

**Міністерство освіти і науки України  
Запорізький національний університет**

Заснований  
у 1997 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого  
засобу масової інформації  
Серія КВ № 15436-4008 ПР,  
22.06.2009 р.

**Адреса редакції:**

Україна, 69600,  
м. Запоріжжя, МСП-41,  
вул. Жуковського, 66

**Телефон**

для довідок:  
(061) 289-12-52

**Факс:**

(061) 764-45-46

**В і с н и к**  
**Запорізького національного**  
**університету**

Фізико-математичні науки

**№ 2, 2019**

**Запоріжжя 2019**

Вісник Запорізького національного університету: Фізико-математичні науки. Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2019. 190 с.

Затверджено як наукове фахове видання України, у якому можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (Наказ Міністерства освіти і науки України № 528 від 12.05.15 р.)

Вісник індексується під назвою «Visnyk of Zaporizhzhia National University. Physical and Mathematical Sciences» у таких наукометричних базах:

- INDEX COPERNICUS, ICV 2017: **74.51**  
( <https://journals.indexcopernicus.com/search/details?id=43958> );
- CiteFactor ( <http://www.citefactor.org/> );
- ResearchBib ( <http://paper.researchbib.com/> );
- Journal Factor ( <http://www.journalfactor.org/> ).

Рекомендовано до друку та поширення через мережу Інтернет (протокол засідання Вченої ради № 5 від 27.12.2019 р.)

#### РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

- Гоменюк С. І.** – доктор технічних наук, професор, головний редактор (Україна)
- Гребенюк С. М.** – доктор технічних наук, доцент (Україна)
- Грицак В. З.** – доктор технічних наук, професор (Україна)
- Єрмолаєв В. А.** – кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)
- Кеберле Н. Г.** – кандидат технічних наук, доцент (Україна)
- Клименко М. І.** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, (Україна)
- Козін І. В.** – доктор фізико-математичних наук, професор (Україна)
- Кудін О. В.** – кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)
- Панасенко Є. В.** – кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)
- Стєганцев Є. В.** – кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)
- Чопоров С. В.** – доктор технічних наук, доцент (Україна)
- Швидка С. П.** – кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)
- Шило Г. М.** – доктор технічних наук, доцент (Україна)
- Breslavsky I.** – PhD in Mechanics, Docent (Canada)
- Gerasimov T.** – PhD in Mathematics, Docent (Germany)
- Kolakowski Z.** – Doctor of Science in Engineering, Professor (Poland)

## ЗМІСТ

<b>Ахундов В. М., Кострова М. М., Наумова И. Ю.</b> ПРИПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ В ЭЛАСТИЧНОМ ЦИЛИНДРЕ С КОЛЬЦЕВЫМИ ВОЛОКНАМИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВРАЩЕНИЯ ПРИ СВОБОДНОЙ ПОСАДКЕ ..... 4	<b>Михайлишин В. С.</b> МОДЕЛЮВАННЯ ПРУЖНОПЛАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ТІЛАХ ПРИ ВІДПАЛІ ТА НАСТУПНИХ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ ВПЛИВАХ ..... 101
<b>Гаценко А. В., Клименко М. І., Корзюков М. О., Діоба Н. О.</b> ГОМОГЕНІЗАЦІЯ В 'ЯЗКОПРУЖНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ ..... 21	<b>Морозов М. В., Халанчук Л. В.</b> МОДЕЛЮВАННЯ СТАНУ ЕЛЕКТРОНА У ЦИЛІНДРИЧНІЙ КВАНТОВІЙ ТОЧЦІ З ОБОЛОНКОЮ ..... 117
<b>Городецький В. Г.</b> ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ ГІДРОІМПУЛЬСНОЇ СИСТЕМИ З НЕЛІНІЙНИМ ПРУЖНИМ ЕЛЕМЕНТОМ ..... 29	<b>Николишин М. М., Опанасович В. К., Куротчин Л. Р., Слободян М. С.</b> РОЗТЯГ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНИ З ДВОМА ПОВЕРХНЕВИМИ ТРИЩИНАМИ НА ПРЯМОЛІНІЙНІЙ МЕЖІ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ З УРАХУВАННЯМ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН ПО ЇХ ФРОНТУ ..... 124
<b>Григоренко Я. М., Рожок Л. С.</b> ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ЛОКАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПОРОЖНИСТИХ ЦИЛІНДРІВ З УВІГНУТИМ ГОФРОВАНІМ ПОПЕРЕЧНИМ ПЕРЕРІЗОМ ..... 38	<b>Остос О. Х., Жук Я. О.</b> ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ ГУМОПОДІБНОГО МАТЕРІАЛУ НА ПРИКЛАДІ ТЕРМОМЕХАНІЧНОЇ ЗАДАЧІ ПРО КОЛИВАННЯ В 'ЯЗКОПРУЖНОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО СТЕРЖНЯ ..... 136
<b>Ігнатченко М. С., Кудін О. В.</b> ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБЛАСТЕЙ СКЛАДНОЇ ФОРМИ В ПАРАЛЕЛЬНИХ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ СИСТЕМАХ ЗІ СПІЛЬНОЮ ПАМ'ЯТТЮ ..... 48	<b>Панасенко Є. В., Анохін А. І., Гужва А. А., Чміль М. М.</b> ЗБУРЕННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛЯПУНОВА У ПРОСТОРІ ГІЛЬБЕРТА ..... 141
<b>Киричок І. Ф., Жук Я. О., Чернюшок О. А., Тарасов А. П.</b> ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ І ДИСИПАТИВНИЙ РОЗІГРІВ ГНУЧКОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З П'ЄЗОАКТИВНИМИ ШАРАМИ З УРАХУВАННЯМ ДЕФОРМАЦІЙ ЗСУВУ... 55	<b>Selezov I. T.</b> TIMOSHENKO EQUATION, VIOLATION OF CONTINUITY AND SOME APPLICATIONS ..... 150
<b>Козін І. В., Селютін Є. К.</b> ОСОБЛИВОСТІ ПОШУКУ ОПТИМАЛЬНИХ КЛАСИФІКАЦІЙ: ЕВОЛЮЦІЙНІ АЛГОРИТМИ ..... 62	<b>Сенченков И. К., Червинко О. П., Доля Е. В.</b> РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ И КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОДКРЕПЛЕННОГО ОБОЛОЧКОЙ ВЯЗКОУПРУГОГО ЦИЛИНДРА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕРМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ ..... 158
<b>Крувokhata A. G., Kudin O. V., Gorbenko V. I.</b> DESIGN SOUND CLASSIFICATION IOT SYSTEM WITH GENETIC ALGORITHMS ..... 69	<b>Шейко Т. И., Максименко-Шейко К. В., Литвинова Ю. С., Морозова А. И.</b> МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОЧИХ КОЛЕС НАСОСОВ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ НА 3D-ПРИНТЕРЕ ..... 166
<b>Кузьменко В. І., Плащенко С. О.</b> ЗВ'ЯЗАНІ КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ПРО ДІЮ ВАЖКИХ ШТАМПІВ ЗІ ЗМІННИМ ЦЕНТРОМ МАС ..... 75	<b>Янчевський І. В., Савченко О. А.</b> НЕСТАЦІОНАРНІ ВІСЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ЕЛЕКТРОПРУЖНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ СКІНЧЕНОЇ ДОВЖИНИ ..... 177
<b>Куреннов С. С., Барахов К. П.</b> НАПРУЖЕННЯ В КЛЕЙОВОМУ З'ЄДНАННІ ДВОХ КОАКСІАЛЬНИХ ТРУБ. СПРОЩЕНА ДВОВИМІРНА МОДЕЛЬ ..... 81	<b>Вимоги до оформлення статей у «Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки» ..... 184</b>
<b>Леонтьєва В. В., Кондрат'єва Н. О.</b> КЕРОВАНІСТЬ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ З ГРОСКОПІЧНОЮ СТРУКТУРОЮ ПРИ ДІЇ ДИСИПАТИВНИХ СИЛ ТА СИЛ РАДІАЛЬНОЇ КОРЕКЦІЇ З УРАХУВАННЯМ ПЕВНОГО НЕЛІНІЙНОГО ЗМІШАНОГО ВИДУ ЗОВНІШНІХ ЗБУРЕНЬ ..... 90	<b>Процес рецензування ..... 187</b>
	<b>Process of review ..... 188</b>

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-01

## ПРИПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ В ЭЛАСТИЧНОМ ЦИЛИНДРЕ С КОЛЬЦЕВЫМИ ВОЛОКНАМИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВРАЩЕНИЯ ПРИ СВОБОДНОЙ ПОСАДКЕ

В. М. Ахундов, М. М. Кострова, И. Ю. Наумова

Національна металургічна академія України  
akhundov@ua.fm

### Ключевые слова:

цилиндр кусочно-однородный, волокна кольцевые, силы центробежные, деформации большие, метод конечных разностей.

Исследовали приповерхностный эффект в эластичном цилиндре из матрицы и кольцевых волокон под воздействием сил инерции вращения вокруг его оси симметрии при свободной посадке. Волокна квадратного сечения располагаются в матрице цилиндра по схеме квадратной упаковки. Цилиндр формально рассматривали как сборку кольцевых элементов. Кольцевые элементы представляют собой кольца квадратного сечения из матричного материала, включающие кольцевые волокна квадратного сечения как их армирующую сердцевину.

Применяли геометрические и физические уравнения и уравнения равновесия в нелинейной теории упругости для описания деформации рассматриваемого кусочно-однородного цилиндра. Особенностью решаемой задачи является влияние на центробежные силы, воздействующие на матрицу и волокна, изменений расстояний от их материальных точек до оси вращения цилиндра.

Производные первого порядка от искомых величин по осевой и радиальной координатам в уравнениях задачи аппроксимировали с помощью конечно-разностных соотношений второго порядка точности. Вместе с привлечением граничных условий и условий совместного деформирования матрицы и волокон формируется система нелинейных уравнений относительно основных искомых величин в узловых точках двумерной области. Данную систему уравнений решали на основе процедуры дискретного метода Ньютона. Единственность решения краевой задачи обеспечивали на основе продолжения решения по угловой скорости вращения цилиндра.

В условиях больших деформаций компонентов цилиндрического тела рассмотрели приповерхностный эффект в нем, выражающийся в существенно неперiodическом деформировании кольцевых элементов тела, прилегающих к его внутренней и внешней поверхностям. В качестве критерия неперiodического деформирования кольцевых элементов применили верхнюю грань различия одноименных компонент деформации на противоположно расположенных ограничивающих поверхностях элемента. С помощью данного критерия определили глубину приповерхностного эффекта возле внутренней и внешней поверхностей цилиндра при его конечной скорости вращения. Выявили влияние эффекта на картину распределения напряжений в характерных сечениях тела.

## ПРИПОВЕРХНЕВИЙ ЕФЕКТ В ЕЛАСТИЧНОМУ ЦИЛІНДРІ З КІЛЬЦЕВИМИ ВОЛОКНАМИ ПІД ВПЛИВОМ ОБЕРТАННЯ ПРИ ВІЛЬНІЙ ПОСАДЦІ

В. М. Ахундов, М. М. Кострова, І. Ю. Наумова

Національна металургічна академія України  
akhundov@ua.fm

### Ключові слова:

циліндр кусково-однорідний, волокна кільцеві, сили відцентрові, деформації великі, метод кінцевих різниць.

Досліджували приповерхневий ефект в еластичному циліндрі з матриці і кільцевих волокон під впливом сил інерції обертання навколо його осі симетрії при вільній посадці. Волокна квадратного перетину розташовуються в матриці циліндра за схемою квадратної упаковки. Циліндр формально розглядали як збірку кільцевих елементів. Кільцеві елементи являють собою кільця квадратного перетину з матричного матеріалу, що включають кільцеві волокна квадратного перетину як їх армуючу сердцевину.

Застосовували геометричні та фізичні рівняння і рівняння рівноваги в нелінійній теорії пружності для опису деформації розглянутого кусково-однорідного циліндра. Особливістю задачі, що розв'язували, є вплив на відцентрові сили, які впливають на матрицю і волокна, зміни відстаней від їх матеріальних точок до осі обертання циліндра.

Похідні першого порядку від потрібних величин по осьовій і радіальній координатах в рівняннях задачі апроксимували за допомогою кінцево-різницевого співвідношень другого порядку точності. Разом із залученням граничних умов і умов спільного деформування матриці і волокон формується система нелінійних рівнянь щодо основних потрібних величин в вузлових точках двомірної області. Дану систему рівнянь вирішували на основі процедури дискретного методу Ньютона. Єдиність розв'язку крайової задачі забезпечували на основі продовження рішення по кутовій швидкості обертання циліндра.

В умовах великих деформацій компонентів циліндричного тіла розглянули приповерхневий ефект в ньому, що виражається в істотно неперіодичній деформації кільцевих елементів тіла, що прилягають до його внутрішньої і зовнішньої поверхонь. Як критерій неперіодичного деформування кільцевих елементів застосували верхню межу відмінності однойменних компонент деформації на протилежно розташованих обмежуючих поверхнях елемента. За допомогою даного критерію визначили глибину приповерхневого ефекту біля внутрішньої і зовнішньої поверхонь циліндра при його кінцевій швидкості обертання. Виявили вплив ефекту на картину розподілу напружень в характерних перетинах тіла.

---

## SURFACE EFFECT IN AN ELASTIC CYLINDER WITH RING FIBERS UNDER ROTATION WHEN FREE LANDING

V. M. Akhundov, M. M. Kostrova, I. Yu. Naumova

National Metallurgical Academy of Ukraine  
akhundov@ua.fm

**Key words:**

piecewise homogeneous cylinder, annular fibers, centrifugal forces, large deformations, finite difference method.

We investigated the near-surface effect in an elastic cylinder made of a matrix and ring fibers under the influence of inertial forces of rotation around its axis of symmetry during free landing. Fibers of a square cross section are arranged in a cylinder matrix according to a square packing scheme. The cylinder was formally considered as an assembly of ring elements. The annular elements are square rings of matrix material, including annular square fibers as their reinforcing core.

Geometric and physical equations and equilibrium equations were used in the nonlinear theory of elasticity to describe the deformation of the piecewise-uniform cylinder under consideration. A feature of the problem being solved is the effect on the centrifugal forces acting on the matrix and the fibers of changes in the distances from their material points to the axis of rotation of the cylinder.

The first-order derivatives of the sought quantities with respect to the axial and radial coordinates in the equations of the problem were approximated using finite-difference relations of the second order of accuracy. Together with the boundary conditions and the conditions of joint deformation of the matrix and fibers, a system of nonlinear equations is formed with respect to the main sought quantities at the nodal points of the two-dimensional region. This system of equations was solved on the basis of the discrete Newton method. The uniqueness of the solution of the boundary value problem was ensured by continuing the solution with respect to the angular velocity of rotation of the cylinder.

Under conditions of large deformations of the components of a cylindrical body, a near-surface effect in it was considered, which manifests itself in a substantially non-periodic deformation of the ring elements of the body adjacent to its internal and external surfaces. As a criterion for the non-periodic deformation of the ring elements, the upper face of the difference between the deformation components of the same name on the oppositely located bounding surfaces of the element was used. Using this criterion, the depth of the near-surface effect was determined near the inner and outer surfaces of the cylinder at its final rotation speed. The effect was revealed on the pattern of stress distribution in characteristic sections of the body.

## Введение

Деформация круглых цилиндров из однородных материалов под воздействием вращения вокруг оси симметрии подробно изучена в линейной механике деформирования. Библиография данных исследований достаточно полно представлена в [1]. В [2] рассмотрены инерционные накопители энергии (маховики) из жестких композитных материалов с цилиндрической ортотропией упругих свойств. В [3] с помощью уравнений линейной теории упругости решена задача о напряжениях во вращающейся цилиндрически ортотропной трубе. Приведены результаты при свободной и жесткой посадках трубы для случаев осевого и окружного армирования. В [4] рассмотрено перераспределение напряжений в диске с эластомерной матрицей в условиях релаксации напряжений при ползучести материала. Решение задачи производится при геометрически и физически линейной постановке. Состояние вращающихся дисков по модели упруго-пластического материала описано в работе [5]. Расчет вращающегося диска по полученным экспериментальным диаграммам растяжения материала без их упрощающей схематизации с помощью метода переменных параметров упругости приведен в [6].

Изучение больших деформаций цилиндров, армированных системами волокон, под воздействием сил инерции вращательного движения представлено в работах [7–9]. Описания другими авторами больших деформаций цилиндров под воздействием центробежных сил в литературе и других источниках не выявили. В [7] и [8] решены задачи, соответственно, в плоской и осесимметричной постановках для цилиндров, слабо армированных волокнами. Исследование производили по одноуровневой прикладной теории [10], основанной на модели материала, по которой макроскопические напряжения определяются вкладом напряжений матрицы и усилий осевого растяжения или стесненного сжатия. В [9] на базе двухуровневой каркасной теории [11], включающей макро- и микромеханический уровни анализа, решены задачи о кручении цилиндров с двух- и трехортогональными

схемами армирования. В [12] по модели кусочно-однородной среды рассмотрено деформирование свободно вращающегося эластичного цилиндра с двоякопериодическим расположением в его матрице кольцевых волокон квадратного сечения.

Исследование приповерхностных эффектов в армированных волокнами круговых цилиндрах под воздействием вращения, а при больших деформациях и в иных телах, не выявили. Отметим [13], где рассматривается затухание краевого эффекта в материале, однонаправленно армированном волокнами квадратного сечения, при поперечном нагружении волокон из приповерхностного ряда. В работе [14] в аналитическом приближении исследованы краевые эффекты в однонаправленных композитах, связанные с перераспределением внешней нагрузки между волокном и матрицей при вытягивании волокон. В [15] дан анализ бифуркации при изгибе бесконечного эластомерного слоя, армированного рядом волокон вблизи одной ограничивающей поверхности, когда другая связана с нерастяжимой пластиной.

## 1. Постановка задачи

Исследовали приповерхностный эффект в эластичном цилиндре из матрицы и кольцевых волокон под воздействием сил инерции вращения вокруг его оси симметрии при свободной посадке. Волокна квадратного сечения располагаются в матрице цилиндра по схеме квадратной упаковки. Цилиндр формально рассматривали как сборку кольцевых элементов. Кольцевые элементы представляют собой кольца квадратного сечения из матричного материала, включающие кольцевые волокна квадратного сечения как их армирующую сердцевину.

На рис. 1 показано осевое сечение недеформированного цилиндра с внутренним радиусом  $r = a$  и внешним  $r = b$ . Цилиндр включает цилиндрические слои толщиной  $h$ , армированные кольцевыми волокнами квадратного сечения с длиной сторон  $\delta$ .

Изучали осесимметричную деформацию цилиндра при макроскопически плоском деформировании, когда длина цилиндра оставалась неизменяемой. В силу условий

симметрии задачу решали для правой половины дискового слоя толщиной  $h/2$ . Такой половинный слой заключен между поперечными сечениями цилиндра, одно из которых проходит через осевые линии волокон, а другое – через матрицу посередине между волокнами.

Применяли систему материальных цилиндрических координат  $\hat{\theta}^1, \hat{\theta}^2, \hat{\theta}^3$ , из которых  $\hat{\theta}^1$  – осевая,  $\hat{\theta}^2$  – окружная,  $\hat{\theta}^3$  – радиальная координаты. В отсчетной конфигурации цилиндра данные координаты обозначаем как  $t, \varphi, r$  соответственно. Осевую координату  $t$  отсчитывали от центрального

сечения, проходящего через осевые линии волокон в дисковом слое. Наряду с радиальной координатой  $r$  используем координату  $z = r - a$ , отсчитываемую от внутренней поверхности цилиндра. Величины, относящиеся к матрице и волокнам, отмечаем индексом  $n$  при значении  $n = 0$ , отвечающем матрице, и значениях  $n = 1, \dots, n_{\max}$ , как отвечающих волокнам в их нумерации по направлению от внутренней к внешней поверхности. В некоторых случаях для большей «наглядности» выражений величины описания матрицы отмечаем отдельно индексом  $m$ . При ясной принадлежности индексы компонентов обычно опускаем.

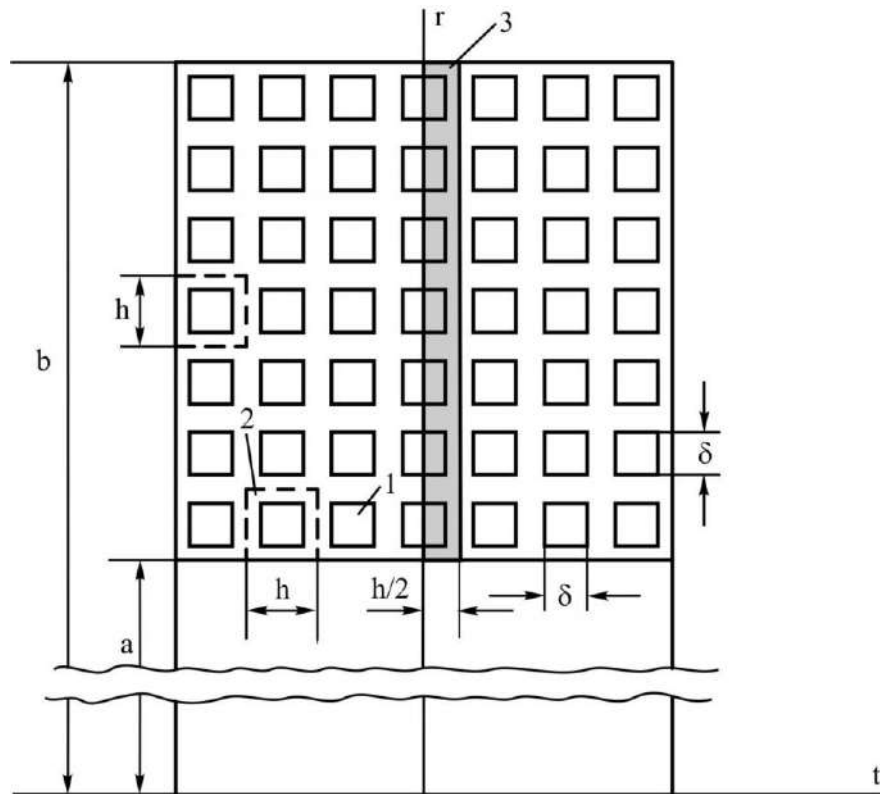


Рис. 1. Осевое сечение цилиндра в исходном состоянии: 1 – волокно квадратного сечения, 2 – кольцевой элемент, 3 – половина дискового слоя справа от центрального сечения

Применяли геометрические и физические уравнения и уравнения равновесия в нелинейной теории упругости [16] для описания деформации рассматриваемого кусочно-однородного цилиндра. Особенностью решаемой задачи является влияние на центробежные силы, воздействующие на матрицу и волокна, изменений расстояний от их материальных точек до оси вращения цилиндра. В используемых уравнениях задавали радиальную компоненту плотности

массовых сил, воздействующих на составляющие (компоненты) цилиндра при его вращении, в виде

$$F_{n(3)} = (r + u_{n(3)})\omega^2, \quad n = 0, 1, \dots, n_{\max},$$

где  $u_{n(3)}$  – радиальная компонента вектора перемещения в  $n$ -ом компоненте;  $\omega = 2\pi \cdot f$  – угловая скорость вращения;  $f$  – число оборотов вращения в секунду.

Граничные условия для каждого из компонентов цилиндра, при которых решали краевую задачу, выражают отсутствие осевых перемещений в поверхностях  $t=0$  и  $t=h/2$  и поперечных сдвигов из этих поверхностей:

$$u_{n(1)} \Big|_{t=0} = 0, \quad q_{n(13)} \Big|_{t=0} = 0, \quad n=0,1,2,\dots,n_{\max};$$

$$u_{n(1)} \Big|_{t=h/2} = 0, \quad q_{n(13)} \Big|_{t=h/2} = 0, \quad n=0.$$

При свободных от нагрузок внутренней и внешней поверхностях цилиндра принимали равными в них нулю компоненты несимметричного тензора Пиола-Кирхгофа:

$$t_{m(31)=0} \Big|_{r=a} = 0, \quad t_{m(33)=0} \Big|_{r=a} = 0;$$

$$t_{m(31)} \Big|_{r=b} = 0, \quad t_{m(33)} \Big|_{r=b} = 0.$$

Условия совместного деформирования задавали, исходя из равенств компонент векторов перемещений и напряжений для матрицы и волокон между собой в границах их раздела. Эти условия приводим, отметив величины, относящиеся к матрице, индексом  $m$ . В цилиндрических поверхностях раздела матрицы с  $n$ -волоком

$$u_{m(1)}(t,r) = u_{n(1)}(t,r), \quad u_{m(3)}(t,r) = u_{n(3)}(t,r),$$

$$t_{m(31)}(t,r) = t_{n(31)}(t,r), \quad t_{m(33)}(t,r) = t_{n(33)}(t,r),$$

$$0 \leq t \leq \delta/2, \quad z = nh - (h + \delta)/2,$$

$$z = nh - (h - \delta)/2, \quad n = 1, 2, \dots, n_{\max}.$$

В поперечной плоскости  $t = \delta/2$  раздела  $n$ -волокон с матрицей

$$u_{m(1)}(t,r) = u_{n(1)}(t,r), \quad u_{m(3)}(t,r) = u_{n(3)}(t,r),$$

$$t_{m(11)}(t,r) = t_{n(11)}(t,r), \quad t_{m(13)}(t,r) = t_{n(13)}(t,r),$$

$$t = \delta/2, \quad nh - (h + \delta)/2 \leq z \leq nh - (h - \delta)/2,$$

$$n = 1, \dots, n_{\max}.$$

Производные первого порядка от искоемых величин по осевой и радиальной координатам  $t$  и  $r$  в уравнениях задачи аппроксимировали с помощью конечно-разностных соотношений второго порядка точности [17]. Вместе с привлечением граничных условий и условий совместного деформиро-

вания матрицы и волокон формируется система нелинейных уравнений относительно основных искоемых величин в узловых точках двумерной области  $0 \leq t \leq h/2$ ,  $a \leq r \leq b$ . Данную систему уравнений решали на основе процедуры дискретного метода Ньютона [18]. Единственность решения краевой задачи обеспечивали на основе продолжения решения по угловой скорости вращения цилиндра.

## 2. Численные результаты

Представляем результаты численного решения задачи для цилиндра, включающего 100 цилиндрических слоев с кольцевыми волокнами в них. Цилиндр рассматривали как совокупность дисковых слоев, в сборках каждого из которых по 100 кольцевых элементов. Внутренний радиус цилиндра  $a = 100$  мм, внешний радиус  $b = 200$  мм. Волокна в кольцевых элементах с длиной стороны квадратного сечения  $\delta = 0,6h = 0,6$  мм, квадратная упаковка волокон с расстояниями между осевыми линиями смежных волокон  $h = 1$  мм, коэффициент наполнения волокнами  $k_f = \delta^2/h^2 = 0,36$ . Материалы матрицы и волокон задавали с помощью трехконстантного потенциала Левинсона–Буржеса и двухконстантного потенциала Блейтца соответственно [19]. Для матрицы принимали значения упругих параметров  $E_m = 4$  МПа,  $\nu_m = 0,46$ ,  $\beta_m = 1$ ; для волокон –  $E_f = 68$  МПа,  $\nu_f = 0,4$ . Плотность материалов матрицы и волокон принимали одинаковой  $\rho_m = \rho_f = 1,1 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Результаты решения задачи получали на основе сетки узловых точек конечно-разностной схемы, для которой на отрезках  $0 \leq t \leq 0,3$  мм и  $0,3 \text{ мм} \leq t \leq 0,5$  мм по 7 равноотстоящих узловых точек, две из которых на границах раздела совпадают между собой. На протяжениях по координате  $r$  в волокнах и между волокнами также по 7 узловых точек (см. рис. 2).

На рис. 2 изображены конфигурации осевых сечений для четырех половинборок кольцевых элементов, расположенных в цилиндре справа от центрального сечения.



Каждая из данных сборок включает три концентрически расположенных кольцевых элемента. Первая сборка выделена из недеформированного цилиндра, конфигурация

ее осевого сечения не зависит от места сборки в цилиндре, приведена для сопоставления с ней деформированных сборок.

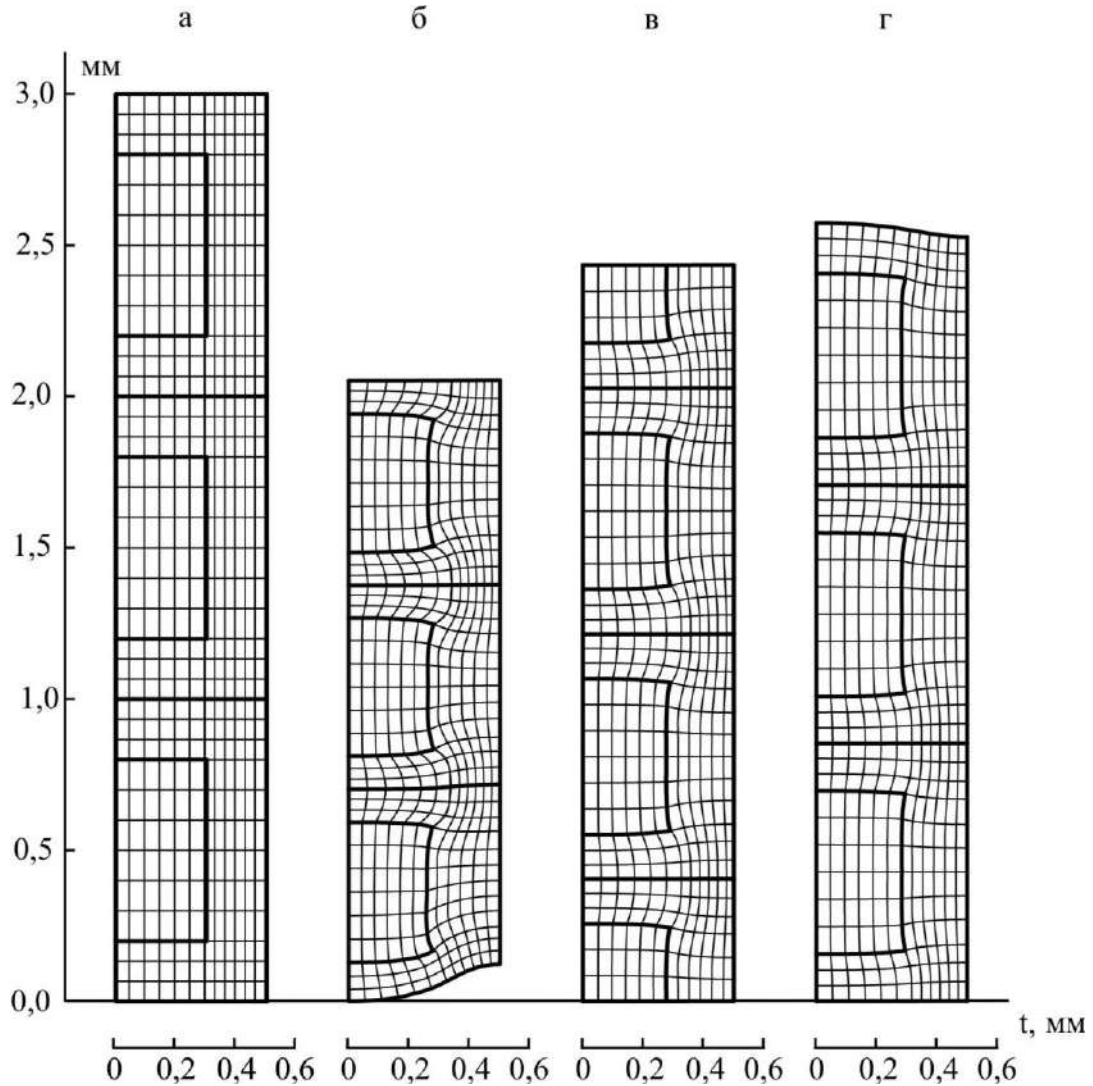


Рис. 2. Конфигурации осевых сечений сборок кольцевых элементов цилиндра:

- а) сборка из трех элементов без вращения цилиндра; б), в) и г) сборки при вращении  $\omega = 2\pi \cdot 80c^{-1}$ , включающие 1-й, 2-й, 3-й элементы, половину 49-го, 50-й, 51-й, половину 52-го элемента и 98-й, 99-й, 100-й элементы соответственно

Остальные сборки выделены из деформированного цилиндра при  $\omega = 2\pi \cdot 80c^{-1}$ . Вторая сборка включает 1-й, 2-й и 3-й кольцевые элементы, примыкающие к внутренней поверхности цилиндра, ограничена поверхностями  $z = 0$  и  $z = 3h$ . Третья сборка образована из внешней половины 49-го элемента, 50-го, 51-го элементов и внутренней половины 52-го элемента, расположена между поверхностями  $z = 48,5h$  и  $z = 51,5h$ . Четвертая сборка из примыкающих к внешней поверхности цилиндра 98-го, 99-го и

100-го элементов между поверхностями  $z = 97h$  и  $z = 100h$ .

Конфигурации осевых сечений кольцевых элементов в сборках представлены сетками координатных линий  $t = t_i$ ,  $z = z_i$ , проходящих через узловые точки  $(t_i, z_i)$  конечно-разностной схемы решения задачи. Они демонстрируют, насколько более интенсивно деформируются кольцевые элементы, расположенные ближе к внутренней поверхности цилиндра по сравнению с более удаленными от нее элементами.

Наиболее сильно изменяется конфигурация 1-го элемента, внутренняя поверхность которого служит соответствующей частью граничной поверхности цилиндра. Материал матрицы возле внутренней поверхности существенно перемещается во внутрь области матричного слоя  $\delta/2 \leq t \leq h - \delta/2$  между волокнами цилиндра из рассматриваемого дискового слоя и смежного с ним другого дискового слоя. Стрела прогиба внутренней поверхности цилиндра  $f = 0,12$  мм (12% от высоты  $h = 1$  мм поперечного сечения элемента в недеформированном состоянии). Меньше данный эффект выражен возле внешней поверхности цилиндра. Она прогибается также во внутрь области, занимаемой матрицей, со стрелой прогиба  $f = 0,05$  мм.

Деформированные конфигурации осевых сечений 1-го и 2-го кольцевых элементов значительно различаются между собой. Для 2-го и 3-го элементов различия в их конфигурациях выражены менее существенно. Что касается 3-го и 4-го и последующих пар смежных элементов, то их конфигурации близки между собой в пределах погрешности представления графического материала. Это продолжается включительно до пары 98-го и 99-го элементов. И только конфигурация 99-го элемента заметно отличается от конфигурации 100-го.

На рис. 3 представлены распределения осевых, окружных и радиальных кратностей удлинений  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  и угловой деформации  $\omega_{13}$  вдоль внутренней поверхности цилиндра (1-го элемента)  $z = 0$ . Характерной особенностью является осевое удлинение на участке под волокнами и укорочение в матричном слое. Кривая для радиальной деформации  $\lambda_3$  отражает большее радиальное укорочение под волокном, где достигается  $\lambda_3 - 1 = -0,44$ , и меньшее в матричном слое, по центру которого  $t = 0,5$  мм  $\lambda_3 - 1 = -0,28$ .

Окружная деформация  $\lambda_2$  практически постоянна, принимает значения от  $\lambda_2 = 1,661$  при  $t = 0$  до  $\lambda_2 = 1,662$  при  $t = 0,5$ . Угловая деформация  $\gamma_{13} = \pi/2 - \omega_{13} = 0$  при свободной внутренней поверхности цилиндра.

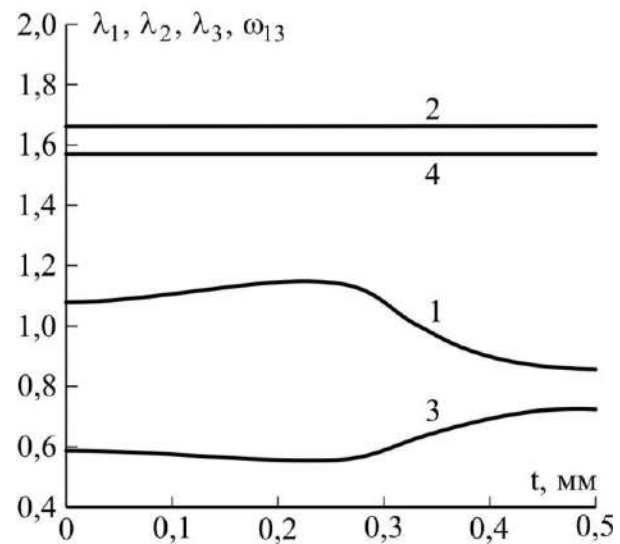


Рис. 3. Распределения кратностей удлинений  $\lambda_1$  (1),  $\lambda_2$  (2),  $\lambda_3$  (3) и координатного угла  $\omega_{12}$  (4) во внутренней поверхности  $z = 0$  первого кольцевого элемента цилиндра

На рис. 4 приведены кривые, характеризующие параметры деформации в поверхности  $z = h$ , разделяющей 1-й и 2-й кольцевые элементы. Осевая деформация  $\lambda_1$  монотонно убывает с переходом от растяжения ( $\lambda_1 > 1$ ) в зоне между волокнами к сжатию ( $\lambda_1 < 1$ ) в матричном слое  $0,3 \text{ мм} \leq t \leq 0,5 \text{ мм}$ . По сути отражается вытеснение связующего из области между смежными волокнами в область матричного слоя (см. также конфигурации сборок кольцевых элементов на рис. 2). Функция  $\lambda_3$  монотонно возрастает при наибольших значениях (по модулю) укорочения  $\lambda_3 - 1 \cong -0,5$  по центру между волокнами. Функция  $\lambda_2$  постоянна в пределах погрешности ее изображения. Для  $\omega_{13}$  кривая не сильно отклоняется от  $\pi/2$  при наибольшей сдвиговой деформации

$\gamma_{13} = \pi/2 - \omega_{13}$  возле места перехода  $t = 0,3$  мм к матричному слою.

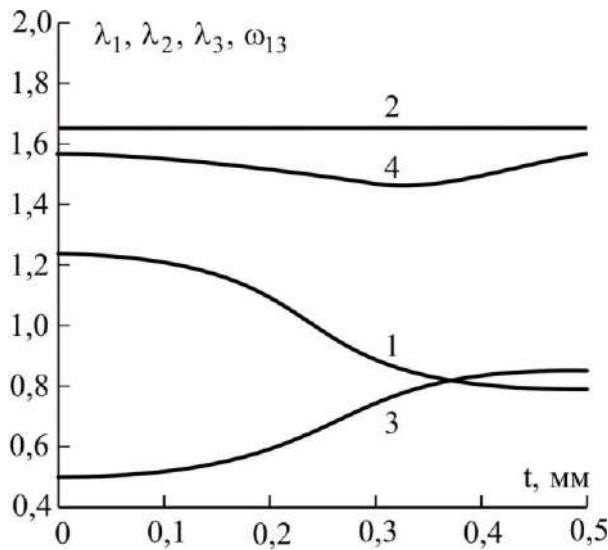


Рис. 4. То же в поверхности  $z = h$  раздела первого и второго кольцевых элементов цилиндра

Из сопоставления распределения деформаций во внешней и внутренней поверхностях 1-го кольцевого элемента приходим к

$$S = \max \left( \sup_i |\lambda_{1i}^+ - \lambda_{1i}^-|, \sup_i |\lambda_{2i}^+ - \lambda_{2i}^-|, \sup_i |\lambda_{3i}^+ - \lambda_{3i}^-|, \sup_i |\omega_{13i}^+ - \omega_{13i}^-| \right) \cdot 100\% .$$

Здесь параметры деформации, отмеченные «+» и «-», относим к внешней и внутренней поверхностям кольцевого элемента; индексом  $i$  отмечены узловые значения параметров деформации в данных поверхностях, отвечающие узловому значению осевой координаты  $t = t_i$  в конечно-разностной схеме решения задачи. Выражение для показателя  $S$  называем далее показателем или критерием неперидического деформирования кольцевого элемента.

Наибольшие из разниц узловых значений на противоположно расположенных граничных поверхностях элемента для отдельных параметров деформации называем частичными показателями неперидического деформирования элемента и обозначаем их как

$$S_1 = \sup_i |\lambda_{1i}^+ - \lambda_{1i}^-| \cdot 100\% ,$$

$$S_2 = \sup_i |\lambda_{2i}^+ - \lambda_{2i}^-| \cdot 100\% ,$$

$$S_3 = \sup_i |\lambda_{3i}^+ - \lambda_{3i}^-| \cdot 100\% ,$$

$$S_4 = \sup_i |\omega_{13i}^+ - \omega_{13i}^-| \cdot 100\% .$$

Тогда общий показатель неперидического деформирования запишем в более кратком виде как

$$S = \max (S_1, S_2, S_3, S_4) .$$

В таблице 1 приведены максимальные различия параметров деформации в ограничивающих поверхностях элемента. Наиболее различаются узловые значения осевой деформации  $\lambda_1$  в поверхности  $t = 0,3$ , разделяющей матрично-волоконный и матричный слой в элементе,  $S_1 = 25,2\%$ .

выводу о неперидическом характере деформирования данного элемента. В качестве оценки отклонения от перидического (квазиперидического) деформирования кольцевого элемента принимаем различия между деформациями в его внешней и внутренней ограничивающих цилиндрических поверхностях (по условиям симметрии решаемой задачи различия между деформациями на краях  $t = -h/2$  и  $t = h/2$  сборки кольцевых элементов отсутствуют). Определяем наибольшую разницу между соответствующими узловыми значениями на противоположно расположенных границах элемента для каждого из параметров деформации. Из найденных различий между одноименными параметрами деформации на внешней и внутренней поверхностях элемента выбираем максимальное по модулю как показатель неперидического деформирования элемента и выражаем его в процентах:

**Табл. 1.** Показатели различия деформаций в ограничивающих поверхностях  $z = 1$  мм и  $z = 0$  1-го кольцевого элемента

Показатель	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S$
Значение показателя, %	25,2	1,01	18,8	9,79	25,2
$t$ , мм	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3

На рис. 5 и 6 представлены графики распределения деформаций в ограничивающих поверхностях 3-го кольцевого элемента  $z = 2$  мм и  $z = 3$  мм, проходящих в связующем материале. Кривые зависимостей визуально практически не отличимы между собой. На большей протяженности волоконно-матричного слоя зависимости для  $\lambda_1$  и  $\lambda_3$  демонстрируют осевые удлинения и радиальные укорочения соответственно, а на большей протяженности матричного слоя – укорочения по обоим направлениям, из которых больше осевое (по  $\lambda_1$ ). На полном интервале при  $z = 2$  мм  $1,264 \geq \lambda_1 \geq 0,761$ ,  $0,492 \leq \lambda_3 \leq 0,891$  и при  $z = 3$  мм  $1,261 \geq \lambda_1 \geq 0,762$ ,  $0,497 \leq \lambda_3 \leq 0,897$ . Функция окружной деформации  $\lambda_2 \cong 1,6421$  при

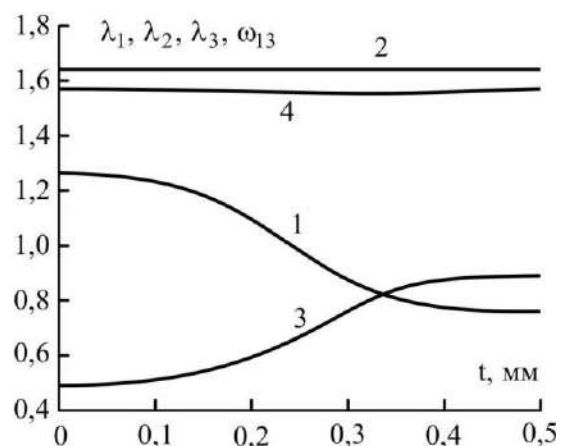
$z = 2$  мм и  $\lambda_2 \cong 1,6327$  при  $z = 3$  мм. Функция  $\omega_{13}$  испытывает слабое и немонотонное изменение, принимая на обоих краях интервала значение  $\omega_{13} = \pi/2$ . Для поверхностей  $z = 2$  мм и  $z = 3$  мм  $1,571 \geq \omega_{13} \geq 1,554$  и  $1,571 \geq \omega_{13} \geq 1,562$ . Наибольшие отклонения от  $\pi/2$  для внутренней поверхности элемента  $|\Delta\omega_{13}| = 0,017$  ( $0,97^\circ$ ), для внешней поверхности  $|\Delta\omega_{13}| = 0,009$  ( $0,52^\circ$ ).

В таблице 2 приведены показатели различия параметров деформации в ограничивающих внешней и внутренней поверхностях элемента. Наибольшее различие  $S = 0,94\%$  в этих поверхностях имеет окружная деформация  $\lambda_2$  по срединной поверхности  $t = h/2 = 0,5$  мм матричного слоя.

**Табл. 2.** Показатели различия деформаций в ограничивающих поверхностях  $z = 3$  мм и  $z = 2$  мм 3-го кольцевого элемента

Показатель	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S$
Значение показателя, %	0,30	0,94	0,57	0,75	0,94
$t$ , мм	0	0,5	0,5	0,3	0,5

Исходя из показателей деформирования, представленных в таблице 2, приходим к значению показателя неперидичности деформирования 3-го кольцевого элемента  $S = 0,94\%$  как наибольшего из частичных показателей в таблице. Данное значение показателя  $S$  свидетельствует, что материальная конфигурация элемента в деформированном состоянии достаточно близка к симметричной относительно срединной поверхности элемента  $z = 2,5$  мм. Деформирование 3-го кольцевого элемента может, таким образом, рассматриваться как квазипериодическое.



**Рис. 5.** То же в поверхности  $z = 2h$  раздела второго и третьего кольцевых элементов цилиндра

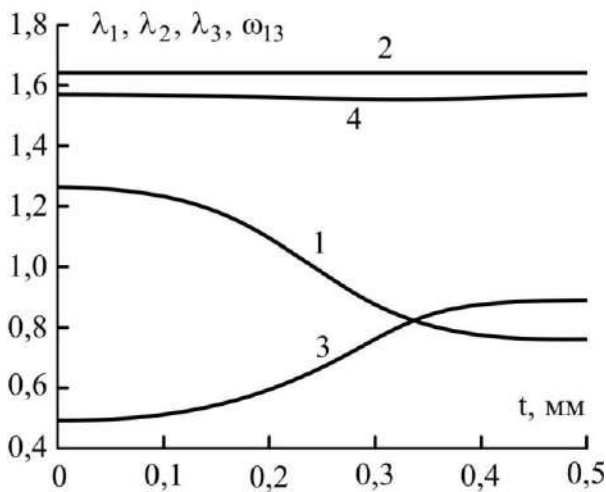


Рис. 6. То же в поверхности  $z = 3h$  раздела третьего и четвертого кольцевых элементов цилиндра.

На рис. 7 изображены кривые, отображающие распределение деформаций в поверхности  $z = 99h = 99$  мм, являющейся внутренней ограничивающей поверхностью 100-го кольцевого элемента. Осевая и радиальная кратности удлинений изменяются в пересекающихся интервалах  $1,082 \geq \lambda_1 \geq 0,900$  и  $0,762 \leq \lambda_3 \leq 0,949$ . На большей части протяжения волокно-матричного слоя осевые удлинения ( $\lambda_1 > 1$ ) и всюду осевые укорочения ( $\lambda_1 < 1$ ) в матричном слое. На всем интервале элемента  $0 \leq t \leq 0,5$  мм материал связующего (матрицы) испытывает укорочения по радиальным направлениям. Окружная кратность удлинения является практически постоянной  $\lambda_2 \cong 1,2298$ . Функция угловой деформации, принимая на краях интервала значения  $\omega_{13} = \pi/2$ , изменяется в диапазоне  $\pi/2 \leq \omega_{13} \leq 1,584$  с максимальным отклонением от  $\pi/2$  (углом сдвига)  $\gamma_3 = \pi/2 - \omega_{13} = -0,013$  ( $-0,74^\circ$ ).

На рис. 8 отображены распределения деформаций для внешней ограничивающей поверхности  $z = 100h = 100$  мм 100-го кольцевого элемента и в целом всей сборки, моделирующей цилиндрическое тело. Осевая деформация  $\lambda_1$  в пределах волокно-матричного слоя является деформацией удлинения при слабом немономтонном изменении в диапазоне значений  $1,039 \leq \lambda_1 \leq 1,053$ . Матричный слой, за исключением узкой окрест-

ности возле смежного с ним волокно-матричного слоя, испытывает изменения осевых длин в диапазоне  $1,025 \geq \lambda_1 \geq 0,905$ . Окружная кратность удлинения изменяется как весьма слабо убывающая функция в диапазоне  $1,2280 \geq \lambda_2 \geq 1,2278$ . Функция  $\lambda_3$  на волокно-матричном слое изменяется со слабой немономтонностью в диапазоне укорочений  $0,808 \geq \lambda_3 \geq 0,797$ . Матричный слой также по радиальным направлениям укорачивается, диапазон значений деформации  $0,803 \leq \lambda_3 \leq 0,910$ . В соответствии с тем, что ограничивающая поверхность  $z = 100$  мм свободна от внешних сил, строго  $\omega_{13} = \pi/2$ .

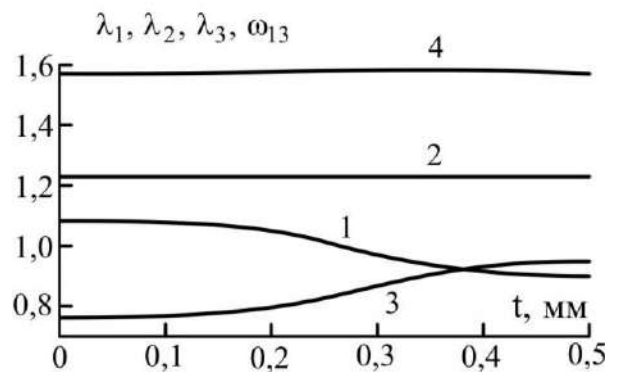


Рис. 7. То же во внутренней поверхности  $z = 99h$  100-го кольцевого элемента цилиндра

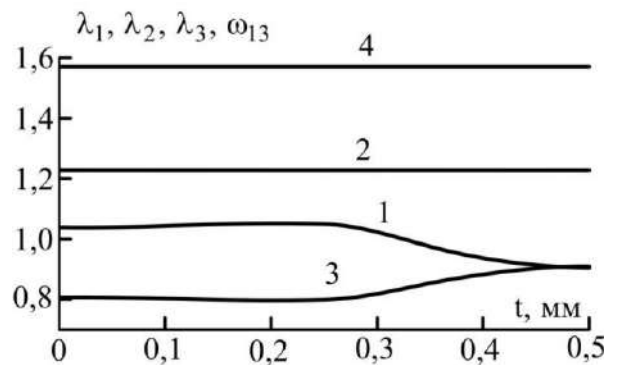


Рис. 8. То же во внешней поверхности  $z = 100h$  кольцевого элемента цилиндра

В таблице 3 приведены показатели различия деформации в ограничивающих поверхностях элемента. Наибольшее значение показателя различия деформаций в ограничивающих поверхностях элемента достигается для осевой деформации  $\lambda_1$  по месту перехода от волокно-матричного слоя к матричному слою.

**Табл. 3.** Показатели различия деформаций в ограничивающих поверхностях  $z = 99$  мм и  $z = 100$  мм 100-го кольцевого элемента

Показатель	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S$
Значение показателя, %	5,20	0,20	5,08	1,33	5,20
$t$ , мм	0,3	0,5	11/30	0,3	0,3

В таблице 4 даны значения коэффициента  $S$  для ряда кольцевых элементов, на основе которых можно судить о глубине приповерхностного эффекта. Значения коэффициента непереродичности деформирования кольцевых элементов даны с учетом значений параметров деформации в угловых точках поперечного сечения волокна и в связующем материале для этих же точек (верхняя строка таблицы) и без учета данных значений (нижняя строка таблицы). В качестве критерия проникновения эффекта в глубь цилиндра задаем величину коэффициента непереродического деформирования  $\overset{\circ}{S}$ , как верхнюю границу квазипереродического деформирования. В случае, когда  $S \leq \overset{\circ}{S}$ , то приповерхностный эффект рассматриваем как практически не распространяющийся на элемент. Если в качестве

оценки проникновения приповерхностного эффекта примем  $\overset{\circ}{S} = 2\%$ , то в этом случае данный эффект оцениваем как проникающий на два смежных кольцевых элемента со стороны внутренней лицевой поверхности цилиндра и на один элемент со стороны его наружной поверхности. При  $\overset{\circ}{S} = 3\%$  приповерхностный эффект возле внутренней поверхности цилиндра также считаем как «экранируемый» двумя кольцевыми элементами, а глубину приповерхностного эффекта возле его наружной поверхности считаем равной одному кольцевому элементу. При  $\overset{\circ}{S} = 1\%$  глубина приповерхностного элемента определяется тремя элементами возле внутренней поверхности и двумя элементами возле внешней поверхности.

