N., Kurinenko, O. V., Poplavskaya, E. A. & Samaruk, N. N. (2019). Contact tasks for pre-stressed deformable bodies. *Prikladnaya mekhanika*, Vol. 56, No. 1, pp. 91–98 (in Russian).
4. Dihtyaruk, N. N. (2004). On the equilibrium of a strip with initial stresses reinforced by elastic overlays. *Prikladnaya mekhanika*, Vol. 40, No. 3, pp. 63–70 (in Russian).
5. Dikhtiaruk, M. M. (2016). Transfer of a stringer to the edge of a single string up to one side of one side of the skin with smoked (overlapped) lines. *Visnyk TNTU*, Vol. 83, No. 3, pp. 51–60 (in Ukrainian).
6. Rudnitskiy, V. B. & Dihtyaruk, N. N. (2002). Elastic strip with initial stresses, reinforced by elastic linings. *Prikladnaya mekhanika*, Vol. 38, No. 11, pp. 81–88 (in Russian).
7. Rudnitskiy, V. B. & Dihtyaruk, N. N. (2017). Contact interaction of infinite stringer with one and by two strips with initial stresses. *Prikladnaya mekhanika*, Vol. 53, No. 2, pp. 41–48 (in Russian).
8. Dikhtyaruk, N. N. (March, 2004). Equilibrium of a prestressed strip reinforced with elastic plates. *International Applied Mechanics*, Vol. 40, No. 3, pp. 290–296.
9. Rudnitskiy, V. B. & Dikhtyaruk, N. N. (November, 2002). A prestressed elastic strip with elastic reinforcements. *International Applied Mechanics*, Vol. 38, No. 11, pp. 1354–1360.
10. Rudnitskiy, V. B. & Dikhtyaruk, N. N. (2017) Interaction Between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. *International Applied Mechanics*, Vol. 53, No. 2, pp. 149–155.
11. Yaretskaya, N. A. (2014). Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *International Applied Mechanics*, Vol. 50, No. 4, pp. 378–388.
12. Yaretskaya, N. F. (2018). Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*, Vol. 54, No. 5, pp. 539–543.
13. Rudnytskyi, V. B., Yaretska, N. O. & Venher, V. O. (2017). The use of IT technologies in the mechanics of deformable bodies. *Problemy trybolohii*, No. 2, pp. 32–40 (in Ukrainian).

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-08

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ ШАРУВАТИХ ТІЛ ОБЕРТАННЯ З В'ЯЗКОПРУЖНОГО МАТЕРІАЛУ

В. І. Козлов, Л. П. Зінчук, О. Ю. Шевченко

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАНУ

thermo_imech@ukr.net, zinchuk_imech@ukr.net, shevalie@ua.fm

Ключові слова:

нестационарні коливання, в'язкопружний матеріал, перетворення Лапласа, метод скінченних елементів.

У даній роботі розглянуто задачу про динамічну поведінку тривимірного тіла обертання з в'язкопружного ортотропного матеріалу при деформації, що викликана механічним навантаженням, яке діє на частині поверхні тіла. Для побудови розв'язку використовується принцип мінімуму перетвореної за Лапласом потенційної енергії. Варіаційна задача механіки розв'язується методом скінченних елементів з використанням ізопараметричних шестигранних елементів з квадратичною апроксимацією компонент вектора переміщень у межах елемента. Для розв'язання отриманої системи інтегро-диференціальних рівнянь використовується метод розкладу компонент вектора переміщень за власними формами у поєднанні з методом усереднення Крилова-Боголюбова. На основі запропонованого підходу проведено чисельний аналіз динамічної поведінки двошарового в'язкопружного порожнистого циліндра у випадку, коли механічні параметри матеріалу шарів відрізняються на декілька порядків.

NUMERICAL MODELING OF NON-STATIONARY VIBRATIONS OF LAYERED BODIES OF ROTATION FROM VISCOELASTIC MATERIAL

V. I. Kozlov, L. P. Zinchuk, O. Yu. Shevchenko

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine

thermo_imech@ukr.net, zinchuk_imech@ukr.net, shevalie@ua.fm

Key words:

non-stationary vibrations, viscoelastic material, Laplace transform, finite element method.

The study of the propagation of non-stationary vibrations in layered viscoelastic media presents a considerable scientific and practical interest. If the stress-strain state of structural elements under static load can be calculated using well-developed analytical and numerical methods, then the analysis of the propagation of non-stationary oscillations in inelastic bodies is a complicated mathematical problem. It should be noted that significant achievements in solving specific non-stationary problems are obtained as a result of the combination of numerical methods that allow the study of bodies of complex form and consider heterogeneity of material, with different analytical methods used to solve the received ordinary differential and integro-differential equations relative to the functions of time.

In this paper we consider the problem of the dynamic behavior of a three-dimensional body of rotation from a viscoelastic orthotropic material during deformation caused by mechanical load acting on a part of the body surface. To construct the solution, the principle of the minimum of transformed by Laplace the potential energy was used. The variational problem of mechanics is solved by the finite element method using 24-node hexahedral isoparametric elements with quadratic approximation of components of the vector of displacements within the element. To solve the obtained system of integro-differential equations, the modal superposition method in combination with the Krylov-Bogolyubov averaging method are used.

Computer simulation showed that the use of the Krylov-Bogolyubov method for solving integro-differential equations with respect to time makes it possible to obtain fairly exact numerical results on the distribution of stresses in space and time. On the basis of the proposed approach, a numerical analysis of the dynamic behavior of a two-layer viscoelastic hollow cylinder was performed in the case that the mechanical parameters of the material of the layers differ by several orders of magnitude.

Вступ. У зв'язку з широким використанням полімерних матеріалів у різних галузях сучасної техніки значний інтерес представляють дослідження нестационарних процесів в елементах конструкцій із в'язкопружних матеріалів при екстремальних умовах їх експлуатації.

Широке застосування в різних галузях механіки суцільного середовища, у тому числі і в теорії в'язкопружності, отримав метод скінченних елементів у варіаційній постановці [1, 2]. Основним недоліком варіаційних методів в теорії в'язкопружності є відсутність екстремальних властивостей відповідних функціоналів. Значний прогрес у розробці варіаційних методів механіки суцільного середовища було досягнуто після праць Гуртіна [3, 4], який відмовився від традиційного представлення скалярного добутку та ввів новий скалярний добуток у вигляді згортки. Це дозволило сформулювати достатньо загальний варіаційний принцип. Проте при цьому відповідні функціонали приймають на розв'язках динамічних задач не мінімальні, а лише стаціонарні значення. У роботі [4] показано, що властивість мінімальності має лише перетворена за Лапласом потенційна енергія. Існування мінімуму перетвореного функціоналу дозволило довести ряд теорем стосовно збіжності наближених і чисельних методів, що використовуються при розв'язанні динамічних задач. Варто зазначити, що значні досягнення при розв'язанні конкретних нестационарних задач отримані в результаті поєднання чисельних методів, які дозволяють досліджувати тіла складної форми і враховувати неоднорідність матеріалу, з різними аналітичними методами, що використовуються для розв'язання отриманих звичайних диференціальних і інтегро-диференціальних рівнянь відносно функцій часу.

Суттєвим кроком у розвитку методів розв'язання динамічних задач в'язкопружності варто вважати розробку методу усереднення Крилова-Боголюбова для розв'язання систем інтегро-диференціальних та інтегральних рівнянь [5]. Детальний виклад методу усереднення для динамічних задач в'язкопружності представлено у праці [6].

Розв'язанню ряду нестационарних задач в'язкопружності з використанням варіаційних принципів і різних методів розв'язку диференціальних і інтегро-диференціальних рівнянь відносно функцій часу присвячені наукові праці [7-14].

У даній роботі розглядається задача про динамічну поведінку тривимірного тіла обертання з в'язкопружного матеріалу при деформації, що викликана механічним навантаженням, яке діє на частині поверхні тіла. Варіаційна задача механіки розв'язується методом скінченних елементів з використанням ізопараметричних шестигранних елементів з квадратичною апроксимацією компонент вектора переміщень у межах елемента. Для розв'язання отриманої системи інтегро-диференціальних рівнянь використовується метод розкладу компонент вектора переміщень за власними формами коливань у поєднанні з методом усереднення Крилова-Боголюбова.

Постановка задачі. Розглянемо тіло обертання з ортотропного в'язкопружного матеріалу при деформації, що викликана дією поверхневих сил \mathbf{P}_n на частині поверхні S_1 . При цьому навантаження може бути функцією координат і часу. У цьому випадку динамічна задача зводиться до розв'язку системи тривимірних рівнянь в'язкопружності в циліндричній системі координат (z, r, θ)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \sigma_{zr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\sigma_{z\theta})}{\partial \theta} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\sigma_{r\theta})}{\partial \theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \sigma_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\sigma_{\theta\theta})}{\partial \theta} - \frac{\sigma_{r\theta}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

при наступних початкових умовах

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (t = 0) \end{aligned} \quad (2)$$

та граничних умовах на поверхні S_1

$$P_{n\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} l_{\beta n}. \quad (3)$$

Тут w, u, v – осьова, радіальна і колова компоненти вектора переміщення, σ_{ij} ($i, j = z, r, \theta$) – компоненти тензора напружень, ρ – густина матеріалу, $P_{n\alpha}$ – проекції зовнішніх поверхневих сил на осі циліндричної системи координат, $l_{\beta n}$ ($\alpha, \beta = r, z, \theta$) – напрямні косинуси зовнішньої нормалі \mathbf{n} до поверхні S_1 .

Тензор малих деформацій пов'язаний з вектором переміщення співвідношеннями Коші

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \\ \varepsilon_{zr} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_{z\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right).\end{aligned}\quad (4)$$

Зв'язок між компонентами напружень і деформацій для ортотропного в'язкопружного матеріалу, коли напрямки координатних осей збігається з головними напрямками анізотропії, задається визначальними рівняннями виду

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= C_{zz} * \varepsilon_{zz} + C_{zr} * \varepsilon_{rr} + C_{z\theta} * \varepsilon_{\theta\theta}, \\ \sigma_{rr} &= C_{rz} * \varepsilon_{zz} + C_{rr} * \varepsilon_{rr} + C_{r\theta} * \varepsilon_{\theta\theta}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= C_{\theta z} * \varepsilon_{zz} + C_{\theta r} * \varepsilon_{rr} + C_{\theta\theta} * \varepsilon_{\theta\theta}, \\ \sigma_{zr} &= 2G_{zr} * \varepsilon_{zr}, \quad \sigma_{z\theta} = 2G_{z\theta} * \varepsilon_{z\theta}, \\ \sigma_{r\theta} &= 2G_{r\theta} * \varepsilon_{r\theta},\end{aligned}\quad (5)$$

де введено оператор згортки

$$\begin{aligned}C_{ij} * \varepsilon_{ij} &= C_{ij}(0)\varepsilon_{ij} - \int_0^t R_{ij}(t-\tau)\varepsilon_{ij}(\tau)d\tau, \\ G_{ij} * \varepsilon_{ij} &= G_{ij}(0)\varepsilon_{ij} - \int_0^t S_{ij}(t-\tau)\varepsilon_{ij}(\tau)d\tau \\ &(i, j = z, r, \theta),\end{aligned}$$

а $C_{ij}(0), G_{ij}(0)$ – миттєві характеристики матеріалу, $R_{ij}(t), S_{ij}(t)$ – функції, що описують релаксаційні властивості матеріалу.

Знаходження аналітичного розв'язку задачі (1)-(5) пов'язане зі значними математи-

чними труднощами, внаслідок чого для дослідження подібних задач застосовуються чисельні методи, зокрема метод скінченних елементів.

Методика розв'язання задачі. Для розв'язання даної задачі використовується сформульований в [15] принцип мінімуму потенційної енергії в зображеннях (застосовується інтегральне перетворення Лапласа)

$$\delta \bar{\mathcal{E}} = 0, \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{E}} &= \frac{1}{2} \int_V \left[\bar{C}_{zz} \bar{\varepsilon}_{zz}^2 + \bar{C}_{rr} \bar{\varepsilon}_{rr}^2 + \bar{C}_{\theta\theta} \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}^2 + \right. \\ &+ 2(\bar{C}_{zr} \bar{\varepsilon}_{zr} \bar{\varepsilon}_{rr} + \bar{C}_{z\theta} \bar{\varepsilon}_{z\theta} \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} + \bar{C}_{r\theta} \bar{\varepsilon}_{r\theta} \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}) + \\ &+ 4(\bar{G}_{zr} \bar{\varepsilon}_{zr}^2 + \bar{G}_{z\theta} \bar{\varepsilon}_{z\theta}^2 + \bar{G}_{r\theta} \bar{\varepsilon}_{r\theta}^2) + \\ &+ \rho s^2 (\bar{w}^2 + \bar{u}^2 + \bar{v}^2) \left. \right] dV - \\ &- \int_{S_1} (\bar{P}_{nz} \bar{w} + \bar{P}_{nr} \bar{u} + \bar{P}_{n\theta} \bar{v}) dS.\end{aligned}\quad (7)$$

$\bar{w}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{\varepsilon}_{ij}, \bar{C}_{ij}, \bar{G}_{ij}, \bar{P}_{ni}$ – зображення відповідно до компонент вектора переміщення та тензора деформацій, в'язкопружних характеристик матеріалу і компонент вектора зовнішнього навантаження; s – параметр інтегрального перетворення

$$\begin{aligned}&(\bar{w}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{\varepsilon}_{ij}, \bar{C}_{ij}, \bar{G}_{ij}, \bar{P}_{ni}) = \\ &= \int_0^\infty (w, u, v, \varepsilon_{ij}, C_{ij}, G_{ij}, P_{ni}) e^{-sx} dx.\end{aligned}$$

Варіаційна задача механіки $\delta \bar{\mathcal{E}} = 0$ у тривимірній постановці розв'язується методом скінченних елементів з використанням 24 вузлових шестигранних ізопараметричних елементів. За глобальну систему координат, у якій об'єднуються усі скінченні елементи, обирається циліндрична система координат (z, r, θ) . Як локальна система координат, у якій визначаються апроксимуючі функції і виконується інтегрування, використовується допоміжна нормалізована система координат. Для побудови базисних функцій, що апроксимують складові вектора переміщення у межах елемента, використовуються алгебраїчні і тригонометричні поліноми. При цьому припускається, що перетворені за Лапласом амплітуди компонент

вектора переміщень апроксимуються виразами

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \sum_{i=1}^{24} N_i \bar{w}_i, \quad \bar{u} = \sum_{i=1}^{24} N_i \bar{u}_i, \\ \bar{v} &= \sum_{i=1}^{24} N_i \bar{v}_i. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут $\bar{w}_i, \bar{u}_i, \bar{v}_i$ – вузлові значення перетворених за Лапласом компонент вектора переміщень, а N_i – апроксимуючі функції, які являють собою комбінації алгебраїчних L_j ($j = 1, 2, \dots, 8$) і тригонометричних H_k ($k = 1, 2, 3$) поліномів виду

$$\begin{aligned} N_i &= L_i H_1 \quad (i = \overline{1, 8}), \quad N_i = L_{i-8} H_2 \quad (i = \overline{9, 16}), \\ N_i &= L_{i-16} H_3 \quad (i = \overline{17, 24}), \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1), \\ L_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1), \\ L_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta+1), \\ L_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1), \\ L_5 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta), \quad L_6 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi), \\ L_7 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta), \quad L_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi), \\ H_1(\theta) &= \frac{\sin(\theta-\theta_2) - \sin(\theta-\theta_3) + \sin(\theta_2-\theta_3)}{\sin(\theta_1-\theta_2) - \sin(\theta_1-\theta_3) + \sin(\theta_2-\theta_3)}, \\ H_2(\theta) &= \frac{\sin(\theta-\theta_3) - \sin(\theta-\theta_1) + \sin(\theta_3-\theta_1)}{\sin(\theta_2-\theta_3) - \sin(\theta_2-\theta_1) + \sin(\theta_3-\theta_1)}, \\ H_3(\theta) &= \frac{\sin(\theta-\theta_1) - \sin(\theta-\theta_2) + \sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_3-\theta_1) - \sin(\theta_3-\theta_2) + \sin(\theta_1-\theta_2)}. \end{aligned}$$

Апроксимуючі функції вибирались таким чином, щоб алгебраїчні поліноми L_j описували напружено-деформований стан у площині (z, r) , а тригонометричні функції H_k – по коловій координаті θ . Функції форми N_i , які входять до виразів (8), задовольняють умові $\sum_{i=1}^{24} N_i = 1$.

Зв'язок між локальними координатами ξ, η та циліндричними координатами r, z встановлюється за допомогою виразів

$$r = \sum_{i=1}^8 L_i r_i, \quad z = \sum_{i=1}^8 L_i z_i.$$

Представлення компонент тензора деформацій можна знайти за методикою, описаною в [13].

Механічні навантаження, що входять у (7), також апроксимуються функціями форми в межах кожного скінченного елемента

$$\begin{aligned} \bar{P}_{nz} &= \sum_{i=1}^{24} N_i \bar{P}_{nz,i}, \quad \bar{P}_{nr} = \sum_{i=1}^{24} N_i \bar{P}_{nr,i}, \\ \bar{P}_{n\theta} &= \sum_{i=1}^{24} N_i \bar{P}_{n\theta,i}. \end{aligned}$$

Прирівнявши до нуля першу варіацію функціонала (7), можна переконатися, що рівняння Ейлера і природні граничні умови функціонала $\bar{\mathcal{E}}$ збігаються з перетвореними за Лапласом рівняннями (1) і (3).

Мінімізуючи функціонал (7) з урахуванням апроксимуючих функцій (9), для визначення перетворених за Лапласом компонент вектора вузлових переміщень у глобальній системі координат отримаємо систему рівнянь

$$\mathbf{M}\bar{U}S^2 - \bar{C}\bar{U} + \mathbf{K}\bar{U} = \bar{P}, \quad (10)$$

де \mathbf{M} – матриця мас, \mathbf{K} – матриця жорсткості, \bar{C} перетворена за Лапласом матриця втрат ($\bar{C}(\bar{R}_{ij}, \bar{S}_{ij})$), \bar{P} – перетворений за Лапласом вектор зовнішнього навантаження, в компоненти якого входять значення механічного навантаження у поверхневих вузлових точках, \bar{U} – вектор перетворених за Лапласом вузлових переміщень $\bar{w}_i, \bar{u}_i, \bar{v}_i$.

Виконавши зворотне перетворення Лапласа, для визначення компонент вектора переміщень в вузлових точках отримаємо систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2} - \mathbf{C}(R_{ij}(t), S_{ij}(t)) \mathbf{U} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P}. \quad (11)$$

Математично рівняння (11) являє собою систему лінійних інтегро-диференціальних рівнянь другого порядку. Методи розв'язування рівняння (11) діляться на дві групи: методи прямого інтегрування і розкладання за власними формами (метод суперпозиції

гармонік). До прямих методів інтегрування відносяться наступні чисельні методи: метод скінчених різниць, метод Гальоркіна, метод Хаболта, метод Вільсона, метод Ньюмарка та його модифікації [1, 16].

При використанні прямих методів інтегрування розв'язок рівняння (11) знаходиться за допомогою чисельної покрокової процедури, яка дозволяє отримати розв'язок не в будь-який момент часу t , а тільки на окремих відрізках часу Δt , тобто отримати розв'язок у дискретних точках інтервалу. Наведений аналіз розв'язків у цих роботах показує, що використання прямих методів інтегрування ефективно, якщо потрібно знайти розв'язок на порівняно короткому часовому інтервалі. Це пояснюється тим, що прямі методи є неявними умовно стійкими методами другого порядку. У праці [17] пропонується для збільшення точності розв'язку використовувати абсолютно стійкі методи більш високого порядку точності.

Алгоритми розв'язання нестационарних задач теплопровідності, механіки деформованого твердого тіла, механіки рідини та ін. методом суперпозиції гармонік у поєднанні з методом скінчених елементів описано в [2, 16].

Розв'язок рівняння (10) представимо у формі нескінченного ряду

$$\bar{\mathbf{U}} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_n(s) \mathbf{W}_n(z, r, \theta). \quad (12)$$

При цьому вектор власних функцій $\mathbf{W}_n(z, r, \theta)$ визначається з розв'язку відповідної задачі про вільні коливання пружного тіла обертання з миттєвими характеристиками матеріалу

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}) \mathbf{W}_n(z, r, \theta) = 0, \quad (13)$$

де ω_n – власні частоти коливань.

Зауважимо, що вектор власних функцій $\mathbf{W}_n(z, r, \theta)$ складається з компонентів векторів власних функцій кожної із складових вектора зміщень у вузлових точках

$$\begin{aligned} & \mathbf{W}_n(z, r, \theta) = \\ & = \mathbf{W}_n(w_n(z, r, \theta), u_n(z, r, \theta), v_n(z, r, \theta)). \end{aligned}$$

Відповідно до рівняння (13) вектори \mathbf{W}_n ортогональні до матриць \mathbf{K} та \mathbf{M} . При цьому

$$\mathbf{W}_n^T \mathbf{M} \mathbf{W}_m = 0, \quad \mathbf{W}_n^T \mathbf{K} \mathbf{W}_m = 0 \quad (14)$$

при $n \neq m$,

але ці добутки не дорівнюють нулеві у випадку, коли $n = m$.

Кожний ортонормований власний вектор відповідно до умов ортогональності задовольняє співвідношенням

$$\mathbf{W}_n^T \mathbf{M} \mathbf{W}_n = 1, \quad \mathbf{W}_n^T \mathbf{K} \mathbf{W}_n = \omega_n^2. \quad (15)$$

Підставляючи вираз (12) у перетворене за Лапласом рівняння (10) і домножуючи ліву і праву частини рівняння на транспонований вектор власних функцій, отримаємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь у просторі зображень

$$\begin{aligned} & s^2 \mathbf{W}_m^T \mathbf{M} \mathbf{W}_n \bar{f}_n(s) + \mathbf{W}_m^T \mathbf{K} \mathbf{W}_n \bar{f}_n(s) = \\ & = \mathbf{W}_m^T \bar{\mathbf{C}} \mathbf{W}_n \bar{f}_n(s) + \mathbf{W}_m^T \bar{\mathbf{P}} \\ & \quad (n, m = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

яку з урахуванням співвідношень (14)-(15) запишемо у вигляді

$$s^2 \bar{f}_n(s) + \omega_n^2 \bar{f}_n(s) = \bar{\mathbf{D}}_{mn} \bar{f}_m(s) + \bar{\mathbf{Q}}_n(s), \quad (16)$$

де $\bar{\mathbf{D}}_{mn} = \mathbf{W}_m^T \bar{\mathbf{C}} \mathbf{W}_n$, $\bar{\mathbf{Q}}_n = \mathbf{W}_n^T \bar{\mathbf{P}}$.

Для широкого класу в'язкопружних матеріалів одним з ефективних методів розв'язання системи інтегро-диференціальних рівнянь, що відповідає алгебраїчній системі (16), є метод усереднення Крилова–Боголюбова [5, 6].

Відповідно до методики [7-9] представимо розв'язок алгебраїчної системи (16) у вигляді суми квазістатичної і динамічної складових

$$\bar{f}_n(s) = \bar{f}_n^{st}(s) + \bar{f}_n^d(s), \quad (17)$$

де $\bar{f}_n^{st}(s)$ – розв'язок нескінченної системи алгебраїчних рівнянь

$$\omega_n^2 \bar{f}_n^{st}(s) = \bar{\mathbf{D}}_{mn} \bar{f}_m^{st}(s) + \bar{\mathbf{Q}}_n(s). \quad (18)$$

Система (18) отримується при розв'язанні квазістатичної задачі варіаційним методом. Припустимо, що розв'язок квазістатичної задачі відомий. Тоді, розкладаючи його у ряд за власними функціями \mathbf{W}_n , отримаємо

$$U^{st} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{st}(t) W_n(z, r, \theta). \quad (19)$$

Динамічну складову знаходимо з нескінченної системи алгебраїчних рівнянь

$$(s^2 + \omega_n^2) \overline{f_n^d}(s) = \overline{D_{mn}} \overline{f_m^d}(s) - s^2 \overline{f_n^{st}}(s). \quad (20)$$

Безпосередньо розв'язати систему рівнянь (20) доволі складно, тому відповідно до підходу в [8, 9] розглянемо допоміжну систему рівнянь

$$(s^2 + \omega_n^2) \overline{g_n}(s) = \overline{D_{mn}} \overline{g_m}(s) - s. \quad (21)$$

$$g_n(t) = e^{-\alpha_{1n} t} \left[\cos(\omega_n - \alpha_{2n}) t + \frac{\alpha_{1n}}{\omega_n - \alpha_{2n}} \sin(\omega_n - \alpha_{2n}) t \right]. \quad (24)$$

Коефіцієнти α_{1n} і α_{2n} в (24) є функціями інтегральних характеристик матеріалу і визначаються виразами

$$\begin{aligned} \alpha_{1n} &= \frac{1}{2\omega_n} \int_0^{\infty} D_{mn}(t) \sin \omega_n t dt, \\ \alpha_{2n} &= \frac{1}{2\omega_n} \int_0^{\infty} D_{mn}(t) \cos \omega_n t dt. \end{aligned} \quad (25)$$

Використовуючи теорему про згортки, розв'язок системи інтегро-диференціальних рівнянь, що відповідає алгебраїчній системі (20), можна представити у вигляді [9]

$$f_n^d(t) = -f_n^{st}(t) + \int_0^t f_n^{st}(\tau) h_n(t-\tau) d\tau, \quad (26)$$

$$h_n(t) = \frac{\alpha_{1n}^2 + (\omega_n - \alpha_{2n})^2}{\omega_n - \alpha_{2n}} e^{-\alpha_{1n} t} \sin(\omega_n - \alpha_{2n}) t.$$

У разі застосування описаного вище підходу виникає необхідність у розв'язанні квазістатичної задачі в'язкопружності. Одним з найбільш простих і ефективних методів є метод Шепері [6,18]. У даній роботі з метою значного спрощення обчислень розв'язок квазістатичної задачі знаходиться з використанням миттєвих значень характеристик матеріалу (розв'язується пружна задача), а для опису в'язкопружних властивостей матеріалу при знаходженні розв'язку динамічної задачі використовується ядро релаксації, яке визначається дробово-експотенціальною функцією А. Р. Ржаніцина [19]

У просторі оригіналів їй відповідає нескінченна система інтегро-диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2 g_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 g_n(t) = D_{mn} g_m(t) \quad (22)$$

з початковими умовами

$$g_n(0) = -1, \quad \frac{dg_n(0)}{dt} = 0. \quad (23)$$

Для розв'язання нескінченної системи (22) при початкових умовах (23) використаємо метод усереднення Крилова–Боголюбова [5, 6]. У результаті отримаємо

$$R = A e^{-\beta t} t^{\alpha-1}, \quad (27)$$

де A , α , β – деякі додатні числа, $0 < \alpha < 1$.

У цьому випадку вирази (25) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \alpha_{1n} &= \frac{A\Gamma(\alpha)\omega_n}{2(\beta^2 + \omega_n^2)^{\alpha/2}} \sin\left(\alpha \arctg \frac{\omega_n}{\beta}\right), \\ \alpha_{2n} &= \frac{A\Gamma(\alpha)\omega_n}{2(\beta^2 + \omega_n^2)^{\alpha/2}} \cos\left(\alpha \arctg \frac{\omega_n}{\beta}\right), \end{aligned}$$

де $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функція.

У роботі [19] показано, що залежно від значень параметрів A , α , β ядро Ржаніцина дає можливість описати в'язкопружні властивості широкого класу полімерних матеріалів.

Аналіз чисельних результатів. З використанням розробленої методики було розв'язано задачу про динамічну поведінку порожнистого двошарового циліндра, що перебуває під дією внутрішнього тиску $P_r = P_0 H(t)$ ($H(t)$ – одинична функція Гевісайда). Припускалось, що шари циліндру припасовані один до одного таким чином, що впродовж усього процесу деформування між ними виконуються умови ідеального механічного контакту.

У цьому випадку загальний розв'язок нестационарної задачі можна записати у вигляді

$$U(w, u, v) = U^{st} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_0}{\omega_n^2} W_n(w_n, u_n, v_n) f_n(t),$$

де

$$f_n(t) = e^{-\alpha_{1n} t} \times \left[\cos(\omega_n - \alpha_{2n})t + \frac{\alpha_{1n}}{\omega_n - \alpha_{2n}} \sin(\omega_n - \alpha_{2n})t \right].$$

При розв'язанні квазістатичної задачі та узагальненої задачі на власні значення припускали, що зовнішній шар циліндра (оболонку) виготовлено з циліндрично ортотропного матеріалу, а внутрішній шар – з ізотропного матеріалу. Ортотропний матеріал мав наступні характеристики [20]: $E_{zz} = 0,46 \cdot 10^{10}$ Па, $E_{rr} = E_{\theta\theta} = 2,5 \cdot 10^{10}$ Па, $G_{zr} = G_{z\theta} = 0,33 \cdot 10^{10}$ Па, $G_{r\theta} = 1,14 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu_{zr} = \nu_{z\theta} = 0,11$; $\rho_0 = 0,27 \cdot 10^4$ кг/м³. Для внутрішнього ізотропного шару прийнято, що $E_{zz} = 0,5 \cdot 10^7$ Па, $\nu = 0,45$; $\rho_0 = 0,12 \cdot 10^4$ кг/м³. Чисельні розрахунки проводилися для циліндра довжиною 2 м з

внутрішнім радіусом 0,1 м, зовнішнім радіусом 0,5 м та товщиною зовнішнього шару (оболонки) 0,025 м.

Для дослідження впливу в'язкості матеріалу на характер розподілу динамічних напружень в обох шарах використовувалося ядро А.Р. Ржаніцина (27) при таких значеннях сталих: $A = 0,03; 0,1$ та $\alpha = 0,1$; $\beta = 0,003$. Стала у виразі для тиску $P_0 = 0,1 \cdot 10^5$ Па.

При скінченно-елементному моделюванні половину меридіонального перерізу тіла розбивали на 680 шестиграних скінченних елементів з 5100 вузловими точками. При розкладанні розв'язку за гармоніками використовувалося 11 членів ряду.

На рис. 1, 2 показано розподіл радіальних та колових напружень уздовж радіуса циліндра при $z = 0$ та $t = 1$ с. Суцільні криві відповідають квазістатичному розв'язку задачі, а штрихові та штрих-пунктирні криві – розв'язку динамічної задачі відповідно при $A = 0,1$ та $A = 0,03$.

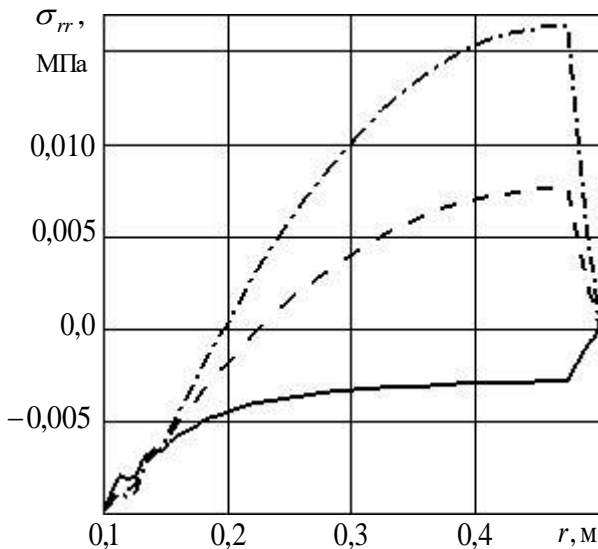


Рис. 1. Розподіл радіальних напружень σ_{rr} уздовж радіуса

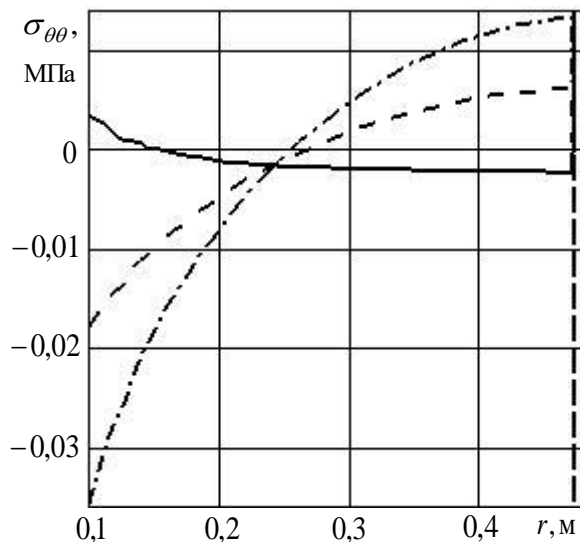


Рис. 2. Розподіл колових напружень $\sigma_{\theta\theta}$ уздовж радіуса

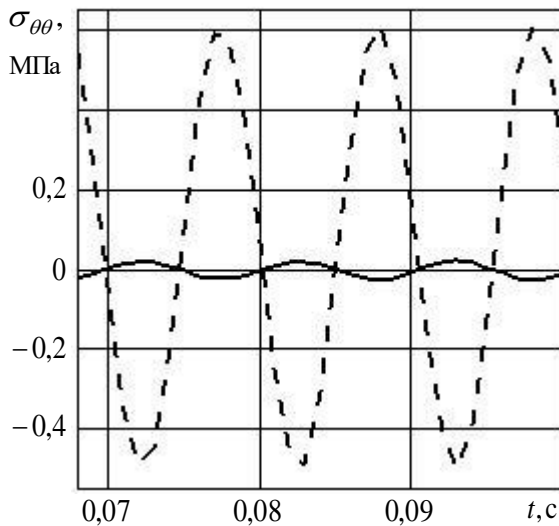


Рис. 3. Розподіл колових напружень $\sigma_{\theta\theta}$ залежно від часу в околі контакту шарів

Аналізуючи отримані чисельні результати, можна зробити висновок про достатньо хороше виконання граничних умов для радіальних напружень σ_{rr} на поверхнях циліндра та рівність радіальних напружень в області контакту шарів циліндра.

Розподіл колових напружень $\sigma_{\theta\theta}$ залежно від часу в околі контакту шарів при $z = 0$ представлено на рис. 3. Суцільна крива відповідає розв'язку для внутрішнього шару ($r = 0,472\text{ м}$), а пунктирна показує зміну напружень у зовнішньому тонкому шарі ($r = 0,477\text{ м}$). Наведені на цьому рисунку графіки ілюструють розподіл напружень на границі двох шарів у випадку, коли механі-

чні характеристики матеріалів відрізняються на декілька порядків. Отже, наведені результати вказують на суттєвий вплив неоднорідності матеріалу на розподіл напружень в тілі.

Висновки. У роботі на основі варіаційного принципу мінімуму перетвореної за Лапласом потенційної енергії та методу скінченних елементів запропоновано підхід до розв'язку тривимірних задач в'язкопружності для достатньо загальних моделей в'язкопружної поведінки матеріалу.

Виокремлення квазістатичної та динамічної складових задачі та використання методу суперпозиції гармонік для розв'язку динамічної задачі дозволило отримати систему інтегро-диференціальних рівнянь відносно функцій часу.

Комп'ютерне моделювання показало, що використання методу Крилова-Боголюбова для розв'язання інтегро-диференціальних рівнянь відносно часу дає можливість отримати достатньо точні чисельні результати про розподіл напружень у просторі та часі. На основі запропонованого підходу проведено чисельний аналіз динамічної поведінки двошарового в'язкопружного порожнистого циліндра у випадку, коли механічні параметри матеріалу шарів відрізняються на декілька порядків.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

Література

1. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. Москва: Стройиздат, 1982. 447 с.
2. Коннор Дж., Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости. Ленинград: Судостроение, 1979. 263 с.
3. Gurtin M. E. Variational principles for linear elastodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1964. Vol. 16. Iss. 1. P. 34–50.
4. Benthien G., Gurtin M. E. A principle of minimum transformed energy in linear elastodynamics. *J. Appl. Mech.* 1970. Vol. 37. No.4. P. 1147–1149.
5. Митропольский Ю. А., Филатов А. Н. Усреднение интегро-дифференциальных и интегральных уравнений. *Український математичний журнал*. 1972. Т. 24. Вып. 1. С.30–48.
6. Москвитин В. В. Сопротивление вязко-упругих материалов. Москва: Наука, 1972. 328 с.

7. Коваленко А. Д., Карнаухов В. Г., Козлов В. И. Динамические задачи термоупругости и термовязкоупругости. *Тепловые напряжения в элементах конструкций*. Киев: Наук. думка, 1973. Вып.13. С. 3–11.
8. Kozlov V. I., Kucher N. K. Dynamic behavior of multilayer cylindrical structures with transient loads. *Strength of Materials*. 1980. Vol. 12. Iss. 5. P. 639–648.
9. Карнаухов В. Г. Связанные задачи термовязкоупругости. Киев: Наук. думка, 1982. – 258с.
10. Kozlov V. I., Motovilovets I. A. Numerical study of the dynamic behavior of a body of revolution. *Soviet Applied Mechanics*. 1985. Vol. 21. Iss. 4. P. 380–386.
11. Rasskazov A. O., Kozlov A. V. Nonaxisymmetric vibrations of a shell of revolution made of a viscoelastic material under nonstationary loading. *Strength of Materials*. 1999. Vol. 31. Iss. 3. P. 260–266.
12. Карнаухов В. Г., Козлов А. В., Пятецкая Е. В. Демпфирование колебаний вязкоупругих пластин с помощью распределенных пьезоэлектрических включений. *Акустичний вісник*. 2002. Т.5. № 4. С. 15–32.
13. Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Січко В. М., Завгородній А. В. Тривимірні задачі про коливання та дисипативний розігрів тіл обертання з пасивних і п'єзоактивних в'язкопружних матеріалів. Миколаїв: Ілліон, 2017. 126 с.
14. Дубенець В. Г., Савченко О. В., Деркач О. Л. Нестационарні коливання конструкцій з електров'язкопружними дисипативними накладками. *Вібрації в техніці та технологіях*. 2015. № 1. С. 15–21.
15. Карнаухов В. Г., Сенченков И. К. Принцип минимума преобразованной энергии в динамических задачах линейной теории вязкоупругости. *Док. АН УССР. Сер.А*. 1976. №8. С.712–715.
16. Bathe K. J. Finite element procedures. 2nd ed. Watertown, MA: K.J. Bathe, 2016. 1068 p.
17. Исаков Н. Ю., Исполов Ю. Г., Шабров Н. Н. Метод численного интегрирования уравнений динамики больших конечноэлементных моделей. *Проблемы прочности*. 1987. № 12. С. 91–95.
18. Schapery R. A. Thermomechanical behavior of viscoelastic media with variable properties subjected to cyclic loading. *J. Appl. Mech.* 1965. Vol. 32, No. 3. P. 611–619.
19. Koltunov A. A. Choice of kernels in solving problems involving creep and relaxation. *Polymer Mechanics*. 1966. Vol. 2. Iss. 4. P. 303–311.
20. Savchenko V. G., Shevchenko Yu. N. Nonaxisymmetric thermal stress state of laminated rotational bodies of orthotropic materials under nonisothermic loading. *Mechanics of Composite Materials*. 2004. Vol. 40. Iss. 6. P. 473–488.

References

1. Batte, K. & Wilson, E. (1982). Numerical methods of analysis and the finite-element method. Moscow: Strojizdat.
2. Connor, J. J. & Brebbia, C. A. (1979). Finite element techniques in fluid mechanics. Leningrad: Sudostroenie.
3. Gurtin, M. E. (1964). Variational principles for linear elastodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. Vol. 16, Iss. 1, pp. 34–50.
4. Benthien, G. & Gurtin, M. E. (1970). A Principle of Minimum Transformed Energy in Linear Elastodynamics. *J. Appl. Mech.*, 37(4), pp. 1147–1149.
5. Mitropolskiy, Yu. A. & Filatov, A. N. (1972). Averaging of integro-differential and integral equations. *Ukr. Mat. Zhurnal*, Vol. 24, Iss. 1, pp. 30–48.
6. Moskvitin, V. V. (1972). Resistance of viscoelastic materials. Moscow: Nauka.
7. Kovalenko, A. D., Karnaukhov, V. G. & Kozlov, V. I. (1973). Dynamic problems of thermoelasticity and thermoviscoelasticity. *Тепловыие napryazheniya v elementah konstruksiy*, Issue 13, pp. 3–11.
8. Kozlov, V. I. & Kucher, N. K. (1980). Dynamic behavior of multilayer cylindrical structures with transient loads. *Strength of Materials*, Vol. 12, Iss. 5, pp. 639–648.

9. Karnaukhov, V. G. (1982). Coupled problems of thermoviscoelasticity. Kiev: Naukova Dumka.
10. Kozlov, V. I. & Motovilovets, I. A. (1985). Numerical study of the dynamic behavior of a body of revolution. Soviet Applied Mechanics, Vol. 21, Iss. 4, pp. 380–386.
11. Rasskazov, A. O. & Kozlov, A. V. (1999). Nonaxisymmetric vibrations of a shell of revolution made of a viscoelastic material under nonstationary loading. Strength of Materials, Vol. 31, Iss. 3, pp. 260–266.
12. Karnaukhov, V. G., Kozlov, A. V. & Pyatetskaya, E. V. (2002). Damping vibrations of viscoelastic plates using distributed piezoelectric inclusions. Akustychnyi visnyk, Vol. 5, No. 4, pp. 15–32.
13. Karnaukhov, V. G., Kozlov, V. I., Sichko, V. M. & Zavgorodniy, A. V. (2017). Three-dimensional problems of oscillation and dissipative heating of revolution bodies from passive and piezoactive viscoelastic materials. Mykolaiv: Illion.
14. Dubenets, V. G., Savchenko, O. V. & Derkach, O. L. (2015). Non-stationary oscillations of constructions with electro-visco-elastic dissipative overlays. Vibratsiyi v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh, No. 1, pp. 15–21.
15. Karnaukhov, V. G. & Senchenkov, I. K. (1976). The minimum principle of transformed energy in dynamic problems of the linear theory of viscoelasticity. Dok. AN USSR. Ser. A, No. 8, pp. 712–715.
16. Bathe, K. J. (2016). Finite element procedures, 2nd ed. Watertown, MA: K.J. Bathe.
17. Isakov, N. Yu., Ispalov, Yu. G. & Shabrov, N. N. (1987). A method of numerical integration of dynamic equations of large finite-element models. Probl. Prochn., No. 12, pp. 91–95.
18. Schapery, R. A. (1965). Thermomechanical behavior of viscoelastic media with variable properties subjected to cyclic loading. J. Appl. Mech, Vol. 32, No. 3, pp. 611–619.
19. Koltunov, A. A. (1966). Choice of kernels in solving problems involving creep and relaxation. Polymer Mechanics, Vol. 2, Iss. 4, pp. 303–311.
20. Savchenko, V. G. & Shevchenko, Yu. N. (2004). Nonaxisymmetric thermal stress state of laminated rotational bodies of orthotropic materials under nonisothermic loading. Mechanics of Composite Materials, Vol. 40, Iss. 6, pp. 473–488.

УДК 539.371

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-09

ЗАСТОСУВАННЯ АПАРАТУ МАТРИЦЬ ТИПУ ГРІНА ТА МАТРИЧНОЇ АЛГЕБРИ В ЗАДАЧІ ПРО СТАТИЧНЕ ДЕФОРМУВАННЯ КРУГЛИХ ПЛАСТИН ДИСКРЕТНО-ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

С. А. Левчук, А. А. Хмельницький, С. П. Швидка

Запорізький національний університет

krmm.mf@znu.edu.ua

Ключові слова:

кругла пластина дискретно-змінної товщини, крайова та складена задача, складена конструкція, матриця типу Гріна, матрична алгебра.

Мета роботи. Побудувати компактний обчислювальний алгоритм розв'язку задачі про статичне деформування круглих пластин дискретно-змінної товщини за допомогою апарату функцій Гріна та матричної алгебри.

Методи дослідження. Методи гранично-складених задач та матриць типу Гріна, матрична алгебра.

Отримані результати. Побудовано компактний обчислювальний алгоритм розв'язку задачі про статичне деформування круглих пластин дискретно-змінної товщини за допомогою апарату функцій Гріна та матричної алгебри.

Наукова новизна. У даній роботі застосування апарату функцій Гріна та матричної алгебри дозволило побудувати компактний обчислювальний алгоритм розв'язку розглянутої задачі при практично довільній кількості секцій у складеному тілі, яке застосовувалося при моделюванні.

Практичне значення. Досліджувана у роботі задача моделює явища, які відбуваються, зокрема, при деформуванні елементів вулканізаційного обладнання. Одержані результати дозволяють виявити особливості роботи елементів конструкції складної структури і, зрештою, підвищити її ефективність шляхом оптимізації параметрів складових частин.

THE USED MATRIX OF GREEN TYPE AND ALGEBRA OF MATRIX IN THE PROBLEM OF STATIC DEFORMATION OF THE CIRCULAR PLATES WITH DISCRETE-VARIABLE THICKNESS

S. A. Levchuk, A. A. Hmelnitskiy, S. P. Shvydka

Zaporizhzhia National University

krmm.mf@znu.edu.ua

Key words:

circular plate with discrete-variable thickness, boundary-compound problem, compound construction, matrix of Green type, algebra of matrix.

Purpose of work. To build the compact computational algorithm of decision of task about static deformation of round plates of discrete-variable thickness by the vehicle of functions of Grin and matrix algebra. This article is devoted to the simulation of static deformation of discrete-variable thickness circles. This approach is not new. Previously, he was developed in a number of works (see literature). However, in this paper, the use of the Green's functions and the matrix algebra enabled us to construct a compact computational algorithm for solving a given problem in a practically arbitrary number of sections in a folded body, which was used in modelling. The aforementioned approach was implemented in full in the previous work of the author, but for a ring plate of variable thickness. In this paper, the investigated method of calculation was developed in terms of increasing practical results.

Research methods. Methods of border-component tasks and matrices of type of Grin, matrix algebra. It should be noted that in the numerical find of an inverse matrix whose elements are necessary for the construction of appropriate matrices of the Green type, it will be necessary to solve

systems, each of which consists of a certain number of algebraic equations, which depends on the number of sections in the composite object. When solving these systems, using one of the exact methods (for example, the Gauss method with the choice of the main element), often encounter problems of computational nature, because with a sufficiently large dimension of systems of equations, the error of computation of unknowns becomes unsatisfactory. The use of the same iterative methods for the solution of systems of algebraic equations in the cases considered is extremely difficult, since it is necessary to prepare the matrices of coefficients for unknowns at a large size of matrix data. Therefore, it should be noted that the resulting matrices have a so-called ribbon structure, that is, they contain a large number of zero elements (quasi-diagonal matrices). It is well known that when solving a system of equations with a quasidiagonal matrix, the number of arithmetic operations and the amount of computer memory involved can be significantly reduced, which leads to an increase in the accuracy of the calculations.

Got results. The compact computational algorithm of decision of task is built about static deformation of round plates of discrete-variable thickness by the vehicle of functions of Grin and matrix algebra. The constructed computational algorithm allowed to deal with calculations of non-matrix coefficients for unknown large sizes, but with matrices in size four to four. This avoids many computational complexities.

Scientific novelty. In this work application of vehicle of functions of Grin and matrix algebra allowed to build the compact computational algorithm of decision of the considered task at the practically arbitrary amount of sections in a component body which was used for a design. It should also be noted that when solving this problem there are features in the form of improper integrals of a function that is discontinuous at the left end of the integration segment. Applying the theory of boundaries is easy to show that these integrals will be convergent (in any case, if the function is a constant, or has a power character).

Practical value. The task probed in process designs the phenomena which take place, in particular, at deformation of elements of vulcanization equipment. The got results allow to expose the features of work of elements of construction of difficult structure and promote its efficiency by optimization of parameters of component parts.

Вступ. Дана стаття присвячена моделюванню статичного деформування круглих пластин дискретно-змінної товщини. Застосований метод розрахунку попередньо був розвинутий у роботах [1–7]. Проте в даній роботі застосування апарату функцій Гріна та матричної алгебри дозволило побудувати компактний обчислювальний алгоритм розв’язку розглянутої задачі при практично довільній кількості секцій у складеному тілі,

яке застосовувалося при моделюванні. Згаданий підхід був реалізований у повному обсязі у роботі [4], але для кільцевої пластини змінної товщини, і у [7]. У даній роботі був розвинений досліджуваний метод розрахунку з точки зору збільшення практичних результатів.

Матеріали та методика досліджень. Розглянемо круглу пластину дискретно-змінної товщини (рис. 1).

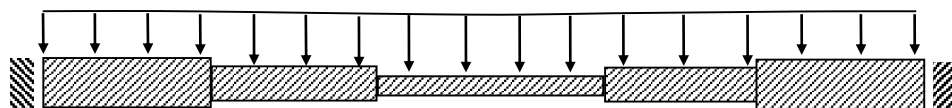


Рис. 1. Осьовий переріз круглої пластини дискретно-змінної товщини

Розрахункова схема для такої моделі може бути визначена таким чином. Вісесиметричний нормальний прогин $W = W(r)$ повинен задовольняти рівнянню [8]:

$$\Delta\Delta W = F, \tag{1}$$

де $F = q/D$, $q = q(r)$ – інтенсивність зовнішнього нормального навантаження, D – циліндрична жорсткість матеріалу, Δ – вісесиметричний оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}. \quad (2)$$

З огляду на осьову симетрію розв'язок досить визначити тільки вздовж радіуса пластини, яку можна розглядати як складений об'єкт, який складається з круглої пластини радіуса R_1 і деякої кількості кільцевих пластин, для яких $R_i \leq r \leq R_{i+1}$ ($i=1,2,\dots,n-1$) відповідно.