**Табл. 4.** Значения коэффициента непереродичности деформирования  $S$  для ряда кольцевых элементов цилиндра при  $\omega = 2\pi \cdot 80c^{-1}$

Номер элемента, $n$	1	2	3	51	98	99	100
Коэффициент непереродичности деформирования элемента $S$ , %	49,4	8,2	1,3	0,7	0,4	1,5	23,7

На рис. 9 представлены распределения окружных напряжений  $p_{22}$  в центральном сечении  $t = 0$ . Распределения напряжений показаны на протяжениях в цилиндре  $0 \leq z \leq 3h$ ,  $48,5h \leq z \leq 51,5h$ ,  $97h \leq z \leq 100h$  трех сборок кольцевых элементов, которые изображены на рис. 2 – б, в, г. Эти напряжения претерпевают скачки на поверхностях раздела матрицы с волокнами. С переходом от одного кольцевого элемента к выше расположенному другому эти напряжения в матрице и волокнах убывают. Для матрицы напряжение уменьшается от значения  $p_{22} = 3,1$  МПа во внутренней поверхности  $z = 0$  до  $p_{22} = 1,2$  МПа во внешней

$z = 100$  мм. В срединной поверхности  $z = 0,5h$  первого волокна  $p_{22} = 47,1$  МПа, а в срединной поверхности  $z = 99,5h$  100-го волокна  $p_{22} = 15,8$  МПа. С переходом от матрицы к волокну данное напряжение для 1-го элемента увеличивается в 22 и 17 раз по месту его внутренней и внешней цилиндрических поверхностей раздела, для 100-го элемента – в 25 и 17 раз соответственно. Для элементов возле срединной поверхности цилиндра с переходом от матрицы к волокну напряжение  $p_{22}$  увеличивается в 14 раз в обеих для каждого из них поверхностях раздела.

На рис. 10 приведены кривые, отражающие распределения напряжений  $p_{22}$  на указанных протяжениях трех сборок в цилиндре для краевого сечения  $t = 0,5$  мм. Данные кривые отражают распределения напряжений в матричном слое, являются непрерывными и гладкими, в отличие от кривых распределений напряжений  $p_{22}$  для сечения  $t = 0$ , претерпевающих разрывы на поверхностях раздела матрицы с волокнами. Напряжения  $p_{22}$  в сечении  $t = 0,5$  мм возрастают с переходом от поверхности раздела двух смежных элементов к срединной поверхности каждого из них. И, напротив, эти напряжения убывают с переходом от положения напротив срединной линии боковой

поверхности волокна к положению напротив срединной линии для матрицы между волокнами. Соотношение между максимальным и минимальным напряжениями на протяжении периода армирования (одного элемента) изменяется от 1,22 вблизи внутренней поверхности до 1,39 вблизи внешней поверхности. В целом уровень напряжений в сечении  $t = 0,5$  мм примерно такой же как для матрицы в сечении  $t = 0$  и примерно на порядок меньше уровня напряжений в сечении  $t = 0$  для волокон. Окружные напряжения  $p_{22}$  в сечениях  $t = 0$ ,  $t = 0,5$  мм и всюду в цилиндре являются положительными (растягивающими).

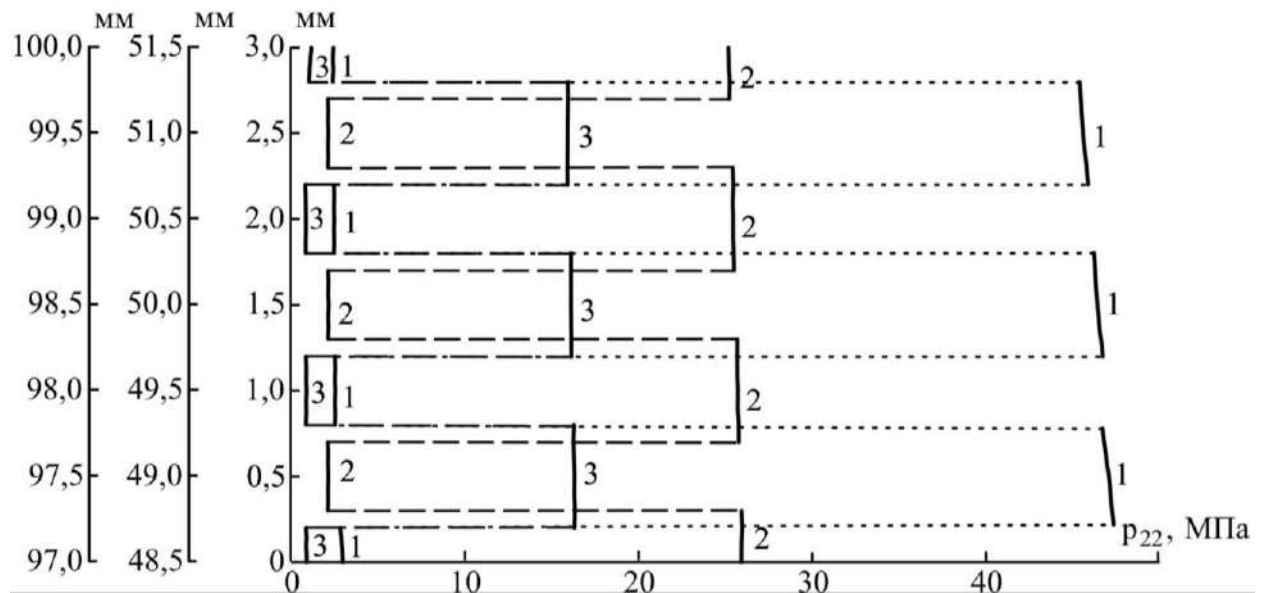


Рис. 9. Распределения окружных напряжений  $p_{22}$  на протяжениях  $0 \leq z \leq 3h$ ,  $48,5h \leq z \leq 51,5h$ ,  $97h \leq z \leq 100h$  трех сборок элементов в цилиндре для сечения  $t = 0$  мм

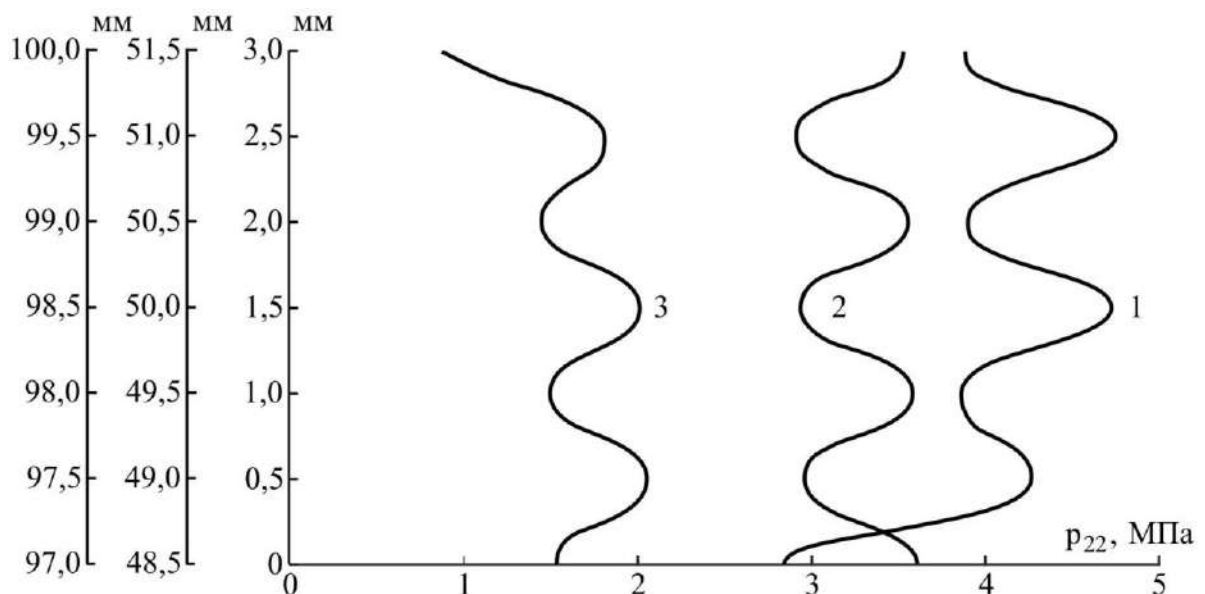


Рис. 10. То же для сечения  $t = 0,5$  мм

На рис. 11 и 12 приведены кривые, которые в целом отражают распределения напряжений  $p_{22}$  по всей толщине цилиндра  $0 \leq z \leq 100h$  в экваториальном (центральной)  $t = 0$  и краевом  $t = 0,5$  мм сечениях. На рис. 11,а и 12,а кривые состоят из отрезков, соединяющих точки, отвечающие значениям напряжения  $p_{22}$  в границах кольцевых элементов  $z = nh$ ,  $n = 0, 1, \dots, 100$  для центральной поверхности  $t = 0$  (при  $n = 0$  и

$n = 100$  значения напряжения отвечают внутренней и внешней поверхностям цилиндра соответственно). На рис. 11,б и 12,б кривые образованы отрезками, которые соединяют точки, отвечающие значениям напряжения  $p_{22}$  в срединных поверхностях кольцевых элементов  $z = nh - h/2$ ,  $n = 1, \dots, 100$ . На рис. 11 одна из кривых (а) относится к матрице, а другая (б) к волокнам в цилиндре. На рис. 12 обе кривые относятся к связующему.

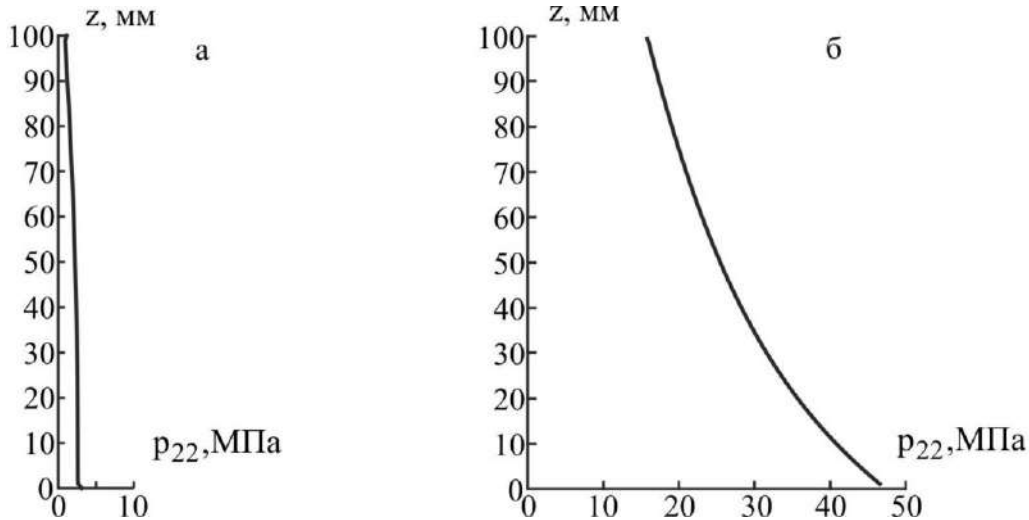


Рис. 11. Распределения окружных напряжений  $p_{22}$  в граничных поверхностях элементов (а) и в их срединных поверхностях (б) для сечения  $t = 0$

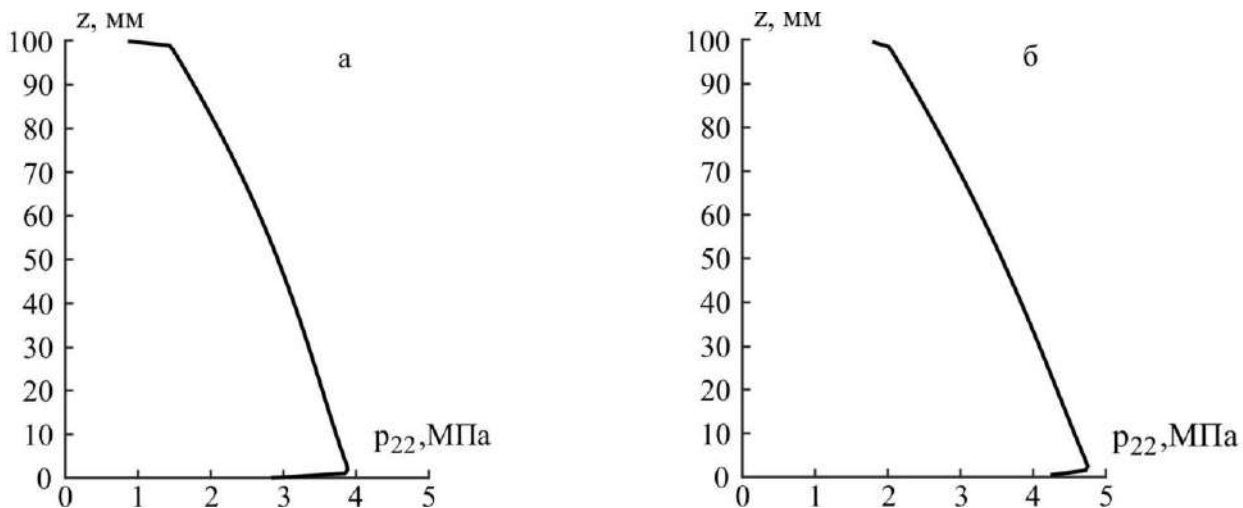


Рис. 12. То же для сечения  $t = 0,5$  мм

В случае центрального сечения  $t = 0$  (рис. 11) для матричного материала функция  $p_{22}$  является слабо монотонно убывающей. Исключением является концевой участок перехода от поверхности раздела 99-го и 100-го элементов ко внешней поверхности последнего из элементов. На этом участке  $p_{22}$  испытывает очень слабое увеличение,

едва визуально заметное (см. также рис. 9, график 3), которое следует рассматривать как проявление приповерхностного эффекта возле внешней поверхности цилиндра. Функция  $p_{22}$  для волокон при  $t = 0$ , будучи монотонно убывающей, приповерхностного эффекта возле граничных поверхностей цилиндра не отражает.



В случае краевого сечения  $t = 0,5$  мм (рис. 12) обе кривые являются монотонно убывающими на интервалах, исключая концевые участки возле внутренней поверхности цилиндра. На участке возле внутренней поверхности данные кривые, которые, как и кривая на рис. 11,а, визуальнo отражают проявление приповерхностного эффекта на глубину в пределах 2 периодов армирования по высоте стенки цилиндра ( $h_s = 2h$ ). (Глубина  $h_s = 2h$  соответствует измерениям глубины приповерхностного эффекта целым числом периодов армирования по координате  $z$ .) Возле внешней поверхности графики на рис. 11,а и 12,а, б визуальнo отражают проникновение приповерхностного эффекта на глубину одного периода армирования ( $h_s = h$ ).

На рис. 13 и 14 представлены графики, характеризующие в целом для цилиндра изменение напряжений  $p_{11}$  в сечениях  $t = 0$  и  $t = 0,5$  мм. Одни из графиков (рис. 13,а и 14,а) относятся к матричному материалу, а другие к волокнам (рис. 13,б) или к матричному слою напротив срединных линий боковых поверхностей волокон (рис. 14,б). Отметим немонотонное изменение функции  $p_{11}$  в сечении  $t = 0$  для матрицы и волокна и в сечении  $t = 0,5$  мм напротив средин между волокнами и монотонное уменьшение напротив средин волокон на интервале

квазипериодического деформирования. При этом каждый из двух приводимых на обоих рисунках графиков отражает наличие приповерхностного эффекта возле обеих граничных поверхностей цилиндра. Отметим малое растягивающее напряжение  $p_{11} = 0,15$  МПа в сечении  $t = 0,5$  мм возле внутренней поверхности  $z = 0$  и еще более малое  $p_{11} = 0,05$  МПа в данном сечении возле наружной поверхности  $z = 100$  мм.

На рис. 15 и 16 приведены кривые, отражающие в целом распределения радиальных напряжений  $p_{33}$  по высоте стенки цилиндра для сечений  $t = 0$  и  $t = 0,5$  мм соответственно. В сечении  $t = 0$  на интервале  $0,5 \leq z \leq 16,5$  мм для волокна и на интервале  $0 < z \leq 17$  мм для матрицы напряжения  $p_{33}$  являются сжимающими. Сжимающие в данном сечении и напряжения  $p_{33}$  возле внешней поверхности цилиндра на интервале  $88 \text{ мм} \leq z < 100 \text{ мм}$  для матрицы и на интервале  $91,5 \text{ мм} \leq z \leq 99,5 \text{ мм}$  для волокна. Уровень напряжений в сечении  $t = 0,5$  мм превосходит уровень напряжений в сечении  $t = 0$  (из сравнения кривых на рис. 16,а и рис. 16,б) и примерно в 20 раз меньше уровня напряжений  $p_{22}$  в волокнах цилиндра (из сравнения между собой кривых на рис. 16,б и рис. 11,б).

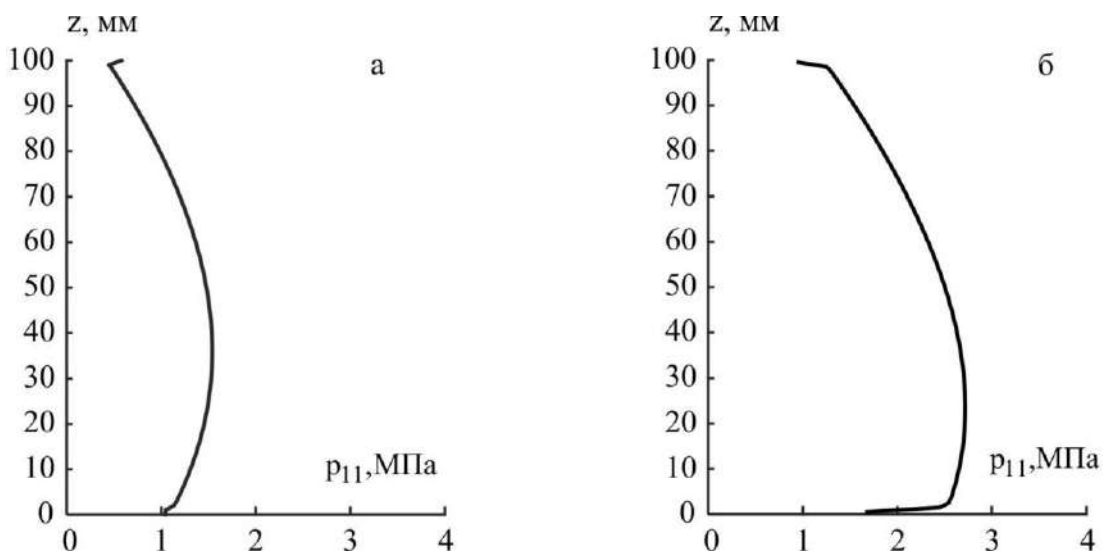


Рис. 13. Распределения осевых напряжений  $p_{11}$  в граничных поверхностях элементов (а) и в их срединных поверхностях (б) для сечения  $t = 0$

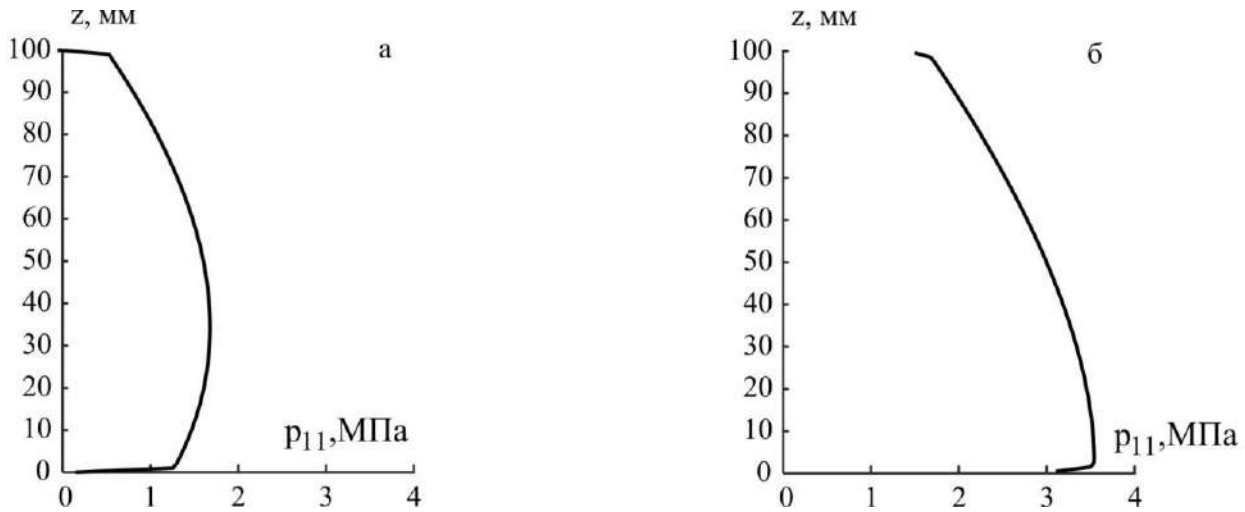


Рис. 14. То же для сечения  $t = 0,5$  мм

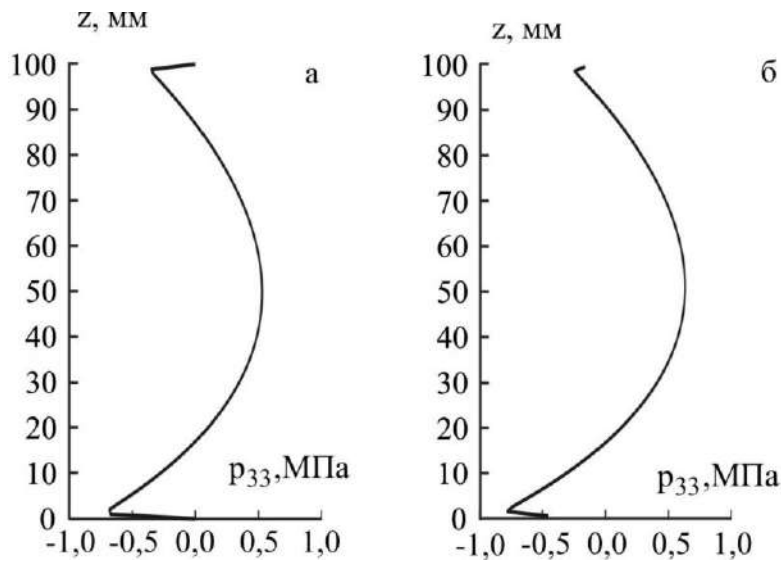


Рис. 15. Распределения радиальных напряжений  $p_{33}$  в граничных поверхностях элементов (а) и в их срединных поверхностях (б) для сечения  $t = 0$  мм

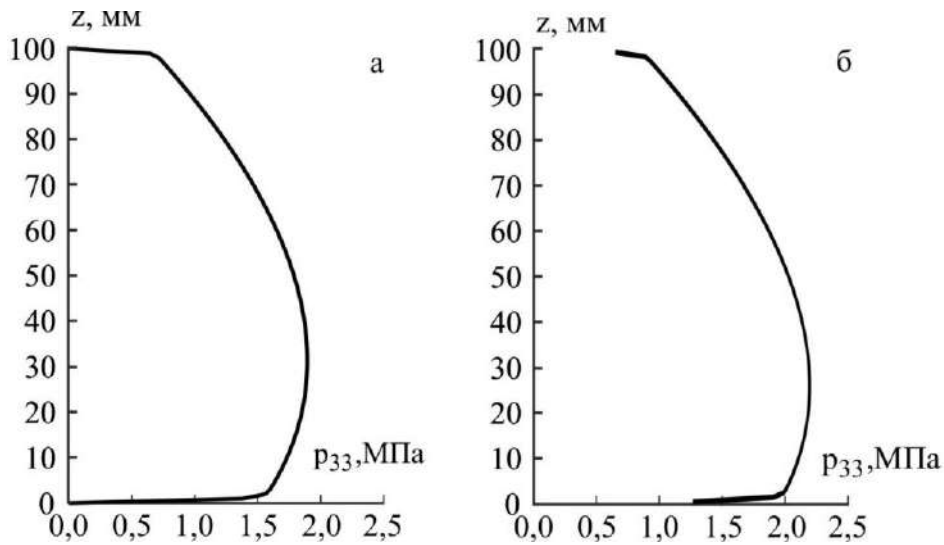


Рис. 16. То же для сечения  $t = 0,5$  мм

### Выводы

Провели исследование эластичного цилиндра, периодически армированного кольцевыми волокнами квадратного сечения, под воздействием свободного вращения. В условиях больших деформаций компонентов цилиндрического тела рассмотрели приповерхностный эффект в нем, выражающийся в существенно неперiodическом деформировании кольцевых элементов тела, прилегающих к его внутренней и внешней

поверхностям. В качестве критерия неперiodического деформирования кольцевых элементов применили верхнюю грань различия одноименных компонент деформации на противоположно расположенных ограничивающих поверхностях элемента. С помощью данного критерия определили глубину приповерхностного эффекта возле внутренней и внешней поверхностей цилиндра при его конечной скорости вращения. Выявили влияние эффекта на картину распределения напряжений в характерных сечениях тела.

### Литература

1. Loffer K. Die berechnung von Rotierenden Scheiben und Schalen. Göttingen: Springer – Verlag OHG, 1961.
2. Композиционные материалы: справочник / под общ. ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. Москва: Машиностроение, 1990. 512 с.
3. Tervonen M., Pramila A. Stresses in a hollow rotating cylindrically orthotropic tube. *Mechanics of Composite Materials*. 1996. Vol. 32, No. 6. P. 835–841.
4. Portnov G. G., Bakis Ch. E. Estimation of limit strains in disk-type flywheels made of compliant elastomeric matrix composite undergoing radial creep. *Mechanics of Composite Materials*. 2000. Vol. 36, No. 1. P. 87–94.
5. Джонсон У., Меллор П. Б. Теория пластичности для инженеров. Москва: Машиностроение, 1979. 567 с.
6. Термопрочность деталей машин / под ред. И. А. Биргера и Б. Ф. Шора. Москва: Машиностроение, 1975. 455 с.
7. Ахундов В. М., Скрипочка Т. А. Большие деформации однородных и армированных нитями цилиндров под воздействием центробежных сил. *Механика композитных материалов*. 2009. Т. 45, № 3. С. 347–366.
8. Ахундов В. М., Скрипочка Т. А. Осесимметричная деформация вращающихся цилиндров из однородных и армированных нитями эластичных материалов. *Механика композитных материалов*. 2011. Т. 47, № 2. С. 301–316.
9. Ахундов В. М. Моделирование больших деформаций волокнистых тел вращения на основе прикладной и каркасной теорий. 3. Вращательное движение. *Механика композитных материалов*. 2014. Т. 50, № 6. С. 1131–1142.
10. Ахундов В. М. Прикладная теория композитов с малыми наполнениями нитями при больших деформациях. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2001. Т. 7, № 1. С. 3–15.
11. Ахундов В. М. Каркасная теория волокнистых сред с неискривленными и локально искривленными волокнами при больших деформациях. *Механика композитных материалов*. 2015. Т. 51, № 6. С. 971–990.
12. Ахундов В. М., Кострова М. М. Нелинейное деформирование кусочно-однородного цилиндра под воздействием вращения. *Механика композитных материалов*. 2018. Т. 54, № 2. С. 345–360.
13. Коханенко Ю. В., Быстров В. М. Краевой эффект в волокнистом композитном материале при равномерном нагружении приповерхностных волокон. *Прикладная механика*. 2007. Т. 43, № 11. С. 15–23.
14. Andrianov I. V., Danishevs'kyu V. V., Weichert D. Analytical study of the load transfer in fiber-reinforced 2D composite materials. *Int. J. of Solids and Structures*. 2008. Vol. 45. P. 1217–1243.
15. Lignon T., Talles P. Le, Triantafyllidis N. Onset of failure in a fiber reinforced elastomer under constrained bending. *Int. J. of Solids and Structures*. 2013. Vol. 50, No. 2. P. 275–287.
16. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука, 1980. 512 с.

17. Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review*. New York.: General Publ. Company, 2000. 1151 p.
18. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. Москва: Мир, 1975. 558 с.
19. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Ленинград: Машиностроение, 1986. 336 с.

### References

1. Loffer, K. (1961). *Die berechnung von Rotierenden Scheiben und Schalen*. Göttingen: Springer – Verlag OHG.
2. Vasiliev, V. V. & Tarnopolsky, Yu. M. (Eds.). (1990). *Composite materials: reference book / under total*. Moscow: Mashinostroyeniye, 1990.
3. Tervonen, M. & Pramila, A. (1996). Stresses in a hollow rotating cylindrically orthotropic tube. *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 32, No. 6, pp. 835–841.
4. Portnov, G. G. & Bakis, Ch. E. (2000). Estimation of limit strains in disk-type flywheels made of compliant elastomeric matrix composite undergoing radial creep. *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 36, No. 1, pp. 87–94.
5. Johnson, W. & Mellor, P. B. (1979). *Plasticity theory for engineers*. Moscow: Mashinostroyeniye.
6. Birger, I. A. & Shor, B. F. (Eds.). (1975). *Thermal strength of machine parts*. Moscow: Mashinostroyeniye.
7. Ahundov, V. M. & Skripochka, T. A. (2009). Large deformations of homogeneous and filament-reinforced cylinders under the influence of centrifugal forces *Mekhanika kompozitnyh materialov*, Vol. 45, No. 3, pp. 347–366.
8. Ahundov, V. M. & Skripochka, T. A. (2011). Axisymmetric deformation of rotating cylinders from uniform and thread-reinforced elastic materials. *Mekhanika kompozitnyh materialov*, Vol. 47, No. 2, pp. 301–316.
9. Ahundov, V. M. (2014). Modeling of large deformations of fibrous bodies of revolution based on applied and skeleton theories. 3. Rotational motion. *Mekhanika kompozitnyh materialov*, Vol. 50, No. 6, pp. 1131–1142.
10. Ahundov, V. M. (2001). Applied theory of composites with small filler fillings at large deformations. *Mekhanika kompozicionnyh materialov i konstrukcij*, Vol. 7, No. 1, pp. 3–15.
11. Ahundov, V. M. (2015). Skeleton theory of fibrous media with undistorted and locally curved fibers at large strains. *Mekhanika kompozit. Materialov*, Vol. 51, No. 6, pp. 971–990.
12. Ahundov, V. M. & Kostrova, M. M. (2018). Nonlinear deformation of a piecewise homogeneous cylinder under the influence of rotation. *Mekhanika kompozit. Materialov*, Vol. 54, No. 2, pp. 345–360.
13. Kohanenko, Yu. V. & Byistrov, V. M. (2007). Edge effect in a fibrous composite material with uniform loading of surface fibers. *Prikl. Mehanika*, Vol. 43, No. 11, pp. 15–23.
14. Andrianov, I. V., Danishevs'ky, V. V. & Weichert, D. (2008). Analytical study of the load transfer in fiber-reinforced 2D composite materials. *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 45, pp. 1217–1243.
15. Lignon, T., Talles, P. Le & Triantafyllidis, N. (2013). Onset of failure in a fiber reinforced elastomer under constrained bending. *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 50, No. 2, pp. 275–287.
16. Lur'e, A. I. (1980). *Nonlinear theory of elasticity*. Moscow: Nauka.
17. Korn, G. A. & Korn, T. M. (2000). *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review*. New-York: General Publ. Company.
18. Ortega, Dzh. & Rejnboldt, V. (1975). *Iterative methods for solving nonlinear systems of equations with many unknowns*. Moscow: Mir.
19. Chernyh, K. F. (1986). *Nonlinear theory of elasticity in engineering calculations*. Leningrad: Mashinostroyeniye.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-02

## ГОМОГЕНІЗАЦІЯ В'ЯЗКОПРУЖНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ

А. В. Гаценко, М. І. Клименко, М. О. Корзюков, Н. О. Діоба

Запорізький національний університет,  
m1655291@gmail.com

**Ключові слова:**

композиційний матеріал, матриця, волокно, поздовжнє розтягнення, поздовжній зсув, ефективна характеристика, енергетичний критерій.

У роботі наводиться розв'язання задачі визначення ефективних характеристик трансверсально-ізотропного в'язкопружного нестаріючого композита. Пропонується методика знаходження ядер релаксації для інтегральних операторів, що визначають поздовжній модуль пружності першого роду та поздовжній модуль зсуву в умовах в'язкопружного деформування. На основі отриманого пружного розв'язку та застосування інтегрального перетворення Лапласа визначено зображення ядер релаксації інтегральних операторів, що визначають в'язкопружні характеристики однорідного композита.

---

## THE HOMOGENIZATION OF VISCOELASTIC TRANSTROPIC COMPOSITE MATERIAL

A. V. Gatsenko, M. I. Klymenko, M. O. Korzyukov, N. O. Dioba

Zaporizhzhia National University,  
m1655291@gmail.com

**Key words:**

composite material, matrix, fiber, longitudinal tension, longitudinal shear, effective characteristic, energy criterion.

The paper proposes a method for determining the parameters of integral operators for the effective characteristics of a composite material. It is assumed that the fibrous composite is viscoelastic and transversely isotropic. The fibers in the matrix are oriented in one direction. The fiber and matrix are transversely isotropic, the fiber is perfectly elastic, and the matrix is viscoelastic. The isotropy planes of the matrix and fiber coincide and are perpendicular to the fiber axis. The representative element of the composite is a cylindrical cell. It consists of two coaxial cylinders. The fiber is a solid cylinder, the matrix is hollow. In the considered model, the Poisson's ratios of the viscoelastic material are assumed to be constant, the longitudinal elastic modulus of the first kind and the longitudinal shear modulus are defined as integral operators. The characteristics of the operators of the longitudinal elastic modulus of the first kind and the longitudinal shear modulus are determined. The mechanical behavior is determined after solving following problems 1) joint elastic deformation of the matrix and the fiber; 2) modelling of homogeneous composite. The axisymmetric stress-strain state of the matrix, fiber, and homogeneous composite is considered. For longitudinal tension, it is assumed that the axial displacements of the matrix and fiber coincide, the radial displacements and stresses at the interface of the matrix and the fibers are continuous, and there are no stresses at the cell boundary. For the longitudinal shear at the interface between the matrix and the fiber, the tangential stresses and axial displacements coincide, and the harmonic tangential stress is specified on the outer surface of the composite. For each boundary value problem, stresses, displacements, and deformations are determined. This makes it possible to determine for each case the energy of elastic volumetric deformation of the matrix, fiber, and homogeneous composite. An energy criterion is applied to determine the effective constants of an elastic composite. It consists in the fact that the energy of elastic bulk deformation of a homogeneous composite is equal to the sum of the values of such energies for the matrix and fiber. The solution of this problem in the viscoelastic case is obtained as elastic solution of the problem of composite homogenization. The rheological characteristics of

the matrix and the homogeneous composite are determined by the relations of the hereditary Boltzmann-Volterra theory. The viscoelastic characteristics of the material are modeled by convolution-type integral equations. This allows to apply the Laplace transform.

## 1. Вступ

Широке застосування композиційних матеріалів у сучасній техніці пояснюється тим, що це дозволяє проєктувати матеріали з заданими жорсткістю, міцністю, пластичністю, антикорозійною стійкістю та іншими важливими при практичному застосуванні властивостями. Вони залежать від структури композита та властивостей його складових елементів. Тому задача знаходження ефективних механічних характеристик композиційних матеріалів за аналогічними характеристиками їх складових елементів, тобто задача гомогенізації композита, є однією з актуальних задач сучасної механіки. Розв'язання цієї задачі дозволяє при розрахунках напружено-деформованого стану елементів будівельних конструкцій, окремих деталей машин та механізмів розглядати композит як однорідний матеріал.

Ефективні характеристики у пружному випадку являють собою коефіцієнти, що пов'язують усереднені за об'ємом компоненти тензорів напружень та деформацій, визначені за певних крайових умов [1]. Для композитів з в'язкопружними властивостями ця задача ускладнюється використанням інтегральних операторів для їх моделювання. Характеристики таких операторів можуть визначатися як експериментально, так і з використанням аналітичних та чисельних методів.

Визначення ефективних характеристик для пружних трансверсально-ізотропних композитів розглянуте у публікації [2]. Тут для осесиметричного деформування композита визначені залежності його ефективних пружних сталих від аналогічних характеристик його елементів та об'ємного вмісту волокон у ньому. Композиційні матеріали, що застосовуються на практиці, у багатьох випадках являють собою систему шарів, що складаються з розташованих у одному напрямі волокон, поєднаних між собою матеріалом матриці. Експериментально доведено, що такі композити мають трансверса-

льно-ізотропні властивості, причому для багатьох з них відзначається наявність в'язкопружності. У зв'язку з цим важливою для практики є задача гомогенізації в'язкопружних трансверсально-ізотропних композитів, що розглядається у даній роботі. Розв'язанню цієї задачі присвячено значну кількість досліджень. Зокрема, проблеми прогнозування реологічних властивостей композитів з в'язкопружними властивостями розглянуті у [3–6]. Механічні властивості композитів при поздовжньому деформуванні розглянуті у [3]. У працях [3, 5, 6] розглянуто випадок поздовжньої деформації композита з в'язкопружною ізотропною матрицею. У [7] пропонується методика чисельного визначення ефективних термов'язкопружних характеристик односпрямованих полімерних композитів, що ґрунтується на застосуванні методу квазіконстантних операторів з частинними апроксимаціями. Визначення характеристик в'язкопружного деформування композитів шляхом застосування спадкової теорії в'язкопружності Больцмана-Вольтерра розглянуте у [8]. Тут пропонується підхід, що ґрунтується на апроксимації функції деформування ланцюговим дробом та застосуванні методу операторних ланцюгових дробів.

Незважаючи на значну кількість досліджень, присвячених моделюванню часових залежностей у в'язкопружному деформуванні композиційних матеріалів, поки що відсутня загальна методика розв'язання цієї задачі, що не застосовує наближених та чисельних методів. Одним з кроків у цьому напрямі є дане дослідження.

## 2. Постановка задачі та загальна схема її розв'язання

У даній роботі розглядається задача гомогенізації в'язкопружного композита за відомими характеристиками його складових. Об'єктом дослідження є односпрямований волокнистий в'язкопружний трансверсально-ізотропний композит з гексагональним розташуванням волокон. Його компонентами є в'язкопружна матриця та ідеально

пружне волокно, причому обидві ці складові є трансверсально-ізотропними. Представницьким елементом композита є елементарна комірка, що складається з двох коаксіальних циліндрів. Матриця моделюється порожнистим циліндром  $a \leq r \leq b$ , волокно – суцільним циліндром  $0 \leq r \leq a$ . Далі символом \* будемо позначати характеристики матриці, символом ° – волокна.

Введемо циліндричну систему координат  $(r, \theta, z)$ . Механічні властивості в'язкопружного трансверсально-ізотропного композита визначаються за допомогою п'яти характеристик. Дві з них – поздовжній модуль пружності першого роду  $\bar{E}_1$  та модуль зсуву  $\bar{G}_{12}$  є інтегральними операторами:

$$\begin{aligned} \bar{E}_1[\varepsilon(t)] &= \\ &= E_1 \left( \varepsilon(t) - \int_0^t R_E(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau \right), \\ \bar{G}_{12}[\varepsilon(t)] &= \\ &= G_{12} \left( \varepsilon(t) - \int_0^t R_G(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau \right). \end{aligned}$$

Інші три характеристики – коефіцієнти Пуассона  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$  та  $\nu_{23}$  у вибраній моделі вважаємо сталими. У цих позначеннях індекс 1 відповідає осі z, паралельній осі волокна та перпендикулярній площині ізотропії  $(r, \theta)$ , індекс 2 – координаті r, індекс 3 –  $\theta$ . Сталі  $E_1$  та  $G_{12}$  є відповідно миттєвими модулями пружності та зсуву. Вони є значеннями цих характеристик при  $t = 0$ . Ці константи, а також коефіцієнти Пуассона можуть бути знайдені шляхом розв'язання задачі гомогенізації ідеально пружного композита. На основі розв'язку цієї задачі для пружного матеріалу можна отримати ефективні часові характеристики в'язкопружного композита – ядра релаксації  $R_E(t)$  та  $R_G(t)$ . Визначення цих характеристик є метою даного дослідження.

Для її досягнення використовується інтегральне перетворення Лапласа. Перехід у простір лапласових зображень дозволяє замінити задачу розв'язання системи інтегральних рівнянь для визначення ядер релаксації задачею розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Для розв'язання задачі гомогенізації пружного композита пропонується використати енергетичний критерій узгодження.

Цей критерій полягає у тому, що ефективні характеристики ідеально пружного композита визначаються з умови рівності енергії пружного деформування елементарної комірки, що складається з матриці та волокна, та енергії пружного деформування елементарної комірки однорідного композита. Потім для знаходження розв'язку відповідної в'язкопружної задачі використаємо отриманий пружний розв'язок задачі та перейдемо до простору лапласових зображень.

### 3. Гомогенізація композита при поздовжньому розтягненні

Розглянемо напружено-деформований стан елементарної комірки композита при її поздовжньому розтягненні. Вважається, що радіальні переміщення та напруження на межі контакту  $r = a$  є неперервними, а осьові переміщення матриці та волокна співпадають. На межі елементарної комірки  $r = b$  нормальне напруження відсутнє. Спочатку визначаються переміщення, напруження та деформації точок матриці та волокна при їх сумісному поздовжньому розтягненні. Далі розв'яжемо аналогічну задачу для однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює композит.

Вирази для компонент напружено-деформованого стану трансверсально-ізотропного пружного волокна подаються наступними формулами:

$$\begin{aligned} u_r^\circ(r) &= Cr, \\ u_z^\circ(z) &= \frac{1}{(1-\nu_{23}^\circ)} \times \\ &\times \left( \frac{\sigma_0^\circ(1-\nu_{23}^\circ-2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2C\nu_{21}^\circ \right) z, \\ \sigma_r^\circ(r) &= \frac{E_2^\circ}{(1-\nu_{23}^\circ)} \left( \frac{\sigma_0^\circ\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C \right), \\ \sigma_\theta^\circ(r) &= \frac{E_2^\circ}{(1-\nu_{23}^\circ)} \left( \frac{\sigma_0^\circ\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C \right), \\ \sigma_z^\circ &= \sigma_0^\circ, \\ \varepsilon_r^\circ(r) &= C, \varepsilon_\theta^\circ(r) = C, \\ \varepsilon_z^\circ(z) &= \frac{1}{(1-\nu_{23}^\circ)} \times \\ &\times \left( \frac{\sigma_0^\circ(1-\nu_{23}^\circ-2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2C\nu_{21}^\circ \right). \end{aligned}$$

Тут  $C$  – стала інтегрування.

Для трансверсально-ізотропної пружної матриці компоненти напружено-деформованого стану визначаються формулами:

$$\begin{aligned} u_r^*(r) &= Ar + \frac{B}{r}, \\ u_z^*(z) &= \frac{1}{(1 - \nu_{23}^*)} \times \\ &\times \left( \frac{\sigma_0^*(1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{12}^*\nu_{21}^*)}{E_1^*} - 2Av_{21}^* \right) z, \\ \sigma_r^*(r) &= \\ &= E_2^* \left( \frac{\sigma_0^*\nu_{12}^*}{E_1^*(1 - \nu_{23}^*)} + \frac{A}{1 - \nu_{23}^*} - \frac{B}{r^2(1 + \nu_{23}^*)} \right), \\ \sigma_\theta^*(r) &= \\ &= E_2^* \left( \frac{\sigma_0^*\nu_{12}^*}{E_1^*(1 - \nu_{23}^*)} + \frac{A}{1 - \nu_{23}^*} + \frac{B}{r^2(1 + \nu_{23}^*)} \right), \\ \sigma_z^* &= \sigma_0^*, \\ \varepsilon_r^*(r) &= A - \frac{B}{r^2}, \varepsilon_\theta^*(r) = A + \frac{B}{r^2}, \\ \varepsilon_z^*(z) &= \frac{1}{(1 - \nu_{23}^*)} \times \\ &\times \left( \frac{\sigma_0^*(1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{12}^*\nu_{21}^*)}{E_1^*} - 2Av_{21}^* \right). \end{aligned}$$

У останніх рівностях  $A, B$  – сталі інтегрування. Модулі пружності та коефіцієнти Пуассона пов'язані співвідношенням

$$\frac{E_1^*}{\nu_{12}^*} = \frac{E_2^*}{\nu_{21}^*}.$$

Вирази для напружень та деформацій пружного трансверсально-ізотропного композиційного матеріалу описуватимуться формулами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_0, \varepsilon_z = \frac{1}{E_1} \sigma_0, \varepsilon_\theta = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_0, \\ \sigma_z &= \sigma_0, \sigma_r = 0, \sigma_\theta = 0. \end{aligned}$$

Запишемо умову узгодження при використанні енергетичного критерію, тобто умову рівності пружної енергії деформації трансверсально-ізотропного однорідного циліндра, що моделює композиційний матеріал, та пружної енергії деформації системи з двох коаксіальних циліндрів – суцільного циліндра, що моделює волокно, та порожнього циліндра, що моделює матрицю:

$$U^* + U^\circ = U. \quad (1)$$

Вираз для пружної енергії деформації однорідного композиційного матеріалу має вигляд:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{r\theta} \gamma_{r\theta} + \tau_{\theta z} \gamma_{\theta z} + \tau_{zr} \gamma_{zr}) r dr d\theta dz.$$

Сума пружних енергій деформації матриці та волокна виражається формулою:

$$\begin{aligned} U^* + U^\circ &= \\ &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_a^b (\sigma_r^* \varepsilon_r^* + \sigma_\theta^* \varepsilon_\theta^* + \sigma_z^* \varepsilon_z^*) r dr d\theta dz + \\ &+ \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_a^b (\sigma_r^\circ \varepsilon_r^\circ + \sigma_\theta^\circ \varepsilon_\theta^\circ + \sigma_z^\circ \varepsilon_z^\circ) r dr d\theta dz. \end{aligned}$$

Враховуючи вирази для напружень та деформацій волокна при поздовжньому розтягненні, а також вирази для коефіцієнтів  $A, B$  та  $C$ , знайдені з крайових умов, отримуємо наступний вираз для суми пружних енергій деформації матриці та волокна:

$$\begin{aligned} U^* + U^\circ &= \frac{\pi h a^2 (\sigma_0)^2}{2 E_1^* (1 - \nu_{23}^*)} \times \\ &\times \frac{1}{(d_1 - d_2)^2 (d^\circ + f(d^* - d^\circ))^2} \times \\ &\times \left( ((d_1 - d_2)^2 (1 - \nu_{23}^*) - 2\nu_{12}^* \nu_{21}^* d_1 \times \right. \\ &\times (d_1 - 2d_2)) (d^*)^2 - \\ &- 4\nu_{21}^* E_1^\circ d_1 d_2 \frac{\nu_{12}^*}{E_1^*} d^* d^\circ + \\ &\left. + 2E_1^\circ E_2^\circ (d_1)^2 \frac{\nu_{12}^* \nu_{12}^*}{E_1^* E_1^*} (d^\circ)^2 \right) + \\ &+ \frac{\pi h (\sigma_0)^2 (b^2 - a^2)}{E_1^* (d^\circ + f(d^* - d^\circ))^2 (d_1 - d_2)^2} \times \\ &\times \left( \left( \left( \frac{(d_1 - d_2)}{2} + 2\nu_{21}^* \nu_{12}^* f E_2^\circ \right) (d_1 - d_2) + \right. \right. \\ &+ \nu_{21}^* \nu_{12}^* f E_2^\circ d_2) \times (d^\circ)^2 + \\ &+ f \nu_{21}^\circ \nu_{21}^\circ E_2^* E_1^* (f(1 - \nu_{23}^*) + \\ &+ (1 + \nu_{23}^*)) (d^*)^2 - \\ &\left. - 2E_2^* f \nu_{21}^\circ \nu_{12}^* d_1 d^* d^\circ \right). \quad (2) \end{aligned}$$

Вираз для пружної енергії деформації однорідного композита набуває вигляду:



$$U = \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_a^b (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z) r dr d\theta dz = \frac{\pi h b^2 (\sigma_0)^2}{2 E_1} \quad (3)$$

На основі енергетичної умови узгодження з рівності (1) матимемо:

$$\frac{1}{E_1} = \frac{1}{(d^\circ + f(d^* - d^\circ))^2} \left( \frac{(1-f)}{E_1^*} \times \left( 1 + \frac{2v_{21}^* v_{12}^* f E_2^\circ}{d_1 - d_2} \right) (d^\circ)^2 + \frac{f}{E_1^\circ} \left( 1 + \frac{2v_{12}^\circ v_{21}^\circ E_2^*(1-f)}{d_1 - d_2} \right) (d^*)^2 - \frac{4v_{21}^* f v_{21}^\circ (1-f)}{d_1 - d_2} d^* d^\circ \right). \quad (4)$$

У цих рівностях

$$d^\circ = (E_2^*(f-1)(1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ) - E_2^\circ(f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^\circ v_{21}^*) + (1+v_{23}^*))) / E_1^\circ,$$

$$d^* = (E_2^*(f-1)(1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^* v_{21}^\circ) - E_2^\circ(f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^*) + (1+v_{23}^*))) / E_1^*,$$

$$d_1 = (1-f)^3 \times \frac{(v_{21}^*)^2 v_{12}^\circ (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ) (1-v_{23}^\circ)}{E_1^\circ v_{12}^*},$$

$$d_2 = v_{21}^* (1-f)^2 \times (v_{21}^\circ (f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^\circ v_{21}^*) + 1 + v_{23}^*) \times (1-v_{23}^\circ) + f \frac{v_{21}^* v_{12}^\circ}{v_{12}^*} \times$$

$$\times (1-v_{23}^\circ)(1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^* v_{21}^\circ) - (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ) v_{21}^\circ \times (v_{23}^*(f-1) - 1 - f)),$$

$$d_3 = v_{21}^* (f-1) f (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^* v_{21}^\circ) \times v_{21}^\circ E_1^\circ (v_{23}^*(f-1) - 1 - f) - (v_{21}^\circ)^2 \times \frac{v_{12}^*}{v_{12}^\circ} E_1^\circ (v_{23}^*(f-1) - 1 - f) \times$$

$$\times (f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^\circ v_{21}^*) + 1 + v_{23}^*) \times (1-f) - f v_{21}^\circ E_1^\circ \times (f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^\circ) + 1 + v_{23}^*) \times v_{21}^* (f-1) (1-v_{23}^\circ),$$

$$d_4 = f (v_{21}^\circ)^2 (E_1^\circ)^2 v_{12}^* \times (f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^\circ) + 1 + v_{23}^*) \times$$

$$\times (v_{23}^*(f-1) - 1 - f),$$

$$d_5 = \frac{(v_{21}^*)^2 v_{12}^\circ (f-1)^2 (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ) (1-v_{23}^\circ)}{E_1^\circ v_{12}^*},$$

$$d_6 = v_{21}^* (f-1) (1-v_{23}^\circ) \times v_{21}^\circ (f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^\circ v_{21}^*) + 1 + v_{23}^*) + v_{21}^\circ (1 + v_{23}^* + f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^*)) \times v_{21}^* (f-1) (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ) + 2f (v_{21}^*)^2 v_{21}^\circ v_{12}^\circ (f-1) \times (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^* v_{21}^\circ),$$

$$d_7 = \frac{(v_{21}^\circ)^2 v_{12}^* E_1^\circ}{v_{12}^\circ} \times (1 + v_{23}^* + f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^*)) \times (f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^\circ) + 1 + v_{23}^*) + 2(v_{21}^\circ)^2 E_1^\circ v_{12}^* v_{21}^\circ \times (1 + v_{23}^* + f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^*)).$$

Після перетворень отримуємо формулу для визначення ефективного поздовжнього модуля пружності для пружного композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропними пружними матрицею та волокном у вигляді:

$$E_1 = \frac{d_1 (E_1^*)^3 + d_2 (E_1^*)^2 + d_3 E_1^* - d_4}{d_5 (E_1^*)^2 - d_6 E_1^* + d_7}. \quad (5)$$

Для знаходження параметрів ефективного інтегрального оператора поздовжнього модуля пружності в'язкопружного композита замінимо в отриманому виразі для  $E_1$  пружні сталі зображеннями відповідних інтегральних операторів при перетворенні Лапласа. Зображення інтегрального оператора  $\bar{E}_1$  та  $\bar{E}_1^*$  мають вигляд:

$$\bar{E}_1 \div E_1(1 - \tilde{R}), \bar{E}_1^* \div E_1^*(1 - \tilde{R}^*), \quad (6)$$

де  $E_1$  та  $E_1^*$  – миттєві модулі пружності відповідно для однорідного композита та матриці,  $\tilde{R}$  та  $\tilde{R}^*$  – зображення відповідних ядер релаксації. Отже, отримуємо:

$$E_1(1 - \tilde{R}) = \frac{1}{d_5 (E_1^*(1 - \tilde{R}^*))^2 - d_6 E_1^*(1 - \tilde{R}^*) + d_7} \times (d_1 (E_1^*(1 - \tilde{R}^*))^3 + d_2 (E_1^*(1 - \tilde{R}^*))^2 + d_3 E_1^*(1 - \tilde{R}^*) - d_4). \quad (7)$$

З останньої рівності знаходимо вираз для зображення ядра релаксації:

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= 1 - \frac{1}{E_1} \times \\ &\times \frac{1}{d_5 (E_1^*(1 - \tilde{R}^*))^2 - d_6 E_1^*(1 - \tilde{R}^*) + d_7} \times \\ &\times \left( d_1 (E_1^*(1 - \tilde{R}^*))^3 + d_2 (E_1^*(1 - \tilde{R}^*))^2 + \right. \\ &\quad \left. + d_3 E_1^*(1 - \tilde{R}^*) - d_4 \right). \end{aligned} \quad (8)$$

#### 4. Гомогенізація композита при поздовжньому зсуві

Застосуємо енергетичний критерій узгодження до гомогенізації в'язкопружного транстропного композита в умовах чистого поздовжнього зсуву. Розглянемо спочатку задачу про сумісний чистий поздовжній зсув ідеально пружних матриці та волокна. Його отримуємо, приклавши до зовнішньої циліндричної поверхні елементарної комірки навантаження, що створює там дотичне напруження

$$\tau_{zr}(b, \theta) = \sigma_0 \cos \theta.$$

Умови неперервності переміщень та напружень на поверхні контакту матриці та волокна  $r = a$  мають вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_{zr}^\circ(t, \theta) &= \sigma_{zr}^*(t, a, \theta), \\ u_z^\circ(t, a, \theta) &= u_z^*(t, a, \theta). \end{aligned}$$

Розв'язуючи цю задачу, отримаємо наступні співвідношення для ненульових компонент напружено-деформованого стану матриці при сумісному поздовжньому зсуві матриці та волокна:

$$\begin{aligned} u_z^*(r, \theta) &= \frac{\sigma_0}{G_{12}^*(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))} \times \\ &\times \left( -(G_{12}^* + G_{12}^\circ)r + \frac{a^2(G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r} \right) \cos \theta, \\ \gamma_{\theta z}^*(r, \theta) &= \frac{\sigma_0}{G_{12}^*(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))} \times \\ &\times \left( G_{12}^* + G_{12}^\circ - \frac{a^2(G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2} \right) \sin \theta, \\ \gamma_{zr}^*(r, \theta) &= \frac{-\sigma_0}{G_{12}^*(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))} \times \\ &\times \left( G_{12}^* + G_{12}^\circ + \frac{a^2(G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2} \right) \cos \theta, \\ \sigma_{zr}^*(r, \theta) &= \frac{-\sigma_0}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \left( G_{12}^* + G_{12}^\circ + \frac{a^2(G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2} \right) \cos \theta, \\ \sigma_{z\theta}^*(r, \theta) &= \frac{\sigma_0}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)} \times \\ &\times \left( G_{12}^* + G_{12}^\circ - \frac{a^2(G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2} \right) \sin \theta. \end{aligned}$$

Основні співвідношення для зображень ненульових компонент напружено-деформованого стану волокна при сумісному поздовжньому зсуві мають вигляд:

$$\begin{aligned} u_z^\circ(r, \theta) &= \frac{-2\sigma_0 r \cos \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)}, \\ \gamma_{\theta z}^\circ(\theta) &= \frac{2\sigma_0 \sin \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)}, \\ \gamma_{zr}^\circ(\theta) &= \frac{-2\sigma_0 \cos \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)}, \\ \sigma_{zr}^\circ(\theta) &= \frac{-2\sigma_0 G_{12}^\circ \cos \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)}, \\ \sigma_{z\theta}^\circ(\theta) &= \frac{2\sigma_0 G_{12}^\circ \sin \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)}. \end{aligned}$$

Розв'язки аналогічної задачі про чистий поздовжній зсув для транстропного в'язкопружного однорідного матеріалу, що моделює композит, мають вигляд:

$$\begin{aligned} u_z(r, \theta) &= \frac{\sigma_0}{G_{12}} r \cos \theta, \\ \gamma_{\theta z}(r, \theta) &= -\frac{\sigma_0}{G_{12}} \sin \theta, \\ \gamma_{zr}(r, \theta) &= \frac{\sigma_0}{G_{12}} \cos \theta, \\ \sigma_{zr}(r, \theta) &= \frac{\sigma_0}{G_{12}} G_{12} \cos \theta, \\ \sigma_{z\theta}(r, \theta) &= -\frac{\sigma_0}{G_{12}} G_{12} \sin \theta. \end{aligned}$$

Згідно з енергетичним критерієм, сума величин енергії пружного деформування при сумісному поздовжньому зсуві матриці та волокна дорівнює енергії пружного деформування елементарної комірки однорідного композита при поздовжньому зсуві. Маємо наступну рівність:

$$\begin{aligned} &\int_0^h \int_0^{2\pi} \int_a^b (\tau_{z\theta}^* \gamma_{z\theta}^* + \tau_{zr}^* \gamma_{zr}^*) r dr d\theta dz + \\ &+ \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_a^b (\tau_{zr}^\circ \gamma_{zr}^\circ + \tau_{z\theta}^\circ \gamma_{z\theta}^\circ) r dr d\theta dz = \end{aligned}$$

$$= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_a^b (\tau_{z\theta}\gamma_{z\theta} + \tau_{zr}\gamma_{zr}) r dr d\theta dz. \quad (9)$$

Підставивши сюди вирази для напружень та деформацій матриці, волокна та однорідного композита, отримуємо наступну рівність:

Звідси знаходимо:

$$\frac{b^2(\sigma_0)^2}{G_{12}^*(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))^2} \times \\ \times ((G_{12}^* + G_{12}^\circ)^2(1-f) + \\ + f(G_{12}^\circ - G_{12}^*)^2(1-f)) + \\ + \frac{4a^2 G_{12}^\circ(\sigma_0)^2}{(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))^2} = \frac{b^2(\sigma_0)^2}{G_{12}}.$$

Для переходу до розв'язку задачі про гомогенізацію в'язкопружного композита в умовах поздовжнього зсуву замінимо пружні сталі  $G_{12}$  та  $G_{12}^*$  на зображення відповідних інтегральних операторів при перетворенні Лапласа. Отримуємо:

$$\frac{1}{\tilde{G}_{12}} = \\ = \frac{(\tilde{G}_{12}^*)^2 + 2\tilde{G}_{12}^*G_{12}^\circ + (G_{12}^\circ)^2 - f^2(\tilde{G}_{12}^*)^2}{\tilde{G}_{12}^* (\tilde{G}_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))^2} + \\ + \frac{2f^2G_{12}^*G_{12}^\circ - f^2(G_{12}^\circ)^2}{G_{12}^*(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))^2}.$$

Звідси після спрощення знаходимо вираз для зображення інтегрального оператора, що описує модуль зсуву:

$$\tilde{G}_{12} = \frac{\tilde{G}_{12}^* (G_{12}^\circ(1+f) + \tilde{G}_{12}^*(1-f))}{(1-f)G_{12}^\circ + (1+f)\tilde{G}_{12}^*}. \quad (10)$$

Знайдемо ядро релаксації  $R(t)$ . Для цього з рівняння (10), враховуючи, що  $\tilde{G}_{12} = G_{12} (1 - \tilde{R}(p))$ , знайдемо зображення  $\tilde{R}(p)$ :

$$\tilde{R}(p) = \frac{C_1(x^*)^2 + C_2x^* + C_3}{C_4(x^* + C_5)}. \quad (11)$$

Тут  $x^* = 1 - \tilde{R}^*(p)$ , коефіцієнти  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , набувають наступних значень:

$$C_1 = (f-1)(G_{12}^*)^2,$$

$$C_2 = G_{12}^*(G_{12} - G_{12}^\circ)(1+f),$$

$$C_3 = G_{12} \cdot G_{12}^\circ(1-f),$$

$$C_4 = G_{12} \cdot G_{12}^*(1+f),$$

$$C_5 = \frac{G_{12}^\circ(1-f)}{G_{12}^*(1+f)}.$$

## 5. Висновки

Виконане у даній роботі дослідження свідчить про те, що запропонований підхід до розв'язання задачі гомогенізації в'язкопружного композита дозволяє повністю визначити реологічні характеристики в'язкопружного трансверсально-ізотропного композита. Він полягає у застосуванні енергетичного критерію узгодження для визначення ефективних пружних модулів  $E_1$  та  $G_{12}$  з подальшим отриманням ефективних в'язкопружних характеристик на основі застосування інтегрального перетворення Лапласа.

Значні труднощі при реалізації даного підходу викликає обернення перетворення Лапласа. Якщо використовується ядро релаксації матриці експоненціального типу, то зображенням ядра релаксації для ефективного поздовжнього модуля пружності є раціональна функція параметру перетворення і для знаходження оригіналу можна використати відомі точні алгоритми. Для більш складних ядер релаксації матеріалу матриці виникає потреба у наближеному оберненні перетворення Лапласа. Для переходу від пружного до в'язкопружного розв'язку задачі гомогенізації можна застосувати також принцип Вольтерра.

Перспективи подальших досліджень у цьому напрямі пов'язані з вдосконаленням переходу від пружного до в'язкопружного розв'язку задачі, а також побудовою моделей гомогенізації, у яких операторними величинами є коефіцієнти Пуассона.

## Література

1. Класторны М., Кондерла П., Пиекарский Р. Точная теория жесткости однонаправленных волоконисто-армированных композитов. *Механика композитных материалов*. 2009. Т. 45, № 1. С. 109–144.
2. Гребенюк С. Н. Определение упругих постоянных резинокордного материала при помощи энергетического критерия согласования. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб. наук. праць*. Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2010. Вип. 11. С. 79–86.
3. Максимов Р. Д., Плуме Э. З. Прогнозирование ползучести однонаправлено армированного пластика с терморологически простыми структурными компонентами. *Механика композитных материалов*. 1982. № 6. С. 1081–1089.
4. Зелин В. И., Янсон Ю. О. Определение ядер ползучести по результатам кратковременных испытаний. *Механика полимеров*. 1977. № 6. С. 972–975.
5. Максимов Р. Д., Плуме Э. З. Длительная ползучесть органоластика. *Механика композитных материалов*. 2001. № 4. С. 435–450.
6. Уржумцев Ю. С. Прогнозирование длительного сопротивления полимерных материалов. Москва: Наука, 1982. 222 с.
7. Куимова Е. В., Труфанов И. А. Численное прогнозирование эффективных термовязкоупругих характеристик однонаправленного волоконистого композита с вязкоупругими компонентами. *Вестник Самарского государственного университета*. 2009. № 4(70). С. 129–148.
8. Каминский А. А., Селиванов М. Ф. Об одном методе определения характеристик вязкоупругого деформирования композитов. *Прикладная механика*. 2005. Т. 41, № 5. С. 9–21.

## References

1. Klastorny, M., Konderla, P. & Piekarskiy, R. (2009). An exact theory of rigidity unidirectional fiber-reinforced composites. *Mechanics of Composite Materials*. Vol. 45, No 1, pp. 109–144.
2. Grebenyuk, S. N. (2010). Determination of the elastic constants of the material with the help of rubber-energy criterion matching. *Methods for applied problems solving of mechanics deformable bodies: Collected Works*. Vol. 11, pp. 79–86.
3. Maksimov, R. D. & Plume, E. Z. (1982). Prediction of creep reinforced plastic with termoreological simple structural components. *Mechanics of Composite Materials*. No 6, pp. 1081–1089.
4. Zelin, V. I. & Yanson, Yu. O. (1977). Definition of nuclei as a result of short-term creep tests. *Mechanics of polymers*. No 6, pp. 972–975.
5. Maksimov, R. D. & Plume, E. Z. (2001). Long-term creep organoplastic. *Mechanics of Composite Materials*. No 4, pp. 435–450.
6. Urzhumtsev, Yu. S. (1982). Prediction of long-term resistance of polymeric materials. Moscow: Nauka.
7. Kuimova, E. V. & Trufanov, I. A. (2009). Numerical prediction of effective thermoviscoelastic characteristics of unidirectional fiber composite with viscoelastic components. *Bulletin of the Samara State University*. No 4(70), pp. 129–148.
8. Kaminskiy, A. A. & Selivanov, M. F. (2005). On a method for determining the characteristics of viscoelastic deformation of composites. *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 41, No 5, pp. 9–21.

УДК 517.925

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-03

## ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ ГІДРОІМПУЛЬСНОЇ СИСТЕМИ З НЕЛІНІЙНИМ ПРУЖНИМ ЕЛЕМЕНТОМ

**В. Г. Городецький**

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»  
v.gorodetskyi@ukr.net

**Ключові слова:**

одномасова модель, система диференціальних рівнянь, зовнішня дія, коефіцієнт дисипації, періодична функція.

У роботі проведено дослідження динамічних характеристик одномасової моделі гідравлічної імпульсної системи на прикладі гідравлічного молота з реальними параметрами. При проектуванні таких систем важливо прогнозувати характер коливальних процесів, які, своєю чергою, впливають на характеристики обладнання, такі як ефективність, шум, вібрація тощо.

На початкових етапах дослідження та проектування одномасової моделі можуть бути досить ефективними для деяких видів обладнання. Досліджувана модель являє собою неавтономну систему звичайних диференціальних рівнянь із синусоїдальною зовнішньою дією в одному з рівнянь. Дослідження виявило залежність режимів роботи молота від значень параметрів його математичної моделі. Виявлено, що за номінальних параметрів гідроімпульсна система працює в майже періодичному режимі, коли вищі гармоніки коливань не є кратними основній гармонічній складовій. При збільшенні коефіцієнта дисипації пристрій демонструє періодичну динаміку. При цьому частота коливань у системі співпадає з частотою зовнішньої дії. При зменшенні коефіцієнта дисипації спостерігається біфуркація подвоєння періоду. Також важливою особливістю цієї системи є можливість режиму детермінованого хаосу при певних значеннях коефіцієнта дисипації. Як показало дослідження, коли значення зведеної маси змінюється, система працює в періодичному режимі або в режимі подвоєння періоду коливань. Також при цьому можливий майже періодичний режим. Крім цього, дослідженням встановлено, що підвищення нелінійної жорсткості змушує систему працювати в періодичному режимі.

Всі спостережувані особливості системи проілюстровані часовими залежностями змінних, фазовими портретами та спектрами, які дають наочне уявлення про поведінку гідромолота. Врахування всіх згаданих рис моделі може бути корисним при проектуванні гідроімпульсних систем та виборі режимів їх експлуатації.

---

## INVESTIGATION OF A HYDRO-IMPULSE SYSTEM WITH A NONLINEAR SPRING ELEMENT

**V. G. Gorodetskyi**

National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"  
v.gorodetskyi@ukr.net

**Key words:**

single-mass model, system of differential equations, external action, dissipation coefficient, periodic function.

We investigated the dynamic characteristics of a single-mass model of a hydraulic pulse system using the example of a hydraulic hammer with real parameters. When designing such systems, it is important to forecast the nature of the oscillation processes, which in turn affect equipment characteristics such as efficiency, noise and vibration, and more. In the initial stages of research and design, single-mass models may be sufficiently effective for some types of equipment.

The model is a non-autonomous system of ordinary differential equations with a sinusoidal external action in one of the equations. The study revealed the dependence of the modes of operation of the hammer on the values of the parameters of its mathematical model. It is revealed that at

nominal parameters the hydro-impulse system operates in almost-periodic mode, when the higher harmonics of oscillations are not multiples of the basic harmonic component. When the coefficient of dissipation increases, the dynamics of the device is periodic, when the frequency of oscillations in the system coincides with the frequency of external action. When the coefficient of dissipation is reduced, bifurcation of the doubling of the period is observed. Also, an important feature of this system is the possibility of a mode of deterministic chaos at certain values of the coefficient of dissipation. As the study showed, when the value of the consolidated mass changes, the system operates in periodic mode or in double period mode, or it operates in almost periodic mode. Also, studies have found that increasing nonlinear stiffness causes the system to operate periodically.

All these features of the system are illustrated by the time series of the variables, phase portraits and spectra, which give a clear representation of the behavior of the hydro hammer. The above mentioned characteristics of the model can be useful for the design of hydro-pulse systems and for the choice of modes of their operation.

### Вступ та постановка задачі

Задача побудови моделі для фізичних систем різної природи є поширеною і актуальною в багатьох галузях науки та техніки [1]. Окремий клас таких задач пов'язаний з моделюванням неавтономних систем, тобто систем із зовнішньою дією [2,3]. Дуже поширені об'єкти, в яких зовнішня дія має періодичний характер [4]. Особливо актуальною така задача є для інженерних систем. Зокрема, побудова адекватних моделей гідроімпульсних систем сприяє їх вдосконаленню, вибору оптимальних режимів роботи, більш ефективній експлуатації [5]. В процесі проектування таких систем важливо передбачити характер коливальних процесів, які, своєю чергою, впливають на такі характеристики обладнання, як коефіцієнт корисної дії, рівень шуму та вібрації та інші. На початкових етапах дослідження та проектування достатньо ефективними для деяких типів обладнання можуть бути одномасові моделі [6, 7].

В даній роботі здійснено дослідження впливу параметрів моделі у вигляді неавто-

номної системи звичайних диференціальних рівнянь на динамічні характеристики гідроімпульсних систем.

### Метод розв'язання та аналіз одержаних результатів

Розглянемо одномасову модель гідромолота [6], побудовану на основі принципу Даламбера:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + C(x)x = F(t), \quad (1)$$

де  $m$  – зведена маса гідромолота,  $b$  – коефіцієнт затухання,  $C(x)$  – нелінійна жорсткість,  $F(t)$  – сила зовнішньої дії. Розглянемо випадок, коли  $C(x) = c_0 + c_1x^2$ , де  $c_0$ ,  $c_1$  – сталі, а  $F(t) = P \sin(\omega t + \varphi_0)$ , де  $P$  – амплітуда,  $\omega$  – кругова частота коливань,  $\varphi_0$  – початкова фаза.

Дане дослідження передбачає вибір параметрів моделі, які відповідають реальному гідромолоту ГПМ-35 і рекомендовані в [6]. Ці величини наведені в таблиці 1.

Таблиця 1. Параметри гідромолота ГПМ-35

Параметри	Маса $m, \text{кг}$	Жорсткість		Коефіцієнт затухання $b, \text{Нс/м}$	Кругова частота $\omega, \text{рад/с}$	Амплітуда сили $P, \text{Н}$
		$c_0, \text{Н/м}$	$c_1, \text{Н/м}^3$			
Значення	65	$1,5 \cdot 10^4$	$1,5 \cdot 10^7$	520	31,416	$3,595 \cdot 10^4$

Для аналізу моделі перетворимо рівняння (1) у систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{C(x_1)}{m}x_1 + \frac{F(t)}{m}, \end{cases} \quad (2)$$

де  $x_1 = x$ . Система (2) була розв’язана методом Рунге-Кутта 4-го порядку на часовому інтервалі 5 с з кроком  $5 \cdot 10^{-6}$  с. Аналіз отриманих розв’язків відбувався після закінчення перехідного процесу. Розв’язки системи (2) представлені на рис. 1, а її фазовий портрет – на рис. 2.

Як видно з рис. 2, коливання в системі (2) не є точно періодичними. Для уточнення їх характеру були отримані розкладення в ряд Фур’є кривих з рис. 1. Спектри для обох змінних наведені на рис. 3. Через  $A_1$  та  $A_2$  позначені амплітуди гармонік розкладення в ряд Фур’є функцій  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  відповідно;  $f$  – частота. На основі рис. 3 можна зробити висновок, що наведені криві можна віднести до майже-періодичного типу [3], оскільки частоти деяких вищих гармонік не є кратними основній складовій спектра – 5 Гц.

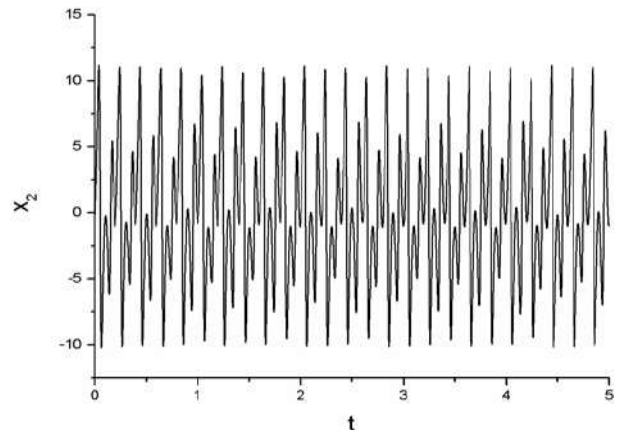
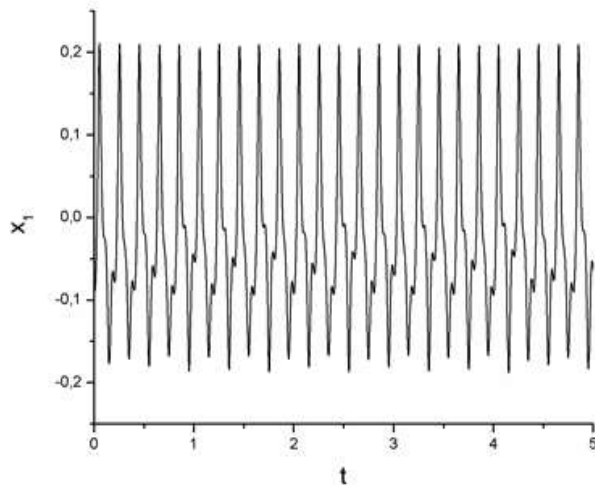


Рис. 1. Зміна у часі переміщення та швидкості зведеної маси гідромолота в усталеному режимі

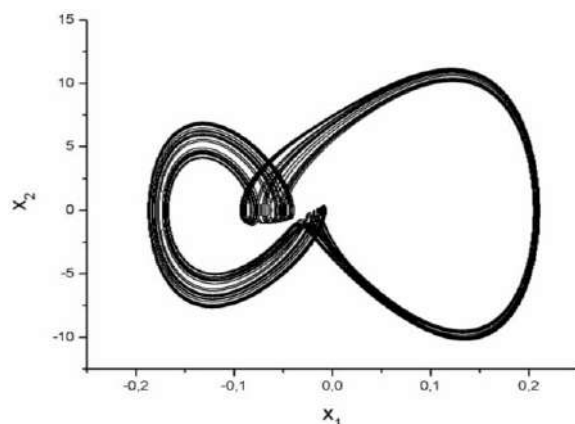


Рис. 2. Фазовий портрет системи (2)

Було проведено дослідження з метою виявлення можливих змін режимів функціонування модельованого пристрою в залежності від коефіцієнта затухання  $b$ . Його величина змінювалась в межах 800...10. З’ясувалось, що при найбільшому затуханні з наведеного діапазону ( $b = 800$ ) модель працює в режимі періодичних коливань, які проілюстровані на рис. 4-6. При цьому частота цих коливань співпадає з частотою зовнішньої дії.

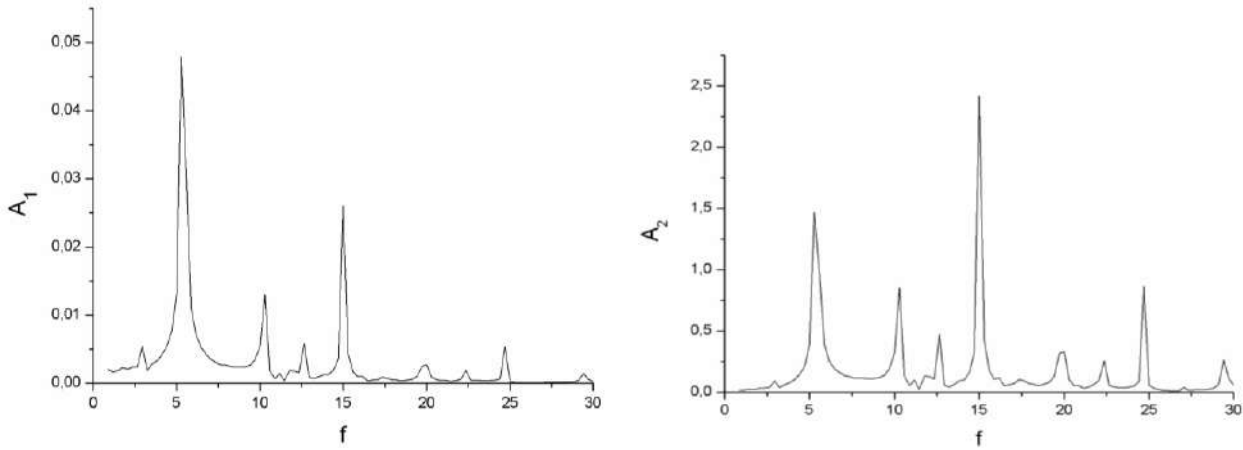


Рис. 3. Спектри функцій  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$

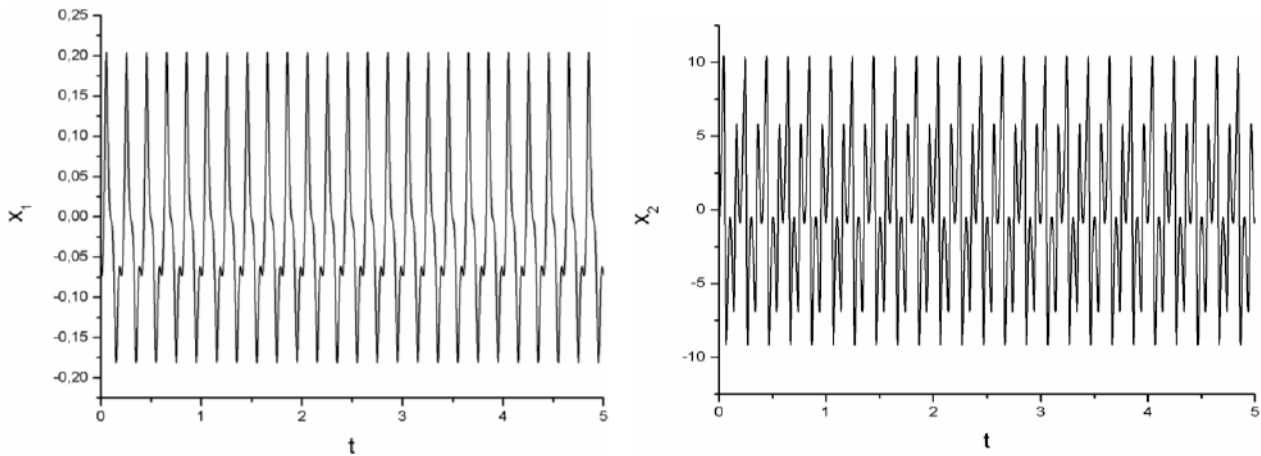


Рис. 4. Зміна у часі переміщення та швидкості зведеної маси гідромолота в усталеному режимі при  $b = 800$

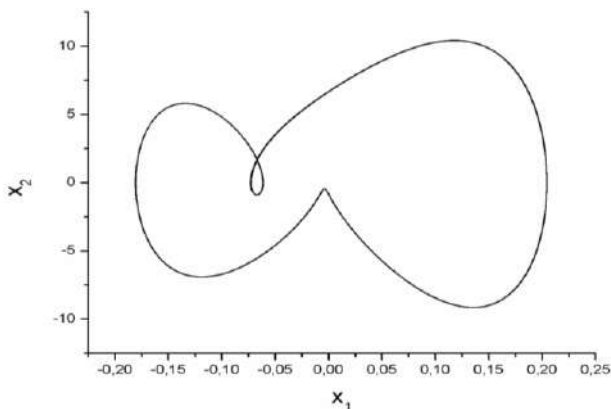


Рис. 5. Фазовий портрет системи (2) при  $b = 800$

При подальшому зменшенні коефіцієнта дисипації при  $b < 680$  спостерігається біфуркація подвоєння періоду [9, с. 173]. Це явище проілюстровано на рис. 7-9. Зокрема, на спектрі  $A_1(f)$  з'являється невеликий пік на позначці 2,5 герц.



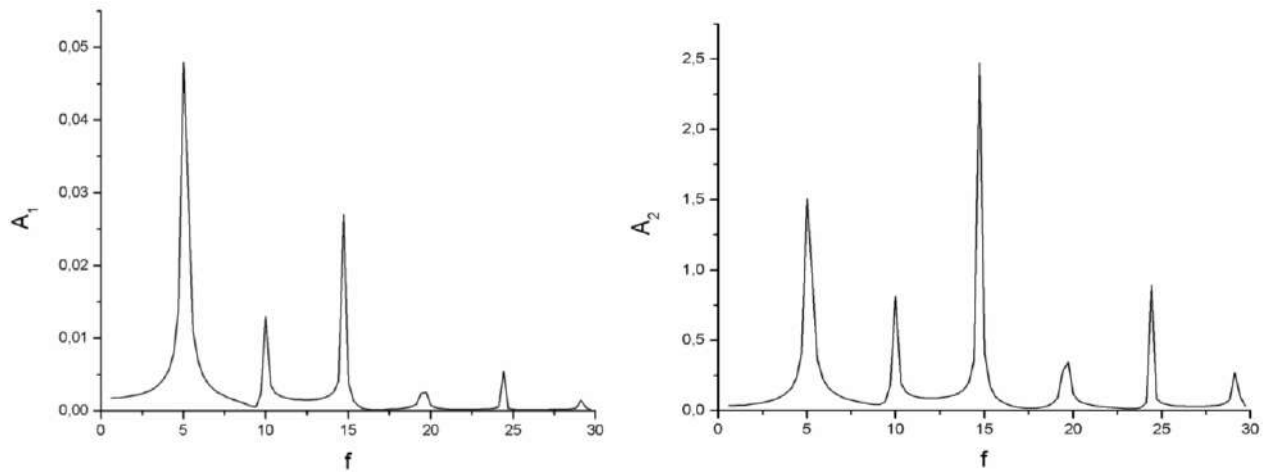


Рис. 6. Спектри функцій  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  при  $b = 800$

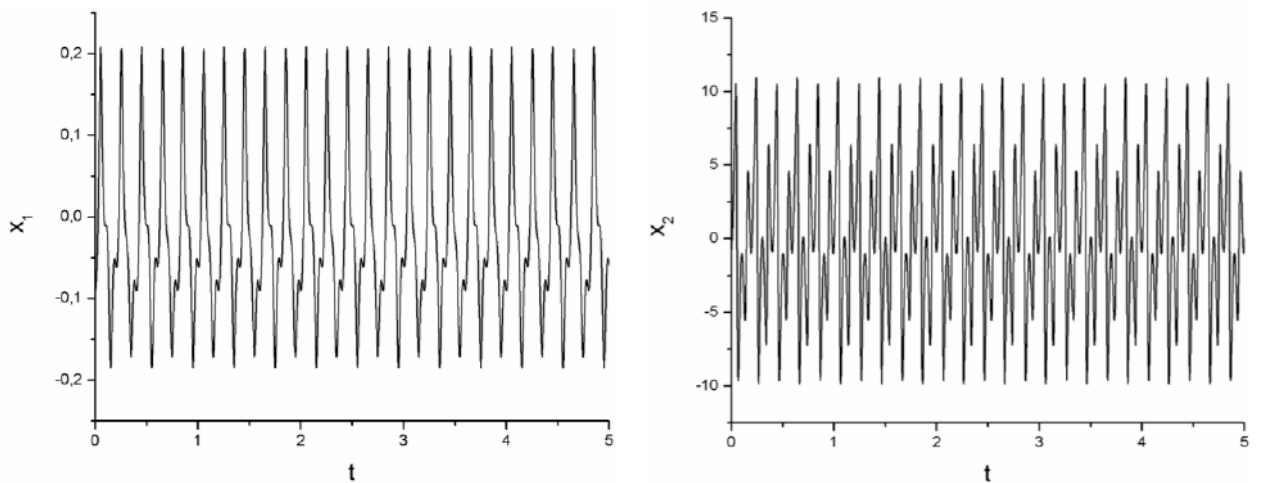


Рис. 7. Зміна у часі переміщення та швидкості зведеної маси гідромолота в усталеному режимі при  $b = 585$

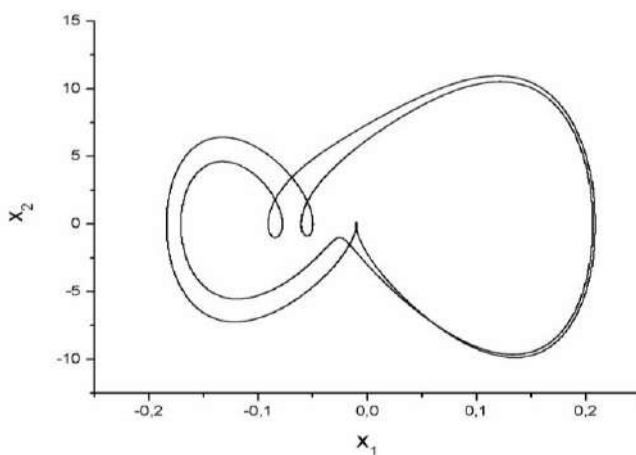
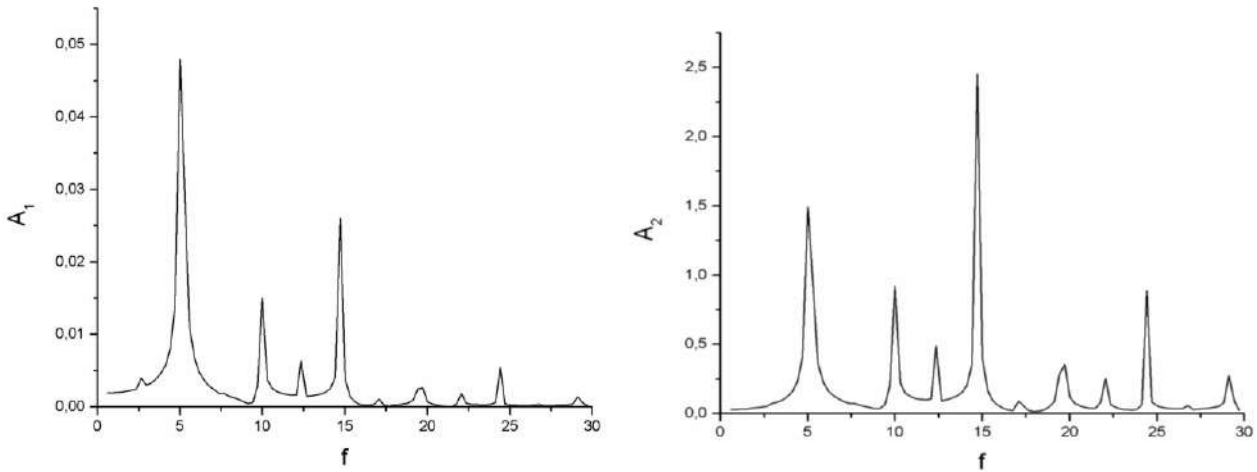
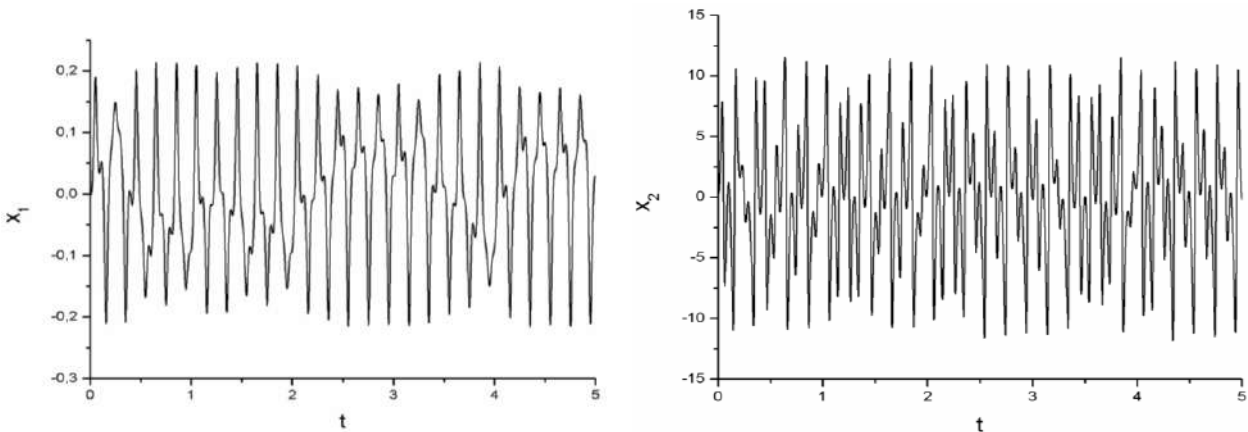
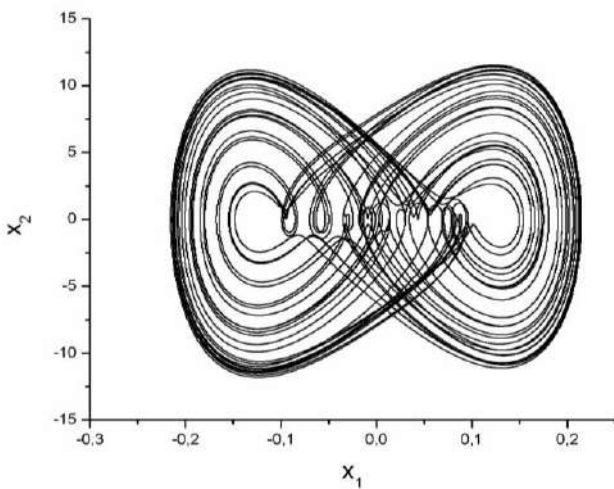


Рис. 8. Фазовий портрет системи (2) при  $b = 585$

При досягненні значень  $b < 450$  криві набувають ознак хаотичного режиму [10-13]. Про це свідчить вигляд функцій  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$ , фазового портрета та спектрів, рис. 10-12. Останні мають суцільні ділянки, типові для хаотичних систем. Така динаміка системи зберігається у всій нижній частині діапазону зміни досліджуваного параметра, тобто до  $b = 10$ .

Рис. 9. Спектри функцій  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  при  $b = 585$ Рис. 10. Зміна у часі переміщення та швидкості зведеної маси гідромолота в усталеному режимі при  $b = 300$ Рис. 11. Фазовий портрет системи (2) при  $b = 300$ 

Також було досліджено вплив зміни маси на роботу гідросистеми. Виявилось, що в діапазоні змін маси від 10 до 100 кг (інші параметри мають значення з табл. 1) система функціонує переважно в періодичному режимі. Більш детально приблизні діапазони режимів наведені в таблиці 2.

На рис. 13 та 14 наведені фазові портрети системи (2) для випадку  $m = 50$  та  $m = 80$  відповідно.

Також до періодичного режиму приводить використання підвищеної жорсткості. Цей факт проілюстровано на рис. 15 для випадку  $c_1 = 1,5 \cdot 10^8$ .

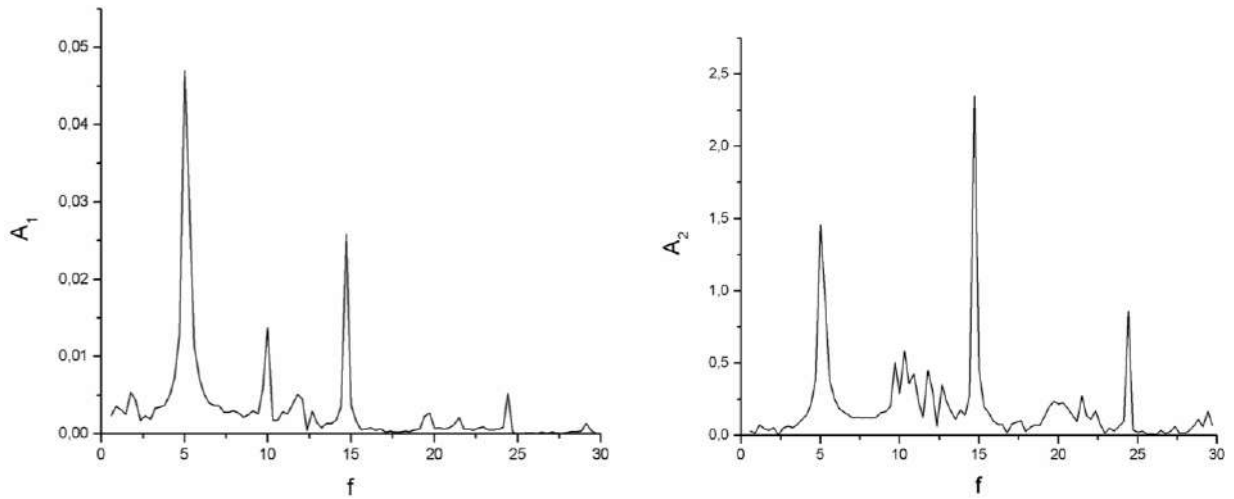


Рис. 12. Спектри функцій  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  при  $b = 300$

Таблиця 2. Зміна режимів гідросистеми при зміні маси

Діапазон значень $m$	10-55	55-70	70-90	90-100
Режим	Періодичний	Майже періодичний	Подвоєння періоду	Періодичний

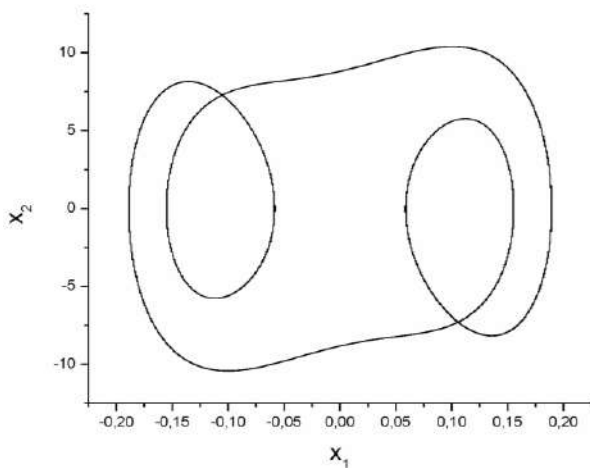


Рис. 13. Фазовий портрет системи (2) при  $m = 50$

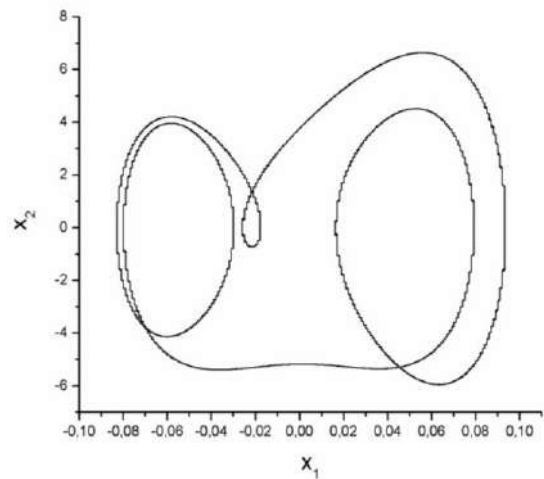


Рис. 15. Фазовий портрет системи (2) при  $c_1 = 1,5 \cdot 10^8$

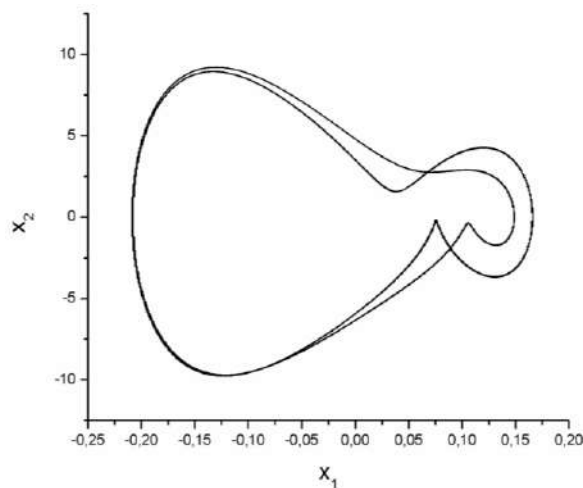


Рис. 14. Фазовий портрет системи (2) при  $m = 80$

### Висновки

В дослідженні виявлено залежність режимів роботи гідромолота від значень параметрів його математичної моделі. Виявлено, що при номінальних параметрах гідроімпульсна система працює в майже-періодичному режимі, коли вищі гармоніки коливань не є кратними основній гармонічній складовій.

При збільшенні коефіцієнта дисипації динаміка пристрою – періодична. При цьому частота коливань зведеної маси співпа-

дає з частотою зовнішньої дії. Але при зниженні коефіцієнта дисипації при  $b < 680$  спостерігається біфуркація подвоєння періоду. Також важливою рисою даної системи є можливість виникнення режиму детермінованого хаосу при певних значеннях коефіцієнта дисипації.

При зміні значень зведеної маси  $m$ , як показало дослідження, система функціонує в періодичному режимі (в тому числі і з

подвійним періодом), а також – в майже-періодичному. Також, в ході досліджень з'ясовано, що підвищення нелінійної жорсткості приводить до функціонування системи в періодичному режимі.

Всі згадані особливості моделі можуть бути корисними при проектуванні гідроімпульсних систем та виборі режимів їх функціонування.

### Література

1. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. Москва: Наука, 1991. 432 с.
2. Martcheva Maia. A non-autonomous multi-strain SIS epidemic model. *Journal of Biological Dynamics*. 2009. Vol. 3, No. 2–3. P. 235–251.
3. Кременецкий И. А., Сальников Н. Н. Нестохастический подход к определению размерности и параметров линейных авторегрессионных моделей по результатам измерения входных и выходных переменных. *Проблемы управления и информатики*. 2010. № 1. С. 63–75.
4. Sauer T. Detection of periodic driving in nonautonomous difference equations. *Advanced Studies in Pure Mathematics*. 2009. Vol. 53. P. 301–309.
5. Сліденко В. М., Шевчук С. П., Замараєва О. В., Лістовщик Л. К. Адаптивне функціонування імпульсних виконавчих органів гірничих машин. Київ: НТУУ «КПІ», 2013. 180 с.
6. Сліденко В. М., Сліденко О. М. Математичне моделювання ударно-хвильових процесів гідроімпульсних систем гірничих машин. Київ, 2017. 220 с.
7. Быховский И. И., Гольдштейн Б. Г. Основы конструирования вибробезопасных ручных машин. Москва: Машиностроение, 1982. 224 с.
8. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. Москва: Гостехиздат, 1953. 396 с.
9. Мун Ф. Хаотические колебания. Москва: Мир, 1990. 312 с.
10. Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С. Введение в синергетику. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 272 с.
11. Кузнецов С. П. Динамический хаос. Москва: Изд-во Физ.-мат. лит-ры, 2001. 296 с.
12. Shvets A. Yu., Makaseyev A. M. Chaotic Oscillations of Nonideal Plane Pendulum Systems. *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal*. 2012. № 1. P. 195–204.
13. Shvets A. Yu., Sirenko V. O. Peculiarities of Transition to Chaos in Nonideal Hydrodynamics Systems. *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal*. 2012. № 2. P. 303–310.

### References

1. Ljung, L. (1991). Identification of systems. Theory for the user. Moscow: Science.
2. Martcheva, Maia (2009). A non-autonomous multi-strain SIS epidemic model. *Journal of Biological Dynamics*, Vol. 3, No. 2–3, pp. 235–251.
3. Kremenetsky, I. A. & Salnikov, N. N. (2010). A non-stochastic approach to determining the dimension and parameters of linear autoregressive models based on the measurement of input and output variables. *Problems of Control and Computer Science*, No. 1, pp. 63–75.
4. Sauer, T. (2009). Detection of periodic driving in nonautonomous difference equations. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, Vol. 53, pp. 301–309.

5. Slidenko, V. M., Shevchuk, S. P., Zamarayeva, O. V. & Listovschyk, L. K. (2013). Adaptive functions of impulsive viscous organs in mining machines. Kyiv: NTUU «KPI».
6. Slidenko, V. M. & Slidenko, O. M. (2017). Mathematical modeling of shock-wave processes of hydro-pulse systems of mining machines. Kyiv.
7. Bykhovsky, I. I. & Goldstein, B. G. (1982). Fundamentals of designing vibro-safe hand-held machines. Moscow: Mashinostroyeniye.
8. Levitan, B. M. (1953). Almost-periodic functions. Moscow: Gostehizdat.
9. Moon, F. (1990). Chaotic oscillations. Moscow: Mir.
10. Loskutov, A. Yu. & Mikhailov, A. S. (1990). Introduction to Synergetics. Moscow: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit.
11. Kuznetsov, S. P. (2001). Dynamic chaos. Moscow: Izdatel'stvo Fiziko-matematicheskoy literatury.
12. Shvets, A. Yu. & Makaseyev, A. M. (2012). Chaotic Oscillations of Nonideal Plane Pendulum Systems. Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal, No. 1, pp. 195–204.
13. Shvets, A. Yu. & Sirenko, V. O. (2012). Peculiarities of Transition to Chaos in Nonideal Hydrodynamics Systems. Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal, No. 2, pp. 303–310.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-04

## ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ЛОКАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПОРОЖНИСТИХ ЦИЛІНДРІВ З УВІГНУТИМ ГОФРОВАНИМ ПОПЕРЕЧНИМ ПЕРЕРІЗОМ

Я. М. Григоренко<sup>1</sup>, Л. С. Рожок<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,

<sup>2</sup>Національний транспортний університет МОН України

ayagrigorenko@yandex.ua, r.l.s@ua.fm

### Ключові слова:

некругові порожнисті циліндри, увігнутий гофрований поперечний переріз, дискретні ряди Фур'є, метод дискретної ортогоналізації, локальне навантаження, напружений стан.

Розв'язання задачі про рівновагу порожнистих ізотропних некругових циліндрів при дії локального навантаження, дано в просторовій постановці за певних граничних умов на торцях. Поперечний переріз циліндрів, що розглядаються описаний рівняннями скороченої гіпоциклоїди. При цьому застосовуються: метод відокремлення змінних вздовж твірної та напрямної циліндра, метод апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації. Наводяться результати розрахунків у вигляді графіків розподілу полів переміщень та напружень.

---

## INVESTIGATION OF INFLUENCE OF LOCAL LOADING ON THE STRESSED STATE OF HOLLOW CYLINDERS WITH CONCAVE CORRUGATED CROSS SECTIONS

Ya. M. Grigorenko<sup>1</sup>, L. S. Rozhok<sup>2</sup>

<sup>1</sup>S.P. Timoshenko Institute of mechanics, NAS of Ukraine,

<sup>2</sup>National transport university, MEC of Ukraine

ayagrigorenko@yandex.ua, r.l.s@ua.fm

### Key words:

noncircular hollow cylinders, concave semi-corrugations, discrete Fourier series, discrete-orthogonalization method, local loading, stress state

The paper considers solving the problem on equilibrium of noncircular hollow cylinders is performed in spatial formulation at certain boundary conditions at the ends. There were considered hollow cylinders which cross sections are concave semi-corrugations. The paper presents a non-traditional approach to solving boundary-value problems on stress state of spatial bodies. The approach is based on the reduction of two-dimensional problems to one-dimensional one using the discrete Fourier series. The two-dimensional problem contains the geometrical and mechanical parameters as the multipliers on solving functions what makes it impossible to separate variables. Introduction of additional functions, which include resolving functions, and their derivatives together with indicated multipliers, allows to reduce the problem to one-dimensional one through expansion of all the functions into the Fourier series in one coordinate direction. In integrating the one-dimensional boundary-value problem, the amplitude values of additional functions are determined through the Fourier series of functions which are specified at the discrete set of points. The one-dimensional boundary-value problem is solved by the stable numerical method of discrete orthogonalization. The results can be used for calculation of construction elements and details of machines of this type. The results of the paper can be used when selecting the cross section of the cylinders of a similar type.

## 1. Вступ

Значна кількість елементів конструкцій сучасної техніки, що виконана у вигляді оболонки різної товщини зі складною формою і структурою, знаходиться під дією розподілених та локальних навантажень. Дія локального навантаження на оболонки в динамічних та статичних задачах досліджувалась в роботах [1 – 3]. Широке застосування оболонкових елементів пояснюється бажанням задовольнити вимогам, які зумовлені складними умовами роботи машин, літальних та транспортних апаратів, різноманітних промислових та громадських споруд.

Розв'язання задачі про вплив локального навантаження на характеристики напружено-деформованого стану елементів конструкцій у вигляді оболонки, тобто коли розміри поверхні прикладання навантаження невеликі порівняно з загальними розмірами конструкції, пов'язане зі значними труднощами. В роботах [4, 5] при розв'язанні таких задач розглядалась задача про деформування оболонки під впливом зосередженого навантаження, розв'язок якої вдалося знайти із застосуванням асимптотичного методу. При цьому припускалось, що інформація, яку отримано в результаті розв'язання останньої задачі, може слугувати для певної оцінки напруженого стану оболонки при дії локального навантаження.

Якщо у випадку пластин розв'язок задачі при зосередженому навантаженні може бути порівняним з розв'язком задачі для локального навантаження, то у випадку оболонки таке співставлення дає лише наближену оцінку [4, 6]. Труднощі розв'язання задачі при локально розподілених на малій ділянці чи відрізьку лінії навантаження пов'язані з обчислювальною реалізацією побудованого розв'язку. В роботі [6] зазначено, що

Квадрат довжини лінійного елемента в обраній системі координат має вигляд

$$dS^2 = H_1^2 ds^2 + H_2^2(t, \gamma) dt^2 + H_3^2 d\gamma^2, \quad (1)$$

де  $H_1 = 1$ ;  $H_2 = 1 + \gamma/R_t$ ;  $H_3 = 1 -$  параметри Ламе,  $R_t$  – радіус кривизни поверхні відліку поперечного перерізу.

$$\sigma_s = u_t = u_\gamma = 0 \text{ при } s = 0; s = l. \quad (2)$$

Циліндри знаходяться під дією локального навантаження  $\mathbf{q}_\gamma = \mathbf{q}_\gamma(s, t)$ , прикладеного на частині зовнішньої бічної поверхні. Граничні умови мають вигляд:

розв'язання задачі про дію на оболонку зосередженої сили простіше, ніж розв'язання задачі про дію на оболонку локального навантаження, розподіленого на ділянці зі скінченими розмірами. Це можна пояснити тим фактом, що у випадку локального навантаження, якщо його задавати ступінчастою функцією, яке має розриви на границі ділянки прикладання, то її розвинення у ряди Фур'є потребує обчислення значної кількості членів цього ряду. В роботі [7] для заміни локального навантаження використовується його заміна дельтоподібною послідовністю, при цьому за критерій відповідності отримуваних розв'язків обирається степінь збігу максимальних значень основних факторів напружено-деформованого стану оболонки.

У даній роботі проводиться дослідження впливу локального навантаження на напружений стан порожнистих циліндрів з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних увігнутих напівгофрів, що знаходяться під дією локального навантаження за певних граничних умов на торцях. При цьому застосовуються: метод відокремлення змінних, апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та чисельний метод дискретної ортогоналізації.