Фундаментальною системою розв'язків відповідного однорідного рівняння можуть бути системи функцій [8]:

1) для круглої пластини ($0 \leq r \leq R_1$):

$$W^{(1)} = 1, \quad W^{(2)} = r^2; \quad (3)$$

2) для кілець ($R_i \leq r \leq R_{i+1}$) ($i=1,2,\dots,n-1$):

$$\begin{aligned} W^{(1)} &= 1, \quad W^{(2)} = \ln(r), \\ W^{(3)} &= r^2, \quad W^{(4)} = r^2 \ln(r). \end{aligned} \quad (4)$$

Таким чином, загальні розв'язки рівняння (1) можуть бути записані у вигляді:

$$\begin{aligned} W_1(r) &= C_1(r) + C_2(r)r^2, \\ W_k &= C_j(r) + C_{j+1}(r) \ln(r) + \\ &+ C_{j+2}(r)r^2 + C_{j+3}(r)r^2 \ln(r), \end{aligned} \quad (5)$$

де $W_1(r)$ – нормальний прогин круглої пластини радіуса R_1 , $W_k(r)$ – нормальний прогин k -ої кільцевої секції пластини, ($k=2,3,\dots,n$), а індекс j збільшується на чотири одиниці при збільшенні k на одну одиницю, причому $k=2$ відповідає $j=3$.

Якщо розв'язок далі здійснювати методом варіації довільних сталих, то визначивши C_j і підставивши їх вирази у (5) неважко отримати залежності (з точністю до сталих інтегрування):

$$\begin{aligned} W_1(r) &= \bar{C}_1 + \bar{C}_2 r^2 + \\ &+ \int_0^r F_1(\xi) \frac{\xi}{4} \left\{ (\xi^2 + r^2) \ln \frac{r}{\xi} + \xi^2 - r^2 \right\} d\xi; \quad (6) \\ W_k(r) &= \bar{C}_j + \bar{C}_{j+1} \ln(r) + \\ &+ \bar{C}_{j+2} r^2 + \bar{C}_{j+3} r^2 \ln(r) + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^r F_k(\xi) \frac{\xi}{4} \left\{ (\xi^2 + r^2) \ln \frac{r}{\xi} + \xi^2 - r^2 \right\} d\xi.$$

Для визначення сталих \bar{C}_j ($j=1,2,\dots,4n-2$) у формулах (6) варто скористатися крайовими умовами, наприклад умовами жорсткого затиснення краю складеної пластини:

$$W_n|_{r=R_n} = 0; \quad \frac{dW_n}{dr} \Big|_{r=R_n} = 0 \quad (7)$$

та умовами з'єднання елементів складеної конструкції [3]:

$$\begin{aligned} W_i|_{r=R_i} &= W_{i+1}|_{r=R_i}; \quad \frac{dW_i}{dr} \Big|_{r=R_i} = \frac{dW_{i+1}}{dr} \Big|_{r=R_i}; \\ M_i|_{r=R_i} &= M_{i+1}|_{r=R_i}; \quad Q_i|_{r=R_i} = Q_{i+1}|_{r=R_i}, \end{aligned} \quad (8)$$

де $i=1,2,\dots,n-1$, а через M_i і Q_i позначені згинальний момент та поперечна сила відповідно (нижніми індексами тут і далі позначені номери секцій у складеній конструкції), для яких мають місце вирази [8]:

$$\begin{aligned} M_i(r) &= -\frac{E_i h_i^3}{12(1-\sigma_i^2)} \left\{ \frac{d^2 W_i}{dr^2} + \frac{\sigma_i}{r} \frac{dW_i}{dr} \right\}; \\ Q_i(r) &= -\frac{E_i h_i^3}{12(1-\sigma_i^2)} \frac{d}{dr} \Delta W_i, \end{aligned} \quad (9)$$

де h_i – товщини секцій, σ_i – коефіцієнт Пуассона, E_i – модуль Юнга.

Підставляючи (6), (9) в (7), (8), отримаємо систему $4n-2$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих \bar{C}_j з матрицею коефіцієнтів при невідомих $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{4n-2}$.

Теоретичні результати та їх аналіз. Розв'язавши дану систему і підставляючи знайдені вирази для \bar{C}_j ($j=1,2,\dots,4n-2$) у (6), матимемо [2]:

$$W_k(r) = \sum_{l=1}^n \int_0^{R_l} G_l(r, \xi) \bar{F}_l(\xi) d\xi, \quad (10)$$

де $\bar{F}_l(\xi) = (F_l(\xi) \quad F_{l+1}(\xi))^T$, $\bar{F}_n(\xi) = F_n(\xi)$, $G_l(r, \xi) = (G_{l1}(r, \xi) \quad G_{l2}(r, \xi))$, $l=1,2,\dots,n-1$; $k=1,2,\dots,n$; $G_l(r, \xi)$ – побудовані матриці типу Гріна для даної задачі.

Якщо через $\bar{A} = \{\bar{a}_{ij}\}_{i,j=1}^{4n-2}$ позначити матрицю, обернену до матриці $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{4n-2}$, що

згадувалася вище, а також ввести наступні позначення:

$$\begin{aligned}
 t_{l1}^j(\xi) &= -\bar{a}_{ji} \frac{\xi}{4} \left\{ (\xi^2 + R_l^2) \ln \frac{R_l}{\xi} + \xi^2 - R_l^2 \right\} - \bar{a}_{j+1} \frac{\xi}{4} \left\{ 2R_l \ln \frac{R_l}{\xi} + \frac{\xi^2}{R_l} - R_l \right\} + \\
 &\quad + \bar{a}_{j+2} D_l \frac{\xi}{4} \left\{ 2(1 + \sigma_l) \ln \frac{R_l}{\xi} + (\sigma_l - 1) \frac{\xi^2}{R_l^2} + 1 - \sigma_l \right\} + \bar{a}_{j+3} D_l \frac{\xi}{R_l}; \\
 t_{l2}^j(\xi) &= \bar{a}_{ji} \frac{\xi}{4} \left\{ (\xi^2 + R_l^2) \ln \frac{R_l}{\xi} + \xi^2 - R_l^2 \right\} + \bar{a}_{j+1} \frac{\xi}{4} \left\{ 2R_l \ln \frac{R_l}{\xi} + \frac{\xi^2}{R_l} - R_l \right\} - \\
 &\quad - \bar{a}_{j+2} D_{l+1} \frac{\xi}{4} \left\{ 2(1 + \sigma_{l+1}) \ln \frac{R_l}{\xi} + (\sigma_{l+1} - 1) \frac{\xi^2}{R_l^2} + 1 - \sigma_{l+1} \right\} - \bar{a}_{j+3} D_{l+1} \frac{\xi}{R_l}; \\
 t_n^j(\xi) &= -\bar{a}_{j4n-3} \frac{\xi}{4} \left\{ (\xi^2 + R_n^2) \ln \frac{R_n}{\xi} + \xi^2 - R_n^2 \right\} - \bar{a}_{j4n-2} \frac{\xi}{4} \left\{ 2R_n \ln \frac{R_n}{\xi} + \frac{\xi^2}{R_n} - R_n \right\},
 \end{aligned} \tag{11}$$

де $j=1,2,\dots,4n-2$; $l=1,2,\dots,n-1$, а індекс i збільшується на чотири одиниці при збільшенні l на одну одиницю, причому $l=1$

відповідає $j=1$, то компоненти побудованих матриць типу Гріна $G_l(r, \xi)$ набудуть вигляду:

при $k=1$:

$$\begin{aligned}
 G_{l1}(r, \xi) &= \begin{cases} t_{l1}^1(\xi) + t_{l1}^2(\xi) r^2, & \text{при } l \neq 1; \\ t_{l1}^1(\xi) + t_{l1}^2(\xi) r^2 + I_1(r, \xi), & \text{при } l=1, \quad I_1(r, \xi) = 0 \quad \text{при } \xi > r; \end{cases} \\
 G_{l1}(r, \xi) &= t_{l2}^1(\xi) + t_{l2}^2(\xi) r^2,
 \end{aligned}$$

при $k \neq 1$:

$$\begin{aligned}
 G_{l1}(r, \xi) &= \begin{cases} t_{l1}^j(\xi) + t_{l1}^{j+1}(\xi) \ln(r) + t_{l1}^{j+2}(\xi) r^2 + t_{l1}^{j+3}(\xi) r^2 \ln(r), & \text{при } l \neq k; \\ t_{l1}^j(\xi) + t_{l1}^{j+1}(\xi) \ln(r) + t_{l1}^{j+2}(\xi) r^2 + t_{l1}^{j+3}(\xi) r^2 \ln(r) + I_l(r, \xi), & \text{при } l = k, \\ I_l(r, \xi) = 0 & \text{при } \xi > r; \end{cases} \\
 G_{l2}(r, \xi) &= t_{l2}^j(\xi) + t_{l2}^{j+1}(\xi) \ln(r) + t_{l2}^{j+2}(\xi) r^2 + t_{l2}^{j+3}(\xi) r^2 \ln(r); \\
 G_n(r, \xi) &= \begin{cases} t_n^{4n-5}(\xi) + t_n^{4n-4}(\xi) \ln(r) + t_n^{4n-3}(\xi) r^2 + t_n^{4n-2}(\xi) r^2 \ln(r), & \text{при } l \neq k; \\ t_n^{4n-5}(\xi) + t_n^{4n-4}(\xi) \ln(r) + t_n^{4n-3}(\xi) r^2 + t_n^{4n-2}(\xi) r^2 \ln(r) + I_n(r, \xi), & \text{при } l = k, \\ I_n(r, \xi) = 0 & \text{при } \xi > r, \end{cases}
 \end{aligned} \tag{12}$$

де $l=1,2,\dots,n-1$; $k=2,3,\dots,n$, а індекс j збільшується на чотири одиниці при збільшенні k на одну одиницю, причому $k=2$ відповідає $j=3$,

$$I_k(r, \xi) = \frac{\xi}{4} \left\{ (\xi^2 + r^2) \ln \frac{r}{\xi} + \xi^2 - r^2 \right\}.$$

Необхідно зазначити також, що при розв'язуванні даної задачі виникають особливості у вигляді невластних інтегралів від функції, що розривна на лівому кінці відрізка інтегрування:

$$\int_0^r F(\xi) \xi^3 \ln \frac{r}{\xi} d\xi; \quad \int_0^r F(\xi) \xi \ln \frac{r}{\xi} d\xi.$$

Застосовуючи теорію границь, неважко показати, що дані інтеграли будуть збіжні (у всякому разі, якщо функція $F(\xi)$ – константа, чи має степеневий характер).

Таким чином, функція (10) з компонентами (11), (12) є розв'язком розглянутої задачі (1), (7), (8). Отримані результати узгоджуються з відомими [9], одержаними за

допомогою теорії функції комплексної змінної.

Варто зазначити, що при чисельному знаходженні оберненої матриці A^{-1} , елементи якої необхідні при побудові відповідних матриць типу Гріна, необхідно буде розв'язати $4n$ систем, кожна з яких складається з $4n$ алгебраїчних рівнянь з $4n$ невідомими, де n – кількість секцій у складеному об'єкті.

При розв'язуванні даних систем за допомогою одного з точних методів (наприклад, методу Гаусса з вибором головного елемента) часто зтикаємося з проблемами обчислювального характеру, оскільки при достатньо великому n похибка обчислень невідомих стає незадовільною. Застосування ж ітераційних методів розв'язку систем алгебраїчних рівнянь у випадках, які розглядаються, вкрай утруднено, оскільки потрібна попередня підготовка матриць коефіцієнтів при невідомих при великому розмірі даних матриць.

Тому варто звернути увагу на те, що одержані матриці мають так звану стрічкову структуру, тобто містять велику кількість нульових елементів (квазідіагональні матриці). Загальновідомо, що при розв'язуванні системи рівнянь із квазідіагональною матрицею число арифметичних операцій і об'єм задіяної пам'яті ЕОМ можуть бути суттєво зменшені, що приводить до підвищення точності обчислень.

Розрахункова схема для знаходження оберненої матриці A^{-1} , із застосуванням вказаного вище підходу, може виглядати таким чином.

Виходячи з відомої матричної рівності

$$A^{-1}A = E,$$

де $A^{-1} = \{\bar{a}_{ij}\}_{i,j=1}^{4n}$ – матриця, обернена до заданої матриці $A = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^{4n}$, E – одинична матриця, бачимо, що для знаходження невідомих елементів оберненої матриці A^{-1} необхідно розв'язати $4n$ систем лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду:

$$\begin{aligned} & (\bar{a}_{i1} \quad \bar{a}_{i2} \quad \dots \quad \bar{a}_{i4n})A = \\ & = (0 \quad 0 \quad 1_i \quad 0 \quad \dots \quad 0), \end{aligned}$$

де i – номер рядка оберненої матриці ($i = 1, 2, \dots, 4n$), 1_i – означає, що одиниця є i -тою компонентою вектора вільних членів.

У випадку трьох секцій у складеному об'єкті ($n = 3$) у матричному вигляді згадана система подається таким чином (для кожного i):

$$\begin{aligned} A^{11}C^1 + A^{12}C^2 &= F^1, \\ A^{22}C^2 + A^{23}C^3 &= F^2, \\ A^{33}C^3 &= F^3. \end{aligned} \quad (13)$$

Далі із системою (13) для визначення векторів невідомих C^i ($i = 1, 2, 3$) можна зробити наступне.

Із першого і другого рівнянь системи (13) знайдемо, використовуючи правила матричної алгебри, C^2 і C^3 відповідно:

$$\begin{aligned} C^2 &= (A^{12})^{-1} (F^1 - A^{11}C^1), \\ C^3 &= (A^{23})^{-1} (F^2 - A^{22}C^2), \\ A^{33}C^3 &= F^3. \end{aligned} \quad (14)$$

Підставляючи далі вираз для C^2 із (14) у вираз для C^3 із цієї ж системи і одержані представлення для C^3 – в останнє рівняння системи (14), матимемо:

$$\begin{aligned} C^2 &= (A^{12})^{-1} (F^1 - A^{11}C^1), \\ C^3 &= (A^{23})^{-1} \left\{ F^2 - A^{22} (A^{12})^{-1} (F^1 - A^{11}C^1) \right\}, \\ A^{33} (A^{23})^{-1} \left\{ F^2 - A^{22} (A^{12})^{-1} (F^1 - A^{11}C^1) \right\} &= F^3. \end{aligned} \quad (15)$$

Перетворивши останнє з рівнянь (15), одержимо:

$$\begin{aligned} A^{33} (A^{23})^{-1} A^{22} (A^{12})^{-1} A^{11}C^1 &= \\ &= F^3 - A^{33} (A^{23})^{-1} F^2 + \\ &+ A^{33} (A^{23})^{-1} A^{22} (A^{12})^{-1} F^1. \end{aligned} \quad (16)$$

Останнє рівняння є, у розгорнутому вигляді, системою двох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно такої ж кількості невідомих.

Підставляючи знайдене з (16) C^1 у (15), визначимо C^3 і C^2 і у такий спосіб закінчимо розв'язок задачі.

У загальному вигляді, якщо розглядати складену кільцеву пластину, яка складається з n секцій, матимемо наступну розрахункову схему.

Система для визначення елементів оберненої матриці також запишеться у вигляді, аналогічному (13):

$$A^{11}C^1 + A^{12}C^2 = F^1,$$

$$\begin{aligned} & (-1)^{n+1} A^{nm} (A^{n-1n})^{-1} A^{n-1n-1} (A^{n-2n-1})^{-1} \dots A^{22} (A^{12})^{-1} A^{11} C^1 = \\ & = F^n - A^{nm} (A^{n-1n})^{-1} F^{n-1} + \\ & + A^{nm} (A^{n-1n})^{-1} A^{n-1n-1} (A^{n-2n-1})^{-1} F^{n-2} + \dots + \\ & + (-1)^{n+1} A^{nm} (A^{n-1n})^{-1} A^{n-1n-1} (A^{n-2n-1})^{-1} \dots A^{33} (A^{23})^{-1} A^{22} (A^{12})^{-1} F^1. \end{aligned} \tag{18}$$

Вектори C^2, C^3, \dots, C^n визначаються за рекурентними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} C^2 &= (A^{12})^{-1} (F^1 - A^{11}C^1), \\ C^3 &= (A^{23})^{-1} (F^2 - A^{22}C^2), \\ & \dots \dots \dots \\ C^{n-1} &= (A^{n-2n-1})^{-1} (F^{n-2} - A^{n-2n-2}C^{n-2}), \\ C^n &= (A^{n-1n})^{-1} (F^{n-1} - A^{n-1n-1}C^{n-1}). \end{aligned} \tag{19}$$

Як бачимо, при розрахунках доводиться мати справу не з матрицями коефіцієнтів при невідомих розміром $4n \times 4n$, а з матрицями розміром 4×4 . Це дозволяє уникнути багатьох обчислювальних складностей.

$$\begin{aligned} A^{22}C^2 + A^{23}C^3 &= F^2, \\ & \dots \dots \dots \\ A^{n-1n-1}C^{n-1} + A^{n-1n}C^n &= F^{n-1}, \\ A^{nm}C^n &= F^n. \end{aligned} \tag{17}$$

Розв'язувальна система лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих компонентів векторів C^1 запишеться у вигляді:

Розрахункові результати. За викладеною вище схемою було отримано деякі розрахункові результати (рис. 2 – 4). При розрахунках було прийнято: $n = 3$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,25$; $h_1 = 0,01$ м; $h_2 = 0,02$ м; $h_3 = 0,03$ м; $R_1 = 0,1$ м; $R_2 = 0,2$ м; $R_3 = 0,3$ м. Розрахунок здійснювався для наступних варіантів навантаження (криві 1, 2, 4, 5 відповідно): $\bar{q}^1 = (1,1,1)$ МПа, $\bar{q}^2 = (1,1,0)$ МПа, $\bar{q}^3 = (1,0,1)$ МПа, $\bar{q}^4 = (0,1,1)$ МПа, $\bar{q}^5 = (0,1,0)$ МПа (у дужках вказані інтенсивності навантажень на першій, другій і третій секціях відповідно).

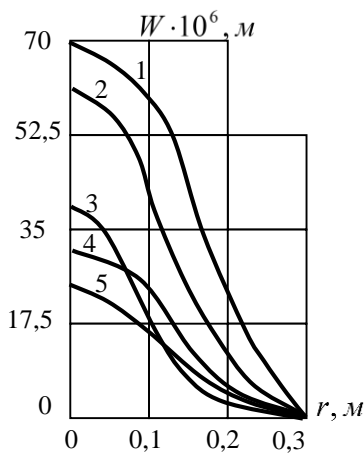


Рис. 2. Нормальні прогини

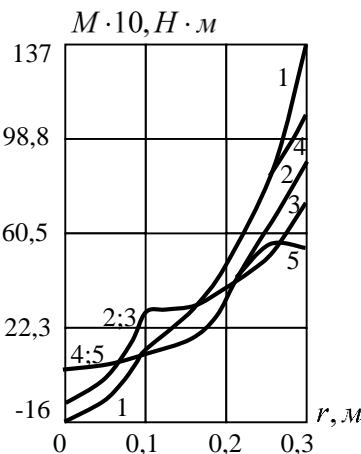


Рис. 3. Згинальні моменти

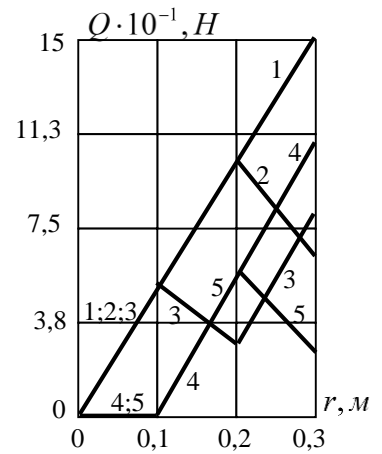


Рис. 4. Поперечні сили

Література

1. Гавеля С. П., Левчук С. А., Ищенко О. А. Расчет упругого деформирования круглой пластины дискретно-переменной толщины. Запорожье, 1992. 10 с. Деп. в УкрИНТЭИ 08.06.92, № 845, Ук92.
2. Левчук С. А. Матриці Гріна рівнянь та систем еліптичного типу для дослідження статичного деформування складених тіл : дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.02.04. Запоріжжя, 2002. 150 с.
3. Левчук С. А. Матриця типу Гріна круглої пластини дискретно-змінної товщини. *Вісник Запорізького державного університету. Фізико-математичні науки*. 1999. № 2. С. 66–69.
4. Левчук С. А., Сисоєв Ю. О. Про деякі способи апроксимації круглих пластин різних профілів. *Вісник Запорізького державного університету. Фізико-математичні науки*. 2008. № 1. С. 113–117.
5. Крашановська М. О., Левчук С. А., Хмельницький А. А. Про деякі способи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з квазидіагональними матрицями. *Актуальні проблеми математики та інформатики*: зб. тез доп. шостої регіон. наук. конф. молодих дослідників, присвяч. 90-річчю НАН України. Запоріжжя, 2008. С. 30–31.
6. Рибалко О. О., Левчук С. А., Хмельницький А. А. Про розвиток методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з квазидіагональними матрицями. *Актуальні проблеми математики та інформатики*: зб. тез доп. Першої Всеукр., восьмої регіон. наук. конф. молодих дослідників, присвяч. 80-річчю Запорізького нац. ун-ту. Запоріжжя, 2010. С. 36–38.
7. Levchuk S. A. Applying the apparatus' of Green matrixes and matrix algebra to the issue of static deformation of circular plates with discretely variable thickness. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. 2014. № 1. С. 104–108.
8. Биргер М. А., Пановко Я. Г. Прочность, устойчивость, колебания: в 3 т. Москва: Машиностроение, 1968. Т. 1. 832 с.
9. Вайнберг Д. В. Напряженное состояние составных дисков и пластин. Киев: Изд-во АН УССР, 1952. 420 с.

References

1. Gavela, S. P., Levchuk, S. A. & Ishenko, O. A. (1992). Calculation of the elastic deformation of a circular plate of discrete-variable thickness. Dep. v UkrINTEI, №845-Uk92, 10 p.
2. Levchuk, S. A. (2002). Grin's matrixes the equations and systems of the elliptical type for study the static deformation composite bodies. Abstract for Cand. Sc. (Physical and mathematical), 01.02.04, National University, Zaporizhzhya, Ukraine.
3. Levchuk, S. A. (1999). Green's type matrix of a circular plate of discrete-variable thickness, *Visnik Zaporizkogo derzavnogo universitetu. Fiziko-matematichny nauki*, No. 2, pp. 66–69.
4. Levchuk, S. A. & Sisoiev, U. O. (2008). About some methods of approximation of round plates of different profiles. *Visnik Zaporizkogo derzavnogo universitetu. Fiziko-matematichny nauki*, No. 1, pp. 113–117.
5. Krashanovskaja, M. O., Levchuk, S.A. & Hmelniyskiy, A. A. (2008). About some ways to solve systems of linear algebraic equations with quasi-diagonal matrices. Proceeding of the Sixth regional scientific conference of young researchers dedicated to the 90th anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine Actual problems of mathematics and computer science, (pp. 30–31), Zaporizhzhya.
6. Ribalko, O. O., Levchuk, S. A. & Hmelniyskiy, A. A. (2010). About the development of methods for solving systems of linear algebraic equations with quasi-diagonal matrices. Proceeding of the eighth regional scientific conference of young researchers dedicated to the 90th anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine Actual problems of mathematics and computer science, (pp. 36–38), Zaporizhzhya.
7. Levchuk, S. A. (2014). Applying the apparatus' of Green matrixes and matrix algebra to the issue of static deformation of circular plates with discretely variable thickness. *Novi materialy i tekhnolohiyi v metalurhiyi ta mashynobuduvanni*, No. 1, pp. 104–108.
8. Birger, M. N. & Panovko, Ia. G. (1968). Strength, stability, oscillations. Moscow: Mashynostroenyie.
9. Vainberg, D. V. (1952). Stress state of composite discs and plates. Kiev: Publishing house of the National Academy of Sciences of Ukraine.

УДК 539.37

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-10

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ У НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНІЙ ОРТОТРОПНІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З ПРЯМОКУТНИМИ ОТВОРАМИ

Є. А. Сторожук, В. А. Максимюк, І. С. Чернишенко, В. Ф. Корнієнко

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України
stevan@ukr.net

Ключові слова:

композитна циліндрична оболонка, прямокутні отвори, статичне навантаження, нелінійно-пружний стан, концентрація напружень, метод скінченних елементів.

Дано постановку і розроблено чисельну методику розв'язання фізично нелінійних задач статички для композитної циліндричної оболонки, ослабленої декількома прямокутними отворами. Систему розв'язувальних рівнянь отримано на основі співвідношень теорії тонких оболонок Кірхгофа–Лява і деформаційної теорії пластичності анізотропних середовищ з використанням методів Ньютона, додаткових напружень і скінченних елементів. Досліджено вплив нелінійної пружності матеріалу і довжини перемички на концентрацію напружень в області двох однакових квадратних отворів на бічній поверхні ортотропної циліндричної оболонки, навантаженої осьовими розтягувальними силами.

STRESS CONCENTRATION IN A NON-LINEAR ELASTIC ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL WITH RECTANGULAR HOLES

E. A. Storozhuk, V. A. Maksimyuk, I. S. Chernyshenko, V. F. Kornienko

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine
stevan@ukr.net

Key words:

composite cylindrical shell, rectangular holes, static load, nonlinear-elastic state, stress concentration, finite element method.

Thin cylindrical shells with holes of various shapes, as bearing elements of modern structures, are widely used in various areas of technology: aviation aircraft and rocket building, shipbuilding, chemical and petroleum engineering. Of particular interest are studies of the stress concentration near the holes in the shells, taking into account nonlinear factors (nonlinear elasticity, plastic deformations, finite deflections, etc.). The solution of nonlinear problems of stress concentration in cylindrical shells with holes is associated with considerable mathematical difficulties and is considered in a limited number of papers. From the analysis of publications on this issue, it follows that theoretical studies devoted to the study of the nonlinearly elastic state of anisotropic cylindrical shells with rectangular holes are currently lacking in the scientific literature. Therefore, the paper presents the formulation of two-dimensional static problems for composite cylindrical shells weakened by rectangular holes, taking into account the real properties of the material (nonlinear elasticity), describes the method for numerical solution of problems of this class and presents specific numerical results.

A thin cylindrical shell made of an orthotropic composite material and weakened by two or more rectangular holes is considered. It is assumed that at elevated levels of acting loads, the properties of the shell material are described by non-linear deformation diagrams.

Geometric relationships are written in vector form according to the theory of non-habitable shells, based on the Kirchhoff-Love hypotheses, and physical - based on the deformation theory of plasticity of anisotropic media. Physical relationships are essentially nonlinear and intractable analytically with respect to stresses. Therefore, in the work, the inversion of physical relations with respect to stresses is performed numerically - by the Newton method.

A numerical method was developed for solving static problems for orthotropic cylindrical shells weakened by rectangular holes, taking into

account physical nonlinearity, based on the use of the method of additional stresses and the finite element method (FEM). The implementation of the method of additional stresses involves the representation of expressions for stresses, forces and moments as a sum of linear and non-linear terms. In each approximation of the method of additional stresses, nonlinear components of stresses, forces and moments are considered known from the previous approximation and do not vary. The resulting sequence of linearly elastic problems is solved by a modified FEM. The peculiarity of the proposed FEM is that the rotation angle vector is not determined using formulas, as is customary in traditional FEM for thin shells, but is approximated by a biquadratic serendip type polynomial with Kirchhoff-Love hypotheses at the nodes of the finite element.

Using the developed technique, the effect of nonlinear elasticity of the material and the length of the jumper on the stress concentration in the region of two identical square holes on the lateral surface of an organoplastic cylindrical shell loaded with axial tensile forces was investigated.

Вступ. Тонкі оболонки, як несучі елементи сучасних конструкцій, знаходять широке застосування в різних областях техніки: авіа- і суднобудуванні, ракетобудуванні, хімічному і нафтовому машинобудуванні. Досить часто з конструктивних або технологічних міркувань такі елементи мають отвори і вирізи найрізноманітнішої форми.

Підвищений інтерес викликають дослідження концентрації напружень біля отворів в оболонках з врахуванням нелінійних факторів (нелінійної пружності, пластичних деформацій, скінченних прогинів тощо). Більшість результатів з цієї проблеми отримано для оболонок обертання при вісесиметричному навантаженні. Розглянуті здебільшого сферичні та еліпсоїдальні оболонки з вільним або підкріпленим отвором, а також з'єднання оболонок різної форми.

Найбільшого поширення в інженерній практиці набули циліндричні оболонки. Розв'язання двовимірних нелінійних задач про концентрацію напружень у циліндричних оболонках з отворами на бічній поверхні спряжене із значними математичними труднощами і розглянуте в обмеженій кількості робіт. Майже всі результати в цих роботах отримані для випадку, коли оболонки виготовлені з металів або їх сплавів. Так, пружнопластичний стан циліндричної оболонки з круговим або прямокутним отвором досліджено в роботах [1, 2], а геометрично нелінійне деформування ізотропної циліндричної панелі з круговим або прямокутним

вирізом – в [3, 4]. Розв'язки крайових задач для циліндричної оболонки, ослабленої криволінійним (круговим або еліптичним) отвором, при одночасному врахуванні фізичної та геометричної нелінійностей отримані в роботах [5, 6]. Також вивчено вплив нелінійних факторів на розподіл полів переміщень, деформацій і напружень навколо двох кругових [7] та двох або трьох прямокутних [8] отворів на бічній поверхні циліндричної оболонки, виготовленої з алюмінієвого сплаву. І лише в роботі [9] наведені конкретні числові результати розрахунку нелінійно-пружного деформування ортотропної циліндричної оболонки з круговим вирізом.

Тому в роботі дано постановку двовимірних задач статки для композитних циліндричних оболонок, ослаблених прямокутними отворами, з врахуванням реальних властивостей матеріалу (нелінійної пружності) і описано методика чисельного розв'язання задач даного класу. Представлено результати дослідження нелінійно-пружного стану органопластикової циліндричної оболонки з двома однаковими квадратними отворами при дії осьових розтягувальних сил.

Постановка задачі. Основні співвідношення. Розглянемо тонку циліндричну оболонку радіуса R і товщини h , виготовлену з ортотропного композитного матеріалу (КМ) й ослаблену двома або більшою кількістю прямокутних отворів (рис. 1). Віднесемо серединну поверхню оболонки (Σ) до

криволінійної ортогональної системи координат (x, y) , де x і y – довжини твірної та дуги по напрямній. По нормалі до серединної поверхні відраховуватимемо координату γ .

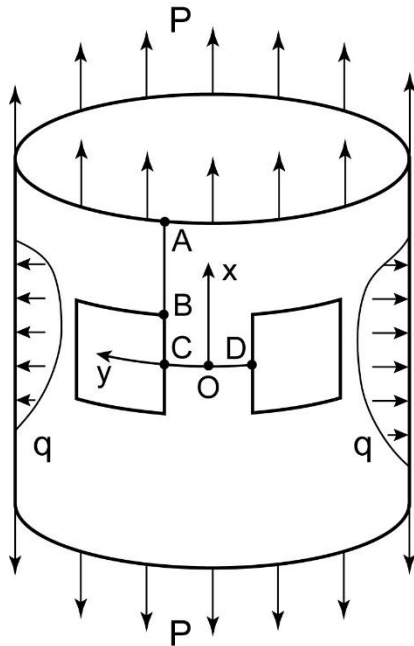


Рис. 1. Циліндрична оболонка з прямокутними отворами

Приймаємо, що при підвищених рівнях діючих поверхневих $\{p\} = \{p_1, p_2, p_3\}^T$ і крайових $\{m_k\} = \{T_k, S_k, Q_k, M_k\}^T$ навантажень властивості матеріалу оболонки описуються нелінійними діаграмами деформування.

Геометричні співвідношення. Вважаємо, що геометричні та механічні характеристики оболонки, способи її закріплення й навантаження такі, що для опису процесу деформування можна застосувати варіант теорії непологих оболонок, яка базується на гіпотезах Кірхгофа–Лява [10]. Запишемо вирази для деформацій у векторній формі:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \cdot \bar{e}_x; & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \cdot \bar{e}_y; \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \cdot \bar{e}_y + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \cdot \bar{e}_x; \\ \mu_{11} &= -\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \cdot \bar{e}_x; & \mu_{22} &= -\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \cdot \bar{e}_y; \\ 2\mu_{12} &= -\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \cdot \bar{e}_y - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \cdot \bar{e}_x; \\ e_{11} &= \varepsilon_{11} + \gamma \mu_{11}; & e_{22} &= \varepsilon_{22} + \gamma \mu_{22}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$e_{12} = \varepsilon_{12} + 2\gamma \mu_{12},$$

де ε_{ij} і μ_{ij} – компоненти мембранної і згинної деформацій оболонки; $\bar{u} = u\bar{e}_x + v\bar{e}_y + w\bar{n}$ – вектор переміщень точок серединної поверхні; $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{n}$ – орти криволінійної ортогональної системи координат (x, y, γ) ; $\bar{\varphi} = \varphi_x \bar{e}_x + \varphi_y \bar{e}_y$ – вектор кутів повороту дотичних до координатних ліній, які визначаються за формулами:

$$\varphi_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \cdot \bar{n}; \quad \varphi_y = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \cdot \bar{n}. \quad (2)$$

Фізичні співвідношення. Припускаючи, що навантаження просте, скористаємося нелінійними фізичними співвідношеннями деформаційної теорії пластичності анізотропних середовищ, у якій прийнята умова пластичності виду [11]:

$$f = \frac{1}{2} (q_{1111} \sigma_{11}^2 + q_{2222} \sigma_{22}^2 + 2q_{1122} \sigma_{11} \sigma_{22} + 4q_{1212} \sigma_{12}^2) = f_s. \quad (3)$$

Тут f_s – додатна матеріальна константа.

Також приймемо, що матеріал зміцнюється тільки тоді, коли виконується робота пластичних деформацій

$$W_p = \int_0^{e_{11}^p} \sigma_{11} de_{11}^p + \int_0^{e_{22}^p} \sigma_{22} de_{22}^p + \int_0^{e_{12}^p} \sigma_{12} de_{12}^p, \quad (4)$$

тобто при $f \geq f_s$

$$f = f(W_p) \text{ та } W_p = W_p(f). \quad (5)$$

Залежності між компонентами напружень і деформацій для плоского напруженого стану у випадку збігу напрямків ортотропії матеріалу з напрямками осей координат (x, y, γ) мають вигляд [11]:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \left(\frac{1}{E_{11}} + \Psi q_{1111} \right) \sigma_{11} + \left(-\frac{\nu_{12}}{E_{22}} + \Psi q_{1122} \right) \sigma_{22}; \\ e_{22} &= \left(-\frac{\nu_{21}}{E_{11}} + \Psi q_{2211} \right) \sigma_{11} + \left(\frac{1}{E_{22}} + \Psi q_{2222} \right) \sigma_{22}; \\ e_{12} &= \left(\frac{1}{G_{12}} + 4\Psi q_{1212} \right) \sigma_{12}, \end{aligned} \quad (6)$$

де $E_{11}, E_{22}, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{21}$ – пружні сталі компоненти; $q_{1111}, q_{2222}, q_{1122}, q_{1212}$ – компоненти

тензора, що враховує анізотропію нелінійних властивостей КМ; $\Psi(f)$ – функція, яка описує нелінійне деформування матеріалу і обчислюється за формулою [11]:

$$\Psi = \frac{1}{2\sqrt{f}} \int_{f_s}^f \frac{W'_p}{\sqrt{f}} df.$$

Відзначимо, що функція зміцнення $W_p = W_p(f)$ і значення параметрів q_{1111} , q_{2222} , q_{1122} , q_{1212} визначаються за допомогою методики, викладеної в роботах [10, 11].

Методика розв'язання фізично нелінійних крайових задач для композитних циліндричних оболонок з прямокутними отворами. Викладемо чисельну методику розв'язання задач статки для ортотропних циліндричних оболонок, ослаблених отворами, з врахуванням фізичної нелінійності, яка базується на використанні методу додаткових напружень, методу Ньютона і методу скінченних елементів (МСЕ).

Реалізація методу додаткових напружень передбачає подання виразів для напружень у вигляді суми лінійних (σ_{ij}^0) і нелінійних (σ_{ij}^H) доданків:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{11}^0 + \sigma_{11}^H; & \sigma_{22} &= \sigma_{22}^0 + \sigma_{22}^H; \\ \sigma_{12} &= \sigma_{12}^0 + \sigma_{12}^H; \\ \sigma_{11}^0 &= c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22}; & \sigma_{22}^0 &= c_{21}e_{11} + c_{22}e_{22}; \\ \sigma_{12}^0 &= c_{33}e_{12}; & & (7) \\ \sigma_{11}^H &= \sigma_{11} - \sigma_{11}^0; & \sigma_{22}^H &= \sigma_{22} - \sigma_{22}^0; \\ \sigma_{12}^H &= \sigma_{12} - \sigma_{12}^0; \\ c_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; & c_{22} &= \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \\ c_{21} &= c_{12} = \frac{E_{11}\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; & c_{33} &= G_{12}. \end{aligned}$$

Для внутрішніх зусиль і моментів $\{m\} = \{T_{11}, T_{22}, T_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}\}^T$ з врахуванням рівностей (7) маємо вирази:

$$\begin{aligned} \{m\} &= \{m^0\} + \{m^H\}; & \{m^0\} &= [D]\{\varepsilon\}; & (8) \\ T_{ij}^H &= \int_{h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^H d\gamma; \\ M_{ij}^H &= \int_{h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^H \gamma d\gamma \quad (i, j = 1, 2), \end{aligned}$$

де $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \mu_{11}, \mu_{22}, 2\mu_{12}\}^T$ – вектор компонентів мембранної та згинної деформації оболонки; $[D]$ – матриця жорсткостей оболонки, елементи якої обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} d_{kl} &= c_{kl}h; & d_{3+k,l} &= d_{k,3+l} = 0; \\ d_{3+k,3+l} &= c_{kl}h^3/12 \quad (k, l = 1, 2, 3). & (9) \end{aligned}$$

Систему розв'язувальних рівнянь отримаємо з варіаційного рівняння Лагранжа

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \delta\{\varepsilon\}^T [D]\{\varepsilon\} d\Sigma &= \\ = \delta A_p - \iint_{\Sigma} \delta\{\varepsilon\}^T \{m^H\} d\Sigma. & (10) \end{aligned}$$

Тут A_p – робота зовнішніх сил.

Вважаючи, що в рівнянні (10) нелінійні складові зусиль і моментів $\{m^H\}$ відомі з попереднього наближення і не варіюються, вихідну фізично нелінійну задачу методом додаткових напружень зводимо до послідовності лінійно-пружних задач. У кожному наближенні методу додаткових напружень при обчисленні нелінійних членів $\{m^H\}$ необхідно попередньо виразити напруження через відомі деформації, використовуючи рівності (6). Фізичні співвідношення (6) є суттєво нелінійними й нерозв'язними аналітично відносно напружень. Запишемо рівняння (6) у вигляді:

$$F_i(\{\sigma\}, \{e\}) = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (11)$$

де $\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^T$, $\{e\} = \{e_{11}, e_{22}, e_{12}\}^T$ – вектори напружень і деформацій у довільній точці оболонки.

Розв'яжемо нелінійну систему (11) відносно напружень методом Ньютона

$$\begin{aligned} F_i + \frac{\partial F_i}{\partial \{\sigma^j\}} \{\Delta\sigma^j\} &= 0 \quad (i = 1, 2, 3); \\ \{\sigma^{j+1}\} &= \{\sigma^j\} + \{\Delta\sigma^j\}, & (12) \end{aligned}$$

вибираючи за початкове наближення напруження для лінійно-пружного тіла $\{\sigma^0\}$.

Після чисельного обернення рівнянь (6) відносно напружень матимемо залежності виду

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{11}(e_{11}, e_{22}, e_{12}); & \sigma_{22} &= \sigma_{22}(e_{11}, e_{22}, e_{12}); \\ \sigma_{12} &= \sigma_{12}(e_{11}, e_{22}, e_{12}). & (13) \end{aligned}$$

Послідовність лінійно-пружних задач розв'язується модифікованим МСЕ. Особливість запропонованого варіанта МСЕ полягає в тому, що вектор кутів повороту $\vec{\varphi}$ не визначається за допомогою формул (2) для φ_x і φ_y , як це прийнято в традиційному МСЕ для тонких оболонок, а апроксимується біквадратичним поліномом серендипового типу з виконанням гіпотез Кірхгофа–Лява у вузлах скінченного елемента [7, 12].

Застосовуючи МСЕ, з рівняння Лагранжа (10) одержимо систему алгебраїчних рівнянь, яка моделює нелінійно-пружне деформування композитної циліндричної оболонки, ослабленої прямокутними отворами:

$$[K]\{q\} = \{P\} - \{\Omega\}, \quad (14)$$

де $[K]$ – глобальна матриця жорсткості лінійно-пружної оболонки; $\{q\}$, $\{P\}$, $\{\Omega\}$ – глобальні вектори вузлових ступенів свободи, навантажень і нелінійностей.

Відзначимо, що для елемента (e) матриця жорсткості та вектори навантажень і нелінійностей обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} [K^{(e)}] &= \iint_{\Sigma^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D] [B^{(e)}] d\Sigma; \\ \{P^{(e)}\} &= \iint_{\Sigma_p^{(e)}} [f^{(e)}]^T \{p\} d\Sigma; \\ \{\Omega^{(e)}\} &= \iint_{\Sigma^{(e)}} [B^{(e)}]^T \{m^H\} d\Sigma. \end{aligned} \quad (15)$$

Тут $[f^{(e)}]$, $[B^{(e)}]$ – матриці функцій форми переміщень і деформацій.

Числові результати і їх аналіз. Дослідимо нелінійно-пружний стан композитної циліндричної оболонки постійної товщини h і радіуса $R/h = 100$, ослабленої двома однаковими квадратними отворами зі стороною $a/h = 20$, центри яких знаходяться на спільній напрямній. Довжина оболонки становить $L/h = 200$, а відстань між контурами отворів (довжина перемички CD) при виконанні розрахунків змінювалася в межах: $10 \leq d/h \leq 80$. Оболонка виготовлена з ортотропного органопластика, для якого на основі діаграм деформування в [10, 11] побудована функція зміцнення

$$W_p = \begin{cases} 0, & f \leq f_s; \\ c \left[(f/f_s)^n - 1 \right], & f > f_s; \end{cases}$$

$$c = 0,137 \text{ МПа}; \quad n = 3; \quad f_s = 0,4 \cdot 10^6 \text{ МПа}$$

і визначені фізико-механічні параметри, які характеризують лінійну та нелінійну стадії деформування:

$$E_{11} = 38,4 \text{ ГПа}; \quad E_{22} = 25,3 \text{ ГПа};$$

$$G_{12} = 7,6 \text{ ГПа}; \quad \nu_{12} = 0,238;$$

$$q_{1111} = 4,2; \quad q_{2222} = 2,0;$$

$$q_{1122} = 0,33; \quad q_{1212} = 13,0.$$

З використанням розробленої методики розв'язані лінійні (ЛЗ) і нелінійні (НЗ) задачі при дії на торцях оболонки розтягувальних зусиль інтенсивності $\tilde{P} = 1400$ ($P/h = \tilde{P} \cdot 10^5$ Па).

На рис. 2 показана залежність максимальних напружень $\tilde{\sigma}_{\max}$ ($\sigma_{\max} = \tilde{\sigma}_{\max} \cdot 10^5$ Па) від зведеної довжини перемички $\tilde{d} = d/a$. Пунктирна крива відповідає розв'язку лінійно-пружної задачі, а суцільна – розв'язку нелінійної задачі.

У табл. 1 наведені значення найбільших напружень ($\tilde{\sigma}_x$) у центрі перемички (у точці O) для ряду значень її довжини: $\tilde{d} = 0,5; 1,0; \dots; 4,0$. Дані отримані при розв'язанні задач у лінійній і нелінійній постановках.

Із отриманих результатів випливає, що найбільші напруження в оболонці мають місце в кутовій точці B на зовнішній поверхні, а в центрі перемички (в точці O) – на внутрішній поверхні. Зі зменшенням довжини перемички найбільші напруження в центрі перемички збільшуються у 2,8 раза як для ЛЗ, так і НЗ, а в кутовій точці B – у 1,9 раза для ЛЗ і в 1,5 раза для НЗ.

Врахування фізичної нелінійності приводить до зменшення максимальних напружень в оболонці у порівнянні з результатами лінійно-пружного розв'язку, відповідно, на 19,2% для $d/a = 0,5$, на 5,5% для $d/a = 2,0$ і на 2,8% для $d/a = 4,0$. Водночас максимальні напруження у центрі перемички, отримані з розв'язків ЛЗ і НЗ, для всіх значень довжини перемички d практично збігаються.

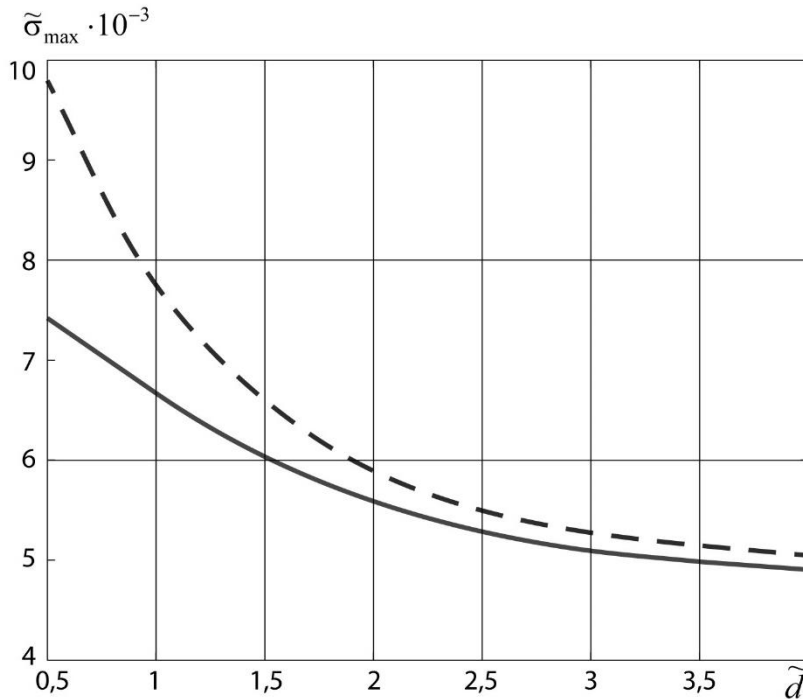


Рис. 2. Залежність максимальних напружень від довжини перемички

Табл. 1. Максимальні напруження в центрі перемички (в точці O)

\tilde{d}		0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$\tilde{\sigma}_x$	ЛЗ	4112	3041	2521	2183	1927	1728	1576	1466
	НЗ	4101	3039	2520	2183	1927	1728	1576	1466

Аналіз представлених результатів також дозволяє зробити висновок про те, що при дослідженні напружено-деформованого стану (НДС) композитних циліндричних оболонок, ослаблених двома квадратними або прямокутними отворами, з врахуванням нелінійних властивостей матеріалу для довжини перемички, яка перевищує чотири довжини сторони отвору ($d/a \geq 4$), взаємним впливом контурів отворів можна знехтувати.

Висновки. Отже, у роботі розроблено чисельну методику розв'язання двовимірних нелінійно-пружних задач статки для тонких циліндричних оболонок, виготовлених з композитних матеріалів і ослаблених декількома прямокутними отворами. Побудована методика базується на використанні варіаційного рівняння Лагранжа, методу

Ньютона, методу початкових напружень і модифікованого МСЕ. Особливість запропонованого варіанта МСЕ полягає у використанні векторної форми геометричних співвідношень і дискретній реалізації геометричної частини гіпотез Кірхгофа–Лява. З використанням розробленої методики і складених прикладних програм досліджено осьовий розтяг нелінійно-пружної циліндричної оболонки з двома квадратними отворами. Представляє подальший інтерес вивчення НДС композитних оболонок з прямокутними отворами при сумісному врахуванні фізичної та геометричної нелінійностей.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

Література

1. Савельев Л. М., Хазанов Х. С. Упруго-пластические деформации цилиндрической оболочки с круговым отверстием. *Теория оболочек и пластин*. Москва: Наука, 1973. С. 180–184.
2. Демидов А. И. К вопросу о применимости теории малых упруго-пластических деформаций при расчете оболочек при неупругом поведении материала. *Металлические конструкции*. 2014. Т. 20, № 4. С. 221–234.
3. Зацепина М. В., Хазанов Х. С. Вариационные уравнения для цилиндрической оболочки с круглым отверстием при больших прогибах. *Тр. Куйбышев. авиац. ин-та*. 1971. Вып. 48. С. 274–279.
4. Корнишин М. С., Петухов Н. П. К расчету на изгиб гибких пластин и пологих панелей со сложным очертанием контура методом блочной итерации. *Труды семинара по теории оболочек. Казанский физ.-техн. ин-т АН СССР*. 1975. Вып. 6. С. 34–39.
5. Chernyshenko I. S., Storozhuk E. A. Inelastic Deformation of Flexible Cylindrical Shells with a Curvilinear Hole. *Int. Appl. Mech.* 2006. Vol. 42, No 12. P. 1414–1420.
6. Chernyshenko I. S., Storozhuk E. A., Kadyrov F. D. Inelastic Deformation of Flexible Cylindrical Shells with an Elliptic Hole. *Int. Appl. Mech.* 2007. Vol. 43, No 5. P. 512–518.
7. Guz A. N., Storozhuk E. A., Chernyshenko I. S. Elastoplastic State of Flexible Cylindrical Shells with Two Circular Holes. *Int. Appl. Mech.* 2004. Vol. 40, No 10. P. 1152–1156.
8. Hudramovich V. S., Hart E. L., Klimentenko D. V., Rjabokon' S. A. Mutual influence of the cuts on the strength of the shell structures at the plastic deformation. *Strength of Materials*. 2013. Vol. 45, No 1. P. 1–9.
9. Maksimyuk V. A., Chernyshenko I. S. Stress State around Holes in Orthotropic Cylindrical Shells with Allowance for Nonlinearly Elastic Material Properties. *Int. Appl. Mech.* 1991. Vol. 27, No 10. P. 991–995.
10. Гузь А. Н., Космодамианский А. С., Шевченко В. П. Механика композитов: монография: в 12 т. Киев: «А.С.К.», 1998. Т. 7. Концентрация напряжений. 387 с.
11. Ломакин В. А. О теории пластичности анизотропных сред. *Вестник Московского университета. Серия I. Математика. Механика*. 1964. № 4. С. 49–53.
12. Areias P. M. A., Song J.-H., Belytschko T. A finite-strain quadrilateral shell element based on discrete Kirchhoff–Love constraints. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 2005. Vol. 64, No 9. P. 1166–1206.