## 2. Постановка задачі

Розглядаються ізотропні порожнисті циліндри з некруговим поперечним перерізом в криволінійній системі координат  $s, t, \gamma$ , яка побудована таким чином. В ортогональній криволінійній системі координат  $s, t$  обирається криволінійна циліндрична поверхня за поверхню відліку (серединна поверхня, рівновіддалена від бічних поверхонь), а координата  $\gamma$  відкладається вздовж нормалі до цієї поверхні.

На торцях розглядаються граничні умови типу простого опирання

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_p; \sigma_\gamma = 0; \tau_{s\gamma} = 0; \tau_{t\gamma} = 0; \\ \gamma &= \gamma_q; \sigma_\gamma = q_\gamma(t); \tau_{s\gamma} = 0; \tau_{t\gamma} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

За вихідні приймаються основні рівняння лінійної просторової теорії пружності [8]. За розв'язувальні обираються функції, в яких формулюються граничні умови на бічних поверхнях (3) – три компоненти напружень  $\sigma_\gamma^i$ ,  $\tau_{s\gamma}^i$ ,  $\tau_{t\gamma}^i$  та три компоненти пере-

міщень  $u_\gamma^i$ ,  $u_s^i$ ,  $u_t^i$ . Після певних перетворень з вихідних рівнянь можна отримати розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, що описує напружений стан розглядуваних циліндрів в області  $\{0 \leq s \leq l; t_1 \leq t \leq t_2; \gamma_p \leq \gamma \leq \gamma_q\}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} &= (c_2 - 1) \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \sigma_\gamma - \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial s} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial t} + b_{22} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \right)^2 u_\gamma + \\ &+ b_{12} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_s}{\partial s} + b_{22} \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_t}{\partial t}; \\ \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial \gamma} &= -c_1 \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial s} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{s\gamma} - b_{12} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_\gamma}{\partial s} - b_{11} \frac{\partial^2 u_s}{\partial s^2} - \\ &- b_{66} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_s}{\partial t} \right) - (b_{12} + b_{66}) \frac{1}{H_2} \frac{\partial^2 u_t}{\partial s \partial t}; \\ \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial \gamma} &= -c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial t} - \frac{2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{t\gamma} - b_{22} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma \right) - \\ &- (b_{12} + b_{66}) \frac{1}{H_2} \frac{\partial^2 u_s}{\partial s \partial t} - b_{22} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_t}{\partial t} \right) - b_{66} \frac{\partial^2 u_t}{\partial s^2}; \\ \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} &= c_4 \sigma_\gamma - c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma - c_1 \frac{\partial u_s}{\partial s} - c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_t}{\partial t}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_s}{\partial \gamma} = a_{55} \tau_{s\gamma} - \frac{\partial u_\gamma}{\partial s}; \quad \frac{\partial u_t}{\partial \gamma} = a_{44} \tau_{t\gamma} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_\gamma}{\partial t} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_t$$

$$(b_{11} = \frac{a_{22} a_{66}}{\Omega}; b_{12} = -\frac{a_{12} a_{66}}{\Omega}; b_{22} = \frac{a_{11} a_{66}}{\Omega}; b_{66} = \frac{(a_{11} a_{22} - a_{12}^2)}{\Omega};$$

$$\Omega = (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) a_{66};$$

$$c_1 = -(b_{11} a_{13} + b_{12} a_{23}); \quad c_2 = -(b_{12} a_{13} + b_{22} a_{23}); \quad c_4 = a_{33} + c_1 a_{13} + c_2 a_{23}).$$

Тут

$$a_{11} = \frac{1}{E_s}; \quad a_{12} = -\frac{v_{st}}{E_t} = -\frac{v_{ts}}{E_s};$$

$$a_{13} = -\frac{v_{s\gamma}}{E_\gamma} = -\frac{v_{\gamma s}}{E_s}; \quad a_{22} = \frac{1}{E_t};$$

$$a_{23} = -\frac{v_{\gamma t}}{E_t} = -\frac{v_{t\gamma}}{E_\gamma}; \quad a_{33} = \frac{1}{E_\gamma}; \quad a_{44} = \frac{1}{G_{t\gamma}};$$

$$a_{55} = \frac{1}{G_{s\gamma}}; \quad a_{66} = \frac{1}{G_{st}},$$

де  $E_s$ ,  $E_t$ ,  $E_\gamma$  – модулі пружності в напрямку координатних осей,  $G_{t\gamma}$ ,  $G_{s\gamma}$ ,  $G_{st}$  – модулі зсуву для площин, паралельних координатним поверхням,  $v_{st}$ ,  $v_{ts}$ ,  $v_{s\gamma}$ ,  $v_{\gamma s}$ ,  $v_{t\gamma}$ ,  $v_{\gamma t}$  – коефіцієнти Пуассона.

У випадку ізотропного матеріалу усі напрямки еквівалентні стосовно пружних властивостей і  $E_s = E_t = E_\gamma = E$ ,  $v_{st} = v_{ts} =$

$$= v_{s\gamma} = v_{\gamma s} = v_{t\gamma} = v_{\gamma t} = \nu, \quad G_{t\gamma} = G_{s\gamma} = G_{st} = E/2(1 + \nu).$$

### 3. Метод розв'язування

Наявність граничних умов (2) дозволяє понизити розмірність задачі шляхом відокремлення змінних. Для цього розв'язувальні функції та компоненти навантаження подаються у вигляді розвинень в ряди Фур'є вздовж твірної циліндра. В результаті підстановки зазначених рядів до розв'язувальної системи диференціальних рівнянь (4) та граничних умов (3) і відокремлення змінних отримуємо двовимірну задачу, яка описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами відносно амплітудних значень зазначе-



них рядів [9]. Отримана система диференціальних рівнянь не дозволяє відокремити змінні вздовж напрямної циліндра, оскільки містить в собі доданки, що являють собою добутки розв'язувальних функцій на коефіцієнти, які залежать від двох координат

$$\begin{aligned} \phi_1^j &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \left\{ \sigma_\gamma; \tau_{s\gamma}; u_\gamma; u_s; \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma \right\} (j = \overline{1,5}); \quad \phi_2^j = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \left\{ \tau_{t\gamma}; u_t \right\} (j = \overline{1,2}); \\ \phi_3^j &= \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial t}; \frac{\partial u_\gamma}{\partial t}; \frac{\partial u_s}{\partial t} \right\} (j = \overline{1,3}); \quad \phi_4^j = \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial t}; \frac{\partial u_t}{\partial t}; \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_t}{\partial t} \right\} (j = \overline{1,3}); \\ \phi_5 &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \phi_1^3; \quad \phi_6 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \phi_3^3; \quad \phi_7 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \phi_4^2. \end{aligned} \quad (5)$$

З врахуванням виразів (5) розв'язувальна система диференціальних рівнянь набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} &= \lambda_n \tau_{t\gamma} + (c_2 - 1) \phi_1^1 - \phi_4^1 + b_{22} \phi_1^5 + b_{12} \lambda_n \phi_1^4 + b_{22} \phi_4^3; \\ \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial \gamma} &= -c_1 \lambda_n \sigma_\gamma + b_{11} \lambda_n^2 u_s - \phi_{1,n}^2 - b_{12} \lambda_n \phi_1^3 - b_{66} \phi_6 - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \phi_4^2; \\ \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial \gamma} &= -b_{66} \lambda_n^2 u_t - c_2 \phi_3^1 - 2\phi_2^1 - b_{22} \phi_5 + (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \phi_3^3 - b_{22} \phi_7; \\ \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial \gamma} &= -b_{66} \lambda_n^2 u_t - c_2 \phi_3^1 - 2\phi_2^1 - b_{22} \phi_5 + (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \phi_3^3 - b_{22} \phi_7; \\ \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} &= c_4 \sigma_\gamma + c_1 \lambda_n u_s - c_2 \phi_4^2 - c_2 \phi_1^3; \quad \frac{\partial u_s}{\partial \gamma} = a_{55} \tau_{s\gamma} - \lambda_n u_\gamma; \quad \frac{\partial u_t}{\partial \gamma} = a_{44} \tau_{t\gamma} - \phi_3^2 + \phi_2^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Формально коефіцієнти системи диференціальних рівнянь (6) не залежать від координати напрямної  $t$  і дозволяють відокре-

мити змінні в цьому напрямку шляхом розвинення розв'язувальних, доповняльних функцій і компонент навантаження в ряди Фур'є вздовж напрямної циліндра. Зазначені ряди Фур'є подаються у вигляді

$$\tilde{X}(t, \gamma) = \sum_{k=0}^K \tilde{X}_k(\gamma) \cos \lambda_k t, \quad \tilde{Y}(t, \gamma) = \sum_{k=1}^K \tilde{Y}_k(\gamma) \sin \lambda_k t, \quad (7)$$

де

$$\tilde{X} = \{ \sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, u_\gamma, u_s, \phi_1^j, \phi_4^j, \phi_6, q_\gamma, q_s \}, \quad \tilde{Y} = \{ \tau_{t\gamma}, u_t, \phi_2^j, \phi_3^j, \phi_5, \phi_7, q_t \}, \quad \lambda_k = \frac{2k\pi}{T}.$$

Підстановка рядів (7) до розв'язувальної системи рівнянь (6) та граничних умов на бічних поверхнях дозволяє відокремити змінні і прийти до одномірної крайової за-

дачі, яку описано системою звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами відносно амплітудних значень рядів (7) у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\gamma,k}}{d\gamma} &= \lambda_n \tau_{s\gamma,k} + (c_2 - 1) \phi_{1,k}^1 - \phi_{4,k}^1 + b_{22} \phi_{1,k}^5 + b_{12} \lambda_n \phi_{1,k}^4 + b_{22} \phi_{4,k}^3; \\ \frac{d\tau_{s\gamma,k}}{d\gamma} &= -c_1 \lambda_n \sigma_{\gamma,k} + b_{11} \lambda_n^2 u_{s,k} - \phi_{1,k}^2 - b_{12} \lambda_n \phi_{1,k}^3 - b_{66} \phi_{6,k} - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \phi_{4,k}^2; \\ \frac{d\tau_{t\gamma,k}}{d\gamma} &= b_{66} \lambda_n^2 u_{t,k} - c_2 \phi_{3,k}^1 - 2\phi_{2,k}^1 - b_{22} \phi_{5,k} - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \phi_{3,k}^3 - b_{22} \phi_{7,k}; \\ \frac{du_{\gamma,k}}{d\gamma} &= c_1 \lambda_n u_{s,k} + c_4 \sigma_{\gamma,k} - c_2 \phi_{4,k}^2 - c_2 \phi_{1,k}^3; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{du_{s,k}}{d\gamma} = a_{55}\tau_{s\gamma,k} - \lambda_n u_{\gamma,k}; \quad \frac{du_{t,k}}{d\gamma} = a_{44}\tau_{t\gamma,k} - \phi_{3,k}^2 + \phi_{2,k}^2 \quad (k = \overline{0, K})$$

з граничними умовами

$$\gamma = \gamma_p: \sigma_{\gamma,k} = 0; \tau_{s\gamma,k} = 0; \tau_{t\gamma,k} = 0, \quad (9)$$

$$\gamma = \gamma_q: \sigma_{\gamma,k} = q_{\gamma,k}; \tau_{s\gamma,k} = 0; \tau_{t\gamma,k} = 0.$$

Отримана крайова задача (8), (9) розв'язується одночасно для всіх гармонік рядів (7). В процесі інтегрування на кожному кроці застосування чисельного методу необхідно знаходити амплітудні значення

доповняльних функцій. При цьому для кожного фіксованого значення  $\gamma_k$  відрізка  $[\gamma_p; \gamma_q]$  обчислюють в ряді точок напрямної  $t_i$  ( $i = \overline{1, R}$ ) величини

$$h_1^i = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} = \frac{1}{R_t(t_i) + \gamma_k}; \quad h_2^i = \frac{1}{H_2} = \frac{R_t(t_i)}{R_t(t_i) + \gamma_k} \quad (i = \overline{1, R});$$

$$\phi_{1,i}^j = h_1^i \sum_{m=0}^M \{\sigma_{\gamma,m}; \tau_{s\gamma,m}; u_{\gamma,m}; u_{s,m}\} \cos \lambda_m t_i, \quad (j = \overline{1,4});$$

$$\phi_{1,i}^5 = (h_1^i)^2 \sum_{m=0}^M u_{\gamma,m} \cos \lambda_m t_i; \quad (10)$$

$$\phi_{2,i}^j = h_1^i \sum_{m=0}^M \{\tau_{t\gamma,m}; u_{t,m}\} \sin \lambda_m t_i, \quad (j = 1,2);$$

$$\phi_{3,i}^j = -h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \{\sigma_{\gamma,m}; u_{\gamma,m}; u_{s,m}\} \sin \lambda_m t_i, \quad (j = \overline{1,3});$$

$$\phi_{4,i}^j = h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \{\tau_{t\gamma,m}; u_{t,m}\} \cos \lambda_m t_i, \quad (j = 1,2); \quad \phi_{4,i}^3 = h_1^i h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m u_{t,m} \cos \lambda_m t_i.$$

Застосовуючи стандартну процедуру обчислення коефіцієнтів Фур'є для функцій, яку задано таблицею, знаходять ці коефіцієнти для функцій (10). Значення

$\phi_{1,m}^3, \phi_{3,m}^3, \phi_{4,m}^2$  ( $m = \overline{0, M}$ ) використовують для обчислення табличних значень функцій

$$\phi_{5,i} = -h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \phi_{1,m}^3 \sin \lambda_m t_i; \quad \phi_{6,i} = h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \phi_{3,m}^3 \cos \lambda_m t_i;$$

$$\phi_{7,i} = -h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \phi_{4,m}^2 \sin \lambda_m t_i \quad (i = \overline{1, R}), \quad (11)$$

після чого обчислюють коефіцієнти Фур'є для функцій (11). Знайдені коефіцієнти для функцій (10), (11) підставляють до розв'язувальної системи диференціальних рівнянь (8) і виконують наступний крок інтегрування, переходячи від точки  $\gamma_k$  до точки  $\gamma_{k+1}$ . На кінцях інтервалу  $[\gamma_p; \gamma_q]$  задовольняють граничним умовам (9).

#### 4. Аналіз числових результатів

Нехай поперечний переріз поверхні відліку розглядуваних циліндрів задається рівняннями скороченої гіпоциклоїди у вигляді

$$x = (A - a) \cos \psi + \lambda a \cos \left( \frac{A - a}{a} \psi \right);$$

$$z = (A - a) \sin \psi - \lambda a \sin \left( \frac{A - a}{a} \psi \right), \quad (12)$$

де  $A$  – радіус нерухомого кола,  $a$  ( $a > 0$ ) – радіус рухомого кола,  $\lambda a$  ( $\lambda < 1$ ) – відстань до радіуса рухомого кола,  $\psi$  ( $0 \leq \psi \leq 2\pi$ ) – кутовий параметр, центральний кут в поперечному перерізі.

Перехід від координати  $t$  до координати  $\psi$  для функції  $V(t(\psi), \gamma)$  здійснюється таким чином

$$\frac{dt}{d\psi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\psi}\right)^2} = \omega(\psi); \quad \frac{\partial V}{\partial \psi} = \frac{\partial V}{\partial t} \frac{dt}{d\psi}; \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{\omega(\psi)} \frac{\partial V}{\partial \psi}.$$

При цьому радіус кривизни поверхні відліку буде  $R(\psi) = \frac{\omega^3(\psi)}{\left(\frac{dx}{d\psi} \frac{d^2z}{d\psi^2} - \frac{dz}{d\psi} \frac{d^2x}{d\psi^2}\right)}$ .

Розглядаються два варіанти прикладання локального навантаження: на двох та на чотирьох ділянках бічної поверхні.

Локальне навантаження, прикладене на двох ділянках бічної поверхні, має вигляд

$$q_\gamma(\psi) = \begin{cases} -q_0(\cos \psi - \cos \beta), & 2\pi - \beta \leq \psi \leq \beta; \\ q_0(\cos \psi + \cos \beta), & 0, \beta \leq \psi \leq \pi - \beta; \\ 0, & \pi - \beta \leq \psi \leq \pi + \beta; \\ 0, & \pi + \beta \leq \psi \leq 2\pi - \beta. \end{cases} \quad (13)$$

Таке навантаження можна подати у вигляді ряду Фур'є

$$q_\gamma(\psi) = \frac{2q_0}{\pi} \left[ \sin \beta - \beta \cos \beta + \sum_{k=2,4,\dots}^{2K} \left( \frac{\sin(k-1)\beta}{k-1} - \frac{2 \sin k \beta \cos \beta}{k} + \frac{\sin(k+1)\beta}{k+1} \right) \cos k \psi \right]. \quad (14)$$

Параметр  $\beta$  характеризує інтервал прикладання локального навантаження.

Якщо розглядається чотири ділянки прикладання локального навантаження

$$q_\gamma(\psi) = \begin{cases} q_0(\cos \psi - \cos \beta), & 0 \leq \psi \leq \beta; \\ q_0(\sin \psi - \cos \beta), & 2\pi - \beta \leq \psi \leq 2\pi; \\ q_0(\sin \psi - \cos \beta), & 0, \beta \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} - \beta; \\ -q_0(\cos \psi + \cos \beta), & \frac{\pi}{2} - \beta \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} + \beta; \\ -q_0(\cos \psi + \cos \beta), & 0, \frac{\pi}{2} + \beta \leq \psi \leq \pi - \beta; \\ -q_0(\sin \psi + \cos \beta), & \pi - \beta \leq \psi \leq \pi + \beta; \\ -q_0(\sin \psi + \cos \beta), & 0, \pi + \beta \leq \psi \leq \frac{3\pi}{2} - \beta; \\ -q_0(\sin \psi + \cos \beta), & \frac{3\pi}{2} - \beta \leq \psi \leq \frac{3\pi}{2} + \beta; \\ -q_0(\sin \psi + \cos \beta), & 0, \frac{3\pi}{2} + \beta \leq \psi \leq 2\pi - \beta, \end{cases} \quad (15)$$

то його можна подати у вигляді ряду Фур'є таким чином:

$$q_\gamma(\psi) = \frac{4q_0}{\pi} \left[ \sin \beta - \beta \cos \beta + \sum_{k=4,8,\dots}^{4K} \left( \frac{\sin(k-1)\beta}{k-1} - \frac{2 \sin k \beta \cos \beta}{k} + \frac{\sin(k+1)\beta}{k+1} \right) \cos k \psi \right]. \quad (16)$$

На рис. 1, 2 наведено графіки частини локального навантаження дійсного та апроксимованого рядами Фур'є при двох ділянках прикладання для інтервалу  $\beta = \pi/8$  (рис. 1) та  $\beta = \pi/32$  (рис. 2) в області зміни кутового параметра  $\psi \in [0; \pi/2]$ .

На рис. 3, 4 наведено графіки частини локального навантаження дійсного та апроксимованого рядами Фур'є при чотирьох ділянках прикладання для інтервалу  $\beta = \pi/8$  (рис. 3) та  $\beta = \pi/32$  (рис. 4) в області зміни кутового параметра  $\psi \in [0; \pi/4]$ .

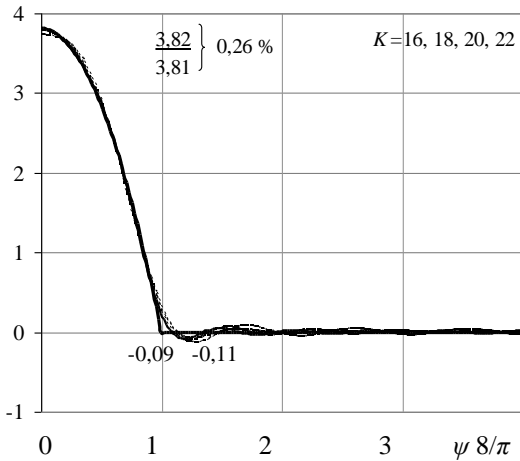


Рис. 1.

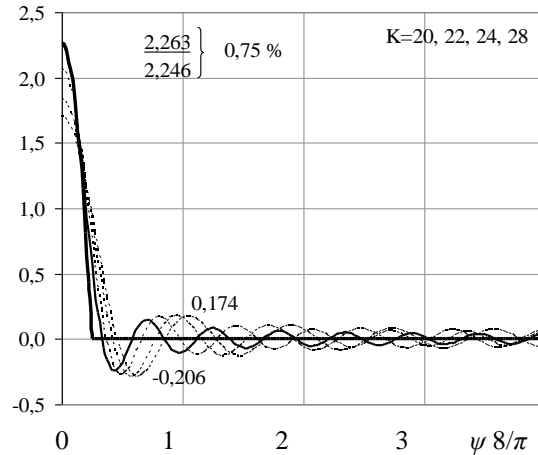


Рис. 2.

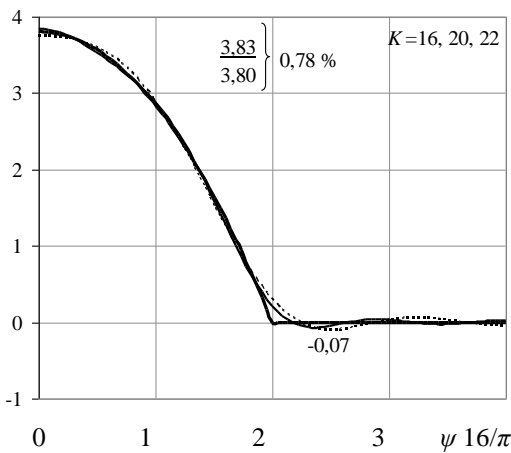


Рис. 3.

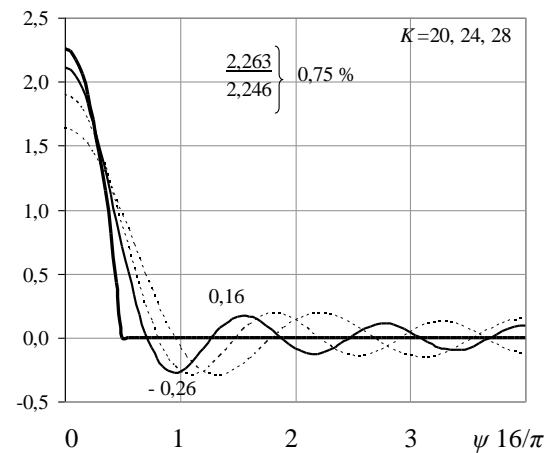


Рис. 4.

Як видно з наведених на рис. 1–4 графіків, більшої кількості членів рядів (14), (16) апроксимоване навантаження потребує не для способу його прикладання, а для довжини інтервалу. Чим менший інтервал прикладання локального навантаження, тим більшої кількості членів відповідних рядів Фур'є він потребує.

При врахуванні 20 – 22 членів рядів (14), (16) для інтервалу  $\beta = \pi/8$  максимальне значення навантаження при  $\psi = 0$  відрізняється від заданого на 0,84% – 0,78%, що свідчить про достатню точність такого подання.

Для інтервалу  $\beta = \pi/32$  при врахуванні 28 членів аналогічних рядів максимальне значення навантаження при  $\psi = 0$  відрізняється від заданого на 0,75%, що свідчить про достатню точність такого подання.

При розв'язуванні задачі прийняті такі вихідні дані: довжина циліндра  $l = 40$ , товщина  $h = 2$ , радіус нерухомого кола  $A = 24$ , радіус рухомого кола  $a = 6$ , параметр  $\lambda = 0,4$ .

На рис. 5 показаний поперечний переріз розглядуваних циліндрів з прикладеним навантаженням. Було обрано два способи прикладання локального навантаження: з двома інтервалами прикладання (13) (рис. 5, а), яке подається рядом (14), та з чотирма – (15), яке подається рядом (16) (рис. 5, б).

Для параметра  $\beta$  розглядаються дві ділянки:  $\beta = \pi/8$ ;  $\beta = \pi/16$ . При цьому коефіцієнт  $q_0$  обирається таким чином, щоб загальне навантаження залишалось однаковим, рівним навантаженню при  $\beta = \pi/16$ .

Результати розв'язку задачі в середньому перерізі довжини циліндра наведені на рис. 6 для полів переміщень  $u_\gamma$  та для полів напружень  $\sigma_\psi$  – на рис. 7 вздовж напрямної. Суцільною лінією показані криві для двох ділянок прикладання локального навантаження, штриховою – для чотирьох. В силу симетрії розглянуто чверть поперечного перерізу циліндра для інтервалу  $[0; \pi/2]$ .

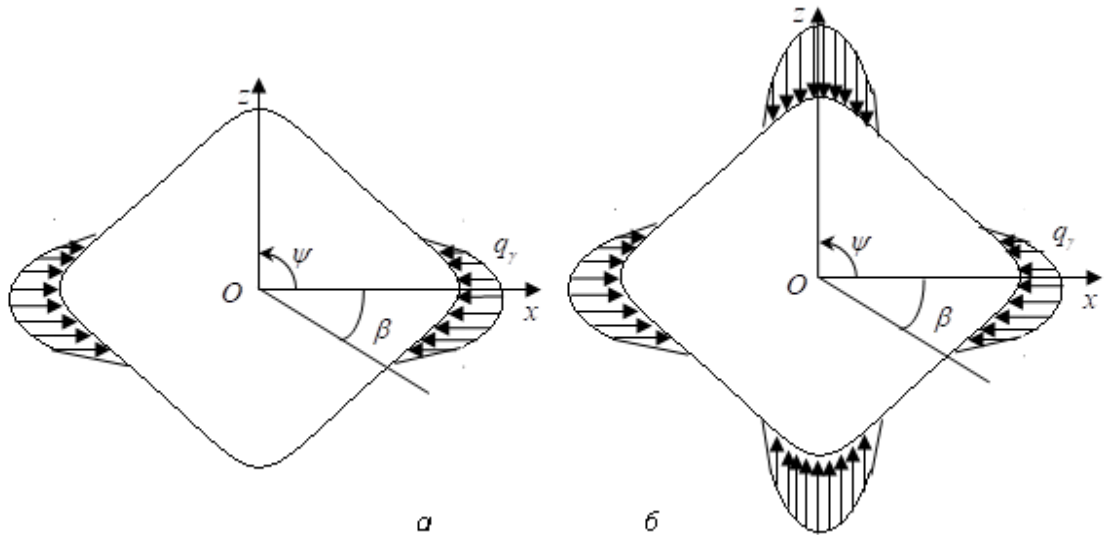


Рис. 5.

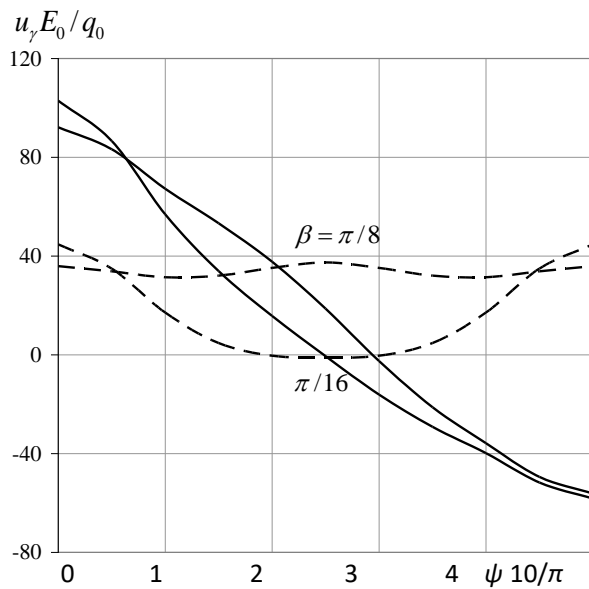


Рис. 6.

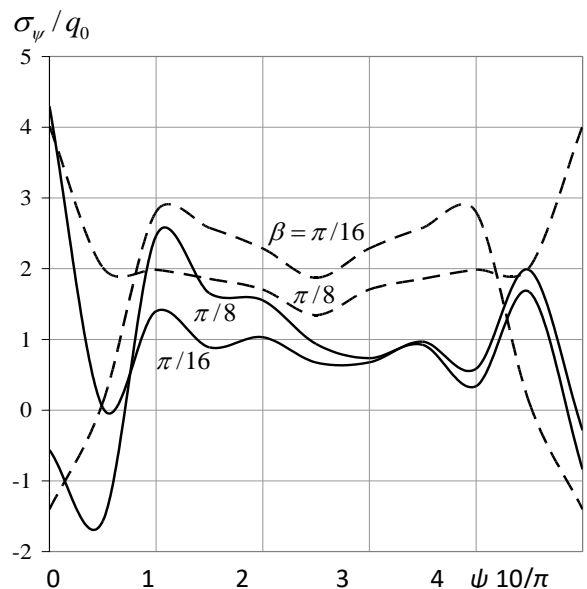


Рис. 7.

З рис. 6, рис. 7 видно, що при чотирьох ділянках локального навантаження переміщення та напруження розподіляються симетрично відносно зони з'єднання напівгофрів ( $\psi = \pi/8$ ).

При цьому зі збільшенням інтервалу прикладання навантаження значення переміщень зменшуються в зоні вершин напівгофрів ( $\psi = 0$ ) в 1,2 рази для двох інтервалів навантаження та для чотирьох інтервалів прикладання локального навантаження.

Крім того, збільшення інтервалу прикладання навантаження для  $\beta = \pi/8$  при чотирьох ділянках прикладання веде до більш плавного перерозподілу значень перемі-

щень, в той час, коли для  $\beta = \pi/16$  при переході з зони вершин напівгофрів ( $\psi = 0; \pi/4$ ) до зони з'єднання ( $\psi = \pi/8$ ) переміщення зменшуються майже в 40 разів.

Для двох ділянок прикладання навантаження (рис. 7) зміна інтервалу  $\beta$  приводить до суттєвого перерозподілу полів напружень в перерізі  $0 \leq \psi \leq \pi/4$  на внутрішній поверхні оболонки.

При цьому в зоні вершин напівгофрів ( $\psi = 0$ ) величина напружень збільшується в 7,6 рази при зменшенні інтервалу  $\beta$ , а для чотирьох ділянок навантаження – напруження збільшуються майже в 3 рази.

На зовнішній поверхні оболонки збільшення зони прикладання навантаження веде

до зменшення величини напружень як для двох, так і для чотирьох ділянок. При цьому для першого способу навантаження в зоні вершини напівгофрів ( $\psi = 0$ ) напруження зменшуються у 2,3 раза а для другого способу – у 3,5 раза.

### 5. Висновки

У просторовій постановці, з використанням методів відокремлення змінних, апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та стійкого чисельного методу дискретної ортогоналізації, розв'язано задачу про вплив локального навантаження на напружений стан ізотропних порожнистих циліндрів з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних увігнутих напівгофрів. Поперечний переріз розглядуваних циліндрів описується гладкою кривою без особливостей та розривів, що являє собою скорочену гіпоциклоїду. Обрання за розв'язувальні функції, в

яких формулюються граничні умови на бічних поверхнях, дозволяє отримати розв'язок задачі з достатнім ступенем точності [10]. Прикладене локальне навантаження подається рядами Фур'є, для яких обрано необхідну кількість членів, за яких максимальне значення дійсного навантаження і апроксимованого відповідними рядами не перевищує 1%. Досліджено два способи прикладання локального навантаження – на двох та чотирьох ділянках різних інтервалів. Було встановлено, що зміна інтервалу більшою мірою відчутна для чотирьох ділянок прикладання навантаження в розподілі полів нормальних переміщень в зоні, вільній від навантаження, та в зоні максимального навантаження в розподілі напружень для обох способів прикладання локального навантаження.

### Література

1. Lugovoi P. Z., Sirenko V. N., Skosarenko Yu. V., Batutina T. Ya. Lugovoi P. Z. Dynamics of a Discretely Reinforced Cylindrical Shell Under a Local Impulsive Load. *Int. Appl. Mech.* 2017. Vol. 52, No 2. P. 173–180.
2. Kwanghyun Ahn, Lim In-Gyu, Yoon Jonghun, Huh Hoon. A simplified prediction method for the local buckling load of cylindrical tubes. *Int. J. of Precision Eng. and Manufacturing.* 2016. Vol. 17, No 9. P. 1149–1156.
3. Marchuk A. V., Gnidash S. V. Analysis of the Effect of Local Loads on Thick-Walled Cylindrical Shells with Different Boundary Conditions. *Int. Appl. Mech.* 2016. Vol. 52, No 4. P. 368–377.
4. Даревский В. М. Контактные задачи теории оболочек (действие локальных нагрузок на оболочки). В: Труды VI Всес. конф. по теории оболочек и пластин, Баку. Москва: Наука, 1966. С. 115–119.
5. Жигалко Ю. П. Расчет тонких упругих цилиндрических оболочек на локальные нагрузки (обзор литературы, метод и результаты). *Исследования по теории пластин и оболочек.* Вып. IV. Казань: Изд-во Казанского универ-та, 1966. С. 3–41.
6. Даревский В. М. Оболочки под действием локальных нагрузок. Справочник «Прочность, устойчивость, колебания». Москва: Машиностроение, 1968. С. 49–96.
7. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. Киев: Наук. думка, 1973. 228 с.
8. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. Киев: Наук. думка, 1975. 564 с.
9. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Влияние изменения параметров кривизны на напряженное состояние полых цилиндров с поперечным сечением в виде вогнутых полугофров. *Прикл. механика.* 2018. Т. 54, № 3. С. 27 – 35.
10. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Застосування дискретних рядів Фур'є до розв'язання крайових задач статички пружних тіл неканонічної форми. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2005. Т. 48, № 2. С. 79–100.

### References

1. Lugovoi, P. Z., Sirenko, V. N., Skosarenko, Yu. V. & Batutina, T. Ya. (2017). Dynamics of a Discretely Reinforced Cylindrical Shell Under a Local Impulsive Load. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 52, No 2, pp. 173–180.
2. Kwanghyun, Ahn, In-Gyu, Lim, Jonghun, Yoon & Hoon, Huh (2016). A simplified prediction method for the local buckling load of cylindrical tubes. *Int. J. of Precision Eng. and Manufacturing*, Vol. 17, No 9, pp. 1149–1156.
3. Marchuk, A. V. & Gnidash, S. V. (2016). Analysis of the Effect of Local Loads on Thick-Walled Cylindrical Shells with Different Boundary Conditions. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 52, No 4, pp. 368–377.
4. Darevskii, V. M. (1966). Contact problems of shell theory (the effect of local loads on shells). V: Trudi VI Vses. konf. po teorii obolochek i plastin, Baku. Moscow: Nauka, 1966. pp. 115–119 (In Russian).
5. Zhigalko Yu. P. (1966) Calculation of thin elastic cylindrical shells for local loads (literature review, method and results) In: *Studies in the Theory of Plates and Shells*. Kazan: IV Izd-vo Kazanskogo univer-ta, pp. 3–41 (In Russian).
6. Darevskii, V. M. (1968). Shell under the influence of local loads. Reference book «Strength, stability, oscillations». Moscow: Mashinostroenie (In Russian).
7. Grigorenko, Ya. M. (1973). Isotropic and anisotropic layered shells of rotation of variable stiffness. Kyev: Nauk. dumka (In Russian).
8. Timoshenko, S. P. (1975). Theory of elasticity course. Kyev: Nauk. dumka (In Russian).
9. Grigorenko, Ya. M. & Rozhok, L. S. (2018). Effect of Change in the Curvature Parameters on the Stress State of Concave Corrugated Hollow Cylinders. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 54, No 3, pp. 266–274.
10. Grigorenko, Ya. M. & Rozhok, L. S. (2005). Application of discrete Fourier series to solving boundary value problems of non-canonical elastic body static. *Mat. metody ta fiz.-mekh. Polia*, Vol. 48, No 2, pp. 79–100 (In Ukrainian).

УДК 519.688:519.6:514.752

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-05

## ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБЛАСТЕЙ СКЛАДНОЇ ФОРМИ В ПАРАЛЕЛЬНИХ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ СИСТЕМАХ ЗІ СПІЛЬНОЮ ПАМ'ЯТТЮ

М. С. Ігнатченко, О. В. Кудін

Запорізький національний університет  
avk256@gmail.com

### Ключові слова:

геометричний об'єкт, R-функція, дискретна модель, паралельний алгоритм, візуалізація.

Практичне застосування чисельних методів для розв'язання крайових задач потребує створення дискретних моделей геометричних областей складної форми. Проблему генерації сіткової моделі можна розбити на дві окремі задачі: 1) створення формального опису вихідної геометричної області та 2) побудову її дискретної моделі на основі цього опису.

Найбільш складним є перший етап особливо для геометричних областей нестандартної форми. Універсальним способом параметричного опису геометричної області будь-якої складності є використання апарату R-функцій, які дозволяють за допомогою логічних операцій інверсії, кон'юнкції та диз'юнкції над елементарними математичними співвідношеннями будувати неявні функції, що однозначно описують границю геометричного об'єкта довільної форми.

Практичне застосування R-функцій є досить складним в силу їх неявної природи. Для візуалізації геометричних областей, описаних за допомогою неявних функцій, необхідно найперше побудувати набір опорних точок, які належать границі вихідної області, а потім для цього набору згенерувати воксельну або гранично-елементну модель. Задача ефективного пошуку точок, що належать границі геометричної області, описаної за допомогою неявної R-функції, на сьогодні є актуальною й вимагає розробки відповідних підходів і алгоритмів.

У статті описується запропонований паралельний алгоритм побудови та візуалізації геометричних моделей областей, описаних неявними функціями, в обчислювальних системах із загальною пам'яттю. Цей алгоритм було реалізовано із застосуванням Стандартної бібліотеки мови програмування C++ (C++11). Було створено відповідне програмне забезпечення й проведено ряд обчислювальних експериментів, які показали ефективність запропонованого алгоритму на комп'ютерах з різними типами процесорів.

---

## VISUALISATION OF GEOMETRIC REGIONS OF COMPLEX SHAPES IN SHARED MEMORY PARALLEL COMPUTERS

M. S. Ignatchenko, O. V. Kudin

Zaporizhzhia National University  
avk256@gmail.com

### Key words:

geometric object, R-function, discrete model, parallel algorithm, visualization.

Using of the numerical methods for the solution of boundary value problems requires the making of discrete models of geometric regions of complex shape. The problem of generating a mesh can be divided into two independent tasks: 1) creating a formal description of the initial geometric region and 2) building its discrete model based on this description.

The most difficult is the first stage, especially for geometric areas of irregular shape. A universal way to parametrically describe a geometric region of arbitrary shape is to use R-functions, which allow using logical operations of inversion, conjunction, and disjunction over elementary mathematical relations to construct implicit functions that uniquely describe the boundary of an arbitrary geometric object.



The practical application of R-functions is quite complicated due to their implicit nature. To visualize the geometric regions described using implicit functions, you must first find a set of reference points that belong to the boundary of the original region, and then construct a voxel or boundary model for this set. The problem of effective finding points that belong to the boundary of the geometric region described using the implicit R-function is relevant today and requires the development of appropriate approaches and algorithms.

This article describes a parallel algorithm for constructing and visualizing geometric models of regions described by implicit functions in computing systems with shared memory. This algorithm was implemented using the C++ standard library (C++11). A series of computational experiments were carried out, showing the effectiveness of the proposed algorithm on computers with various types of processors.

## 1. Вступ

Чисельний аналіз крайових задач із використанням, наприклад, методу скінченних елементів передбачає створення дискретних (скінченно-елементних) моделей дво- і тривимірних геометричних областей складної форми. На практиці проблема автоматичної генерації дискретної моделі може бути розбита на дві окремі задачі:

створення формального опису вихідної геометричної області у формі, придатній для подальшої автоматичної обробки із застосуванням комп'ютерної техніки;

побудова дискретної моделі вихідної області за раніше отриманим формальним описом [1-3].

Перша задача є нетривіальною, особливо для геометричних областей нестандартної форми. На практиці для опису формальних моделей геометричних областей найчастіше використовують граничне й твердотільне геометричне моделювання [4]. Головним недоліком цих класичних підходів є досить висока трудомісткість моделювання об'єктів нетипової форми. Найбільш універсальним і природним способом формального опису геометричної області довільної форми  $\Omega$  є застосування R-функцій, запропонованих академіком В. Л. Рвачовим [5]. Основна ідея цього підходу полягає в побудові такої функції  $F(x)$ , для якої виконуються, наприклад, такі співвідношення:  $F(x) \geq 0$ , якщо  $x \in \Omega$  ( $F(x) = 0$ , якщо  $x$  знаходиться на границі  $\Omega - \partial\Omega$ ), і  $F(x) < 0$ , якщо  $x \notin \Omega$ . В. Л. Рвачовим було доведено, що функцію  $F(x)$  для будь-якої геометричної області  $\Omega$  можна сконструювати за допомогою набору елементарних математичних функцій і логічних операцій кон'юнкції,

диз'юнкції та інверсії над ними. Проте практичне застосування такого підходу є досить складним, так як функція  $F(x)$  є неявною. Тому візуалізація геометричних областей, описаних R-функціями, є нетривіальною задачею. Огляд існуючих алгоритмів візуалізації неявних функцій наведено в роботах [6-12]. Однак раніше розроблені алгоритми є або повільними послідовними, або орієнтовані на побудову тільки воксельних моделей вихідних геометричних областей. Тому розробка ефективних паралельних алгоритмів візуалізації неявних функцій на сьогодні є актуальною. У цій статті описується запропонований паралельний алгоритм побудови гранично-елементних моделей тривимірних геометричних об'єктів, описаних R-функціями, в обчислювальних системах зі спільною пам'яттю.

## 2. Використання паралельних систем зі спільною пам'яттю для геометричного моделювання

На сьогодні з появою і широким розповсюдженням багатопроекторних та/або багатоядерних обчислювальних систем великої актуальності набула проблема розробки спеціалізованих паралельних алгоритмів для розв'язання актуальних прикладних задач. На цей час існує досить багато різноманітних типів обчислювальних архітектур, найбільш поширеними серед яких є такі [13]:

– SISD (Single Instruction, Single Data) – комп'ютерні системи, в яких одиночному потоку команд, що виконуються, відповідає єдиний потік даних (звичайні однопроцесорні комп'ютери);

– SIMD (Single Instruction, Multiple Data) – обчислювальні системи з одиночним потоком команд і множинним потоком даних (GPU, MMX та інші);

– MIMD (Multiple Instruction, Multiple Data) – комп'ютери з множинним потоком команд і множинним потоком даних (сучасні багатопроцесорні системи).

Остання архітектура є найбільш поширеною на сьогодні через свою обчислювальну ефективність [14]. MIMD-системи прийнято в загальному випадку поділяти на дві окремі категорії:

1) мультипроцесори (multiprocessor) – комп'ютерні системи зі спільною пам'яттю (найчастіше це комп'ютери з багатоядерними процесорами);

2) мультикомп'ютери (multicomputer) – обчислювальні системи без спільної пам'яті (наприклад, обчислювальні кластери) [15, 16].

Розробка паралельних алгоритмів для мультикомп'ютерів є складним і трудомістким процесом через необхідність реалізації синхронізації доступу до даних, потенційну можливість виникнення взаємоблокувань (deadlock), труднощі у налагодженні тощо [17], тому в даній роботі розглянута паралельна реалізація геометричного моделювання в обчислювальних системах зі спільною пам'яттю.

При візуалізації геометричних областей, заданих неявними функціями, найбільш простим й зручним для практичної реалізації є метод паралельної декомпозиції «Розділяй і володарюй» [18]. Згідно з ним вихідна задача пошуку множини точок, що належать границі  $\partial\Omega$  неявно заданої геометричної області  $\Omega$ , поділяється на певну сукупність підзадач, які розв'язуються паралельно, а отримані результати згодом об'єднуються. Послідовний алгоритм пошуку границі області, заданої R-функцією ( $F(x) = 0$ ), можна описати за допомогою псевдокоду [19] наступним чином:

**Алгоритм** Процедура пошуку граничних вузлів геометричної області

**procedure** FindBnPts(BoundaryPoints, Box, N)

BnPts – шуканий вектор координат точок на границі області

Box =  $(X_{min}, Y_{min}, Z_{min}, X_{max}, Y_{max}, Z_{max})$  – координати суперобласті (зони пошуку)

N =  $(N_x, N_y, N_z)$  – кількість кроків вздовж осей координат

**begin**

$H_x \leftarrow (X_{max} - X_{min})/N_x$

$H_y \leftarrow (Y_{max} - Y_{min})/N_y$

$H_z \leftarrow (Z_{max} - Z_{min})/N_z$

**while**  $i \in [0, N_x - 1]$  **do**

$x_0 \leftarrow X_{min} + i \cdot H_x$

$x_1 \leftarrow X_{min} + (i + 1) \cdot H_x$

**while**  $j \in [0, N_y - 1]$  **do**

$y_0 \leftarrow Y_{min} + j \cdot H_y$

$y_1 \leftarrow Y_{min} + (j + 1) \cdot H_y$

**while**  $k \in [0, N_z - 1]$  **do**

**begin**

$z_0 \leftarrow Z_{min} + k \cdot H_z$

$z_1 \leftarrow Z_{min} + (k + 1) \cdot H_z$

**if**  $F(x_0, y_0, z_0) \leq 0$  **and**

$F(x_1, y_1, z_1) \geq 0$  **then**

$Find(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1) \rightarrow$

BnPts

**end while**

**end procedure**

Тут під суперобластю зазвичай розуміється деяка кубоїдна область, що задається користувачем, в середині якої завідомо знаходиться вихідний геометричний об'єкт. Процедура Find реалізує пошук на відрізку  $(x_0, y_0, z_0) - (x_1, y_1, z_1)$  координати точки, для якої R-функція, що описує вихідну геометричну область, приймає нульове значення.

Отриманий в результаті роботи вищеведеного алгоритму масив граничних точок потім використовується для візуалізації області або у вигляді воксельного, або у вигляді граничного подання. На рис. 1 наведено отримане граничне подання геометричної області «Атом», яку можна описати за допомогою R-функції такого вигляду:

$$F(x, y, z) = F_1(x, y, z) \vee F_2(x, y, z),$$

$$\text{де } F_1(x, y, z) = R^2 - x^2 - y^2 - z^2;$$

$$F_2(x, y, z) = F_3(x, y, z) \vee F_4(x, y, z);$$

$$F_3(x, y, z) = a\sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2 + z^2) - b;$$

$$F_4(x, y, z) = F_5(x, y, z) \vee F_6(x, y, z);$$

$$F_5(x, y, z) = a\sqrt{x^2 + z^2} - (x^2 + y^2 + z^2) - b;$$

$$F_6(x, y, z) = a\sqrt{y^2 + z^2} - (x^2 + y^2 + z^2) - b;$$

$$R = 9, a = 10, b = 24.$$

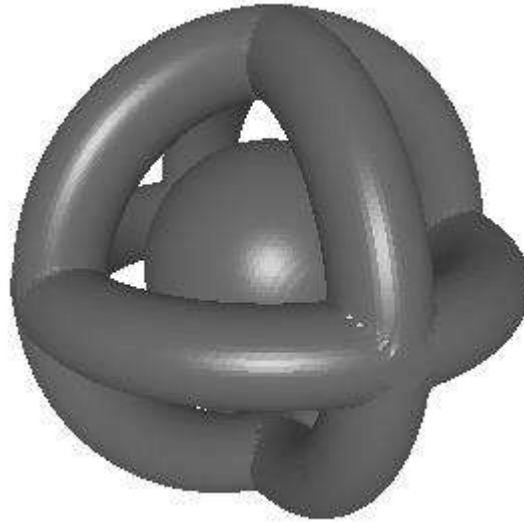


Рис. 1. Геометрична область «Атом»

Візуалізація поверхні вихідної області за допомогою набору опорних точок, що належать її границі, отримана за допомогою алгоритму Marching Cubes [20]. Наведений вище послідовний алгоритм можна модифікувати в паралельний, якщо передбачити розбиття суперобласті, що задається користувачем, на певну кількість окремих підобластей, число яких, наприклад, відповідає наявним в обчислювальній системі процесорам, ядрам або потокам, що паралельно виконуються, а результати їх роботи об'єднати в один результуючий масив граничних вузлів.

Запропонований паралельний алгоритм було реалізовано за допомогою Стандартної бібліотеки мови програмування C++ (C++11 [21]). Обчислювальний експеримент проводився на комп'ютері з процесором AMD Ryzen 7 2700X Eight-Core Processor з тактовою частотою 3.70 ГГц і об'ємом оперативної пам'яті 32 Гбайт під управлінням операційної системи Windows 10. Для пошуку границі області будувалася сітка, що складалася з  $300 \times 300 \times 300$  вузлів. Час роботи алгоритму при побудові зображення геометричної області «Атом» при різній кількості задіяних обчислювальних потоків наведено на рис. 2.



Рис. 2. Час виконання паралельного алгоритму візуалізації геометричної області «Атом» при різній кількості задіяних потоків на процесорі AMD Ryzen

На рис. 3 наведено аналогічний графік, отриманий при використанні іншого комп'ютера з процесором Intel (R) Core

(TM) i7-3630QM CPU @ 2.40 GHz і 16 ГБ пам'яті, що також працює під управлінням ОС Windows 10.

З наведених графіків видно, що час роботи паралельного алгоритму логарифмічно зменшується із зростанням кількості використаних потоків до того моменту, коли їх кількість не стане рівною кількості фізичних ядер процесора (AMD Ryzen – 8, Intel i7 – 4).

Після чого швидкість роботи практично не змінюється. При практичній реалізації даного алгоритму слід врахувати накладні витрати операційної системи на переключення управління між потоками.



Рис. 3. Час роботи алгоритму на процесорі Intel i7

### 3. Висновки

Запропонований паралельний алгоритм візуалізації тривимірних геометричних областей, описаних за допомогою R-функцій, є простим і легким в практичній реалізації, а також характеризується високою швидкістю виконання. Отже, його застосування дозволяє досліднику підвищити ефективність

своїєї роботи при геометричному моделюванні об'єктів складної форми для подальшої побудови їх дискретних представлень.

Перспективи подальших досліджень пов'язані з адаптацією запропонованого алгоритму для застосування на мультикомп'ютерах.

### Література

1. Чопоров С. В., Гребенюк С. Н., Гоменюк С. И. Функциональный подход к геометрическому моделированию технических систем. Запорожье: ЗНУ, 2016. 177 с.
2. Чопоров С. В., Гоменюк С. И., Алатамнех Х. Х., Осипцев К. С. Методы построения дискретных моделей: структурированные и блочно-структурированные сетки. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 272–284.
3. Чопоров С. В., Лисняк А. А., Борисовская Ю. А., Козлова О. С., Снежкова Л. С. Методы построения дискретных моделей: неструктурированные сетки. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2016. № 2. С. 237–250.
4. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование. Москва: Из-во физ.-мат. лит., 2002. 472 с.
5. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 106 с.
6. Pasko A., Adzhiev V., Sourin A. Savchenko V. Function representation in geometric modeling: concepts, implementation and applications. *The visual computer*. 1995. Vol. 11. P. 429–446.
7. Мыльцев А. М., Толок А. В. Математическая модель визуализации динамического массива данных при построении трёхмерных сцен. *Вісник Запорізького державного університету. Фізико-математичні науки*. 2003. № 3. С. 1–6.
8. Максименко-Шейко К. В., Мацевитый А. М., Шейко Т. И. Конструктивные средства метода R-функций для построения примитивов в 3D. *Проблемы машиностроения*. 2005. Т. 8. № 1. С. 59–65.

9. Толлок А. В. Функционально-воксельный метод в компьютерном моделировании. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2016. 112 с.
10. Гоменюк С. И., Чопоров С. В., Аль-Атамнех Б. Г. М. Математичне моделювання геометричних об'єктів у паралельних комп'ютерних системах: монографія. Херсон: Вид-чий дім «Гельветика», 2018. 112 с.
11. Чопоров С. В., Гоменюк С. И. Параллельный способ построения сеток треугольных элементов при функциональном. *Вестник Херсонского национального технического университета*. 2015. № 3(54). С. 511–517.
12. Чопоров С. В. Использование технологий параллельных вычислений в методе конечных элементов. *Радиоэлектроника, информатика, управління*. 2013. № 2(29). С. 88–94.
13. Flynn M. J. Some computer organizations and their effectiveness. *IEEE Transactions on Computers*. 1972. Vol 21 (9). P. 948–960.
14. Xu Z., Hwang K. Scalable Parallel Computing Technology, Architecture, Programming. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1998. 832 p.
15. Таненбаум Э., Стеен М. Распределенные системы. Принципы и парадигмы. Санкт–Петербург: Питер, 2003. 877 с.
16. Таненбаум Э., Остин Т. Архитектура компьютера. 6-е изд. Санкт–Петербург: Питер, 2013. 816 с.
17. Мальшкин В. Э., Корнеев В. Д. Параллельное программирование мультикомпьютеров. Новосибирск: НГУ, 2006. 439 с.
18. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. Москва: Вильямс, 2005. 1296 с.
19. Макконнелл Дж. Основы современных алгоритмов. Москва: Техносфера, 2004. 368 с.
20. William E. L., Harvey E. C. Marching Cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm. *Computer Graphics*. 1987. Vol. 21 (4). P. 163–169.
21. C++11 Overview. URL: <https://isocpp.org/wiki/faq/cpp11#cpp11-specific-goals>.

### References

1. Choporov, S. V., Grebenyuk, S. N. & Homeniuk, S. I. (2016). Functional approach to geometric modeling of technical systems. Zaporizhzhya: ZNU (in Russian).
2. Choporov, S. V., Homeniuk, S. I., Alathamneh, H. H. & Ospishev, K. S. (2016). Methods for constructing discrete models: structured and block-structured grids. *Visnik Zaporizkogo nacionalnogo universitetu. Fiziko-matematichni nauki*, No. 1, pp. 272–284 (in Russian).
3. Choporov, S. V., Lisnyak, A. A., Borisovskaya, Y. A., Kozlova, O. S. & Snezkova, L. S. (2016). Discrete Model Building Methods: Unstructured Grids. *Visnik Zaporizkogo nacionalnogo universitetu. Fiziko-matematichni nauki*, No. 2. pp. 237–250 (in Russian).
4. Golovanov, N. N. (2002). Geometric modeling. Moscow: Izdatelstvo fiziko-matematicheskoy literatury (in Russian).
5. Rvachev, V. L. (1982). Theory of R-functions and Applications. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
6. Pasko, A., Adzhiev, V., Sourin, A. & Savchenko, V. (1995). Function representation in geometric modeling: concepts, implementation and applications. *The visual computer*, Vol. 11, pp. 429–446.
7. Mylcev, A. M. & Tolok, A. V. (2003). A mathematical model for visualizing a dynamic data array when building three-dimensional scenes. *Visnik Zaporizkogo derzhavnogo universitetu*, No. 3, pp. 1–6 (in Russian).
8. Maksimenko-Shejko, K. V., Macevityj, A. M. & Shejko, T. I. (2005). Constructive tools of the R-function method for constructing primitives in 3D. *Problemy mashinostroeniya*, Vol. 8, Issue 1, pp. 59–65 (in Russian).
9. Tolok, A. V. (2016). Functional voxel method in computer simulation. Moscow: FIZMATLIT (in Russian).

10. Homeniuk, S. I., Choporov, S. V. & Al-Atamneh, B. G. M. (2018). Mathematical modeling of geometric objects in parallel computer systems: monograph. Kherson: Vidavnychij dim “Gelvetika” (in Ukrainian).
11. Choporov, S. V. & Homeniuk, S. I. (2015). Parallel method meshing triangular elements when the functional representation. Vestnik Hersonskogo nacionalnogo tehničkog universiteta, No. 3(54), pp. 511–517 (in Russian).
12. Choporov, S. V. (2013). The using of parallel computing technologies in the finite element method. Radioelektronika, informatika, upravlinnya, No. 2(29), pp. 88–94 (in Russian).
13. Flynn, M. J. (1972). Some computer organizations and their effectiveness. IEEE Transactions on Computers, Vol. 21(9), pp. 948–960.
14. Xu, Z. & Hwang, K. (1998). Scalable Parallel Computing Technology, Architecture, Programming. McGraw-Hill Science/Engineering/Math.
15. Tanenbaum, E. & Steen, M. (2003). Distributed systems. Principles and Paradigms. Saint Petersburg: Piter (in Russian).
16. Tanenbaum, E. & Ostin, T. (2013). Computer architecture: 6th ed. Saint Petersburg: Piter (in Russian).
17. Malyskin, V. E. & Korneev, V. D. (2006). Parallel programming of multicomputers. Novosibirsk: NGU (in Russian).
18. Kormen, T., Lejzerson, Ch., Rivest, R. & Shtajn, K. (2005). Algorithms: construction and analysis. Moscow: Vilyams (in Russian).
19. Makkonnell, D. (2004). The basics of modern algorithms. Moscow: Tehnosfera (in Russian);
20. William, E. L. & Harvey, E. C. (1987). Marching Cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm. Computer Graphics, Vol. 21 (4), pp. 163–169.
21. C++11 Overview. Retrieved from <https://isocpp.org/wiki/faq/cpp11#cpp11-specific-goals>.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-06

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ І ДИСИПАТИВНИЙ РОЗІГРІВ ГНУЧКОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З П'ЄЗОАКТИВНИМИ ШАРАМИ З ВРАХУВАННЯМ ДЕФОРМАЦІЙ ЗСУВУ

І. Ф. Киричок<sup>1</sup>, Я. О. Жук<sup>2</sup>, О. А. Чернюшок<sup>3</sup>, А. П. Тарасов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАНУ,

<sup>2</sup>Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,

<sup>3</sup>Національний університет харчових технологій,

term@inmech.kiev.ua, angrybeaver315@gmail.com, y.zhuk@i.ua, chernyshokolga@ukr.net

### Ключові слова:

резонансні коливання, дисипативний розігрів, нееластичний матеріал, п'єзоелектричні датчики.

Розглядається задача про вимушені резонансні коливання та дисипативний розігрів шарнірно закріпленої циліндричної оболонки з п'єзоелектричним сенсором. Постановка задачі виконана у межах уточненої теорії оболонок С. П. Тимошенка. Об'єктом дослідження є тришарова циліндрична оболонка, навантажена осесиметричним поверхневим тиском. Зовнішнє навантаження змінюється у часі за гармонічним законом. Задача електротермомеханіки, що розглядається, є взаємозв'язаною та нелінійною. Для цієї задачі отримано фізичні, геометричні рівняння та рівняння руху. Її розв'язання зводиться до інтегрування нормальної системи диференціальних рівнянь. Для її інтегрування застосовано покроковий за часом метод. Наведено чисельний розв'язок задачі, здійснено його аналіз.

## FORMULATION OF THE PROBLEMS ON RESONANCE VIBRATIONS AND DISIPATIVE HEATING OF THE FLEXIBLE CYLINDRICAL SHEETS WITH PIEZOACTIVE BALLS TAKING INTO CONSIDERATION OF SHIFT DEFORMATION

I. F. Kyrychok<sup>1</sup>, Ya. O. Zhuk<sup>2</sup>, O. A. Chernyushok<sup>3</sup>, A. P. Tarasov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>S. P. Timoshenko Institute of Mechanics,

<sup>2</sup>Taras Shevchenko National University of Kyiv,

<sup>3</sup>National University of Food Technologies

term@inmech.kiev.ua, angrybeaver315@gmail.com, y.zhuk@i.ua, chernyshokolga@ukr.net

### Key words:

resonance vibration, dissipative heating, inelastic material, piezoelectric sensors.

The problem of forced resonance oscillations and dissociative heating of a hinged cylindrical shell with a piezoelectric sensor is considered. The formulation of the problem is carried out within the framework of the refined theory of shells by S.P. Tymoshenko. The object of study is a three-layer cylindrical shell loaded with axisymmetric surface pressure. The external load changes in time according to the harmonic law. The inner layer of the shell is made of passive transversal-isotropic material. The outer layers are made of sandstone, polarized in thickness in opposite directions. The materials of the layers are viscoelastic and their properties are temperature dependent. The surfaces in contact with the passive layer are covered with continuous, infinitesimally thin electrodes on which the electric potential is given. The problem of electrothermomechanics under consideration is interconnected and non-linear. For this problem, physical, geometric and motion equations are obtained. The method of its solving is constructed and implemented. The problem of forced oscillation and vibration of the shell is reduced to the solution of the partial differential equation system with known boundary and initial conditions. A step-by-step method is used to integrate it. The numerical solution of the problem is given. The calculations were performed in the vicinity of the first frequency of the bending mode oscillations of the shell. The obtained numerical solution is analyzed.

## 1. Вступ

Широке застосування в якості функціональних складових конструкцій сучасної техніки мають конструктивні елементи типу балок, пластинок і оболонок із непружних матеріалів з характерними властивостями шаруватості, анізотропії матеріалів та піддатливості на зсув. В більшості випадків вони знаходяться в стані вимушених коливань під дією інтенсивних гармонічних навантажень з частотою, що близька до резонансної. При цьому через внутрішні гістерезисні втрати в непружних матеріалах процес експлуатації тонкостінних елементів супроводжується дисипативним розігрівом [2, 3]. Такі умови експлуатації можуть призвести до втрати працездатності конструктивних елементів через високі рівні динамічних напружень, амплітуд прогинів, температури вібророзігріву та ін. Для зниження рівня амплітуд коливань тонкостінних елементів конструкцій (балок, пластин і оболонок) широко використовують розподілені актуатори і сенсори, які зазвичай виготовляють з п'єзоактивних матеріалів [8, 9, 14-16]. Для активного гасіння вимушених коливань широко використовується спосіб нанесення на зовнішні поверхні тонкостінного елемента п'єзоелектричних шарів, до електродів яких подається різниця електричних потенціалів відповідної амплітуди і фази, для нейтралізації дії механічного збудження. Через те, що у багатьох випадках тонкостінні елементи з п'єзоелектричними включеннями знаходяться під дією інтенсивних циклічних навантажень (які зумовлюють високий рівень механічних напружень, прогинів та дисипативного розігріву), необхідно враховувати ефекти фізичної і геометричної нелінійностей, а також їх вплив на термомеханічний стан конструкції.

Побудова електротермомеханічних моделей та розв'язок конкретних задач про вимушені коливання і дисипативний розігрів тонкостінних шаруватих балок, пластинок і оболонок із непружних пасивних (без п'єзо ефекта) і п'єзоактивних матеріалів та їх контроль п'єзоелектричними складовими містяться в багатьох наукових працях [5-7, 12, 13] та ін., результати яких узагальнені в оглядах [10, 11]. Зокрема, в рамках класичної теорії оболонок Кірхгофа-Лява задача

про вимушені коливання і вібророзігрів в'язкопружних циліндричних оболонок і їх контроль п'єзоелектричними актуаторами та сенсорами розглядається в [4-7].

В цій статті в рамках уточненої теорії оболонок С. П. Тимошенка проводиться постановка задачі про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів шарнірно закріпленої циліндричної оболонки з п'єзоелектричним сенсором.

## 2. Постановка задачі. Основні рівняння

Розглянемо тришарову циліндричну оболонку довжиною  $l$ , віднесено до ортогональної системи координат  $\alpha, \theta, z$  координатою  $z = 0$  на середині внутрішнього шару радіуса  $R$  і товщини  $h_0$ . Внутрішній шар виготовлено із пасивного трансверсально-ізотропного матеріалу, а зовнішні товщиною  $h_1$  – із поляризованої по товщині в протилежних напрямках п'єзокераміки. Матеріали шарів вважаємо в'язкопружними, властивості яких залежать від температури. Поляризація верхнього ( $z \geq h_0/2$ ) і нижнього ( $z \leq -h_0/2$ ) п'єзошарів характеризуються значеннями п'єзомодулів  $+d_{31}$  і  $-d_{31}$  відповідно. Поверхні, що контактують з пасивним шаром, покриті суцільними нескінченно тонкими електродами, на яких задано електричний потенціал  $\varphi(\pm h_0/2) = 0$ . Поверхні  $z = \pm(h_0/2 + h_1)$  електродовані на ділянці  $s^\pm = 2\pi R \Delta_\alpha$  ( $\Delta_\alpha = \alpha_1 + \alpha_0$  та не електродовані поза  $s^\pm$ , де виконуються такі електростатичні граничні умови:

$$\iint_{s^\pm} D_z^\pm dz = 0, \quad (\alpha_0 < \alpha \leq \alpha_1);$$

$$D_z^\pm = 0, \quad (0 \leq \alpha < \alpha_0, \alpha_1 < \alpha \leq l), \quad (1)$$

де  $D_z^\pm$  – нормальна складова електричної індукції в п'єзоелектричних шарах.

Оболонка навантажена осесиметричним поверхневим тиском  $q_z = q_z(\alpha) \dot{\cos} \omega t$ , що змінюється за часом  $t$  з амплітудою  $\dot{q}_z$  і круговою частотою  $\omega$ , яка близька до резонансної. В результаті гармонічного деформування на розімкнутих електродах сенсора  $s^\pm$  виникають електричні потенціали  $\pm V_s$ , амплітудні значення яких розраховуються або визначаються експериментально. Приймаємо, що торці оболонки вільні в тангенціальному і шарнірно закріплені в поперечному



напрямок, а на її граничних поверхнях виконуються умови конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем температури  $T_c$ .

При математичному моделюванні поставленої задачі приймаємо, що по всьому пакету шарів виконуються гіпотези С. П. Тимошенка для механічних величин. Відносно електричних змінних допускаємо, що складовими  $D_\alpha, D_\theta$  вектора електричної індукції в п'єзошарах можна знехтувати, а складові вектора електричної напруженості  $E_\alpha, E_\theta$  знаходяться із визначальних рівнянь  $D_\alpha = 0, D_\theta = 0$ . При цьому із рівнянь електростатики випливає, що нормальна складова  $D_z = \text{const}$  в п'єзошарах не залежить від товщинної координати [2]. В'язкопружні властивості матеріалів описуються концепцією комплексних модулів [2, 3], складові яких залежать від температури. Температуру дисипативного розігріву оболонки вважаємо постійною по товщині пакету шарів.

З використанням методології [2, 4] та прийнятих припущень задача про вимушені коливання і вібророзігрів розглядуваної оболонки відносно шуканих комплексних величин зводиться до розв'язку: рівнянь гармонічних коливань (множник  $e^{i\omega t}$  опускаємо)

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} + \rho \cdot \omega^2 u &= 0, \\ \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{N_\theta}{R} + \rho \cdot \omega^2 + q_z &= 0, \\ \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} - Q_\alpha + \rho \cdot \omega^2 \psi_\alpha &= 0; \end{aligned} \quad (2)$$

визначальних співвідношень для зусиль і моментів

$$\begin{aligned} N_\alpha &= C_{11} \varepsilon_\alpha + C_{12} \varepsilon_\theta, \\ N_\theta &= C_{12} \varepsilon_\alpha + C_{11} \varepsilon_\theta, \\ Q_\alpha &= k_S C_{44} \varepsilon_{\alpha z}, \\ M_\alpha &= D_{11} \kappa_\alpha + M_E, \\ M_\theta &= D_{12} \kappa_\alpha + M_E; \end{aligned} \quad (3)$$

залежностей між амплітудними значеннями деформацій і переміщень

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{du}{d\alpha}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{w}{R}, \\ \kappa_\alpha &= \frac{d\psi_\alpha}{d\alpha}, \end{aligned}$$

$$\vartheta_\alpha = -\frac{dw}{d\alpha},$$

$$\varepsilon_{\alpha z} = \psi_\alpha - \vartheta_\alpha; \quad (4)$$

виразів для електричної індукції в п'єзошарах

$$\pm D_z = -b_{33} \frac{V_a}{h_1} \pm b_{31} (\varepsilon \mp \bar{h}_1 \kappa_\alpha) \quad (5)$$

$$(z \leq -h_0/2, z \geq h_0/2),$$

усередненого за період коливань і по товщині оболонки рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} - \frac{2\alpha_S}{\lambda H} (T - T_c) + \frac{\omega}{2\lambda H} \langle W \rangle; \quad (6)$$

дисипативної функції

$$\begin{aligned} \langle W \rangle &= N''_\alpha \varepsilon'_\alpha - N'_\alpha \varepsilon''_\alpha + N''_\theta \varepsilon'_\theta - N'_\theta \varepsilon''_\theta + \\ &+ M''_\alpha \kappa'_\alpha - M'_\alpha \kappa''_\alpha + Q''_\alpha \varepsilon'_{\alpha z} - Q'_\alpha \varepsilon''_{\alpha z}. \end{aligned} \quad (7)$$

Механічні граничні умови такі:

$$N_\alpha = 0, w = 0, M_\alpha = 0 \quad (\alpha = 0, l). \quad (8)$$

Граничні і початкові умови для рівнянь теплопровідності мають вигляд

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \alpha} = \pm \alpha_{0,l} (T - T_c) \quad (9)$$

$$(\alpha = 0, l) T = T_0 (t = 0).$$

Обумовлена гармонічним деформуванням оболонки амплітуда електричних потенціалів на розімкнутих електродах сенсора на основі розв'язку задачі (2)- (9) і першої граничної умови (1) обчислюється за формулою

$$\frac{V_S}{h_1} = \frac{\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} b_{31} (\varepsilon + \bar{h} \kappa_\alpha) d\alpha}{\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} b_{33} d\alpha}. \quad (10)$$

У співвідношеннях (2)-(10) введені наступні позначення:

$$\begin{aligned} C_{1n} &= c_{1n} h_0 + (c_{1n}^E + \gamma_{33}) h_1, \\ C_{44} &= G_{\alpha z} h_0 + 2c_{44}^E h_1, \\ D_{1n} &= (c_{1n} h_0^3 + 2(c_{1n}^E + \gamma_{33}) \bar{h}_{13}) / 12, \\ c_{11} &= \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad c_{12} = \nu c_{11}, \\ c_{11}^E &= 1/s_{11}^E (1 - \nu_E^2), \\ c_{12}^E &= \nu_E c_{11}^E, \quad \nu_E = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E}, \\ c_{44}^E &= \frac{1}{s_{44}^E - \frac{d_{15}^2}{\varepsilon_{11}^T}}, \\ b_{31} &= \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1 - \nu_E)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{33} &= \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2), \\
k_p^2 &= \frac{2d_{31}^2}{[\varepsilon_{33}^T s_{11}^E (1 - \nu_E)]}, \\
\gamma_{33} &= \frac{b_{31}^2}{b_{33}}, \\
\rho_{\bullet} &= 2\rho_1 h_1 + \rho_0 h_0, \\
\rho_{\bullet\bullet} &= \frac{2\rho_1 \bar{h}_{13} + \rho_{\bullet} h_0^3}{12}, \\
\bar{h}_{13} &= 4h_1^3 + 6h_1 h_0^2 + 3h_1 h_0^2, \\
\bar{h}_1 &= \frac{h_0 + h_1}{2}, \\
H &= 2h_1 + h_0, \\
\varepsilon &= \varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\theta}, \\
s_{kk}^E &= s'_{kk} (1 - i\delta_{kk}^s), \\
d_{ik} &= d'_{ik} (1 - i\delta_{ik}^d), \\
\varepsilon_{kk}^T &= \varepsilon'_{kk} (1 - i\delta_{kk}^{\varepsilon}) \quad (11)
\end{aligned}$$

– залежні від температури комплексні податливості, п'езомодулі і діелектричні проникливості п'езокераміки;  $E = E' + iE''$ ,  $G_{\alpha z} = G'_{\alpha z} + iG''_{\alpha z}$ ,  $\nu = const$  – модулі Юнга і поперечного зсуву та коефіцієнт Пуассона пасивного матеріалу;  $k_s$  – коефіцієнт поперечного зсуву,  $w = w' + iw''$ ,  $u = u' + iu''$ ,  $\psi_{\alpha} = \psi'_{\alpha} + i\psi''_{\alpha}$  – амплітуди прогинів, поздовжніх переміщень і кута повороту нормального елемента;  $N_{\alpha}$ ,  $N_{\theta}$ ,  $Q_{\alpha}$  і  $M_{\alpha}$ ,  $M_{\theta}$  – амплітуди зусиль і згинаючих моментів;  $\rho_0$ ,  $\rho_1$  – питомі густини пасивного і п'езоактивного матеріалів;  $\lambda$ ,  $a$  – усереднені коефіцієнти тепло- і температуропровідності;  $\alpha_s = (\alpha_+ + \alpha_-)/2$ ;  $\alpha_{\pm}$ ,  $\alpha_{0,l}$  – коефіцієнти теплообміну на відповідних поверхнях і торцях оболонки;  $T_0$  – початкова температура оболонки.

### 3. Методика побудови розв'язку задачі

Задача електротермомеханіки (2)-(9) через залежність властивостей матеріалів від температури є взаємозв'язаною і нелінійною. Для її розв'язання застосовується покроковий за часом метод [2]. При цьому рівняння (2)-(4) записуються відносно шуканих величин  $N_{\alpha}$ ,  $Q_{\alpha}$ ,  $M_{\alpha}$ ,  $u$ ,  $w$ ,  $\psi_{\alpha}$  у вигляді звичайних диференціальних рівнянь нормальної форми

$$\frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \alpha} = -\rho_{\bullet} \omega^2 u,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{\alpha}}{\partial \alpha} &= Q_{\alpha} - \rho_{\bullet\bullet} \omega^2 \psi_{\alpha}, \\
\frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial \alpha} &= \frac{\nu_c}{R} N_{\alpha} + \frac{\tilde{C}_{11}}{R^2} w - q_z - \rho_{\bullet} \omega^2 w, \\
\frac{du}{d\alpha} &= J_c N_{\alpha} - \frac{\nu_c}{R} w, \\
\frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial \alpha} &= J_D M_{\alpha}, \\
\frac{\partial w}{\partial \alpha} &= -\psi_{\alpha} + J_{SD} Q_{\alpha}, \quad (12)
\end{aligned}$$

де  $J_c = 1/C_{11}$ ,  $J_D = 1/D_{11}$ ,  $\nu_c = C_{12}/C_{11}$ ,  $\tilde{C}_{11} = C(1 - \nu^2)$ ,  $J_{SD} = 1/(k_s C_{44})$ .

Систему рівнянь (12) з граничними умовами (8) розділяємо на дійсну і уявну частини і на кожному кроці за часом інтегруємо її з використанням типової програми розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь. На першому кроці розв'язується лінійна задача при ізотермічних властивостях матеріалів. Потім обчислюємо дисипативну функцію (7) і розв'язуємо задачу теплопровідності (6), (9) методом кінцевих різниць з використанням явної схеми. Далі з урахуванням розподілу температури обчислюємо жорсткісні характеристики (11) і процес повторюємо на наступному кроці за часом. При реалізації такої методології використовуються безрозмірні просторова  $x = \alpha/\ell$  і часова  $\tau = at/\ell^2$  координати та параметри  $\gamma_s = \alpha_{\pm,0,\ell}\ell/\lambda$  при  $\nu_E = const$ .

### 4. Результати числових розрахунків та їх аналіз

Розрахунки проведені в околі першої частоти найбільш енергоємної згинальної моди коливань оболонки, внутрішній шар якої виготовлено із пасивного полімеру [8], а зовнішні п'езошари сенсора – із в'язкопружної п'езокераміки ЦТСтБС-2 [1]. Температурні залежності їх експериментально отриманих в'язкопружних характеристик апроксимувались такими виразами:

$$\begin{aligned}
E' &= (1672 - 118,6T) \cdot 10^6 \text{Па}, \\
E'' &= (15,01 - 1,205T) \cdot 10^6 \text{Па}, \\
G_{\alpha z} &= 0,04E, \quad \nu = 0,36, \\
s'_{11} &= 12,5(1 - 0,3077 \cdot 10^{-3}\bar{T}) \times \\
&\quad \times 10^{-12} \text{м}^2/\text{Н}, \\
s'_{44} &= 39,7(1 + 0,5458 \cdot 10^{-3}\bar{T}) \times \\
&\quad \times 10^{-12} \text{м}^2/\text{Н}, \\
\delta_{11}^s &= 0,16(1 + 0,6155 \cdot 10^{-3}\bar{T} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+0,4158 \cdot 10^{-4} \bar{T}^2) \cdot 10^{-2}, \\
 &\bar{T} = T - T_0, \nu_E = 0,37; \\
 &\delta_{44}^s = 0,14(1 + 8,33 \cdot 10^{-3} \bar{T}) \cdot 10^{-2}, \\
 &d'_{31} = -1,6(1 + 0,219 \cdot 10^{-2} \bar{T}) \cdot 10^{-10} \text{Кл/м}, \\
 &\delta_{31}^d = 0,4 \left( 1 + 1,198 \cdot 10^{-2} \bar{T} + \right. \\
 &\quad \left. + 1,823 \cdot 10^{-4} \bar{T}^2 \right) \cdot 10^{-2}, \\
 &\lambda = 0,45 \text{Вт/м}^{\circ}\text{С}, \\
 &d'_{15} = 4,5(1 + 0,9722 \cdot 10^{-3} \bar{T}) \cdot 10^{-10} \text{Кл/м}, \\
 &\delta_{15}^d = 0,35(1 + 0,3571 \cdot 10^{-2} \bar{T}) \cdot 10^{-2}, \\
 &\varepsilon'_{11} = 18,5\varepsilon_0(1 + 0,4505 \cdot 10^{-2} \bar{T}) \cdot 10^2, \\
 &\delta_{11}^{\varepsilon} = 0,5(1 + 0,015 \bar{T}) \cdot 10^{-2}, \\
 &\varepsilon'_{33} = 21\varepsilon_0(1 + 0,111 \cdot 10^{-3} \bar{T} + \\
 &\quad + 0,8426 \cdot 10^{-4} \bar{T}^2) \cdot 10^2, \\
 &\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{Ф/м}; \\
 &\delta_{33}^{\varepsilon} = 0,35(1 + 0,0119 \bar{T} + \\
 &\quad + 0,119 \cdot 10^{-3} \bar{T}^2) \cdot 10^{-2}, \\
 &\rho_0 = 929 \text{кг/м}^3, \\
 &\rho_1 = 7520 \text{кг/м}^3.
 \end{aligned}$$

Геометричні параметри оболонки такі:  $\ell = 0,2$  м,  $h_0 = 0,04$  м,  $h_1 = 0,1 \cdot 10^{-4}$  м,  $R = 0,2$  м. Коефіцієнт поперечного зсуву  $k_s = 5/6$  [2].

П'єзоактивні ділянки сенсора вибирались так, щоб його середина співпадала з координатою максимальних прогинів оболонки.

Залежності амплітуди електричного потенціалу  $V_s^1$ , обчисленого за формулою (10) при ізотермічних властивостях матеріалів ( $T = T_0$ ) оболонки з постійною амплітудою навантаження  $q_z' = q_0 = 1$  Па, від безрозмірного параметра ширини еталонного сенсора показані кривими 1, 2 на рис. 1.

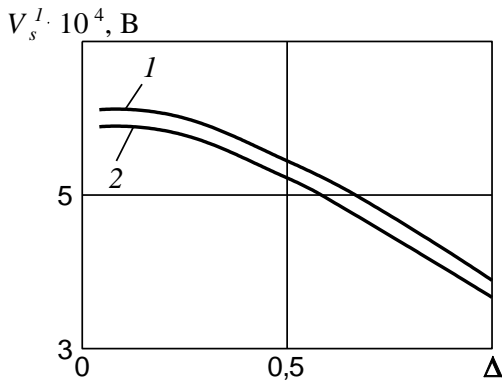


Рис. 1

Крива 1 розрахована на резонансній частоті  $\omega_p = 9000 \text{ с}^{-1}$  в класичній постановці задачі, а крива 2 – на частоті  $8800 \text{ с}^{-1}$  при врахуванні деформації поперечного зсуву. Тут і далі при розрахунках прийнято, що

центр сенсора співпадає з координатою  $x = 0,5$  максимальних прогинів оболонки. З рис. 1 видно, що врахування деформації зсуву зменшує показник  $V_s^1$  для всіх розмірів сенсора, а найменше його числове значення досягається при повному покритті оболонки п'єзошарами ( $\Delta = 1$ ). Нижче числові результати наведені для сенсора ширини  $\Delta = 1$ .

На рис. 2, 3 і 4 показані частотні залежності максимальних значень амплітуд прогину  $\tilde{w} = |w(0,5l)|/h_0 \cdot 10^3$  м електричного показника сенсора  $V_s$  і усталеної температури  $T_m$  дисипативного розігріву при вимушених коливаннях оболонки з амплітудою навантаження  $q_0 = 0,4 \cdot 10^4$  Па і параметром теплообміну  $\gamma_s = 0,5$ .

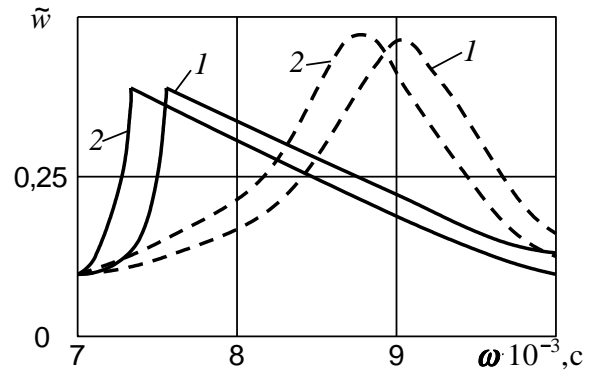


Рис. 2

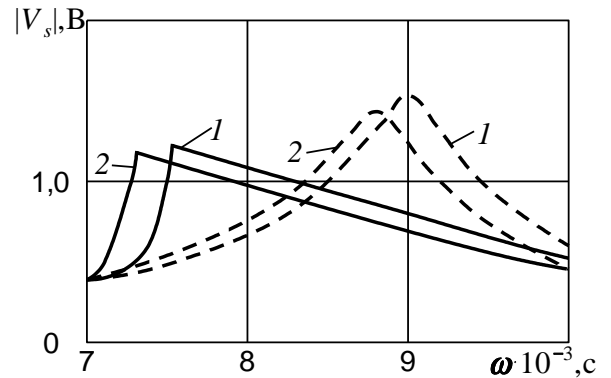


Рис. 3

Криві 1 розраховані для випадку класичної постановки задачі, а криві 2 – при врахуванні деформації поперечного зсуву та інерції повороту. При цьому штрихові лінії обчислені при ізотермічних властивостях матеріалів, а суцільні – при врахуванні їх температурної залежності. Аналіз кривих на рис. 2-4 показує, що врахування деформації поперечного зсуву супроводжується зміщенням частотних характеристик в сторону

зменшення частоти резонансу, деяким збільшенням амплітуди та зменшенням електричного показника сенсора і температури вібророзігріву на уточненій частоті.

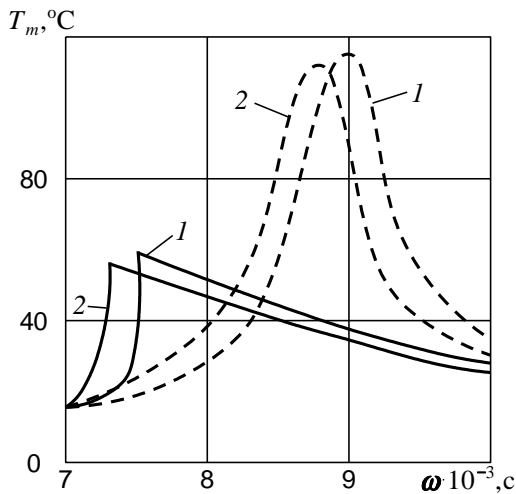


Рис. 4

Врахування температурної залежності властивостей матеріалів приводить до відомого ефекту трансформації частотних характеристик в характеристики «м'якого» типу [5, 6] як у випадку класичної, так і уточненої постановок задачі.

## 5. Висновки

Наведено постановку та числовий розв'язок задачі про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів шарнірно опертої в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоелектричними сенсорами при осесиметричному моногармонічному навантаженні та врахуванні деформації поперечного зсуву. Виведено фізичні, геометричні рівняння та рівняння руху. Побудовано та описано методику розв'язку задачі.

## Література

1. Bolkisev A. M., Karlash V. L., Shul'ga N. A. Temperature dependence of the properties of piezoelectric ceramics. *Sov. Appl. Mech.* 1984. Vol. 20, No 7. P. 650–653.
2. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. Киев: Наук. думка, 1986. 222 с.
3. Карнаухов В. Г., Михайленко В. В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. Житомир: ЖГТУ, 2005. 428 с.
4. Киричок И. Ф. Осесимметричные резонансные колебания и разогрев оболочек вращения и их контроль пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами. *Прикл. механика.* 2010. Т. 46, № 8. С. 42–57.
5. Киричок И. Ф., Жук Я. А. Влияние граничных условий и температуры виброразогрева на резонансные осесимметричные колебания вязкоупругих цилиндрических оболочек с пьезоактуаторами и сенсорами. *Теоретическая и прикладная механика.* 2013. Вып. 7. С. 133–140.
6. Киричок И. Ф., Жук Я. О., Карнаухова Т. В. Резонансні коливання і дисипативний розігрів гнучкої в'язкопружної балки з п'єзоактуаторами при врахуванні деформації зсуву. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2017. Т. 60, № 2. С. 66–74.
7. Киричок И. Ф., Карнаухова Т. В., Пересунько Н. В. Резонансные осесимметричные колебания и диссипативный разогрев цилиндрических оболочек и их контроль с помощью пьезоэлектрических актуаторов. *Теоретическая и прикладная механика.* 2010. Вып. 46. С. 132–140.
8. Vlaguenon A., Lene F., Bemadou M. Active control a beam a piezoceramic element. *Smart Mater. Struct.* 1999. No 8. P. 116–124.
9. Gabbert U., Tzou H. S. Smart structures and structronic systems. Dordrecht: Kluwer acad. publ., 2001. 384 p.
10. Karnaukhov V. G., Kyrychok I. F., Kozlov V. I. Thermomechanics of Inelastic Thin-Wall Structural Members with Piezoelectric Sensors and Actuators under Harmonic Loading (Review). *Int. Appl. Mech.* 2017. Vol. 53, Issue 1. P. 6–58.
11. Karnaukhov V. G., Kozlov V. I., Karnaukhova T. V. Forced Vibrations and Dissipative Heating of flexible Hinged Viscoelastic Rectangular Plates with Actuators with Allowance for Transverse Shear Strains. *Int. Appl. Mech.* 2018. Vol. 54, Issue 1. P. 85–93.
12. Kyrychok I. F. Resonance Axisymmetric Vibrations and Dissipative Heating of Viscoelastic Cylindrical Shell with Piezolayers under Elektromechanical Excitation. *Int. Appl. Mech.* 2015. Vol. 51, Issue 5. P. 567–573.

13. Kyrychok I. F., Chemyshok O. A. Forced Vibrations and Vibroheating of flexible Viscoelastic Beam with Piezoelectric Sensor and Actuators with Allowance for the Shear Strains. *Int. Appl. Mech.* 2018. Volume 54, Issue 5. P. 568–576.
14. Tani J., Takagia T., Qiu J. Intelligent material systems: Application of functional materials. *Appl. Mech. Review.* 1998. Vol. 51, Issue 8. P. 505–521.
15. Tzou H. S. Piezoelectric Shells (Distributed Sensing and Control of Continua). Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1993. 400 p.
16. Tzou H. S., Bergman L. A. Dynamics and Control of Distributed Systems. Cambridge: Cambridge University Pres, 1998. 374 p.

### References

1. Bolkisev, A. M., Karlash, V. L. & Shul'ga, N. A. (1984). Temperature dependence of the properties of piezoelectric ceramics. *Sov. Appl. Mech.*, Vol. 20, No 7, pp. 650–653.
2. Karnaukhov, V. G. & Kyrychok, I. F. (1986). Related problems of the theory of viscoelastic plates and shells. Kyev: Naukova dumka.
3. Karnaukhov, V. G. & Mikhailenko, V. V. (2005). Nonlinear thermomechanics of piezoelectric inelastic bodies under monoharmonic loading. Zhytomyr: ZSTU.
4. Kyrychok, I. F. (2010). Axisymmetric resonant oscillations and heating of shells of rotation and their control by piezoelectric sensors and actuators. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 46, Issue 8, pp. 42–57.
5. Kyrychok, I. F. & Zhuk, Y. O. (2013). Influence of boundary conditions and heating temperature on resonance axisymmetric vibrations of the viscoelastic cylindrical shells containing piezoactuators and sensors. *Theoretical and applied mechanics*, Issue 7, pp. 133–140.
6. Kyrychok, I. F., Zhuk, Y. O. & Karnaukhova, T. V. (2017). Resonant vibrations and dissipative heating of a flexible viscoelastic beam with piezoactuators accounting for shear strain. *Mathematical Methods and Physicomechanical Fields*, Vol. 60, Issue 2, pp. 66–74.
7. Kyrychok, I. F., Karnaukhova, T. V. & Peresunko, N. V. (2010). Resonant axisymmetric oscillations and dissipative heating of cylindrical shells and their control using piezoelectric actuators. *Theoretical and applied mechanics*, Issue 46, pp. 132–140.
8. Blaguenon, A., Lene, F. & Bemadou, M. (1999). Active control a beam a piezoceramic element. *Smart Mater. Struct.*, No 8, pp. 116–124.
9. Gabbert, U. & Tzou, H. S. Smart structures and structronic systems. Dordrecht: Kluwer acad. publ.
10. Karnaukhov, V. G., Kyrychok, I. F. & Kozlov, V. I. (2017). Thermomechanics of Inelastic Thin-Wall Structural Members with Piezoelectric Sensors and Actuators under Harmonic Loading (Review). *Int. App. Mech.*, Vol. 53, Issue 1, pp. 6–58.
11. Karnaukhov, V. G., Kozlov, V. I. & Karnaukhova, T. V. (2018). Forced Vibrations and Dissipative Heating of flexible Hinged Viscoelastic Rectangular Plates with Actuators with Allowance for Transverse Shear Strains. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 54, Issue 1, pp. 85–93.
12. Kyrychok, I. F. (2015). Resonance Axisymmetric Vibrations and Dissipative Heating of Viscoelastic Cylindrical Shell with Piezolayers under Elektromechanical Excitation. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 51, Issue 5, pp. 567–573.
13. Kyrychok, I. F. & Chemyshok, O. A. (2018). Forced Vibrations and Vibroheating of flexible Viscoelastic Beam with Piezoelectric Sensor and Actuators with Allowance for the Shear Strains. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 54, Issue 5, pp. 568–576.
14. Tani, J., Takagia, T. & Qiu, J. (1998). Intelligent material systems: Application of functional materials. *Appl. Mech. Review.*, Vol. 51, Issue 8, pp. 505–521.
15. Tzou, H. S. (1993). Piezoelectric Shells (Distributed Sensing and Control of Continua). Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers.
16. Tzou, H. S. & Bergman, L. A. (1998). Dynamics and Control of Distributed Systems. Cambridge: Cambridge University Pres.

УДК 519.17:512.5

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-07

## ОСОБЛИВОСТІ ПОШУКУ ОПТИМАЛЬНИХ КЛАСИФІКАЦІЙ: ЕВОЛЮЦІЙНІ АЛГОРИТМИ

I. V. Kozin, Ye. K. Selyutin

Zaporizhzhia National University  
ainc00@gmail.com, wizz92@gmail.com

### Ключові слова:

класифікація, еволюційний алгоритм, генетичний алгоритм, схрещування, мутація, селекція.

Проаналізовано сутність задачі класифікації, а також необхідність виконання умов й відносин на множині. Зазначено властивості відношення еквівалентності. Наведено приклад задачі класифікації, який буде розглядатиметься у даній роботі, а саме: задача покриття графа зірками, яка виникає у багатьох економічних додатках. В якості елементарних фрагментів виступають усі ребра графа. Умови приєднання ребра – це ребро є променем вже існуючої зірки або не має спільних вершин із вже побудованими зірками покриття. Акцентована увага на недостатній оптимальності такого рішення. Була підкреслена актуальність фрагментарної структури задачі. Вказана можливість побудови класів, розглядаючи весь список об'єктів, що класифікуються у певній послідовності. На базі фрагментарної структури запропоновано використовувати еволюційний алгоритм. Були проаналізовані роботи, в яких розглядаються приклади практичного застосування еволюційного (генетичного) алгоритму для вирішення задач класифікації. Оцінена перспектива використання генетичного алгоритму для пошуку оптимальних класифікацій. Вказана поетапна послідовність операцій генетичного алгоритму з прикладами: відбір, схрещування, мутація, селекція. Наведені приклади роботи ключових операторів, а саме кросовера та мутації. Наочно проілюстрований детальний алгоритм еволюційної моделі. Детально описано принцип дії еволюційно-фрагментарного алгоритму. В якості множини допустимих рішень розглядається підмножина максимальних фрагментів на заданій фрагментарній структурі. Визначений механізм перевірки якості генетичного алгоритму на фрагментарній структурі, який зводиться до перебору багатьох варіантів.

## USING OF EVOLUTIONAL ALGORITHMS FOR SEARCHING OPTIMAL CLASSIFICATIONS

I. V. Kozin, Ye. K. Selyutin

Zaporizhzhia National University  
ainc00@gmail.com, wizz92@gmail.com

### Key words:

classification, evolutionary algorithm, genetic algorithm, crossing, mutation, selection.

The article discusses the task of classification, the need to fulfill conditions and relations on the set. The relevance of the fragmentary structure of the task was emphasized. It was illustrated an example of a classification problem that will be considered in this paper, and the task of covering stars with stars that occurs in many economic applications. As elementary fragments all edges appear to the graph. The conditions for joining an edge – this edge is the beam of an already existing star or has no common vertices with already built-up stars of coverage. The emphasis is on the lack of optimality of such a solution. The relevance of the fragmentary structure of the task was emphasized. The possibility of constructing classes is given, considering the entire list of objects classified in a certain sequence. Based on the fragmentary structure, it is proposed to use an evolutionary algorithm. The work analyzed the examples of the practical application of the evolutionary (genetic) algorithm for solving the classification problems. The prospect of using a genetic algorithm for finding optimal classifications is estimated. The following is a step-by-step sequence of operations of the genetic algorithm with examples: selection,

crossing, mutation, selection. Examples of key operators, namely crossover and mutations, are given. The detailed algorithm of the evolutionary model is clearly illustrated. The principle of the evolutionary-fragmentary algorithm is written in detail. As a set of admissible solutions, a subset of maximal fragments on a given fragmentary structure is considered. The mechanism of testing the quality of the genetic algorithm on a fragmentary structure, which is reduced to the enumeration of many variants, is determined.

## 1. Постановка проблеми

Однією з найбільш розповсюджених математичних задач сьогодення є задача класифікації. Вона виникає при аналізі результатів досліджень, при проектуванні й прогнозуванні, при оцінці й прийнятті рішень. У загальному випадку вона є досить складною та суперечливою. Для її вирішення доцільно використовувати метаевристики різних типів [1].

Ефективний виявляється підхід до задачі класифікації на основі теорії фрагментарних структур [2]. Як і будь-яка метаевристика, фрагментарний підхід поступається класичним наближеним алгоритмам й не може гарантувати близькість рішення, що знаходиться з його допомогою, до оптимального. Але простота реалізації й висока швидкість збіжності дозволяє відшукувати за допомогою такого методу гарні наближені рішення багатьох складних оптимізаційних задач [3-5].

У даній роботі розглядається варіант використання комбінації фрагментарного й еволюційного алгоритмів для пошуку оптимальних класифікацій.

## 2. Аналіз останніх досліджень і публікацій

У наш час відома велика кількість різноманітних методів класифікації, ефективність яких суттєво залежить від специфіки предметної області, в якій ця задача сформульована, й особливостей вихідної інформації.

У роботах А. Зенкіна, В. Вапника, Ю. Журавльова розглянуто приклади теоретичного застосування генетичних алгоритмів для вирішення задач класифікації [6-8].

Праці таких вчених, як С. Айвазян, М. Айзерман, Н. Загоруйко, В. Мазуров, Л. Растрингін, присвячені практичному застосуванню генетичних алгоритмів [9-13]. У роботі Д. Голдберга було запропоновано використання оператора схрещування [14].

Ряд підходів до задачі класифікації розглянуто у роботі [15].

Основна ідея пошуку «хорошої» класифікації полягає у введенні критерію оптимальності. У даному випадку задача класифікації зводиться до задачі пошуку оптимального рішення на деякій множині допустимих рішень. Далі починають працювати всілякі методи оптимізації.

## 3. Формулювання ідей

Метою статті є оцінка перспективи використання генетичного алгоритму для пошуку оптимальних класифікацій.

## 4. Виклад основного матеріалу дослідження

Задача класифікації на множині  $X$  – це задача розбиття множини  $X$  на непересічні класи, тобто задача відшукування такого сімейства підмножин  $\{X_\alpha\}$  множини  $X$ , для якого виконуються наступні вимоги:

- 1)  $X_\alpha \subseteq X, X_\alpha \neq \emptyset$ ;
- 2)  $\bigcap_\alpha X_\alpha = X$ ;
- 3)  $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$  при  $\alpha \neq \beta$ .

Вимога непустоти класів є несуттєвою. Ми вважатимемо однаковими такі класифікації, які відрізняються між собою лише пустими елементами.

Нагадаємо, що відношенням еквівалентності на множині  $X$  називається будь-яке бінарне рефлексивне, симетричне й транзитивне відношення на цій множині, тобто відношення « $\sim$ », яке визначається такими властивостями:

- $$\begin{aligned} \forall x \in X \quad x &\sim x; \\ \forall x, y \in X \quad x &\sim y \Rightarrow y \sim x; \\ \forall x, y, z \in X \quad x &\sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z. \end{aligned}$$

Кожна класифікація породжує природне відношення еквівалентності на множині  $X$ . А саме: два елементи еквівалентні, в тому й тільки тому випадку, коли вони належать одному класу.

Приклад задачі класифікації, який розглядатиметься у даній роботі – це задача покриття графа зірками, яка виникає у багатьох економічних додатках [16].

Нехай заданий граф, ребра якого зважені невід'ємними числами. Задача полягає у знаходженні набору зірок в цьому графі, які містять всі вершини графа й сумарна вага ребер яких мінімальна. Ця задача фактично є задачею класифікації. Класом в цьому випадку є всі вершини зірки. Причому у кожному класі виокремлений представник – центр зірки.

Зірки упорядковуються довільним чином. На черговому кроці алгоритму вибирається перша зірка у послідовності зірок, яка не має спільних вершин з вже знайденими фрагментами.

Ідея фрагментарного алгоритму полягає у наступному: кожне допустиме рішення задачі є фрагментом, який представляється як об'єднання неподільних частин – елементарних фрагментів. На множині фрагментів вводиться операція приєднання, яка дозволяє отримати новий фрагмент шляхом додавання до існуючого одного з елементарних фрагментів. Фрагментарний алгоритм – це алгоритм пошуку максимального по включенню фрагмента.

Більш строго:

а) Визначається множина фрагментів  $\{f\}$  й зовнішня операція  $\oplus$  об'єднання фрагментів. Кожне допустиме рішення задачі складається зі скінченного числа фрагментів, об'єднаних шляхом зовнішньої операції.

б) Задається ряд відношень лінійного порядку  $\{ \}$  на множині фрагментів та ефективна процедура впорядкованих фрагментів, яка дозволяє отримувати впорядкування фрагментів за різними порядками у відповідності з обраними правилами.

в) Задаються умови приєднання фрагмента, які можуть бути як детермінованими, так й динамічними, що змінюються на кожному кроці. Для вже обраної підмножини фрагментів задається ефективна процедура перевірки можливості приєднання фрагмента, що не належить обраній підмножині.

Таким чином, фрагментарний алгоритм дозволяє побудувати допустиме рішення задачі за лінійний за числом фрагментів час.

Покажемо, що задача покриття графа зірками має фрагментарну структуру та, відповідно, будь-яке допустиме рішення задачі може бути отримане шляхом застосування фрагментарного алгоритму.

В якості елементарних фрагментів виступають усі ребра графа. Умови приєднання ребра – це ребро є променем вже існуючої зірки або не має спільних вершин із вже побудованими зірками покриття. Легко показати, що шляхом застосування фрагментарного алгоритму при певному виборі послідовності ребер можна отримати будь-який набір зірок в графі, тобто будь-яке допустиме рішення задачі класифікації. Однак таке рішення не обов'язково є оптимальним. З метою пошуку оптимального рішення опишемо комбінацію еволюційного та фрагментарного алгоритмів.

Еволюційні (генетичні) алгоритми детально розглядалися в чисельних публікаціях [15, 16]. Генетичні алгоритми – це оптимальний метод, що базується на еволюції популяції «особин». У 1975 р. вийшла книга Дж. Холланда «Адаптація в природних та штучних системах», у якій було запропоновано генетичний алгоритм [16].

Для ряду оптимізаційних задач вдалося запропонувати достатньо ефективні процедури пошуку оптимальних рішень, що ґрунтуються на застосуванні еволюційних алгоритмів. Для реалізації еволюційного алгоритму необхідно виділити ряд об'єктів та процедур, сукупність яких називатимемо еволюційною моделлю [15]. Основні складові еволюційної моделі наступні:

– базова множина рішень – множина допустимих рішень  $X$ , на якій відшукується оптимальне рішення задачі;

– оператор побудови початкової популяції: процедура, яка дозволяє виокремити на множині всіх допустимих рішень її підмножину  $Y \subseteq X$  для наступної еволюції;

– критерій селекції – алгоритм, який дозволяє порівнювати за якістю рішення в рамках заданої популяції;

– оператор кросовера  $K: X \times X \rightarrow X$ , що дозволяє за двома допустимими рішеннями-батьками побудувати нове рішення-потомок з множини допустимих рішень;

– оператор мутації  $M: X \rightarrow X$ ;



- оператор відбору, який виокремлює множину пар в  $Y$  для виконання операції кросовера;
- оператор еволюції, що дозволяє будувати нові популяції з множини батьків та потомків;
- правило зупинки, що визначає умову зупинки еволюційного алгоритму.

Опишемо коротко принцип роботи еволюційного алгоритму. На початковому кроці за допомогою оператора початкової популяції будується множина рішень  $Y_0$ . На кожному черговому кроці передбачається заданою деяка множина допустимих рішень – поточна популяція. На першому кроці це множина  $Y = Y_0$ . Для кожного з елементів

множини  $Y$  розраховується значення критерію селекції. Далі за допомогою оператора відбору у поточній популяції  $Y$  обирається множина пар для кросовера. До кожної пари з обраної множини пар застосовується оператор кросовера, а потім до результату кросовера застосовується оператор мутації. Таким шляхом знаходиться множина елементів – потомків  $\tilde{Y}$ .

До проміжної популяції  $Y \cup \tilde{Y}$ , яка є об'єднанням поточної популяції й множини потомків, застосовується оператор еволюції, який виділяє на цій множині нову поточну популяцію. Процес еволюції повторюється до тих пір, поки не буде виконана умова зупинки еволюційного алгоритму. Блок-схема еволюційного алгоритму наведена на рис. 1.

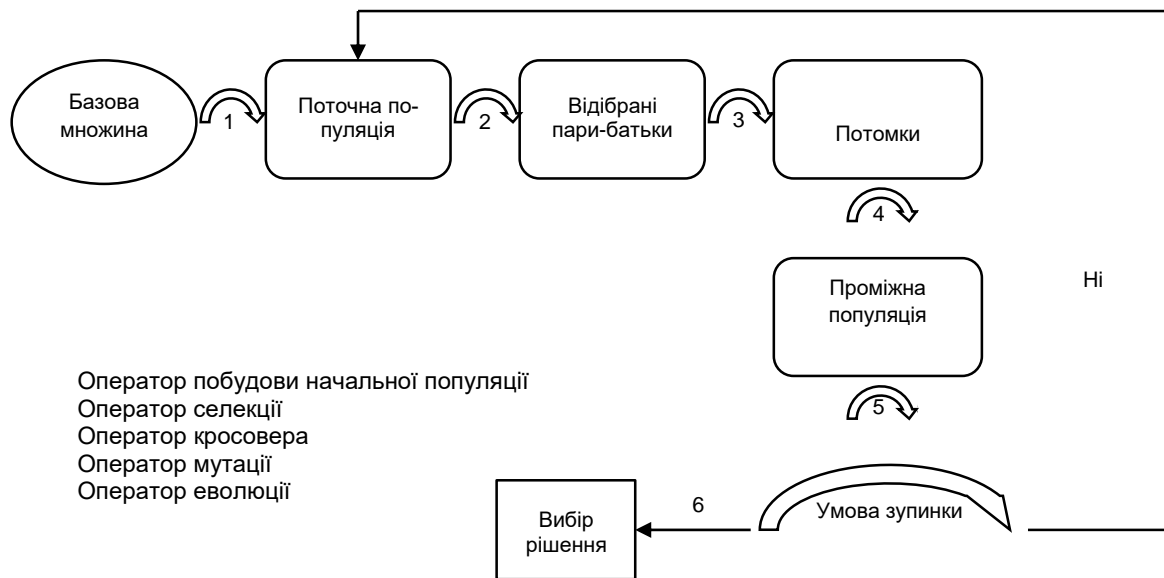


Рис. 1. Еволюційна модель

Властивості фрагментарних структур дозволяють побудувати особливий клас еволюційних алгоритмів на фрагментарних структурах – ЕВФ-алгоритми.

ЕВФ-алгоритм є комбінацією еволюційного й фрагментарного алгоритму. Опишемо еволюційну модель та принцип дії такого алгоритму.

В якості множини допустимих рішень розглядається підмножина максимальних фрагментів на заданій фрагментарній структурі. Кожний фрагмент з цієї підмножини визначається як результат роботи фрагмен-

тарного алгоритму за деякої заданої перестановки елементарних фрагментів. Таким чином, будь-якому допустимому рішенню відповідає визначена перестановка чисел  $1, 2, \dots, N$ , де  $N$  – кількість елементарних фрагментів. Для кожного допустимого рішення визначено значення цільової функції.

Базова множина  $X$  еволюційної моделі – це множина  $S_N = \{i_1, i_2, \dots, i_N\}$  всіх перестановок чисел  $1, 2, \dots, N$ . Оператор побудови початкової популяції виокремлює підмножину заданої потужності  $Q$  з множини  $X$ .

Правило обчислення критерію селекції влаштовано наступним чином: за заданою

перестановкою фрагментів за допомогою фрагментарного алгоритму будується максимальний допустимий фрагмент. Розраховується значення цільової функції задачі для цього фрагмента.

Опишемо оператор кросовера.

Нехай  $U = (u_1, u_2, \dots, u_N)$  і  $V = (v_1, v_2, \dots, v_N)$  – дві довільні перестановки. Перестановка-потомок будується наступним чином: послідовності  $U$  й  $V$  проглядаються з початку. На  $k$ -му кроці обирається найменший з перших елементів послідовності й додається у нову перестановку-потомок. Потім цей елемент видаляється з двох послідовностей-батьків. Наприклад,

$$K((2,3,4,7,8,1,6,5), (3,4,6,2,1,5,8,7)) = \\ = (2,3,4,6,1,5,7,8).$$

Оператор мутації  $M$  виконує випадкову транспозицію (заміну місцями двох елементів) у перестановці.