REFERENCES

1. Saveliev, L. M. & Khazanov, Kh. S. (1973). Elastic plastic deformations of a cylindrical shell with a circular hole. In: *Theory of shells and plates* (pp. 180–184). Moscow: Nauka (in Russian).
2. Demidov, A. I. (2014). Revisiting the pertinence of theory of little elasto-plastic strain when calculating shells in the process of inelastic behavior of material. *Metallicheskie konstrukcii*, Vol. 20, No. 4, pp. 221–234 (in Russian).
3. Zatsepina, M. V. & Khazanov, Kh. S. (1971). Variational equations for a cylindrical shell with a round hole with large deflections. *Trudy Kujbyshevskogo aviacionnogo instituta*, Iss. 48, pp. 274–279 (in Russian).
4. Kornishin, M. S. & Petukhov, N. P. (1975). For the calculation of the bending of flexible plates and flat panels with a complex contour using the block iteration method. *Trudy seminar po teorii obolochek*. Kazanskiy fiziko-tehnicheskii institut AN SSSR, Iss. 6, pp. 34–39 (in Russian).
5. Chernyshenko, I. S. & Storozhuk, E. A. (2006). Inelastic Deformation of Flexible Cylindrical Shells with a Curvilinear Hole. *Int. Appl. Mech*, Vol. 42, No. 12, pp. 1414–1420.
6. Chernyshenko, I. S., Storozhuk, E. A. & Kadyrov, F. D. (2007). Inelastic Deformation of Flexible Cylindrical Shells with an Elliptic Hole. *Int. Appl. Mech*, Vol. 43, No. 5, pp. 512–518.

7. Guz, A. N., Storozhuk, E. A. & Chernyshenko, I. S. (2004). Elastoplastic State of Flexible Cylindrical Shells with Two Circular Holes. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 40, No. 10, pp. 1152–1156.
8. Hudramovich, V. S., Hart, E. L., Klimenko, D. V. & Rjabokon', S. A. (2013). Mutual influence of the cuts on the strength of the shell structures at the plastic deformation. *Strength of Materials*, Vol. 45, No. 1, pp. 1–9.
9. Maksimyuk, V. A. & Chernyshenko, I. S. (1991). Stress State around Holes in Orthotropic Cylindrical Shells with Allowance for Nonlinearly Elastic Material Properties. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 27, No. 10, pp. 991–995.
10. Guz, A. N., Kosmodamianskii, A. S. & Shevchenko, V. P. (1998). *Mechanics of Composite Materials. (vol. 7) Stress Concentration.* Kyiv: A.S.K. (in Russian).
11. Lomakin, V. A. (1964). On the theory of anisotropic plasticity. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Serija 1. Matematika. Mekhanika*, No. 4, pp. 49–53 (in Russian).
12. Areias P. M. A., Song J.-H., Belytschko T. (2005). A finite-strain quadrilateral shell element based on discrete Kirchhoff–Love constraints. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 64, No. 9, pp. 1166–1206.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-11

НЕСТАЦІОНАРНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ В ЦИЛІНДРІ З ПОКРИТТЯМ ПРИ ЗМІШАНОМУ НАГРІВАННІ

Г. Т. Сулим¹, І. М. Турчин^{1,2}, Г. В. Василько¹¹Львівський національний університет ім. Івана Франка,²Університет Казимира Великого

ihorturchyn@gmail.com

Ключові слова:

нестационарна задача теплопроводности, змішані крайові умови, поліноми Лагерра, парні інтегральні рівняння.

З використанням інтегральних перетворень Лагерра та Фур'є побудовано розв'язок осесиметричної нестационарної задачі теплопроводности для циліндра з покриттям, на границі якого в кільці задана температура, а зовні відбувається теплообмін за законом Ньютона. Розв'язок систем парних інтегральних рівнянь, отриманих при розгляді змішаних умов нагріву граничної поверхні, будується з використанням методу рядів Неймана. Отримані в результаті безмежні системи алгебраїчних рівнянь дозволяють обґрунтувати застосування до їх розв'язування методу редукції. Остаточо розв'язок подається у вигляді ряду за поліномами Лагерра з коефіцієнтами, що визначаються з отриманих в роботі рекурентних співвідношень.

UNSTEADY HEAT CONDUCTIVITY PROBLEM FOR COATED CYLINDER UNDER MIXED BOUNDARY HEATING CONDITIONS

H. T. Sulym¹, I. M. Turchyn^{1,2}, G. V. Vasylo¹¹Ivan Franko National University of Lviv,²Kazimierz Wielki University

ihorturchyn@gmail.com

Key words:

unsteady heat conductivity problem; mixed boundary conditions; Laguerre polynomials; dual integral equations.

Analysis of thermal stresses in bodies with coatings is important for many engineering researches. Taking into account the actual operating conditions of these structures frequently leads to mixed heating condition. The steady problem of thermoelasticity with mixed boundary conditions currently is sufficiently investigated. However, the corresponding transient problem, despite its relevance, is poorly understood. This is due to mathematical difficulties that arise in applying the integral Laplace transform. The authors of this paper developed a new effective method of constructing solutions of mixed boundary-value non-stationary problems.

In this work consider the cylinder with a coating on the surface of which on the band width it is known temperature distribution and outside this area the heat transfer by Newton's law is performed. On the surface separation of materials of cylinder and covering the conditions of ideal thermal contact are satisfied. The initial temperature of the coating and cylinder is equal to zero.

To the nonstationary heat conductivity problem it is applied the Laguerre integral transformation in time variables and integral Fourier transformation in spatial variable. As a result the triangular sequence of ordinary differential equations is obtained. The general solution of these sequences is obtained in the form of algebraic convolution. Taking into account the mixed boundary conditions leads to dual integral equations. For solution of this problem it is proposed the method of Newton's series. By this method the problem is reduced to the infinite system of algebraic equations, for which the convergence of reduction procedure is proved.

Вступ. При математичному моделюванні процесів теплопереносу, що відбуваються в елементах конструкцій та приладах

із урахуванням реальних умов експлуатації чи виготовлення, часто виникає потреба врахування нестационарності процесу та змішаних крайових умов у вихідних модельних

побудовах. Особливо це стосується випадків, коли дія зовнішніх чинників зводиться до змінюваного в часі високоінтенсивного нагрівання граничних поверхонь [1].

Класичним аналітичним методом побудови розв'язків просторових нестационарних задач теплопровідності є метод інтегрального перетворення Лапласа [2]. Проте за наявності змішаних крайових умов [3], особливо для неоднорідних тіл циліндричної форми пряме використання цього перетворення створює значні труднощі при знаходженні навіть трансформант за Лапласом, не кажучи вже про математично обґрунтований перехід до оригіналів.

Метою даної роботи є розробка ефективною аналітичної методики побудови розв'язку нестационарних задач теплопровідності для циліндрично-шаруватих тіл за змішаних умов нагрівання, яка ґрунтується на використанні інтегрального перетворення Лагерра [4-6] і дослідження на її основі перехідних температурних полів у циліндрі із покриттям, зумовлених умовами локального нагрівання змішаного типу.

Формулювання задачі. Розглянемо безмежний неоднорідний циліндр, що складається із суцільного циліндра радіуса R_1 та нанесеного покриття, яке вважатимемо порожнистим циліндром із внутрішнім радіусом R_1 та зовнішнім радіусом R_2 . З моменту часу $t > 0$ на поверхні покриття $r = R_1 + R_2$ задається розподіл температури $T_c(z, t) = T^*(z)(1 - \exp(-t_0 t))$, симетрично розподіленої в кільці ширини $2d$. Зовні цього кільця відбувається теплообмін за законом Ньютона із зовнішнім середовищем нульової температури. Вважається, що початкова температура неоднорідного циліндра рівна нулю, а на поверхні поділу його матеріалів виконуються умови ідеального теплового контакту.

Зважаючи на всі перелічені вище умови, сформулюємо нестационарну задачу теплопровідності в знерозміреному вигляді наступним чином:

рівняння нестационарної теплопровідності для внутрішнього і зовнішнього циліндрів

$$\partial_{\rho\rho}^2 T^{(i)} + \rho^{-1} \partial_{\rho} T^{(i)} + \partial_{\gamma\gamma}^2 T^{(i)} = \tilde{a}_T^{(i)} \partial_{\tau} T^{(i)},$$

$$i = 1, 2; \quad (1)$$

початкові умови

$$T^{(i)}(\rho, \gamma, 0) = 0, \quad i = 1, 2; \quad (2)$$

умова на осі $\rho = 0$ внутрішнього циліндра

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} T^{(1)}(\rho, \gamma, \tau) \neq \infty; \quad (3)$$

змішані умови нагрівання зовнішнього циліндра

$$\begin{aligned} T^{(2)}(\rho_2, \gamma, \tau) &= T_c(\gamma, \tau), \quad |\gamma| \leq 1; \\ \partial_{\rho} T^{(2)}(\rho_2, \gamma, \tau) &+ \\ + Bi T^{(2)}(\rho_2, \gamma, \tau) &= 0, \quad |\gamma| > 1; \end{aligned} \quad (4)$$

умови ідеального теплового контакту

$$\begin{aligned} T^{(1)}(\rho_1, \gamma, \tau) &= T^{(2)}(\rho_1, \gamma, \tau); \\ \tilde{\lambda}_T \partial_{\rho} T^{(1)}(\rho_1, \gamma, \tau) &= \partial_{\rho} T^{(2)}(\rho_1, \gamma, \tau). \end{aligned} \quad (5)$$

Тут $\rho = r/d$, $\gamma = z/d$ - безрозмірні змінні циліндричної системи координат, $\tau = a_T^{(2)} t / d^2$, $\tilde{a}_T^{(i)} = a_T^{(2)} / a_T^{(i)}$, $\tilde{\lambda}_T^{(i)} = \lambda_T^{(i)} / \lambda_T^{(2)}$, $Bi = \kappa d / \lambda_T^{(1)}$, $\rho_1 = R_1 / d$, $\rho_2 = R_2 / d$, $\lambda_T^{(i)}$, $a_T^{(i)}$ - відповідно коефіцієнти теплопровідності та температуропровідності зовнішнього ($i = 2$) та внутрішнього ($i = 1$) циліндрів; κ - коефіцієнт тепловіддачі з поверхні покриття, $T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau)$ - температурне поле у внутрішньому ($i = 1$) і зовнішньому ($i = 2$) циліндрах.

Побудова розв'язку задачі. Припустимо, що функції $T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau)$ можна розвинути в ряд за поліномами Лагерра:

$$T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(i)}(\rho, \gamma) L_n(\lambda \tau), \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} T_n^{(i)}(\rho, \gamma) &= \\ &= \int_0^{\infty} \exp(-\lambda \tau) T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) L_n(\lambda \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (7)$$

а $L_n(\lambda \tau)$ - поліноми Лагерра.

Надалі формулу (7) розглядатимемо як інтегральне перетворення функції $T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau)$, а ряд (6) - як формулу обернення цього перетворення.

Домножимо рівняння (1) на ядро перетворення $\exp(-\lambda\tau)L_n(\lambda\tau)$ і виконаємо почленне інтегрування отриманого виразу за змінною τ в інтервалі $[0, \infty)$. Згідно з рівністю (7) і формулою диференціювання поліномів Лагерра:

$$\begin{aligned} & \partial_\tau [\exp(-\lambda\tau)L_n(\lambda\tau)] = \\ & = -\lambda \exp(-\lambda\tau) \sum_{k=0}^n L_k(\lambda\tau), \end{aligned}$$

після інтегрування за частинами, враховуючи нульові початкові умови (2), одержимо

$$d_{\rho\rho} \bar{T}_n^{(i)} + \rho^{-1} d_\rho \bar{T}_n^{(i)} - (\xi^2 + \beta_i) \bar{T}_n^{(i)} = \beta_i \sum_{m=0}^{n-1} \bar{T}_m^{(i)}, \quad n=0,1,2, \dots, \quad i=1,2, \quad (9)$$

де $\bar{T}_n^{(i)}(\rho, \xi) = \int_0^\infty \cos(\xi\gamma) \left[\int_0^\infty \exp(-\lambda\tau) T_n^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) L_n(\lambda\tau) d\tau \right] d\gamma$ – трансформанта за Лагерром та Фур'є.

Загальний розв'язок послідовностей (9) знайдено у вигляді алгебричної згортки:

$$\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \rho) = \sum_{j=0}^n \left[A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi, \rho) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi, \rho) \right], \quad i=1,2, \quad (10)$$

де $G_j^{(i)}(\xi, \rho)$, $W_j^{(i)}(\xi, \rho)$ – лінійно незалежні фундаментальні розв'язки послідовностей рівнянь (9), які мають вигляд

$$\begin{aligned} G_j^{(i)}(\xi, \rho) &= \sum_{k=0}^j a_{j,k}^{(i)} \rho^k I_k(\omega_i \rho), \\ W_j^{(i)}(\xi, \rho) &= \sum_{k=0}^j a_{j,k}^{(i)} (-\rho^k) K_k(\omega_i \rho). \end{aligned} \quad (11)$$

Тут введено позначення $\omega_i = \sqrt{\xi^2 + \beta_i}$. Коефіцієнти $a_{j,k}^{(i)}$ після підстановки співвідношень (11) у рівняння одержуються із рекурентних рівнянь:

$$a_{j,k+1}^{(i)} = \frac{\lambda}{2\tilde{a}_i \omega_i (k+1)} \sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k}^{(i)}, \quad i=1,2 \quad (12)$$

при довільних $a_{j,0}^{(i)}$ і $a_{j,k}^{(i)} \equiv 0$ при $k > j$. У подальших розрахунках покладено $a_{0,0}^{(i)} = 1$, $a_{j,0}^{(i)} = 0$, $j \geq 1$, $i=1,2$.

З умови (3) та властивостей функцій Макдональда знайдемо, що

$$B_i^{(2)} \equiv 0, \quad i=1,2, \dots \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \partial_{\rho\rho}^2 T_n^{(i)} + \rho^{-1} \partial_\rho T_n^{(i)} + \partial_{\gamma\gamma}^2 T_n^{(i)} = \\ & = \lambda \tilde{a}_T^{(i)} \sum_{k=0}^n T_k^{(i)}. \end{aligned} \quad (8)$$

До рівняння (8), враховуючи фізичну симетрію розв'язку відносно площини $\gamma = 0$, застосуємо також інтегральне cos-перетворення Фур'є за змінною γ [7]. У результаті після перенесення доданку при $k = n$ з правої частини в ліву одержимо трикутну послідовність звичайних диференціальних рівнянь

Решту невідомих $A_n^{(2)}(\xi)$, $B_n^{(2)}(\xi)$, $A_n^{(1)}(\xi)$ знайдемо з умов (4)-(5). Розглянемо спочатку змішані умови (4), які після застосування інтегрального перетворення Лагерра набудуть вигляду

$$\begin{aligned} T_n^{(2)}(\rho_2, \gamma) &= T_{cn}(\gamma), \quad |\gamma| \leq 1; \\ \partial_\rho T_n^{(2)}(\rho_2, \gamma) + Bi T_n^{(2)}(\rho_2, \gamma) &= 0, \quad |\gamma| > 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Безпосереднє застосування cos-перетворення Фур'є до цих умов є неможливим внаслідок їх різнорідності, тому продовжимо другу умову (14) на всю вісь, увівши в розгляд невідому функцію $g_n(\gamma)$:

$$\begin{aligned} & \partial_\rho T_n^{(2)}(\rho_2, \gamma) + Bi T_n^{(2)}(\rho_2, \gamma) = \\ & = \begin{cases} g_n(\gamma), & |\gamma| \leq 1; \\ 0, & |\gamma| > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

Після застосування до (15) cos-перетворення Фур'є одержимо

$$\partial_\rho \bar{T}_n^{(2)}(\rho_2, \gamma) + Bi \bar{T}_n^{(2)}(\rho_2, \gamma) = \bar{g}_n(\xi), \quad (16)$$

де $\bar{g}_n(\xi) = \int_0^1 g_n(\gamma) \cos(\xi\gamma) d\gamma$. Застосовуючи інтегральне перетворення Лагерра та

cos-перетворення Фур'є до умов (5), одержимо:

$$\begin{aligned} \bar{T}_n^{(1)}(\xi, \rho_1) &= \bar{T}_n^{(2)}(\xi, \rho_1); \\ \tilde{\lambda}_T d_\rho \bar{T}_n^{(1)}(\xi, \rho_1) &= d_\rho \bar{T}_n^{(2)}(\xi, \rho_1). \end{aligned} \quad (17)$$

Безпосередня підстановка розв'язків (8)-(9) в умови (13), (14) після виділення в лівій частині лише невідомих з нижнім індексом n приводить до систем алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix} \omega_2 I_1(\omega_2 \rho_2) + \text{Bi} I_0(\omega_2 \rho_2) & -\omega_2 K_1(\omega_2 \rho_2) + \text{Bi} K_0(\omega_2 \rho_2) & 0 \\ I_0(\omega_2 \rho_1) & K_0(\omega_2 \rho_1) & -I_0(\omega_1 \rho_1) \\ -\omega_2 I_1(\omega_2 \rho_1) & \omega_2 K_1(\omega_2 \rho_1) & \tilde{\lambda}_T \omega_1 I_1(\omega_1 \rho_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^{(2)} \\ B_n^{(2)} \\ A_n^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{n,1} \\ c_{n,2} \\ c_{n,3} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

в яких права частина з ростом дискретної величини n поповнюється розв'язками, знайденими при її попередніх значеннях, і має вигляд:

$$\begin{aligned} c_{1,n} &= \bar{g}_n(\xi) - \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(2)}(\xi) G_j'^{(2)}(\xi, \rho_2) + B_{n-j}^{(2)}(\xi) W_j'^{(2)}(\xi, \rho_2) \right] - \\ &\quad - \text{Bi} \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(2)}(\xi) G_j^{(2)}(\xi, \rho_2) + B_{n-j}^{(2)}(\xi) W_j^{(2)}(\xi, \rho_2) \right]; \\ c_{2,n} &= \sum_{j=1}^n A_{n-j}^{(1)}(\xi) G_j^{(1)}(\xi, \rho_1) - \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(2)}(\xi) G_j^{(2)}(\xi, \rho_1) + B_{n-j}^{(2)}(\xi) W_j^{(2)}(\xi, \rho_1) \right]; \\ c_{3,n} &= \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(2)}(\xi) G_j'^{(2)}(\xi, \rho_1) + B_{n-j}^{(2)}(\xi) W_j'^{(2)}(\xi, \rho_1) \right] - \tilde{\lambda}_T \sum_{j=1}^n A_{n-j}^{(1)}(\xi) G_j^{(1)}(\xi, \rho_1), \end{aligned}$$

де введено позначення $G_j^{(i)} \equiv d_\rho G_j^{(i)}$, $W_j^{(i)} \equiv d_\rho W_j^{(i)}$.

Розв'язок систем (18) можна знайти у вигляді

$$A_n^{(2)} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad B_n^{(2)} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad A_n^{(1)} = \frac{c_{3,n} + \omega_2 I_1(\omega_2 \rho_1) A_n^{(2)} - \omega_2 K_1(\omega_2 \rho_1) B_n^{(2)}}{\tilde{\lambda}_T \omega_1 I_1(\omega_1 \rho_1)}, \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta &= \tilde{\lambda}_T \omega_1 \omega_2 I_1(\omega_1 \rho_1) \left[I_1(\omega_2 \rho_2) K_0(\omega_2 \rho_1) + K_1(\omega_2 \rho_2) I_0(\omega_2 \rho_1) \right] + \tilde{\lambda}_T \omega_1 \text{Bi} I_1(\omega_1 \rho_1) \left[I_0(\omega_2 \rho_2) K_0(\omega_2 \rho_1) - \right. \\ &\quad \left. - K_0(\omega_2 \rho_2) I_0(\omega_2 \rho_1) \right] + \omega_2^2 I_0(\omega_1 \rho_1) \left[I_1(\omega_2 \rho_2) K_1(\omega_2 \rho_1) - K_1(\omega_2 \rho_2) I_1(\omega_2 \rho_1) \right] + \\ &\quad + \omega_2 \text{Bi} I_0(\omega_1 \rho_1) \left[K_0(\omega_2 \rho_2) I_1(\omega_2 \rho_1) + I_0(\omega_2 \rho_2) K_1(\omega_2 \rho_1) \right], \\ \Delta_1 &= c_{1,n} \left(\tilde{\lambda}_T \omega_1 K_0(\omega_2 \rho_1) I_1(\omega_1 \rho_1) + \omega_2 K_1(\omega_2 \rho_1) I_0(\omega_1 \rho_1) \right) - \\ &\quad - \left(c_{n,3} I_0(\omega_1 \rho_1) + c_{n,2} \tilde{\lambda}_T \omega_1 I_1(\omega_1 \rho_1) \right) \left(-\omega_2 K_1(\omega_2 \rho_2) + \text{Bi} K_0(\omega_2 \rho_2) \right), \\ \Delta_2 &= c_{n,1} \left(\omega_2 I_0(\omega_1 \rho_1) I_1(\omega_2 \rho_1) - \tilde{\lambda}_T \omega_1 I_0(\omega_2 \rho_1) I_1(\omega_1 \rho_1) \right) + \\ &\quad + \left(\tilde{\lambda}_T \omega_1 I_1(\omega_1 \rho_1) c_{n,2} + I_0(\omega_1 \rho_1) c_{n,3} \right) \left(\omega_2 I_1(\omega_2 \rho_2) + \text{Bi} I_0(\omega_2 \rho_2) \right). \end{aligned}$$

У розв'язки (19) входить уведена нами вище невідома функція $\bar{g}_n(\xi)$. Для її визначення повернемося до змішаних умов (14). Враховуючи подання (10) та формули обернення cos-перетворення Фур'є, ці умови можна записати у вигляді послідовності парних інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \bar{g}_n(\xi) [1 + f(\xi)] \cos(\xi \gamma) d\xi = \\ &= T_{cn} - \int_0^\infty F_n(\xi) \cos(\xi \gamma) d\xi, \quad |\gamma| \leq 1; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\int_0^\infty \bar{g}_n(\xi) \cos(\xi\gamma) d\xi = 0, \quad |\gamma| > 1, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (21)$$

де $\bar{g}_n(\xi)$ – шукана функція, а $f(\xi)$ та $F_n(\xi)$ – відомі функції, що складаються із комбінацій модифікованих функцій Беселя, функцій Макдональда та знерозмірених теплофізичних параметрів.

Для побудови розв’язку послідовностей парних інтегральних рівнянь (17), (18) скористаємось методикою, описаною в [5, 6]. Для цього шукатимемо функцію $\bar{g}_n(\xi)$ у вигляді ряду Неймана

$$\bar{g}_n(\xi) = \sum_{k=0}^\infty a_{n,k} J_{2k+1/2}(\xi). \quad (20)$$

Безпосередньою підстановкою легко пере-свідчитись, що рівняння (21) задовольняється тотожно при довільних коефіцієнтах $a_{n,k}$, а з рівняння (20) після перетворень одержуємо послідовності безмежних систем лінійних алгебричних рівнянь

$$\tilde{a}_{n,k} + \sum_{m=0}^\infty \tilde{a}_{n,m} b_{m,k} = c_{n,k}, \quad (21)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{n,k} &= a_{n,k} (2k+1)^{-1/2}; \\ b_{m,k} &= 2\sqrt{2m+1}\sqrt{2k+1} \times \\ &\times \int_0^\infty \xi^{-1} f(\xi) J_{2m+1}(\xi) J_{2k+1}(\xi) d\xi; \\ c_{n,k} &= 2\sqrt{2k+1} \times \\ &\times \int_0^\infty \left[-\xi^{-1/2} \bar{q}_n(\xi) + \xi^{-1} F_n(\xi) \right] J_{2k+1}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Використовуючи властивості рядів Неймана та розривних інтегралів Вебера-Шафхейтліна, можна встановити, що

$$\sum_{m,k=0}^\infty (b_{m,k})^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^\infty (c_{n,k})^2 < \infty, n = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Виконання умов (24) свідчить про квазірегулярність систем (21) і забезпечує збіжність числової процедури редукції.

Знаходження невідомих $\tilde{a}_{n,k}$ з систем (22) завершує побудову розв’язку вихідної задачі теплопровідності. При цьому температурне поле в покритті та циліндрі розраховується за формулою

$$\begin{aligned} T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) = \\ = \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^\infty L_n(\lambda\tau) \int_0^\infty \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \rho) \cos(\xi\gamma) d\xi. \quad (23) \end{aligned}$$

Висновок. Отже, у роботі отримано точний аналітичний розв’язок осесиметричної нестационарної задачі теплопровідності для системи двох циліндрів, що нагріваються на обмеженій частині граничної поверхні та охолоджуються поза неї. Розв’язок отримано із використанням інтегрального перетворення Лагерра за часовою змінною та інтегрального перетворення Фур’є у вигляді ряду за поліномами Лагерра. Коефіцієнти цього ряду знаходяться із рекурентних співвідношень. Обговорюються проблеми збіжності та стійкості числової реалізації запропонованого алгоритму.

Література

1. Springer Handbook of Nanomaterials / ed. R. Vajtai. Springer Science & Business Media, 2013. 1221 p.
2. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. Киев: Наук. думка, 1992. 280 с.
3. Sneddon I. Mixed Boundary-Value Problems in Potential Theory. Amsterdam: North-Holl. Publ. Comp., 1966. 282 p.
4. Galazyuk V. A., Turchin I. M. Quasistatic thermal stress state of a layer with mixed heating conditions. *International Applied Mechanics*. 1998. Vol. 34, No 9. P. 886–893.
5. Turchin I. M. Nonstationary end heating of a multilayer semiinfinite plate. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2012. Vol. 85, Iss. 6. P. 1453–1462.

6. Turchin I.M. Nonstationary axisymmetric temperature field in a two-layer slab under mixed heating conditions. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2015. Vol. 88, Iss. 5. P. 1135–1144.
7. Sneddon I. *Fourie transforms*. New York: McCraw-Hill Book Company, 1951. 542 p.

References

1. Vajtai, R. (Ed.) (2013). *Springer Handbook of Nanomaterials*. Springer Science & Business Media.
2. Kolyano, Yu. M. (1992). *Metody teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela*. Kiev: Naukova Dumka.
3. Sneddon, I. (1966). *Mixed Boundary-Value Problems in Potential Theory*. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp.
4. Galazyuk, V. A. & Turchin, I. M. (1998). Quasistatic thermal stress state of a layer with mixed heating conditions. *International Applied Mechanics*, Vol. 34, No. 9, pp. 886–893.
5. Turchin, I. M. (2012). Nonstationary end heating of a multilayer semiinfinite plate. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, Vol. 85, Issue 6, pp. 1453–1462.
6. Turchin, I. M., Timar, I. & Kolodiy, Yu. O. (2015). Nonstationary axisymmetric temperature field in a two-layer slab under mixed heating conditions. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, Vol. 88, Issue 5, pp. 1135–1144.
7. Sneddon, I. (1951). *Fourier transforms*. New York: McCraw-Hill Book Company.

УДК 517.944

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-12

НОВА ПОСТАНОВКА КРАЙОВОЇ 2π -ПЕРІОДИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В АСИМПТОТИЧНІЙ ТЕОРІЇ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ

Н. Г. Хома¹, С. Г. Хома–Могильська¹, Л. Г. Хохлова²

¹Тернопільський національний економічний університет,

²Тернопільський національний педагогічний університет ім. Володимира Гнатюка
khoma.nadiya@gmail.com, sv_khoma@ukr.net, larysa_khokhlova@ukr.net

Ключові слова:

крайова періодична задача, незбурене рівняння, властивості розв'язку, операторний метод.

До цього часу асимптотичними методами Крилова–Боголюбова–Митропольського–Мосеєнкова досліджувалися гіперболічні рівняння другого порядку з малим параметром ε у правій частині при умові, коли незбурене ($\varepsilon = 0$) рівняння має розв'язок у вигляді тригонометричного ряду Фур'є. Ці ж методи з припущенням малих параметра ε дозволили будувати наближений розв'язок крайової періодичної задачі для гіперболічного рівняння другого порядку, права частина якого містить малий параметр ε , ліва частина – утворена оператором Даламбера. У процесі дослідження логічно виникає запитання, при яких умовах незбурене ($\varepsilon = 0$) рівняння має розв'язок у вигляді тригонометричного ряду Фур'є. Їх встановленню присвячена дана робота.

У першій частині роботи розглянуто незбурене рівняння, у лівій частині якого є оператор Даламбера, у правій частині – довільна функція $f(x, t)$. З використання операторного методу побудовано формальний розв'язок вказаного рівняння. Обґрунтовано ряд теорем і лем, які встановлюють умови існування класичного розв'язку крайової 2π -періодичної по змінній x задачі для незбуреного рівняння. При цьому визначено конкретний клас функцій $f(x, t)$, у якому вказана вище задача має класичний розв'язок. Виділено підклас функцій $f(x, t)$, у якому класичний розв'язок поставленої задачі є непарною функцією, а, отже, з врахуванням 2π -періодичності розкладається у тригонометричний ряд Фур'є по синусах.

Отримані результати дають можливість побудувати наближений розв'язок квазілінійної крайової 2π -періодичної по змінній x задачі для гіперболічного рівняння другого порядку, права частина якого є функція $\varepsilon F(x, t, u)$ з малим параметром ε . У другій частині роботи наведено схему побудови наближеного розв'язку. Як нульове наближення взято зображення класичного розв'язку крайової 2π -періодичної по змінній x задачі для незбуреного рівняння, встановленого в першій частині роботи.

NEW STATEMENT OF BOUNDARY-VALUE 2π -PERIODIC PROBLEM FOR THE HYPERBOLIC SECOND ORDER EQUATION IN THE ASYMPTOTIC THEORY OF NONLINEAR OSCILLATIONS

N. H. Khoma¹, S. H. Khoma-Mohylska¹, L. H. Khokhlova²

¹Ternopil national economic university,

²Ternopil Volodymyr Hnatiuk national pedagogical university
khoma.nadiya@gmail.com, sv_khoma@ukr.net, larysa_khokhlova@ukr.net

Key words:

boundary-value periodic problem, undisturbed equation, solution properties, operator method.

Until now the hyperbolic second order equations with small parameter ε in right side have been researched by asymptotic methods of Krylov–Bogoliubov–Mytropolskyi–Moseienkov provided that undisturbed ($\varepsilon = 0$)

equation had solution as trigonometric Fourier series. With the assumption of the parameter ε is very small these methods allow to build an approximate solution of the boundary-value periodic problem for hyperbolic second order equation in which right side has small parameter ε and left side is formed by the operator of D'Alembert. In the process of research a logical question arises under which conditions the undisturbed ($\varepsilon = 0$) equation has solution as trigonometric Fourier series. Our work is devoted to establishment of such conditions.

In the first part of the article we consider the undisturbed equation in the left part of which there is the D'Alembert operator and on the right side there is an arbitrary function $f(x, t)$. Using the operator method, a formal solution of this equation is constructed. The theorems and lemmas that establish the conditions for the existence of a classical solution to the boundary-value 2π -periodic in x problem for an undisturbed equation are proved. The specific class of functions $f(x, t)$ in which the above problem has a classical solution is defined. The subclass of functions in which the classical solution to the problem is an odd function and hence taking into account 2π -periodicity decomposes into a trigonometric sine series is selected.

The obtained results make it possible to construct an approximate solution to a quasilinear boundary-value 2π -periodic in x problem for a hyperbolic second order equation right side of which is a function $\varepsilon F(x, t, u)$ with small parameter ε . In the second part of the article the scheme of constructing an approximate solution is given. As a zero approximation, we take the representation of the classical solution to the boundary-value 2π -periodic in x problem for the undisturbed equation established in the first part of the article.

Вступ. Крайова 2π -періодична задача для гіперболічного рівняння другого порядку вигляду

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \lambda u + \varepsilon f(x, t, u, u_t, u_x), \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, t + 2\pi) = u(x, t) \quad (3)$$

досліджувалась у деякому прямокутнику $\Pi_T = \{0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq 2\pi\}$ асимптотичними методами [1, 2] у припущенні, що її розв'язок існує і зображається рядом Фур'є

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t, \varepsilon) \sin kx, \quad (4)$$

який автоматично задовольняє крайовим умовам (2). Це пов'язано з тим, що основна ідея застосування асимптотичних методів для розв'язання крайової 2π -періодичної по t задачі (1)–(3) полягає у використанні теорії рядів Фур'є [3, 4]. Як відомо, для дослідження рівняння (1) спочатку розглядають незбурене рівняння

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \lambda u, \quad (5)$$

яке одержується з (1), коли $\varepsilon = 0$, з тими ж крайовими умовами (2). Далі, припускаючи, що $(ak)^2 - \lambda > 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$, за допомогою методу Фур'є [3] знаходять розв'язок рівняння (5) у вигляді ряду

$$u(x, t, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t) \sin kx, \quad (6)$$

де $\omega_k = \sqrt{(ak)^2 - \lambda}$ – частоти нормальних коливань, A_k і B_k – сталі величини. Вважаючи, що у зв'язку з малим параметром ε форми коливань нормальних тонів при наявності збурення ($\varepsilon \neq 0$) з великою точністю визначаються тими ж власними функціями $\sin kx$, розв'язок збуреного рівняння (1) шукають у вигляді ряду Фур'є (4), де $z_k(t, \varepsilon)$ – функції, які потрібно визначити. Саме такі кроки дослідження пропонувалися у минулому столітті [5–10] при вивченні крайових 2π -періодичних по t задач для різних видів гіперболічних рівнянь та систем.

Постановка проблеми. У даній роботі запропонована нова постановка крайової 2π -періодичної по змінній x задачі для більш загального гіперболічного рівняння

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x, t) + \varepsilon F(x, t, u). \quad (7)$$

Спочатку розглядається крайова 2π -періодична по x задача для лінійного неоднорідного рівняння вигляду

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad x \in \mathbf{R}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

$$u(x, 0) = u(x, \pi) = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (9)$$

$$u(x + 2\pi, t) = u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbf{R} \times [0, T] \quad (10)$$

і досліджується, для якого класу функцій $f(x, t)$ існує розв'язок, що володіє властивістю $u(-x, t) = -u(x, t)$. Далі за допомогою оператора, що породжує даний розв'язок, показано, як можна будувати послідовні наближення розв'язку крайової 2π -періодичної по x задачі для квазілінійного рівняння

$$K_a = \{f : f(x, t) = f(x + \pi, t) = f(x, \pi - t) = f(x + 2\pi, t)\}.$$

$$K_a^- = \{f : f(x, t) = f(x + \pi, t) = f(x, \pi - t) = -f(-x, t) = f(x + 2\pi, t)\}.$$

Умови розв'язності лінійної задачі (8)–(10). Розглянемо функцію $u_a(x, t)$, визначену оператором P_a таким чином:

$$\begin{aligned} u_a(x, t) &= (P_a f)(x, t) = \\ &= (L_a f)(x, t) + (\tilde{L}_a f)(x, t); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} (L_a f)(x, t) &= \frac{1}{4a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\eta, \tau) d\eta + \\ &+ \frac{1}{4a} \int_t^\pi d\tau \int_{x+a(t-\tau)}^{x-a(t-\tau)} f(\eta, \tau) d\eta, \end{aligned} \quad (12)$$

$$(\tilde{L}_a f)(x, t) = -\frac{\pi-t}{4\pi a} \int_0^\pi d\tau \int_{x-a\tau}^{x+a\tau} f(\eta, \tau) d\eta -$$

$$(L_a f)(x, t) = \frac{1}{4a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\eta, \tau) d\eta + \frac{1}{4a} \int_t^\pi d\tau \int_{x+a(t-\tau)}^{x-a(t-\tau)} f(\eta, \tau) d\eta,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (L_a f)(x, t)}{\partial t} &= \frac{a}{4a} \int_0^t (f(x+a(t-\tau), \tau) + f(x-a(t-\tau), \tau)) d\tau + \\ &+ \frac{a}{4a} \int_t^\pi (-f(x-a(t-\tau), \tau) - f(x+a(t-\tau), \tau)) d\tau; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial (L_a f)(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{4a} \int_0^t (f(x+a(t-\tau), \tau) - f(x-a(t-\tau), \tau)) d\tau +$$

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \varepsilon F(x, t, u).$$

Для цього використовуються такі простори і класи функцій:

C – простір функцій двох змінних x і t , неперервних і обмежених на $\mathbf{R} \times [0, T]$;

$C^{2,2}$ – простір функцій $u \in C$ таких, що $D_t^k D_x^l u \in C$;

$G_{\mathbf{R}}^x$ – простір функцій двох змінних x і t , неперервних і обмежених на $\mathbf{R} \times [0, T]$ разом із похідною по x , $G_{\mathbf{R}}^x \subset C^{1,0}$;

$Q_{2\pi}^x$ – простір функцій $f(x, t)$, які задовольняють на $\mathbf{R} \times [0, T]$ співвідношення $f(x + 2\pi, t) = f(x, t)$;

$L(X, Y)$ – простір лінійних і обмежених відображень X в Y .

$$-\frac{t}{4\pi a} \int_0^\pi d\tau \int_{x-a(\pi-\tau)}^{x+a(\pi-\tau)} f(\eta, \tau) d\eta. \quad (13)$$

Справедливі твердження.

Лема 1. Якщо функція $f(x, t) \in G_{\mathbf{R}}^x \cap Q_{2\pi}^x$, то функція $u_{an}(x, t) = (L_a f)(x, t)$ є частинним класичним ($u_{an}(x, t) \in C^{2,2}$) розв'язком рівняння (8).

Доведення. Обчислимо від функції $u_{an}(x, t) = (L_a f)(x, t)$ частинні похідні до другого порядку включно. Враховуючи формулу (12), знаходимо

$$+ \frac{1}{4a} \int_t^\pi \left(f(x-a(t-\tau), \tau) - f(x+a(t-\tau), \tau) \right) d\tau.$$

Введемо позначення:

$$\alpha(x, t, \tau, a) = x + a(t - \tau),$$

$$\beta(x, t, \tau, a) = x - a(t - \tau).$$

Матимемо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (L_a f)(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{a}{4} \int_0^t \left(\frac{\partial f(\alpha, \tau)}{\partial \alpha} - \frac{\partial f(\beta, \tau)}{\partial \beta} \right) d\tau + \frac{1}{2} f(x, t) + \\ &+ \frac{a}{4} \int_t^\pi \left(\frac{\partial f(\beta, \tau)}{\partial \beta} - \frac{\partial f(\alpha, \tau)}{\partial \alpha} \right) d\tau + \frac{1}{2} f(x, t) = \\ &= f(x, t) + \frac{a}{4} \int_0^t \left(\frac{\partial f(\alpha, \tau)}{\partial \alpha} - \frac{\partial f(\beta, \tau)}{\partial \beta} \right) d\tau + \frac{a}{4} \int_t^\pi \left(\frac{\partial f(\beta, \tau)}{\partial \beta} - \frac{\partial f(\alpha, \tau)}{\partial \alpha} \right) d\tau; \\ \frac{\partial^2 (L_a f)(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{1}{4a} \int_0^t \left(\frac{\partial f(\alpha, \tau)}{\partial \alpha} - \frac{\partial f(\beta, \tau)}{\partial \beta} \right) d\tau + \frac{1}{4a} \int_t^\pi \left(\frac{\partial f(\beta, \tau)}{\partial \beta} - \frac{\partial f(\alpha, \tau)}{\partial \alpha} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Отже,

$$\frac{\partial^2 (L_a f)(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 (L_a f)(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t).$$

Лему 1 доведено.

Допоміжна лема. Нехай функція $K(x, t, \tau)$ визначена інтегралом

$$K(x, t, \tau) = \int_{x-b(t, \tau)}^{x+b(t, \tau)} f(\eta, \tau) d\eta. \quad (14)$$

Тоді для кожної 2π -періодичної по x функції $f(x, t) \in C \cap Q_{2\pi}^x$ функція $K(x, t, \tau)$ є також 2π -періодичною по x .

Доведення. Справді, на підставі формули (14) знаходимо

$$\begin{aligned} K(x+2\pi, t, \tau) &= \int_{x+2\pi-b(t, \tau)}^{x+2\pi+b(t, \tau)} f(\eta, \tau) d\eta = \\ &= \int_{x-b(t, \tau)}^{x+b(t, \tau)} f(\gamma+2\pi, \tau) d\gamma = \\ &= \int_{x-b(t, \tau)}^{x+b(t, \tau)} f(\gamma, \tau) d\gamma = K(x, t, \tau), \end{aligned}$$

а це означає, що функція $K(x, t, \tau)$ – 2π -періодична по x , якщо функція $f(x, t)$ – 2π -періодична по x .

Допоміжну лему доведено.

Теорема 1. Якщо функція $f(x, t) \in C \cap Q_{2\pi}^x$, то функція $u_a(x, t) = (P_a f)(x, t)$,

визначена формулою (11), задовольняє крайовим умовам (9) і умові періодичності (10).

Доведення. Справді, згідно з допоміжною лемою переконаємося у виконанні умови (10). Далі на підставі формул (11)–(13) перевіримо виконання умов (9):

$$\begin{aligned} u_a(x, 0) &= (P_a f)(x, 0) = \\ &= (L_a f)(x, 0) + (\tilde{L}_a f)(x, 0) = \\ &= \frac{1}{4a} \int_0^\pi d\tau \int_{x-a\tau}^{x+a\tau} f(\eta, \tau) d\eta - \\ &- \frac{1}{4a} \int_0^\pi d\tau \int_{x-a\tau}^{x+a\tau} f(\eta, \tau) d\eta \equiv 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}; \\ u_a(x, \pi) &= (P_a f)(x, \pi) = \\ &= (L_a f)(x, \pi) + (\tilde{L}_a f)(x, \pi) = \\ &= \frac{1}{4a} \int_0^\pi d\tau \int_{x-a(\pi-\tau)}^{x+a(\pi-\tau)} f(\eta, \tau) d\eta - \\ &- \frac{1}{4a} \int_0^\pi d\tau \int_{x-a(\pi-\tau)}^{x+a(\pi-\tau)} f(\eta, \tau) d\eta \equiv 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. Якщо функція $f(x, t) \in G_{\mathbf{R}}^x \cap Q_{2\pi}^x$ і виконується умова

$$\frac{\partial^2 (\tilde{L}_a f)(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad \forall (x, t) \in \mathbf{R} \times [0, T], \quad (15)$$

то функція $u_a(x, t) = (P_a f)(x, t)$ є частинним класичним ($u_a(x, t) \in C^{2,2}$) розв'язком крайової 2π -періодичної по x задачі (8)–(10).

Доведення. Згідно з теоремою 1 функція $u_a(x, t) = (P_a f)(x, t)$ задовольняє умовам (9)–(10). Враховуючи твердження леми 1 і умови теореми 2, доведемо, що функція $u_a(x, t) = (P_a f)(x, t)$ задовольняє рівнянню (8). Справді, обчислюючи частинні похідні функції $u_a(x, t)$, маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial (P_a f)(x, t)}{\partial t} &= (L_a f)'_t(x, t) + (\tilde{L}_a f)'_t(x, t); \\ \frac{\partial^2 (P_a f)(x, t)}{\partial t^2} &= (L_a f)''_{tt}(x, t) + (\tilde{L}_a f)''_{tt}(x, t) = \\ &= (L_a f)''_{tt}(x, t). \end{aligned} \quad (16)$$

При знаходженні другої частинної похідної $(P_a f)''_{tt}(x, t)$ функції $(P_a f)(x, t)$ враховано той факт, що функція $(\tilde{L}_a f)(x, t)$ лінійно залежна від аргументу t , тому друга частинна похідна $(\tilde{L}_a f)''_{tt}(x, t)$ тотожно дорівнює нулеві, тобто

$$\frac{\partial^2 (\tilde{L}_a f)(x, t)}{\partial t^2} \equiv 0. \quad (17)$$

Беручи до уваги виконання умови (15) теореми 2, знаходимо наступні похідні:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (P_a f)(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial (L_a f)(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial (\tilde{L}_a f)(x, t)}{\partial x}; \\ \frac{\partial^2 (P_a f)(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 (L_a f)(x, t)}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Отже, враховуючи формули (16) і (18), одержимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (P_a f)(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 (P_a f)(x, t)}{\partial x^2} &= \\ = \frac{\partial^2 (L_a f)(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 (L_a f)(x, t)}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

На основі твердження леми 1 отримуємо

$$\frac{\partial^2 (P_a f)(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 (P_a f)(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t),$$

а це означає, що функція $u_a(x, t) = (P_a f)(x, t)$ є класичним розв'язком 2π -періодичної по x задачі (8)–(10), а функція $z_a(x, t) = (\tilde{L}_a f)(x, t)$ при виконанні умов (15), (17) є розв'язком однорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

Теорему 2 доведено.

Зауваження. Для остаточного з'ясування умов розв'язності задачі (8)–(10) залишається встановити клас функцій $f(x, t)$, для якого виконується умова (15).

Функцію $z_a(x, t) = (\tilde{L}_a f)(x, t)$ запишемо так:

$$(\tilde{L}_a f)(x, t) = -\frac{\pi - t}{4a\pi} \gamma(x) - \frac{t}{4a\pi} \delta(x), \quad (19)$$

де

$$\gamma(x) = \int_0^\pi d\tau \int_{x-a\tau}^{x+a\tau} f(\eta, \tau) d\eta; \quad (20)$$

$$\delta(x) = \int_0^\pi d\tau \int_{x-a(\pi-\tau)}^{x+a(\pi-\tau)} f(\eta, \tau) d\eta. \quad (21)$$

Знайдемо похідну функції $\gamma(x)$. На основі формули (20) одержуємо

$$\begin{aligned} \gamma'(x) &= \int_0^\pi (f(x+a\tau, \tau) - f(x-a\tau, \tau)) d\tau = \\ &= \int_0^\pi f(x+a\tau, \tau) d\tau - \int_0^\pi f(x-a\tau, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (22)$$

У другому інтегралі рівності (22) зробимо заміну змінної $\tau = \pi - \theta$, $d\tau = -d\theta$, $\pi \leq \theta \leq 0$. Тоді рівність (22) запишеться так:

$$\begin{aligned} \gamma'(x) &= \int_0^\pi f(x+a\tau, \tau) d\tau - \\ &- \int_0^\pi f(x+a\theta - a\pi, \pi - \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (23)$$

Рівність

$$\gamma'(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad (24)$$

виконується тоді і тільки тоді, коли рівність (23) дорівнює нулеві. Це можливо, коли

$$a = 2k - 1, \quad k \in \mathbf{N} \quad (25)$$

і у класі функцій

$$K_a = \{f : f(x, t) = f(x + \pi, t) = f(x, \pi - t) = f(x + 2\pi, t)\}. \quad (26)$$

Якщо виконуються умови (25) і (26), то на основі рівності (23) отримуємо

$$\gamma'(x) = \int_0^\pi f(x + a\tau, \tau) d\tau - \int_0^\pi f(x + a\theta, \theta) d\theta \equiv 0, \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad (27)$$

і

$$\gamma(x) = const \equiv A, \quad \forall x \in \mathbf{R}. \quad (28)$$

Аналогічно знаходимо похідну

$$\begin{aligned} \delta'(x) &= \int_0^\pi (f(x + a(\pi - \tau), \tau) - f(x - a(\pi - \tau), \tau)) d\tau = \\ &= \int_0^\pi f(x + a(\pi - \tau), \tau) d\tau - \int_0^\pi f(x - a(\pi - \tau), \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (29)$$

У другому інтегралі рівності (29) проведемо заміну змінної $\tau = \pi - \theta$. При виконанні умов (25) і (26) маємо

$$\begin{aligned} \delta'(x) &= \int_0^\pi f(x + a(\pi - \tau), \tau) d\tau - \int_0^\pi f(x - a\theta, \pi - \theta) d\theta = \\ &= \int_0^\pi f(x + a(\pi - \tau), \tau) d\tau - \int_0^\pi f(x + a(\pi - \theta) - a\pi, \pi - \theta) d\theta = \\ &= \int_0^\pi f(x + a(\pi - \tau), \tau) d\tau - \int_0^\pi f(x + a(\pi - \theta) - (2k - 1)\pi, \pi - \theta) d\theta = \\ &= \int_0^\pi f(x + a(\pi - \tau), \tau) d\tau - \int_0^\pi f(x + a(\pi - \theta) + \pi, \pi - \theta) d\theta = \\ &= \int_0^\pi f(x + a(\pi - \tau), \tau) d\tau - \int_0^\pi f(x + a(\pi - \theta), \theta) d\theta \equiv 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\delta(x) = const \equiv B, \quad \forall x \in \mathbf{R}. \quad (30)$$

Тепер на підставі доведених рівностей (28), (30) і рівності (19) одержуємо

$$(\tilde{L}_a f)(x, t) = -\frac{\pi - t}{4a\pi} A - \frac{t}{4a\pi} B. \quad (31)$$

Справедливе твердження.