Оператор селекції обирає випадковим чином набір пар із заданого числа пар у множині перестановок поточної популяції.

Оператор еволюції впорядковує елементи проміжної популяції у послідовність за зменшенням значення критерію селекції. У якості нової поточної популяції обираються перші  $Q$  елементів послідовності.

Звичайне правило зупинки – кількість поколінь досягло граничної межі  $L$ . Найкраща за значенням критерію селекції перестановка з останньої побудованої популяції визначає наближене рішення задачі.

Генетичний алгоритм на фрагментарній структурі є евристичним. Фактично він зводиться до перебору багатьох варіантів. Оцінити якість подібного алгоритму за відсутності точних алгоритмів рішення практично неможливо. Розумно лише порівнювати роботу цього алгоритму з іншими наближеними алгоритмами на великих серіях задач.

Пропонується наступний механізм перевірки якості фрагментарно-генетичного алгоритму на визначеному класі задач.

Випадковим чином будується послідовність задач даного класу.

Для кожної задачі цієї послідовності шукається рішення двома шляхами:

1) впорядкування фрагментів відбувається шляхом застосування генетичних алгоритмів;

2) впорядкування фрагментів відбувається довільним чином.

Кількість розіграшів у другому випадку дорівнює кількості розміру популяції, породженій шляхом застосування генетичного алгоритму у другому випадку.

Якість генетичного алгоритму визначається відношенням числа задач, для яких рішення, отримане за допомогою генетичного алгоритму, краще рішення, отриманого випадковим пошуком, до загального числа задач серії.

Запропонований підхід є універсальним й дозволяє застосовувати один й той самий еволюційний алгоритм до будь-яких оптимізаційних задач на скінченних фрагментарних структурах.

## 5. Висновки

Еволюційний алгоритм відображає синтез алгоритмів класифікацій та оптимізацій функціоналу, що характеризує якість класифікації.

Метод є орієнтованим на обробку багатомірних масивів інформації, особливостями якої є висока розмірність простору ознак та малий об'єм вибірки об'єктів. Пропонований метод класифікації дозволяє не проводити попереднього зниження розмірності простору ознак, що, своєю чергою, дозволяє виключити втрату значимої інформації й врахувати внутрішні зв'язки у інформаційних масивах, що розглядаються.

Результати дозволяють зробити висновок, що підхід до пошуку оптимального рішення ряду дискретних оптимізаційних задач, який ґрунтується на використанні комбінації фрагментарного й генетичного алгоритмів, є перспективним.

Цей підхід особливо зручний у системах підтримки прийняття рішень, коли останнє питання щодо якості того чи іншого рішення вирішується на основі висновку ОПР.

## Література

1. Скобцов Ю. А. Основы эволюционных вычислений: учеб. пособ. Донецк: ДонНТУ, 2008. 326 с.
2. Kozin I. V., Maksyshko N. K., Perepelitsa V. A. Fragmentary Structures in Discrete Optimization Problems. *Cybernetics and Systems Analysis November*. 2017. Vol. 53. P. 931–936.
3. Козин И. В., Батовский С. Е., Сардак В. И. Фрагментарная модель и эволюционный алгоритм 2d упаковки объектов. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2017. Вип. 15. С. 74–79.
4. Козин И. В., Кривцун Е. В., Пинчук В. П. Эволюционно-фрагментарная модель задачи трассировки. *Кибернетика и системный анализ*. 2015. № 3. С. 35–50.
5. Козин И. В., Полюга С. И. Фрагментарные модели для некоторых экстремальных задач на графах. *Математические машины и системы*. 2014. № 1. С. 143–150.
6. Зенкин А. А., Зенкин А. И. Задача построения оптимальных классификаций. *Сборник работ по математической кибернетике ВЦ АН СССР*. 2010. С. 20–33.
7. Вапник В. Н., Червоненкис А. Я. Теория распознавания образов (статистические проблемы обучения). Москва: Наука, 1974. 313 с.
8. Журавлев Ю. И. Избранные научные труды. Москва: Изд-во Магистр, 1998. 360 с.
9. Айвазян С. А., Бухштабер В. М. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности. Москва: Финансы и статистика, 1989. 276 с.
10. Айзерман М. А., Браверманн Э. М. Метод потенциальных функций в теории обучения машин. Москва: Наука, 1970. 356 с.
11. Загоруйко Н. Г. Прикладные методы анализа данных и знаний. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. 250 с.
12. Мазуров В. Д. Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации. Москва: Наука, 1990. 290 с.
13. Растрингин Л. А., Эренштейн Р. Х. Метод коллективного распознавания. Москва: Энергоиздат, 1981. 325 с.
14. Goldberg D. E. Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning. Addison Wesley Longman, 1989. 293 p.
15. Перепелиця В. О., Козін І. В., Терещенко Е. В. Задачі класифікації: підходи, методи, алгоритми. Запоріжжя: Поліграф, 2008. 188 с.
16. Максишко Н. К., Заховалко Т. В. Моделі та методи розв'язання прикладних задач покриття на графах та гіперграфах. Запоріжжя: Полиграф, 2009. 244 с.
17. Holland J. H. Adaptation in natural and artificial systems. Ann Arbor. MI: University of Michigan Press, 1975. 300 p.

## References

1. Skobtsov, Y. (2008). Fundamentals of evolutionary computing: textbook. benefits. Donetsk: DonNTU. (in Russian).
2. Kozin, I. V., Maksyshko, N. K. & Perepelitsa, V. A. (2017). Fragmentary Structures in Discrete Optimization Problems. *Kibernetika i systemniy analiz*, Vol. 53, pp. 931–936.
3. Kozin, I. V., Batovsky, S. E. & Sardak, V. I. (2017). Fragment model and evolutionary algorithm for 2d packing of objects. *Mathematichne ta kompyuterne modelyuvannya. Seriya: Physiko-matematychni nauky*, Vol. 15, pp.74–79. (in Russian).
4. Kozin, I. V., Krivtsun, E. V. & Pinchuk, V. P. (2015). An evolutionary-fragmented model of the trace problem. *Kibernetika i systemniy analiz*, No. 3, pp. 35–50. (in Russian).
5. Kozin, I. V. & Polyuga, S. I. (2014). Fragment models for some extremal problems on graphs. *Mathematicheskkiye mashiny i sistemy*, No. 1, pp. 143–150. (in Russian).
6. Zenkin, A. A. & Zenkin, A. I. (2010). The problem of constructing optimal classifications. *Sbornik rabot po matematicheskoi kibernetike VTS AN USSR*, pp. 20–33. (in Russian).
7. Vapnik, V. N. & Chervonenkis, A. Y. (1974). Theory of pattern recognition (statistical problems of learning). Moscow: Nauka. (in Russian).

8. Zhuravlev, Y. (1998). Selected scientific works. Moscow: Magister Publishing House. (in Russian).
9. Ayvazyan, S. A. & Bukhstaber, V. M. (1989). Applied statistics: Classification and reduction of dimension. Moscow: Finance and Statistics. (in Russian).
10. Aizerman, M. A. & Bravermann, E. M. (1970). The method of potential functions in the theory of machine learning. Moscow: Nauka. (in Russian).
11. Zagoruiko, N. G. (1999). Applied methods of data and knowledge analysis. Novosibirsk: Publishing House of the Institute of Mathematics. (in Russian).
12. Mazurov, V. D. (1990). The method of committees in optimization and classification problems. Moscow: Nauka. (in Russian).
13. Rastrigin, L. A. & Erenstein, R. K. (1981). The method of collective recognition. Moscow: Energoizdat. (in Russian).
14. Goldberg, D. E. (1989). Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning. Addison Wesley Longman. (in Russian).
15. Perepelitsya, V. O., Kozin, I. V. & Tereshchenko, E. V. (2008). Problems of classification: approaches, methods, algorithms. Zaporizhzhia: Poligraf. (in Ukrainian).
16. Maksishko, N. K. & Zakhovalko, T. V. (2009). Models and methods for developing applied tasks in graphs and hypergraphs. Zaporizhzhia: Polygraph. (in Ukrainian).
17. Holland, J. H. (1975). Adaptation in natural and artificial systems. Ann Arbor. MI: University of Michigan Press.

UDC 0048:681.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-08

## DESIGN SOUND CLASSIFICATION IOT SYSTEM WITH GENETIC ALGORITHMS

A. G. Kryvokhata, O. V. Kudin, V. I. Gorbenko

Zaporizhzhia National University  
avk256@gmail.com

**Key words:**

Acoustic Data Classification, Convolutional Neural Network, Ensemble Learning, IoT.

This paper discusses the models and methods of machine learning used in IoT (Internet of Things) systems. Particularly some issues of methods development for sound data classifying of various nature, such as speech, music, environmental sounds etc. A sound classification subsystem could be implemented in the various Smart City, Smart Farming systems etc. Development of IoT software includes following challenges: the lack of computational resources, the relevant small RAM memory size etc. Basically, an automated sound classification system could be decomposed into four parts: the audio representation, the features extraction, the machine learning algorithm and the accuracy estimation. This paper deals with a machine learning algorithms. We use a convolutional neural network for sound classification and the Snapshot method for ensemble learning. A genetic algorithm is a typical strategy for both neural network and ensembles structural optimization. Various methods of the solution representation and crossover functions have been studied in order to find optimal configuration of genetic operators. The objective of the paper is to develop the optimal classifier for embedded sound classification system. The solution representation – genotype – is the set of neural network hyper-parameters includes the number and the type of neural network layers, the type of activation functions, the initial values of weights, the learning rate, etc. Both the Snapshot ensemble method and combination of different neural networks are used for ensemble learning. The key idea of this paper is the optimization with genetic algorithms both neural networks and the ensemble construction method. We compare different genetic operators in order to obtain optimal solution for IoT system.

---

## ВИКОРИСТАННЯ ГЕНЕТИЧНИХ АЛГОРИТМІВ ПРИ РОЗРОБЦІ ІОТ СИСТЕМ КЛАСИФІКАЦІЇ ЗВУКУ

A. G. Кривохата, O. B. Кудін, B. I. Горбенко

Запорізький національний університет  
avk256@gmail.com

**Ключові слова:**

Класифікація звуку, згортоква нейронна мережа, ансамблеве навчання, інтернет речей.

У роботі розглядаються моделі та методи машинного навчання, що застосовуються в системах IoT (Internet of Things), зокрема для вирішення проблеми класифікації акустичних даних різного походження, таких як мова, музика, звуки природи тощо. Підсистеми класифікації звуку можуть бути впроваджені у різних системах інтернету речей, наприклад, Smart City, Smart Farming тощо. Розробка програмного забезпечення IoT включає такі виклики: обмеженість обчислювальних ресурсів, відносно невеликий об'єм оперативної пам'яті тощо. Отже, існує потреба у розробці оптимального класифікатора з найвищою здатністю до узагальнення. Здебільшого автоматизована система класифікації звуку може бути розбита на чотири частини: звукове подання, функції вилучення ознак, алгоритм машинного навчання та оцінка точності. Основна увага в цій роботі приділяється алгоритмам машинного навчання. Використовуються згорткові нейронні мережі для класифікації звуку та порівнюються декілька підходів до ансамблевого навчання. Генетичні алгоритми є типовою стратегією як для структурної оптимізації нейронних мереж, так і для їх ансамблів. Для побудови оптимальної конфігурації генетичних операторів розглянуто різні методи представлення

розв'язку та кросовер-функції. Метою роботи є розробка оптимального класифікатора звуку для вбудованих систем. Представлення розв'язку – генотип – це сукупність гіперпараметрів нейронної мережі, що включає кількість та тип шарів нейронної мережі, тип функцій активації, початкові значення ваг, швидкість навчання тощо. Метод ансамблю Snapshot і комбінація різних нейронних мереж використовуються для ансамблевого навчання. Ключова ідея даної роботи – оптимізація засобами генетичних алгоритмів як нейронних мереж, так і методу побудови ансамблю. У роботі порівнюються різні генетичні оператори кросовера з метою отримання оптимальної конфігурації IoT системи.

## 1. Introduction

The Internet of Things (IoT) and Machine Learning (ML) are a promising technologies for automation in the different domains e.g. Smart Cities, Smart Farming etc. Such systems could be used for noise emission determining, criminal activity detecting, animal classification, livestock tracking and so on. There are various methodologies of IoT and ML implementation to the practice use cases [1-3]. In this paper we focus on a machine hearing system. The system allows to classify natural sounds in the Smart Farming software application. Manual processing of the sound data is complicated; therefore, our goal is to *develop automatic machine hearing systems, particularly, sound classification software*. Such systems have controversial requirements such as the real time classification, the high accuracy and compatibility with single-board computers, e.g. Raspberry Pi, Odroid etc. Therefore, the software for IoT and ML applications should be sufficiently efficient and not demanding on large computing resources.

## 2. The aim and objectives of the study

Basically, automated audio detecting and classification systems could be roughly decomposed into four parts: audio representation, features extraction, machine learning algorithm, and accuracy estimation. The audio representation stage implies that a raw signal is subject to segmentation into shorter signal chunks by some windowing process. Typically, at this stage, the original acoustic signal is converted into the frames of a fixed length. The aim of the feature extraction stage is to receive a compact representation of the acoustic characteristics of a signal. This stage exploits special coefficients such as the Zero-crossing rate, the Spectrum shape, the Short-Time Fourier Transform and Mel-frequency cepstral coefficients. Audio

classification traditionally involves such machine learning methods like K-means, support vector machine (SVM), decision trees etc [4, 5]. During the last two decades the deep learning based methods have gained popularity for audio tagging also. The methods based on convolutional neural networks or recurrent neural networks should be referenced in this context. Deep neural networks could be used on both raw acoustic signal and features extracted from it. The accuracy estimation stage deploys quality assessment methods [5].

The aim of this paper is to develop a proof-of-concept system for the classification of acoustic data on the basis of convolutional neural networks and to optimize its hyper-parameters using the genetic algorithm. The system classifies acoustic data such as “vehicle noise”, “human speech”, “siren”, “dog bark”, “engine sound” and could be used in Smart Farming applications as a part of sound event detection system.

In order to reach the mentioned aim, the following objectives were formulated for the study:

- to review state-of-the-art systems in the Smart Farming;
- to develop classification system using convolutional neural networks;
- to develop implementation of snapshot ensemble method for accuracy improving;
- to outline a direction for further development of machine hearing systems in Smart Farming.

## 3. Motivation and state of the art

Sound event detection and classification systems become a significant part of modern Smart Farming applications. Such software could be used to distinguish between species of insects or to detect some vermin animals.

For example, there are papers dedicated to identification bee's state by producing sounds in the beehive [6-10] or sound analysis in the livestock farming [11]. SVM and Convolutional neural networks are used in [6-10] for sound classification. There are the multi-sensor platform includes sensors for temperature, humidity, weight, CO<sub>2</sub> and the microphone. The system is deployed with hardware including the Raspberry Pi, the sound card and sensor shields [10].

Generally, the number of articles in the Smart Farming field has been increasing in the last decade [12, 13]. *This is due* to the development of machine learning methods and technology of single-board computers such as Raspberry Pi, Odroid etc. For example, the newest revision of Raspberry Pi 4 includes 4 GB RAM and CPU 1,5 GHz. This hardware allows neural networks deploying on a single-board computer and real-time calculations performing.

#### 4. Literature review

Among the large number of review papers on the subject of the machine hearing systems development, there are several that are the most comprehensive. Thus, review articles [14-16] provide a description of the components of an automatic sound classification system, which contains pre-processing modules, feature extraction, training algorithm and calculation module.

In [14], approaches to signal feature extraction are discussed in details. There are methods based on the physical properties of the signals and the characteristics of the human perception of sounds. Feature extraction methods represent the acoustic signal in the time, frequency, cepstral and wavelet domains.

Reviews [17, 18] provide an analysis of general approaches and publications for the automatic classification of music by genre. The majority of the most informative tags that could be used as classes in training classifiers are discussed. The most commonly used sources of labeled acoustic data that could be included in training systems are discussed. Typically, these are open music databases on the Internet that are recorded by users, from social network, and data that is generated specifically for the purpose of performing machine hearing tasks. In [18], the issue of assessing the effectiveness of genre music classification systems is discussed.

In recent years, more and more works have been devoted to the use of neural networks both in the feature extraction and the classification [16, 19-22]. Convolutional neural networks allow obtain both pre-processed and raw acoustic data sets. The effectiveness of this approach is explained by the layered architecture of convolutional neural networks. There are several types of layers: convolution layers that distinguish a certain type of feature, pooling layers that reduce dimension, and several fully dense layers in which classification is performed [23]. The disadvantages of this approach include the complexity of setting up neural networks with complex architecture and the demand for computing resources.

Ensemble training involves combining several models, such as classifiers, into a common model, followed by alignment of the results of all models by some algorithm. Studies show that the efficiency of the ensemble is usually higher than the efficiency of individual models [24]. For this approach the lack of correlation between the models of the ensemble is a mandatory requirement.

The combination of different types of classifiers using (e.g. decision trees, SVMs, Bayes classifiers, etc.) and a common prediction forming by simple voting, a mean calculating or special machine learning algorithm is one of the approaches to building ensembles. An alternative approach is to train the same types of classifiers on different subsets of training data, with further averaging of the outcome of the forecast. This approach named Bagging (bootstrap aggregating). Another class of ensemble teaching methods is Boosting. The consistent using of such class methods as AdaBoost and gradient boosting for train the classifiers reinforces the result [24].

Recently, the use of ensembles of deep neural networks has led to the development in the practical application of machine learning [17, 18]. But despite its high accuracy, ensemble training of neural networks is not as widely used as ensembles of more classical machine learning methods. This is due to the high demand for time and space resources.

Most of the works devoted to the use of an ensemble of neural networks are aimed to study the methods for generating a common result from the results of trained classifiers.

In [17] it has been proposed to train one network instead of training  $M$  neural networks. During applying the stochastic gradient descent method the basic idea is to store the values of the weight matrix in case the hitting of  $M$  local points. Thereafter, a corresponding neural network is generated for each of the  $M$  weight matrices. Thus, the learning time of the ensemble is almost the same to the learning time of a single neural network.

## 5. Methodology

The workflow of developing an automated sound classification has shown in the Fig. 1.

In practice, the direct sound analysis in the time domain (amplitude-time dependence) is almost not used because it is not efficient enough and requires additional time and space resources. For the most rational presentation of an acoustic signal, classical methods of digital signal processing are used. These methods include transformations that decompose a signal by orthogonal basis functions: the Fourier transform, Hartley, Mellin, wavelets etc., as well as various signal attributes that are calculated on the basis of these transformations, for example, mel-cepstral coefficients, centroids, signal energy etc. [5]. The mel, bar etc. are the frequently used units that to relate for the psychophysical features of human perception of frequency and volume. For example, mel is a unit of subjective sound frequency to perceive by humans.

The data preprocessing stage includes calculating of mel frequency cepstral coefficient (MFCC) for the giving sound files. This approach allows to unify and simplify the sound files presentation in the memory. Further we feed MFCC arrays to the convolutional neural net. It is important at this stage to configure the network optimally for the most compact storage. This is due to the need to use platforms such as Raspberry Pi to deploying neural network.

To test the proposed approaches, we use data from [www.kaggle.com](http://www.kaggle.com), namely the Urban Sound Classification dataset. The dataset contains 3449 wav audio files for training and system testing. The training sample contains sound files related to 9 categories and these are sounds like traffic noise, car sirens and human speech etc. The minimum number of files in one category is 94, the maximum is 300. The duration of audio files is mostly 4 seconds.

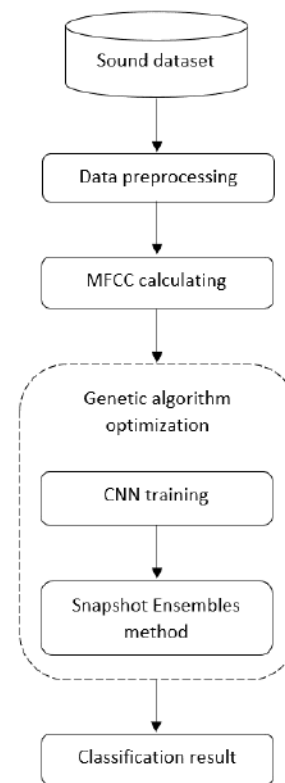


Figure 1. Sound classification system workflow

Thus, after training, the system could be deploy on the single-board computer and could be use autonomously as part of Smart Farming systems.

## 6. Numerical Result

The Keras library is used for a neural network software implementation in Python. The Librosa library is employed For data preprocessing. The source code for sound data preparation is shown in the Fig. 2.

```

def PrepareData(self, df, config):
    X = np.empty(shape=(df.shape[0], config.dim[0], config.dim[1], 1))
    input_length = config.audio_length
    for i, fname in enumerate(df):
        print(fname)
        file_path = self.TRAIN_DIR + '/' + str(int(fname)) + ".wav"
        data, _ = librosa.core.load(file_path, sr=config.sampling_rate,
        res_type="kaiser_fast")
        data = librosa.feature.mfcc(data, sr=config.sampling_rate,
        n_mfcc=config.n_mfcc)
        data = np.apply_along_axis(np.mean, 1, data)
        data = data.reshape(config.dim[0], config.dim[1])
        data = np.expand_dims(data, axis=-1)
        X[i, :] = data
    return X
  
```

Figure 2. MFCC calculation method

As mentioned above, an important step is to do optimal configuration the hyper-parameters of the neural network. A generic algorithm is a



general method here. In this work we are going to determine genetic operators as follows. We use different neural network and Snapshot Ensemble hyper-parameters such as number of dense layers, number of convolutional layers, number of units in each layer, type of pooling layer, type of activation function, number of networks in the Snapshot Ensemble.

We use binary chromosome encoding for representation of possible solution. Crossover operators that we use are the following: single point, two-point, uniform.

The results of computational experiments with different crossover operators are given below in the table 1. We suppose that the best snapshot is used after Snapshot Ensemble method. We also compare different approaches to snapshots averaging. The results are shown in the table 2.

**Table 1.** Accuracy with different crossover operators

Crossover operator	Accuracy
single point crossover	0,954
two-point crossover	0,942
uniform crossover	0,877

**Table 2.** Snapshot averaging method

Method	Accuracy
best snapshot	0,954
Average	0,940

Thus, we can see that best configuration of the system is obtained using single point crossover and best snapshot averaging method.

## 7. Conclusion and discussion

A convolutional neural network ensemble is built to solve the problem of acoustic data classification. The accuracy of the model on the test data set is 95%. Optimal network structure includes two packets of convolution-activation-sub-sampling layers.

The system can be used in Smart Farming or Smart City applications to filter out unnecessary sounds or as part of the sound detection system.

The basic distinction of this paper from papers [25] is that we are studying influence of different parameters of genetic algorithms like type of crossover operator.

The prospect of further research is related to the extension of the considered approach to sound data of a more complex structure.

## References

1. Bagri, M. & Aggarwal, N. (2019). Machine Learning for Internet of Things. *International Journal Of Engineering And Computer Science*, Vol. 8, Issue 7, pp. 24680–24782. doi: 10.18535/ijecs/v8i07.4346
2. More, S. & Singla, J. (2019). Machine Learning Techniques with IoT in Agriculture. *International Journal of Advanced Trends in Computer Science and Engineering*, Vol. 8, Issue 3, pp. 742–747. doi: <https://doi.org/10.30534/ijatcse/2019/63832019>
3. Piccialli, F., Cuomo, S., di Cola, V.S. & Casolla, G. (2019). A machine learning approach for IoT cultural data. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*. doi: <https://doi.org/10.1007/s12652-019-01452-6>
4. Kryvokhata, A. G., Kudin, O. V. & Lisnyak, A. O. (2018). A Survey of Machine Learning Methods for Acoustic Data Classification. *Visnyk of Kherson National Technical University*, Vol 3, Issue 66, pp. 327–331 (in Ukrainian).
5. Camastra, F. & Vinciarelli, A. (2015). *Machine learning for Audio. Image and Video analysis*. London: Springer-Verlag.
6. Cecchi, S., Terenzi, A., Orcioni, S., Riolo, P., Ruschioni, S. & Isidoro N. (2018). A Preliminary Study of Sounds Emitted by Honey Bees in a Beehive. 144th AES convention. Retrieved from <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=19498>
7. Nolasco, I. Terenzi, A., Cecchi, S., Orcioni, S., Bear, H. L. & Benetos E. (2018). Audio-based identification of beehive states. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/1811.06330>.
8. Nolasco, I. & Benetos E. (2018). To bee or not to bee: investigating machine learning approaches for beehive sound recognition. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/1811.06016>.
9. Cejrowski, T., Szymaski, J., Mora, H. & Gil D. (2018) Detection of the Bee Queen Presence using Sound Analysis. In *Intelligent Information and Database Systems. ACIIDS. Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 10752. Springer.

10. Cecchi, S., Terenzi, A., Orcioni, S., Spinsante, S., Primiani, V. M., Moglie, F., Ruschioni, S., Mattei, C., Riolo, P. & Isidoro, N. (2019). Multi-sensor platform for real time measurements of honey bee hive parameters. *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science*, Vol. 275. doi: <https://doi.org/10.1088/1755-1315/275/1/012016>.
11. Bishop, J. C., Falzon, G., Trotter, M., Kwan, P. & Meek, P. D. (2017). Sound analysis and detection, and the potential for precision livestock farming - a sheep vocalization case study, 1st Asian-Australasian Conference on Precision Pastures and Livestock Farming. doi: <https://doi.org/10.5281/zenodo.897209>.
12. Wolfert, S. Ge, L., Verdouw C. & Bogaardt, M.-J. (2017). Big Data in Smart Farming – A review. *Agricultural Systems*, Vol. 153, pp. 69–80. doi: <https://doi.org/10.1016/j.agsy.2017.01.023>.
13. Hallett, S. H. (2017). Smart cities need smart farms. *Environmental Scientist*, Vol. 26, Issue 1, pp. 10–17. Retrieved from <https://www.the-ies.org/resources/feeding-nine-billion>
14. Alías, F., Socoró, J.C. & Sevillano, X. (2016). A review of physical and perceptual feature extraction techniques for speech, music and environmental sounds. *Applied Sciences*, Vol. 6(5):143. doi: <https://doi.org/10.3390/app6050143>
15. Bertin-Mahieux, T., Eck, D. & Mandel, M. (2011). Automatic tagging of audio: the state-of-the-art. *Machine audition: principles, algorithms and systems*. IGI Global, pp. 334–352. doi: <https://doi.org/10.4018/978-1-61520-919-4.ch014>.
16. Salamon, J., Jacoby, C. & Bello, J. P. (2017). A dataset and taxonomy for urban sound research. *Proceedings of the 22nd ACM international conference on Multimedia*, pp. 1041–1044. doi: <https://doi.org/10.1145/2647868.2655045>
17. Huang, G., Li, Y., Pleiss, G., Liu, Z., Hopcroft, J. E. & Weinberger, K. Q. (2017). Snapshot Ensembles: Train 1, Get M for Free. Retrieved from <http://arxiv.org/abs/1704.00109>
18. Stastný, J., Skorpil, V. & Fejfar, J. (2013). Audio Data Classification by Means of New Algorithms. 36th International conference on Telecommunications and Signal Processing 2013, Rome, Italy, pp. 507–511. doi: <https://doi.org/10.1109/TSP.2013.6613984>.
19. Xu, Y., Kong, Q., Huang, Q., Wang, W. & Plumbley, M. D. (2017). Convolutional gated recurrent neural network incorporating spatial features for audio tagging. *The 2017 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN 2017)*, Anchorage, Alaska. doi: <https://doi.org/10.1109/IJCNN.2017.7966291>.
20. Rizzi, A., Buccino, M., Panella, M. & Uncini, A. (2006). Optimal short-time features for music/speech classification of compressed audio data. *International Conference on Intelligent Agents*. Sydney, NSW, Australia. doi: <https://doi.org/10.1109/CIMCA.2006.160>
21. Sturm, B. L. (2014). A Survey of Evaluation in Music Genre Recognition. *Adaptive Multimedia Retrieval: Semantics, Context, and Adaptation*. AMR 2012. *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 8382, pp. 29–66. doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-12093-5\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-319-12093-5_2).
22. Xu, Y., Huang, Q., Wang, W., Foster, P., Sigtia, S., Jackson, P. J. B. & Plumbley, M. D. (2017). Unsupervised Feature Learning Based on Deep Models for Environmental Audio Tagging. *IEEE/ACM transactions on audio, speech and language processing*, Vol. 25, Issue 6, pp. 1230–1241. doi: <https://doi.org/10.1109/TASLP.2017.2690563>
23. Zaccane, G. & Karim, Md. R. (2018). *Deep learning with TensorFlow*. Packt Publishing.
24. Geron, A. (2017). *Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn and TensorFlow*. Sebastopol: O'Reilly.
25. Gonzalez, J. A., Hurtado, L.-F. & Pla, F. (2019). ELiRF-UPV at SemEval-2019 Task 3: Snapshot Ensemble of Hierarchical Convolutional Neural Networks for Contextual Emotion Detection. *Proceedings of the 13th International Workshop on Semantic Evaluation (SemEval-2019)*. pp. 195–199. doi: <https://doi.org/10.18653/v1/S19-2031>.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-09

## ЗВ'ЯЗАНІ КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ПРО ДІЮ ВАЖКИХ ШТАМПІВ ЗІ ЗМІННИМ ЦЕНТРОМ МАС

В. І. Кузьменко, С. О. Плашенко

Дніпровський національний університет ім. Олесь Гончара  
 sergey.plashenko@gmail.com

**Ключові слова:**  
 важкий штамп, зв'язана задача,  
 змінний центр мас, поворот штампу.

В роботі розглядається задача про дію на півпростір важкого кругового порожнистого циліндра, заповненого рідиною або сипучою речовиною з густиною. Центр мас штамп зміщений відносно осі. З поворотом штампів центр мас змінює своє положення відносно штамп, що характеризує зв'язаність задачі. Отримано аналітичний розв'язок задачі. Проаналізовані умови, за яких відбуваються якісні зміни у поведінці розв'язку.

## COUPLED PROBLEMS ABOUT ACTION OF HEAVY STAMPS WITH VARIABLE BODY CENTER

V. Kuz'menko, S. Plashenko

Oles Honchar Dnipro National University  
 sergey.plashenko@gmail.com

**Key words:**  
 heavy stamp, coupled problem,  
 variable body mass, stamp rotation.

Influence of the heavy circular stamp on a half-space is investigated. Stamp is considered as a cylinder filled with liquid or loose substance. Body center of the stamp is located at height and displaced on distance from axis. The stamp body center changes its position due to the stamp rotation (fig. 1).

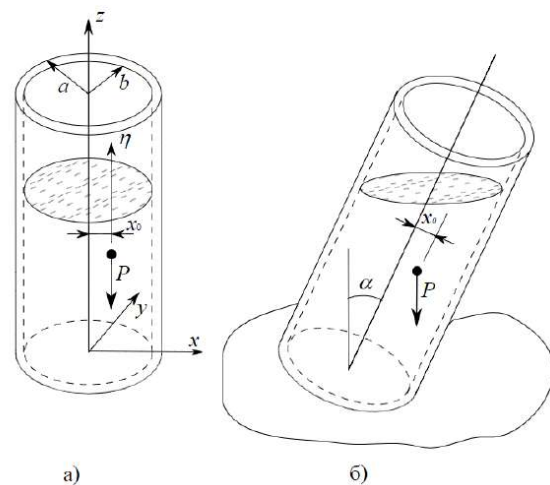


Fig.1. Cylinder with displaced body center

New body center location can be found using the following formula

$$x_0 = x_0 + l\alpha$$

where  $l = \frac{\pi\rho b^4}{4m}$ .

Using the solution obtained in [1], we have:

$$\alpha_0 = \frac{3}{4} \frac{1-\nu^2}{Ea^3} Px_0$$

$$p_0(x, y) = \frac{1 + 3 \frac{xx_0}{a^2}}{2\pi a} \frac{P}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

where  $E$ ,  $\nu$  – Young modulus and Poisson ratio correspondingly.

Body center gets additional displacement due to the rotation on angle  $\alpha$  :

$$\Delta x_0 = h\alpha,$$

where  $h = h + l$ .

In this case we get linear equation of  $\alpha$  :

$$\alpha = \frac{\tilde{r}}{1 - \tilde{r}} \frac{x_0}{h}$$

where  $\tilde{r} = \frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{Ea^3} Ph$

Then

$$x_0 = x_0 + \frac{\tilde{r}}{1 - \tilde{r}} x_0 = \frac{x_0}{1 - \tilde{r}} \quad (1)$$

We get formula for contact pressure distribution by putting  $x_0$  instead of  $x_0$  :

$$p(x, y) = \frac{1 + \frac{3}{1 - \frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{Ea^3} Ph}}{2\pi a} \frac{P}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

Stamp breakaway beginning can be described as follows:

$$p(-a, 0) = 0.$$

Moment for such rotation will be

$$(Ph)_1 = \frac{4}{3} \frac{1 - \frac{3x_0}{a}}{1 - \nu^2} Ea^3.$$

Apparently, formula (1) makes sense only if

$$1 - r = 1 - \frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{Ea^3} Ph > 0.$$

Violation of this constraint will mean stamp balance loss. Critical value of the moment for such condition is equal to  $Ph = \frac{4}{3} \frac{Ea^3}{1 - \nu^2}$ . Thus, stamp breakaway begins for anybody center displacement when the critical  $Ph$  value is reached.

## Вступ

Дослідження взаємовпливу деформування та фізико-хімічних явищ вилилося у останні десятиліття у важливий напрямок механіки деформівного тіла. Значна увага приділялася вивченню процесів деформування тіл, матеріал яких чутливий до дій полів механічної природи [1].

Зв'язаний характер контактної взаємодії обумовлений фізико-хімічними процесами у околі області контакт у [2, 3] та наявністю деформівного прошарку у міжконтактному зазорі [4, 5]. У праці [6] запропоновані розв'язки зв'язаних задач про взає-

мовплив деформування та дії на штамп гравітаційних та магнітних полів.

Дана праця присвячена дослідженню дії на пружний півпростір важких штампів, заповнених рідиною або сипучою речовиною. Взаємовплив деформування та дії гравітаційних сил виявляється у зміщенні лінії дії сили тяжіння унаслідок викликаного деформуванням повороту штампа.

## Загальна постановка зв'язаних контактних задач

Пружне тіло знаходиться під дією жорсткого штампа. Прикладене до штампа зовнішнє навантаження зводиться до головно-

го вектора  $\bar{P}$  та головного момента  $\bar{M}$ . Унаслідок деформації пружного тіла штамп отримує переміщення  $\bar{U}$  точки, обраної за полюс, та повороту  $\bar{\Phi}$  навколо полюса. Зовнішні сили за своєю природою можуть змінювати свій напрямок, величину та лінію дії залежно від руху штамп. З іншого боку, деформування тіла визначається силами, прикладеними до штамп. Тому таку задачу природно вивчати як зв'язану задачу.

Залежність зовнішніх сил від переміщення штамп як твердого тіла визначається природою цих сил і вважається відомою. Введемо оператор  $A$ , який переміщенням штамп ставить у відповідність прикладені сили, тобто кожній парі  $(\bar{U}, \bar{\Phi})$  ставиться у відповідність пара  $(\bar{P}, \bar{M})$ :

$$(\bar{P}, \bar{M}) = A(\bar{U}, \bar{\Phi}).$$

Оператор  $B$  силам, прикладеним до штамп, ставить у відповідність перемі-

щення штамп, отримані як розв'язок контактної задачі теорії пружності:

$$(\bar{U}, \bar{\Phi}) = B(\bar{P}, \bar{M}),$$

тоді

$$(\bar{U}, \bar{\Phi}) = B(A(\bar{U}, \bar{\Phi})) = D(\bar{U}, \bar{\Phi}), \quad (1)$$

де  $D = B \circ A$  – суперпозиція операторів  $A$  та  $B$ .

Отже, дослідження зв'язаної задачі звелось до розв'язання операторного рівняння (1). Певний вигляд операторів  $A$  та  $B$  визначається умовами конкретної задачі.

### Задача про дію важкого штамп зі змінним центром маси

Вивчається дія на півпростір важкого кругового штамп за відсутністю тертя. Штамп розглядається як порожнистий циліндр (рис 1, а), заповнений рідиною або сипучою речовиною з густиною  $\rho$ .

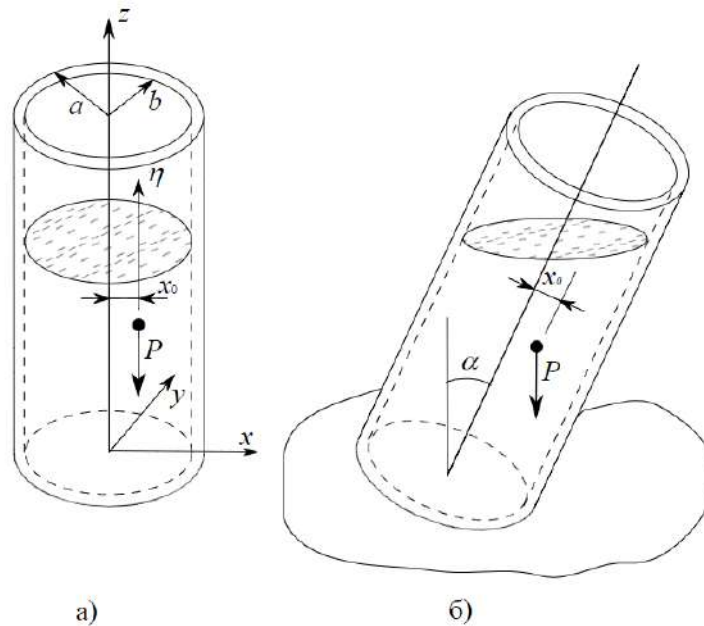


Рис.1. Циліндр зі зміщеним центром мас

Така задача виникає при моделюванні напружено-деформованого стану основ резервуарів, заповнених нафтопродуктами або зерном.

Нехай центр мас штамп знаходиться на висоті  $h$  і зміщений на відстань  $x_0$  від осі  $Oz$  (рис 1,а).

Унаслідок повороту центр маси штамп змінює своє положення відносно штамп – зміщується у напрямку повороту (рис 1,б).

Знайдемо нове положення  $x_0$  центра мас штамп з урахуванням повороту штамп на кут  $\alpha$  (рис. 1,б). Умовно поділимо заповнювач штамп на дві частини площиною  $x = 0$ . У частині  $x > 0$  об'єм заповню-

вача зростає на  $\Delta V$ , а у частині  $x < 0$  – зменшується на таку ж величину. Область  $\Delta V$  показана на рис.2.

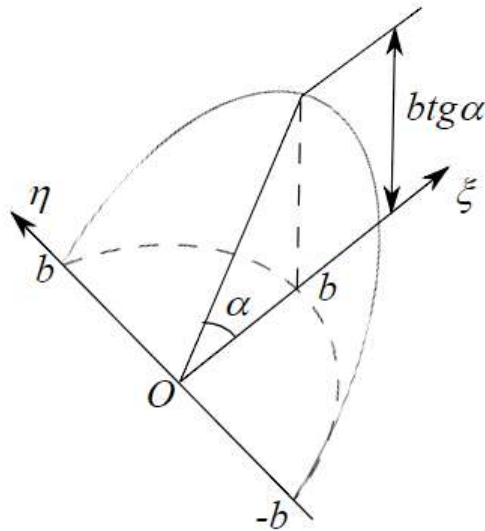


Рис.2. Область  $\Delta V$

Обчислимо статичний момент області  $\Delta V$  відносно осі  $O\eta$ :

$$\Delta S_{\eta} = \rho \iint_{(D)} \xi^2 \operatorname{tg} \alpha d\xi d\eta = \frac{1}{8} \pi \rho b^4 \operatorname{tg} \alpha.$$

Позначимо через  $m$  повну масу штампа. Тоді

$$\tilde{x}_0 = \frac{x_0 m + 2\Delta S_{\eta}}{m} = x_0 + \frac{\pi \rho b^4 \operatorname{tg} \alpha}{4m}.$$

Для малих кутів повороту штампа маємо  $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ . Тоді

$$\tilde{x}_0 = x_0 + l\alpha,$$

де

$$l = \frac{\pi \rho b^4}{4m}.$$

У монографії [7] наводиться розв'язок контактної задачі про дію на півпростір кругового штампа з гладкою плоскою основою. Вважалось, що нормальна сила  $P$  зміщена на відстань  $x_0$  від осі симетрії штампа, причому лінія дії цієї сили залишається незмінною у процесі руху штампа. Наведемо отримані у [7] вирази для кута повороту штампа  $\alpha_0$  та розподілу контактного тиску  $p_0(x, y)$ :

$$\alpha_0 = \frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{Ea^3} P x_0, \quad (2)$$

$$p_0(x, y) = \frac{1 + 3 \frac{xx_0}{a^2}}{2\pi a} \frac{P}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad (3)$$

де  $E$ ,  $\nu$  – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу півпростора.

Складемо операторне рівняння (1). Унаслідок повороту на малий кут  $\alpha$  центр мас штампа отримав додаткове переміщення

$$\Delta x_0 = h\alpha,$$

де  $h = h + l$ .

Дія оператора  $A$  полягає у тому, що повороту штампа на кут  $\alpha$  ставиться у відповідність додаткове зміщення  $h\alpha$  лінії дії сили тяжіння. Оператор  $B$  силі тяжіння  $P$  ставить у відповідність кут  $\alpha$  повороту штампа як розв'язок контактної задачі згідно з формулою (2). Тоді операторне рівняння набуває такого вигляду:

$$\alpha = \frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{Ea^3} P (x_0 + \alpha h).$$

Отримуємо лінійне рівняння відносно  $\alpha$ , розв'язок якого подаємо у такій формі:

$$\alpha = \frac{\tilde{r}}{1 - \tilde{r}} \frac{x_0}{h}, \quad (4)$$

де  $\tilde{r} = \frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{Ea^3} Ph$ .

Тоді відстань лінії дії сили тяжіння від осі  $Oz$  визначається за формулою

$$\tilde{x}_0 = x_0 + \frac{\tilde{r}}{1 - \tilde{r}} x_0 = \frac{x_0}{1 - \tilde{r}}.$$

Підставляючи  $\tilde{x}_0$  замість  $x_0$ , отримуємо формулу для розподілу контактного тиску:

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \frac{1 + 3 \frac{xx_0}{(1 - \tilde{r})a^2}}{2\pi a} \frac{P}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \\ &= \frac{1 + \frac{3}{1 - \frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{Ea^3} Ph} \frac{xx_0}{a^2}}{2\pi a} \frac{P}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

### Аналіз результатів

Зауважимо, що у роботі [6] досліджувалась аналогічна зв'язана контактна задача у разі фіксованого відносно штампа центра

мас. Отримані вище співвідношення для кута повороту та контактної тиску повністю збігаються з наведеним у [6], якщо замінити висоту центра мас на «зведену» висоту  $h = h + l$ . Отже, наявність заповнювача у вигляді рідини або сипучої речовини еквівалентне перенесенню центра мас на висоту  $h = h + \frac{\pi \rho b^4}{4m}$ .

Інакше кажучи, ефект наявності заповнювача можна уявити як «збільшення» висоти центра мас штампа.

Звернемо увагу на залежність контактної тиску від механічних характеристик матеріалу півпростору, що є проявом зв'язаності задачі.

Оскільки особливості розв'язку зв'язаної контактної задачі обумовлені істотним впливом саме положенням центра маси штампа, то для опису зовнішньої дії на штамп доцільно використовувати характерний момент  $Ph$ . Відзначимо критичні значення такого характерного моменту, за яких відбуваються якісні зміни у поведінці розв'язку.

Початку відриву штампа від півпростору відповідає умова:

$$p(-a, 0) = 0.$$

З цієї умови отримуємо відповідне значення характерного моменту:

$$(Ph)_1 = \frac{4}{3} \frac{1 - \frac{3x_0}{a}}{1 - \nu^2} Ea^3. \quad (6)$$

Очевидно, що формула (4) для кута повороту штампа зберігає сенс лише за умови:

$$1 - r = 1 - \frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{Ea^3} Ph > 0.$$

Порушення цієї умови означає втрату рівноваги штампа. Відповідне критичне значення характерного моменту дорівнює

$$(Ph)_2 = \frac{4}{3} \frac{Ea^3}{1 - \nu^2} > (Ph)_1.$$

У співвідношенні (6) перейдемо до границі при  $x_0 \rightarrow 0$ :

$$(Ph)_3 = \lim_{x_0 \rightarrow 0} (Ph)_1 = \frac{4}{3} \frac{Ea^3}{1 - \nu^2}.$$

Отже, навіть у разі як завгодно малого відхилення центра мас від осі штампа при  $Ph = (Ph)_3$  починається відрив штампа від півпростору.

Зауважимо, що  $(Ph)_3 = (Ph)_2$ , тобто відрив штампа продовжуватиметься за сталого значення характерного моменту аж до втрати рівноваги.

### Висновки

Запропонована постановка зв'язаних задач про дію на поверхню півпростору важкого кругового штампа, центр маси якого зміщено відносно осі штампа і може змінюватись у процесі повороту штампа. Така задача моделює взаємодію з основою контейнерів, заповнених нафтопродуктами або зерном. Отримано аналітичні вирази для кута повороту штампа та розподілу контактної тиску. Проаналізовані умови, за яких відбуваються якісні зміни у поведінці розв'язку.

Подальші дослідження мають бути спрямовані на вивчення зв'язаних контактних задач для непружних тіл та з урахуванням фізико-хімічних процесів всередині штампа.

### Література

1. Гачкевич О. Р., Кушнір Р. М. Вибрані проблеми механіки зв'язаних полів. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2016. 59, № 1. С. 7–24.
2. Кузьменко В. І., Плашенко С. О. Зв'язані задачі контактної взаємодії. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2017. 60, № 2. С. 75–84.
3. Martynyak R., Chumak K. Effect of heat-conductive filler on interface gap on thermoelastic contact of solids. *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2012. Vol. 55, No 4. P. 1170–1178.
4. Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М. Контакт пружних тіл за наявності газу та незмочувальної рідини у періодичних міжповерхневих просвітах. *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* 2015. 51, № 6. С. 50–57.

5. Shumelchuk K., Kuzmenko V. Coupled problems of interaction of deformable bodies and liquid of high pressure. *Mechanics Control*. 2013. 32, No. 4. P. 136–142.
6. Мартиняк Р. М. Механотермодифузійна взаємодія тіл з врахуванням заповнювача міжконтактних зазорів. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2000. 36, № 2. С. 124–126.
7. Лурье А. И. Теория упругости. Москва: Наука, 1970. 940 с.

### References

1. Gachkevich, O.R. & Kushnir, R. M. (2016). Selected problems of connected field mechanics. *Mat. metody ta fiz.-mekh. polya*, 59, No. 1, pp. 7–24.
2. Kuzmenko, V. I. & Plashenko, S. O. Related problems of contact interaction. *Mat. metody ta fiz.-mekh. polya*, 60, No. 2, pp. 75–84.
3. Martynyak, R. & Chumak, K. (2012). Effect of heat-conductive filler on interface gap on thermoelastic contact of solids. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 55, No. 4, pp. 1170–1178.
4. Kozachok, O. P., Slobodyan, B. S. & Martynyak, R. M. (2015). Contact of elastic bodies in the presence of gas and wetting fluid in periodic interfacial luminaires. *Fiz.-khim. mekhanika materialiv*, 51, No. 6, pp. 50–57.
5. Shumelchuk, K. & Kuzmenko, V. (2013). Coupled problems of interaction of deformable bodies and liquid of high pressure. *Mechanics Control*, 32, No. 4, pp. 136–142.
6. Martynyak, R. M. (2000). Mechanohermodiffusion interaction of bodies taking into account the filler of inter-contact gaps. *Fiz.-khim. mekhanika materialiv*, 36, No. 2, pp. 124–126.
7. Lurie, A. I. (1970). *Theory of elasticity*. Moscow: Nauka.



УДК 624.072.45: 539.384

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-10

## НАПРУЖЕННЯ В КЛЕЙОВОМУ З'ЄДНАННІ ДВОХ КОАКСІАЛЬНИХ ТРУБ. СПРОЩЕНА ДВОВИМІРНА МОДЕЛЬ

С. С. Куреннов, К. П. Барахов

Національний аерокосмічний університет ім. Н.С. Жуковського «ХАІ»,  
kurennov.ss@gmail.com

### Ключові слова:

клейове з'єднання, модель Фолькерсена, двовимірний розв'язок, відокремлення змінних.

Запропоновано спрощену двовимірну модель клейового з'єднання, яка ґрунтується на гіпотезі про високу жорсткість труб, що з'єднуються, в окружному напрямку. Вважається, що напруження рівномірно розподілені за товщиною шарів, а переміщення відбуваються лише в осьовому напрямку. Задачу зведено до системи двох диференціальних рівнянь відносно поздовжніх переміщень зовнішньої та внутрішньої труби. За допомогою методу відокремлення змінних побудовано аналітичний розв'язок задачі про напружений стан напускного клейового з'єднання двох циліндричних труб. Обґрунтовано збіжність розв'язку. Розв'язано модельну задачу та проведено порівняння результатів розрахунків з розрахунками, виконаними за допомогою методу скінченних елементів. Показано високу точність запропонованої спрощеної математичної моделі.

## STRESSES IN ADHESIVELY BONDED JOINTS OF TWO COAXIAL PIPES. SIMPLIFIED TWO-DIMENSIONAL MODEL

S. S. Kurennov, K. P. Barakhov

National Aerospace University, "Kharkiv Aviation Institute",  
kurennov.ss@gmail.com

### Key words:

mathematics, mechanics, mathematical model, dynamics, information technologies.

A simplified two-dimensional model of an overlap glue joint between two coaxial pipes is proposed. At the base of the model lies the hypothesis about the high rigidity of the pipes being joined in the circumferential direction. It is assumed that normal stresses and axial displacements are evenly distributed across the thickness of the layers being joined, and displacements occur only in the axial direction. Those displacements in the radial and circumferential directions are zero. The adhesive layer works only on shear, and the shear stresses in the adhesive are evenly distributed in thickness. It is assumed that the longitudinal displacements or normal forces are given on the ends of the pipes in an arbitrary manner, and not uniformly as in the known classical solutions. Edge conditions, displacements or forces at the ends of pipes, are expanded into Fourier series in the angular coordinate, in the interval from zero to pi. This model can be used to determine the stresses in the joint between the skin of the aircraft and the power frame, to which the load is applied at certain points. The task is reduced to a system of two differential equations for the longitudinal displacements of the outer and inner tubes. This model is a development of the previously proposed model of adhesive bonding of rectangular plates. To construct the solution, the classical method of separation of variables was used. Displacements have the form of superposition of series of eigenfunctions, the coefficients of which are unknown and are found from boundary conditions. Satisfaction of boundary conditions leads to systems of linear equations for unknown coefficients. An estimate for the decay of the coefficients is found and the convergence of the solution is proved. The solution of the problem satisfies the criterion of Saint-Venant, i.e. in the case of a large connection length, the displacements and stresses at a distance from the ends exponentially tend to the classical one-dimensional solution. The model problem is solved and the results of calculations are compared with calculations performed using the finite element method. In the model problem, the inner tube is assumed to be fixed on one of the ends, and a force is exerted on the op-

posite end of the outer tube in two symmetric sectors, between which lie no load sectors. Graphs of tangential stresses in the glue are given in the article. The high accuracy of the proposed simplified mathematical model is shown. The proposed solution has good convergence and counting speed, so it can be used to build a solution for optimization and design problems.

## Вступ

Клейові з'єднання є невід'ємною частиною сучасних конструкцій, виконаних з полімерних композиційних матеріалів, тому що вони здатні забезпечити неперервну та найбільш рівномірну передачу зусиль між конструктивними елементами, забезпечують герметичність з'єднання, низьку вагу, високу аеродинамічну ефективність. Зазвичай у механіці конструкцій з'єднання внапуск розглядаються як тришарові балки [1, 2] або тришарові циліндричні оболонки [3, 4]. Математичні моделі з'єднань найчастіше припускають рівномірний розподіл напружень за шириною з'єднання та заданий апріорно розподіл напружень за товщиною клейового шару і шарів, що з'єднуються (зазвичай рівномірний або лінійний). Однак при розрахунку напруженого стану деяких конструкцій, наприклад з'єднань силових елементів або ремонтних накладок з обшивкою, необхідно враховувати нерівномірність напружено-деформованого стану клеєної конструкції не тільки за довжиною, але і за шириною з'єднання. Найбільш поширеними методами дослідження двовимірного напруженого стану з'єднань є метод скінченних елементів та метод скінченних різниць [5-8]. Аналітичні розв'язки задачі про нерівномірний за шириною напружений стан клейового

з'єднання невідомі. Тому для розв'язання задач про напружений стан з'єднання прямокутних пластинок було запропоновано спрощену модель, яка базується на гіпотезі про малі деформації, що зумовлені коефіцієнтами Пуассона [9, 10]. В даній роботі підхід розвинений на циліндричну систему координат.

У роботі пропонується спрощена двовимірна модель напруженого стану з'єднання циліндричних труб, в якій нехтується вплив поздовжніх (в осьовому напрямку) деформацій на поперечні (тангенціальні та радіальні) деформації. Тобто припускається, що елементи з'єднання мають лише поздовжні переміщення. Але, на відміну від класичних одновимірних розв'язків [11-13], вважається, що осьове навантаження або переміщення додані до шарів нерівномірно за окружною координатою, тобто за будь-яким довільним способом. Таке нерівномірне навантаження характерно, наприклад, для з'єднань відсіків ракетної та авіаційної техніки, які містять дискретні з'єднувальні перехідні елементи.

## Постановка задачі

Клейове з'єднання двох коаксіальних труб показано на рис. 1.

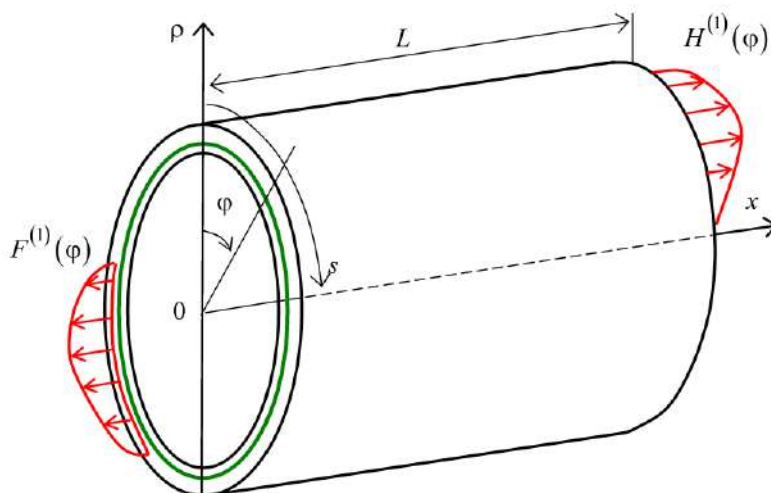


Рис. 1. Схема з'єднання

Товщини зовнішньої і внутрішньої труб відповідно дорівнюють  $\delta_1$  і  $\delta_2$ . Товщина з'єднувального шару дорівнює  $\delta_0$ . Припустимо, що несучі шари деформуються тільки уздовж осі з'єднання, а клейовий шар пра-

цює тільки на зсув, напруження рівномірно розподілені по товщині шарів.

На рис. 2 показано диференціальний елемент з'єднання та діючі на нього зусилля.

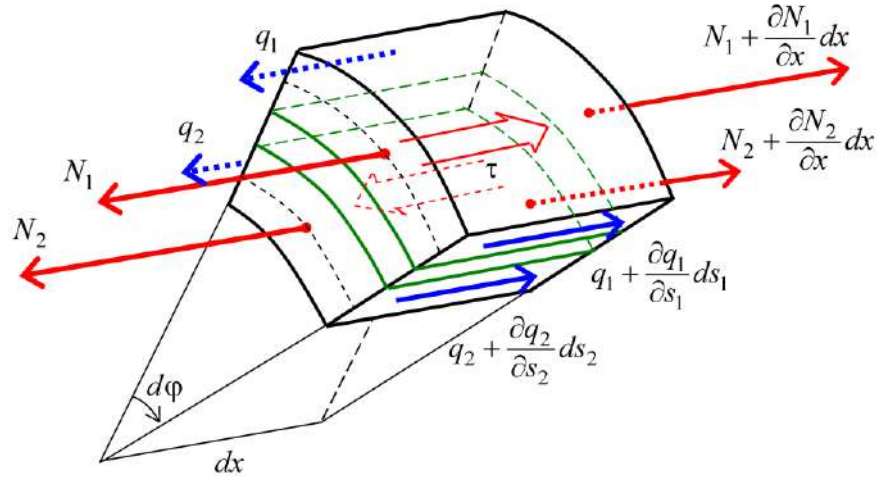


Рис. 2. Елемент з'єднання

Рівняння рівноваги елементів несучих шарів мають вигляд

$$ds_1 \left[ N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} dx \right] + dx \left[ q_1 + \frac{\partial q_1}{\partial s_1} ds_1 \right] - N_1 ds_1 - q_1 dx + \tau dx ds_0 = 0,$$

$$ds_2 \left[ N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial x} dx \right] + dx \left[ q_2 + \frac{\partial q_2}{\partial s_2} ds_2 \right] - N_2 ds_2 - q_2 dx - \tau dx ds_0 = 0,$$

де  $N_m$ ,  $q_m$  – нормальні (в поздовжньому напрямку) і дотичні зусилля в несучому шарі  $m$  ( $m = 1, 2$ ), які являють собою добуток напружень на товщину шару,  $N_m = \delta_m \sigma_x^{(m)}$ ,  $q_m = \delta_m \tau^{(m)}$ ;  $\tau$  – дотичні напруження в клейовому шарі в поздовжньому напрямку. Крім того,  $x$  – осьова координата; окружні криволінійні координати  $s_1 = R_1 d\varphi$ ,  $s_2 = R_2 d\varphi$ ,  $s_0 = R_0 d\varphi$ ;  $\varphi$  – кутова координата, яка відраховується від деякої площини,  $R_m$  – радіус серединної поверхні шару  $m$ ,  $R_0$  – радіус серединної поверхні клейового шару. Тобто вважаємо, що дотичні напруження в клейовому шарі діють в його серединній поверхні, яка має радіус  $R_0$ .

Використовуючи кутову координату  $\varphi$ , отримаємо:

$$\tau + \frac{R_1}{R_0} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial q_1}{\partial \varphi} = 0,$$

$$-\tau + \frac{R_2}{R_0} \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial q_2}{\partial \varphi} = 0, \quad (1)$$

Співвідношення Коші за умови рівності нулю поперечних переміщень мають вигляд:

$$N_m = \delta_m E_m \frac{\partial U_m}{\partial x},$$

$$q_m = \delta_m G_m \frac{\partial U_m}{\partial s_m} = \frac{\delta_m G_m}{R_m} \frac{\partial U_m}{\partial \varphi},$$

$$m = 1, 2, \quad (2)$$

де  $U_m$  – поздовжні переміщення шару  $m$ .

Дотичні напруження в клейовому шарі вважаємо пропорційними різниці переміщень шарів

$$\tau = \frac{G_0}{\delta_0} (U_2 - U_1), \quad (3)$$

де  $G_0$  – модуль зсуву клейового шару.

Підставивши наведені вище співвідношення в рівняння (1), отримаємо систему

$$\begin{cases} \alpha_1 \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2} \right) - U_1 + U_2 = 0, \\ \alpha_2 \left( \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \mu_2^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \varphi^2} \right) + U_1 - U_2 = 0, \end{cases} \quad (4)$$

де

$$\alpha_m = \delta_m \delta_0 \frac{E_m R_m}{G_0 R_0};$$

$$\mu_m = \frac{1}{R_m} \sqrt{\frac{G_m}{E_m}}; \quad k = 1, 2.$$

Крайові умови мають вигляд

$$\begin{aligned} U_1|_{x=0} &= 0, \\ N_2|_{x=0} &= E_2 \delta_2 \left. \frac{\partial U_2}{\partial x} \right|_{x=0} = F^{(2)}(\varphi), \\ N_m|_{x=L} &= E_m \delta_m \left. \frac{\partial U_m}{\partial x} \right|_{x=L} = H^{(m)}(\varphi). \end{aligned} \quad (5)$$

Крім того, на переміщення накладаються умови періодичності:

$$U_m(x, \varphi) = U_m(x, \varphi + 2\pi l). \quad (6)$$

### Побудова розв'язку

З першого рівняння системи (4) отримуємо, що

$$U_2 = U_1 - \alpha_1 \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2} \right). \quad (7)$$

Підставив (7) в друге рівняння системи (4), маємо рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} + \beta_1 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \beta_2 \frac{\partial^4 U_1}{\partial \varphi^4} - \\ - \beta_3 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \beta_4 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \mu_1^2 + \mu_2^2, \quad \beta_2 = \mu_1^2 \mu_2^2, \\ \beta_3 &= \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}, \quad \beta_4 = \frac{\mu_1^2}{\alpha_2} + \frac{\mu_2^2}{\alpha_1}. \end{aligned}$$

Частинний розв'язок рівняння (8) шукатимемо у вигляді добутку  $U_1^* = \Phi(\varphi) X(x)$ . Вважатимемо, що кожен

частинний розв'язок  $U_1^*$  –  $2\pi$  періодична функція. Отже, функції  $\Phi(\varphi)$  – періодичні, з періодом  $2\pi$ . Відомо, що будь-яка неперервна періодична функція з періодом  $2\pi$  може бути розкладена у ряд Фур'є. Отже, можна припустити, що функції  $\Phi(\varphi)$  в частинних розв'язках (8) приймають значення  $1, \cos nx, \sin nx$ .

Знайдемо відповідні функції  $X_n(x)$ .

1) Якщо  $\Phi(\varphi) = \text{const}$ , то підставивши  $U_1^* = \Phi_0(\varphi) X_0(x)$  в рівняння (7), отримаємо рівняння:

$$\frac{d}{dx^2} \left[ \frac{\partial^2 X_0(x)}{\partial x^2} - \beta_3 X_0(x) \right] = 0.$$

Розв'язок даного рівняння може бути подано у вигляді:

$$X_0 = A_0 + A_1 x + A_3 \text{ch}(\sqrt{\beta_3} x) + A_4 \text{sh}(\sqrt{\beta_3} x).$$

2) Якщо  $\Phi_n(\varphi) = \sin n\varphi$  або  $\Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi$ , то підставивши частинні розв'язки  $U_n^* = \Phi_n(\varphi) X_n(x)$  в рівняння (8), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d^4 X_n}{dx^4} - (\beta_1 n^2 + \beta_3) \cdot \frac{d^2 X_n}{dx^2} + \\ + (\beta_2 n^4 + \beta_4 n^2) \cdot X_n = 0. \end{aligned}$$

Корні характеристичного рівняння даного звичайного диференціального рівняння мають вигляд  $\pm k_{1,n}$  та  $\pm k_{2,n}$ ,

де

$$\begin{aligned} k_{1,n} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \\ &\times \sqrt{\beta_1 n^2 + \beta_3 - \sqrt{(\beta_1 n^2 + \beta_3)^2 - 4(\beta_2 n^4 + \beta_4 n^2)}}, \\ k_{2,n} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \\ &\times \sqrt{\beta_1 n^2 + \beta_3 + \sqrt{(\beta_1 n^2 + \beta_3)^2 - 4(\beta_2 n^4 + \beta_4 n^2)}}. \end{aligned}$$

Неважко переконатися, що при  $n \rightarrow \infty$  залежність  $k_{1,n}$  та  $k_{2,n}$  від  $n$  і прямує до лінійної. Можна також довести, що  $k_{1,n}$  та  $k_{2,n}$  є дійсними числами для  $n \geq 0$ .

На підставі вищевикладеного, переміщення  $U_1$  можна подати у вигляді:

$$U_1 = A_0 + A_1 x + A_3 \operatorname{ch}(\sqrt{\beta_3} x) + A_4 \operatorname{sh}(\sqrt{\beta_3} x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{k_{1,n}} \left( \frac{\operatorname{ch} k_{1,n} x}{\operatorname{sh} k_{1,n} L} + a_{1,n} \right) + \frac{1}{k_{2,n}} \left( \frac{\operatorname{ch} k_{2,n} x}{\operatorname{sh} k_{2,n} L} + a_{3,n} \right) \right] \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{k_{1,n}} \left( \frac{\operatorname{sh} k_{1,n} x}{\operatorname{ch} k_{1,n} L} + b_{1,n} \right) + \frac{1}{k_{2,n}} \left( \frac{\operatorname{sh} k_{2,n} x}{\operatorname{ch} k_{2,n} L} + b_{3,n} \right) \right] \sin n\varphi,$$

де  $A_1, \dots, A_4$ ,  $a_{1,n}, \dots, a_{4,n}$  и  $b_{1,n}, \dots, b_{4,n}$  – невідомі константи, що визначаються з крайових умов; множники  $k_{m,n} \operatorname{sh} k_{m,n} L$  та  $k_{m,n} \operatorname{ch} k_{m,n} L$  в знаменнику служать для нормування і полегшення аналізу збіжності розв’язка.

З (7) знаходимо переміщення другого шару:

$$U_2 = A_0 + A_1 x + (1 - \alpha_1 \beta_3) \times \left[ A_3 \operatorname{ch}(\sqrt{\beta_3} x) + A_4 \operatorname{sh}(\sqrt{\beta_3} x) \right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\gamma_{1,n}}{k_{1,n}} \left( \frac{\operatorname{ch} k_{1,n} x}{\operatorname{sh} k_{1,n} L} + a_{1,n} \right) + \frac{\gamma_{2,n}}{k_{2,n}} \left( \frac{\operatorname{ch} k_{2,n} x}{\operatorname{sh} k_{2,n} L} + a_{3,n} \right) \right] \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\gamma_{1,n}}{k_{1,n}} \left( b_{1,n} \frac{\operatorname{ch} k_{1,n} x}{\operatorname{sh} k_{1,n} L} + b_{2,n} \frac{\operatorname{sh} k_{1,n} x}{\operatorname{ch} k_{1,n} L} \right) + \frac{\gamma_{2,n}}{k_{2,n}} \left( b_{3,n} \frac{\operatorname{ch} k_{2,n} x}{\operatorname{sh} k_{2,n} L} + b_{4,n} \frac{\operatorname{sh} k_{2,n} x}{\operatorname{ch} k_{2,n} L} \right) \right] \sin n\varphi,$$

де  $\gamma_{m,n} = 1 - \alpha_1 (k_{m,n}^2 - n^2 \mu_1^2)$ .

**Задоволення крайових умов**

Відзначимо, якщо крайові умови на торцях з’єднання парні, то коефіцієнти  $b_{1,n}, \dots, b_{4,n}$  дорівнюють нулю, якщо непарні, то відповідно  $A_1, \dots, A_4$  та  $a_{1,n}, \dots, a_{4,n}$  дорівнюють нулю. Якщо зусилля і переміщення розподілені рівномірно по колу – отримуємо одновимірні розв’язки, тобто  $A_1, \dots, A_4$  відмінні від нуля, а  $a_{1,n}, \dots, a_{4,n}$  та  $b_{1,n}, \dots, b_{4,n}$  – дорівнюють нулю. У загальному випадку усі коефіцієнти відмінні від нуля.

Нехай поздовжнє навантаження прикладене до зовнішньої труби на правому торці  $x = L$ , лівий торець внутрішньої труби  $x = 0$  жорстко закріплений.

Знайдемо поздовжні зусилля в несучих шарах (2):

$$N_1 = E_1 \delta_1 \left\{ A_1 + A_3 \sqrt{\beta_3} \operatorname{sh}(\sqrt{\beta_3} x) + A_4 \sqrt{\beta_3} \operatorname{ch}(\sqrt{\beta_3} x) + \right.$$

$$\left. \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_{1,n} \frac{\operatorname{sh} k_{1,n} x}{\operatorname{sh} k_{1,n} L} + a_{2,n} \frac{\operatorname{ch} k_{1,n} x}{\operatorname{ch} k_{1,n} L} + a_{3,n} \frac{\operatorname{sh} k_{2,n} x}{\operatorname{sh} k_{2,n} L} + a_{4,n} \frac{\operatorname{ch} k_{2,n} x}{\operatorname{ch} k_{2,n} L} \right] \cos n\varphi + \right.$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \begin{array}{l} b_{1,n} \frac{\text{sh } k_{1,n} x}{\text{sh } k_{1,n} L} + b_{2,n} \frac{\text{ch } k_{1,n} x}{\text{ch } k_{1,n} L} + \\ + b_{3,n} \frac{\text{sh } k_{2,n} x}{\text{sh } k_{2,n} L} + b_{4,n} \frac{\text{ch } k_{2,n} x}{\text{ch } k_{2,n} L} \end{array} \right] \sin n\varphi \left. \vphantom{\sum_{n=1}^{\infty}} \right\} \begin{cases} a_{1,n} + a_{2,n} + a_{3,n} + a_{4,n} = \frac{C_n^{(1)}}{E_1 \delta_1}, \\ \gamma_{1,n} (a_{1,n} + a_{2,n}) + \gamma_{2,n} (a_{3,n} + a_{4,n}) = \frac{C_n^{(2)}}{E_2 \delta_2}; \end{cases}$$

Аналогічно:

$$N_2 = E_2 \delta_2 \left\{ A_1 + (1 - \alpha_1 \beta_3) \sqrt{\beta_3} \left[ A_3 \text{sh}(\sqrt{\beta_3} x) + A_4 \text{ch}(\sqrt{\beta_3} x) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \begin{array}{l} \gamma_{1,n} \left( a_{1,n} \frac{\text{sh } k_{1,n} x}{\text{sh } k_{1,n} L} + a_{2,n} \frac{\text{ch } k_{1,n} x}{\text{ch } k_{1,n} L} \right) + \\ + \gamma_{2,n} \left( a_{3,n} \frac{\text{sh } k_{2,n} x}{\text{sh } k_{2,n} L} + a_{4,n} \frac{\text{ch } k_{2,n} x}{\text{ch } k_{2,n} L} \right) \end{array} \right] \times \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \begin{array}{l} \gamma_{1,n} \left( b_{1,n} \frac{\text{sh } k_{1,n} x}{\text{sh } k_{1,n} L} + b_{2,n} \frac{\text{ch } k_{1,n} x}{\text{ch } k_{1,n} L} \right) + \\ + \gamma_{2,n} \left( b_{3,n} \frac{\text{sh } k_{2,n} x}{\text{sh } k_{2,n} L} + b_{4,n} \frac{\text{ch } k_{2,n} x}{\text{ch } k_{2,n} L} \right) \end{array} \right] \times \sin n\varphi \right\}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 + A_3 \sqrt{\beta_3} \text{sh}(\sqrt{\beta_3} L) + \\ + A_4 \sqrt{\beta_3} \text{ch}(\sqrt{\beta_3} L) = \frac{C_0^{(1)}}{2E_1 \delta_1}, \\ A_1 + (1 - \alpha_1 \beta_3) \sqrt{\beta_3} \left[ A_3 \text{sh}(\sqrt{\beta_3} L) + \right. \\ \left. + A_4 \text{ch}(\sqrt{\beta_3} L) \right] = \frac{C_0^{(2)}}{2E_2 \delta_2}. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k_{1,n}} \frac{a_{1,n}}{\text{sh } k_{1,n} L} + \frac{1}{k_{2,n}} \frac{a_{3,n}}{\text{sh } k_{2,n} L} = c_n^{(1)}, \\ \gamma_{1,n} \frac{a_{2,n}}{\text{ch } k_{1,n} L} + \gamma_{2,n} \frac{a_{4,n}}{\text{ch } k_{2,n} L} = \frac{c_n^{(2)}}{E_2 \delta_2}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k_{1,n}} \frac{b_{1,n}}{\text{sh } k_{1,n} L} + \frac{1}{k_{2,n}} \frac{b_{3,n}}{\text{sh } k_{2,n} L} = s_n^{(1)}, \\ \gamma_{1,n} \frac{b_{2,n}}{\text{ch } k_{1,n} L} + \gamma_{2,n} \frac{b_{4,n}}{\text{ch } k_{2,n} L} = \frac{s_n^{(2)}}{E_2 \delta_2}; \end{array} \right.$$

Зусилля та переміщення на торцях (5) розкладемо в ряди Фур'є:

$$U^{(1)}(\varphi) = \frac{c_0^{(1)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( c_n^{(1)} \cos n\varphi + s_n^{(1)} \sin n\varphi \right),$$

$$F^{(2)}(\varphi) = \frac{c_0^{(2)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( c_n^{(2)} \cos n\varphi + s_n^{(2)} \sin n\varphi \right),$$

$$H^{(m)}(\varphi) = \frac{C_0^{(m)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n^{(m)} \cos n\varphi + S_n^{(m)} \sin n\varphi \right).$$

Отримаємо системи рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 + A_3 = \frac{c_0^{(1)}}{2}, \\ A_1 + (1 - \alpha_1 \beta_3) \sqrt{\beta_3} A_4 = \frac{c_0^{(2)}}{2E_2 \delta_2}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{1,n} + b_{2,n} + b_{3,n} + b_{4,n} = \frac{S_n^{(1)}}{E_1 \delta_1}, \\ \gamma_{1,n} (b_{1,n} + b_{2,n}) + \gamma_{2,n} (b_{3,n} + b_{4,n}) = \frac{S_n^{(2)}}{E_2 \delta_2}. \end{array} \right.$$

Можна показати, що швидкість спадання коефіцієнтів  $a_{1,n}, \dots, a_{4,n}$  та  $b_{1,n}, \dots, b_{4,n}$  не перевищує швидкості спадання коефіцієнтів  $c_n^{(m)}$  та  $C_n^{(m)}$ , які пропорційні  $n^{-\theta}$ , де  $\theta \geq 1$ .

### Чисельний приклад

Розглянемо клейове з'єднання двох труб, що мають довжину  $L = 50$  мм, зовнішні радіуси  $R_1 = 28$  мм,  $R_2 = 33$  мм та товщини  $\delta_1 = 4$  мм,  $\delta_2 = 2,9$  мм. Товщина клейового шару  $\delta_0 = 0,1$  мм.

Пружні характеристики матеріалів з'єднання  $E_1 = E_2 = 70$  ГПа,

$G_1 = G_2 = 27$  ГПа,  $G_0 = 0,34$  ГПа. Задамо крайові умови на торцях склеєних труб:

$$\begin{aligned}
 U_1(\varphi)|_{x=0} &= 0, \\
 F^{(2)}(\varphi) &= 0, \\
 H^{(1)}(\varphi) &= 0,
 \end{aligned}
 \quad
 H^{(2)}(\varphi) = \begin{cases} F_0, & -\frac{\pi}{4} \leq \varphi < \frac{\pi}{4}; \\ 0, & \frac{\pi}{4} \leq \varphi < \frac{3\pi}{4}; \\ 0, & \frac{3\pi}{4} \leq \varphi < \frac{5\pi}{4}; \\ 0, & \frac{5\pi}{4} \leq \varphi < \frac{7\pi}{4}. \end{cases}$$

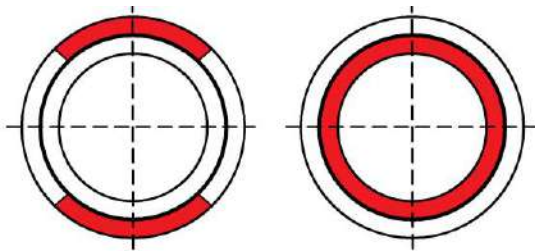


Рис. 3. Крайові умови (а) при  $x=L$  і (б) при  $x=0$

Більш наочно схема додавання навантаження показана на рис. 3. Навантажені ділянки позначені червоним кольором. Ділянки без навантаження – позбавлені кольору.

Як бачимо, зусилля прикладені до зовнішньої труби по двох секторах і передаються через клейовий шар до внутрішньої труби, яка жорстко закріплена по всьому торцю.

На рис. 4 наведено графік дотичних напружень  $\tau(\varphi, x)$  (3) у вигляді поверхні в координатах  $(\varphi, x)$ . Враховуючи симетрію задачі на рисунку показано напруження на одній чверті окружності,  $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ . Графіки напружень дано у безрозмірній формі як відношення діючих напружень  $\tau$  до гіпотетичних напружень  $\tau_0 = \frac{F_0 R_1}{2LR_0}$ , які виникли

б при рівномірному розподілу напружень по всьому клейовому шару. Двійка у знаменнику вказує на той факт, що навантаження прикладене лише на половині довжини окружності зовнішньої труби.

Для верифікації отриманого розв'язку та перевірки гіпотез, покладених у модель з'єднання, проведено розрахунок напруженого стану даного з'єднання за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ). Для цього застосовано систему Comsol

Multiphysics 5.2. Графіки дотичних напружень у клею (3) вздовж ліній  $\varphi=0$  (посеред навантаженого сектора) та  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (посеред ненавантаженого сектора), які розраховані за допомогою запропонованого аналітичного підходу (неперервні лінії) та отримані за допомогою МСЕ (пунктирні лінії), показано на рис. 5.

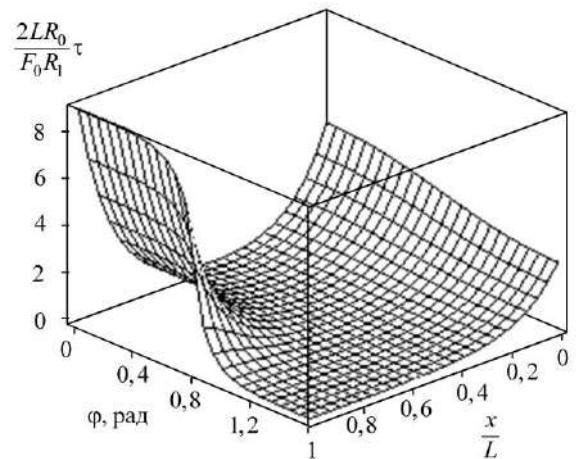


Рис. 4. Дотичні напруження у клейовому шарі

### Висновки

Запропоновано нову математичну модель напруженого стану клейового з'єднання коаксіальних труб, яка базується на гіпотезі про наявність лише осьових переміщень шарів. Даний підхід дозволяє отримати аналітичний розв'язок задачі про напружений стан з'єднання за довільних крайових умов. Тобто дозволяє дослідити напружений стан з'єднання у випадку нерівномірно прикладеного навантаження. Досліджено та обґрунтовано збіжність отриманого розв'язку. Розв'язано модельну задачу та проведено порівняння розрахунків за запропонованою моделлю з результатами, отриманими за допомогою МСЕ. Показано, що запропонований підхід має достатню для інженерних задач точність.

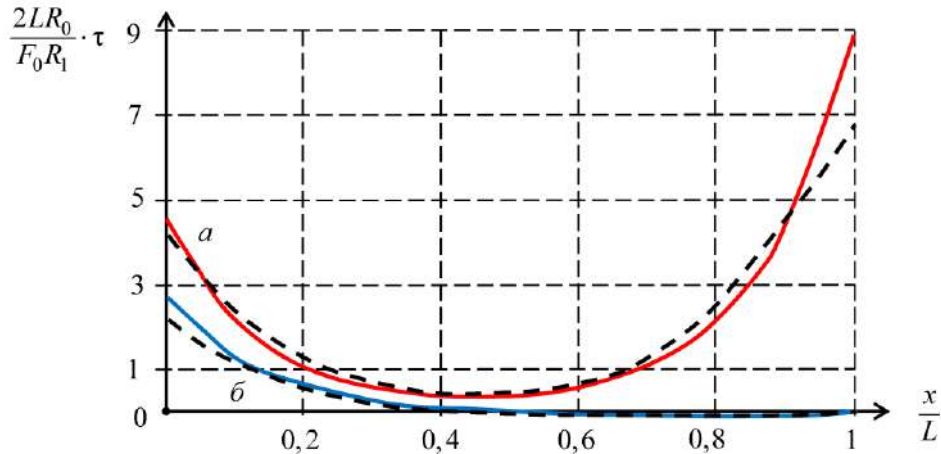


Рис. 5. Графіки дотичних напружень, (а) -  $\varphi = 0$ , (б) -  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

### Література

1. da Silva L. F. M., das Neves P. J. C., Adams R. D., Spelt J. K. Analytical models of adhesively bonded joints. Part I: Literature survey. *International Journal of Adhesion & Adhesives*. 2009. Vol. 29. P. 319–330. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2008.06.005.
2. Гришин В. И., Дзюба А. С., Дударьков Ю. И. Прочность и устойчивость элементов и соединенный авиационных конструкций из композитов. Москва: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2013. 272 с.
3. Goglio L., Paolino D.S. Adhesive stresses in axially-loaded tubular bonded joints. Part II: Development of an explicit closed-form solution for the Lubkin and Reissner model. *International Journal of Adhesion & Adhesives*. 2014. Vol. 48. P. 35–42. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2013.09.010.
4. Shi Y. P., Cheng S. Analysis of adhesive-bonded cylindrical lap joints subjected to axial load. *Journal Eng. Mech.* 1993. Vol. 119. P. 584–602. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1993)119:3(584).
5. Рябенков Н. Г., Артюхин Ю. П. Определение напряжений клея в соединении двух полубесконечных пластин. *Исслед. по теор. пластин и оболочек*. Изд-во Казанского ун-та. 1981. № 16. С. 82–90.
6. Rapp P. Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. Part II: Displacement formulation for orthotropic adherends. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2015. V. 15, Iss. 2. P. 603–619. DOI: 10.1016/j.acme.2014.06.004.
7. Chukwujekwu Okafor, Singh N., Enemuoh U.E., Rao S.V. Design, analysis and performance of adhesively bonded composite patch repair of cracked aluminum aircraft panels. *Composite Structures*. 2005. Vol. 71. P. 258–270. DOI: 10.1016/j.compstruct.2005.02.023.
8. Федотов А. А., Ципенко А. В., Лебедев А. И. Численное моделирование клевого ремонтного соединения. *Научный вестник МГТУ ГА*. 2018. Т. 21(3). С. 125–138. DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-3-125-138.
9. Kurennov S. S. A Simplified Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Nonuniform Load. *Mechanics of Composite Materials*. 2015. Vol. 51, Issue 4. P. 479–488. DOI: 10.1007/s11029-015-9519-2.
10. Куреннов С. С. Напряженное состояние нахлесточного соединения пластинок разной ширины. Приближенная теория и эксперимент. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2017. № 1. С. 235–244.
11. Goglio L., Paolino D.S., Adhesive stresses in axially-loaded tubular bonded joints. Part II: Development of an explicit closed-form solution for the Lubkin and Reissner model. *International Journal of Adhesion & Adhesives*. 2014. Vol. 48. P. 35–42. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2013.09.010.
12. Griffin S. A., Pang S. S., Yang C. Strength model of adhesive bonded composite pipe joints under tension. *Polymer Engineering and Science*. 1991. Vol. 31(7). P. 533–538. DOI:10.1002/pen.760310710.



13. Goglio L., Dragoni E. Adhesive stresses in axially-loaded tubular bonded joints. Part I: Critical review and finite element assessment of published models. *International Journal of Adhesion & Adhesives*. 2013. Vol. 47. P. 35–45. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2013.09.009.

### References

1. da Silva, L. F. M., das Neves, P. J. C., Adams, R. D. & Spelt, J. K. (2009). Analytical models of adhesively bonded joints. Part I: Literature survey. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, Vol. 29, pp. 319–330. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2008.06.005.
2. Grishin, V. I., Dzyuba, A. S. & Dudar'kov, Yu. I. (2013). Strength and stability of elements and joints of aircraft structures made of composites. Moscow: Izdatelstvo fiziko-matematicheskoy literatury.
3. Goglio, L. & Paolino, D. S. (2014). Adhesive stresses in axially-loaded tubular bonded joints. Part II: Development of an explicit closed-form solution for the Lubkin and Reissner model. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, Vol. 48, pp. 35–42. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2013.09.010.
4. Shi, Y.P. & Cheng, S. (1993). Analysis of adhesive-bonded cylindrical lap joints subjected to axial load. *Journal Eng. Mech.*, Vol. 119, pp. 584–602. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1993)119:3(584).
5. Ryabenkov, N. G. & Artyuxin, Yu. P. (1981). Determination of adhesive stresses in the connection of two semi-infinite plates. *Issled. po teor. plastin i obolochek*, Izd-vo Kazanskogo un-ta, No. 16, pp. 82–90.
6. Rapp, P. (2015). Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. Part II: Displacement formulation for orthotropic adherends. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, Vol. 15, Issue 2, pp. 603–619. DOI: 10.1016/j.acme.2014.06.004.
7. Chukwujekwu, Okafor, Singh, N., Enemuoh, U. E. & Rao, S. V. (2005). Design, analysis and performance of adhesively bonded composite patch repair of cracked aluminum aircraft panels. *Composite Structures*, Vol. 71, pp. 258–270. DOI: 10.1016/j.compstruct.2005.02.023.
8. Fedotov, A. A., Cipenko, A. V. & Lebedev, A. I. (2018). Numerical modelling of the airframe damage growth for the adhesive repair joint calculation. *Nauchnyj vestnik MGTU GA*, Vol. 21(3), pp. 125–138. DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-3-125-138.
9. Kurennov, S. S. (2015). A Simplified Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Nonuniform Load. *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 51, Issue 4, pp. 479–488. DOI: 10.1007/s11029-015-9519-2.
10. Kurennov, S. S. (2017). On the stressed state of the lap joint of the different width plates. Approximative theory and experiment. *Visnik Zaporiz'kogo nacional'nogo universitetu. Fiziko-matematichni nauki*, No. 1, pp. 235–244.
11. Goglio, L. & Paolino, D. S. (2014). Adhesive stresses in axially-loaded tubular bonded joints. Part II: Development of an explicit closed-form solution for the Lubkin and Reissner model. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, Vol. 48, pp. 35–42. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2013.09.010.
12. Griffin, S. A., Pang, S. S. & Yang, C. (1991). Strength model of adhesive bonded composite pipe joints under tension. *Polymer Engineering and Science*, Vol. 31(7), pp. 533–538. DOI:10.1002/pen.760310710.
13. Goglio, L. & Dragoni, E. (2013). Adhesive stresses in axially-loaded tubular bonded joints. Part I: Critical review and finite element assessment of published models. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, Vol. 47, pp. 35–45. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2013.09.009.

УДК 531.383

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-11

## КЕРОВАНІСТЬ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ З ГІРОСКОПІЧНОЮ СТРУКТУРОЮ ПРИ ДІЇ ДИСИПАТИВНИХ СИЛ ТА СИЛ РАДІАЛЬНОЇ КОРЕКЦІЇ З УРАХУВАННЯМ ПЕВНОГО НЕЛІНІЙНОГО ЗМІШАНОГО ВИДУ ЗОВНІШНІХ ЗБУРЕНЬ

В. В. Леонт'єва, Н. О. Кондрат'єва

Запорізький національний університет  
vleonteva15@gmail.com, nkondr100@gmail.com

### Ключові слова:

динамічна система, гіроскопічна система, зовнішні збурення, модель у змінних стану, керованість, матриця керованості.

У роботі проводиться аналіз керованості динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень, описуваної за допомогою уточненої математичної моделі, яка подається у вигляді лінійних диференціальних рівнянь зі складеною нелінійною правою частиною та, в залежності від певних фізичних обмежень об'єкта, має дві різні форми подання – при існуючій можливості (неможливості) об'єднання збуджуючих сил, діючих на систему. За кожною з одержаних моделей побудовано математичні моделі динамічної системи у змінних стану, за якими проведено аналіз керованості системи, на основі якого встановлено, що для аналізованої системи виконуються умови повної керованості, причому на результати аналізу керованості досліджуваної системи впливають тільки результати дослідження однієї з отриманих матриць керованості, складеної для випадку існуючої можливості об'єднання збуджуючих сил. Використання іншої форми подання моделі системи виявилось менш затребуваним у зв'язку із ускладненням відповідної матриці керованості поряд із збігом отриманих для другої моделі результатів.

## CONTROLLABILITY OF A DYNAMICAL SYSTEM WITH A GYROSCOPIC STRUCTURE UNDER THE ACTION OF DISSIPATIVE FORCES AND FORCES OF RADIAL CORRECTION WITH A CERTAIN NONLINEAR EXTERNAL DISTURBANCES OF MIXED TYPE

V. V. Leontieva, N. O. Kondratieva

Zaporizhzhia National University  
vleonteva15@gmail.com, nkondr100@gmail.com

### Key words:

dynamical system, gyroscopic system, external disturbances, state variable model, controllability of the system, controllability matrix.

In the study of objects of different physical nature there is often a need for improvement their dynamic properties, adjusting the parameters of mathematical models describing the movement of the studied objects, stabilization of unstable objects, that is, when there is a need for changing the studied objects in such a way that their characteristics satisfy certain requirements. In the major cases indicated changes could be achieved by the application the certain types of control to the studied objects, become possible under the conditions when the objects are characterized by the property of complete or partial controllability, that is essential for building workable control systems and consists in establishing the fundamental possibility of transferring an control object from one state to another using information about its state variables.

From the point of view of obtaining further scientifically based results in the field of control theory one of the most popular objects is the gyroscopic system. This work is devoted to the study of the controllability problem of a dynamical system with a gyroscopic structure under the influence of dissipative and radial correction forces with a certain nonlinear

external disturbances of mixed type described with the refined mathematical model, that is presented in the form of linearizing differential equations with a nonlinear right-hand side and, depending from the certain physical limitations of the object, has two different forms of presentation – with the existing possibility (impossibility) of union of disturbing forces acting on the system. For each of obtained models are constructed the models in state variables, according to which an analysis of the system's controllability is carried out. As a result of the analysis the conditions for complete controllability are satisfied for the studied system. Moreover, it was determined that the results of the analysis of the controllability of the studied system are affected only by the results of the study of one of the obtained controllability matrices compiled for the case of the existing possibility of combining disturbing forces. The use of another form of representation of model turned out to be less popular due to the complication of the corresponding controllability matrix along with the coincidence of the results obtained for the second model.

### Вступ

При дослідженні об'єктів (процесів) різної фізичної природи, в тому числі і технічної, досить часто виникає необхідність покращення їх динамічних властивостей, коригування вхідних параметрів моделей, що описують рух досліджуваних процесів та об'єктів, стабілізації нестійких об'єктів (процесів), тобто виникає необхідність змінювання досліджуваних об'єктів (процесів) таким чином, щоб характеризуючі їх показники відповідали певним вимогам [1-8]. Зазначені змінювання (покращення) в своїй більшості досягаються шляхом застосування до досліджуваних об'єктів (процесів) окремих видів керування та/або регулювання, які в свою чергу стають можливими в умовах, коли досліджувані об'єкти та процеси характеризуються властивістю повної або часткової (неповної) керованості, яка є вельми істотною для побудови працездатних систем автоматичного керування (регулювання) та полягає у встановленні принципової можливості переведення об'єкта (системи) керування з одного стану в інший з використанням інформації про всі його змінні стану, що в сутності і складає головну задачу керування, яка для об'єктів технічної спрямованості є особливо актуальною в умовах науково-технічного прогресу, що постійно ставить вимоги до покращення структурних особливостей та динамічних властивостей зазначених об'єктів. В таких умовах ризик помилкових висновків часто пов'язаний з неврахуванням некерованості об'єктів керування. Одним із особливо за-

требуваних об'єктом з точки зору отримання подальших науково обґрунтованих результатів та висновків в області керування та регулювання на сьогоднішній день виступає гіроскопічна система з досить широкою сферою застосування в різних областях науки і техніки [2-14]. Дослідження керованості гіроскопічних систем, які містять у своїй структурі гіроскопічні елементи (або гіроскопи загалом), має принципове значення у зв'язку із необхідністю реалізації подальшого модального, програмного, оптимального, адаптивного та інших видів керування й регулювання [10, 12-15]. Крім того, на результати дослідження керованості спирається дослідження спостережливості, чутливості, інваріантності, ідентифікованості, а також досяжності і адаптованості досліджуваних систем. З огляду на це дослідження керованості має визначальне значення при розв'язанні зазначених задач [2-4, 7, 10-14].

Дана робота присвячена дослідженню проблеми керованості динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень, описуваних за допомогою лінійаризованих диференціальних рівнянь зі складеною нелінійною правою частиною.

### Мета, об'єкт та предмет дослідження

Метою роботи є дослідження керованості лінійної моделі динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного змішаного виду зовнішніх збурень; визначення умов, за якими система

є повністю та/або частково керованою й некерованою.

*Об'єктом дослідження* в роботі виступає математична модель динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та змішаного виду зовнішніх збурень, яка описується лінеаризованими неоднорідними диференціальними рівняннями із сталими коефіцієнтами.

*Предметом дослідження* є властивість керованості динамічної системи з гіроскопічною структурою.

Для реалізації сформульованої мети були поставлені наступні завдання:

- побудова лінійних моделей динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень для випадків, коли враховується об'єднання зовнішніх збурень та їх відокремленість;

- зведення побудованих лінійних моделей динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та певного змішаного виду зовнішніх збурень до моделей у змінних стану з виділенням фазових змінних стану системи та функцій керування;

- побудова матриць керованості досліджуваної системи, динаміка руху якої описується за допомогою отриманих моделей у змінних стану;

- проведення поелементного аналізу матриць керованості на відповідність алгебраїчному критерію керованості Р. Калмана для лінійних стаціонарних систем керування;

- за результатами проведеного аналізу матриць керованості визначення умов повної та/або часткової керованості та некерованості досліджуваної системи з гіроскопічною структурою;

- формулювання загальних висновків за результатами проведеного в роботі дослідження.

### Математичні моделі руху досліджуваної динамічної системи

Перш ніж перейти до аналізу керованості досліджуваної динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил та сил радіальної корекції, побуду-

ємо описуючу її поведінку математичну модель – рівняння руху, які відтворюють зміни в гіроскопічній системі, що відбуваються з плином часу, та відображають особливості її функціонування в умовах дії зовнішніх факторів (збурень) певного змішаного виду.

Побудова математичної моделі досліджуваної системи відбувається шляхом уточнення існуючої лінеаризованої математичної моделі гіроскопічної системи, описуваної Меркіним Д.Р. рівняннями виду [15, 16]

$$\begin{cases} A\ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} - H\dot{\beta} - k\beta = X_1(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}), \\ A\ddot{\beta} + b\dot{\beta} + H\dot{\alpha} + k\alpha = X_2(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}), \end{cases} \quad (1)$$

де  $A$  – екваторіальний момент інерції гіроскопічної системи;  $H$  – власний кінетичний момент;  $b$  – коефіцієнт сил опору;  $k$  – крутизна характеристики моментних датчиків;  $H\dot{\beta}, -H\dot{\alpha}$  – гіроскопічні сили;  $k\beta, -k\alpha$  – неконсервативні сили (сили радіальної корекції);  $-b\dot{\alpha}, -b\dot{\beta}$  – дисипативні сили;  $X_1(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta})$  та  $X_2(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta})$  – нелінійні члени, що являють собою неявні функції часу.

Уточнення моделі, описуваної системою (1), здійснюється шляхом застосування підходу Лазарєва Ю. Ф., Бондаря П. М. [9], за яким нелінійні члени  $X_1(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta})$  та  $X_2(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta})$  системи (1) представляються у вигляді

$$\begin{cases} X_1(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}) = N - R \sin \beta_{cep}, \\ X_2(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}) = L, \end{cases} \quad (2)$$

де  $N$  – момент зовнішніх сил, які діють на гіроскопічну систему вздовж зовнішньої осі;  $L$  – момент зовнішніх сил, які діють на систему вздовж внутрішньої осі;  $R$  – момент зовнішніх сил, які діють вздовж головної осі гіроскопічної системи; зазначені моменти зовнішніх сил змінюються у часі відповідно до певного закону, зазвичай гармонійного [9, 15-17]:  $N = N(t)$ ,  $L = L(t)$ ,  $R = R(t)$ ;  $\sin \beta_{cep} = const$  – усереднене значення кута повороту  $\beta$ , отримане при здійсненні лінеаризації вихідних рівнянь системи за умови припущення про його мале змінювання в часі у тригонометричних виразах моделі.

Застосовуючи підхід Лазарева Ю. Ф. та Бондаря П. М. до моделі, описуваної рівняннями (1), та припускаючи, що моменти зовнішніх сил, діючих на досліджувану гіроскопічну систему, змінюються з плином часу відповідно до заданого змішаного закону (сталого, лінійного, квадратичного й гармонійного), тобто подаючи нелінійні збуджуючі сили  $X_1(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta})$  та  $X_2(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta})$  системи (1) у вигляді (2), вважаючи при цьому, що

$$\begin{aligned} f_1(t) &= N(t) - R(t) \sin \beta_{cep} = \\ &= u_1(t) - u_2(t) \sin \beta_{cep}, \\ f_2(t) &= L(t) = u_3(t), \end{aligned} \quad (3)$$

де  $u_i(t) = g_i^0 + g_i^1 t + g_i^2 t^2 + g_i^3 \sin(\omega_i t + \varepsilon_i)$ ,  $i = \overline{1,3}$ ;  $g_i^j$ ,  $\omega_i$ ,  $\varepsilon_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ,  $j = \overline{0,3}$ ) – відомі сталі, отримаємо лінеаризовану математичну модель динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та змішаного виду зовнішніх збуджень  $f_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , вигляду

$$\begin{cases} A\ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} - H\dot{\beta} - k\beta = u_1(t) - u_2(t) \sin \beta_{cep}, \\ A\ddot{\beta} + b\dot{\beta} + H\dot{\alpha} + k\alpha = u_3(t) \end{cases} \quad (4)$$

або у випадку, коли є можливим на фізичному рівні об'єднання збуджуючих сил, що виступають в якості керувань, отримаємо лінеаризовану математичну модель динамічної системи вигляду

$$\begin{cases} A\ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} - H\dot{\beta} - k\beta = \tilde{u}_1(t), \\ A\ddot{\beta} + b\dot{\beta} + H\dot{\alpha} + k\alpha = u_3(t), \end{cases} \quad (5)$$

де  $\tilde{u}_1(t) = \tilde{g}_1^0 + \tilde{g}_1^1 t + \tilde{g}_1^2 t^2 + g_1^3 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + \tilde{g}_2^3 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2)$  – об'єднані керування;  $\tilde{g}_1^j = g_1^j - g_2^j \sin \beta_{cep}$ ,  $j = \overline{0,2}$ ;  $\tilde{g}_2^3 = -g_2^3 \sin \beta_{cep}$ ;  $u_3(t) = g_3^0 + g_3^1 t + g_3^2 t^2 + g_3^3 \sin(\omega_3 t + \varepsilon_3)$ .

Отримані системи (4) та (5), в порівнянні з системою (1), враховують збуджуючі сили  $f_1(t) = u_1(t) - u_2(t) \sin \beta_{cep}$  (для системи (4)),  $f_1(t) = \tilde{u}_1(t)$  (для системи (5)) та  $f_2(t) = u_3(t)$ , які явно залежать від часу та які, в залежності від значень коефіцієнтів  $g_i^j$  ( $i = \overline{1,3}$ ,  $j = \overline{0,3}$ ) можуть діяти за окремим відповідним законом збудження, що в свою чергу дозволяє розширювати сферу використання запропонованої математичної моделі досліджуваної динамічної системи.

Крім того, за виглядом рівнянь (4) та (5) можна зробити висновок, що досліджувану

динамічну систему можна розглядати як систему автоматичного керування, в якій входами (вхідними сигналами) будуть виступати моменти сил  $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$  (для системи (4)) та  $\tilde{u}_1(t), u_3(t)$  (для системи (5)), а виходами (вихідними сигналами) – кути повороту  $\alpha$  та  $\beta$ .

У зв'язку з таким розумінням змінних моделей можна зробити висновок, що представлена математична модель досліджуваної гіроскопічної системи, описувана рівняннями (4) або (5), являє собою математичну модель системи керування у змінних вхід-вихід, яка встановлює безпосередній зв'язок між діючими на систему вхідними та вихідними сигналами (характеристиками), які являють собою вимірювані фізичні змінні, характеризуючі динамічні процеси у досліджуваній системі. Для такої моделі визначення керованості не є доступним, оскільки виступає властивістю моделей систем керування у просторі станів. Тому насамперед в роботі ставиться задача зведення математичної моделі досліджуваної системи у змінних вхід-вихід до моделі у змінних стану, для якої дослідження керованості об'єкта стає можливим.

Для переходу до моделі у змінних стану розв'яжемо рівняння в системах (4) та (5) відносно прискорень  $\ddot{\alpha}$  та  $\ddot{\beta}$  відповідно:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = \frac{1}{A} u_1(t) - \frac{\sin \beta_{cep}}{A} u_2(t) - \frac{b}{A} \dot{\alpha} + \frac{H}{A} \dot{\beta} + \frac{k}{A} \beta, \\ \ddot{\beta} = \frac{1}{A} u_3(t) - \frac{b}{A} \dot{\beta} - \frac{H}{A} \dot{\alpha} - \frac{k}{A} \alpha, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = \frac{1}{A} \ddot{u}_1(t) - \frac{b}{A} \dot{\alpha} + \frac{H}{A} \dot{\beta} + \frac{k}{A} \beta, \\ \ddot{\beta} = \frac{1}{A} u_3(t) - \frac{b}{A} \dot{\beta} - \frac{H}{A} \dot{\alpha} - \frac{k}{A} \alpha. \end{cases} \quad (7)$$

Використовуючи підхід [4, 17, 18], визначимо змінні станів та керування досліджуваної системи та побудуємо математичні моделі лінійної стаціонарної системи керування, описуваної рівняннями (6) та (7), у змінних стану. В якості змінних станів системи оберемо існуючі фізичні змінні – кути поворотів  $\alpha$ ,  $\beta$  та кутові швидкості  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$ , в якості керувань в такому випадку будуть виступати моменти сил  $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$  (для системи (6)) та  $\ddot{u}_1(t), u_3(t)$  (для системи (7)). Тоді вектор станів для систем (6) та (7) набуває вигляду

$$\mathbf{X} = [\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}]^T = [x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)]^T,$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_2 = x_4, \\ \dot{x}_3 = \frac{k}{A} x_2 - \frac{b}{A} x_3 + \frac{H}{A} x_4 + \frac{1}{A} u_1(t) - \frac{\sin \beta_{cep}}{A} u_2(t), \\ \dot{x}_4 = -\frac{k}{A} x_1 - \frac{H}{A} x_3 - \frac{b}{A} x_4 + \frac{1}{A} u_3(t), \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_2 = x_4, \\ \dot{x}_3 = \frac{k}{A} x_2 - \frac{b}{A} x_3 + \frac{H}{A} x_4 + \frac{1}{A} \ddot{u}_1(t), \\ \dot{x}_4 = -\frac{k}{A} x_1 - \frac{H}{A} x_3 - \frac{b}{A} x_4 + \frac{1}{A} u_3(t). \end{cases} \quad (10)$$

Рівняння виходу для моделей, описуваних системами (6) та (7), співпадають та, з урахуванням (8), мають вигляд

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2. \end{cases} \quad (11)$$

Сукупність рівнянь (9), (11) (у випадку, коли на фізичному рівні неможливо об'єднати збудуючі сили) та (10), (11) (у випадку, коли є можливим вказане об'єднання) визначає математичні моделі розглядуваної динамічної системи у змінних стану в стандартній формі, які в векторно-матричному вигляді можна представити відповідно наступним чином:

вектор керувань задаватиметься у вигляді  $\mathbf{U} = [N(t), R(t), L(t)]^T = [u_1(t), u_2(t), u_3(t)]^T$  (для моделі, описуваної системою (6)) та  $\tilde{\mathbf{U}} = [N(t) - \sin \beta_{cep} R(t), L(t)]^T = [\ddot{u}_1(t), u_3(t)]^T$  (для моделі, описуваної системою (7)).

Тоді для моделей, описуваних системами (6) та (7), можна ввести співвідношення вигляду

$$\begin{cases} \alpha = x_1 = y_1, & \beta = x_2 = y_2, \\ \dot{\alpha} = \dot{x}_1 = x_3, & \dot{\beta} = \dot{x}_2 = x_4, \end{cases} \quad (8)$$

з урахуванням яких рівняння стану для моделей, описуваних системами (6) та (7), перепишуться відповідно наступним чином:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{X} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{U}, \\ \mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{X}, \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{X} + \tilde{\tilde{\mathbf{B}}}\tilde{\mathbf{U}}, \\ \mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{X}, \end{cases} \quad (13)$$

де  $\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$  – вектор стану системи розмірності  $n \times 1$ ;  $\mathbf{U} = [u_1, u_2, u_3]^T$  – вектор керування розмірності  $m \times 1$ ;  $\tilde{\mathbf{U}} = [\ddot{u}_1(t), u_3(t)]^T$  – вектор керування розмірності  $\tilde{m} \times 1$ ;  $\mathbf{Y} = [y_1, y_2]^T$  – вектор виходу системи розмірності  $r \times 1$ ;  $\tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{a}_{ij}]_{n \times n}$  –

матриця стану системи;  $\tilde{B} = [\tilde{b}_{ij}]_{n \times m}$ ,  
 $\tilde{\tilde{B}} = [\tilde{\tilde{b}}_{ij}]_{n \times \tilde{m}}$  – матриці керуючих впливів  
 системи;  $\tilde{C} = [\tilde{c}_{ij}]_{r \times n}$  – матриця виходу си-  
 стему; матриці  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{\tilde{B}}$ ,  $\tilde{C}$  визначаються  
 наступним чином:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{k}{A} & -\frac{b}{A} & \frac{H}{A} \\ -\frac{k}{A} & 0 & -\frac{H}{A} & -\frac{b}{A} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & -\frac{\sin \beta_{сер}}{A} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отримані математичні моделі у змінних стану, описувані системами (9), (11) або (12) (у випадку, коли на фізичному рівні неможливо об'єднувати збурюючі сили) та (9), (10) або (13) (у випадку, коли є можливим вказане об'єднання) пов'язують вхідні сигнали  $u_i(t)$  ( $i = \overline{1, m}$ ) або  $\tilde{u}_i(t)$  ( $i = \overline{1, \tilde{m}}$ ) з вихідними сигналами  $y_i(t)$  ( $i = \overline{1, r}$ ) через проміжні змінні  $x_i(t)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) стану досліджуваної динамічної системи. Такі моделі систем керування можуть бути досліджені на різні фундаментальні динамічні властивості систем керування у просторі станів, в тому числі на керованість систем. При цьому досить важливим при такому дослідженні є те, щоб для описуваної динамічної системи про вектор стану була в наявності повна інформація, тобто всі його компоненти мають бути доступними для вимірювання, структура математичної моделі також має бути повністю визначеною. У тому випадку, якщо про стан об'єкта або структуру моделі немає повної інформації, виникає необхідність у розв'язанні додаткових задач – відповідно задач спостереження та ідентифікації, які дозволяють оцінити елементи

вектора стану і тим самим відновити його значення, уточнити структуру і параметри моделей з тим, щоб в подальшому використовувати отримані результати для керування та регулювання досліджуваними системами. В подальшому будемо вважати, що досліджувана динамічна система функціонує в умовах наявності повної інформації про вектор стану і структуру математичної моделі об'єкта дослідження.