Теорема 3. Якщо функція $f(x, t) \in G_{\mathbf{R}}^x \cap K_a$, то функція

$$\begin{aligned} u_a(x, t) &= (P_a f)(x, t) \equiv \\ &\equiv (L_a f)(x, t) - \frac{\pi - t}{4a\pi} A - \frac{t}{4a\pi} B, \end{aligned}$$

де

$$K_a^- = \{f : f(x, t) = f(x + \pi, t) = f(x, \pi - t) = -f(-x, t) = f(x + 2\pi, t)\}, \quad (32)$$

то справедливі твердження.

Теорема 4. Якщо функція $f(x, t) \in G_{\mathbf{R}}^x \cap K_a^-$, то функція $u_a(x, t) = (P_a^- f)(x, t) \equiv (L_a f)(x, t)$ є при $a = 2k - 1$,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi d\tau \int_{x-a\tau}^{x+a\tau} f(\eta, \tau) d\eta \equiv const; \\ B &= \int_0^\pi d\tau \int_{x-a(\pi-\tau)}^{x+a(\pi-\tau)} f(\eta, \tau) d\eta \equiv const \end{aligned}$$

при $a = 2k - 1, k \in \mathbf{N}$, є частинним класичним $(u_a(x, t) \in C^{2,2})$ розв'язком крайової 2π -періодичної по x задачі (8)–(10).

Доведення базується на тому факті, що функція $(\tilde{L}_a f)(x, t) = -\frac{\pi - t}{4a\pi} A - \frac{t}{4a\pi} B$ задовольняє умові (15) теореми 2 і є розв'язком однорідного рівняння $u_{tt}^o - a^2 u_{xx}^o = 0$. Якщо розглянемо клас функцій

$k \in \mathbf{N}$ розв'язком крайової 2π -періодичної по x задачі (8)–(10).

Доведення. Справді, так як $f(x, t) \in K_a^-$, на основі формул (20) і (21) маємо

$$A = \gamma(0) = 0, \quad B = \delta(0) = 0.$$

Звідси випливає, що $(\tilde{L}_a f)(x, t) \equiv 0$, $\forall (x, t) \in \mathbf{R} \times [0, T]$, а отже $u_a(x, t)(x, t) = (P_a^- f)(x, t) \equiv (L_a f)(x, t)$ є розв'язком крайової 2π -періодичної по x задачі (8)–(10).

Теорему 4 доведено.

Теорема 5. Якщо функція $f(x, t) \in G_{\mathbf{R}}^x \cap K_a^-$, то функція $u_a(x, t) = (P_a^- f)(x, t) \equiv (L_a f)(x, t)$ задовольняє і крайовим умовам

$$(P_a^- f)(0, t) = (P_a^- f)(\pi, t) = 0,$$

тобто $(L_a f)(0, t) = (L_a f)(\pi, t) = 0$.

Доведення. На основі формули (12) отримуємо

$$\begin{aligned} (L_a f)(0, t) &= \frac{1}{4a} \int_0^t d\tau \int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} f(\eta, \tau) d\eta + \frac{1}{4a} \int_t^\pi d\tau \int_{a(t-\tau)}^{-a(t-\tau)} f(\eta, \tau) d\eta = 0; \\ (L_a f)(\pi, t) &= \frac{1}{4a} \int_0^t d\tau \int_{\pi-a(t-\tau)}^{\pi+a(t-\tau)} f(\eta, \tau) d\eta + \frac{1}{4a} \int_t^\pi d\tau \int_{\pi+a(t-\tau)}^{\pi-a(t-\tau)} f(\eta, \tau) d\eta = \\ &= \frac{1}{4a} \int_0^t d\tau \int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} f(\pi + \gamma, \tau) d\gamma + \frac{1}{4a} \int_t^\pi d\tau \int_{a(t-\tau)}^{-a(t-\tau)} f(\pi + \gamma, \tau) d\gamma = \\ &= \frac{1}{4a} \int_0^t d\tau \int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} f(\gamma, \tau) d\gamma + \frac{1}{4a} \int_t^\pi d\tau \int_{a(t-\tau)}^{-a(t-\tau)} f(\gamma, \tau) d\gamma = 0. \end{aligned}$$

Теорему 5 доведено.

Доведемо ще одну властивість функції

$$(P_a^- f)(x, t) = (L_a f)(x, t)$$

$$(P_a^- f)(-x, t) = -(P_a^- f)(x, t). \quad (33)$$

З формули (12) одержуємо

$$\begin{aligned} (P_a^- f)(-x, t) &= (L_a f)(-x, t) = \frac{1}{4a} \int_0^t d\tau \int_{-x-a(t-\tau)}^{-x+a(t-\tau)} f(\eta, \tau) d\eta + \frac{1}{4a} \int_t^\pi d\tau \int_{-x+a(t-\tau)}^{-x-a(t-\tau)} f(\eta, \tau) d\eta = \\ &= -\frac{1}{4a} \int_0^t d\tau \int_{x+a(t-\tau)}^{x-a(t-\tau)} f(-\gamma, \tau) d\gamma - \frac{1}{4a} \int_t^\pi d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(-\gamma, \tau) d\gamma = \\ &= -\frac{1}{4a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\gamma, \tau) d\gamma - \frac{1}{4a} \int_t^\pi d\tau \int_{x+a(t-\tau)}^{x-a(t-\tau)} f(\gamma, \tau) d\gamma = \\ &= -\left(\frac{1}{4a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\gamma, \tau) d\gamma + \frac{1}{4a} \int_t^\pi d\tau \int_{x+a(t-\tau)}^{x-a(t-\tau)} f(\gamma, \tau) d\gamma \right) = -(P_a^- f)(x, t). \end{aligned}$$

Отже, при $f(x, t) \in K_a^-$ функція $u_a^-(x, t)(x, t) = (P_a^- f)(x, t)$ є непарною по x , тобто виконується умова (33).

Властивість (33) доведено.

Тепер можна, використовуючи теорему Стеклова [3, с.115], сформулювати твердження про розклад функції (непарної) у ряд Фур'є.

Теорема 6. Якщо функція $f(x, t) \in G_{\mathbf{R}}^x \cap K_a^-$, то розв'язок крайової 2π -періодичної по x задачі (8)–(10) $u_a(x, t)(x, t) = (P_a^- f)(x, t) = (L_a f)(x, t)$ розкладається у тригонометричний ряд Фур'є вигляду (4)

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t, 0) \sin kx. \quad (34)$$

Таким чином, ми знайшли клас функцій K_a^- , який дозволяє вирішити проблему іс-

нування і розкладу розв'язку крайової лінійної 2π -періодичної по x задачі (8)–(10) у ряд Фур'є.

Побудова наближеного розв'язку квазілінійної крайової 2π -періодичної по x задачі. Розглянемо крайову 2π -періодичну по x задачу

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \varepsilon F(x, t, u), \quad (35)$$

$$u(x, 0) = u(\pi, t) = 0, \quad (36)$$

$$u(x + 2\pi, t) = u(x, t), \quad (37)$$

при такому припущенні: для кожної функції $u(x, t) \in K_a^-$ скалярна функція $F(x, t, u(x, t))$ правої частини рівняння (35) задовольняє умові $F(x, t, u(x, t)) \in K_a^-$.

Щоб вказане припущення виконувалося, нам потрібно довести дві властивості оператора :

- 1) $(L_a f)(\pi + x, t) = (L_a f)(x, t)$;
- 2) $(L_a f)(x, \pi - t) = (L_a f)(x, t)$.

Доведемо першу властивість. Використовуючи формулу (12), одержуємо

$$\begin{aligned} (L_a f)(\pi + x, t) &= \frac{1}{4a} \int_0^t d\tau \int_{\pi+x-a(t-\tau)}^{\pi+x+a(t-\tau)} f(\eta, \tau) d\eta + \\ &+ \frac{1}{4a} \int_t^\pi d\tau \int_{\pi+x+a(t-\tau)}^{\pi+x-a(t-\tau)} f(\eta, \tau) d\eta = \\ &= \frac{1}{4a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\pi + \gamma, \tau) d\gamma + \\ &+ \frac{1}{4a} \int_t^\pi d\tau \int_{x+a(t-\tau)}^{x-a(t-\tau)} f(\pi + \gamma, \tau) d\gamma = (L_a f)(x, t). \end{aligned}$$

Властивість 1) доведена.

На основі цієї ж формули (12) доведемо другу властивість. Маємо

$$\begin{aligned} (L_a f)(x, \pi - t) &= \frac{1}{4a} \int_0^{\pi-t} d\tau \int_{x-a(\pi-t-\tau)}^{x+a(\pi-t-\tau)} f(\eta, \tau) d\eta + \\ &+ \frac{1}{4a} \int_{\pi-t}^\pi d\tau \int_{x+a(\pi-t-\tau)}^{x-a(\pi-t-\tau)} f(\eta, \tau) d\eta. \end{aligned}$$

Зробимо у даній рівності заміну змінної $\tau = \pi - \theta$. Отримаємо

$$\begin{aligned} (L_a f)(x, \pi - t) &= -\frac{1}{4a} \int_\pi^t d\theta \int_{x-a(t-\theta)}^{x+a(t-\theta)} f(\eta, \pi - \theta) d\eta - \\ &- \frac{1}{4a} \int_t^0 d\theta \int_{x+a(t-\theta)}^{x-a(t-\theta)} f(\eta, \pi - \theta) d\eta = \\ &= \frac{1}{4a} \int_0^t d\theta \int_{x-a(t-\theta)}^{x+a(t-\theta)} f(\eta, \theta) d\eta + \\ &+ \frac{1}{4a} \int_t^\pi d\theta \int_{x+a(t-\theta)}^{x-a(t-\theta)} f(\eta, \theta) d\eta = (L_a f)(x, t). \end{aligned}$$

Отже, якщо функція $f(x, t) \in K_a^-$, то $(L_a f)(x, t) \in K_a^-$.

Тоді вибираємо довільну функцію $f(x, t) \in K_a^-$ і за нульове наближення приймаємо функцію

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= (L_a f)(x, t) \in K_a^-, \\ u_1(x, t) &= \varepsilon (L_a F[u_0])(x, t), \\ u_2(x, t) &= \varepsilon (L_a F[u_1])(x, t), \\ u_3(x, t) &= \varepsilon (L_a F[u_2])(x, t), \end{aligned}$$

$$\dots\dots\dots u_n(x, t) = \varepsilon (L_a F[u_{n-1}])(x, t), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

де $F[u_{n-1}] = F(x, t, u_{n-1}(x, t))$, $n \in \mathbb{N}$.

Зауважимо, що всі наближення $u_n(x, t) \in K_a^-$ на основі властивості оператора L_a .

Висновки. 1. Досліджено крайову 2π -періодичну задачу для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку, ліва частина якого оператор Даламбера $\partial^2/\partial t^2 - a^2 \partial^2/\partial x^2$.

2. Встановлено клас функцій двох змінних $f(x, t)$, для яких існує частинний класичний розв'язок вказаної задачі.

3. Виділено підклас знайденого класу, у якому класичний розв'язок крайової 2π -періодичної по x задачі для неоднорідного гіперболічного рівняння є непарною функцією.

4. Запропоновано схему побудови послідовних наближень розв'язку квазілінійної крайової 2π -періодичної по x задачі.

Література

1. Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И. Асимптотические методы решения уравнений в частных производных. Киев: Вища шк., 1976. 590 с.
2. Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громьяк М. И. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. Киев: Наук. думка, 1991. 232 с.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1977. 735 с.
4. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры изд-ва «Наука», 1960. Т. II. 462 с.
5. Артемьев Н. А. Периодические решения одного класса уравнений в частных производных. *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1937. № 1. С. 15–50.
6. Чернятин В. А. К проблеме существования решений смешанной задачи для одномерного волнового уравнения. *Вестн. Моск. ун-та, Сер. I, Математика и механика.* 1987. № 6. С. 7–16.
7. Полищук В. Н., Пташник Б. И. Периодическая краевая задача для линейных гиперболических уравнений и систем. Львов, 1982. 60 с.
8. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев: Наук. думка, 1984. 264 с.
9. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. Київ: Наук. думка, 2002. 416 с.
10. Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г. Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку. *І. Укр. мат. журн.* 2005. Т. 57, № 7. С. 912–921.

References

1. Mitropolskiy, Yu. A. & Moseenkov, B. I. (1976). Asymptotic methods for solving partial differential equations. Kiev: Vyshcha shkola.
2. Mitropolskiy, Yu. A., Khoma, G. P. & Gromyak, M. I. (1991). Asymptotic methods for the study of quasi-wave equations of hyperbolic type. Kiev: Nauk. dumka.
3. Tikhonov, A. N. & Samarskiy, A. A. (1977). Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka.
4. Fikhtengolts, G. M. (1960). Fundamentals of mathematical analysis. Moscow: Gosudarstvennoe izdatelstvo fiziko-matematicheskoy literatury izdatelstva "Nauka". Vol. II.
5. Artemev, N. A. (1937). Periodic solutions of a class of partial differential equations. *Izv. AN SSSR. Ser. mat.*, No. 1, pp. 15–50.
6. Chernyatin, V. A. (1987). On the problem of the existence of solutions of a mixed problem for a one-dimensional wave equation. *Vestn. Mosk. un-ta, Ser. 1, Matematika i mekhanika*, No 6, pp. 7–16.
7. Polishchuk, V. N. & Ptashnik, B. I. (1982). A periodic boundary value problem for linear hyperbolic equations and systems. Lvov.
8. Ptashnik, B. I. (1984). Incorrect boundary value problems for partial differential equations. Kiev: Nauk. dumka.
9. Ptashnyk, B. Y., Ilkiv, V. S., Kmit, I. Ya. & Polishchuk, V. M. (2002). Nelokalni kraiovi zadachi dlia rivnian iz chastynnymy pokhidnymy. Kiyv: Naukova dumka.
10. Mytropolskiy, Yu. O. & Khoma-Mohylska, S. H. (2005). Umovy isnuvannia rozv'язkiv kraiovoi periodychnoi zadachi dlia neodnorodnoho liniinoho hiperbolichnoho rivniannia drugoho poriadku. *I. Ukr. mat. zhurn.*, Vol. 57, No. 7, pp. 912–921.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-13

МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ «НАПІВНЕСКІНЧЕННОГО» СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ СЛАБКОСТИСЛИВОГО МАТЕРІАЛУ НА ОСНОВІ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ

С. В. Чопоров, Н. І.-В. Манько, О. Г. Спиця, С. М. Гребенюк

Запорізький національний університет
gsm1212@ukr.net

Ключові слова:

напівнескінченний скінченний елемент, метод скінченних елементів, моментна схема, деформації, переміщення, функція зміни об'єму, функції форми.

Розглядається проблема математичного моделювання нескінченних та напівнескінченних областей у механіці деформівного твердого тіла. Описується застосування методу скінченних елементів до розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла. Наведено методику побудови глобальної матриці жорсткості з використанням як традиційних скінченних елементів, які використовуються в областях завдання навантажень та переміщень і де шукана функція швидко змінюється, так і нескінченних скінченних елементів. Для моделювання нескінченності в одному з напрямів запропоновано напівнескінченний скінченний елемент. Проблема полягає у тому, щоб за допомогою скінченного елемента із вузлами, які мають скінченні координати, змоделювати нескінченність. Для апроксимації координат у нескінченному напрямі використано спеціальні функції форми, які у вузлах, що моделюють нескінченність, прагнуть до нескінченності. Традиційна схема скінченного елемента має низку недоліків. Неврахування переміщень скінченного елемента як абсолютно жорсткого цілого. Наявність ефекту «хибного» зсуву. При розрахунку тіл із слабкостисливих матеріалів не враховується слабкостисливість. Це призводить до значних обчислювальних похибок при розрахунках конструкцій. Для усунення вказаних недоліків застосовано моментну схему скінченного елемента для слабкостисливих матеріалів. Вона полягає у потрійній апроксимації функцій напружено-деформованого стану. В ряд розкладаються компоненти вектора переміщень і тензора деформацій та функція зміни об'єму. Згідно з моментною схемою у розкладанні компонентів тензора деформацій та функції зміни об'єму виключається низка доданків. З врахуванням вказаних апроксимацій на основі варіаційного принципу Лагранжа отримані основні співвідношення матриці жорсткості «напівнескінченного» скінченного елемента у вигляді шестигранника.

STIFFNESS MATRIX OF A “SEMI-INFINITE” FINITE ELEMENT FOR A WEAKLY COMPRESSIBLE MATERIAL BASED ON THE MOMENT SCHEME

S. V. Choporov, N. I.-V. Manko, O. G. Spytzia, S. M. Grebenyuk

Zaporizhzhia National University
gsm1212@ukr.net

Key words:

semi-infinite element, finite element method, momentum scheme, strains, displacements, function of volume change, shape function.

The problem of bounded and unbounded domains modelling in mechanics is described in the article. Applying the finite element method to mechanics is also described. Both finite and infinite elements are employed at the method of a global stiffness matrix calculation. Finite elements are applied to regions where loads or displacements are defined and big gradients of unknown function are present. A semi-infinite element is developed to model infinity in one direction. The key idea here is to represent infinity by coordinates of a finite element. Special shape functions are approach to infinity at nodes modelled infinity. These functions approxi-

mate the coordinates at the unbounded direction. The traditional finite element scheme has several disadvantages. This leads to significant computational errors in the design calculations. The method of moment scheme of finite elements is used to improve accuracy of modelling. This method allows to represent displacements of an absolutely rigid element nodes, to find "wrong" shears, to model low compressibility materials. The moment scheme applies triple approximation of the stress strain state. Functions of a volume changing, components of a strains tensor, and a displacements vector are represented by series. Additional terms are included to the series. Stiffness matrix of an infinite hexahedral element is calculated using Variational Principle and Lagrange's Equations.

На практиці досить часто виникають задачі механіки, коли силова дія на тіло або взаємодія декількох тіл має локальний характер, а значна частина об'єкта не випробує впливу навантажень. Такі задачі моделюють рух автомобіля по дорозі, рух вагонних пар по залізничних рейках, роботу конвеєрних механізмів, транспортних стрічок, процедуру штамповки тощо. У вказаних задачах області, що розглядаються, мають один із розмірів набагато більший ніж два інші, і тому при моделюванні цей факт враховується або представленням цього розміру дуже значною величиною, або нескінченністю. Більшість таких задач неможливо розв'язати аналітичними методами, зважаючи на громіздкий математичний опис математичної моделі. Тому розв'язання таких задач здійснюється чисельними методами, які зазвичай потребують переходу від неперервного до дискретного представлення області, наприклад, у методі скінченних елементів (МСЕ). Побудова традиційної дискретної моделі нескінченної області приводить до необхідності розв'язання задачі нескінченної розмірності, що викликає низку обчислювальних та математичних складнощів. Тому на практиці чинять так. Розбивають нескінченну область скінченною кількістю дискретних вузлів і потім поступово збільшують їх кількість, допоки це не перестане значно впливати на чисельний розв'язок задачі. Але такий підхід потребує багатократного розв'язання задачі. Альтернативний підхід полягає у застосуванні «нескінченних» та «напівнескінченних» скінченних елементів (СЕ), які моделюють нескінченну частину області.

При використанні в методі скінченних елементів традиційних апроксимуючих функцій для визначення напружено-деформованого стану просторових конструкцій

проявляються такі негативні явища, як неврахування переміщень скінченного елемента як абсолютно жорсткого цілого і так званий ефект «хибного зсуву». Перше явище проявляється в уповільненій збіжності чисельних результатів, якщо прийнятий варіант апроксимації переміщень не дозволяє точно описати зміщення СЕ як жорсткого цілого. Друге явище проявляється в тому, що при згині тонких пластин та оболонок за допомогою просторових скінченних елементів значно зростають похибки, пов'язані з появою фіктивних зсувних деформацій. Крім того, при розрахунку слабкостисливих матеріалів, коли коефіцієнт Пуассона прагне до 0,5, традиційна схема скінченного елемента дає значні похибки при розв'язанні задач механіки.

Для усунення цих негативних явищ було розроблено так звану моментну схему скінченного елемента (МССЕ) для слабкостисливих матеріалів [1]. Основна ідея цієї схеми така: компоненти поля переміщень розкладаються в ряд в околі початку координат, і утримується деяка кількість початкових доданків, аналогічно розкладаються в ряд компоненти тензора деформацій. Після цього перевіряється відповідність останнього розкладання розкладанню переміщень, і якщо в це розкладання входять доданки, відсутні в розкладанні переміщень, то відповідні доданки видаляються з розкладання. Перетворені в такий спосіб розкладання використовуються при отриманні матриці жорсткості скінченного елемента. Так само чинять з розкладанням функції зміни об'єму, де згідно з певними правилами теж утримують деякі кількість доданків.

Дослідження нескінченних областей за допомогою МСЕ викладено здебільшого в

одновимірній та двовимірній постановках. У монографії [2] описано застосування напівнескінченного скінченного елемента при розв'язанні статичних задач механіки у двовимірній постановці. Чисельне моделювання розповсюдження хвиль з використанням ANSYS у одновимірному та двовимірному випадку за допомогою нескінченних скінченних елементів висвітлено у статті [3]. У роботі [4] нескінченні елементи було застосовано до дослідження попередньо напружених нескінченних середовищ у підземних виробках. Розв'язання статичних задач для необмежених областей за допомогою нескінченних елементів представлено у статті [5]. Модифікацію нескінченного скінченного елемента для підвищення точності обчислень шляхом збільшення кількості вузлів у необмеженому напрямку та вибору апроксимуючих функцій, що мають вид, подібний до виду очікуваного розв'язку, запропоновано у [6].

Найбільш поширеним скінченим елементом, який отримуються при дискретному представленні просторових об'єктів, є шестигранний скінченний елемент із восьми вузловими точками. Для гарного узгодження скінченних елементів при об'єд-

нанні нескінченну область апроксимувати-мо теж шестигранним скінченим елементом, вузли однієї із граней якого знаходяться на нескінченності.

Для отримання основних співвідношень матриці жорсткості введемо дві системи координат: глобальну декартову ($O'z'_1z'_2z'_3$) і місцеву ($Ox_1x_2x_3$), пов'язану із скінченим елементом. У глобальній системі координат задаватимемо геометрію конструкції, зокрема нескінченну її частину, умови закріплення та прикладене навантаження. У місцевій системі координат «напівнескінченний» скінченний елемент відобразиться в елемент у вигляді куба з довжиною ребра, що дорівнює 2 (рис. 1). Помістимо початок місцевої системи координат у центр куба, а напрями осей виберемо такими, що збігаються з напрями ребер куба. Вузли 5*, 6*, 7*, 8* відобразяться у декартовій системі координат у вузли з нескінченною координатою по третьому напрямку. Операції нескінченними величинами при виконанні обчислювальних операцій є незручною процедурою і потребує розробки додаткових алгоритмів при реалізації. Тому для зручності апроксимації у третьому напрямку введемо додаткові вузли 5, 6, 7, 8.

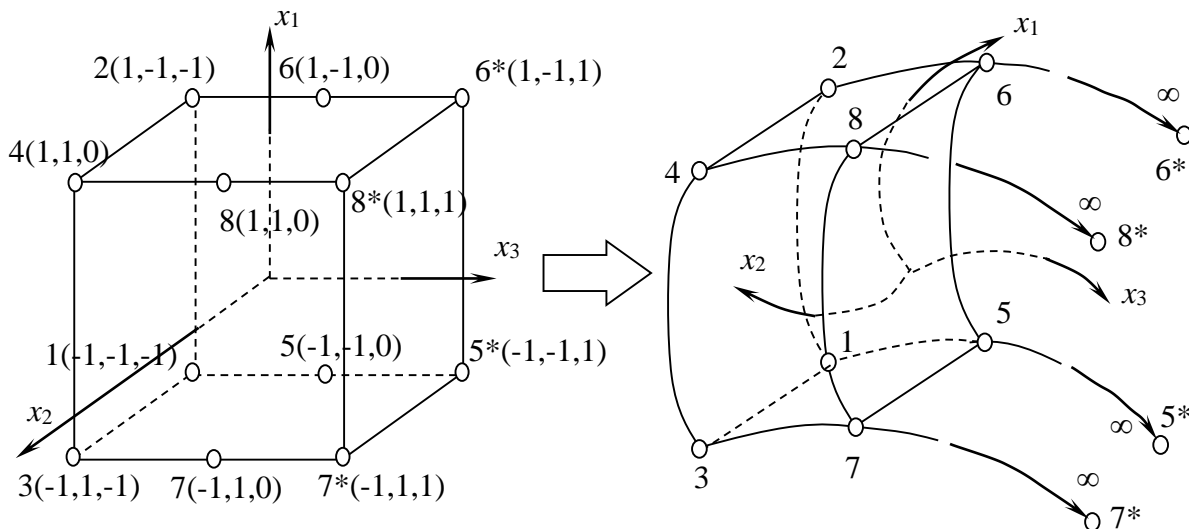


Рис. 1. «Напівнескінченний» скінченний елемент

Як невідомі у методі скінченних елементів приймемо компоненти вектора переміщень. Для побудови матриці жорсткості скористаємося варіаційним принципом Лагранжа. Потенціальну енергію середовища Π можна визначити так:

$$\Pi = W - A,$$

де W – енергія пружної деформації середовища, A – робота зовнішніх сил, що діють на середовище.

Запишемо варіацію потенціальної енергії середовища з урахуванням дискрети-

зації на скінченні елементи скінченних розмірів та напівнескінченні скінченні елементи:

$$\delta\Pi = \sum_{i=1}^m \delta W_i^{fin} + \sum_{i=m+1}^n \delta W_i^{inf} + \delta A, \quad (1)$$

де δW_i^{fin} – варіація пружної деформації i -го скінченного елемента скінченних розмірів, δW_i^{inf} – варіація пружної деформації i -го напівнескінченного скінченного елемента.

Щоб побудувати матрицю жорсткості напівнескінченного скінченного елемента,

$$\delta W = \iiint_V (2\mu g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} + \lambda \theta g^{ij}) \delta \varepsilon_{ij} dV,$$

або

$$\delta W = \iiint_V (2\mu g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} + \lambda \theta g^{ij} \delta \theta) dV, \quad (3)$$

де g^{ij} – компоненти метричного тензора, μ, λ – сталі Ляме, ε_{ij} – компоненти вектора деформацій, θ – функція зміни об'єму.

В матричному вигляді матимемо

$$\delta W = \iiint_V (2\mu g^{ik} g^{jl} \{\varepsilon\} \delta \{\varepsilon\} + \lambda \{\theta\} g^{ij} \delta \{\theta\}) dV, \quad (4)$$

де $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{33}\}$ – вектор деформацій, $\{\theta\} = \theta$ – функція зміни об'єму.

Згідно з моментною схемою скінченного елемента компоненти тензора деформацій, вектора переміщень та функція зміни

об'єму розкладаються в ряд за степеневими функціями:

$$\begin{aligned} u_{k'} &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_{k'}^{(pqr)} \psi^{(pqr)} = \\ &= \omega_{k'}^{(000)} + \omega_{k'}^{(100)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(010)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(001)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(110)} + \\ &+ \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(101)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(011)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(111)}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 e_{ij}^{(pqr)} \psi^{(pqr)} = \\ &= e_{ij}^{(000)} + e_{ij}^{(100)} \psi^{(100)} + e_{ij}^{(010)} \psi^{(010)} + e_{ij}^{(001)} \psi^{(001)} + e_{ij}^{(110)} \psi^{(110)} + \\ &+ e_{ij}^{(101)} \psi^{(101)} + e_{ij}^{(011)} \psi^{(011)} + e_{ij}^{(111)} \psi^{(111)}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \theta &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \xi^{(pqr)} \psi^{(pqr)} = \\ &= \xi^{(000)} + \xi^{(100)} \psi^{(100)} + \xi^{(010)} \psi^{(010)} + \xi^{(001)} \psi^{(001)} + \xi^{(110)} \psi^{(110)} + \\ &+ \xi^{(101)} \psi^{(101)} + \xi^{(011)} \psi^{(011)} + \xi^{(111)} \psi^{(111)}, \end{aligned} \quad (7)$$

розглянемо окремо варіацію енергії пружної деформації напівнескінченного скінченного елемента δW_i^{inf} , що займає об'єм V (надалі позначимо δW_i^{inf} як W):

$$\delta W = \iiint_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (2)$$

або, скориставшись зв'язком між компонентами тензорів деформацій ε_{ij} та напружень σ^{ij} у вигляді закону Гука, матимемо

де $\omega_{k'}^{(pqr)}$ – коефіцієнти розкладання компонентів вектора переміщень у k' -ому напрямі глобальної системи координат, $e_{ij}^{(pqr)}$ – коефіцієнти розкладання компонентів тензора деформацій, $\xi^{(pqr)}$ – коефіцієнти розкладання функції зміни об'єму, $\psi^{(pqr)}$ – набір степеневих координатних функцій вигляду:

$$\psi^{(pqr)} = \frac{(x_1)^p (x_2)^q (x_3)^r}{p! q! r!}, \quad (8)$$

де p, q, r – степені апроксимуючого полінома за відповідними координатними напрямками.

При диференціюванні матимемо:

$$\partial^{(\alpha+\beta+\gamma)} = \psi^{(p-\alpha q-\beta r-\gamma)}. \quad (9)$$

Враховуючи формули (5), (9), отримуємо вираз для похідних функції переміщень всередині скінченного елемента:

$$\begin{aligned} u_{k',1} &= \omega_{k'}^{(100)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(010)} + \\ &+ \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(011)}; \\ u_{k',2} &= \omega_{k'}^{(010)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(100)} + \\ &+ \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(101)}; \\ u_{k',3} &= \omega_{k'}^{(001)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(100)} + \\ &+ \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(110)}. \quad (10) \end{aligned}$$

Згідно зі співвідношенням Коші маємо:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z_{m'}}{\partial x_j} u_{m',i} + \frac{\partial z_{m'}}{\partial x_i} u_{m',j} \right), \quad (11)$$

де $z_{m'}$ – координати базисної системи, які визначаються всередині скінченного елемента через функції форми. Враховуючи, що деякі вузли скінченного елемента мають нескінченні координати, визначатимемо координати тільки через вузли, що мають скінченні координати, тобто 1-8. А для моделювання нескінченності використовуватимемо спеціальні апроксимуючі функції за третім напрямом. Тоді матимемо:

$$z_{m'} = \sum_{L=1}^8 N_L(x_1, x_2, x_3) z_{m'}^L, \quad (12)$$

де $z_{m'}^L$ – m' -а координата L -ого вузла в базисній системі координат (рис. 1), $m' = 1, 2, 3$; $L = 1, \dots, 8$; $N_L(x_1, x_2, x_3)$ –

функції форми L -ого вузла, які визначаються для скінченного елемента формулами вигляду:

для вузлів 1-4:

$$\begin{aligned} N_L(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= -\frac{1}{4} (1 + x_1 x_1^L) (1 + x_2 x_2^L) \frac{2x_3}{1 - x_3}, \end{aligned}$$

для вузлів 5-8:

$$\begin{aligned} N_L(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \frac{1}{4} (1 + x_1 x_1^L) (1 + x_2 x_2^L) \left(1 + \frac{2x_3}{1 - x_3} \right), \end{aligned}$$

де x_i^L – i -а координата L -ого вузла в системі координат скінченного елемента; $i = 1, 2, 3$; $L = 1, \dots, 8$.

Функції форми $N_L(x_1, x_2, x_3)$ для кожного вузла скінченного елемента набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} N_1(x_1, x_2, x_3) &= -\frac{1}{4} (1 - x_1) (1 - x_2) \frac{2x_3}{1 - x_3}, \\ N_2(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= -\frac{1}{4} (1 + x_1) (1 - x_2) \frac{2x_3}{1 - x_3}, \\ N_3(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= -\frac{1}{4} (1 - x_1) (1 + x_2) \frac{2x_3}{1 - x_3}, \\ N_4(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= -\frac{1}{4} (1 + x_1) (1 + x_2) \frac{2x_3}{1 - x_3}, \\ N_5(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \frac{1}{4} (1 - x_1) (1 - x_2) \left(1 + \frac{2x_3}{1 - x_3} \right), \\ N_6(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \frac{1}{4} (1 + x_1) (1 - x_2) \left(1 + \frac{2x_3}{1 - x_3} \right), \\ N_7(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \frac{1}{4} (1 - x_1) (1 + x_2) \left(1 + \frac{2x_3}{1 - x_3} \right), \\ N_8(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \frac{1}{4} (1 + x_1) (1 + x_2) \left(1 + \frac{2x_3}{1 - x_3} \right). \quad (13) \end{aligned}$$

Тоді, враховуючи співвідношення (10)-(13), матимемо:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{\partial z_{m'}}{\partial x_1} \left(\omega_{k'}^{(100)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(011)} \right), \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{\partial z_{m'}}{\partial x_2} \left(\omega_{k'}^{(010)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(101)} \right), \\
 \varepsilon_{33} &= \frac{\partial z_{m'}}{\partial x_3} \left(\omega_{k'}^{(001)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(110)} \right), \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z_{m'}}{\partial x_2} \left(\omega_{k'}^{(100)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(011)} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial z_{m'}}{\partial x_1} \left(\omega_{k'}^{(010)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(101)} \right) \right), \\
 \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z_{m'}}{\partial x_3} \left(\omega_{k'}^{(100)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(011)} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial z_{m'}}{\partial x_1} \left(\omega_{k'}^{(001)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(110)} \right) \right), \\
 \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z_{m'}}{\partial x_3} \left(\omega_{k'}^{(010)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(101)} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial z_{m'}}{\partial x_2} \left(\omega_{k'}^{(001)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(110)} \right) \right). \tag{14}
 \end{aligned}$$

Згідно з моментною схемою скінченного елемента для коефіцієнтів розкладання деформацій у (6), матимемо [1]:

$$\begin{aligned}
 e_{11}^{(pqr)} &= \sum_{\mu=0}^p \sum_{\nu=0}^q \sum_{\eta=0}^r \omega_{k'}^{(\mu+1 \nu \eta)} f_{(p+1-\mu \ q-\nu \ r-\eta)}^{k'}; \\
 e_{22}^{(pqr)} &= \sum_{\mu=0}^p \sum_{\nu=0}^q \sum_{\eta=0}^r \omega_{k'}^{(\mu \ \nu+1 \ \eta)} f_{(p-\mu \ q+1-\nu \ r-\eta)}^{k'}; \\
 e_{33}^{(pqr)} &= \sum_{\mu=0}^p \sum_{\nu=0}^q \sum_{\eta=0}^r \omega_{k'}^{(\mu \ \nu \ \eta+1)} f_{(p-\mu \ q-\nu \ r+1-\eta)}^{k'}; \\
 e_{12}^{(pqr)} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^p \sum_{\nu=0}^q \sum_{\eta=0}^r \left(\omega_{k'}^{(\mu \ \nu+1 \ \eta)} f_{(p+1-\mu \ q-\nu \ r-\eta)}^{k'} + \omega_{k'}^{(\mu+1 \ \nu \ \eta)} f_{(p-\mu \ q+1-\nu \ r-\eta)}^{k'} \right); \\
 e_{13}^{(pqr)} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^p \sum_{\nu=0}^q \sum_{\eta=0}^r \left(\omega_{k'}^{(\mu \ \nu \ \eta+1)} f_{(p+1-\mu \ q-\nu \ r-\eta)}^{k'} + \omega_{k'}^{(\mu+1 \ \nu \ \eta)} f_{(p-\mu \ q-\nu \ r+1-\eta)}^{k'} \right); \\
 e_{23}^{(pqr)} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^p \sum_{\nu=0}^q \sum_{\eta=0}^r \left(\omega_{k'}^{(\mu \ \nu \ \eta+1)} f_{(p-\mu \ q+1-\nu \ r-\eta)}^{k'} + \omega_{k'}^{(\mu \ \nu+1 \ \eta)} f_{(p-\mu \ q-\nu \ r+1-\eta)}^{k'} \right), \tag{15}
 \end{aligned}$$

де прийнято позначення

$$f_{(\mu \ \nu \ \eta)}^{k'} = \frac{\partial^{\mu+\nu+\eta} z_{k'}}{(\partial x_1)^\mu (\partial x_2)^\nu (\partial x_3)^\eta} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0}. \tag{16}$$

В отримані співвідношення для коефіцієнтів розкладання деформацій $e_{ij}^{(pqr)}$

входять деякі коефіцієнти $\omega_{k'}^{(pqr)}$, що не входять у розкладання переміщень (5). Тоді доданки у розкладанні деформацій, що містять

хоча б один із членів, що не входять у розкладання переміщень, виключаються із розкладання (6). Враховуючи це, маємо такі вирази для деформацій:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= e_{11}^{(000)} + e_{11}^{(010)}\psi^{(010)} + \\ &+ e_{11}^{(001)}\psi^{(001)} + e_{11}^{(011)}\psi^{(011)}, \\ \varepsilon_{22} &= e_{22}^{(000)} + e_{22}^{(100)}\psi^{(100)} + \\ &+ e_{22}^{(001)}\psi^{(001)} + e_{22}^{(101)}\psi^{(101)}, \\ \varepsilon_{33} &= e_{33}^{(000)} + e_{33}^{(100)}\psi^{(100)} + \\ &+ e_{33}^{(010)}\psi^{(010)} + e_{33}^{(110)}\psi^{(110)}, \\ \varepsilon_{12} &= e_{12}^{(000)} + e_{12}^{(001)}\psi^{(001)}, \\ \varepsilon_{13} &= e_{13}^{(000)} + e_{13}^{(010)}\psi^{(010)}, \\ \varepsilon_{23} &= e_{23}^{(000)} + e_{23}^{(100)}\psi^{(100)}.\end{aligned}\quad (17)$$

В матричній формі запису це розкладання можна представити у вигляді:

$$\{\varepsilon\} = \{e_{ij}\}^T \{\psi\}.\quad (18)$$

Коефіцієнти розкладання тензора деформацій $e_{ij}^{(pqr)}$, які визначаються в центрі скінченного елемента формулами (15), (16), можна представити через коефіцієнти апроксимації переміщень $\omega_{k'}^{(pqr)}$ у матричному вигляді:

$$\{e_{ij}\} = \{F_{ij}^{k'}\} \{\omega_{k'}\}.\quad (19)$$

Для коефіцієнтів розкладання функції зміни об'єму (7) справедливе таке співвідношення:

$$\begin{aligned}\delta W &= \iiint_V \left(2\mu g^{ik} g^{jl} \delta\{\omega_{k'}\}^T \{F_{ij}^{k'}\}^T \{\psi\} \{\psi\}^T \{F_{kl}^{m'}\} \{\omega_{m'}\} + \right. \\ &\left. + \lambda g^{ij} \delta\{\omega_{k'}\}^T \{F_{\theta}^{k'}\}^T \{\psi\} \{\psi\}^T \{F_{\theta}^{m'}\} \{\omega_{m'}\} \right) dV.\end{aligned}\quad (26)$$

Вектор переміщень $u_{k'}$ в глобальній системі координат для просторового скінченного елемента переміщень визначається через вузлові значення вектора переміщень $u_{k'}^L$ та функції форми $N_L(x_1, x_2, x_3)$ (13) співвідношеннями:

$$u_{m'} = \sum_{L=1}^8 N_L(x_1, x_2, x_3) u_{m'}^L,\quad (27)$$

$$\begin{aligned}\xi^{(\alpha\beta\gamma)} &= \\ &= \frac{\partial^{(\alpha+\beta+\gamma)} \varepsilon_{ij} g^{ij}}{(\partial x_1)^\alpha (\partial x_2)^\beta (\partial x_3)^\gamma} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0}.\end{aligned}\quad (20)$$

Відповідно до (20) визначимо коефіцієнти $\xi^{(\alpha\beta\gamma)}$ в околиці точки (0,0,0), розписуючи кожний із них на основі співвідношень для компонент деформацій (17). Якщо якийсь коефіцієнт $e_{ii}^{(\alpha\beta\gamma)}$ відсутній у розкладанні компонент деформацій ε_{ii} , то коефіцієнти $\xi^{(\alpha\beta\gamma)}$, що містять $e_{ii}^{(\alpha\beta\gamma)}$, вилучаються. У загальному вигляді коефіцієнти розкладу $\xi^{(\alpha\beta\gamma)}$ представляються таким чином:

$$\begin{aligned}\xi^{(\alpha\beta\gamma)} &= e_{11}^{(\alpha\beta\gamma)} g^{11} + \\ &+ e_{22}^{(\alpha\beta\gamma)} g^{22} + e_{33}^{(\alpha\beta\gamma)} g^{33},\end{aligned}\quad (21)$$

тоді для функції зміни об'єму матимемо:

$$\theta = \xi^{(\alpha\beta\gamma)}\quad (22)$$

або

$$\begin{aligned}\theta &= e_{11}^{(\alpha\beta\gamma)} g^{11} + e_{22}^{(\alpha\beta\gamma)} g^{22} + \\ &+ e_{33}^{(\alpha\beta\gamma)} g^{33}.\end{aligned}\quad (23)$$

Тоді функція зміни об'єму у матричному виді має вигляд:

$$\{\theta\} = \{\xi\}^T \{\psi\},\quad (24)$$

де коефіцієнти $\xi^{(\alpha\beta\gamma)}$ можна представити через коефіцієнти розкладу деформацій:

$$\{\xi\} = \{F_{\theta}^{k'}\} \{\omega_{k'}\}.\quad (25)$$

Підстановка (18), (19) та (24), (25) у вираз для варіації енергії пружної деформації (4) дає

або в матричному вигляді:

$$\{u_{k'}\} = \{u_{k'}^L\}^T \{N_L\}.\quad (28)$$

де $u_{k'}^L$ – переміщення L -ого вузла за k' -им напрямом в базисній системі координат.

Вираз (5) можна записати у матричному вигляді:

$$\{u_{k'}\} = \{\omega_{k'}\}^T \{\psi\}.\quad (29)$$

Для побудови матриці жорсткості перейдемо у виразі (26) від коефіцієнтів $\omega_{k'}^{(pqr)}$ до значень переміщень $u_{k'}^L$ у вузлах скінченного елемента за допомогою матриці перетворень $[A]$. Матриця $[A]$ задає зв'язок між функціями форми $N_L(x_1, x_2, x_3)$ та степеневими функціями $\psi^{(pqr)}$. Представимо

коефіцієнти розкладання переміщень у вигляді:

$$\{\omega_{k'}\} = [A]\{u_{k'}^L\}. \quad (30)$$

Варіація енергії пружної деформації з урахуванням (30) запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} \delta W = & \iiint_V \left(2\mu g^{ik} g^{jl} \delta\{u_{k'}^L\}^T [A]^T \{F_{ij}^{k'}\}^T \{\psi\}\{\psi\}^T \{F_{kl}^{m'}\} [A] \{u_{m'}^L\} + \right. \\ & \left. + \lambda g^{ij} \delta\{u_{k'}^L\}^T [A]^T \{F_{\theta}^{k'}\}^T \{\psi\}\{\psi\}^T \{F_{\theta}^{m'}\} [A] \{u_{m'}^L\} \right) dV. \end{aligned} \quad (31)$$

Винесемо з-під знаку інтегрування величини, що не залежать від координат:

$$\begin{aligned} \delta W = & \delta\{u_{k'}^L\}^T \left(\iiint_V 2\mu g^{ik} g^{jl} [A]^T \{F_{ij}^{k'}\}^T \{\psi\}\{\psi\}^T \{F_{kl}^{m'}\} [A] dV \right) \{u_{m'}^L\} + \\ & + \delta\{u_{k'}^L\}^T \left(\iiint_V \lambda g^{ij} [A]^T \{F_{\theta}^{k'}\}^T \{\psi\}\{\psi\}^T \{F_{\theta}^{m'}\} [A] dV \right) \{u_{m'}^L\} \end{aligned} \quad (32)$$

та введемо позначення

$$\begin{aligned} [K_{ij}^{k'm'}] &= \iiint_V 2\mu g^{ik} g^{jl} [A]^T \{F_{ij}^{k'}\}^T \{\psi\}\{\psi\}^T \{F_{kl}^{m'}\} [A] dV, \\ [K_{\theta}^{k'm'}] &= \iiint_V \lambda g^{ij} [A]^T \{F_{\theta}^{k'}\}^T \{\psi\}\{\psi\}^T \{F_{\theta}^{m'}\} [A] dV. \end{aligned} \quad (33)$$

Матриця жорсткості «напівнескінченного» скінченного елемента на основі моментної схеми для слабкостисливого матеріалу матиме вигляд:

$$[K^{k'm'}] = [K_{ij}^{k'm'}] + [K_{\theta}^{k'm'}], \quad (34)$$

а варіація пружної деформації «напівнескінченного» скінченного елемента матиме вид:

$$\delta W = \delta\{u_{k'}^L\}^T [K^{k'm'}] \{u_{m'}^L\}. \quad (35)$$

Розмірність матриці жорсткості 24×24 . Глобальну матрицю жорсткості отримаємо на основі (1) підсумовуванням за всіма скінченими елементами.

Література

1. Дырда В. И., Гребенюк С. Н., Гоменюк С. И. Аналитические и численные методы расчета резиновых деталей. Днепропетровск-Запорожье: Зап. нац. ун-т, 2012. 370 с.
2. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The finite element method. Volume 1: The basis. Oxford: Butterworth-Heinemann. 2000. 689 p.
3. Edip K., Sheshov V., Bojadjeva J., Demir A., Ozturk H. Development of infinite elements for simulation of unbounded media. *Building materials and structures*. 2018. N 61. P. 3–13.
4. Beer G. 'Infinite domain' elements in finite element analysis of underground excavations. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*. 1983. N 7(1). P. 1–7.
5. Curnier A. A static infinite element. *International journal for numerical methods in engineering*. 1983. N 19(10). P. 1479–1488.
6. Medina F. and Taylor R.L. Finite element techniques for problems of unbounded domains. *International journal for numerical methods in engineering*. 1983. 19(8). P. 1209–1226.

References

1. Dyrda, V. I., Grebenyuk, S. M. & Homeniuk, S. I. (2012). Analytical and numerical methods for the calculation of rubber parts. Dnipropetrovsk-Zaporizhzhia: Zaporizhzhia National University.
2. Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L. (2000). The finite element method. Volume 1: The basis. Oxford: Butterworth-Heinemann.
3. Edip, K., Sheshov, V., Bojadjieva, J., Demir, A. & Ozturk, H. (2018). Development of infinite elements for simulation of unbounded media. Building materials and structures, No. 61, pp. 3–13.
4. Beer, G. (1983). 'Infinite domain' elements in finite element analysis of underground excavations. International journal for numerical and analytical methods in geomechanics, No. 7(1), pp. 1–7.
5. Curnier, A. (1983). A static infinite element. International journal for numerical methods in engineering, No. 19(10), pp. 1479–1488.
6. Medina, F. & Taylor, R. L. (1983). Finite element techniques for problems of unbounded domains. International journal for numerical methods in engineering, No. 19(8), pp. 1209–1226.

УДК 0048:681.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-14

ОПТИМІЗАЦІЯ ЗГОРТКОВИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ ТА ЇХ АНСАМБЛІВ

О. В. Чопорова, А. Г. Кривохата

Запорізький національний університет
krivohata@gmail.com

Ключові слова:

класифікація, згорткові нейронні мережі, ансамбль, генетичні алгоритми.

Штучні нейронні мережі застосовуються до розв'язання великої кількості практичних задач, серед яких можна виділити проблеми класифікації, регресії та кластерного аналізу. Зокрема, для розпізнавання образів ефективно використовуються згорткові нейронні мережі. Така популярність пояснюється структурою згорткових мереж, яка складається зазвичай з двох типів шарів: власне згорткових та повнозв'язних. У шарах згортки відбувається автоматичне визначення суттєвих ознак об'єктів. Цей етап можна інтерпретувати як застосування до даних різноманітних фільтрів. У повнозв'язних шарах відбувається безпосередньо класифікація на базі ознак, вилучених згортковими шарами. Кількість шарів обох типів, тип функцій активації, тип оптимізатора, кількість епох навчання та інші показники відносяться до гіперпараметрів нейромереж. У практичних задачах саме структурна та параметрична оптимізація вимагає суттєвих часових затрат та експертних знань предметної області. Одним з методів, що дозволяє уникнути такого ручного налаштування роботи системи є генетичні алгоритми. Загальна схема застосування генетичних алгоритмів до нейронних мереж полягає у наступному. На першому етапі варто обрати спосіб кодування суттєвих параметрів нейронної мережі у вигляді бінарного або числового вектора. Такі вектори формують деяку базову множину розв'язків, у якій здійснюється пошук оптимального розв'язку. Після цього обирається цільова функція, яка визначатиме найбільш вдалу архітектуру окремих нейронних мереж та їх структуру. Така функція повинна бути близькою за значенням до функції втрат, що використовуються при навчанні нейромереж. Суттєвим етапом генетичних алгоритмів є визначення наступних операторів: селекції, кросовера, мутації та відбору. Вибір цих операторів впливає на збіжність та ефективність методу в цілому. Генетичний алгоритм є прикладом метаевристичних методів. Збіжність таких методів у загальному випадку досить важко довести формально. Однак застосування генетичного алгоритму під час налаштування нейронних мереж дозволяє знизити втручання користувача до мінімуму. Іншим відомим підходом до поліпшення ефективності систем розпізнавання є використання ансамблів – поєднань декількох моделей з генерацією спільного результату. Існує декілька способів побудови такого поєднання. Загальною вимогою є те, що елементи ансамблю повинні розрізнятися або структурно, або параметрично. Також можуть використовуватися подібні моделі, але оптимізовані для різних наборів даних. Використання ансамблевого навчання нейронних мереж пов'язано з проблемою різкого збільшення вимог до обчислювальних ресурсів. Одним з підходів тут може бути застосування так званого Snapshot ансамблю, який дозволяє будувати колекцію нейронних мереж, подібних за структурою, але з різними наборами вагових коефіцієнтів. Час навчання такого ансамблю дорівнює часу навчання однієї мережі. Роботу присвячено застосуванню генетичних алгоритмів для спільного налаштування структури нейронних мереж та параметрів ансамблю.

OPTIMIZATION OF CONVOLUTIONAL NEURAL NETWORKS AND ENSEMBLES

O. V. Choporova, A. G. Kryvokhata

Zaporizhzhia National University
krivohata@gmail.com

Key words:

classification, convolutional neural network, ensemble, genetic algorithm.

Artificial neural networks are used to solve a number of practical problems, among them which are the problems of classification, regression and cluster analysis. In particular, convolutional neural networks are effectively used for pattern recognition. Such popularity is explained by the structure of convolution networks, that usually consists of two types of layers: convolution proper and fully connected. Convolution layers automatically detect the essential features of the objects. This step can be interpreted as applying to a variety of filters. The classification of features obtained by convolutional layers occurs in the fully connected layers. The neural network hyperparameters include number of both types' layers, type of activation functions, type of optimizer, number of epochs etc. Both structural and parametric optimizations are time consuming and require domain expert knowledge. Genetic algorithm is one of the methods for avoiding such manual tuning. The general scheme of application of genetic algorithms to neural networks consists of several steps. The first step is to choose the method of encoding the essential parameters of the neural network in the form of a binary or numeric vector. Such vectors form some basic set of solutions in which the optimal solution is searched. The essential stage of genetic method is the definition of following operator's selection, crossover, mutation and selection. These operators affect the convergence and effectiveness of the method as a whole. The genetic algorithm is an example of metaheuristic methods. There is a difficulty in mathematically proving the convergence of these methods. However, applying a genetic algorithm to neural network tuning minimizes user intervention. Another well-known approach to improve the efficiency of recognition systems is ensembles i.e. combinations of several models to generate a common result. There are several ways to build such combination. The general requirement is that the elements of the ensemble must differ either structurally or parametrically. Similar models may also be used but optimized for different datasets. The ensemble training for neural networks is associated with the problem of dramatically increasing demands on computing resources. One approach here might be to use the so-called Snapshot ensemble, that allows us to build a collection of neural networks similar in structure but with different weights matrices. The training time of such ensemble is equal to the learning time of one network. The work is devoted to the application of genetic algorithms for joint tuning of neural network structure and ensemble parameters.

Вступ. Штучні нейронні мережі отримали широке поширення в різноманітних практичних застосуваннях. Сьогодні існує велика кількість різноманітних архітектур нейронних мереж. Зокрема, для задачі розпізнавання образів використовуються такі нейронні мережі прямого поширення, як багатошаровий перцептрон та згорткові нейронні мережі. При цьому останніми роками в задачах розпізнавання перевага надається згортковим нейронним мережам. Це пояснюється здатністю такого типу мереж до автоматичного виділення ознак сигналу, що,

свою чергою, забезпечується наявністю спеціальних типів шарів: згортки та субдискретизації [1]. Завдяки своїй структурі глибокі згорткові нейронні мережі, при вдалому налаштуванні, можуть знаходити закономірності у вихідних даних та використовувати їх для розв'язання задач класифікації. Сучасні архітектури згорткових нейронних мереж можуть використовувати десятки шарів. Так, архітектура VGG (англ. Visual Geometry Group) використовує 19 шарів «згортка-нелінійність-субдискретизація», а

GoogLeNet та DenseNet (англ. Dense Convolutional Network) відповідно 22 та 250 шарів [2]. Кількість шарів сучасних ResNet (англ. Residual Convolutional Network) вже близько тисячі.

Одним із актуальних питань застосувань нейронних мереж є їхня структурна оптимізація, тобто вибір оптимальної кількості шарів, нейронів, функцій активації тощо. Така оптимізація може проводитися як вручну, за умови відносно невеликої кількості параметрів, так і в автоматичному режимі. Генетичні алгоритми досить давно використовуються для задач структурної оптимізації нейронних мереж [3], однак вони менше застосовувались для підбору параметрів ансамблів мереж.

Метою цієї роботи є розробка варіанта генетичного алгоритму структурної оптимізації згорткових нейронних мереж та їх ансамблів в задачах класифікації аудіоданих.

1. Підходи до побудови ансамблю нейронних мереж. Одним із підходів до підвищення якості прогнозування нейронних мереж є побудова ансамблів декількох моделей. Зазвичай при створенні таких систем виникають дві основні задачі: генерація окремих нейронних мереж ансамблю та обчислення спільного результату прогнозування [1].

Окремі нейронні мережі, які входять до ансамблю, повинні розрізнятися між собою за структурою та параметрами. Цього досягають або використанням різних даних на етапі навчання, або диференціюванням параметрів мережі, або залученням різних алгоритмів параметричної оптимізації.

Ансамблевому навчанню нейронних мереж присвячено, зокрема, роботи [4-9]. У статтях [4, 5] детально розглянуто основні етапи побудови ансамблів нейромереж. Пропонується підхід до генерації моделей ансамблю, з яких методом k -середніх проводиться відбір для подальшого навчання.

У роботі [6] пропонується поняття спільного навчання як альтернатива ансамблевому навчанню. Вводяться функції втрат для оптимізації нейронних мереж саме при спільному навчанні.

Роботи [7, 8] присвячено особливостям використання генетичних алгоритмів при

створенні ансамблів. Автори пропонують підхід, у якому нейронні мережі та структура ансамблю поєднуються в одну популяцію. По-перше, створюється набір нейронних мереж з високим ступенем різноманітності. Для цього використовуються різні набори навчальних даних для кожної моделі, а також варіюється архітектура шляхом зміни кількості прихованих нейронів, функцій активації та ініціалізації ваг. По-друге, генетичний алгоритм використовується для вибору як найбільш ефективної підмножини синтезованих нейронних мереж, так і оптимальної комбінаційної стратегії для забезпечення точності та надійності ансамблю. Така схема застосування генетичних алгоритмів до нейронних мереж та їх ансамблів є типовою.

Одним із недоліків використання ансамблів нейронних мереж є висока вимогливість до часових та просторових ресурсів, оскільки час навчання збільшується пропорційно до кількості нейронних мереж в ансамблі. Особливо цей недолік стосується глибинних нейронних мереж.

У роботі [9] пропонується замість навчання M нейронних мереж навчати однієї мережі. Основна ідея полягає в тому, що при застосуванні методу стохастичного градієнтного спуску запам'ятовуються значення вагової матриці при потраплянні у M точок локального мінімуму. Після цього для кожної з M вагових матриць генерується відповідна нейронна мережа. Таким чином, час навчання ансамблю (авторська назва – SparseShot ансамбль) майже не відрізняється від часу навчання однієї нейронної мережі.

2. Застосування генетичних алгоритмів для оптимізації згорткових нейронних мереж та їх ансамблів. Теорію еволюційних, зокрема генетичних, алгоритмів на сьогодні добре розроблено, наприклад у роботах [3, 10] формалізовано основні поняття та приклади застосувань до задач дискретної оптимізації. Оскільки генетичні алгоритми є метаевристичними, досягнення глобального оптимуму не гарантується, однак ці підходи добре зарекомендували себе у низці задач дискретної математики.

Загальна схема застосування генетичних алгоритмів до нейронних мереж полягає

у наступному. На першому етапі варто обрати спосіб кодування суттєвих параметрів нейронної мережі у вигляді бінарного або числового вектора. Такі вектори формують деяку базову множину розв'язків X , у якій здійснюється пошук оптимального розв'язку. Скінченні непорожні множини X називаються популяціями [10].

Наступним кроком є вибір цільової функції $f: X \rightarrow R^1$, яка визначатиме найбільш вдалу архітектуру окремих нейронних мереж та структуру ансамблю загалом. Така функція повинна бути близькою за значенням до функції втрат, що використовуються при навчанні нейромереж.

Далі визначаються стандартні для генетичних алгоритмів оператори: селекції, кросовера, мутації та відбору. Докладно зміст та призначення цих операторів викладено в монографіях [3, 10].

Оскільки саме згорткові нейронні мережі відіграють суттєву роль у задачах розпізнавання образів, розглянемо далі останні публікації із застосування генетичних алгоритмів до структурної та параметричної оптимізації цього типу мереж.

Огляд підходів до використання генетичних алгоритмів для оптимізації згорткових нейронних мереж розглянуто в [11-21]. У практичних застосуваннях генетичних алгоритмів до нейронних мереж розв'язуються задачі вибору найбільш оптимальної структури шарів, оптимізація гіперпараметрів та вибір функції втрат. Основними задачами в цьому випадку є вибір методу кодування можливих розв'язків та виду генетичних операторів. Варто також зазначити, що кількість потенційних мережевих структур експоненційно збільшується з кількістю шарів у мережі [12, 13], що робить генетичні алгоритми ефективним підходом для пошуку в такому великому просторі можливих розв'язків.

Робота [14] присвячена застосуванню методів генетичного програмування для оптимізації архітектури згорткової нейронної мережі, яка, своєю чергою, представлена направленим ациклічним графом. Перевагою цього методу подання є його гнучкість, оскільки він може представляти мережеві архітектури змінної довжини. Параметрична оп-

тимізація нейронних мереж базової множини виконується методом стохастичного градієнтного спуску. Функція втрат при навчанні мережі є цільовою функцією генетичного програмування.

Автори [15] досліджують застосування генетичних алгоритмів до оптимізації глибоких нейронних мереж. Множина можливих розв'язків ділиться на підмножини параметрів для згорткових шарів та повнозв'язних шарів. Виділяються такі параметри, як розміри ядра згортки у шарах згортки, типи функцій активації, розмір вікна шару субдискретизації, кількість нейронів у повнозв'язних шарах. Генетичний алгоритм використовується у комбінації з методом прогнозування ефективності згенерованої структури мережі. Передбачена за допомогою нейронної мережі ефективність визначає перспективність використання архітектури, згенерованої генетичним алгоритмом.

У роботі [16] пропонується спосіб кодування можливих розв'язків, при якому кількість шарів нейронної мережі є необмеженою, пропонується використання блоку, з пропусками з'єднань між нейронами, який може використовуватися для уникнення проблеми зникання градієнта.

Підходи до оптимізації гіперпараметрів згорткових нейронних мереж розглянуто у роботах [17, 18]. Пропонується підхід вибору найкращої конфігурації. У роботі [18] замість стандартного для згорткових мереж ядра згортки використовується ядро Габора, яке відповідно застосовує перетворення Габора до певної підмножини даних. Відзначається, що використання ядер Габора зменшує час навчання нейронних мереж.

У роботах [19, 20] зазначається, що у практичних застосуваннях тільки частина гіперпараметрів нейронної мережі суттєво впливає на точність прогнозування, а для різних наборів вхідних даних оптимальними можуть бути різні набори гіперпараметрів. Розглядається задача класифікації зображень та досліджується зв'язок між характеристиками зображень, які поступають на вхід нейронної мережі, та її гіперпараметрами. Особливістю роботи є те, що використовуючи збільшення роздільної здатності

зображень під час процесу оптимізації, досягається підвищення ефективності системи загалом.

Для визначення генетичного алгоритму необхідно задати спосіб кодування векторів множини можливих розв'язків та описати оператори селекції, кросовера, мутації та відбору, а також задати правило припинення обчислень. Далі розглядатимемо випадок, коли відома загальна архітектура нейронної мережі – згортова. Така архітектура обумовлена природою задачі та даних, оскільки необхідно розробити адаптивну систему класифікації аудіофайлів. Отже, найбільш суттєвими гіперпараметрами нейронної мережі будуть наступні: кількість шарів згортки та повнозв'язних шарів, кількість епох навчання, кількість мереж у Snapshot ансамблі. При цьому елементами множини можливих розв'язків будуть цілочисельні вектори, де кожна позиція вектора відповідає одному з параметрів, що перераховані вище.

У статті [21] описано підхід до побудови системи розпізнавання з використанням Snapshot ансамблю, який поєднує оптимізовані генетичним алгоритмом нейронні мережі.

Отже, метою цієї роботи є розширення досліджень [21] у частині оптимізації параметрів Snapshot ансамблю, наприклад кількості елементів ансамблю.

3. Обчислювальні експерименти. Обчислювальні експерименти проводяться з набором даних, що містить 3449 звукових файлів у форматі .wav для навчання та тестування системи. Вибірка для навчання містить звукові файли з 9 категорій. Здебільшого це вуличні міські звуки: шум транспорту, автомобільні сирени, дитячий сміх тощо. Мінімальна кількість файлів в одній категорії – 94, максимальна – 300. Тривалість звукових файлів переважно становить 4 с.

Для ілюстрації роботи генетичного алгоритму наводяться значення згаданих вище гіперпараметрів нейронної мережі та значення відповідних метрик точності. При цьому комбінації параметрів обираються з різних популяцій для демонстрації збіжності генетичного алгоритму. Результати обчислень наведено в таблиці 1. Використано наступні позначення: Conv2D – шар згортки; Dense – повнозв'язний шар.

Табл. 1. Етапи роботи генетичного алгоритму

Номер популяції	Кількість шарів Conv2D	Кількість шарів Dense	Кількість епох	Кількість мереж у Snapshot ансамблі	Точність
2	1	4	50	100	0,876963
3	2	4	100	100	0,908377
4	2	2	100	100	0,939791
5	1	3	150	100	0,942408
6	1	2	200	100	0,954026

На рисунку 1 наведено вигляд функції залежності точності від кількості епох при різних наборах гіперпараметрів.

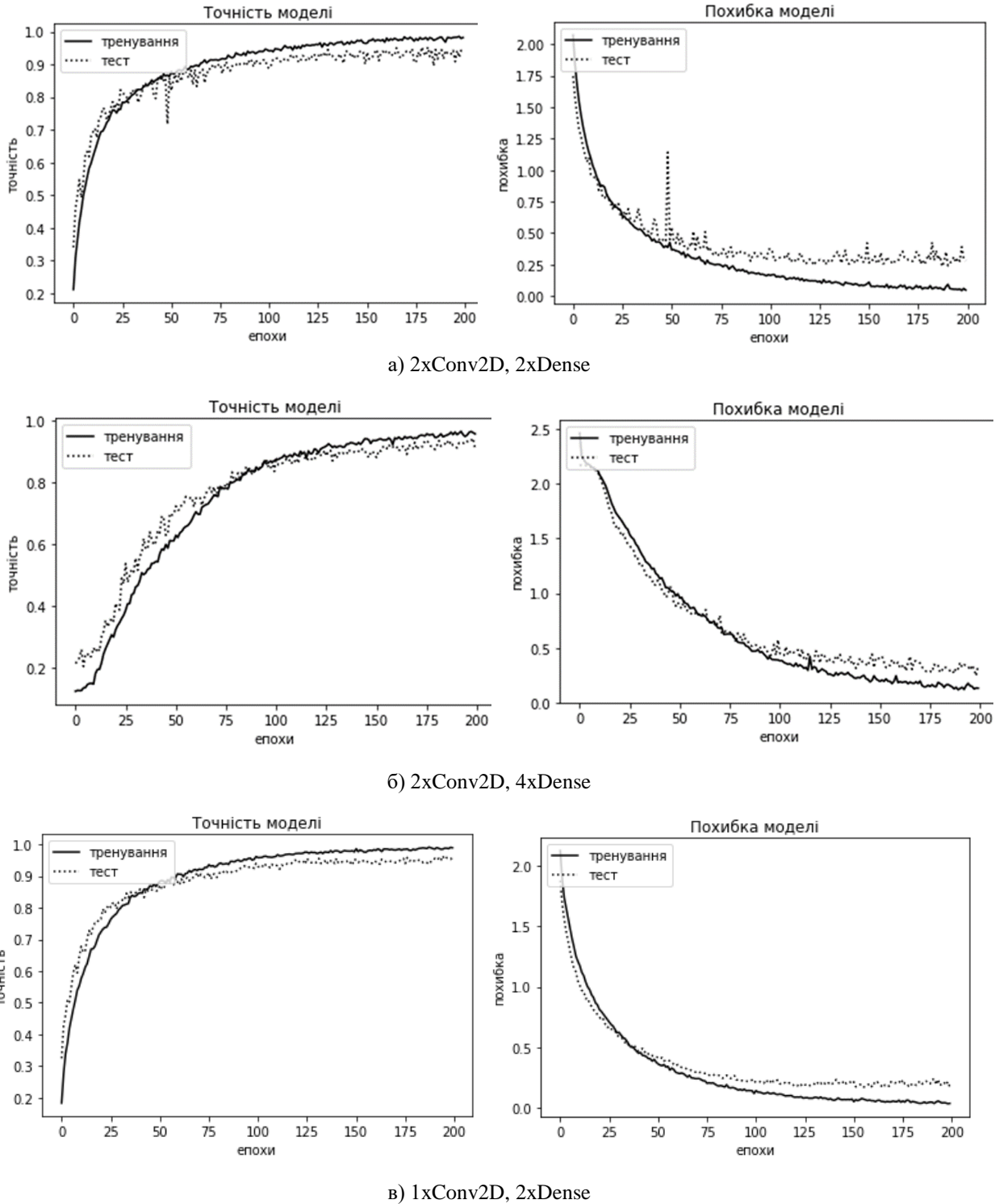


Рис. 1. Точність та похибка моделі з різною кількістю повнозв'язних шарів (Dense) та згортки (Conv2D)

Варіанти конфігурацій а) та б), наведені на рисунку 1, свідчать про недостатню стійкість моделей при варіюванні кількості епох, отже, результати, отримані за допомогою цих моделей, можуть бути не достатньо достовірними в разі зменшення кількості епох з метою оптимізації часу розрахунку. Навпаки, модель в) демонструє відносну стійкість після ста епох навчання.

Висновки. З аналізу літературних джерел можна зробити висновок, що задачу параметричної оптимізації ансамблів нейронних мереж розглянуто недостатньо. Зокрема, для автоматичного налаштування параметрів такого методу ансамблювання, як Snapshot ансамбль, не застосовувалися генетичні алгоритми. Водночас метод Snapshot

дозволяє будувати моделі з множиною нейронних мереж без суттєвого збільшення витрат ресурсів обчислень.

У роботі пропонується використання генетичних алгоритмів одночасно і для підбору оптимальних параметрів Snapshot ансамблю, і для оптимізації згорткових нейронних мереж, які входять в ансамбль.

Проведено обчислювальні експерименти та продемонстровано збіжність генетичного алгоритму.

Перспективи подальших досліджень пов'язано з розширенням множини параметрів, за якими проводиться оптимізація, та застосуванням варіантів генетичних алгоритмів, для яких можлива оцінка збіжності, наприклад еволюційно-фрагментарних методів.

Література

1. Geron A. Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn and TensorFlow. Sebastopol: O'Reilly. 2017. 861 p.
2. Николенко С., Кадурын А., Архангельская Е. Глубокое обучение. Санкт-Петербург: Питер, 2018. 480 с.
3. Олійник А. О., Субботін С. О., Олійник О. О. Еволюційні обчислення та програмування. Запоріжжя: ЗНТУ. 2010. 324 с.
4. Li K., Liu W., Zhao K., Shao M., Liu L. A Novel Dynamic Weight Neural Network Ensemble Model. *International Journal of Distributed Sensor Networks*. Vol. 2015. 2015. Article ID 862056, 13 pages. DOI: 10.1155/2015/862056.
5. Tao S. Deep Neural Network Ensembles. URL: <https://arxiv.org/abs/1904.05488>.
6. Webb A.M., Reynolds C., Iliescu D.-A., Reeve H., Lujan M., Brown G. Joint Training of Neural Network Ensembles. URL: <https://arxiv.org/abs/1902.04422>.
7. Sallam H., Regazzoni C.S., Talkhan I., Atiya A. Evolving neural networks ensembles nnes. *IAPR Workshop on Cognitive Information Processing*. P. 142–147.
8. Symone G. Soares, Carlos H. Antunes, Rui Arajo. A Genetic Algorithm for Designing Neural Network Ensembles. *Proceedings of the 14th annual conference on Genetic and evolutionary computation*. P. 681–688.
9. Huang G. et al. Snapshot Ensembles: Train 1, Get M for Free. arXiv, 2017. URL: <http://arxiv.org/abs/1704.00109>.
10. Козин И.В. Эволюционные модели в дискретной оптимизации. Запорожье: ЗНУ. 2019. 204 с.
11. Lone M.A., Islam M. A Brief Overview of Developing Convolutional Neural Network Using Genetic Algorithm. *International Journal of Computer Sciences and Engineering*. Vol. 7, Issue 2, 2019. P. 812-818. DOI: 10.26438/ijcse/v7i2.812818.
12. Lingxi Xie, Alan Yuille. Genetic CNN. <https://arxiv.org/abs/1703.01513>.
13. Alejandro Baldominos Yago Saez, Pedro Isasi. Evolutionary convolutional neural networks: An application to handwriting recognition. *Neurocomputing*. Vol. 283. 2018. P. 38-52. DOI: 10.1016/j.neucom.2017.12.049.
14. Suganuma M., Shirakawa S., Nagao T. A Genetic Programming Approach to Designing Convolutional Neural Network Architectures. *Proceedings of the Twenty-Seventh International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-18)*. P. 5369–5373.
15. Mattioli F., Caetano D., Cardoso A., Naves E., Lamounier E. An Experiment on the Use of Genetic Algorithms for Topology Selection in Deep Learning. *Journal of Electrical and Computer Engineering*. Vol. 2019. 2019. Article ID 3217542, P. 1-12, DOI: 10.1155/2019/3217542.
16. Sun Y., Xue B., Zhang M., Yen G.G. Automatically Designing CNN Architectures Using Genetic Algorithm for Image Classification. URL: <https://arxiv.org/abs/1808.03818>.

17. Loussaief S., Abdelkrim A. Convolutional Neural Network Hyper-Parameters Optimization based on Genetic Algorithms. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*. Vol. 9, No. 10, 2018. P. 252–266.
18. Meng F., Wang X., Shao F., Wang D., Hua X. Energy-Efficient Gabor Kernels in Neural Networks with Genetic Algorithm Training Method. *Electronics*. Vol. 8, №105. 2019. Doi:10.3390/electronics8010105.
19. Hinz T., Navarro-Guerrero N., Magg S., Wermter S. Speeding up the Hyperparameter Optimization of Deep Convolutional Neural Networks. *International Journal of Computational Intelligence and Applications*. Vol. 17, №. 2. 2018. Article ID 1850008. P. 1–15.
20. Molina-Cabello M.A., Accino C., López-Rubio E., Thurnhofer-Hemsi K. Optimization of Convolutional Neural Network Ensemble Classifiers by Genetic Algorithms. In: *Rojas I., Joya G., Catala A. (eds) Advances in Computational Intelligence. IWANN 2019. Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 11507. 2019. P. 163–173.
21. Gonzalez J.A., Hurtado L.-F., Pla F. ELiRF-UPV at SemEval-2019 Task 3: Snapshot Ensemble of Hierarchical Convolutional Neural Networks for Contextual Emotion Detection. *Proceedings of the 13th International Workshop on Semantic Evaluation (SemEval-2019)*. 2019. P. 195–199.

References

1. Geron, A. (2017). *Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn and TensorFlow*. Sebastopol: O'Reilly.
2. Nikolenko, S., Kadurin, A. & Arhangelskaya, E. (2018). *Deep learning*. Saint Petersburg: Piter (In Russian).
3. Oliinyk, A. O., Subbotin, S. O. & Oliinyk, O. O. (2010). *Evoliutsiini obchyslennia ta prohramuvannia. Zaporizhzhia: ZNTU*. (In Ukrainian).
4. Li, K., Liu, W., Zhao, K., Shao, M. & Liu, L. (2015). A Novel Dynamic Weight Neural Network Ensemble Model. *International Journal of Distributed Sensor Networks*, Vol. 2015, Article ID 862056, 13 pages. DOI: 10.1155/2015/862056.
5. Tao, S. *Deep Neural Network Ensembles*. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/1904.05488>.
6. Webb, A. M., Reynolds, C., Iliescu, D.-A., Reeve, H., Lujan, M. & Brown, G. *Joint Training of Neural Network Ensembles*. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/1902.04422>.
7. Sallam, H., Regazzoni, C. S., Talkhan, I. & Atiya, A. (2008). Evolving neural networks ensembles. *IAPR Workshop on Cognitive Information Processing*, pp. 142–147.
8. Symone, G., Soares, Carlos, H. Antunes & Rui Arajo. (2012). A Genetic Algorithm for Designing Neural Network Ensembles. *Proceedings of the 14th annual conference on Genetic and evolutionary computation*, pp. 681–688.
9. Huang, G. et al. (2017). *Snapshot Ensembles: Train 1, Get M for Free*. arXiv. Retrieved from <http://arxiv.org/abs/1704.00109>.
10. Kozin, I. V. (2019). *Evolyuetsionnyie modeli v diskretnoy optimizatsii. Zaporozhe: ZNU*. (in Russian).
11. Lone, M. A. & Islam, M. (2019). A Brief Overview of Developing Convolutional Neural Network Using Genetic Algorithm. *International Journal of Computer Sciences and Engineering*, Vol. 7, Issue 2, pp. 812–818. DOI: 10.26438/ijcse/v7i2.812818.
12. Lingxi, Xie & Alan, Yuille. *Genetic CNN*. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/1703.01513>.
13. Alejandro Baldominos Yago Saez & Pedro Isasi. (2019). Evolutionary convolutional neural networks: An application to handwriting recognition. *Neurocomputing*, Vol. 283, pp. 38–52. DOI: 10.1016/j.neucom.2017.12.049.
14. Suganuma, M., Shirakawa, S. & Nagao, T. (2018). A Genetic Programming Approach to Designing Convolutional Neural Network Architectures. *Proceedings of the Twenty-Seventh International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-18)*, pp. 5369–5373.

15. Mattioli, F., Caetano, D., Cardoso, A., Naves, E. & Lamounier, E. (2019). An Experiment on the Use of Genetic Algorithms for Topology Selection in Deep Learning. *Journal of Electrical and Computer Engineering*, Vol. 2019, Article ID 3217542, pp. 1–12. DOI: 10.1155/2019/3217542.
16. Sun, Y., Xue, B., Zhang, M. & Yen, G. G. Automatically Designing CNN Architectures Using Genetic Algorithm for Image Classification. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/1808.03818>.
17. Loussaief, S. & Abdelkrim, A. (2018). Convolutional Neural Network Hyper-Parameters Optimization based on Genetic Algorithms. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, Vol. 9, No. 10, pp. 252–266.
18. Meng, F., Wang, X., Shao, F., Wang, D. & Hua, X. (2019). Energy-Efficient Gabor Kernels in Neural Networks with Genetic Algorithm Training Method. *Electronics*, Vol. 8, No. 105. doi:10.3390/electronics8010105.
19. Hinz, T., Navarro-Guerrero, N., Magg, S. & Wermter, S. (2018). Speeding up the Hyperparameter Optimization of Deep Convolutional Neural Networks. *International Journal of Computational Intelligence and Applications*, Vol. 17, No. 2, Article ID 1850008, pp. 1–15.
20. Molina-Cabello, M. A., Accino, C., López-Rubio, E. & Thurnhofer-Hemsi, K. (2019). Optimization of Convolutional Neural Network Ensemble Classifiers by Genetic Algorithms. In: Rojas I., Joya G., Catala A. (eds) *Advances in Computational Intelligence. IWANN 2019. Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 11507, pp. 163–173.
21. Gonzalez, J. A., Hurtado, L.-F. & Pla, F. (2019). ELiRF-UPV at SemEval-2019 Task 3: Snapshot Ensemble of Hierarchical Convolutional Neural Networks for Contextual Emotion Detection. *Proceedings of the 13th International Workshop on Semantic Evaluation (SemEval-2019)*, (pp. 195–199).

УДК 534

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-15

АКТИВНЕ ГАСІННЯ КОЛИВАНЬ ВАЛА З ЛОПАТЯМИ ПОВОРОТНО-ЛОПАТЕВОЇ ГІДРОТУРБИНИ

В. О. Шевченко¹, Ю. О. Лимаренко², В. І. Попівщій²

¹Економіко-правничий коледж ЗНУ,

²Інженерний інститут ЗНУ

shevictory@gmail.com

Ключові слова:

вал з лопатями, дискретна модель, поворотно-лопатева гідротурбіна, вимушені коливання, резонанс, гасіння коливань, керований антирезонанс.

Розглянуто вимушені коливання вала з лопатями поворотно-лопатевої гідротурбіни на основі вдосконаленої дискретної моделі, що складається з абсолютно твердого вала, на який з постійним кроком насаджені однакові абсолютно тверді пружно з'єднані з валом лопаті. Кожну лопать представлено як систему з трьома степенями вільності у вигляді трьох пружно з'єднаних жорстких пластин; центральна пластина пружно з'єднана з валом, а бічні пластини розташовані під заданими кутами до центральної. Вільні коливання наведеної системи з довільною кількістю лопатей описано однорідною системою звичайних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Наведено систему диференціальних рівнянь, що описує вимушені коливання вала з лопатями під впливом сили, що діє на одну з лопатей і змінюється з часом за гармонійним законом. Проаналізовано амплітудно-частотні характеристики узагальнених координат на прикладі моделі з трьома лопатями. Продемонстровано, на амплітудно-частотних характеристиках яких узагальнених координат відбувається збереження або відсутність резонансних явищ на власних частотах, що відповідають одному вузловому діаметру, та на власних частотах віссиметричних форм коливань.

На прикладі вимушених коливань з однією збурювальною силою показано, що при вимушених коливаннях системи на резонансних частотах зростає до великих значень амплітуда не тільки тієї лопаті, на яку діє збурювальна сила, а й амплітуди решти лопатей, тобто продемонстровано можливість застосування явища керованого антирезонансу для гасіння резонансних коливань однієї лопаті за рахунок дії на іншу. Проаналізовано амплітудно-частотні характеристики для випадку дії збурювальних сил на дві лопаті, що демонструють повне гасіння резонансних явищ на власних частотах віссиметричних коливань і необхідність врахування певних обмежень на напрямки дії та амплітуди антирезонансної сили для гасіння резонансних явищ на всіх частотах коливань. Продемонстровано теоретичну можливість застосування керованого антирезонансу для розв'язання задачі гасіння резонансних коливань вала з лопатями у всьому діапазоні частот системи.

ACTIVE DAMPING OF THE KAPLAN HYDROTURBINE SHAFT WITH BLADES

V. O. Shevchenko¹, Yu. O. Lymarenko², V. I. Popivshchyi²

¹College of Economics and Law of ZNU,

²Engineering Institute of ZNU

shevictory@gmail.com

Key words:

shaft with blades, discrete model, kaplan hydroturbine, forced vibrations, resonance, vibrations damping, controlled antiresonance.

Forced oscillations of a shaft with blades of a Kaplan turbine are considered on the basis of an improved discrete model consisting of an absolutely rigid shaft, on which identical absolutely rigid blades elastically connected to the shaft are planted with a constant step. Each blade is presented as a system with three degrees of freedom in the form of three rigidly connected rigid plates; the central plate is elastically connected to

the shaft, and the side plates are arranged at predetermined angles to the central one. The free oscillations of the given system with an arbitrary number of blades are described by a homogeneous system of ordinary second order differential equations with constant coefficients.

A system of differential equations is described, which describes the forced oscillations of a shaft with blades under the influence of force acting on one of the blades and changes with time according to the harmonic law. The amplitude-frequency characteristics of generalized coordinates are analyzed on the example of a model with three blades. It is demonstrated that the amplitude-frequency characteristics of generalized coordinates are the preservation or absence of resonance phenomena at natural frequencies corresponding to one nodal diameter, and at natural frequencies of axisymmetric oscillations.

On the example of forced oscillations with one disturbing force it is shown that the forced oscillations of the system at resonant frequencies increase to large values the amplitude not only of the blade, which acts by the disturbing force, but also the amplitudes of the remaining blades, that is demonstrated the possibility of using the oscillations of one blade due to action on another. The amplitude-frequency characteristics for the case of the action of disturbing forces on two blades are shown, which demonstrate the complete damping of resonance phenomena at natural frequencies of axisymmetric oscillations and the need to take into account certain restrictions on the direction of action and the amplitude of the anti-resonant force for damping of resonance oscillations. The theoretical possibility of the use of controlled anti-resonance to solve the problem of damping the resonant oscillations of a shaft with blades in the whole frequency range of the system is demonstrated.

Вступ. Механічні системи, що являють собою вал з насадженими на нього лопатями, є складовою частиною багатьох промислових агрегатів, які активно використовуються у різних галузях промисловості. Прикладами таких агрегатів є гідротурбіни, компресори та турбіни газотурбінних двигунів. Коло задач, які виникають як в процесі виготовлення, так і в процесі експлуатації турбін, досить великий. Серед них – проблеми, пов'язані з розрахунком власних частот і форм коливань вала з лопатями, питання, пов'язані з неруйнівною діагностикою пошкоджень елементів системи, розрахунки на міцність, пов'язані з виявленням потенційно небезпечних з точки зору тріщинотворення місць концентрації напруг, гасіння резонансних коливань і т.д.

Багатокомпонентність конструкції обумовлює складність відповідної математичної моделі [1, 2], яка б дозволяла здійснювати необхідні розрахунки. При цьому існують практики використання декількох підходів: континуального, континуально-дискретного і дискретного. Спроба проводити розрахунки за допомогою континуальних моделей механіки деформівного твердого тіла ґрунтується, по-перше, в складність

формування визначальної системи рівнянь, а по-друге, в аналітичну нерозв'язність цієї системи, у зв'язку з чим доводиться проводити декомпозицію механічної системи і окремо розглядати лопаті і вал [2, 3], що суттєво обмежує клас задач, які можуть бути розв'язані за допомогою таких моделей. У зв'язку з цим для розрахунків, що базуються на континуальних моделях системи «вал з лопатями», зазвичай застосовують сучасні чисельні підходи, що базуються на використанні методу скінченних елементів та сучасних обчислювальних комплексів типу Ansys, Comsol і т.п. [4-6]. При цьому деякою мірою ускладнюється аналітичний аналіз отримуваних чисельних розв'язків. У випадку кваліфікації системи «вал з лопатями» до категорії дискретно-континуальних систем здійснюють континуалізацію набору лопатей, замінюючи їх вплив на диск силами і моментами, розподіленими вздовж окружності [1, 7], що унеможливує розв'язання деяких задач, наприклад задач, пов'язаних з розрахунками на міцність, з гасінням резонансних коливань вала з лопатями.

Існує також підхід, що передбачає для розв'язання деяких питань, пов'язаних із

системою «вал з лопатями», використовувати повністю дискретну модель [8, 9]. У даній роботі подібний підхід використовується для ілюстрації потенційної можливості розв'язання задачі про гасіння резонансних коливань вала з лопатями за допомогою явища керованого антирезонансу. У якості математичної моделі вала з лопатями використовується вдосконалена дискретна модель, запропонована в роботі [9].

Дискретна модель. Розглянемо дискретну модель вала з лопатями робочого колеса поворотно-лопатевої гідротурбіни (рис. 1). Модель складається з абсолютно твердого вала радіуса R і маси M , на який насаджено n абсолютно твердих пружно з'єднаних з валом лопатей з постійним кроком $2\pi/n$. Осі, навколо яких обертаються лопаті відносно вала, утворюють з віссю обертання вала кут α_1 .

Кожна лопать розглядається як система з трьома степенями вільності у вигляді трьох пружно з'єднаних жорстких пластин; центральна пластина пружно з'єднана з валом, а бічні пластини розташовані під кутами α_2 і α_3 до центральної. Всі лопаті вважаються однаковими.

Дана модель є спорідненою з моделлю, використаною в роботі [10] для дослідження можливості гасіння резонансних коливань вала за допомогою антирезонансу, і відрізняється від неї тим, що бічні лопаті моделюються не однією, а трьома пластинами, що дозволяє більш адекватно моделювати геометричні та пружні властивості реальних лопатей з точки зору їх участі у спільних коливаннях всієї механічної системи.

У якості узагальнених координат, які задають положення системи в просторі, обрано координати x , y , z центру вала, кути повороту вала φ_x , φ_y , φ_z відносно нерухомих, зазначених на рисунку 1 координатних осей OX , OY і OZ , а також кути φ_{k1} , φ_{k2} , φ_{k3} ($k = 1, \dots, n$) поворотів пластин навколо своїх осей обертання; всього $3n + 6$ координат.

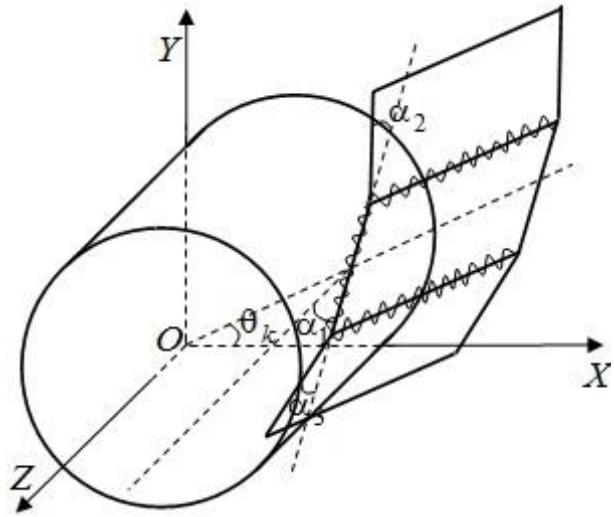


Рис. 1. Схема кріплення лопаті до вала

Для отримання рівнянь руху дискретної моделі використовуємо рівняння Лагранжа другого роду, для чого кінетичну і потенційну енергії системи попередньо виражаємо через узагальнені координати і швидкості. У результаті для випадку малих коливань системи поблизу положення рівноваги отримуємо зв'язану систему з $3n + 6$ звичайних диференціальних рівнянь [11]:

$$\begin{aligned}
 & S_{11_n} \ddot{x} + S_{15_n} \ddot{\varphi}_y + S_{17}^s \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k1} \sin \theta_k + \\
 & + S_{17}^c \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k1} \cos \theta_k + S_{18} \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k2} \sin \theta_k + \\
 & + S_{19} \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k3} \sin \theta_k + cx = 0; \quad (1) \\
 & S_{22_n} \ddot{y} + S_{24_n} \ddot{\varphi}_x + S_{27}^s \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k1} \sin \theta_k + \\
 & + S_{27}^c \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k1} \cos \theta_k + S_{28} \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k2} \cos \theta_k + \\
 & + S_{29} \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k3} \cos \theta_k + cy = 0; \\
 & S_{33_n} \ddot{z} + S_{37} \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k1} + S_{38} \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k2} + \\
 & + S_{39} \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k3} + c_z z = 0; \\
 & S_{24_n} \ddot{y} + S_{44_n} \ddot{\varphi}_x + S_{47}^s \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k1} \sin \theta_k + \\
 & + S_{47}^c \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k1} \cos \theta_k + S_{48}^s \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k2} \sin \theta_k +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+S_{48}^c \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k2} \cos \theta_k + S_{49}^s \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k3} \sin \theta_k + \\
 &+S_{49}^c \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k3} \cos \theta_k + c_{xy} \varphi_x = 0; \\
 &S_{15_n} \ddot{x} + S_{55_n} \ddot{\varphi}_y + S_{57}^s \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k1} \sin \theta_k + \\
 &+S_{57}^c \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k1} \cos \theta_k + S_{58}^s \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k2} \sin \theta_k + \\
 &+S_{58}^c \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k2} \cos \theta_k + S_{59}^s \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k3} \sin \theta_k + \\
 &+S_{59}^c \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k3} \cos \theta_k + c_{xy} \varphi_y = 0; \\
 &S_{66_n} \ddot{\varphi}_z + S_{67} \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k1} + S_{68} \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k2} + \\
 &+S_{69} \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_{k3} + c_\varphi \varphi_z = 0; \\
 &\left(S_{17}^s \sin \theta_k + S_{17}^c \cos \theta_k \right) \ddot{x} + \\
 &+ \left(S_{27}^s \sin \theta_k + S_{27}^c \cos \theta_k \right) \ddot{y} + S_{37} \ddot{z} + \\
 &+ \left(S_{47}^s \sin \theta_k + S_{47}^c \cos \theta_k \right) \ddot{\varphi}_x + \\
 &+ \left(S_{57}^s \sin \theta_k + S_{57}^c \cos \theta_k \right) \ddot{\varphi}_y + S_{67} \ddot{\varphi}_z + \\
 &+ S_{77} \ddot{\varphi}_{k1} + S_{78} \ddot{\varphi}_{k2} + S_{79} \ddot{\varphi}_{k3} + \left(c_1 + 2c_0 h^2 \right) \varphi_{k1} - \\
 &- c_0 h^2 \left(\varphi_{k-1,1} + \varphi_{k+1,1} \right) = 0 \\
 &\left(k = 1, \dots, n \right) \quad \left(\varphi_0 = \varphi_n, \varphi_{n+1} = \varphi_1 \right); \\
 &S_{18} \ddot{x} \sin \theta_k + S_{28} \ddot{y} \cos \theta_k + S_{38} \ddot{z} + \\
 &+ \left(S_{48}^s \sin \theta_k + S_{48}^c \cos \theta_k \right) \ddot{\varphi}_x + \\
 &+ \left(S_{58}^s \sin \theta_k + S_{58}^c \cos \theta_k \right) \ddot{\varphi}_y + S_{68} \ddot{\varphi}_z + \\
 &+ S_{78} \ddot{\varphi}_{k1} + S_{88} \ddot{\varphi}_{k2} + c_2 \varphi_{k2} = 0 \quad \left(k = 1, \dots, n \right); \\
 &S_{19} \ddot{x} \sin \theta_k + S_{29} \ddot{y} \cos \theta_k + S_{39} \ddot{z} + \\
 &+ \left(S_{49}^s \sin \theta_k + S_{49}^c \cos \theta_k \right) \ddot{\varphi}_x + \\
 &+ \left(S_{59}^s \sin \theta_k + S_{59}^c \cos \theta_k \right) \ddot{\varphi}_y + S_{69} \ddot{\varphi}_z + \\
 &+ S_{79} \ddot{\varphi}_{k1} + S_{99} \ddot{\varphi}_{k3} + c_3 \varphi_{k3} = 0 \quad \left(k = 1, \dots, n \right),
 \end{aligned}$$

де $\mathbf{F} = (0; F_1; 0; 0; 0; F_1(R + l_1); F_1 l_1 \cos \alpha; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0)^T$ – вектор-стовпчик узагальнених сил для випадку $n = 3$.

Розв’язок системи рівнянь (4) знаходимо методом нормальних координат [12] в аналогічному (3) вигляді:

$$x = A_x \cos pt, \quad y = A_y \cos pt, \quad z = A_z \cos pt,$$

де $S_{11_n}, S_{22_n}, S_{33_n}, S_{44_n}, S_{55_n}, S_{66_n}, S_{77}, S_{15_n}, S_{17}^s, S_{17}^c, S_{18}, S_{19}, S_{24_n}, S_{27}^s, S_{27}^c, S_{28}, S_{29}, S_{37}, S_{38}, S_{39}, S_{47}^s, S_{47}^c, S_{48}^s, S_{48}^c, S_{49}^s, S_{49}^c, S_{57}^s, S_{57}^c, S_{58}^s, S_{58}^c, S_{59}^s, S_{59}^c, S_{67}, S_{68}, S_{69}$ – коефіцієнти, які залежать від масових і геометричних характеристик; $c, c_\varphi, c_{xy}, c_z, c_0, c_1$ – жорсткісні характеристики системи. У матричному вигляді система (1) має вигляд:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\mathbf{X} = 0, \quad (2)$$

де \mathbf{X} – вектор-стовпчик узагальнених координат системи (1), \mathbf{M} – матриця мас, \mathbf{C} – матриця жорсткостей.

Наведені рівняння з урахуванням симетрії механічної системи, що розглядається, дозволяють визначати власні форми та частоти коливань відповідної дискретної моделі [9].

Вимушені коливання. Розглянемо вимушені коливання системи на прикладі вала з трьома лопатями.

Нехай на лопать з номером 1 діє деяка збурювальна сила \bar{F}_1 , прикладена в точці $C_{\bar{F}_1}$ (рис. 2) площини XOY , спрямована паралельно до цієї площини і перпендикулярна до осі OX . Точка $C_{\bar{F}_1}$ прикладення сили розташована на осі OC_{11} на відстані l_1 від лінії кріплення лопаті до вала.

Нехай модуль сили \bar{F}_1 змінюється з часом за гармонічним законом:

$$F_1 = f_1 \cos pt. \quad (3)$$

Тоді рух розглянутої механічної системи під дією сили \bar{F}_1 описуватиметься неоднорідною системою $3n + 6$ диференціальних рівнянь вигляду:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_x &= A_{\varphi_x} \cos pt, \quad \varphi_y = A_{\varphi_y} \cos pt, \\
 \varphi_z &= A_{\varphi_z} \cos pt, \quad \varphi_{ki} = A_{ki} \cos pt \quad (5) \\
 &\quad (k = \overline{1, 3}, i = \overline{1, 3}),
 \end{aligned}$$

де амплітуди коливань $A_x, A_y, A_z, A_{\varphi_x}, A_{\varphi_y}, A_{\varphi_z}, A_{ki}$ ($k = \overline{1, 3}, i = \overline{1, 3}$) узагальнених координат залежать від частоти p вимушених коливань:

$$\begin{aligned} A_x &= A_x(p), A_y = A_y(p), A_z = A_z(p), \\ A_{\varphi_x} &= A_{\varphi_x}(p), A_{\varphi_y} = A_{\varphi_y}(p), A_{\varphi_z} = A_{\varphi_z}(p), \\ A_{ki} &= A_{ki}(p) \quad (k = \overline{1, 3}, i = \overline{1, 3}). \end{aligned} \quad (6)$$

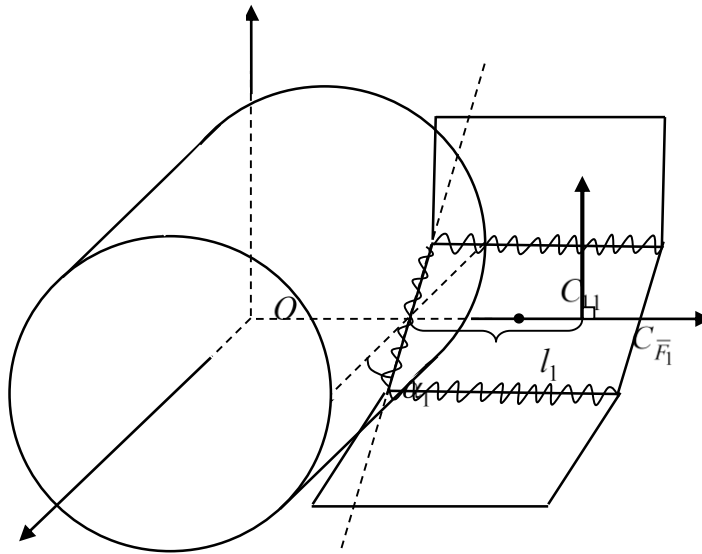


Рис. 2. Схема прикладення збурювальної сили до першої лопаті

Проаналізуємо отримані амплітудно-частотні характеристики (АЧХ). Для наочності на наведених нижче графіках точками позначено $p = \omega_{0i}$ ($i = \overline{1, 5}$), пунктиром – $p = \omega_{1i}$ ($i = \overline{1, 5}$), де перший індекс 0 у позначенні власних частот ω відповідає формам коливань з осьовою симетрією, 1 – формам коливань з одним вузловим діаметром.

Як показали розрахунки, АЧХ узагальнених координат $x, y, \varphi_x, \varphi_y$ принципово не відрізняються. Всі вони характеризуються наявністю резонансних явищ на власних частотах, що відповідають одному вузловому діаметру, і їх відсутністю на частотах вісесиметричних форм коливань (рис. 3). Це пов'язано з відсутністю при таких коливаннях лінійних переміщень вала уздовж осей OX і OY .

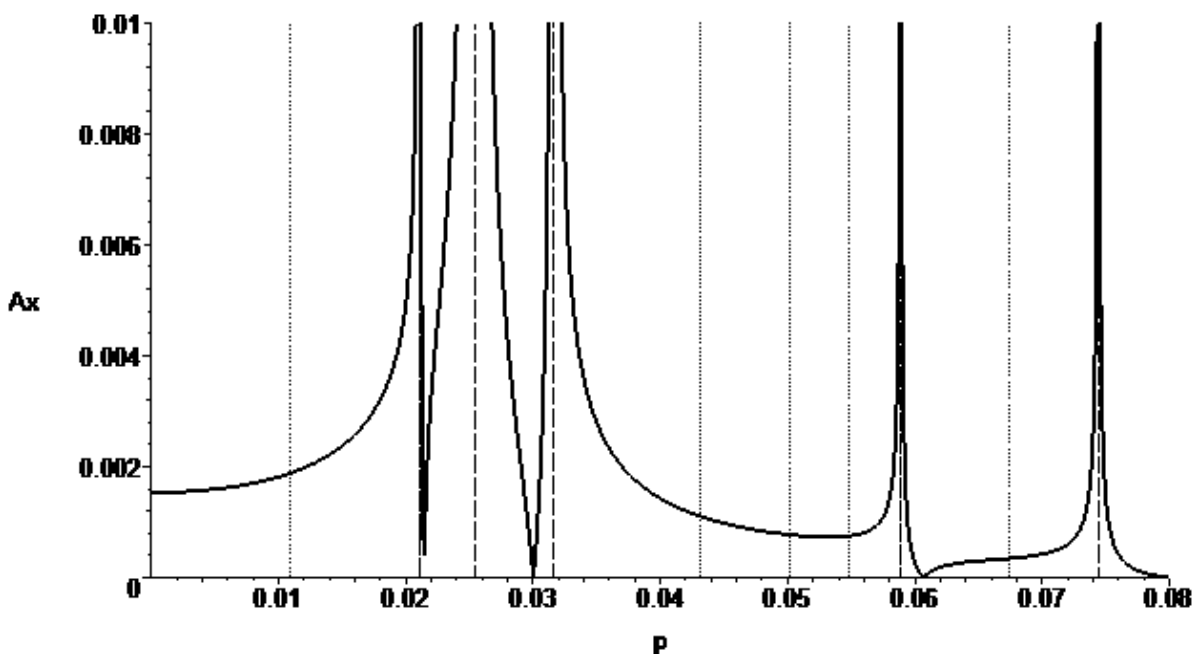


Рис. 3. АЧХ узагальненої координати x

АЧХ для узагальнених координат z і φ_z також мають схожий вигляд (рис. 4). На відміну від попереднього випадку вони характеризуються відсутністю резонансних явищ

на власних частотах, що відповідають одному вузловому діаметру, і їх наявністю на частотах вісесиметричних форм коливань. Це викликано відсутністю поворотів вала при таких коливаннях.

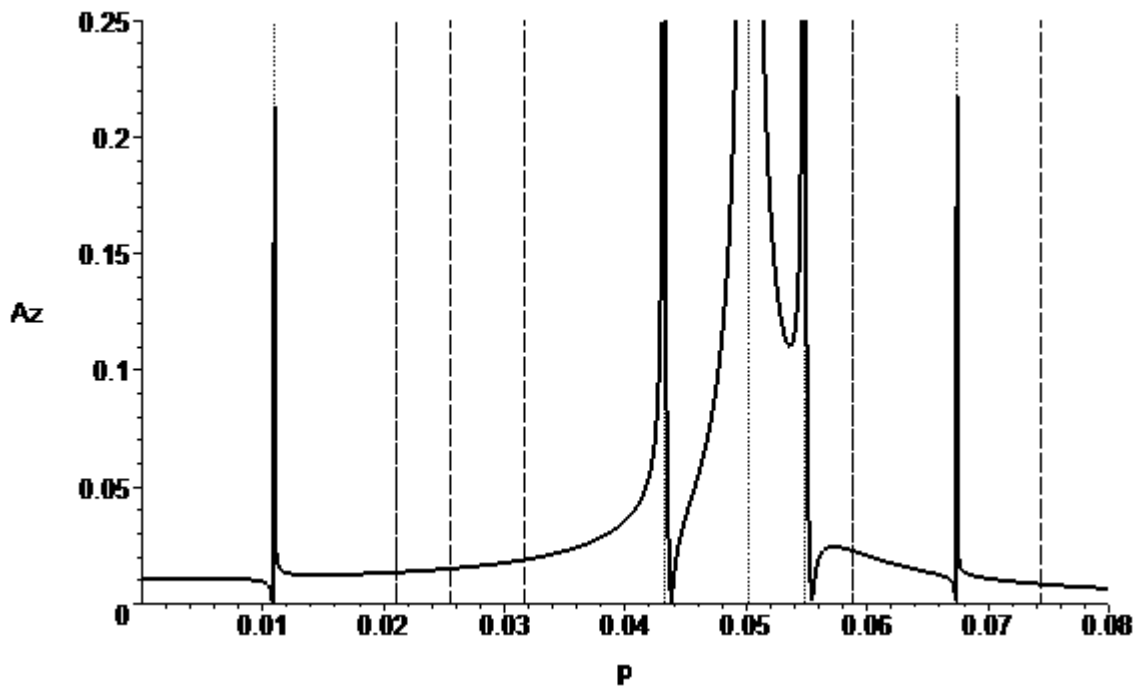


Рис. 4. АЧХ узагальненої координати z

АЧХ координат φ_{ki} ($k = \overline{1, 3}, i = \overline{1, 3}$) мають резонанси на всіх частотах (рис. 5),

оскільки лопаті беруть участь у всіх видах власних форм коливань вала з лопатями.

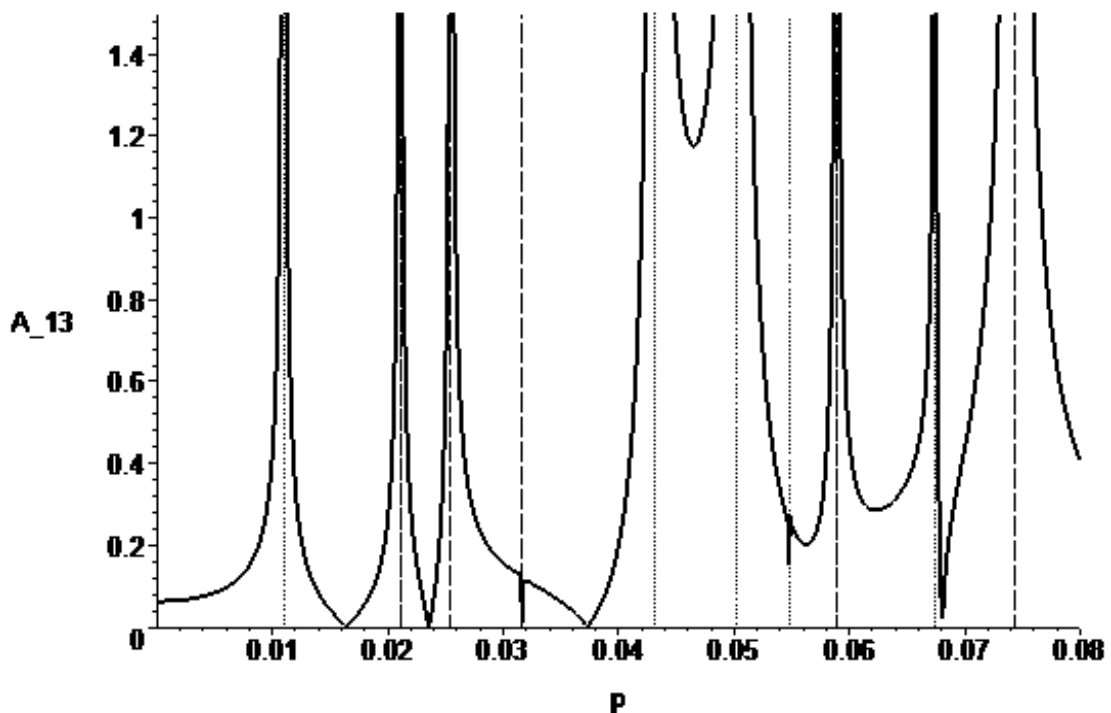


Рис. 5. АЧХ узагальненої координати φ_{13}

Як показують розрахунки, у випадку прикладання збурювальної сили до лопаті

під номером два або три картина коливань принципово не змінюється.

Керований антирезонанс. Як було продемонстровано вище, при вимушених коливаннях системи на резонансних частотах зростає до великих значень амплітуда не тільки тієї лопаті, на яку діє збурювальна сила, а й амплітуди решти лопатей. Тобто сила, що діє на одну лопать, має великий вплив і на всі інші лопаті. Цей ефект дає змогу здійснювати гасіння резонансних коливань однієї лопаті за рахунок дії на іншу, тобто застосовувати явище керованого антирезонанса [13].

Продемонструємо можливість гасіння коливань на прикладі вала з трьома лопатями.

Нехай збурювальні сили однакової частоти діють одночасно на першу й другу лопаті (рис. 6). Обидві сили змінюються за гармонічним законом:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} F_2; F_1 - \frac{F_2}{2}; 0; 0; 0; F_1(R+l_1) + F_2(R+l_2); F_1 l_1 \cos \alpha + F_2 l_2 \cos \alpha; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0 \right)^T$$

– вектор-совпчик узагальнених сил для випадку $n = 3$. При цьому амплітуда f_1 збурювальної сили, що діє на першу лопать, вважається відомою, а амплітуда f_2 сили, прикладеної до другої лопаті, підлягає визначенню з умови антирезонансу [13] – рівності нулю амплітуди коливань першої лопаті, а саме її центральної пластини, коливання якої ми бажаємо загасити:

$$A_{11} = 0. \quad (8)$$

Розв'язок отриманої системи рівнянь, аналогічно попередньому випадку, знаходимо методом нормальних координат у вигляді (5).

При цьому в рівняннях зникає невідома A_{11} , але замість неї з'являється інша невідома f_2 , і, таким чином, баланс кількості невідомих і рівнянь зберігається.

Результати проведених досліджень вимагають певних коментарів. Як згадувалося вище, при дії на одну лопать здійснюється вплив на всі інші, отже, у процесі повного гасіння коливань обраної лопаті коливання всіх інших лопатей зазнають певного впливу. При цьому розрахунки показують, що всі АЧХ (окрім A_{11} , яка дорівнює нулю) можна охарактеризувати спільними особли-

$$F_1 = f_1 \cos pt, \quad F_2 = f_2 \cos pt. \quad (7)$$

Взаємне розташування вектора сили \bar{F}_2 і лопаті, на яку вона діє, співпадає, відповідно, з вектором сили \bar{F}_1 і першою лопаттю. Тобто сила \bar{F}_2 , прикладена в точці $C_{\bar{F}_2}$ площини XOY , спрямована паралельно до цієї площини і перпендикулярна до осі OC_{21} , де C_{21} – центр мас центральної пластини другої лопаті. Точка $C_{\bar{F}_2}$ прикладення сили розташована на осі OC_{21} на відстані l_2 від лінії кріплення другої лопаті до вала.

Тоді система рівнянь руху буде мати аналогічний до (4) вигляд, де

востями, які, для прикладу, можна проілюструвати за допомогою АЧХ для узагальненої координати φ_{32} (рис. 6).

Так, резонанси на резонансних частотах вісесиметричних форм коливань повністю відсутні.

На противагу цьому резонанси на власних частотах з одним вузловим діаметром зберігаються (нагадаємо, що розрізняють два види вузлових діаметрів – горизонтальний і вертикальний). Це відбувається через те, що збурювальні сили, що діють на перші дві лопаті, розташовані під певним кутом одна до одної. При цьому збурювальна сила \bar{F}_1 має лише вертикальну складову (оскільки направлена уздовж осі OY), а так звана антирезонансна сила \bar{F}_2 – і горизонтальну, і вертикальну. Отже, вертикальна складова сили \bar{F}_2 компенсує вертикальну складову \bar{F}_1 , а горизонтальна складова \bar{F}_2 викликає коливання з горизонтальним вузловим діаметром, які силою \bar{F}_1 не викликалися. Це накладає певні обмеження на застосування явища керованого антирезонансу і потребує вживання спеціальних заходів. Зокрема, можна вимагати, щоб сили \bar{F}_1 і \bar{F}_2 були спрямовані уздовж однієї осі.

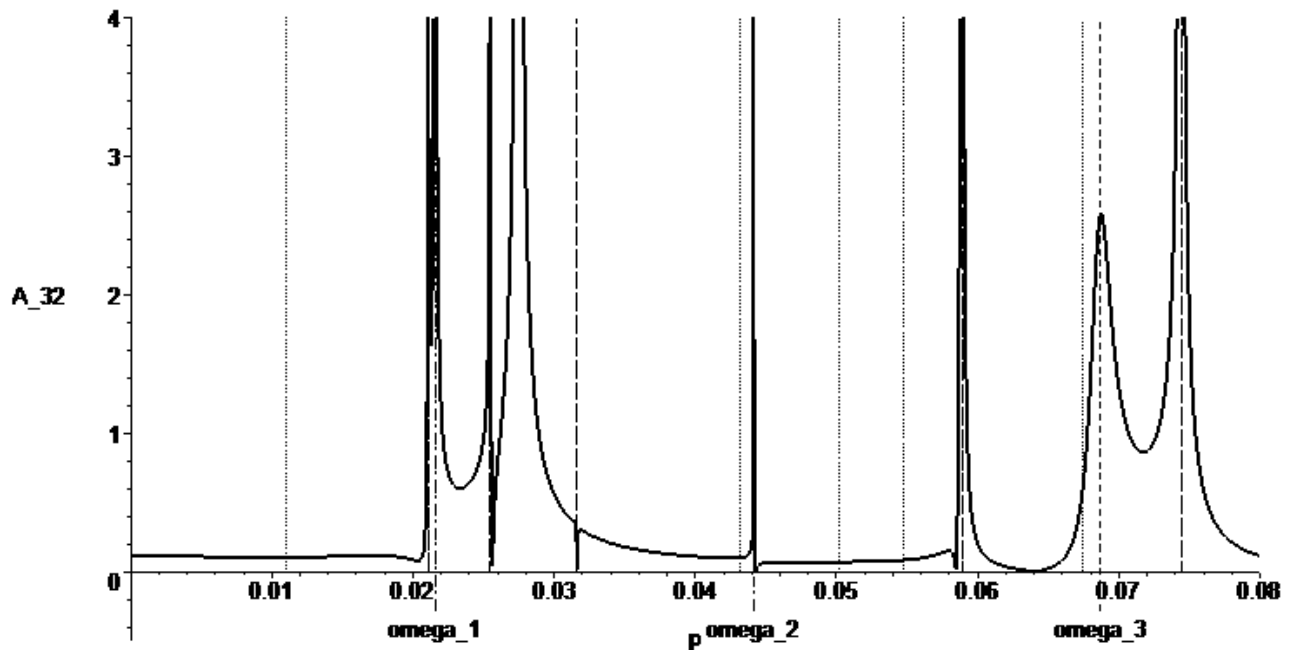


Рис. 6. АЧХ узагальної координати φ_{32} у випадку дії двох сил

Крім резонансних частот вісесиметричних форм коливань і форм коливань з одним вузловим діаметром, є інша група частот з великими амплітудами коливань. На графіку (рис. 6) ці частоти позначено через ω_i ($i = \overline{1, 3}$). Наявність цієї групи можна пояснити, згадавши випадок дії однієї збудовувальної сили на першу лопать, а саме АЧХ для узагальної координати φ_{21} , що характеризує рух центральної пластини тієї лопаті, на яку діє антирезонансна сила. Розрахунки свідчать, що при вказаних частотах ω_i ($i = \overline{1, 3}$) амплітуда коливань другої лопаті обертається в нуль. Як було показано в роботах [10, 13], у подібних випадках повне гасіння коливань є неможливим, оскільки силу, що гасить коливання, прикладено в точках з нульовою амплітудою. Проте, як і у вказаних випадках, йдеться про ділянки, на яких амплітуда коливань, що гасяться, досить мала, і їх гасіння, як таке, не є необхідним. Тому доцільним було б обмеження величини амплітуди f_2 антирезонансної сили аналогічним до випадку ланцюжків чинном [13].

Отже, дослідження вимушених коливань вала з лопатями поворотного-лопатевої

гідротурбіни за допомогою вдосконаленої дискретної моделі продемонструвало теоретичну можливість гасіння резонансних коливань на всіх власних частотах коливань системи, тобто задача керування резонансними явищами в усьому діапазоні частот розв'язана повністю.

Висновки. На основі вдосконаленої дискретної моделі розглянуто задачу про вимушені коливання вала з лопатями поворотного-лопатевої гідротурбіни. Розрахунки виконано на прикладі вала з трьома лопатями. Проаналізовано проблему керування резонансними явищами зазначеної механічної системи за допомогою антирезонансу. Порівняння отриманих результатів з результатами розрахунків, отриманих для базової дискретної моделі вала з лопатями, дозволяє зробити висновок про те, що запропонована вдосконалена модель, з одного боку, дозволяє більш адекватно моделювати реальну конструкцію, з іншого – підтверджує можливість гасіння небажаних резонансних коливань системи в усьому діапазоні частот, не демонструючи при цьому якихось принципово нових аспектів.

Література

1. Воробьев Ю. С. Колебания лопаточного аппарата турбомашин. Киев: Наук. думка, 1988. 224 с.
2. Иванов В. П. Колебания рабочих колес турбомашин. Москва: Машиностроение, 1983. 223 с.
3. Байшагиров Х. Ж., Ермаганбетова С. К. Собственные частоты колебаний композиционных лопастей и лопаток турбомашин. *Технические науки – от теории к практике: сб. статей по матер. LIV междунар. науч.-практ. конф.* 2016. № 1(49). С. 164–171.
4. Воробьев Ю. С., Янецки С., Тишковец Е. В., Кани С. П. Анализ колебаний турбинного лопаточного аппарата со связями на основе трехмерных моделей. *Вибрации в технике и технологиях.* 2001. № 4 (20). С. 19–23.
5. Бурого Н. Г., Журавлев А. Б., Никитин И. С. Анализ напряженного состояния контактной системы «диск-лопатка» газотурбинного двигателя. *Вычислительная механика сплошных сред.* 2011. Т. 4, № 2. С. 5–16.
6. Ермаков А. И., Урлапкин А. В., Федорченко Д. Г. Влияние связанности колебаний на собственные формы рабочего колеса с неидентичными лопатками. *Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета.* 2014. № 5 (47), Ч. 3. С. 76–81.
7. Вибрации в технике / ред. В. Н. Челомей. Москва: Машиностроение, 1980. Т. 3. 544 с.
8. Григорьева П. П., Шамровский А. Д. Исследование колебаний поврежденных дисков с лопатками газотурбинных двигателей на основе дискретной модели. *Проблемы машиностроения.* 2005. Т. 8, № 2. С. 56–64.
9. Шамровский А. Д., Шевченко В. А. Расчет собственных частот и форм колебаний вала с лопастями с помощью дискретной модели. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* 2011. Вип. 17. С. 289–295.
10. Шамровский О. Д., Шевченко В. О., Лимаренко Ю. О. Моделирование та аналіз коливань вала з лопатками на основі дискретної моделі. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий.* 2011. №3/10 (51). С. 26–30.
11. Шамровский А. Д., Шевченко В. А., Лымаренко Ю. А. Дискретное моделирование рабочего колеса поворотно-лопастной гидротурбины. *Надійність і довговічність машин і споруд.* 2011. Вип. 34. С. 100–108.
12. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. Москва: Машиностроение, 1985. 472 с.
13. Шамровский А. Д., Шевченко В. А., Лымаренко Ю. А., Пазюк Ю.М. Активное гашение колебаний в пружинно-массовой цепочке. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Механіка.* 2009. Вип. 13, Т. 2, № 5. С. 179–190.

References

1. Vorobev, Y. S. (1988). Oscillations of the blade apparatus of turbomachines. Kyiv: Naukova dumka.
2. Ivanov, V. P. (1983). Oscillations of the turbomachine's working wheels. Moscow: Mashinostroenie.
3. Bayshagirov, Kh. Zh. & Yermaganbetova, S. K. (2016). Self-resonant frequency of compositional impellers and blades of turbo-machines. Technical science – from theory to practice: sbornik statei po materiyalam LIV mezhdunarodnoi nauchno-praktycheskoi konferentsyy, No. 1 (49), pp. 164–171.
4. Vorobev, Y. S., Yanetsky, S., Tyshkovets, E. V. & Kani, S. P. (2001). Analysis of oscillations of a turbine blade apparatus with connections based on three-dimensional models. *Vibration in engineering and technology*, No. 4 (20), pp. 19–23.
5. Burago, N. G. Zhuravlev, A. B. & Nikitin, I. S. (2011). Analysis of stress state of GTE contact system «disk-blade». *Computational continuum mechanics*, Vol. 4, No. 2, pp. 5–16.
6. Ermakov, A. I. Uralapkin, A. V. & Fedorchenko, D. G. (2014). Influence of vibration connectedness on eigenmode shapes of bladed disks with non-identical blades. *Vestnik of Samara State Aerospace University*, No. 5 (47), P. 3, pp. 76–81.

7. Chelomei, V. N. & ed. (1980). *Vibrations in technology*. Moskow: Mashinostroenie, Vol. 3.
8. Hryhorieva, P. P. & Shamrovski, A. D. (2005). The research of oscillations of damaged disks with blades of gas turbine engines based on a discrete model. *Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 8, No. 2, pp. 56–64.
9. Shamrovskiy, A. D. & Shevchenko, V. A. (2011). Shaft with blades eigenfrequency and mode shapes calculation with the help of discrete model. *Problems of computational mechanics and strength of structures*, Issue 17, pp. 289–295.
10. Shamrovskiy, O. D., Shevchenko, V. O. & Lymarenko, Y. O. (2011). Modeling and analysis of a shaft with blades oscillations based on a discrete model. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, No. 3/10 (51), pp. 26–30.
11. Shamrovski, A. D., Shevchenko, V. A. & Lymarenko, Y. A. (2011). Discrete modeling of adjustable-blade turbine water wheel. *Reliability and life of machines and structures*, Issue 34, pp. 100–108.
12. Timoshenko, S. P., Young, D. H. & Weaver, W. (1985). *Vibration Problems in Engineering*. Moskow: Mashynostroieniie.
13. Shamrovski, A. D., Shevchenko, V. A., Lymarenko, Y. A. & Paziuk, Y. M. (2009). Active damping in a spring-mass chain. *Bulletin of Dnipropetrovsk University. Series: Mechanics*, Issue 13, Vol. 2, No. 5, pp. 179–190.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-16

УРАХУВАННЯ ТЕРТЯ ТА ЗЧЕПЛЕННЯ В КОНТАКТНІЙ ЗАДАЧІ ДЛЯ КРИВОЛІНІЙНОГО СЕКТОРА

А. Г. Шпорта, Т. С. Кагадій

Державний вищий навчальний заклад НТУ «Дніпровська політехніка»,
rector@nmu.org.ua

Ключові слова:

жорсткий штамп, контактна задача, циліндрична анізотропія, тертя та зчеплення, асимптотичний метод.

У статті наведений розв'язок задачі про дію жорсткого штампа на вільну грань пружного ортотропного кругового сектора скінченних розмірів з циліндричною анізотропією, головні напрямки якої співпадають з полярними координатами. Пластина закріплена за по-вздожніми кромками. Припускається, що в області контакту штампа та пластини існують ділянки ковзання, де враховується тертя, і ділянка зчеплення. Для розв'язання задачі використовується асимптотичний метод, який дозволяє звести розв'язання складної задачі лінійної теорії пружності до послідовного розв'язання крайових задач теорії потенціалу. У процесі розв'язання згаданим методом вводяться афінні перетворення, як наслідок – вдається розкласти напружено-деформований стан поставленої задачі на дві складові. Кожна з цих складових знаходиться окремо, але пов'язані між собою через граничні умови. Шукані характеристики напруженого стану знаходяться як суперпозиція складових.

Завдяки запропонованому підходу можливе проведення попередньої оцінки напружено-деформованого стану різноманітних практично важливих задач.

ACCOUNT OF FRICTION AND CLUTCH IN A CONTACT PROBLEM FOR A CURVILINEAR SECTOR

A. H. Shporta, T. S. Kagadiy

State Higher Educational Institution National TU «Dnipro Polytechnic»,
rector@nmu.org.ua

Key words:

hard stamp, contact problem, cylindrical anisotropy, friction and adhesion, asymptotic method.

The article presents the problem solution on the impact of a rigid stamp on the free face of an elastic orthotropic circular sector of finite size with cylindrical anisotropy, the main directions of which coincide with the polar coordinates. The plate is fixed along the longitudinal edges. It is assumed that in the area of contact between the punch and the plate there are sliding areas (where friction is taken into account) and a coupling area. In the area of contact of the stamp with the plate, there are two sliding areas adjacent to the end points of the contact area, and a coupling area located between them. The question of determining the laws of stress distribution under the stamp. Also important as a result is the size of the clutch area.

To solve the problem, an asymptotic method is used. This method allows us to decompose the stress-strain state of the plate into two components, each of which is found in the sequential solution of boundary value problems of potential theory.

The perturbation method considered by the authors of this article made it possible to reduce the solution of complex problems of linear elasticity to subsequently solved boundary value problems of potential theory. We study new linear problems that are currently relevant. In particular, the work addressed the problem of A.A. Galin about transferring the load from a stamp to a round plate.

In the process of problem solving, a relationship is established between the dimensions of the coupling area, the contact area, the sector opening angle. A relationship is also established between the friction coefficient and the stiffness characteristics of the plate material.

With the help of the approach proposed by the authors, analytical solutions of various practically important problems can be obtained. It is possible to carry out assessments of the stress-strain state of structures, mechanisms, or parts in the event that, during interaction, areas of sliding and adhesion appear.

Постановка проблеми. Серед питань, які актуальні сьогодні, досить важливою залишається задача про передачу зусиль і тисків від одних деталей взаємодії до інших. Наприклад, при взаємному їх зіткненні. Тоді виникає необхідність у проведенні коректної попередньої оцінки напружено-деформованого стану поставленої задачі.

Саме тому проблема моделювання контактних взаємодій має особливе значення для будівництва та машинобудування. Такі моделі характеризують процеси руйнування і довговічності, міцності, зносостійкості конструкцій і споруд.

Необхідність вирішення цих питань, яка проявилася на практиці, зумовила важливість розробки методів розрахунку контактних взаємодій, а також дослідження деяких певних контактних задач [1].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Вивченню напружено-деформованого стану деталей та механізмів під час контактної взаємодії присвячені численні наукові дослідження. Зокрема, плоска пружна задача про дію жорсткого штампа на границю пружної ізотропної напівплощини з урахуванням того, що в області контакту існують ділянки ковзання та зчеплення, вперше була поставлена та наближено розв'язана Л. О. Галінім ще в 1945 р.

Під час розв'язання різних задач, що відносяться до теорії пружності, широко використовуються методи малого параметра (фізичного або геометричного). Дана тема досить важлива і розглядалася різними авторами, але у зв'язку зі складністю постановки задачі, як і раніше, є актуальними.

У працях [2, 3] задачі про передачу навантаження розв'язуються чисельно-аналітичними методами.

Виділення невирішених раніше питань. Під час взаємодій досить часто виникають ситуації, коли в процесі з'являються ділянки ковзання та зчеплення. Важливим

питанням також є визначення ділянки зчеплення. У цьому випадку можуть бути використані відповідні аналітичні розв'язки модельних задач.

У даній роботі вивчається нова задача про дію жорсткого штампа на вільну грань пружного ортотропного кругового сектора скінченних розмірів з циліндричною анізотропією.

У процесі розв'язання поставленої задачі встановлюється зв'язок між розмірами області з'єднання, площею контакту та кутом розкриття сектора. Також враховується зв'язок між коефіцієнтом тертя та характеристиками жорсткості матеріалу пластини.

Метод, який було застосовано для розв'язання поставленої проблеми, дозволяє розкласти напружено-деформований стан пластини на дві складові, кожна з яких може бути знайдена шляхом послідовного розв'язання крайових задач теорії потенціалу.

Постановка задачі. Нехай пружна пластинка $R_0 \leq r \leq R_1$, $-\gamma \leq \theta \leq \gamma$ закріплена за кромками $\theta = \pm\gamma$. На границю $r = R_0$ на ділянці $-\lambda \leq \theta \leq \lambda$ діє жорсткий штамп з основою, яка співпадає з границею $r = R_0$, навантаженою нормальним зусиллям P_0 (штамп переміщується поступально, паралельно осі Ox). Інша границя, $r = R_1$, залишається вільною. Припускається, що в області контакту штампа з пластинкою існують дві ділянки ковзання, які примикають до кінцевих точок області контакту, та ділянка зчеплення, розташована між ними. У зонах ковзання зсувні зусилля направлені у протилежні боки. Граничні точки ділянки зчеплення ($\theta = \pm\alpha$), які заздалегідь не відомі та повинні бути визначені у ході розв'язання задачі, розташовані симетрично відносно осі Ox . Напруження в цих точках повинні бути обмежені та безпервні. Пластина, товщиною δ , працює в умовах узагальненого плоского напруженого стану. Матеріал її є ортотропним, голо-

вні напрямки анізотропії співпадають з полярними координатами r, θ . Потрібно визначити закони розподілу напружень під штампом і розмір ділянки зчеплення.

Викладення основного матеріалу. Якщо замість полярних координат r, θ ввести безрозмірні координати ξ, η співвідношеннями $r = R_0 e^\xi, \theta = \eta$, то поставлена задача може бути зведена до інтегрування рівнянь рівноваги пластини у переміщеннях

$$B_1 u_{\xi\xi} + G u_{\eta\eta} - B_2 (v_\eta + u) + G m v_{\xi\eta} - G v_\eta = 0,$$

$$G v_{\xi\xi} + B_2 v_{\eta\eta} + B_2 u_\eta + G m u_{\xi\eta} + G (u_\eta - v) = 0$$

при наступних граничних умовах:

зовні штампа

$$\sigma_1 = B_1 (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\xi + \mathcal{G}_2 (v_\eta + u)) = 0,$$

$$\tau = G (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\eta + v_\xi - v) = 0$$

$$(\xi = 0, \lambda < |\eta| < \gamma),$$

$$u = v = 0 \quad (\eta = \pm\gamma);$$

під штампом

$$u = const = C_0 \quad (\xi = 0, |\eta| \leq \lambda),$$

$$v = 0 \quad (\xi = 0, |\eta| \leq \alpha),$$

$$\tau = sign(\eta) \rho \sigma_1 \quad (\xi = 0, \alpha < |\eta| < \lambda)$$

на границі $\xi = h, |\eta| < \gamma$ ($r = R_1, |\theta| < \gamma$),
 $\sigma_1 = \tau = 0$.

Крім того, повинні бути виконані умови рівноваги штампа. Тут $u = u_r, v = u_\theta$ – компоненти вектора переміщень пластини; $B_1 = E_1 \delta / (1 - \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2)$, $B_2 = E_2 \delta / (1 - \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2)$, $G = G_* \delta$; σ_1 – нормальне в напрямку координати ξ напруження; τ – дотичне напруження; E_1, E_2 – модулі пружності вздовж головних напрямків; G_* – модуль зсуву; $m = 1 + \mu$, $\mu = \mathcal{G}_2 B_1 / G = 1 + \mathcal{G}_1 B_2 / G$; $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ – коефіцієнти Пуассона матеріалу пластини; ρ – коефіцієнт тертя ($\rho < 1$); індекси ξ, η позначають диференціювання за відповідними координатами.

Для дослідження сформульованої задачі застосуємо асимптотичний метод, розроблений у [4-6]. Визначення напруженого стану першого типу (що повільно змінюється у напрямку координати ξ) у першому наближенні зводиться до інтегрування рівняння

$$B_1 u_{\xi\xi}^{1,0} + G u_{\eta\eta}^{1,0} = 0, \quad (1)$$

при наступних граничних умовах:

$$\sigma_1^0 = B_1 R_0^{-1} u_\xi^{1,0} = 0$$

$$(\xi = 0, \lambda < |\eta| < \gamma; \xi = h, |\eta| < \gamma),$$

$$u^{1,0} = C_0 \quad (\xi = 0, |\eta| \leq \lambda),$$

$$u^{1,0} = 0 \quad (\eta = \pm\gamma). \quad (2)$$

Оскільки при $\eta = \pm\gamma$ компонента вектора переміщення $u^{1,0}$ дорівнює нулю, то й $u_\xi^{1,0}$ при $\eta = \pm\gamma$ також дорівнюватиме нулю.

Переміщення $v^{1,0}$, яке відповідає даному напружено-деформованому стану, знаходиться зі співвідношення [4, 5]

$$v_\eta^{1,0} + u^{1,0} = 0. \quad (3)$$

Введемо нові незалежні змінні $x_1 = (G/B_1)^{1/2} \xi, y_1 = \eta$, тоді крайова задача (1), (2) набуває вигляду

$$u_{x_1 x_1}^{1,0} + u_{y_1 y_1}^{1,0} = 0, \quad (4)$$

$$u_{x_1}^{1,0} = 0 \quad (x_1 = 0, \lambda < |y_1| < \gamma; x_1 = h_1, |y_1| < \gamma);$$

$$u^{1,0} = C_0 \quad (x_1 = 0, |y_1| \leq \lambda),$$

$$u_{x_1}^{1,0} = 0 \quad (y_1 = \pm\gamma);$$

$$h_1 = (G/B_1)^{1/2} h. \quad (5)$$

Таким чином, потрібно знайти аналітичну в прямокутнику $0 \leq x_1 \leq h_1, |y_1| \leq \gamma$ функцію $u^{1,0}$ за заданими граничними умовами (5). Цю задачу розв'язуватимемо відображенням прямокутника з площини z_1 ($z_1 = y_1 + i x_1$) у верхню напівплощину зображень ζ_1 ($\zeta_1 = \eta_1 + i \xi_1$). Функція відображення має вигляд [7]

$$\zeta_1 = sn(K(k_1) z_1 / \gamma; k_1). \quad (6)$$

При цьому початок координат зберігає своє розташування, а точка $z_1 = \gamma$ переходить у

точку $\zeta_1 = 1$; $z_1 = \gamma + ih_1$ переходить у $\zeta_1 = 1/k_1$; $z_1 = ih_1$ – у $\zeta_1 = \infty$. Оскільки $sn(-z) = -sn(z)$, то точка $z_1 = -\gamma$ переходить у точку $\zeta_1 = -1$; $z_1 = -\gamma + ih_1$ – у точку $\zeta_1 = -1/k_1$, а точки $z_1 = \pm\lambda$ – у точки $\zeta_1 = \pm sn(K(k_1)\lambda/\gamma; k) = \pm\ell_1$. Тут $sn(z)$ – еліптичний синус, $K(k_1)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду, причому модуль k_1 знаходиться з рівняння [7]

$$K(k'_1)/K(k_1) = h_1/\gamma \quad (k'_1 = \sqrt{1-k_1^2}). \quad (7)$$

Нехай $\varphi^0 = u^{1,0} + i\theta^{1,0}$ ($\theta^{1,0}$ – гармонічна функція, сполучена з $u^{1,0}$). Тоді

$$\varphi_1^0 = \varphi_{y_1}^0 = u_{y_1}^{1,0} + i\theta_{y_1}^{1,0} = u_{x_1}^{1,0} - iu_{x_1}^{1,0}.$$

Функцію $\varphi_1^0(x_1, y_1)$ можна визначити у напівплощині ζ_1 . Із умов (5) і співвідношення (6) випливає, що на дійсній осі напівплощини в інтервалі $|\eta_1| < \ell_1$ відома дійсна частина функції φ_1^0 , а на інших інтервалах осі η_1 відома її уявна частина.

Задача про визначення аналітичної у напівплощині функції, коли на деяких інтервалах границі відома дійсна, а на деяких інших уявна частина шуканої функції, розв'язується за допомогою формули Келдиша–Седова. Оскільки з умов (5) випливає, що на границі напівплощини ζ_1 в інтервалі $|\eta_1| < \ell_1$ дійсна частина функції φ_1^0 дорівнює нулю, а на решті частини границі уявна її частина дорівнює нулю, то розв'язання для функції φ_1^0 в усій напівплощині має вигляд

$$\varphi_1^0(\zeta_1) = \frac{A}{\sqrt{\zeta_1^2 - \ell_1^2}},$$

де A – дійсна стала; обирається та гілка кореня, яка додатна при додатних значеннях аргументу.

Дійсна та уявна частини $\varphi_1^0(\zeta_1)$ визначають функції $u_{y_1}^{1,0}$, $u_{x_1}^{1,0}$. Зокрема, при $\xi_1 = 0$ ($x_1 = 0$ або $y_1 = \pm\gamma$; чи $x_1 = h_1$, $|y_1| < \gamma$)

$$\varphi_1^0(\eta_1) = \frac{A}{\sqrt{\eta_1^2 - \ell_1^2}}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} u_{y_1}^{1,0} &= 0, \quad u_{x_1}^{1,0} = \frac{A}{\sqrt{\ell_1^2 - \eta_1^2}} \quad (|\eta_1| < \ell_1), \\ u_{y_1}^{1,0} &= \frac{A}{\sqrt{\eta_1^2 - \ell_1^2}}, \quad u_{x_1}^{1,0} = 0 \quad (|\eta_1| > \ell_1), \\ \eta_1 &= sn(K(k_1)y_1/\gamma; k). \end{aligned} \quad (10)$$

Нормальне напруження σ_1^0 та складова доічного напруження $\tau^{1,0}$, відповідна функції $u^{1,0}$, знаходяться за формулами

$$\begin{aligned} \sigma_1^0 &= B_1 (R_0 e^\xi)^{-1} u_\xi^{1,0} = (R_0 e^\xi)^{-1} \sqrt{GB_1} u_{x_1}^{1,0}, \\ \tau^{1,0} &= Gu_\eta^{1,0} (R_0 e^\xi)^{-1} = G (R_0 e^\xi)^{-1} u_\eta^{1,0}. \end{aligned}$$

Стала A визначається з умови рівноваги штампа та дорівнює

$$A = -P_0 R_0 [2\sqrt{GB_1} C_1 B]^{-1}, \quad (11)$$

$$C_1 = \frac{\gamma}{K(k_1)}, \quad B = \int_0^{\ell_1} \frac{dt}{\sqrt{(\ell_1^2 - t^2)(1-t^2)(1-k_1^2 t^2)}}.$$

Тоді тиск під штампом у першому наближенні виражається наступним чином:

$$\sigma_1^0 = -\frac{P_0}{2C_1 B} \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - \eta_1^2}}, \quad (12)$$

а функція $u_{y_1}^{1,0}$ при $\xi = 0$, $|\eta_1| > \ell_1$ знаходиться за формулою

$$u_{y_1}^{1,0} = A(\eta_1^2 - \ell_1^2)^{-1/2}, \quad (13)$$

де A подається рівністю (11).

Складова $v^{1,0}$ компоненти вектора переміщень v^0 , відповідна даному напруженому стану, визначається з рівняння (3). Функція $u^{1,0}$ знаходиться зі співвідношень для $u_{x_1}^{1,0}$, $u_{y_1}^{1,0}$ відповідно при $|\zeta_1| < \ell_1$, $|\zeta_1| > \ell_1$ з урахуванням того, що при $y_1 = \eta = \pm\gamma$ $u^{1,0} = 0$.

Друга складова $v^{2,0}$ компоненти вектора переміщень v^0 , відповідна напруженому стану типу пограничного шару, знаходиться з рівняння [6]

$$Gv_{\xi\xi}^{2,0} + B_2 v_{\eta\eta}^{2,0} = 0. \quad (14)$$

Оскільки $v^{1,0}$ і $v^{2,0}$ мають той самий порядок за $\varepsilon = G/B_1$, а похідна $v_\xi^{2,0}$ більша за

похідну $v_{\xi}^{1,0}$ на два порядки при $q = B_2/B_1 \approx 1$, то у даному наближенні граничні умови для визначення $v^{2,0}$ з рівняння (14) запишуться наступним чином:

$$v^0 = v^{1,0} + v^{2,0} = 0 \quad (\xi = 0, |\eta| \leq \alpha),$$

$$GR_0^{-1} v_{\xi}^{2,0} = \text{sign}(\eta) \rho \sigma_1^0 \quad (\xi = 0, \alpha \leq |\eta| < \lambda),$$

$$v_{\xi}^{2,0} = -u_{\eta}^{1,0}$$

$$(\xi = 0, \lambda \leq |\eta| < \gamma; \xi = h, |\eta| < \gamma),$$

$$v_{\xi}^{2,0} = 0 \quad (\eta = \pm \gamma). \quad (15)$$

При цьому, як припускалося в постановці задачі, $\rho < 1$ ($\rho = \rho_0 \varepsilon^{1/2}$, $\rho_0 \approx 1$), а σ_1^0 під штампом знаходиться за формулою (12).

Компонента $u^{2,0}$, відповідна даному напруженому стану, задовольняє умові [5] $u_{\xi\xi}^{2,0} = 0$. Після введення нових незалежних змінних $x_2 = (B/G_2)' \xi$, $y_2 = \eta$ крайова задача (14), (15) набуває вигляду

$$v_{x_2 x_2}^{2,0} + v_{y_2 y_2}^{2,0} = 0 \quad (16)$$

$$v^{2,0} = -v^{1,0} \quad (x_2 = 0, |y_2| \leq \alpha),$$

$$v_{x_2}^{2,0} = 0 \quad (y_2 = \pm \gamma),$$

$$v_{x_2}^{2,0} = \text{sign}(y_2) \rho R_0 (GB_2)^{-1/2} \sigma_1^0$$

$$(x_2 = 0, \alpha < |y_2| < \lambda),$$

$$v_{x_2}^{2,0} = -\sqrt{\frac{G}{B_2}} u_{y_2}^{1,0}$$

$$(x_2 = 0, \lambda < |y_2| < \gamma; x_2 = h_2, |y_2| < \gamma),$$

$$h_2 = (B_2/G)^{1/2} h. \quad (17)$$

Задача (16), (17) є мішаною задачею для аналітичної функції $v^{2,0}$ у прямокутнику $0 \leq x_2 \leq h_2$, $-\gamma \leq y_2 \leq \gamma$, яка може бути розв'язана відображенням прямокутника з площини z_2 ($z_2 = y_2 + ix_2$) у верхню напівплощину зображень ζ_2 ($\zeta_2 = \eta_2 + i\xi_2$). Функція відображення має вигляд (6) із заміною z_1 на z_2 , k_1 на k_2 , причому модуль k_2 визначається з рівняння (7) також при заміні k_1 на k_2 , h_1 на h_2 .

В основі дослідження задачі лежить асимптотичний метод [4, 5], де припускається, що $G/B_1 = \varepsilon$ є малим параметром, $B_2 \approx B_1$. Тому $h_2 = (B_2/G)^{1/2} h$ багато більше за $h_1 = (G/B_2)^{1/2} h$ ($h_2/h_1 \gg 1$) і k_2 виявляється близьким до нуля. Але при малих значеннях k_2 $K(k_2) \approx \pi/2$ і функція відображення (6) переходить у функцію $\zeta_2 = C_2 \sin(\pi z_2/2\gamma)$, дійсна та уявна частини якої записуються відповідно

$$\eta_2 = C_2 \sin \frac{\pi y_2}{2\gamma} \text{ch} \frac{\pi x_2}{2\gamma},$$

$$\xi_2 = C_2 \cos \frac{\pi y_2}{2\gamma} \text{sh} \frac{\pi x_2}{2\gamma}.$$

Сталу C_2 визначають із тієї умови, щоб точки $x_2 = 0$, $y_2 = \pm \lambda$ відображалися у точки $\xi_2 = 0$, $\eta_2 = \pm \ell_1$. Тоді отримаємо:

$$C_2 = \ell_1 / \sin(\pi \lambda / 2\gamma),$$

$$\ell_1 = \text{sn}(K(k_1) \lambda / \gamma; k_1).$$

Точки $x_2 = 0$, $y_2 = \pm \gamma$ переходять у точки $\xi_2 = 0$, $\eta_2 = \pm C_2$, а точки $x_2 = 0$, $y_2 = \pm \alpha$ – у точки $\xi_2 = 0$, $\eta_2 = \pm \alpha_2$, де

$$\alpha_2 = C_2 \sin \frac{\pi \alpha}{2\gamma} = \frac{\text{sn}(K(k_1) \lambda / \gamma; k_1) \sin(\pi \alpha / 2\gamma)}{\sin(\pi \lambda / 2\gamma)}.$$

Таким чином, для другого напруженого стану (типу пограничного шару [4–6]) замість прямокутника фактично маємо напівполосу і задача, з урахуванням (17), (12), (13), у цьому разі зводиться до наступної: знайти аналітичну у напівплощині ζ_2 функцію $v^{2,0}$ за умови, що на дійсній осі напівплощини похідні функції $v^{2,0}$ набувають значення

$$v_{y_2}^{2,0} = -v_{\eta}^{1,0} = C_0 (|\eta_2| \leq \alpha_2) v_{x_2}^{2,0} = 0$$

$$(|\eta_2| \geq C_2),$$

$$v_{x_2}^{2,0} = \text{sign}(y_2) \rho A \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - \eta_2^2}}$$

$$(\alpha_2 < |\eta_2| < \ell_1),$$

$$v_{x_2}^{2,0} = -A \sqrt{\frac{G}{B_2}} \frac{1}{\sqrt{\eta_2^2 - \ell_1^2}} \quad (\ell_1 < |\eta_2| < C_2). \quad (18)$$

Тут A виражається формулою (11), враховане співвідношення (3), C_0 – осад штампа. На нескінченності напруження спадають.

$$\psi_1^0(\zeta_2) = -\frac{A}{\pi i} \sqrt{\zeta_2^2 - \alpha_1^2} \times \left(\sqrt{\frac{G}{B_2}} \left[\int_{-C_2}^{-\ell_1} \frac{f(t) dt}{t - \zeta_2} + \int_{\ell_1}^{C_2} \frac{f(t) dt}{t - \zeta_2} \right] - \right. \\ \left. - \rho \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \left[\int_{-\ell_1}^{-\alpha_2} \frac{f(t) dt}{t - \zeta_2} + \int_{\alpha_2}^{\ell_1} \frac{f(t) dt}{t - \zeta_2} \right] \right) + \frac{C_0}{\pi i} i \sqrt{\zeta_2^2 - \alpha_2^2} \int_{-\alpha_2}^{\alpha_2} \frac{1}{\sqrt{t^2 - \alpha_2^2}} \frac{dt}{t - \zeta_2}, \quad (19)$$

де

$$f(t) = \left[(t^2 - \alpha_2^2) (|t^2 - \ell_1^2|) \right]^{-1/2}.$$

Для спадання напружень на нескінченності необхідно, щоб $\psi_1^0(\zeta_2) \rightarrow 0$ при $|\operatorname{Re} \zeta_2| \rightarrow \infty$. Оскільки останній доданок у (19) прямує до нуля, то з вказаної умови отримаємо співвідношення

$$\sqrt{\frac{G}{B_1}} \left(\int_{-C_2}^{-\ell_1} f(t) dt + \int_{\ell_1}^{C_2} f(t) dt \right) = \rho \left(\int_{-\ell_1}^{-\alpha_2} f(t) dt + \int_{\alpha_2}^{\ell_1} f(t) dt \right),$$

яке може бути записане у вигляді

$$\sqrt{\frac{G}{B_1}} \int_1^c \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau^2 - \alpha_*^2)(\tau^2 - 1)}} = \rho \int_{\alpha_*}^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau^2 - \alpha_*^2)(1 - \tau^2)}}, \quad (20)$$

де $\tau = \frac{t}{\ell_1}, \quad c = \frac{C_2}{\ell_1} = \frac{1}{\sin(\pi\lambda/2\gamma)},$

$\alpha_* = \frac{\alpha_2}{\ell_1} = \frac{\sin(\pi\alpha/2\gamma)}{\sin(\pi\lambda/2\gamma)}, \quad c > 1 > \alpha_* > 0.$

Інтеграл, який стоїть у лівій частині співвідношення (20), є неповним еліптичним інтегралом першого роду $F(\varphi, \alpha_*)$, причому φ визначається рівністю

Якщо $\psi^0 = v^{2,0} + iQ^{2,0}$ ($Q^{2,0}$ – гармонійна функція, спряжена з $v^{2,0}$), то $\psi_1^0 = i\psi_{y_2}^0 = v_{x_2}^{2,0} + iv_{y_2}^{2,0}$. Функцію ψ_1^0 у будь-якій точці верхньої напівплощини ζ_2 можна визначити за допомогою формули Келдіша–Седова, яка при вказаних умовах (18) і обмеженості у точках $\zeta_2 = \pm\alpha_2$ записується наступним чином:

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{c^2 - 1}{c^2 - \alpha_*^2}}. \quad (21)$$

Інтеграл, який стоїть у правій частині рівності (20), є повним еліптичним інтегралом першого роду $K(\sqrt{1 - \alpha_*^2}) = K(\alpha'_*) = K'(\alpha_*)$, де $\alpha'_* = \sqrt{1 - \alpha_*^2}$. Тому рівність (20) може бути записана наступним чином:

$$F(\varphi, \alpha_*) = \rho (B_1/G)^{1/2} K'(\alpha_*). \quad (22)$$

Співвідношення (22) установлює зв'язок між розмірами ділянки зчеплення, області контакту, кута відкриття сектора, а також коефіцієнтом тертя та характеристиками жорсткості матеріалу пластини. Воно виявляється таким самим, як і у випадку, якби пластина являла собою напівнескінченний круговий сектор. Це пов'язано з характером даного напруженого стану (напруженого стану типу пограничного шару), який швидко змінюється у напрямку координати ξ .

З рівності (19) при $\xi_2 = 0, |\eta_2| < \alpha_2$ (на ділянці зчеплення) отримаємо

$$\psi_1^0(\eta_2) = v_{x_2}^{2,0} = -\frac{2A}{\pi} \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \eta_2 \sqrt{\alpha_2^2 - \eta_2^2} \times$$

$$\times \left(\sqrt{\frac{G}{B_1}} \int_{\ell_1}^{C_2} \frac{1}{\sqrt{(t^2 - \alpha_2^2)(t^2 - \ell_1^2)}} \frac{dt}{(t^2 - \eta_2^2)} - \right.$$

$$-\rho \int_{\alpha_2}^{\ell_1} \frac{1}{\sqrt{(t^2 - \alpha_2^2)(\ell_1^2 - t^2)(t^2 - \eta_2^2)}} dt \quad (23)$$

Останній доданок у виразі (19) при $\xi_2 = 0, |\eta_2| < \alpha_2$ дає чисто уявну величину iC_0 .

Враховуючи вигляд інтегралів, вираз (23) можна записати так

$$\begin{aligned} v_{x_2}^{2,0} &= \frac{2A}{\pi \ell_1} \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \eta_2 \sqrt{\alpha_2^2 - \eta_2^2} \times \\ &\times \left(\sqrt{\frac{G}{B_1}} \frac{1}{(\ell_1^2 - \eta_2^2)(\alpha_2^2 - \eta_2^2)} \times \right. \\ &\times \left[(\ell_1^2 - \alpha_2^2) \Pi \left(\varphi, \frac{\alpha_2^2 - \eta_2^2}{\ell_1^2 - \eta_2^2}, \alpha_* \right) - \right. \\ &\quad \left. - (\ell_1^2 - \eta_2^2) F(\varphi, \alpha_*) \right] + \\ &\left. + \frac{\rho}{(\ell_1^2 - \eta_2^2)} \Pi \left(\frac{\ell_1^2 - \alpha_2^2}{\ell_1^2 - \eta_2^2}, \alpha_* \right) \right), \quad (24) \end{aligned}$$

де $\alpha_* = \alpha_2 / \ell_1$ знаходиться з (22), $|\eta_2| < \alpha_2$, $\Pi_1(\vartheta, \alpha'_*)$, $\alpha'_* = \sqrt{1 - \alpha_*^2}$ – повний еліптичний інтеграл третього роду, $\Pi(\varphi, \mu, \alpha_*)$ – неповний еліптичний інтеграл третього роду, φ визначається рівністю (21).

Дотичне напруження під штампом у першому наближенні визначається за формулами

$$\begin{aligned} \tau &= \text{sign}(\eta) \rho \sigma_1^0 (\alpha \leq |\eta| < \lambda), \\ \tau &= R_0^{-1} \sqrt{GB_2} v_{x_2}^{2,0} (|\eta| \leq \alpha), \quad (25) \end{aligned}$$

де σ_1^0 , $v_{x_2}^{2,0}$ виражаються співвідношеннями (12) та (24).

Оскільки $0 < \alpha_* < \ell_1 < c > 1$, то

$$\frac{C_2 - 1}{c^2 - \alpha_*^2} = 1 - \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = \frac{1 - \alpha_*^2}{c^2 - \alpha_*^2} \ll 1.$$

Тоді рівність (21) може мати вигляд

$$\begin{aligned} \varphi &= \arcsin \sqrt{1 - \varepsilon_1} = \arcsin \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 + \dots \right) \approx \\ &\approx \arcsin \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 \right). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1^{1/2} - o(\varepsilon_1^{3/2}).$$

У першому наближенні по ε_1 $\varphi^0 = \pi/2$ інтеграл $F(\varphi^0, \alpha_*^0)$ стає повним еліптичним інтегралом першого роду $K(\alpha_*^0)$, а рівність (22) можна переписати наступним чином:

$$K'(\alpha_*^0) / K(\alpha_*^0) = (G/B_1)^{1/2} / \rho. \quad (26)$$

У цьому випадку визначається величина q

$$q = \exp \left(-\frac{\pi}{\rho} \sqrt{\frac{G}{B_1}} \right),$$

$$\alpha_*^0 = 4 \left(\left[\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{(\nu+1/2)^2} \right] \left[1 + 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu^2} \right]^{-1} \right)^2$$

та інтеграл

$$K = \frac{\pi}{2} \left(1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu^2} \right).$$

Якщо коефіцієнт тертя ρ дорівнює нулю, то $q = 0$, $\alpha_*^0 = 0$, тобто ділянка зчеплення зникає. Зі зростанням ρ вона зростає, окрім того, вона залежить від характеристик жорсткості матеріалу пластини. Так, при зменшенні $(G/B_1)^{1/2}$ та постійному $\rho \neq 0$ розмір ділянки зчеплення збільшується.

На цьому розв'язання задачі у першому наближенні закінчується. Оскільки $u_{\xi}^{2,0} = 0$, то граничні умови для визначення функцій $u^{1,1}$, $v^{2,1}$ у другому наближенні виявляються нульовими [4, 5]. Відповідно нульовими є і розв'язки, тобто друге наближення не вносить корективів до першого.

Відзначимо також, що якщо у напруженому стані типу пограничного шару розглядати не напівполосу, а прямокутник, то відображення його на напівплощину краще здійснювати не так, як вказано вище, а вимагати, щоб точки $x_2 = 0$, $y_2 = \pm \lambda$; $x_2 = 0$, $y_2 = \pm \gamma$ відображалися відповідно у точки $\xi_2 = 0$, $\eta_2 = \pm \ell_1$; $\xi_2 = 0$, $\eta_2 = \pm 1$.

Це дозволить уникнути переходу від одних координат до інших при формуванні граничних умов і досягається вибором однієї зі сталих у функції відображення. Друга стала (модуль k_2) при цьому визначається з умови, що точки $z_2 = \pm \gamma + ih_2$ відображаються у точки $\zeta_2 = \pm 1/k_2$. Подальший аналіз

здійснюється аналогічно викладеному вище, проте це можливо лише при достатньо малих значеннях $h = \ln(R_1/R_0)$.

Вплив тертя на тиск під штампом позначається лише з третього наближення. У цьому випадку виникає відхил за деформацією u_ξ ($\xi = 0$, $\ell_1 < |\eta_1| < 1$), яка знімається при розв'язанні рівняння (1) для функції $u^{1,2}$ з граничними умовами

$$u_\xi^{1,2} = u_\xi^{1,0} - \mu v_\eta^{1,0} \quad (\ell_1 < |\eta_1| < 1),$$

$$u_\eta^{1,2} = 0 \quad (|\eta_1| < \ell_1).$$

На границі $\xi = h$ усі функції обертаються на нуль. Оскільки $u_\xi^{1,0} = 0$ ($|\eta_1| > \ell_1$), то $u_\xi^{1,2} = -\mu v_\eta^{1,0} = \mu u^{1,0}$ ($\xi = 0$, $\ell_1 < |\eta_1| < 1$). Тут $\mu = \mathcal{G}_1 B_2 / G = \mathcal{G}_2 B_1 / G$ і врахований зв'язок між $v_\eta^{1,0}$, $u^{1,0}$, обумовлений рівністю (3).

Таким чином, відхил за нормальними напруженнями σ_1 при $\xi = 0$, $\ell_1 < |\eta_1| < 1$ викликаний лише врахуванням коефіцієнта Пуассона. Розв'язок останньої задачі повторює викладене вище, але при вказаних вище умовах.

Висновки і перспективи подальшого розвитку. Розглянутий авторами метод збурень дозволяє звести розв'язання складних задач лінійної пружності до крайових задач теорії потенціалу.

За допомогою описаного підходу можуть бути отримані аналітичні розв'язки різноманітних практично важливих задач. Можливе проведення попередньої оцінки напружено-деформованого стану конструкцій, механізмів або деталей у тому разі, коли під час взаємодії з'являються області ковзання та зчеплення.

Література

1. Kagadiy T. S., Shporta A. H. The asymptotic method in problems of the linear and nonlinear elasticity theory – ISSN 2071-2227. *Науковий вісник НГУ*. 2015. № 3. 76 с.
2. Острик В. І. Вдавлювання напівбезмежного штампа в пружну смугу за наявності тертя і зчеплення. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. Львів, 2008. Т. 51, № 1. С. 138–149.
3. Острик В. І., Улітко А. Ф. Кругова міжфазна тріщина за умови фрикційного контакту поверхонь. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. Львів, 2004. Т. 41, № 1. С. 84–94.
4. Маневич Л. І., Павленко А. В. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов. Киев: Вища шк., 1991. 131 с.
5. Павленко А. В. Плоская задача теории упругости для пластинок с криволинейной анизотропией. *Известия АН СССР. МТТ*. 1979. № 3. С. 70–82.
6. Маневич Л. І., Павленко А. В., Коблик С. Г. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. Киев–Донецк: Вища шк., 1982. 153 с.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Москва: Наука, 1973. 736 с.

References

1. Kagadiy, T. S. & Shporta, A. H. (2015). The asymptotic method in problems of the linear and nonlinear elasticity theory – ISSN 2071-2227, Naukovyy visnyk NHU, No. 3, 76 p.
2. Ostryk, V. I. (2008). Impression of semi-infinite stamp in elastic strip with regard for friction and adhesion. *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polya*, Vol. 51, No. 1, pp. 138–149.
3. Ostryk, V. I. & Ulitko, A. F. (2004). Circular interface crack with frictional contact of faces. *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polya*, Vol. 41, No. 1, pp. 84–94.
4. Manevich, L. I. & Pavlenko, A. V. (1991). Asymptotic method in micromechanics of composite materials. Kiev: Vishcha shkola.
5. Pavlenko, A. V. (1979). The plane problem of the theory of elasticity for plates with curvilinear anisotropy. *Izvestiya AN SSSR. MTT*, No. 3, pp. 70–82.
6. Manevich, L. I., Pavlenko, A. V. & Koblik, S. G. (1982). Asymptotic methods in the theory of elasticity of an orthotropic body. Kiev–Donetsk: Vishcha shkola.
7. Lavrentev, M. A. & Shabat, B. V. (1973). Methods of the theory of functions of a complex variable. Moscow: Nauka.

УДК 531.36

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-17

ПОЗИТИВНІСТЬ ДИСКРЕТНОЇ ДИНАМІЧНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ П. ЛЕСЛІ ТА ЇЇ МОДИФІКАЦІЙ

А. О. Ярош, В. В. Леонт'єва, Н. О. Кондрат'єва, Я. А. Єлховська

Запорізький національний університет

vleonteva15@gmail.com, nkondr100@gmail.com, yana.elka28@gmail.com

Ключові слова:

складна система, позитивна система, позитивність, дискретна математична модель Леслі, модифікації дискретної моделі Леслі, аналіз позитивності систем.

У роботі проводиться аналіз позитивності окремо взятої екосистеми, яка відображає розвиток біологічної популяції з оглядом на коефіцієнти розмноження та смертності індивідів залежно від віку особин розглядуваної популяції. Дослідження позитивності здійснюється за математичними моделями, що описують поведінку обраної екосистеми – класичною дискретною моделлю П. Леслі з дискретною віковою структурою та побудованими на її основі модифікованими моделями, описуваними векторно-матричними різницевиими рівняннями з матрицями сталих коефіцієнтів. За результатами проведеного на основі обраних критеріїв позитивності аналізу встановлено умови позитивності та неспозитивності досліджуваної системи, а також знайдено підходи до зведення неспозитивної системи до позитивної. Отримані результати справедливі для систем будь-якої розмірності і можуть бути використані для розширення використання досліджуваних математичних моделей та підвищення динамічних властивостей досліджуваного об'єкта.

POSITIVITY OF A DISCRETE DYNAMICAL MATHEMATICAL P. LESLIE MODEL AND ITS MODIFICATIONS

A. O. Yarosh, V. V. Leontieva, N. A. Kondratieva, Ya. A. Yelkhovska

Zaporizhzhia National University

vleonteva15@gmail.com, nkondr100@gmail.com, yana.elka28@gmail.com

Key words:

complex system, positive system, positivity, discrete mathematical Leslie model, modifications of the discrete Leslie model, analysis of the positivity of systems.

The quality of mathematical models and the usefulness of research of biological population systems are fundamentally depends on the chosen methodology for quantitative and qualitative research of such systems and the applied mathematical apparatus. This caused a great practical interest in expanding their interdisciplinary interaction in various fields of mathematical science in order to increase the models' accuracy and adequacy, to identify new structural features that could significantly expand the use of the models and improve the dynamic properties of the studied systems. This paper is devoted to the disclosure of the essence and presentation of the main stages of the analysis of the features of biological population systems and mathematical models describing their behavior.

As the studied system it is selected the separately taken ecosystem, which reflects the development of a biological population with the looking backward at the coefficients of reproduction and mortality in according to the age of the individuals in the concerned population.

As the researched feature it is chosen the property of positivity, which is inherent in some classes of the systems describing the movement and interaction of objects of various physical nature, including biological. From the standpoint of a meaningful description of the studied object, the systems' positivity follows from the content of its main characteristics. The selected ecosystem is suspicious of belonging to the class of positive systems. On this basis, it is carried out the analysis of ecosystem' positivity on the mathematical models describing its behavior – the classical discrete P. Leslie model and modified models, which are built on its basis.

As a result of the study, the conditions for the positivity and non-positivity of the studied system were determined, and approaches to transformation the non-positive system into positive system were also found.

Вступ. При дослідженні багатьох складних об'єктів (процесів, явищ) різної фізичної природи та застосовуваних до опису їх поведінки математичних моделей досить великий практичний інтерес виникає до розширення їх міждисциплінарної взаємодії в різних областях математичної науки із метою підвищення їх точності, адекватності, виявлення нових структурних особливостей й математичних властивостей, здатних значно розширити використання математичних моделей та підвищити динамічні властивості досліджуваних систем із застосуванням нового для досліджуваних моделей та процесів математичного апарату, а також з метою інтеграції міждисциплінарного знання до розв'язання практичних задач. Актуальність виокремленої проблематики притаманна багатьом об'єктам та процесам, зокрема економічної, екологічної, біологічної, демографічної, технічної та ін. спрямованостей.

Одним з найбільш затребуваних в зазначеному сенсі об'єктом на сьогоднішній день виступає окремо взята екосистема, яка являє собою таке співтовариство видів, які взаємодіють один з одним, рухаються в просторі та постійно змінюють свою чисельність [1-3]. Основним елементом екосистеми (в зазначеному сенсі) виступає популяція – структурна одиниця виду, яка, як відомо [1, 2, 4-6], являє собою сукупність особин одного виду (у середині яких особини можуть обмінюватися генетичною інформацією), здатну до самовідтворення, більш-менш ізольовану в просторі і в часі від інших аналогічних сукупностей того ж виду. У цьому зв'язку екосистема також відображає розвиток біологічної популяції з оглядом на коефіцієнти розмноження та смертності індивідів залежно від віку особин розглядуваної популяції.

При цьому, як і багатьом реальним технічним та економічним системам (об'єктам), так і екологічним, біологічним, демографічним системам, в тому числі досліджуваним в роботі системам, притаманна властивість позитивності [7-10], яка є характерною для деяких класів статичних та динамічних систем, що описують рух і взаємодію об'єктів різної фізичної природи. З позиції змістовного опису досліджуваного

процесу (об'єкта, явища) позитивність систем впливає зі змісту його головних характеристик, які в формалізованому описі набувають властивості невід'ємності. Виходячи з цього, досліджувані процеси й системи таку позитивну (невід'ємну) властивість головних характеристик об'єкта, описуваних невід'ємними (позитивними) змінними, мають за суттєву особливість, яка формує окремих підклас динамічних систем, накладає окремі обмеженості в формалізованому представленні руху системи та полягає в тому, що будь-які невід'ємні вхід і початковий стан системи генерують невід'ємні фазову траєкторію і вихід протягом усього часу [8, 9].

Враховуючи зазначену особливість досліджуваних систем, доцільним є проведення подальшого аналізу їх математичних моделей на позитивність, а, отже, на їх належність до класу позитивних систем, з метою вироблення підходів до використання математичного інструментарію теорії позитивних систем та основних положень та математичного апарату теорії невід'ємних матриць, які своєю чергою дозволять розширити наявні теоретичні знання та уявлення про закони зростання та еволюціонування біологічних популяцій та видів. Вирішенню зазначених аспектів встановленої проблематики дослідження виділених екосистем і присвячена дана робота, у якій пропонується проведення аналізу позитивності об'єкта дослідження з окремими модифікаціями із застосуванням математичного апарату теорії невід'ємних матриць та теорії позитивних систем.

Мета, об'єкт та предмет дослідження.

Метою роботи є проведення аналізу властивості позитивності математичної моделі досліджуваної екосистеми П. Леслі та її модифікацій засобами теорії невід'ємних матриць та теорії позитивних систем, що дозволить розширити наявні теоретичні знання та уявлення про закони зростання та еволюціонування біологічних популяцій та видів.

Об'єктом дослідження в роботі виступають екосистеми та математична модель П. Леслі й її модифікації, які описують їх поведінку.

Предметом дослідження є особливості математичних моделей, критерії позитивності досліджуваної екосистеми.

Для досягнення сформульованої мети були поставлені наступні завдання:

а) провести аналіз досліджуваного об'єкта на предмет можливості його приналежності до класу позитивних систем;

б) визначити основні критерії, за якими досліджуваний об'єкт є позитивним;

в) для існуючої дискретної математичної моделі П. Леслі з дискретною віковою структурою, яка описує динаміку досліджуваного об'єкта, отримати модифікаційні аналоги, здатні уточнити та розширити область розв'язуваних задач;

г) провести аналіз проєкційних матриць класичної та модифікованих дискретних математичних моделей П. Леслі з дискретною віковою структурою на позитивність за визначеними критеріями та сформулювати висновки;

д) для випадків неповного виконання критеріїв позитивності за досліджуваними моделями сформулювати умови та надати рекомендації, використання яких дозволить зробити об'єкт дослідження позитивним.

Математична модель П. Леслі та її модифікації. В якості об'єкта дослідження в роботі виступає складна динамічна екосистема, що являє собою множину взаємопов'язаних і взаємодіючих між собою елементів і підсистем біологічної природи, що становлять нероздільне ціле і забезпечують виконання системою деякої складної функції. Особливість об'єкта дослідження полягає в тому, що він є підозрілим на приналежність до класу позитивних динамічних систем [8, 9], які характеризуються властивістю позитивності на нескінченному інтервалі часу будь-яких вхідних, початкових та вихідних характеристик досліджуваного об'єкта в описуючих його поведінку математичних моделях. В якості таких математичних моделей досліджуваної екосистеми обрана дискретна математична модель вікової структури П. Леслі [1, 2] та отримані на її основі, з урахуванням окремих особливостей, модифіковані дискретні математичні моделі П. Леслі [5].

Перш ніж перейти до розгляду особливостей зазначених моделей з дискретною віковою структурою, визначимо основні припущення у розглядуваній екосистемі.

Припустимо, що існує ізольована популяція або сукупність взаємодіючих популяцій – сукупність індивідів, що можуть давати життєздатне потомство й піддаються впливу однакових внутрішніх і зовнішніх факторів.

При цьому вводяться додаткові припущення, здатні визначити границі об'єкта дослідження [1-3, 6]:

– індивідууми є рівномірно розподіленими в просторі;

– популяція в достатній мірі є однорідною за віковою і статевими ознаками;

– процес відтворення відбувається постійно;

– розмноження відбувається у дискретні моменти часу t_1, t_2, \dots, t_n ;

– загальна кількість особин є достатньо великою;

– ареал проживання індивідуумів є обмеженим;

– ресурси харчування є не обмеженими.

При цьому вважатимемо, що кожна досліджувана популяція у своєму життєвому циклі проходить кілька стадій свого розвитку або вікових ступенів. Виходячи з цього, будемо припускати, що популяція містить n вікових груп (розбитих, наприклад, за віком, розміром тіла або будь-якою іншою змінною, що може служити для розбиття). Спосіб розбиття популяції на групи визначається біологічними особливостями досліджуваної популяції та специфікою розв'язуваної задачі [5]. Тоді у кожен фіксований момент часу t популяція описується вектором $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$, де $x_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$) – чисельність індивідуумів популяції, розподілених за i -ми віковими групами в кожний момент часу $t = 0, 1, 2, \dots$. З математичної точки зору це означає, що розглядається n -мірний евклідовий простір R^n з кортежами $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$.

При цьому з біологічної точки зору впливає, що $x_i(t) \geq 0$ для усіх $t \geq 0$, а отже, $\mathbf{x}(t) \geq 0$ [4, 6, 10]. Час t визначає дискретні моменти, що збігаються з моментами переходу з одної вікової групи в наступну. Інтервал часу $t_{i+1} - t_i$ вважається постійним для будь-якого i ($i = \overline{1, n}$).

За зазначених припущень математична модель П. Леслі з дискретною віковою структурою має вигляд [1, 2, 5]

$$\mathbf{x}(t+1) = L\mathbf{x}(t), \quad (1)$$

де L – матриця переходу (проекційна матриця) П. Леслі розмірністю $n \times n$, яка виступає аналогом еволюційного оператора φ^t динамічної системи з законом еволюції, який визначає стан системи $\mathbf{x}(t)$ в момент часу t за умови, що початковий стан $\mathbf{x}(0)$ є відомим, тобто з законом виду

$$\mathbf{x}(t) = \varphi^t \mathbf{x}(0),$$

та є відображенням, за яким з часом t система змінює своє положення, блукаючи деяким заданим чином по простору станів, тобто

$$\varphi^t : X \rightarrow X.$$

В інтерпретації еволюційного оператора можна сказати, що матриця Леслі L визначає детермінований характер поведінки динамічної системи [3].

Для векторно-матричного рівняння (1) ставиться задача Коші:

$$\text{при } t = t_0 = 0 \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (2)$$

де $\mathbf{x}(t_0)$ – n -мірний вектор-стовпець початкових станів рівняння (1) з компонентами початкових станів для кожної i -ї вікової групи популяцій:

$$\mathbf{x}(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0))^T.$$

За дискретною моделлю, описуваною векторно-матричним різницевою рівнянням (1), маємо наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_1) &= L\mathbf{x}(t_0); \\ \mathbf{x}(t_2) &= L\mathbf{x}(t_1) = L^2\mathbf{x}(t_0); \\ &\vdots \\ \mathbf{x}(t_k) &= L\mathbf{x}(t_{k-1}) = L^k\mathbf{x}(t_0); \\ &\vdots \\ \mathbf{x}(t_n) &= L\mathbf{x}(t_{n-1}) = L^n\mathbf{x}(t_0). \end{aligned} \quad (3)$$

Отримані рівняння (3) визначають розв'язки різницевого рівняння (1) у векторному вигляді (за кожною i -ю віковою групою популяцій) для кожного моменту часу $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_n$, кожний з яких шукається ітераційним шляхом [11-14].

За останнім з співвідношень (3) можна визначити розв'язок різницевого рівняння (1) для будь-якого обраного фіксованого моменту часу t , тобто в остаточному випадку для будь-якого фіксованого моменту часу t_i , $i = \overline{1, n}$ розв'язок різницевого рівняння (1) може бути поданий у вигляді

$$\mathbf{x}(t_i) = L\mathbf{x}(t_{i-1}) = L^i\mathbf{x}(t_0), \quad i = \overline{1, n},$$

за яким представляється можливим однозначне визначення стану i -ї вікової групи популяції в будь-який момент часу t_i ($i = \overline{1, n}$) за умови наявності повної інформації про структуру та поелементний вигляд проекційної матриці L та заданих початкових станах $x_i(t_0)$ i -ї вікової групи популяції.

Для визначення структурного вигляду матриці Леслі L у векторно-матричних рівняннях (1), (3), у зв'язку із явною однотипністю аналізовуваних рівнянь, достатньо розглянути більш детально, наприклад, перше з рівнянь (3) виду

$$\mathbf{x}(t_1) = L\mathbf{x}(t_0), \quad (4)$$

яке пов'язує вектор стану популяції $\mathbf{x}(t_1)$ у наступний момент часу t_1 з вектором стану $\mathbf{x}(t_0)$ у початковий момент часу t_0 через матрицю Леслі L .

Згідно з [1], з векторно-матричного рівняння (4) випливає, що в момент часу t_1 популяція має вікову структуру, яка описується вектором

$$\mathbf{x}(t_1) = \begin{bmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \\ x_3(t_1) \\ \vdots \\ x_n(t_1) \end{bmatrix}_{n \times 1} = [l_{ij}]_{n \times n} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ x_3(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \sum_{i=k}^{k+p} \alpha_i x_i(t_0) \\ \beta_1 x_1(t_0) \\ \beta_2 x_2(t_0) \\ \vdots \\ \beta_{n-1} x_{n-1}(t_0) \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad (5)$$

де $l_{ij} (i, j = \overline{1, n})$ – коефіцієнти матриці Леслі;
 $\alpha_i (i = \overline{k, k+p})$ – коефіцієнти народжуваності: $\alpha_i \geq 0$; $\beta_i (i = \overline{1, n-1})$ – коефіцієнти виживання: $0 < \beta_i < 1$; коефіцієнти $\alpha_i (i = \overline{k, k+p})$ та $\beta_i (i = \overline{1, n-1})$ визначаються властивостями біологічного виду і характером зовнішніх умов; $\alpha_i(x_k, \dots, x_{k+p}) = \alpha_i x_i (i = \overline{k, k+p})$ – функції народжуваності, які показують чисельність потомства відповідної i -ї вікової групи та являють собою її лінійні функції чисельності; $k, k+1, \dots, k+p$ – номери вікових груп, що можуть мати потомство (є репродуктивними); $\beta_i(x_1, \dots, x_{n-1}) = \beta_i x_i (i = \overline{1, n-1})$ – функції виживання – лінійні функції чисельності потомства i -ї вікової групи, які доживуть до наступного $(i+1)$ віку.

Компоненти визначеного в (5) вектора $\mathbf{x}(t_1)$ мають наступне тлумачення [1, 2, 6]:

$x_1(t_1) = \sum_{i=k}^{k+p} \alpha_i x_i(t_0)$ – чисельність потомства тих індивідів (особин) i -ї вікової групи ($i = k, k+1, \dots, k+p$), які за одиничний проміжок часу переходять в наступну групу та є репродуктивними; в умовах того, що частина індивідів (особин) від кожної вікової групи гине, в дану групу $x_1(t_1)$ попадає кількість потомства лише репродуктивних особин; $x_i(t_1) = \beta_{i-1} x_{i-1}(t_0)$, $i = \overline{2, n}$ – чисельність частини потомства тих індивідів (особин), які перейшли з попередньої вікової групи $x_{i-1}(t_0)$, за винятком тих індивідів (особин), що загинули.

Виходячи з наведених постулатів, матриця Леслі $L = [l_{ij}]_{n \times n}$ має вигляд [1, 10]

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \alpha_k & \alpha_{k+1} & \dots & \alpha_{k+p} & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (6)$$

та містить елементи за всіма віковими групами.

Однак, для спостереження за розвитком чисельності популяції здебільшого важливими для аналізу досліджуваної ситуації виступають тільки репродуктивні групи, які мають вплив на розвиток популяції. Тому від класичної моделі Леслі, описуваної векторно-матричним різницеvim рівнянням (1) з матрицею Леслі (6) за всіма віковими групами, переходять до модифікованої моделі

П. Леслі, описуваної векторно-матричним різницеvim рівнянням вигляду

$$\mathbf{x}(t+1) = \tilde{L} \mathbf{x}(t) \quad (7)$$

з модифікованою матрицею Леслі $\tilde{L} = [\tilde{l}_{ij}]_{n \times n}$ за лише репродуктивними групами, яка подається у вигляді [2, 5]

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \beta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad (8)$$

де α_i ($i = \overline{1, n}$) – коефіцієнти народжуваності i -ї вікової групи: $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1, n-1}$; $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \neq 0$; $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, n-1}$ тільки за умови, коли відповідна вікова група i не залишає потомства; β_i ($i = \overline{1, n-1}$) – коефіцієнти виживання i -ї вікової групи: $0 < \beta_i < 1$.

На відміну від матриці Леслі L класичного виду (6), в якій крім репродуктивних

індивідів враховуються й ті індивіди, котрі ще не можуть відтворювати потомство, та ті, що вже вийшли з репродуктивного віку, модифікована матриця Леслі \tilde{L} вигляду (8) враховує відразу ту вікову групу, яка може дати потомство (є репродуктивною). При цьому остання вікова група, що включена до модифікованої матриці \tilde{L} , не тільки дає потомство, але й являє собою групу з максимальним віком, тому є справедливою умова $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \neq 0$.

Аналогічно до класичної моделі Леслі, описуваної векторно-матричним рівнянням (1) з матрицею Леслі (6), за модифікованою моделлю Леслі, описуваною рівнянням (7) з матрицею Леслі (8), в момент часу t_1 популяція має вікову структуру, яка описується вектором

$$\mathbf{x}(t_1) = \begin{bmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \\ x_3(t_1) \\ \vdots \\ x_n(t_1) \end{bmatrix}_{n \times 1} = [\tilde{l}_{ij}]_{n \times n} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ x_3(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t_0) \\ \beta_1 x_1(t_0) \\ \beta_2 x_2(t_0) \\ \vdots \\ \beta_{n-1} x_{n-1}(t_0) \end{bmatrix}_{n \times 1}. \quad (9)$$

Всі інші співвідношення та взаємозв'язки в модифікованій моделі Леслі зберігаються.

Якщо при моделюванні динаміки досліджуваної екосистеми припустити існування популяції, яка починає процес розмноження з деякого віку та не припиняє його до кінцевого етапу життя, то в результаті отримаємо іншу модифіковану модель П. Леслі, описувану векторно-матричним різницевим рівнянням вигляду

$$\mathbf{x}(t+1) = \tilde{\tilde{L}} \mathbf{x}(t) \quad (10)$$

з модифікованою матрицею Леслі $\tilde{\tilde{L}} = [\tilde{\tilde{l}}_{ij}]_{n \times n}$ вигляду

$$\tilde{\tilde{L}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \alpha_k & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}. \quad (11)$$

Представлена в (11) модифікована матриця $\tilde{\tilde{L}}$ відображає популяцію, в якій розглядаються вікові групи, які ще не можуть давати потомство (молоді вікові групи, які ще не вступили в репродуктивну вікову групу, тобто всі $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, k-1}$), вікові групи, що можуть мати потомство (є репродуктивними) та не припиняють процес розмноження до кінцевого етапу життя ($\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{k, n-1}$, $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \neq 0$). Всі інші умови моделі Леслі зберігаються.

Зауважимо, що всі визначені вище матриці Леслі L , \tilde{L} та $\tilde{\tilde{L}}$ являють собою лінійні оператори в n -мірному евклідовому просторі. Виходячи зі змісту чисельностей змінних $x_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$) класичної та модифікованих математичних моделей Леслі, описуваних рівнянням (1), (7) та (10) відповідно, які мають бути невід'ємними, оператор L , \tilde{L} або $\tilde{\tilde{L}}$ відповідно переводить простір R^n самий в себе, тобто дія операторів

L , \tilde{L} та $\tilde{\tilde{L}}$ здійснюється у позитивному ортанті n – мірного евклідового простору з ко- нусом

$$R_+^n = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \right\},$$

що за своєю сутністю робить математичні моделі Леслі підозрілими на моделі, що опи- сують динаміку позитивних систем [7-9]. У цьому зв'язку для досліджуваних математи- чних моделей Леслі ставиться задача аналізу позитивності досліджуваної екосистеми за розглядуваними класичною та модифікова- ними математичними моделями Леслі з дис- кретним часом та дискретною віковою стру- ктурою.

Дослідження позитивності класичної та модифікованих математичних моделей П. Леслі. Проведемо аналіз позитивності досліджуваної екосистеми за класичною та модифікованими моделями П. Леслі з дис- кретною віковою структурою та дискретним часом, описуваними векторно-матричними різницевиими рівняннями відповідно до ви- гляду (1), (7) та (10).

Насамперед, визначимо поняття позити- вної системи та основних критеріїв, за якими досліджувана система вважається по- зитивною.

Згідно з [7-9], позитивні системи явля- ють собою системи, вхідні, початкові та ви- хідні стани яких є позитивними (невід'єм- ними) на проміжку всього часу їх розгля- дання.

Позитивні системи пов'язані з поняттям M -матриць (матриць Мецлера) та володіють властивостями, які доводять теореми Д. Фробеніуса та О. Перрона [15-17].

Задля того, щоб досліджувана система була позитивною, мають виконуватися на- ступні вимоги [8, 15]:

– матриці математичних моделей дос- ліджуваного об'єкта повинні належати до класу M -матриць Мецлера, тобто всі недіа- гональні елементи аналізованих матриць мають бути невід'ємними. В термінах деякої матриці $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ виконання цієї власти- вості відповідає умові $a_{ij} \geq 0$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$;

– матриці математичних моделей дос- ліджуваного об'єкта мають бути невід'єм- ними ($A \geq 0$, тобто $a_{ij} \geq 0$, $i, j = \overline{1, n}$) або до- датними ($A > 0$, тобто $a_{ij} > 0$, $i, j = \overline{1, n}$);

– матриці математичних моделей дос- ліджуваного об'єкта повинні бути нерозкла- дними, тобто такими, що при перестановці рядків вони не можуть бути приведеними до вигляду

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} B & \Theta \\ C & D \end{bmatrix}, \quad (12)$$

де B , D – квадратні ненульові матриці; C – ненульова матриця; $\Theta = (\theta_{ij})$ – нульова матриця з елементами $\theta_{ij} = 0$ для $\forall i, j = \overline{1, n}$.

В результаті, якщо матриці математич- них моделей досліджуваного об'єкта задо- вольняють наведеним вище вимогам, то це означає, що досліджувана екосистема є по- зитивною, оскільки в такому випадку для аналізованих матриць її моделей викону- ються умови теорем Д. Фробеніуса та О. Перрона [15, 16]:

– *теорема Д. Фробеніуса*: нерозкладна невід'ємна матриця $A = (a_{ij})_{n \times n}$ завжди має додатне характеристичне число λ , яке є простим коренем характеристичного рів- няння, модулі всіх інших характеристичних чисел не перевищують числа λ . «Максима- льному» характеристичному числу λ відпо- відає власний вектор $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ з дода- тними координатами;

– *теорема О. Перрона*: додатна мат- риця $A = (a_{ij})_{n \times n}$ завжди має дійсне та при цьому додатне характеристичне число λ , котре є простим коренем характеристичного рівняння та перевершує модулі всіх інших характеристичних чисел. Цьому «максима- льному» характеристичному числу відпові- дає власний вектор $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ матриці A з додатними координатами $z_i > 0$ ($i = \overline{1, n}$).

Проаналізуємо за наведеними критері- ями матриці L вигляду (6), \tilde{L} вигляду (8) та $\tilde{\tilde{L}}$ вигляду (11) відповідно до класичної та модифікованих моделей П. Леслі з дискрет- ною віковою структурою та дискретним ча- сом, описуваних векторно-матричними різ- ницевими рівняннями відповідно до ви- гляду (1), (7) та (10).

Елементи як класичної матриці L є не- від'ємними ($\alpha_k \geq 0$, $0 < \beta_i < 1$), так і моди- фікованої матриці \tilde{L} є невід'ємними ($\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1, n-1}$, $\alpha_n > 0$, $0 < \beta_i < 1$), а також

модифікованої матриці \tilde{L} є невід’ємними ($\alpha_i = 0, i = \overline{1, k-1}, \alpha_i \geq 0, i = \overline{k, n-1}, \alpha_n > 0, 0 < \beta_i < 1, i = \overline{1, n-1}$), тому всі матриці відносяться не тільки до класу M -матриць, а і до невід’ємних матриць. Отже, перша і друга вимоги задовольняються.

Оскільки, як відомо з [16], M -матриця володіє такою властивістю, що зворотна до неї матриця переводить всякий вектор з позитивними компонентами в вектор, компоненти якого також є позитивними, необхідно також є перевірка невиродженості матриць L, \tilde{L} та $\tilde{\tilde{L}}$. Оскільки останній стовпець в матриці L завжди є нульовим (у зв’язку із тим, що в цьому випадку $\alpha_n = 0$), то $\det(L) = 0$, а, отже матриця L є виродженою. Модифіковані ж матриці \tilde{L} та $\tilde{\tilde{L}}$, виходячи з зазначених вище для кожної матриці умов $\alpha_i \geq 0, 0 < \beta_i < 1, i = \overline{1, n-1}$,

$\alpha_n \neq 0$, є завжди невиродженими – усі n рядків (стовпців) матриць \tilde{L} та $\tilde{\tilde{L}}$ є лінійно незалежними (при $\beta_i \neq 0 (i = \overline{1, n-1})$) та $\alpha_n > 0$ лінійна незалежність рядків (стовпців) досягається навіть при довільних значеннях $\alpha_i \geq 0 (i = \overline{1, n-1})$, в тому числі у випадках, коли $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ дорівнюють нулю та/або приймають значення, співпадаючі із відповідними елементами в рядках (стовпцях), а отже і

$$\det(\tilde{L}) = \det(\tilde{\tilde{L}}) = \alpha_n \prod_{i=1}^{n-1} \beta_i \neq 0.$$

Перевіримо третю вимогу про нерозкладність матриць L, \tilde{L} та $\tilde{\tilde{L}}$.

Керуючись наведеним вище поняттям розкладності матриці, перевіримо можливість зведення класичної матриці L до матриці виду (12). Так, матриця L може бути представлена у вигляді (12), тобто у вигляді

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \alpha_k & \alpha_{k+1} & \dots & \alpha_{k+p-1} & \alpha_{k+p} & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \alpha_k & \alpha_{k+1} & \dots & \alpha_{k+p-1} & \alpha_{k+p} \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-3} & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{n \times n} = \begin{bmatrix} B & \Theta \\ C & D \end{bmatrix},$$

де

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \alpha_k & \alpha_{k+1} & \dots & \alpha_{k+p-1} & \alpha_{k+p} \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-3} & 0 \end{bmatrix}_{(n-2) \times (n-2)} ; \Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{(n-2) \times 2} ;$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times (n-2)} ; D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}.$$

Отже, класична матриця L є розкладною (матриці B , D – квадратні та ненульові, матриця C – ненульова, а матриця Θ – нульова), а це означає, що третя вимога не задовольняється, і тому умови теореми Д. Фробеніуса не виконуються. Таким чином, класична модель П. Леслі в результаті

проведеного дослідження не входить до класу позитивних систем.

Аналогічним чином перевіримо можливість зведення модифікованої матриці \tilde{L} до матриці вигляду (12). Розіб'ємо матрицю \tilde{L} на блоки, тобто представимо у вигляді

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{n-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{n-3} & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{n \times n} = \begin{bmatrix} B & \Theta \\ C & D \end{bmatrix},$$

де

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{n-3} & 0 \end{bmatrix}_{(n-2) \times (n-2)}; \quad \tilde{\Theta} = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{(n-2) \times 2} \neq \Theta;$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times (n-2)}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}.$$

В результаті проведеного дослідження за модифікованою матрицею \tilde{L} можна зробити висновок, що, оскільки в блочному представленні матриці \tilde{L} блочні матриці B, C, D відповідають умовам розкладної матриці (12) (матриці B, D – квадратні та ненульові, матриця C – ненульова), а матриця $\tilde{\Theta}$ – не відповідає, адже є ненульовою (елемент $\alpha_n \neq 0$ за умовами модифікованої моделі Леслі, оскільки в якості α_n виступає не

максимально можливий, а найбільший репродуктивний вік особин [2]), то модифікована матриця \tilde{L} вважається нерозкладною, адже не якою перестановкою її неможливо привести до вигляду (12), а, отже, третя вимога до позитивної системи виконується.

Перевіримо також можливість зведення модифікованої матриці \tilde{L} до матриці вигляду (12). Розбиваючи матрицю \tilde{L} на блоки, представимо її у вигляді

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \alpha_k & \alpha_{k+1} & \dots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \alpha_k & \alpha_{k+1} & \dots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-3} & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{n \times n} = \begin{bmatrix} B & \tilde{\Theta} \\ C & D \end{bmatrix},$$

де

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \alpha_k & \alpha_{k+1} & \dots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-3} & 0 \end{bmatrix}_{(n-2) \times (n-2)} ; \tilde{\Theta} = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{(n-2) \times 2} \neq \Theta ;$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times (n-2)} ; D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}.$$

Аналізуючи блочне представлення матриці \tilde{L} , отримаємо висновки, співпадаючі з висновками по модифікованій матриці \tilde{L} : блочні матриці B, C, D відповідають умовам розкладної матриці (12), а матриця Θ – не відповідає, адже є також ненульовою. Отже, модифікована матриця \tilde{L} , як і матриця \tilde{L} є нерозкладною, а отже, третя вимога до позитивної системи в даному випадку також виконується.

Оскільки для модифікованих матриць Леслі \tilde{L} та \tilde{L} виконуються всі вимоги, що

$$\det(\lambda I - \tilde{L}) = \lambda^n - \alpha_1 \lambda^{n-1} - \alpha_2 \beta_1 \lambda^{n-2} - \alpha_3 \beta_1 \beta_2 \lambda^{n-3} - \dots - \alpha_{n-1} \prod_{i=1}^{n-2} \beta_i \lambda - \alpha_n \prod_{i=1}^{n-1} \beta_i = 0 \quad (13)$$

або

$$\det(\lambda I - \tilde{L}) = \lambda^n - \alpha_k \prod_{i=1}^{k-1} \beta_i \lambda^{n-k} - \alpha_{k+1} \prod_{i=1}^k \beta_i \lambda^{n-k-1} - \dots - \alpha_{n-1} \prod_{i=1}^{n-2} \beta_i \lambda - \alpha_n \prod_{i=1}^{n-1} \beta_i = 0 \quad (14)$$

висуваються до позитивних систем, то це означає, що досліджувана екосистема є позитивною та для аналізованих матриць \tilde{L} та \tilde{L} модифікованих математичних моделей досліджуваної екосистеми виконуються умови теорем Д. Фробеніуса та О. Перрона [15, 16], згідно з якими невід’ємні нерозкладні матриці \tilde{L} та \tilde{L} мають єдине додатне власне значення $\lambda_M(\tilde{L})$ та $\lambda_M(\tilde{L})$ відповідно, яке є простим коренем характеристичного рівняння відповідно до вигляду

таким, що модулі всіх останніх власних значень матриці \tilde{L} (або $\tilde{\tilde{L}}$) не перевищують відповідно числа $\lambda_M(\tilde{L})$ (для моделі, описаної рівнянням (7)) та $\lambda_M(\tilde{\tilde{L}})$ (для моделі, описаної рівнянням (10)). Крім того, оскільки $0 < \beta_i < 1$ та за умови, що $\alpha_n > 0$ й $\alpha_n \neq 0$, у характеристичних рівняннях (13)

та (14) вільний член $\alpha_n \prod_{i=1}^{n-1} \beta_i \neq 0$, тому від-

повідно до рівняння (13) та (14) не мають нульових коренів, з чого випливає, що асимптотичний розв'язок різницевого $\mathbf{x}(t_n) = \tilde{L}^n \mathbf{x}(t_0)$ рівняння (7) для досить великих n визначатиметься власним числом $\lambda_M(\tilde{L})$ та відповідним йому власним вектором модифікованої матриці \tilde{L} . Леслі, аналогічно для матриці $\tilde{\tilde{L}}$: асимптотичний розв'язок $\mathbf{x}(t_n) = \tilde{\tilde{L}}^n \mathbf{x}(t_0)$ рівняння (10) для досить великих n визначатиметься власним числом $\lambda_M(\tilde{\tilde{L}})$ та відповідним йому власним вектором матриці $\tilde{\tilde{L}}$.

Висновки. Об'єднуючи отримані у роботі результати дослідження, можна зробити висновок, що за всіма вимогами, що висувались до проєкційних матриць модифікованих динамічних математичних моделей досліджуваного об'єкта, досліджуваний об'єкт входить до класу позитивних систем. За вимогою нерозкладності матриць тільки класична матриця П. Леслі не дає задовільного результату – вона завжди є розкладною, що призводить до неперспективності досліджуваного об'єкта, а отже, і неможливості використання відповідного математичного апарату теорії позитивних систем. При цьому, порівнюючи між собою результати дослідження нерозкладності всіх проєкційних матриць Леслі, визначено, що на результат розкладності суттєвим чином впливає значення коефіцієнту народжуваності α_n : за умови, що $\alpha_n \neq 0$, проєкційна матриця є нерозкладною, в той час як при $\alpha_n = 0$ властивість нерозкладності матриці порушується, і як наслідок, досліджуваний об'єкт не може бути позитивним. В якості рекомендацій до усунення визначеної особливості можна запропонувати вироблення у структурі досліджуваного об'єкта таке керування, яке б дозволило впливати на окремі коефіцієнти проєкційних матриць з метою їх змінювання для набуття потрібних властивостей.

Література

1. Ризниченко Г. Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 232 с.
2. Свирежев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. Москва: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука». 1978. 352 с.
3. Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 400 с.
4. Roberts F. S. Discrete Mathematical Models, with Applications to Social, Biological, and Environmental Problems. Englewood Cliffs, New York: Prentice-Hall, 1976. 559 pp.
5. Хусаинов Д. Я., Харченко І. І., Шатирко А. В. Введення в моделювання динамічних систем: навч. посібник. Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2010. 132 с.
6. Smith D. P., Keyfitz N. Mathematical Demography: Selected Papers. Berlin: Springer-Verlag, 1977. 514 p.
7. Luenberger D. G. Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models and Applications. New York: John Wiley & Sons, 1979. 446 pp.
8. Леонтьева В. В., Кондратьева Н. А. Построение и анализ разомкнутой непрерывной математической модели позитивной динамической системы балансового типа. *Вісник запорізького національного університету: зб. наук. статей. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя: ЗНУ. 2010. № 1. С. 81–88.
9. Леонтьева В. В., Кондратьева Н. А. Управление в непрерывной математической модели позитивной динамической системы балансового типа. *Вестник Херсонского национального технического университета: сб. научных статей*. Херсон: ХНТУ, 2009. Вып. 2(35). С. 273–278.
10. Єлховська Я. А., Леонтьева В. В., Кондрат'єва Н. О. Дослідження динамічних матричних математичних моделей популяційної динаміки. *Збірник наукових праць студентів, аспірантів і молодих вчених «Молода наука – 2019»*: у 5 т. Запоріжжя: ЗНУ, 2019. Т. 1. С. 32–35.
11. Kvakernaak H., Siwan R. Linear Optimal Control Systems. New York: Wiley-Interscience, 1972. 575 p.

12. Gelfond A. O. Calculus of Finite Differences. Delhi: Hindustan Publishing Corporation, 1967.
13. Sage A. P., White III C.C. Optimum systems control. Second Edition. Englewood Cliffs. NJ: Prentice-Hall, 1977. 413 p.
14. Schuppen J. H. Mathematical Control and System Theory of Stochastic Systems in Discrete-Time. Amsterdam: The Vrije Universiteit, 2006. 497 p.
15. Gantmacher F. R. The Theory of Matrices, volume one. New York: Chelsea. 1959. 374 p.
16. Стефанюк В. Л. Одна теорема об M-матрицах и ее применения. *Математические заметки*. 1973. Т. 13, Вып. 2. С. 235–246.
17. Caswell H. Matrix Population Models: Construction, Analysis, and Interpretation. Sunderland (Massachusetts): Sinauer Associates, 2001. 722 p.
18. Балакирева А. Г. Модификация неоднородной модели Лесли на случай отрицательных коэффициентов рождаемости. *Радиоэлектроника и информатика: науч.-техн. журн.* Харьков: ХНУРЕ, 2011. № 1. С. 40–43.
19. Überla K. Faktorenanalyse: Eine systematische Einführung für Psychologen, Mediziner, Wirtschafts- und Sozialwissenschaftler. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1977. 399 p.

References

1. Riznichenko, G. Yu. (2002). *Lectures on mathematical models in biology*. Part 1. Izhevsk: NITs «Regulyarnaya i Khaoticheskaya Dinamika».
2. Svirezhev, Yu. M. & Logofet, D. O. (1978). Sustainability of Biological Communities. Moscow: Nauka.
3. Bratus, A. S., Novozhilov, A. S. & Platonov, A. P. (2009). Dynamic systems and models of biology. Moscow: Fizmatlit.
4. Roberts, F. S. (1976). Discrete Mathematical Models, with Applications to Social, Biological, and Environmental Problems. Englewood Cliffs. New York: Prentice-Hall.
5. Khusainov, D. Ya., Kharchenko, I. I. & Shatyrko, A. V. (2010). Introduction to Dynamic Systems Modeling. Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv.
6. Smith, D. P. & Keyfitz, N. (1977). Mathematical Demography: Selected Papers. Berlin: Springer-Verlag.
7. Luenberger, D. G. (1979). Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models and Applications. New York: John Wiley & Sons.
8. Leontieva, V. V. & Kondratieva, N. A. (2010). Construction and analysis of an open continuous mathematical model of a positive dynamical system of balanced type. *Visnyk zaporiz'koho natsional'noho universytetu: zb. nauk. statey. Fyzyko-matematychni nauky*. Zaporizhzhya: ZNU, No. 1, pp. 81–88.
9. Leontieva, V. V. & Kondratieva, N. A. (2009). Control in the continuous mathematical model of a positive dynamical system of balanced type. *Vestnik Khersonskogo natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta: sb. nauchnykh statey*. Kherson: KHNTU, Iss. 2(35), pp. 273–278.
10. Yelkhovska, Ya. A., Leontieva, V. V. & Kondratieva, N. O. (2019). The study of dynamic matrix mathematical models of population dynamics. *Zbirnyk naukovykh prats' studentiv, aspirantiv i molodykh vchenykh «Moloda nauka – 2019»*: in 5 vol. Zaporizhzhya: ZNU, 2019. Vol. 1, pp. 32–35.
11. Kvakernaak, H. & Siwan, R. (1972). Linear Optimal Control Systems. New York: Wiley-Interscience. 575 pp.
12. Gelfond, A. O. (1967). Calculus of Finite Differences. Delhi: Hindustan Publishing Corporation.
13. Sage, A. P. & White, III C. C. (1977). Optimum systems control. 2-nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall. 413 pp.
14. Schuppen, J. H. (2006). Mathematical Control and System Theory of Stochastic Systems in Discrete-Time. Amsterdam: The Vrije Universiteit.
15. Gantmacher, F. R. (1959). The Theory of Matrices. Vol. 1. New York: Chelsea.
16. Stefanyuk, V. L. (1973). One theorem on M-matrices and their applications. *Matematicheskiye zametki*, Vol. 13, Iss. 2, pp. 235–246.
17. Caswell, H. (2001). Matrix Population Models: Construction, Analysis, and Interpretation. Sunderland (Massachusetts): Sinauer Associates.
18. Balakireva, A. G. (2011). Modification of the nonhomogeneous Leslie model in case of negative birth rates. *Radioelektronika i informatika*. Kharkov: KNURE, No. 1, pp. 40–43.
19. Überla, K. (1977). Faktorenanalyse: Eine systematische Einführung für Psychologen, Mediziner, Wirtschafts- und Sozialwissenschaftler. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

УДК 004.056.55: 003.26

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-18

BLOCK CIPHER MODES IN THE DENIABLE ENCRYPTION

A. V. Galchenko¹, S. V. Choporov²¹ Zaporizhzhia National University, ORCID: 0000-0002-2258-9755² Zaporizhzhia National University, ORCID: 0000-0001-5932-952X
s.choporoff@znu.edu.ua**Key words:**

algorithm, block cipher, deniable encryption, encryption mode, text encryption.

The problems of unauthorized access to the top systems and data stealing are considered. The deniable encryption is one of the most common in computer systems. But this encryption has some restrictions that are related to the capacity and block cipher. In this article, the block cipher algorithm has been developed. This block cipher has good capacity. Nevertheless, electronic codebook encryption mode causes the vulnerability. The objective of the article is to improve the deniable encryption algorithm searching the safe mode. Initially, possible modes of the block cipher are studied. Next, each mode is tested in block cipher for capacity and vulnerability. Finally, the optimal mode is determined. The optimal mode allows to patch the vulnerability. In addition, the modes are classified for data processing in parallel.

РЕЖИМИ БЛОЧНОГО ШИФРУ У ЗАПЕРЕЧНОМУ ШИФРУВАННІ

А. В. Гальченко¹, С. В. Чопоров²¹ Запорізький національний університет, ORCID: 0000-0002-2258-9755² Запорізький національний університет, ORCID: 0000-0001-5932-952X
s.choporoff@znu.edu.ua**Ключові слова:**

алгоритм, блочний шифр, заперечне шифрування, режим шифрування, шифрування текстів.

У даній статті розглянуто проблеми несанкціонованого доступу та викрадення конфіденційних даних, причини, які призводять до їх виникнення, та можливі наслідки. Для вирішення зазначених проблем запропоновано використовувати криптографічні системи, які ґрунтуються на методі заперечуваного шифрування даних. Разом з тим, технічні обмеження, пов'язані з реалізацією алгоритмів на базі заперечуваного шифрування, суттєво впливають на продуктивність їх роботи та обмежують їх практичне використання. Для розв'язання цієї задачі запропоновано підхід для побудови блочних схем шифрування даних з використанням алгоритмів заперечуваного шифрування. У результаті цього розроблено прототип блочного алгоритму заперечуваного шифрування даних, який має досить високу продуктивність. Але в ході досліджень прототипу встановлено, що в запропонованому підході використовується режим шифрування електронною кодовою книгою, недоліки безпеки якого суттєво впливають на надійність кінцевого алгоритму шифрування. Основною метою даної статті є вивчення існуючих режимів блокового шифрування, продуктивності та безпеки їх реалізацій, а також пошук оптимальних режимів для подальшого використання в алгоритмах заперечуваного шифрування даних, без зменшення рівня їх захищеності. За результатами проведених досліджень досліджено існуючі режими шифрування та їх реалізації. З-поміж зазначених режимів виявлено найбільш оптимальний, який не впливає на рівень захищеності кінцевих алгоритмів шифрування. Додатково встановлено, що обраний режим шифрування дозволяє не лише реалізувати вихідні алгоритми заперечуваного шифрування, але й підвищити їх продуктивність за допомогою багатопотокової обробки даних.

Introduction. In the last several decades, a large number of private and public companies have been attacked by crime and the situation is escalated [1]. Possible targets of such attacks are corporate networks and IoT devices. Typically, attackers try to get business-sensitive data or user credentials. The target of plenty cyberattacks is the another popular target of cyberattacks.

A set of well-known techniques has been used for the top systems protection [1]. Nevertheless, some protected information systems have been compromised. In some cases, the penetration has been caused by violating of security requirements. It has become to the users' keys stealing. That's why authors have suggested the deniable encryption algorithms using, which doesn't depend on keys using [2].

The subject of the research is the blocked deniable encryption.

The objective of the research is to improve the deniable encryption algorithm searching the safe mode.

Formal Problem Statement. The reliability of traditional encryption schemes is based on keys secrecy. However, such systems aren't completely protected. The most dangerous cyber-attack is the coercion to users of telecommunication systems. Large keys, schemes without keys and neural networks are typical solutions of this problem. Nevertheless, traditional encryption schemes have private data that might cause vulnerabilities [1].

In [2], authors suggested to use deniable encryption algorithms to protect users from the coercion and their own data from leakage. The reliability of these algorithms is based on probabilistic encryption schemes (see Fig. 1). Initially, both plain and private texts are employed as input data of the encryption algorithm (see Fig. 1). Next, the encryption algorithm transforms these texts in a ciphertext using a private

key. Finally, the user must submit the same private key into the decryption algorithm. The deniable encryption schema doesn't defend the private keys from the coercion attack, but this schema denies the existence of the ciphertext.

However, the deniable encryption has the following restrictions.

1. The size of the plain text depends on the key size as the following inequality:

$$\| \text{Plain text} \| < \| \text{Key} \|. \quad (1)$$

2. The limited possibility of the implementation block ciphers schemes into the deniable encryption algorithms: encryption modes, SB-Transforms, round encryptions, etc.

3. The low performance of data processing (during encryption and decryption).

The first restriction has been solved by the developing of basic block deniable encryption scheme in [2]. The performance of the block cipher method has been improved in [3].

Nevertheless, the vulnerability of in the mode of block encryption has been found during the primary analysis of the algorithm. This vulnerability is associated with the process of ciphertext blocks substitution. A cybercriminal could catch user for lie during the analysis of decrypted prepared block data.

The same vulnerability exists in the block cipher mode. This vulnerability is called «electronic code book» (ECB), but it's lacking in other cipher modes (see Fig. 2). Initially, the encryption algorithm gets the public data file **M** and the private data file **T**. Next, these files are divided into *k* blocks of the equal size $(\mathbf{M}_i, \mathbf{T}_i) < N (i = 1, 2, \dots, k)$. Each block is pre-processed for the encryption by the function f_P . Pre-processed blocks are encrypted into ciphertexts \mathbf{C}_i by the function f_E with the private key. Finally, ciphertexts \mathbf{C}_i are joined into the ciphertext **C**.

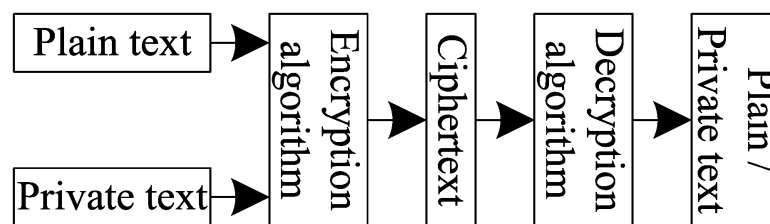


Fig. 1. The deniable encryption schema

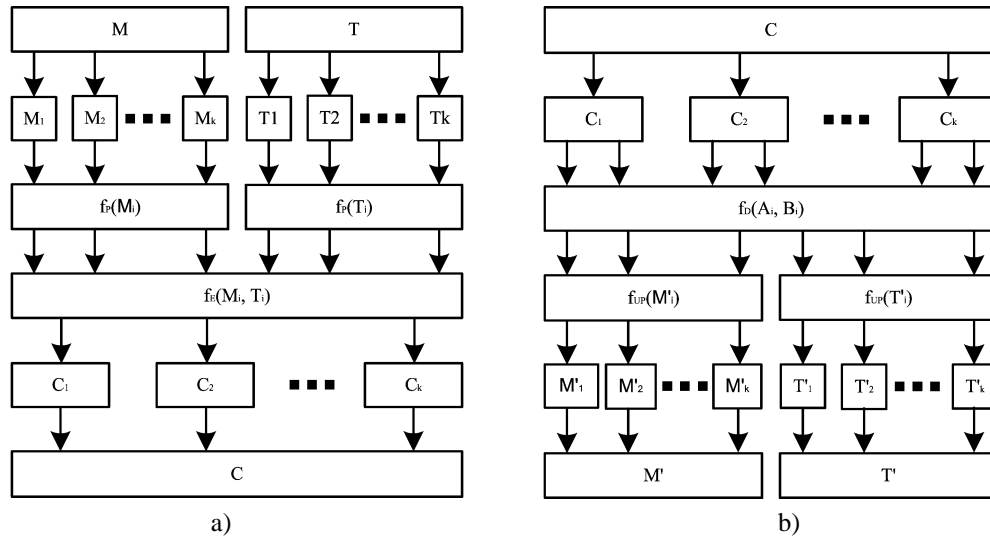


Fig. 2. The deniable encryption schema in the ECB mode: a) encryption, b) decryption

In the decryption algorithm, all operations are performed in the reverse order (see Fig. 2, b). Initially, the decryption algorithm gets the ciphertext **C** and the private key. Next, the ciphertext is divided into k blocks $(A_i, B_i) < N (i = 1, 2, \dots, k)$. Each block is decrypted by the function f_D . Decrypted blocks are processed by the function f_{UP} . This function allows to separate private blocks from public blocks. Finally, private blocks are joined into the private data file **T** and public blocks are joined into the public data file **M**.

However, cybercriminals could get the private key using specially pre-processed data or the ciphertext.

Literature Review. Deniable encryption algorithms are known since 1990. The original deniable encryption algorithm has been suggested in [2]. This algorithm is based on the bit-wise encryption. The algorithm could encrypt large size data but it doesn't support the block encryption.

The RD-PKE algorithm has been developed by Hamada Ibrahim in [5]. This algorithm includes mRSA scheme keys and the protocol. In this algorithm, a plain text must be transformed into against bits and then inputted into the prepared container. Furthermore, the algorithm requires a third-party to authorize the decrypting of plain text. Nevertheless, the algorithm doesn't allow to deny the plain text existence, because unauthorized decrypting might return broken data. This algorithm also has the restriction specified by the inequality (1).

Hence, this algorithm also requires high computing resources.

RSA and El-Gamal encryption schemes have been combined by Jing-Quing Wang and Bo Meng in [6]. This algorithm has good reliability, but the size of initial data is also restricted by (1). Thus, this encryption scheme also requires high computing resources. In addition, it also allows to catch public and private data during the ciphertext decryption.

In [6], S. Goldwasser and C. Mikali suggested an invulnerable pseudo-probabilistic encryption algorithm. This algorithm doesn't allow an unauthorized access to any part of the plain text. It requires to use the same private key to decrypt each block. But there is only one validated block that user could decrypt at the same time. Hence, user couldn't deny the existence of any secret data in case of coerces using.

Finally, M. Moldovyan has suggested the original encryption algorithm in [8]. This algorithm has modified for the block encryption in [3]. The original algorithm is based on the Rabin's encryption schema. This scheme requires to input public data and private data to transform them into the ciphertext. However, it's possible to get some public or private data during the ciphertext decryption. The algorithm allows user to deny the private data existence, but this algorithm also has the same restriction, as in [5].

In the end M. Moldovyan suggested the another deniable encryption algorithm in [9-11]. This algorithm supports the block data encryption. The reliability of this algorithm is based on common block encryption algorithms. But

the algorithm requires two different decryption key. Hence, users couldn't deny the private data existence, so users aren't protected from the coercion. Besides, this algorithm has low capacity and doesn't provide deniable encryption properties [2, 8].

Block Cipher Modes. The block cipher mode provides the privacy and authorization for users. This mode could be applied for the symmetric and some asymmetric encryption algorithms. Common cipher modes are following: electronic codebook (ECB), the cipher block chaining (CBC), cipher and output feedbacks (CFB and OFB), the counter (CTR). These modes have been described in [4].

The ECB mode is the first and the weakest algorithm. This mode masks patterns of data blocks in the encrypted data using the equation (2).

$$C_i = f_E(M_i, K). \quad (2)$$

Typically, the implementation of this mode is simple. However, it makes ciphers more vulnerable to reverse engineering attacks. Overall, it allows to get patterns of private data from the ciphertext. Hence, it isn't recommended to use, because other cipher modes haven't such vulnerabilities.

The second algorithm is the CBC mode. It suggests to encrypt a common block of plain texts M_i with the previous block of ciphertext C_{i-1} by the function f_E simultaneously:

$$C_i = f_E(M_i \oplus C_{i-1}). \quad (3)$$

The equation (3) adds the pseudo-randomness property to each block of the ciphertext. But the first block of the ciphertext requires some initialization vector IV . Blocks padding also causes a vulnerability. This vulnerability allows to steal the encryption key. Besides, the CBC mode allows to parallelize decryption. Generally, the CBC mode is more protected than the ECB mode.

The third algorithm is the CFB mode. This mode processes data like the CBC mode. The CFB mode transforms the plain text M into the ciphertext C using the function f_E . It also requires to save the initialization vector IV in the first block of the ciphertext C_0 :

$$C_i = f_E(C_{i-1}) \oplus M_i. \quad (4)$$

The FCB could be transformed in the stream cipher. However, this mode is vulnera-

ble to bit changing in the ciphertext C . This vulnerability allows the cybercriminal to determine patterns in the nearest blocks of the ciphertext C . It also could be parallelized during the decryption.

The fourth algorithm is the OFB mode. This mode is also classified as a synchronous stream cipher. The ciphertext is generated from the pre-generated stream blocks and the blocks of plain text. But each block of the ciphertext depends on the previous encrypted blocks as the following equation:

$$C_i = f_E(f_E(C_{i-1})) \oplus M_i. \quad (5)$$

The OFM model allows to use a hardware implementation of the CBC mode. But the OFM mode can't be implemented in parallel.

The last algorithm is the CTR mode. It's the same as the OFB mode. The ciphertext C is a result of the counter value CTR_i and the block of the plain text encryption:

$$C_i = f_E(CTR_i) \oplus M_i. \quad (6)$$

The CTR mode is suitable for in parallel computing systems. It allows a random access to properties during the decryption and supports a parallel encryption. Besides, this mode is widespread and haven't the ECB mode's weakness.

Generally, the encryption algorithms don't require data blocks padding in CFB, OFB, or CTR modes.

Models. In [3], the vulnerability of the deniable encryption has been found. The vulnerability is caused by the ECB mode; it allows to determine patterns of data in the ciphertext C . Hence a cybercriminal might to catch users on lying about the existing data. Some deniable encryption schemes and block cipher modes have been studied to prevent such vulnerabilities. As a result, some models of cipher modes have been developed. These models could be used in the deniable encryption algorithm.

The first model uses the CBC mode. In this model, public data M and private data T are transformed into the ciphertext C . The encryption algorithm f_E and the public are employed in the model. In the decryption process, public data M' and private data T' are recovered using the same private key and the function f_D . (see Fig. 3).

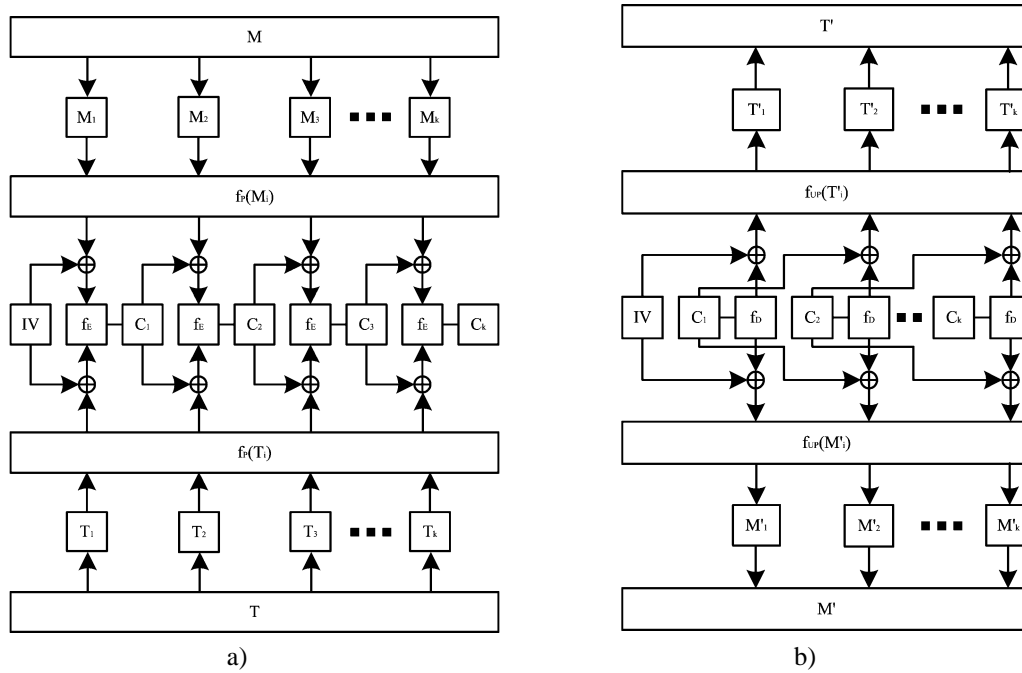


Fig. 3. The implementation of the CBC mode in the deniable encryption algorithm: a) encryption, b) decryption

The second model uses on the CFB mode. Temporary values and the initialization vector **IV** are encrypted in this model by the function f_E (see Fig. 4).

In the second model, the initialization vector **IV**, blocks of public data M_i and private data T_i are transformed into the ciphertext C_i . Next, the initialization vector **IV** is changed by the previous block of ciphertext C_i . The cycle of encryption continues, while there are blocks of data. The user must encrypt the initialization

vector **IV** again to get blocks of public data M'_i or private data T'_i . Finally, the model summates blocks of ciphertext C_i . Hence, public data **M** and private data **T** mustn't be decrypted to determine the encrypted content.

The third model is based on the OFB mode. This model includes some additional values (like the previous model). These values are also encrypted by the same encryption scheme f_E (see Fig. 5).

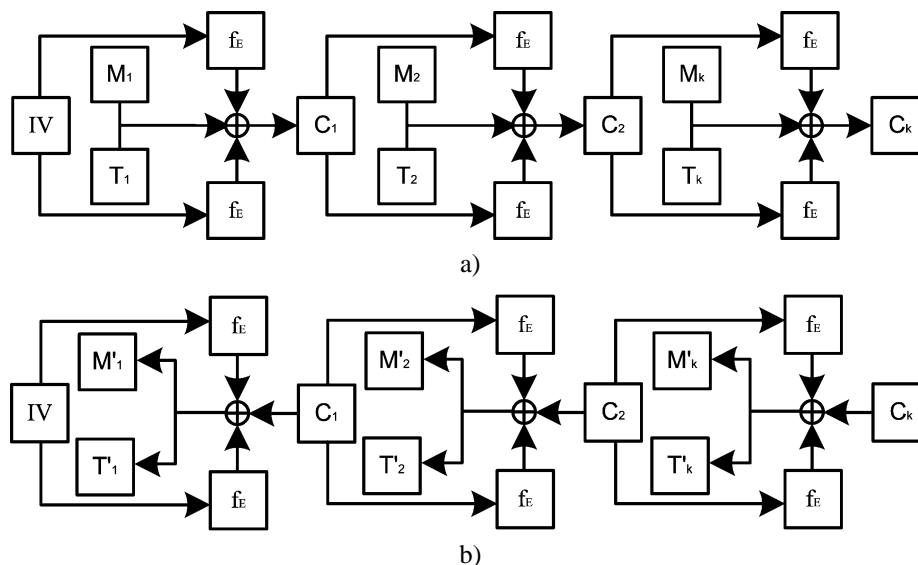


Fig. 4. The implementation of the CFB mode in the deniable encryption algorithm: a) encryption, b) decryption

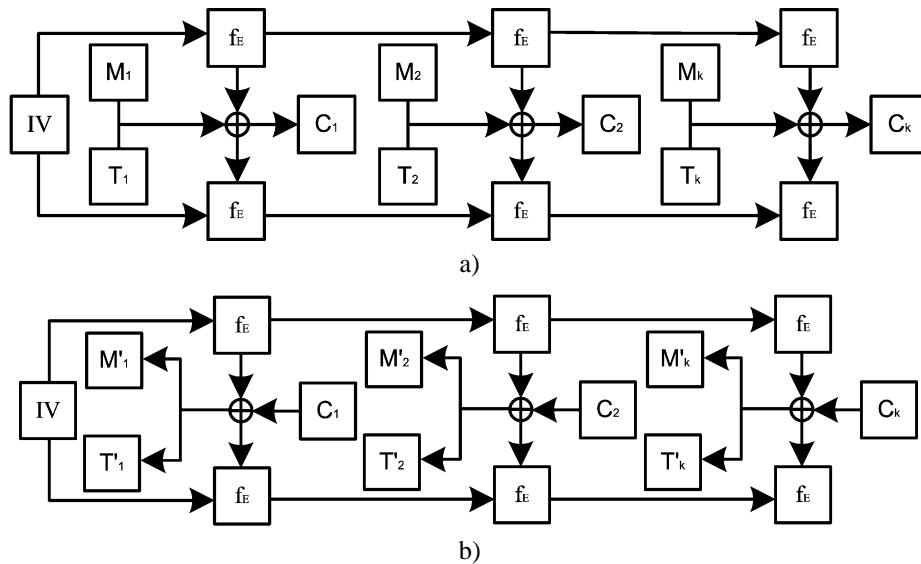


Fig. 5. The implementation of the OFB mode in the deniable encryption algorithm: a) encryption, b) decryption

In this model, the encrypted vector IV is summated with blocks of public data M and private data T . The user must encrypt the vector IV again. Next, it's summated with blocks of the ciphertext C_i . Finally, the model returns blocks of public data M'_i and private data T'_i . Hence, blocks of public data M and private data T mustn't be decrypted. This way changes the

common security schema on the XOR encryption. It makes possible to determine the encrypted content.

The last model is based on the CTR mode. There are some random values CTR_i are used in this model. The block of the ciphertext C_i is a sum of the block of public data M or private data T with the encrypted counter value CTR_i (see Fig. 6).

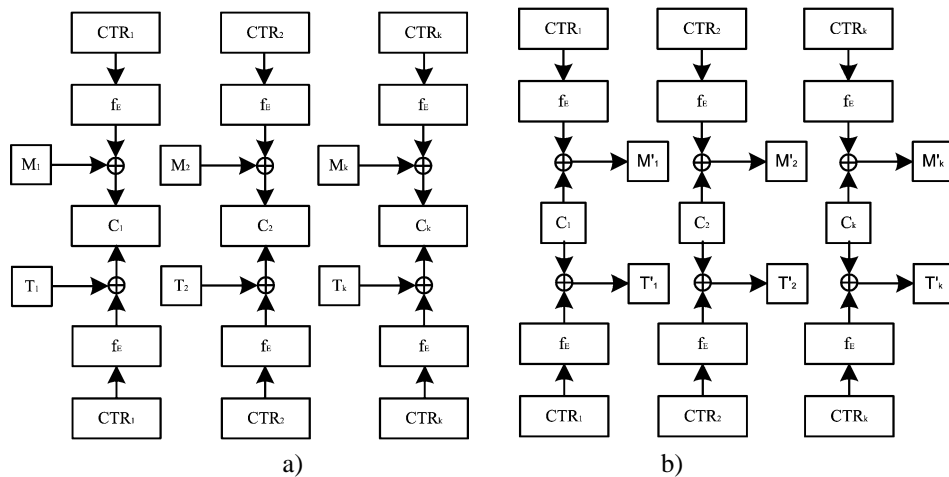


Fig. 6. The implementation of the CTR mode in the deniable encryption algorithm: a) encryption, b) decryption

Initially, some counter values CTR_i must be encrypted. Next, blocks of public data M_i or private data T_i could be evaluated. The encryption schema is used in this model. Thus, this schema has higher capacity than the ECB mode. But it also allows to determine the private content in the ciphertext.

Generally, the reliability of the CFB, OFB, CTR modes aren't based on deniable encryption algorithms.

Experiments and Results. Models of block cipher modes have been tested on the capacity and vulnerabilities. Experiments have been carried out using the following schema (see Fig. 7).

The optimal model has been determined by the following indicators: the deniability of common data, the random access to data, the parallel encryption and decryption, the leakage of keys, the brute force, the factorization, the discrete logarithm, the analysis of blocks. But the most important indicators are following: the deniability of common data, the parallel encryption and decryption, the leakage of keys and the analysis of blocks. Results of the experiment are collected in the Table 1 and Fig. 8.

Hence the ECB and the CBC modes allow to provide the deniable decryption of data. Public data **M** and private data **T** are decrypted by the same private key. But the ECB mode isn't recommended to use in the cryptography protocols. Other cipher modes (CFB, OFB, CTR) couldn't be used in the block deniable encryption algorithms. These modes don't provide the deniable decryption of data and allow to get access to private data in blocks of the ciphertext.

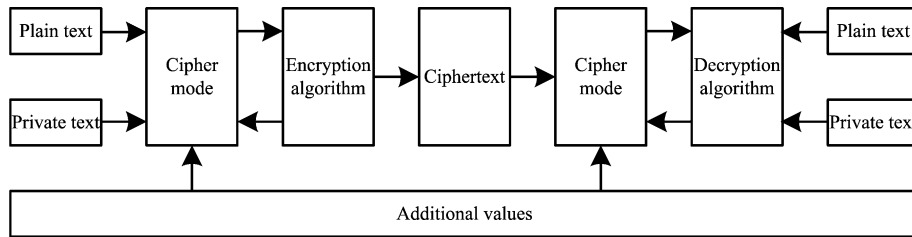


Fig. 7. Schema of the experiment

Table 1. Possibility of cipher modes implementation tests

No.	Indicators	The cipher modes				
		ECB	CBC	CFB	OFB	CTR
1	Basic indicators:	Implementation, units				
1.1	The deniable decryption	pass	pass	fail	fail	fail
1.2	The random access	pass	fail	fail	fail	pass
1.3	The parallelize encryption	pass	pass	pass	fail	pass
1.4	The parallelize decryption	pass	pass	pass	fail	pass
The average rank by basic characters		075%	056%	038%	000%	056%
2	Indicators of strength:	Implementation, units				
2.1	The key leakage	pass	pass	fail	fail	fail
2.2	The brute force	pass	fail	fail	fail	fail
2.3	The factorization	pass	pass	pass	pass	pass
2.4	The discrete logarithm	pass	pass	pass	pass	pass
2.5	The analysis of blocks	fail	pass	pass	pass	pass
The average rank to cyber-attacks strength		040%	040%	030%	030%	020%
Summary rank		058%	048%	034%	015%	038%

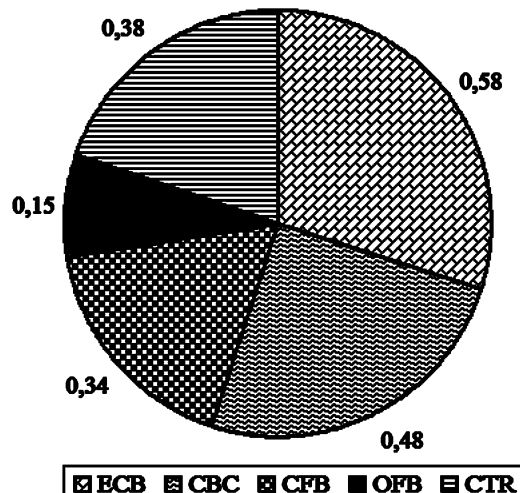


Fig. 8. The diagram of cipher modes implementation tests

Conclusion. The optimal cipher mode has been determined. This mode has allowed to patch the vulnerability of the ECB mode in the block deniable encryption algorithm [3].

The following results have been obtained: common cipher modes have been studied and applied to the deniable encryption scheme, cipher modes have been tested for capacity and vulnerability, the possibility of leakage data from the ciphertext has been found in some cipher modes. Hence, some cipher modes couldn't be applied in the common deniable encryption algorithms.

The novelty of work consists of study common cipher modes and their implementation in

the deniable encryption algorithms. In [8, 9], using common block ciphers in the deniable encryption schemes has been suggested. However, these algorithms don't use cipher modes separately. Hence, these algorithms have low capacity comparing to described in [3].

The deniable encryption schema could be used with cipher modes that is more secured than the ECB mode.

The prospects for further researchers are to develop the parallel implementation of the block deniable encryption scheme, to implement other block ciphers schemes into the common deniable encryption algorithms, to evaluate the security of cipher.

References

1. Simis, B. (2019). Cybersecurity threatscape 2018: trends and forecasts. *Positive Technologies*. Retrieved from <https://www.ptsecurity.com/ww-en/analytics/cybersecurity-threatscape-2018/> Accessed 25 March 2019.
2. Canetti, R., Dwork, C., Naor, M. & Ostrovsky, R. (1997) Deniable Encryption. *Advances in Cryptology*, pp. 90–104.
3. Galchenko, A. V. & Choporov, S. V. (2019). Deniable encryption based on hybrid cryptographic systems using. *Radio Electronics, Computer Science, Control*, pp. 178–191.
4. Bujari, D. & Aribas, E. (2017). Comparative Analysis of Block Cipher Modes of Operation. *International Advanced Researches & Engineering Congress-2017*, pp. 1345–1352.
5. Ibrahim, H. (2009). Receiver-Deniable Public-Key Encryption. *International Journal of Network Security*, pp. 159–165.
6. Bo Meng, Jiang Qing Wang (2009). A Receiver Deniable Encryption Scheme. *Proceedings of International Symposium on Information Processing (ISIP09)*, pp. 254–257.
7. Goldwasser, S. & Micali, C. (1984). Probabilistic encryption. *Journal of Computer and System Sciences*, pp. 270–299.
8. Moldovyan, N. A., Goryachev, A. A. & Vaichikauskas, M. A. (2014). Extension of Rabin cryptosystem: public key deniable encryption algorithm. *Information Security Questions*, No 1, pp. 12–16.
9. Moldovyan, N., Birihevskiy, A. R. & Mondikova, Y. (2014). Deniable encryption based on block ciphers. *Information and Control Systems*, No. 5(72), pp. 80–86. (in Russian)
10. Moldovyan, N. A., Moldovyan, A. A., Moldovyan, D. N. & Shcherbacov, V. A. (2016). Stream Deniable-Encryption Algorithms. *Computer Science Journal of Moldova*, pp. 68–82.
11. Moldovyan, A. A. & Moldovyan, N. A. (2018). Methods and Algorithms for Pseudo-Probabilistic Encryption with Shared Key. *PIIRAS Proceedings*, Issue 6(61), pp. 119–142.

УДК 519.6

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У «ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ. ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ»

А. А. Автора¹, А. Б. Авторб¹, Б. Б. Авторв²¹ Запорізький національний університет,² Науково-дослідний інститут супер-технологій
avtor@znu.edu.ua**Ключові слова:**

Математика, механіка, математична модель, динаміка, інформаційні технології.

Текст анотації українською мовою повинен бути не менш 1800 знаків з пробілами. В анотації необхідно коротко висвітлити суть задачі, що розв'язується, особливості запропонованих наукових підходів або методів, розкрити наукову новизну отриманих результатів.

ЗАГОЛОВОК СТАТТІ НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ

О. О. Автора¹, О. Б. Авторб¹, Б. Б. Авторв²¹ Запорожский национальный университет,² Научно-исследовательский институт супер-технологий,
znu@znu.edu.ua**Ключевые слова:**

математика, механика, математическая модель, динамика, информационные технологии.

Текст аннотации должен быть объемом не менее 1800 знаков с пробелами. В аннотации необходимо кратко отразить суть решаемой задачи, особенности предложенных научных подходов или методов, раскрыть научную новизну полученных результатов.

THE HEADLINE OF THE ARTICLE IN ENGLISH

N. Authora¹, N. Authorb¹, M. Authorc²¹ Zaporizhzhia National University,² Scientific Research Institute of Super Technologies
znu@znu.edu.ua**Key words:**

mathematics, mechanics, mathematical model, dynamics, information technologies.

The abstract in English should be greater than 1800 characters (with spaces). In the abstract, you should briefly describe a problem, used scientific approaches or methods, scientific novelty.

1. Оформлення тексту статті

Для оформлення тексту статті рекомендується використовувати стильовий файл `template_math_ua.dot`, розміщений на сайті Видання.

Параметри сторінки: розмір паперу – А4, верхнє поле – 2 см, нижнє поле – 2 см, лівє поле – 3 см, правє поле – 1,5 см.

У першому рядку файлу з текстом статті необхідно вказати УДК (стиль – «УДК»). Шрифт: Times New Roman, 10 пунктів.

У другому рядку набирається заголовок статті на мові статті (стиль – «Заголовок статті»). Шрифт: Times New Roman, 14 пт, напівжирний, всі прописні. Абзац: вирівнювання – по лівому краю, перед – 6 пт, після – 0 пт, міжрядковий інтервал – полуторний.

Після заголовка на мові статті необхідно перерахувати авторів (стиль «Автори»). Для кожного учасника спочатку вказуються ініціали, потім прізвище (наприклад, «І. І. Іванов»). Шрифт: Times New

Roman, 12 пт, напівжирний. Абзац: вирівнювання – по лівому краю, перед – 0 пт, після – 3 пт, міжрядковий інтервал – одинарний.

Потім необхідно вказати місце роботи авторів і e-mail автора, відповідального за листування (стиль – «Місце роботи автора»). Шрифт: Times New Roman, 11 пт, курсив. Абзац: вирівнювання – по лівому краю, перед – 0 пт, після – 6 пт, міжрядковий інтервал – одинарний.

Далі в таблиці з невидимими межами (крім нижньої), що складається з двох стовпців і одного рядка, вказуються ключові слова (перший стовпець, стиль – «Ключові слова») і анотація (стиль – «Загальні відомості»). Перелік ключових слів повинен починатися зі словосполучення «Ключові слова», виділеного напівжирним, за яким слідує мінімум 5 ключових слів. Анотація мовою статті повинна містити не менше 1800 символів (з пробілами).

Назва статті, автори, місце роботи, ключові слова, анотація іншими мовами оформлюються аналогічно наведеному вище опису українською мовою.

Основний текст статті необхідно оформляти з використанням шрифту Time New Roman, 12 пт (стиль «Звичайний»). Абзац: вирівнювання – по ширині, відступ зліва – 0 см, відступ справа – 0 см, перший рядок – відступ на 0,7 см, інтервал перед текстом – 0 см, інтервал після тексту – 0 см, міжрядковий інтервал – одинарний. Верстка основного тексту виконується в дві колонки (ширина – 8 см, проміжок – 0,5 см).

Основний текст необхідно розбити на розділи. Кожен розділ повинен починатися з заголовка розділу (стиль «Заголовок розділу»). Шрифт: Times New Roman, 12 пт, напівжирний. Абзац: вирівнювання – по центру, інтервал перед текстом – 6 пт, інтервал після тексту – 3 пт, міжрядковий інтервал – одинарний.

2. Структура статті

Матеріали в статті повинні бути структуровані. Стаття обов'язково повинна містити наступні розділи:

- вступ;
- аналіз стану проблеми;
- мета і завдання дослідження;
- матеріали і методи дослідження (даний розділ необхідно назвати таким чином, щоб була зрозуміла суть розроблених або використаних методів, підходів, методологій);

- результати дослідження;
- обговорення результатів;
- висновки;
- подяки (при наявності таких);
- література;
- references.

Всі розділи необхідно нумерувати. Розділи можуть містити підрозділи, з номерами в рамках розділу. Наприклад, розділ «4. Метод геометричного моделювання властивостей поверхонь», може містити підрозділ «4.1. Логічне конструювання поверхні».

В кінці статті необхідно на трьох мовах (українській, російській і англійській) вказати такі відомості про авторів:

- прізвище, ім'я та по батькові (повністю);
- місце роботи, посада;
- науковий ступінь і вчене звання.

3. Вимоги до вмісту анотацій

Анотація повинна повною мірою відображати суть статті. Порядок викладення в анотації повинен відповідати порядку викладення матеріалів у статті. Необхідно коротко спочатку пояснити суть розв'язаної задачі. Потім пояснити особливості застосованих або розроблених методів, підходів, методик. У заключній частині анотації необхідно описати отримані результати і наукову новизну.

Текст анотацій повинен мати якісний переклад та відповідати оригінальній анотації.

4. Оформлення рисунків

Рисунки повинні наочно ілюструвати суть викладеного матеріалу. Рисунок необхідно розташувати в наступному абзаці після згадки його в тексті

(наприклад, рис. 1). Якщо ширина рисунка більше ширини колонки, то необхідно його вставити, використовуючи розрив колонки. Рекомендується при наявності великих рисунків розташовувати їх підтискаючи або до верхньої, або до нижньої границі сторінки.

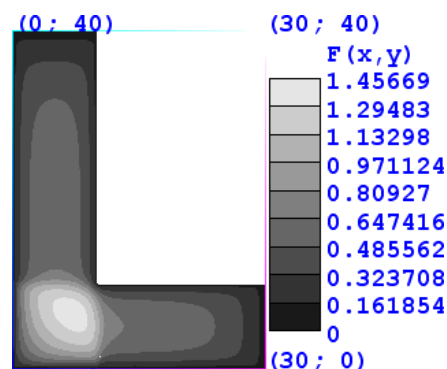


Рис. 1. Приклад рисунка

Рисунки вирівнюються по центру (колонки або сторінки) з використанням стилю «Рисунок». Після кожного рисунка розміщується підпис (стиль – «Підпис до рисунка»), яка складається з номера рисунка і назви, наприклад, «Рис. 1. Модель поверхні літального апарату» (Слово «Рис.» і номер рисунка виділяються напівжирним).

Якщо ширина рисунка більше ширини колонки, то необхідно його вставити, використовуючи розрив колонок. Рекомендується при наявності великих рисунків розташовувати їх підтискаючи або до верхньої, або до нижньої границі сторінки.

5. Оформлення таблиць

Таблицю необхідно розмістити в наступному абзаці після згадування її в тексті (наприклад, табл. 1).

Табл. 1. Параметри НДС

	u, м	v, м	w, м
Мінімум	0	0	0
Максимум	0,57	0,24	0,285

Таблиці вирівнюються по ширині (колонки або сторінки), заповнюючи весь доступний простір. Перед кожною таблицею розміщується підпис (стиль – «Підпис до таблиці»), який складається з номера таблиці і назви, наприклад, «Табл. 1. Розподіл значень параметрів напружено-деформованого стану» (Слово «Табл.» і номер таблиці виділяються напівжирним).

Якщо ширина таблиці більше ширини колонки, то необхідно її вставити, використовуючи розрив колонок. Рекомендується при наявності великих таблиць розташовувати їх підтискаючи або до верхньої, або до нижньої межі сторінки.

6. Оформлення формул

Всі формули, що мають самостійне значення, повинні розташовуватися в окремому рядку і мати номер. Формули вирівнюються по центру рядка, а її номер по правому краю. Для оформлення формул необхідно використовувати стиль «Формула» (вирівнювання – по ширині, відступ перед текстом – 3 пт, відступ після – 3 пт).

$$D_f = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad D_c = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Якщо ширина формули більше ширини колонки, то необхідно її вставити, використовуючи розрив колонок.

Розміри формул повинні відповідати розміру шрифту тексту статті.

7. Вимоги до вмісту розділу «Обговорення результатів»

У розділі «Обговорення результатів» необхідно виконати кількісне і якісне співставлення отриманих результатів з роботами, опублікованими раніше. При цьому необхідно явно посилатися на джерела, які використовуються для співставлення. З вмісту цього розділу повинно бути зрозуміло місце результатів дослідження серед інших робіт.

8. Вимоги до оформлення літератури і References

Література розміщується в кінці статті в одну колонку. Для оформлення літератури необхідно використовувати ДСТУ 8302 до: 2015.

Література

1. Аніловська Г. Я., Марушко Н. С., Стоколоса Т. М. Інформаційні системи і технології у фінансах: навч. посіб. Львів: Магнолія 2006, 2015. 312 с.
2. Операційне числення: навч. посіб. / С. М. Гребенюк та ін. Запоріжжя: ЗНУ, 2015. 88 с.
3. Підготовка докторів філософії (PhD) в умовах реформування вищої освіти: матеріали Всеукр. наук.-практ. конф., м. Запоріжжя, 5-6 жовт. 2017 р. Запоріжжя: ЗНУ, 2017. 216 с.
4. Левчук С. А. Матриці Гріна рівнянь і систем еліптичного типу для дослідження статичного деформування складених тіл: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.02.04. Запоріжжя, 2002. 150 с.
5. Люмінісцентний матеріал: пат. 25742 Україна: МПК6 C09K11/00, G01T1/28, G21H3/00. № 200701472; заявл. 12.02.07; опубл. 27.08.07, Бюл. № 13. 4 с.
6. Левчук С. А., Хмельницький А. А. Дослідження статичного деформування складених циліндричних оболонок за допомогою матриць типу Гріна. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя, 2015. № 3. С. 153–159.
7. Bletska D. I., Glukhov K. E., Frolova V. V. Electronic structure of 2H-SnSe₂: ab initio modeling and comparison with experiment. *Semiconductor Physics Quantum Electronics & Optoelectronics*. 2016. Vol. 19, No 1. P. 98–108.
8. Яцків Я. С., Маліцький Б. А., Бублик С. Г. Трансформація наукової системи України протягом 90-х років ХХ століття: період переходу до ринку. *Наука та інновації*. 2016. Т. 12, № 6. С. 6–14. DOI: <https://doi.org/10.15407/scin12.06.006>.

References

1. Anilovs'ka, H. YA., Marushko, N. S. & Stokolosa, T. M. (2015). Information systems and technologies in finance: textbook. tool. Lviv: Magnolia 2006.
2. ...

Для публікації автору необхідно подати текст статті у електронному варіанті та файл з відомостями про авторів на електронну адресу редколегії.

Адреса редакції: Україна, 69600, м. Запоріжжя, МСП-41, вул. Жуковського, 66

Адреса електронної пошти: editor@znu.edu.ua

Контактні телефони:

(8-061)228-75-21 – редакційно-видавничий відділ ЗНУ (IV корпус, ауд. 323)

(8-061)289-12-52 – редколегія «Вісника Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки» (I корпус, ауд. 216)

Після списку літератури обов'язково наводиться розділ «References» відповідно до міжнародного стандарту APA. Рекомендації щодо оформлення «References» можна знайти за таким посиланням: <http://visnykznu.org/docs/oformlennya-References-dlya-statti--fiziko-matematichni-visnik.pdf>.

9. Списки

Маркований список – стиль «Список з маркерами»:

– приклад;

– ще приклад.

Нумерований список 1 – стиль «Список з номерами 1»:

4. Приклад.

5. Приклад.

Нумерований список 2 – стиль «Список з номерами 2»:

1) Приклад

2) Приклад

Список з буквами – стиль «Список з буквами»:

a) приклад;

b) приклад.

Список з римськими цифрами – стиль «Список з римськими цифрами»:

I. Приклад.

II. Приклад.

ПРОЦЕС РЕЦЕНЗУВАННЯ

До публікації у журналі всі рукописи спочатку розглядаються редакторами на предмет оцінки їх відповідності тематиці і вимогам журналу. Після рішення редакторів представлені рукописи спрямовуються експертам, працюючим у відповідній області. **Рукопис проходить одностороннє сліпе рецензування:** автори не знають рецензента, рецензенти знають авторів.

Рецензування існує для того, щоб журнали публікували високоякісні наукові дослідження. Зміни та покращення статті є частиною процесу публікації. **Рецензування є позитивним процесом і невід'ємною частиною наукової публікації,** що підтверджує високу якість наукових статей. Рецензенти, які вкладають свій час для поліпшення вашої статті, є експертами з тематики наукового дослідження, викладеного у статті.

У процесі рецензування матеріал статті має стати більш достовірним. Рецензенти можуть вказати на недоліки у роботі, які вимагають більш докладного пояснення або додаткових досліджень і експериментів. Матеріал статті повинен стати більш доступним для сприйняття. Якщо якісь моменти у роботі є важкими для сприйняття читачами, рецензенти можуть попросити їх виправити. Рецензенти розглядають дослідження на предмет важливості в рамках своєї предметної області. Інший аспект наявності політики рецензування у журналі: редакція має бути впевненою, що публікує тільки якісні матеріали у своєму виданні.

Поширені причини для відмови публікації

Відмова в публікації статті, можлива, якщо:

- стаття неправильно структурована;
- стаття недостатньо кваліфіковано деталізована для розуміння постановки задачі та аналізу, запропонованих авторами;
- у статті недостатньо сформульована наукова новизна;
- відсутність достатньої кількості актуальних посилань на літературні джерела;
- стаття містить теорії, концепції або висновки, які не повністю підкріплені даними аналізу, аргументами, наданою інформацією;
- стаття не забезпечує досить докладний опис методів і матеріалів, які б дозволили іншим ученим повторити теоретичне дослідження та експеримент;
- у статті відсутні чіткі описи чи пояснення гіпотез, що перевірялись, описи експериментів, прикладів статистичних або експериментальних вибірок;
- у статті недостатньо описано методику проведення експериментів;

- зауваження до якості мови написання.

Повторний розгляд статті та відповідь на зауваження рецензента

За повторного перегляду статті та відповіді на зауваження рецензентів необхідно:

- звернути увагу на всі зауваження, які надані редактором і рецензентом;
- описати всі зміни в статті у зворотному листі;
- виконати додаткові експерименти або аналізи, які рекомендує рецензент, або дати докладне обґрунтування, чому цього не потрібно робити;
- у зворотному листі описати окремо всі моменти, в яких ви згодні з рецензентом і в яких не згодні;
- забезпечити ввічливе і наукове обґрунтування моментів, з якими ви не згодні;
- чітко зазначити всі зміни у статті, які ви внесли;
- повернути переглянутий рукопис і зворотний лист в строк, встановлений редактором.

Пам'ятайте, що рецензент є експертом у вашій предметній області. Якщо пропозиції, які вносить рецензент не вірні, то це, ймовірно, тому що рецензент не вірно зрозумів вашу роботу. Це значить, що ваша робота написана важко для сприйняття, а значить і читач не зможе належним чином розібратися у вашому дослідженні. Таким чином, вам слід зробити текст статті більш чітким і зрозумілим для читача.

Редакція не надає персональних даних рецензента, усе спілкування відбувається через редколегію журналу.

Важливо бути наполегливим при спробі опублікувати статтю. Якщо вчасно, коректно і науково обґрунтовано відповідати на зауваження редакторів та рецензентів, можна в подальшому домогтися публікації статті.

Краще не обирати інший журнал, доки не сталася одна з наступних подій:

- редактор дав відповідь, що тематика вашої роботи в корені не відповідає тематиці журналу;
- редактор дає відмову вашому рукопису без права його повторного надання;
- Вашому рукопису дали відмову навіть після того, як ви відповіли на всі виправлення і коментарі рецензента;
- Ви отримали відмову від рецензента.

Публікація є складним процесом, тому ви повинні бути готовим працювати над своєю статтею, відповідаючи на коментарі як редакторів, так і рецензентів, і вносити необхідні виправлення у вашу роботу.

PROCESS OF REVIEW

Before publication in the journal, all manuscripts are initially considered by the editors to evaluate their compliance with the topics and requirements of the journal. After the editors' decision, the submitted manuscripts are sent to experts working in the relevant field. The manuscript passes a one-sided blind review: the authors do not know the reviewer, reviewers know the authors.

There is a review to ensure that journals publish high-quality research. Changes and improvements to the article are part of the publishing process. Reviewing is a positive process and an integral part of scientific publication, which confirms the high quality of scientific articles. Reviewers who invest time to improve your article are experts on the subject of scientific research outlined in the article.

In the review process, the material of the article should become more reliable. Reviewers may indicate disadvantages in the work that require more detailed explanation or additional research and experiments. The material of the article should become more accessible for perception. If any moments in the work are difficult for readers to perceive, reviewers may ask to correct them. Reviewers consider research on relevance within their subject area. Another aspect of the existence of a review policy in magazines: the editorial should be sure that publishes only qualitative materials in their publication.

Common Reasons to Discard Publication

Refusal to publish an article is possible in the following situations:

- the article is incorrectly structured;
- the article is insufficiently qualified in detail to understand the problem statement and analysis proposed by the authors;
- scientific novelty in the article is not sufficiently formulated;
- lack of sufficient number of actual references to literary sources;
- the article contains theories, concepts or conclusions that are not fully supported by the analysis data, the arguments provided by the information;
- the article does not provide a sufficiently detailed description of the methods and materials that would allow other scientists to repeat the theoretical study and experiment;
- the article does not contain clear descriptions or explanations of the hypotheses that were tested, description of experiments, examples of statistical or experimental samples;
- the article does not describe enough the technique of conducting experiments;
- remarks on the quality of the writing language.

Repeated review of the article and the response to the reviewer's remarks

For reconsideration of the article and responses to comments by reviewers, you must:

- pay attention to all comments provided by the editor and reviewers;
- describe all changes in the article in the reverse letter;
- perform additional experiments or analyzes that the reviewer recommends, or provide a detailed justification why this does not need to be done;
- in a return letter describe separately all the points in which you agree with the reviewer and which do not agree;
- provide a polite and scientific justification of the moments you disagree with;
- clearly state all changes in the article you have made;
- return the revised manuscript and the letter back in time set by the editor.

Remember that the reviewer is an expert in your subject area. If the suggestions made by the reviewer are not correct, then this is probably because the reviewer did not understand your work correctly. This means that your work is written hard to perceive, and therefore the reader will not be able to properly understand your research. Thus, you should make the text of the article more clear and understandable to the reader.

The editorial staff does not provide personal data to the reviewer, all communication takes place through the editorial board of the journal.

It's important to be persistent when you try to publish an article. If timely, correctly and scientifically substantiated to respond to the comments of editors and reviewers, you can further achieve the publication of the article.

It's better not to choose another journal until one of the following events has occurred:

- the editor replied that the topics of your work are fundamentally not relevant to the topic of the magazine, the editor refuses your manuscript without the right to re-submit it;
- Your manuscript was refused even after you answered all the corrections and comments by the reviewer;
- You have received a refusal from the reviewer.

Publication is a complex process, so you should be ready to work on your article, responding to comments from both editors and reviewers, and make the necessary corrections to your work.

ДЛЯ НОТАТОК

Збірник наукових праць

Вісник Запорізького національного університету
Фізико-математичні науки
№ 1, 2019

Технічний редактор – *Н. В. Непритворна*

Верстка, дизайн-проробка, оригінал-макет і друк виконані
в редакційно-видавничому відділі
Запорізького національного університету
тел. (061) 289-12-98

Підписано до друку 11.02.2020. Формат 60 × 90/8.
Папір Data Copy. Гарнітура «Таймс».
Умовн.-друк. арк. 20
Замовлення № 47. Наклад 100 прим.

Запорізький національний університет
69600, м. Запоріжжя, МСП-41
вул. Жуковського, 66

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 5229 від 11.10.2016