Визначившись з математичними моделями досліджуваної системи керування, придатними для проведення аналізу керованості об'єкта, перейдемо тепер до розкриття змісту поняття керованості об'єкта та оцінки зазначеної властивості об'єкта дослідження, яким в даній роботі виступає лінеаризована стаціонарна математична модель динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та змішаного виду зовнішніх збурень.

### Дослідження керованості гіроскопічної системи

Перш ніж перейти до безпосереднього аналізу керованості досліджуваної динамічної системи, розкриємо поняття керованості системи керування та визначимо основні критерії повної (часткової) керованості та некерованості для лінійних стаціонарних систем у змінних стану.

Вивчення питання керованості в задачах дослідження систем керування, об'єднуючих в своїй структурі визначену певним чином сукупність окремо обраних матеріальних об'єктів, на поведінку яких у часі можна впливати вибором цілеспрямованих зовнішніх впливів, відіграє досить важливу роль у зв'язку з тим, що, по-перше, виконуваність даної властивості вказує на те, що досліджувана система керування може бути переведена з одного стану в інший з використанням інформації про всі її змінні стану, та, по-друге, на результати дослідження керованості спирається дослідження інших фундаментальних динамічних властивостей систем керування – спостережливості, чутливості, інваріантності, ідентифікованості, досяжності, адаптованості досліджуваних систем та ін., на результати аналізу яких спираються подальші дослідження в області модаль-

ного, програмного, оптимального, адаптивного та інших видів керування й регулювання досліджуваних систем керування.

Спираючись на фундаментальні постулати теорії автоматичного керування, які виступають основою для здійснюваних в роботі досліджень, керованість системи керування, за Р. Калманом [2, 5, 9, 18-20], визначає, що система керування, представлена у формі простору станів, може бути переведена з будь-якого визначеного початкового стану  $X(t_0) = (x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))^T$  в будь-який заданий кінцевий стан  $X(T) = (x_1(T), \dots, x_n(T))^T$  за кінцевий час  $t \in [t_0, T]$  шляхом застосування допустимого керування  $U(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T$  з використанням інформації про всі змінні стану  $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$  системи керування.

В такому формулюванні проводиться аналіз керованості досліджуваної в роботі динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та змішаного виду зовнішніх збурень, динаміка руху якої описується математичними моделями у змінних стану, які, в залежності від існування принципової можливості об'єднання збурюючих сил, що ді-

ють на систему, подаються у векторно-матричній формі відповідно у вигляді рівнянь (12) та (13) та в узагальненій формі подаються системою наступного вигляду:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{X} + \mathbf{B}^*\mathbf{U}^*, \\ \mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{X}, \end{cases} \quad (14)$$

де  $\mathbf{B}^* = \tilde{\mathbf{B}}$ ,  $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}$  (при  $f_1(t) = u_1(t) - u_2(t) \sin \beta_{cep}$ ,  $f_2(t) = u_3(t)$ );  $\mathbf{B}^* = \tilde{\tilde{\mathbf{B}}}$ ,  $\mathbf{U}^* = \tilde{\tilde{\mathbf{U}}}$  (при  $f_1(t) = \tilde{u}_1(t)$ ,  $f_2(t) = u_3(t)$ ).

Для моделей, описуваних лінійною стаціонарною системою (14), оцінювання керованості здійснюється відповідно до алгебраїчного критерію Р. Калмана [2, 5, 8, 18, 20], згідно з яким необхідною і достатньою умовою повної керованості системи керування, описуваної системою вигляду

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{G}\mathbf{U}, \\ \mathbf{Y} = \mathbf{P}\mathbf{X} + \mathbf{S}\mathbf{U} \end{cases} \quad (14)$$

при  $\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_n]^T$ ,  $\mathbf{U} = [u_1, \dots, u_m]^T$ ,  $\mathbf{Y} = [y_1, \dots, y_r]^T$ ,  $\mathbf{F} = [f_{ij}]_{n \times n}$ ,  $\mathbf{G} = [g_{ij}]_{n \times m}$ ,  $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{r \times n}$ ,  $\mathbf{S} = [s_{ij}]_{r \times m}$ , є виконання рангової умови для відповідної матриці керованості

$$\text{rank} [W_{kep}]_{n \times nm} = \text{rank} \left[ \begin{array}{c} \mathbf{G} \\ \mathbf{F}\mathbf{G} \\ \mathbf{F}^2\mathbf{G} \\ \vdots \\ \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{G} \end{array} \right]_{n \times nm} = n, \quad (15)$$

тобто за яким ранг матриці керованості  $W_{kep}$  співпадає із розмірністю простору стану  $n$  системи (14).

Для досліджуваної динамічної системи, описуваної узагальненими рівняннями у змінних стану (14), отримано наступні матриці керованості:

$$\tilde{W}_{kep} = [\tilde{\mathbf{B}} : \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}} : \tilde{\mathbf{A}}^2\tilde{\mathbf{B}} : \tilde{\mathbf{A}}^3\tilde{\mathbf{B}}] = [W_1 \ W_2 \ W_3 \ W_4 \ W_5 \ W_6 \ W_7 \ W_8 \ W_9 \ W_{10} \ W_{11} \ W_{12}], \quad (16)$$

$$\tilde{\tilde{W}}_{kep} = [\tilde{\tilde{\mathbf{B}}} : \tilde{\tilde{\mathbf{A}}}\tilde{\tilde{\mathbf{B}}} : \tilde{\tilde{\mathbf{A}}}^2\tilde{\tilde{\mathbf{B}}} : \tilde{\tilde{\mathbf{A}}}^3\tilde{\tilde{\mathbf{B}}}] = [W_1 \ W_3 \ W_4 \ W_6 \ W_7 \ W_9 \ W_{10} \ W_{12}], \quad (17)$$

де  $W_i$  ( $i = \overline{1,12}$ ) – стовпці матриці керованості (16):

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ A \\ 0 \end{bmatrix}; \quad W_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\sin \beta_{cep}}{A} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad W_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ A \end{bmatrix}; \quad W_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} \\ 0 \\ -\frac{b}{A^2} \\ -\frac{H}{A^2} \end{bmatrix}; \quad W_5 = \begin{bmatrix} -\frac{\sin \beta_{cep}}{A} \\ 0 \\ \frac{b \sin \beta_{cep}}{A^2} \\ \frac{H \sin \beta_{cep}}{A^2} \end{bmatrix}; \quad W_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ A \\ A^2 \\ -\frac{b}{A^2} \end{bmatrix};$$



$$\begin{aligned}
 W_7 &= \begin{bmatrix} -\frac{b}{A^2} \\ -\frac{H}{A^2} \\ \frac{A^2}{H^2 - b^2} \\ \frac{A^3}{2bH - Ak} \\ \frac{A^3}{A^3} \end{bmatrix}; \quad W_8 = \begin{bmatrix} \frac{b \sin \beta_{cep}}{A^2} \\ \frac{H \sin \beta_{cep}}{A^2} \\ \frac{A^2}{(H^2 - b^2) \sin \beta_{cep}} \\ \frac{A^3}{(2bH - Ak) \sin \beta_{cep}} \\ -\frac{A^3}{A^3} \end{bmatrix}; \\
 W_9 &= \begin{bmatrix} \frac{H}{A^2} \\ -\frac{b}{A^2} \\ \frac{A^2}{(2bH - Ak)} \\ -\frac{A^3}{(H^2 - b^2)} \\ \frac{A^3}{A^3} \end{bmatrix}; \quad W_{10} = \begin{bmatrix} -\frac{H^2 - b^2}{A^3} \\ \frac{2bH - Ak}{A^3} \\ \frac{A^3}{-b^3 + 3bH^2 - 2AHk} \\ \frac{A^4}{H^3 - 3b^2H + 2Abk} \\ \frac{A^4}{A^4} \end{bmatrix}; \\
 W_{11} &= \begin{bmatrix} \frac{(H^2 - b^2) \sin \beta_{cep}}{A^3} \\ -\frac{(2bH - Ak) \sin \beta_{cep}}{A^3} \\ \frac{A^3}{(-b^3 + 3bH^2 - 2AHk) \sin \beta_{cep}} \\ -\frac{A^4}{(H^3 - 3b^2H + 2Abk) \sin \beta_{cep}} \\ \frac{A^4}{A^4} \end{bmatrix}; \quad W_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{2bH - Ak}{A^3} \\ -\frac{H^2 - b^2}{A^3} \\ \frac{A^3}{H^3 - 3b^2H + 2Abk} \\ \frac{A^4}{-b^3 + 3bH^2 - 2AHk} \\ \frac{A^4}{A^4} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Аналізуючи отримані в (16) та (17) матриці керованості  $\tilde{W}_{kep}$  та  $\tilde{\tilde{W}}_{kep}$ , отримуємо наступні результати:

а) в матриці керованості  $\tilde{W}_{kep}$  стовпці  $W_2, W_5, W_8$  та  $W_{11}$  є лінійно залежними від стовпців  $W_1, W_4, W_7$  та  $W_{10}$  відповідно;

б) в матриці керованості  $\tilde{\tilde{W}}_{kep}$ , в порівнянні з матрицею  $\tilde{W}_{kep}$ , стовпці  $W_2, W_5, W_8$  та  $W_{11}$  відсутні у зв'язку з тим, що матриця

$\tilde{\tilde{B}}$  не містить другого стовпця (порівняно з матрицею  $\tilde{B}$ ), всі інші стовпці в матрицях  $\tilde{W}_{kep}$  та  $\tilde{\tilde{W}}_{kep}$  співпадають. У цьому зв'язку

можна зробити висновок, що на результати аналізу керованості досліджуваної системи істотним чином впливають тільки результати дослідження матриці керованості  $\tilde{\tilde{W}}_{kep}$ ;

в) якщо привести матрицю керованості  $\tilde{\tilde{W}}_{kep}$  за допомогою елементарних перетворень над строками до вигляду

$$\tilde{\tilde{W}}_{kep} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 & -\frac{b}{A^2} & \frac{H}{A^2} & -\frac{H^2 - b^2}{A^3} & -\frac{(2bH - Ak)}{A^3} & \frac{-b^3 + 3bH^2 - 2AHk}{A^4} & -\frac{H^3 - 3b^2H + 2Abk}{A^4} \\ 0 & \frac{1}{A} & -\frac{H}{A^2} & -\frac{b}{A^2} & \frac{2bH - Ak}{A^3} & -\frac{H^2 - b^2}{A^3} & \frac{H^3 - 3b^2H + 2Abk}{A^4} & \frac{-b^3 + 3bH^2 - 2AHk}{A^4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{A} & 0 & -\frac{b}{A^2} & \frac{H}{A^2} & -\frac{H^2 - b^2}{A^3} & -\frac{2bH - Ak}{A^3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A} & -\frac{H}{A^2} & -\frac{b}{A^2} & \frac{2bH - Ak}{A^3} & -\frac{H^2 - b^2}{A^3} \end{bmatrix},$$

можна побачити, що перші чотири її стовпці утворюють ступінчасту матрицю

$$L = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 & -\frac{b}{A^2} & \frac{H}{A^2} \\ 0 & \frac{1}{A} & -\frac{H}{A^2} & -\frac{b}{A^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A} \end{bmatrix} = \frac{1}{A^4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{b}{A} & \frac{H}{A} \\ 0 & 1 & -\frac{H}{A} & -\frac{b}{A} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

для якої  $\det(L) = \frac{1}{A^n} = \frac{1}{A^4} \neq 0$ , а, отже, вказані стовпці є лінійно незалежними і ранг матриці керованості  $\tilde{W}_{кер}$  дорівнює числу ненульових строк отриманої ступінчастої матриці  $L$  (для досліджуваної системи  $\text{rank}[\tilde{W}_{кер}]_{4 \times 8} = \text{rank}[L]_{4 \times 4} = 4$ ), тобто виконується рангова умова  $\text{rank}[\tilde{W}_{кер}]_{n \times nm} = \text{rank}[L]_{n \times n} = n$ , що означає, що досліджувана динамічна система з моделлю, описуваною рівняннями (13), є повністю керованою. При цьому лінійна незалежність перших чотирьох стовпців матриці  $\tilde{W}_{кер}$  зберігається при  $A \neq 0$  для довільних значень сталих  $H, b, k$ , що своєю чергою означає, що для досліджуваної динамічної системи не існує випадків, коли вона є не повністю (частково) керованою або некерованою.

Крім того, на основі отриманих результатів дослідження матриць керованості можна також зробити висновок, що на результаті такого дослідження невраховування об'єднання зовнішніх сил в первісних математичних моделях досліджуваної системи, описуваних рівняннями (4) та (5) відповідно, не тільки не впливає, а й значно ускладнює матрицю керованості  $\tilde{W}_{кер}$ , складену для випадку, коли зазначене об'єднання зовнішніх сил в правій частині першого з рівнянь (4) не представляється можливим. Тому, якщо структурно досліджувана динамічна система дозволяє проводити таке з'єднання зовнішніх збурень, можна рекомендувати використання математичної моделі, описуваної рівняннями (5).

## Висновки

У роботі проведено дослідження властивості керованості динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень, динаміка руху якої описується за допомогою побудованої уточненої лінійаризованої неперервної математичної моделі, що являє собою систему лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку з складеною нелінійною правою частиною. В залежності від можливості об'єднання діючих на досліджувану систему зовнішніх збурень, отримана в роботі модель динамічної системи представлена у двох можливих її варіантах подання. За кожною з одержаних, таким чином, математичних моделей, з метою отримання більш зручної форми моделей, побудовано математичні моделі досліджуваної динамічної системи у змінних стану, за якими своєю чергою проведено аналіз керованості досліджуваної системи керування.

За результатами проведеного дослідження керованості для системи, описуваної зазначеними математичними моделями у змінних стану, визначено, що досліджувана система за будь-яких значень власного кінетичного моменту, коефіцієнтів сил дисипації та коефіцієнтів крутизми характеристики моментних датчиків є повністю керованою, а, отже, доступною для здійснення подальшого керування та регулювання. Крім того, в роботі встановлено, що на результати аналізу керованості досліджуваної системи істотним чином впливають тільки результати дослідження однієї з отриманих матриць керованості, а саме тієї, яка характерна для системи з моделлю, отриманою в

умовах, коли є можливим об'єднання збудовуючих нелінійних сил, діючих на досліджувану систему. Більш того, на результати такого дослідження невраховування об'єднання зовнішніх сил в первісних математичних моделях досліджуваної системи не тільки не впливає, а й значно ускладнює матрицю керуваності, складену для випадку, коли зазначене об'єднання зовнішніх сил не представляється можливим.

Наостанок зауважимо, що отримані в роботі результати можуть бути використані при здійсненні подальшого аналізу фундаментальних властивостей динамічних систем, для розширення використання досліджуваних математичних моделей та підвищення динамічних властивостей досліджуваного об'єкта шляхом застосування різних видів автоматичного керування й регулювання.

### Література

1. Абгарян К. А. Динамика ракет. Москва: Машиностроение, 1969. 378 с.
2. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. Москва: Наука, 1976. 424 с.
3. Гноенский Л. С., Каменский Г. А., Эльсгольд Л. Э. Математические основы теории управляемых систем. Москва: Наука, 1969. 512 с.
4. Егоров А. И. Основы теории управления. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 504 с.
5. Kwakernaak H., Sivan R. Linear Optimal Control Systems. New York: Wiley-Interscience, 1972. 575 p.
6. Кириченко Н. Ф., Матвиенко В. Т. Оптимальный синтез структур для линейных систем управления. *Проблемы управления и информатики*. 1996. № 1,2. С. 162–171.
7. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Москва: Наука, 1968. 476 с.
8. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление. Москва: Наука, 1971. 396 с.
9. Лазарев Ю. Ф., Бондар П. М. Основы теории чувствительных элементов систем ориентации. Київ: Політех, 2010. 625 с.
10. Леонтьева В. В., Кондратьева Н. А. Вопросы методологии анализа, управления, регулирования, идентификации и наблюдения гироскопических систем. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2017. № 2. С. 157–169.
11. Jafarpour S. On Small-Time Local Controllability. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2019. 58:1. 425–446 p.
12. Moreau C. Local Controllability of a Magnetized Purcell's Swimmer. *IEEE Control Systems Letters*, 2019. 3:3. 637–642 p.
13. Dath M., Jouan P. Controllability of linear systems on Heisenberg groups. *International Journal of Control*, 2019. 1–10 p.
14. Vrabel R. Local null controllability of the control-affine nonlinear systems with time-varying disturbances. *European Journal of Control*. 2018. 40. 80–86 p.
15. Меркин Д. Р. Гироскопические системы. Москва: Наука, 1974. 344 с.
16. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. Москва: Наука, 1971. 312 с.
17. Новицкий В. В. Керування гіроскопічними системами та інші задачі аналітичної механіки. *Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування*. Київ: Ін-т математики НАН України. 2008. Т. 78. 124 с.
18. Справочник по теории автоматического управления: Красовский А. А. (ред.). Москва: Наука, 1987. 712 с.
19. Воронов А. А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. Москва: Наука, 1979. 336 с.
20. Леонтьева В. В., Кондратьева Н. А. Управляемость положительной динамической системы балансового типа. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2011. № 1. С. 58–66.

### References

1. Abgaryan, K. A. (1969). The dynamics of rockets. Moscow: Mashinostroyeniye.
2. Andreev, Yu. N. (1976). Control of finite-dimensional linear objects. Moscow: Nauka.
3. Gnoensky, L. S., Kamensky, G. A. & Elzholtz, L. E. (1969). Mathematical foundations of the theory of controllable systems. Moscow: Nauka.
4. Egorov, A. I. (2004). Fundamentals of control theory. Moscow: Fizmatlit.
5. Kvakernaak, H. & Siwan, R. (1972). Linear Optimal Control Systems. New York: Wiley-Interscience.
6. Kirichenko, N. F., Matvienko V. T. (1996). Optimal synthesis of structures for linear control systems. Problems of control and informatics, No. 1,2, pp. 162–171.
7. Krasovsky, N. N. (1968). Motion control theory. Moscow: Nauka.
8. Roitenberg, E. N. (1971). Automatic control. Moscow: Nauka.
9. Lazarev, Yu. F. & Bondar, P. M. (2010). Fundamentals of the theory of sensitive elements of orientation systems. Kiev: Polytech.
10. Leontieva, V. V. & Kondratieva, N. A. (2017). Questions about methodology of analysis, control, regulation, identification and observation of gyroscopic systems. Visnyk Zaporiz'koho natsional'noho universytetu. Fyzyko-matematychni nauky, No. 2, pp. 157–169.
11. Jafarpour, S. (2019) On Small-Time Local Controllability. SIAM Journal on Control and Optimization, 58:1, pp. 425-446.
12. Moreau, C. (2019). Local Controllability of a Magnetized Purcell's Swimmer. IEEE Control Systems Letters, 3:3, pp. 637–642.
13. Dath, M., Jouan, P. (2019). Controllability of linear systems on Heisenberg groups. International Journal of Control, pp. 1–10.
14. Vrabel, R. (2018). Local null controllability of the control-affine nonlinear systems with time-varying disturbances. European Journal of Control, 40, pp. 80–86.
15. Merkin, D. R. (1974). Gyroscopic systems. Moscow: Nauka.
16. Merkin, D. R. (1971). Introduction to Motion Stability Theory. Moscow: Nauka.
17. Novitsky, V. V. (2008). Control of gyroscopic systems and other problems of analytical mechanics. Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. Mathematics and its application. Kiev: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Vol. 78.
18. Krasovsky, A. A. (Ed.). (1987). A handbook on the theory of automatic control. Moscow: Nauka.
19. Voronov, A. A. (1979). Stability, controllability, observability. Moscow: Nauka.
20. Leontieva, V. V., Kondratieva, N. A. (2011). Controllability of a positive dynamical system of balanced type. Visnyk Zaporiz'koho natsional'noho universytetu. Fyzyko-matematychni nauky, No. 1, pp. 58–66.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-12

## МОДЕЛЮВАННЯ ПРУЖНОПЛАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ТІЛАХ ПРИ ВІДПАЛІ ТА НАСТУПНИХ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ ВПЛИВАХ

**В. С. Михайлишин**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України  
vira.mykhailyshyn@gmail.com*

**Ключові слова:**

відпал, температура, напруження, деформації, пластичне деформування, термочутливість, зміцнення, метод скінченних елементів.

Запропоновано підхід до вивчення термомеханічних процесів в тілах протягом охолодження в процесі високотемпературного відпалу та наступних термомеханічних впливах. Цей підхід полягає у поетапному формулюванні та розв'язуванні з допомогою методу скінченних елементів задач про термомеханічний стан тіла на кожному етапі. Цими етапами є: 1) оцінка релаксованих в кінці відпалу напружень; 2) оцінка напружень у навантажених після відпалу тілах. Як приклад досліджено напружений стан у тонкому круглому диску з концентричним коаксіальним отвором при охолодженні в процесі відпалу та сумісному впливі після відпалу тиску і стаціонарного температурного поля.

---

## MODELING OF AN ELASTOPLASTIC PROCESSES IN SOLIDS DUE TO ANNEALING AND FOLLOWING THERMOMECHANICAL

**V. S. Mykhailyshyn**

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,  
National Academy of Sciences of Ukraine,  
vira.mykhailyshyn@gmail.com*

**Key words:**

annealing, temperature, stresses, strains, plastic deforming, thermosensitivity, hardening, finite element method.

This work is oriented on the sequential solving of two problems: 1) the estimation of the relaxed stresses in metallic products on cooling stage in its high-temperature annealing process; 2) the estimation of the stresses in these products with obtained distribution of stresses relaxed consequently to annealing, where the products are subjected to thermomechanical influences modeling the working conditions after annealing. Common character and particularity of both problems is presence of residual (initial) stresses. It is validated an importance of investigation concerning initial stress redistribution in cooling condition during annealing and condition modeling working conditions of annealed products. It is proposed the approach to study of thermomechanical processes in products during cooling in high-temperature annealing and following after annealing thermomechanical influences realized during exploitation of products and constructional elements with known initial previously acquired stresses. This approach consists in stage-by-stage formulating and solving using the finite element method (FEM) of problems about thermal and mechanical states with various initial and boundary conditions for every stage. These stages are: 1) the estimation of the stresses relaxed at the end of annealing; 2) the stress estimation in solids loaded after annealing. Within nonstationary heat conductivity theory and plastic nonisothermal yielding theory the thermomechanics problem has been formulated. It is assumed a quasi-static deformation processes. The isotropic materials are considered. The solids are cooled by heat exchange with environment. The criterion of plastic deformation is von Mises condition modified on the isotropic-kinematic hardening case. It is assumed a thermal sensitivity of material properties in the considered temperature spans and hardening possibility in plastic deformation. The developed software is adapted to solving of defined kind of two-dimensional problems for solids with initial stresses. A process of solution obtaining on the ground of developed FEM program system has been schematic illustrated.

As example the stress state is investigated in the thin circular disc of steel with concentric coaxial hole and heat-insulated front-face surfaces. The regularities concerning character and level of stresses in solids under simulated working conditions are established depending on model approaches of hardening material properties. The calculating aspects of problems solving are discussed including discretization of geometrical domain and step-by-step discretization. For comparison the results are realized concerning of common influence of pressure and thermal field on stress state in disc without initial stresses for elastic-plastic isotropic-kinematic hardenable material and assuming elastic behavior of material. According to the results of computer simulation experiment the stress distribution in disc with residual stresses, typical in weldments, is obtained in cooling conditions during annealing also in conditions of common influence of static mechanical loading and nonstationary thermal field after annealing. In this connection the estimation of stresses initial before cooling is validated. This estimation is based on known before annealing stress distribution and known experimental observations and theoretical facts. The results are obtained assuming an ideal plastic deformable material and for three hardening models. The isotropic, kinematic and isotropic-kinematic hardening cases have been considered. The results are presented according to step-by-step change of applied pressure and temperature. The regularities concerning character and level of stresses in solids under simulated working conditions are established depending on model approaches of hardening material properties. These regularities consist in appreciable influence of welding stresses, relaxed after annealing, on mechanical behavior in neighborhood of welded seam. The lesser significant distinctions in kind and appreciable quantitative distinctions in stress distribution depending on model approaches of material hardening properties have been observed (ideal material, kinematic hardening, isotropic-kinematic and isotropic hardening).

## 1. Вступ

Дана робота орієнтована на послідовне вирішення двох проблем:

- 1) оцінки релаксованих напружень у металевих тілах на стадії охолодження в процесі їх високотемпературного відпалу;
- 2) оцінки напружень в цих тілах з отриманим розподілом релаксованих в результаті відпалу напружень при термосилових впливах, моделюючих умови експлуатації цих виробів після відпалу.

Спільною ознакою і особливістю обох проблем є наявність залишкових (початкових) напружень. Через труднощі математичного характеру теоретичні дослідження можливі із застосуванням наближених методів і насамперед методу скінченних елементів (МСЕ). Однак відомі програмні комплекси МСЕ не працюють з об'єктами, що характеризуються початковим розподілом напружень. В даній роботі розроблене раніше [1, 2] програмне забезпечення, що базується на МСЕ, адаптоване і застосоване до розв'язування окресленого вище класу задач. Ця програмна система була доопрацьована і

вдосконалена для дослідження термомеханічних процесів в тілах з початковими напруженнями [3].

Термообробка відпалом є поширеним технологічним способом зняття чи пониження небажаних попередньо набутих залишкових напружень [4 – 6]. Такі залишкові напруження виникають, зокрема, в результаті зварювання елементів конструкцій, гартування [7] і ін.. Існує ряд робіт, пов'язаних із дослідженням процесу відпалу, в яких висвітлюються металознавчі, технологічні, експериментальні і теоретичні аспекти цієї проблеми [4 – 8]. При високих температурах відпалу в матеріалі мають місце процеси повзучості і явища на молекулярному та мікроструктурному рівнях, вплив яких на механічні процеси важко спрогнозувати в рамках існуючих теоретичних уявлень. Теоретичні дослідження термомеханічних станів при відпалі пов'язані із низкою труднощів, оскільки виникає проблема визначення нестационарного температурного поля, процеси описуються нелінійними фізичними співвідношеннями, теплофізичні характеристики

матеріалу мають в розглянутих температурних діапазонах складну залежність, зазвичай не описувану точними функціональними співвідношеннями. Незважаючи на ряд труднощів, ці роботи є важливими і актуальними, однак через недостатність теоретичних прогнозів базуються на дорогих, трудомістких і часто руйнівних експериментальних методах та на досвіді промислових підприємств. Зокрема, для зварних конструкцій ціна термічної обробки складає 25% – 28% від загальної вартості зварювальних робіт. Експериментальні методи не дозволяють в достатній мірі встановити загальні закономірності в поведінці напруженого стану.

Наступна проблема, пов'язана з відпадом, а саме щодо оцінки напружень у виробках, які пройшли відпал, характеризуються розподілом напружень, понижених у результаті відпалу, і експлуатуються при певних технологічних умовах, пов'язаних із дією сил чи температури, висвітлена в меншій мірі. Аналіз доступних літературних джерел вказує, що дослідження експлуатаційних можливостей відпалених виробів зводяться до вивчення мікроструктури та механічних властивостей [9, 10], до покращення конструктивних властивостей [11]. Тому питання можливості роботи конструкції із залишковими напруженнями в певних технологічних умовах також часто базується на досвіді чи експерименті. При теоретичному обґрунтуванні здатності конструкції працювати в даних технологічних умовах виникають подібні труднощі, як і при прогнозуванні напружень при відпалі.

Із цією проблемою тісно пов'язана також проблема про необхідність призначення відпалу або недоцільності цього виду термообробки, оскільки часто залишкові напруження виступають як необхідний, але не достатній фактор процесу руйнування [4]. Це означає, що доцільно порівняти результати щодо розподілу напружень у виробі із залишковими напруженнями, працюючому при певному силовому або температурному навантаженні після відпалу і без попереднього перед експлуатацією застосування відпалу.

Тому актуальність робіт з вивчення механічної поведінки тіл із залишковими напруженнями, які зазнають впливу експлуатаційних умов, пов'язана:

- 1) із практичною відсутністю таких робіт;
- 2) із недостатньо напрацьованими теоретичними та методичними підходами до вирішення цієї проблеми;
- 3) із важливістю теоретичного обґрунтування доцільності чи недоцільності призначення термообробки, метою якої є пониження залишкових напружень.

## 2. Мета роботи

Метою даної роботи є розробка теоретичного підходу до оцінки термомеханічних станів для виробів, зразків, конструктивних елементів із залишковими напруженнями як в умовах охолодження при високотемпературному відпалі, так і в умовах температурних та (або) статичних силових впливів, моделюючих експлуатаційні умови після відпалу. Цей підхід базується на формулюванні задачі нестационарної теплопровідності, задачі теорії пластичного течіння, вдосконалених на випадок існування початкових напружень розрахункових схемах МСЕ та відповідному програмному забезпеченні. При цьому достатньо фізично обґрунтоване прогнозування напружень пов'язане із визначенням нестационарного температурного поля, врахуванням можливості пластичного деформування, неоднорідності матеріалів, з врахуванням складної температурної залежності теплофізичних характеристик матеріалу, зміцнення матеріалу.

## 3. Формулювання задачі

У технологічному процесі відпалу виробів послідовно реалізуються три стадії: нагрів до високої температури, витримка при цій температурі протягом декількох годин та охолодження [4, 5, 7]. В даній роботі теоретична оцінка напружень в процесі охолодження після витримки базується на початковому розподілі температури, що є температурою витримки, та на достатньо обґрунтованому даліше початковому розподілі напружень, що є результатом перерозподілу напружень від початку відпалу протягом нагріву та витримки. Залишкові після відпалу

напруження є початковими для вивчення деформаційних процесів у виробі, який зазнає після відпалу впливу термічних і (або) механічних факторів.

Відомі теоретичні описи механічних процесів, спричинених температурними чи механічними впливами в пластично деформованих тілах, базуються на різних варіантах теорії пластичності залежно від того, які важливі фізичні ефекти бажано врахувати у формулюванні задачі та які теоретичні (аналітичні чи числові) підходи є вже напрацьовані для розв'язування розглядуваного класу задач. При моделюванні процесу відпалу на стадії охолодження та наступної експлуатації виробів після відпалу передбачається можливість пластичного деформування, зміцнення матеріалу та термочутливість характеристик матеріалу в діапазонах температур як охолодження, так і експлуатації. Врахування цих факторів є суттєвим для оцінки напружено-деформованого стану в тілі.

На основі відомих розподілів напружень в кінці витримки можна, нехтуючи малосуттєвим впливом фазових перетворень та явища повзучості на стадії охолодження, теоретично спрогнозувати кінцеві напруження в кінці відпалу виробу (які стають залишковими при наступній експлуатації виробу) і кінцеві напруження в результаті реалізованих експлуатаційних умов після відпалу.

Для ізотропного тіла, що підлягає термообробці відпалом з метою релаксації відомих залишкових технологічно набутих напружень  $\{\sigma^{(0)}\}^*$  до невідомого шуканого рівня  $\{\sigma^{(0)}\}^2$  і наступній його експлуатації при заданих термомеханічних умовах, формулюється послідовність задач на основі тих самих співвідношень теплопровідності та термопластичності з різними початковими умовами щодо розподілу температури і напружень та різними крайовими умовами охолодження за рахунок конвективного теплообміну і характеру прикладених статичних механічних зусиль. При цьому для дослідження термомеханічних процесів при відпалі розглядається етап охолодження, для якого є відомою початкова температура  $T_0$ , що є температурою витримки  $T_0^1$ , а на ос-

нові відомого перед відпалом розподілу напружень  $\{\sigma^{(0)}\}^*$  обґрунтовується розподіл релаксованих перед охолодженням напружень  $\{\sigma^{(0)}\} = \{\sigma^{(0)}\}^1$ .

Вихідна перед охолодженням недеформована область  $\Omega_0$ , зайнята тілом і обмежена границею  $\Gamma_0$ , віднесена до ортогональної декартової системи координат  $(x_1, x_2, x_3)$ . Припускається квазістатичність деформаційних процесів як на етапі охолодження в процесі відпалу, так і в наступних експлуатаційних умовах. Масовими силами нехтуємо. Високоградієнтні температурні поля і (або) поверхневі навантаження можуть спричинити явища пластичного деформування та високий рівень напружень.

Пропонується наступне формулювання задачі про визначення термонапруженого стану. Нестационарний тепловий процес при конвективному теплообміні із зовнішнім середовищем описується рівнянням теплопровідності [12]

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_q(T) \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

з початковою умовою

$$T(\{x\}, t) \Big|_{t=t_0} = T_0(\{x\}) \quad (2)$$

та крайовою умовою

$$-\lambda_q(T) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{01}} = \beta(T) (T(\{x\}, t) - T_c). \quad (3)$$

Величини у формулах (1)-(3) позначають:  $T$  – температуру в тілі,  $T_0(\{x\})$  – початковий розподіл температури в тілі,  $T_c$  – температуру середовища,  $t_0$  – початковий час у розглядуваному тепловому процесі,  $t$  – час,  $C(T)$  – питому об'ємну теплоємність,  $\lambda_q(T)$  – залежний від температури коефіцієнт теплопровідності,  $\{n\}$  – одиничну зовнішню нормаль до поверхні  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_{01} \subset \Gamma_0$  – частину поверхні тіла, через яку здійснюється тепловіддача в середовище з коефіцієнтом тепловіддачі  $\beta$ . Шукана температура  $T$  є фактором впливу на напружено-деформований стан як при охолодженні в процесі відпалу, так і при експлуатації в умовах нестационарних температур. Відповідно початковою умовою при охолодженні в процесі відпалу буде температура витримки  $T_0 = T_0^1$ , початкова температура при експлуатації –  $T_0 = T_0^2$ .



При формулюванні задачі про механічний стан тіла припускається, що початкові напруження як перед охолодженням при відпалі, так і перед експлуатацією після відпалу є самозрівноваженими, тобто задовольняють співвідношенням [13]

$$[B]' \{ \tilde{\sigma}^{(0)} \} = 0, \quad (4)$$

$$[n]' \{ \tilde{\sigma}^{(0)} \} \Big|_{\Gamma_{0\sigma}} = 0, \quad (5)$$

в яких  $\{ \tilde{\sigma}^{(0)} \}$  – вектор початкових напружень Піоли-Кірхгофа I-го роду [13],  $[B]$  – матриця диференціальних операторів геометричних співвідношень в системі координат  $(x_1, x_2, x_3)$  [14],  $[n]$  – матриця напрямних косинусів зовнішньої нормалі  $\{n\}$  до поверхні  $\Gamma_0, \Gamma_{0\sigma} \subset \Gamma_0$ . У співвідношеннях (4), (5) при векторному поданні  $\{ \tilde{\sigma}^{(0)} \}$  відповідної тензорної величини компоненти тензора напружень розміщені як у векторі  $\{ \sigma \} = \{ \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23} \}'$ , де символ «'» позначає операцію транспонування. У наступних співвідношеннях використані аналогічні векторні подання тензорів напружень, а також подання тензорів деформацій із розміщенням компонент як у векторі  $\{ \varepsilon \} = \{ \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23} \}'$ . При вивченні механічних процесів для III етапу відпалу початкові напруження  $\{ \sigma^{(0)} \} = \{ \sigma^{(0)} \}^1$  є набутими в кінці витримки. При моделюванні впливу експлуатаційних умов на механічну поведінку виробу після відпалу напруженнями  $\{ \sigma^{(0)} \} = \{ \sigma^{(0)} \}^2$  будуть напруження, релаксовані в результаті відпалу.

При температурних факторах впливу, попередньо отриманих як розв'язок задачі теплопровідності (1)-(3) у вигляді розподілу нестационарного температурного поля  $T(\{x\}, t)$ , і (або) механічних факторах, заданих силовим навантаженням  $\{P_n(\{x\}, t)\}$  на частині  $\Gamma_{0\sigma} \subset \Gamma_0$  початково недеформованої поверхні  $\Gamma_0$  та переміщеннями  $\{u^*(\{x\}, t)\}$  на частині  $\Gamma_{0u} \subset \Gamma_0$ , формулюється з допомогою наступних співвідношень задача про визначення напружено-деформованого стану (НДС). Цими співвідношеннями є рівняння рівноваги [13]

$$[B]'(\{ \tilde{\sigma}^{(0)} \} + \{ \tilde{\sigma} \}) + \{ X \} = 0, \quad (6)$$

геометричне лінійне співвідношення [13]

$$\{ \varepsilon \} = [B] \{ u \} \quad (7)$$

і рівняння стану теорії пластичного неізо-термічного течіння [15]

$$\begin{aligned} \{ d\sigma \} = & \left( [D]^{t+dt} - \frac{9}{4(\bar{\sigma}_i^t)^2} \times \right. \\ & \times \frac{[D]^{t+dt} \{ \bar{S} \}^t \{ \bar{S} \}^t ' [D]^{t+dt}}{H^t + 3G^{t+dt}} \Big) (\{ d\varepsilon \} - \{ d\varepsilon^T \}) + \\ & + \left( [dD] - \frac{9}{4(\bar{\sigma}_i^t)^2} \frac{[D]^{t+dt} \{ \bar{S} \}^t \{ \bar{S} \}^t ' [dD]}{H^t + 3G^{t+dt}} \right) \times \\ & \times (\{ \varepsilon \}^t - \{ \varepsilon^p \}^t - \{ \varepsilon^T \}^t) + \\ & + \frac{3}{2\bar{\sigma}_i^t} \cdot \frac{[D]^{t+dt} \{ \bar{S} \}^t \frac{\partial \tilde{\sigma}_i^t}{\partial T}}{H^t + 3G^{t+dt}} dT \quad (8) \end{aligned}$$

з відповідними крайовими умовами [13]

$$[n]'(\{ \tilde{\sigma}^{(0)} \} + \{ \tilde{\sigma} \}) \Big|_{\Gamma_{0\sigma}} = \{ P_n \}, \quad (9)$$

$$\{ u \} \Big|_{\Gamma_{0u}} = \{ u^* \}. \quad (10)$$

У співвідношеннях (6)-(10) введені позначення  $\{u\}$  для вектора переміщень;  $\{\varepsilon\}$ ,  $\{\varepsilon^p\}$ ,  $\{\varepsilon^T\}$  – відповідно для векторів повної, пластичної та температурної деформацій;  $\{\tilde{\sigma}\}$  – для вектора напружень Піоли-Кірхгофа I-го роду [13];  $\{\sigma\}$  – для вектора напружень Піоли-Кірхгофа II-го роду;  $\{\bar{S}\}$  – для вектора девіаторних компонент напружень, віднесених до центру  $\gamma$  зміщеної поверхні текучості в просторі напружень;  $\tilde{\sigma}_i$  – для інтенсивності напружень Коші [16];  $\Gamma_{0\sigma} \subset \Gamma_0$ ,  $\Gamma_{0u} \subset \Gamma_0$  ( $\Gamma_{0u} \cup \Gamma_{0\sigma} = \Gamma_0$ ,  $\Gamma_{0u} \cap \Gamma_{0\sigma} = \emptyset$ ). У співвідношенні (6) через  $\{X\}$  позначено масові сили. В рівнянні стану (8) матриці  $[D]$  і  $[dD]$  є відповідно матрицями пружних сталей та їх приростів у зв'язку із зміною температури;  $H$  – поточне значення тангенсу кута нахилу кривої деформування матеріалу «інтенсивність напружень – інтенсивність деформацій»;  $G$  – модуль пружності при зсуві;  $\bar{\sigma}_i = \sqrt{\frac{3}{2} \{ \bar{S} \} ' \{ \bar{S} \}}$  – інтенсивність напружень [16], віднесених до центру  $\gamma$  поверхні текучості. Верхні індекси  $t$  і  $t + dt$  відносяться до величин у моменти деформування  $t$  і  $t + dt$  відповідно.

За критерій пластичного деформування взято умову Мізеса, модифіковану на випадок ізотропно-кінематичного зміцнення [15]

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \{\bar{s}\}^t \{\bar{s}\}^t = \sigma_T + \beta^* b (\varepsilon_i^{pt})^m \quad (11)$$

$$(0 \leq \beta^* \leq 1)$$

$$\{\bar{s}\}^t = \{\bar{\sigma}\}^t - \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}' \bar{\sigma}_0^t,$$

$$\{\bar{\sigma}\}^t = \{\sigma\}^t - \{\gamma\}^t,$$

$$\bar{\sigma}_0^t = \frac{1}{3} \{1, 1, 1, 0, 0, 0\} (\{\sigma\}^t - \{\gamma\}^t),$$

де  $\sigma_T$  – межа текучості матеріалу;

$\varepsilon_i^p = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p}$  – інтенсивність пластичних

деформацій [16];  $\beta^*$ ,  $b$ ,  $m$  – параметри зміцнення матеріалу. Параметри зміцнення дозволяють при певних значеннях моделювати ізотропно-кінематичне, ізотропне, кінематичне зміцнення та ідеальний матеріал [15]. Умова пластичності (11) описує в просторі напружень поверхню з центром  $\{\gamma\}^t$ , яка обмежує область пружного деформування. В процесі деформування зміщення поверхні текучості приймається за правилом Ціглера [17]

$$\{d\gamma\} = d\mu (\{\sigma\}^t - \{\gamma\}^t), \quad (12)$$

де множник  $d\mu$  отриманий у роботі [18] відповідно до явного вигляду правої і лівої частин умови текучості (11) на основі відомого виразу [19] при неявному поданні правої і лівої частин умови пластичного деформування. Врахування ізотропно-кінематичного зміцнення при деяких властивих матеріалу значеннях параметрів  $\beta^*$ ,  $b$ ,  $m$  ізотропного розширення поверхні текучості та її кінематичного зміщення, згідно з правилом Ціглера [17] (12), дозволяє достатньо добре узгодити отримуваний НДС з кривою деформування матеріалу [15].

Подане співвідношеннями (1)-(12) формулювання задачі математичної фізики дозволяє описати теплові та механічні явища в металевих тілах і елементах конструкцій з попередньо набутих початковими напруженнями як в розглянутих технологічних процесах, так і в інших процесах при статичній механічній і (або) термообробці із супутнім істотним для оцінки напруженого стану проявом пластичного течіння, зміцнюваності матеріалу і температурної залежності його термомеханічних характеристик.

#### 4. Методика розв'язування задач

Існують труднощі математичного характеру при аналітичному розв'язуванні конкретних задач на основі наведеної постановки задачі, оскільки розподіли початкових напружень, температурні залежності термомеханічних характеристик матеріалу, фактори зовнішнього теплового і (або) механічного впливу (в загальному випадку змінні в часі) можуть бути задані не функціональними співвідношеннями, розглядувані області можуть бути неканонічними та просторово неоднорідними. Запропонований наближений підхід до розв'язування задач базується на МСЕ, для розрахункових схем якого перелічені труднощі не є першорядними та принциповими.

Розроблене програмне забезпечення стосовно визначення НДС [1-3] орієнтоване на розв'язування двовимірних задач: осесиметричних, в припущенні плоского напруженого та плоского деформованого станів.

Застосовуване для розв'язування задач нестационарної теплопровідності програмне забезпечення [1], яке базується на еквівалентній до задачі (1)-(3) варіаційній постановці та МСЕ, дозволяє досліджувати температурні поля протягом розглянутого теплового процесу, який впливає на деформаційні процеси і напружений стан. Розроблене програмне забезпечення для розв'язування з допомогою МСЕ задач механіки та термомеханіки про НДС у виробах, зразках і елементах конструкцій [1] вдосконалено [3] стосовно врахування початкових (залишкових) напружень, опису механічних процесів на основі фізично більш обґрунтованого рівняння стану (8) та модельного наближення ізотропно-кінематичного зміцнення матеріалу [15]. Розрахункові схеми програмної системи базуються на варіаційному рівнянні принципу віртуальної роботи [13]

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega_0} \{\delta\varepsilon\}' (\{\sigma^{(0)}\} + \{\sigma\}) d\Omega - \\ & - \iint_{\Gamma_{0\sigma}} \{\delta u\}' \{P_n\} d\Gamma - \\ & - \iiint_{\Omega_0} \{\delta u\}' \{X\} d\Omega = 0, \quad (13) \end{aligned}$$

яке визначене на множині кінематично допустимих переміщень із простору Соболева  $W_2^{(1)}$  [20], є частковим випадком відомого варіаційного рівняння для геометрично нелінійних теорій [13] та еквівалентним варіаційним формулюванням задачі про напружений стан. Оскільки початкові залишкові напруження самозрівноважені, то з використанням співвідношення (4) має місце

$$\iiint_{\Omega_0} \{\delta \varepsilon\}' \{\sigma^{(0)}\} d\Omega = 0$$




і варіаційне рівняння (13) приймає вигляд

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_0} \{\delta \varepsilon\}' \{\sigma\} d\Omega - \iint_{\Gamma_{0\sigma}} \{\delta u\}' \{P_n\} d\Gamma - \\ - \iint_{\Omega_0} \{\delta u\}' \{X\} d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Рівняння (14) не залежить від початкових напружень на відміну від відповідного варіаційного рівняння геометрично нелінійних теорій, залежного від початкових напружень [13]. У розробленому програмному забезпеченні масові сили  $\{X\}$  не враховуються.

МСЕ для фізично нелінійної задачі (6)-(12) про визначення напружено-деформованого стану реалізується для апроксимованої за методом «кроків» лінеаризованої задачі [2]. Деякі принципові аспекти організації обчислювального процесу, такі як формування послідовності апроксимованих за методом «кроків» задач, лінеаризація рівняння стану (8) за методом змінних параметрів пружності (МЗПП) або методом додаткових навантажень (МДН), конструювання лінеаризуючого ітераційного процесу, отримання ключових рівнянь МСЕ відповідно до рівняння стану (8) і ін. висвітлені в публікаціях [2, 3].

Вивчення термомеханічної поведінки виробу здійснюється як в процесі охолодження після витримки, так і при наступних після відпалу статичних механічних і (або) в загальному випадку нестационарних теплових впливах, моделюючих експлуатаційні. Результати розв'язування першої задачі, а саме залишкові напруження в кінці відпалу,

є початковим вихідним станом для розв'язування другої задачі із цієї послідовності. Реалізація розв'язування кожної із задач полягає у виконанні ряду формуючих вхідні дані і розрахункових операцій. На рис. 1 схематично проілюстрований процес отримання розв'язку на основі розробленої програмної системи МСЕ. В блоках, позначених , виконується побудова сітки скінченних елементів, яка включає нумерацію елементів; формування вузлових координат і масиву для ідентифікації локального номера вузла скінченного елемента відповідно до його глобальної нумерації; обчислюється ширина стрічкової матриці для системи алгебраїчних рівнянь, отримуваної в наступних розрахункових алгоритмах МСЕ. Також вказується кількість і геометричне розміщення матеріалів у випадку кускової неоднорідності; задається віднесений до вузлів розподіл температури, відомий або як початкова умова, або попередньо отриманий як розв'язок задачі теплопровідності. Крайові умови для задачі теплопровідності сформовані як вхідна інформація про вузли границі досліджуваної області, які ідентифікують зони конвективного теплообміну з охолоджуючим середовищем і зони відсутності теплових потоків. Для задачі про НДС чисельно модельовані крайові умови вказують у випадку силового і, можливо, теплового навантаження величину тиску і вузли, які знають механічного впливу або певним чином закріплені. Ця інформація відображає як конкретний об'єкт дослідження, так і умови його навантаження і є вхідною для наступного розв'язування задач або теплопровідності, або визначення НДС. Розрахункові блоки, позначені  і , є програмними системами для розв'язування відповідно задачі теплопровідності та визначення НДС. При розв'язуванні цих задач формуються файли вхідних залежних від температури характеристик матеріалу. Початковими напруженнями  $\{\sigma^{(0)}\}$  для задачі про НДС при охолодженні в процесі відпалу є напруження  $\{\sigma^{(0)}\}^1$  в кінці витримки. Напруження  $\{\sigma^{(0)}\} = \{\sigma^{(0)}\}^2$  при моделюванні силових і (або) теплових навантажень після відпалу отримані в результаті розв'язування задачі для етапу охолодження при відпалі.



[21], а розв'язок задачі б) при пружному деформуванні – в [22]. Результати тестових розрахунків добре узгоджуються з аналітичними результатами як для розглянутих варіантів силового і температурного навантажень у випадку плоского напруженого стану, так і для інших тестових задач в осесиметричному випадку і у випадку плоского деформованого стану.

**5. Дослідження термонапруженого стану тонкого круглого диска з концентричним отвором в умовах охолодження при відпалі та в умовах сумісного впливу після відпалу силового навантаження і стаціонарного температурного поля**

Для теоретичної оцінки напружень в кінці відпалу розглядається стадія охолодження як заключна стадія відпалу. Як приклад досліджується еволюція теплового і напружено-деформованого станів на стадії охолодження при відпалі та при наступному механічному і термічному навантаженні тонкого круглого диску з коаксіальним концентричним отвором радіуса  $R_1$ , із зовнішнім радіусом  $R_2$  та термоізованими лицьовими поверхнями. Диск характеризується відомими набутими перед початком відпалу напруженнями  $\{\sigma^{(0)}\}^*$ , які частково релаксуються протягом нагріву та витримки до рівня  $\{\sigma^{(0)}\}^1$ . Диск як при охолодженні в процесі відпалу, так і після відпалу підпадає під такі теплові чи механічні фактори впливу, при яких реалізується плоский напружений стан.

Приведені нижче дослідження виконані в полярній системі координат  $(r, \theta)$  із вказаними нижче значеннями параметрів зміцнення  $\beta^*, b, m, \{\gamma\}^t$  для використовуваного матеріалу, які входять в умову пластичного течіння (11). У зв'язку із симетричністю геометричної конфігурації та умов навантаження розрахунки виконані в області  $\Omega_0$ , що є четвертою частиною діаметрального перерізу диска (рис. 2).

Початковою умовою задачі теплопровідності для процесу охолодження при відпалі буде умова (2) при  $T_0 = T_0^1$  (температура витримки). При термоізоляції лицьових поверхонь, конвективному теплообміні че-

рез границю отвору  $r = R_1$  та зовнішню границю диска  $r = R_2$  і відсутності теплових потоків через границі  $\Gamma_{01}$  та  $\Gamma_{02}$  області  $\Omega_0$  (рис. 2) крайові умови задачі теплопровідності при охолодженні мають вигляд:

$$\begin{aligned} -\lambda_q \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_1} &= -\beta(T - T_C), \\ -\lambda_q \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_2} &= \beta(T - T_C), \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} &= \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

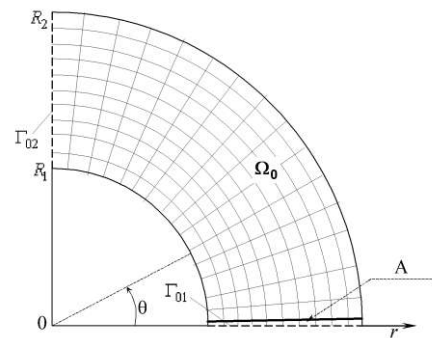


Рис. 2. Розрахункова область та скінченноелементна дискретизація

При незміщуваності частково обмежуючих область  $\Omega_0$  перерізів  $\Gamma_{01}$  та  $\Gamma_{02}$  (рис. 2) крайові умови на цих перерізах для задач визначення НДС як при охолодженні, так і при моделюванні впливу термосилового навантаження після відпалу мають вигляд:

$$u_\theta \Big|_{\theta=0} = 0, u_\theta \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0 \quad (16)$$

і забезпечують нерозривність переміщень у цілому диску. Вигляд граничних умов при  $r = R_1$  та  $r = R_2$  для задачі про напруження залежить від характеру прикладених механічних зусиль чи їх відсутності.

При дослідженні процесу охолодження, який є етапом високотемпературного відпалу, важливо знати початкові напруження, тобто залишкові напруження  $\{\sigma^{(0)}\}^1$  в кінці витримки. Така оцінка вихідного перед охолодженням стану відпалюваного виробу є важливою для встановлення реалістичного перерозподілу напружень теоретичними і розрахунковими підходами.

Розрахунки виконані для диска при  $R_1 = 0,05$  м,  $R_2 = 0,1$  м. Припускалось, що відпал призначений для релаксації залишкових радіальних  $\sigma_r^{(0)*} = \sigma_r^{(A)}$  і кільцевих  $\sigma_\theta^{(0)*} =$

$\sigma_{\theta}^{(A)}$  напружень, розподілених вздовж радіальної координати відповідно до рис. 3. Такий розподіл характерний для залишкових напружень в зварних з'єднаннях [4, 7], де в даному випадку зварний коловий стиковий шов проходить по дузі радіуса  $r = (R_1 + R_2)/2$  і з'єднує два кільцеві диски.

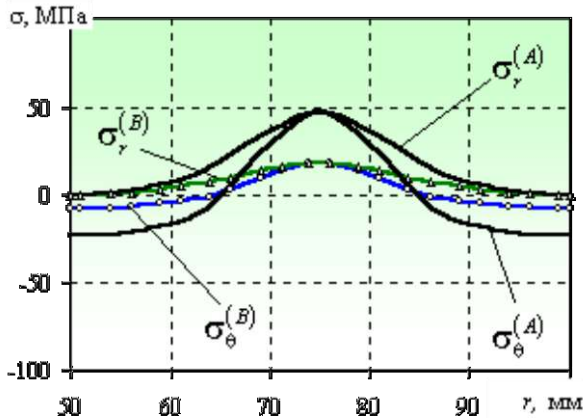


Рис. 3. Розподіл напружень  $\{\sigma^{(0)}\}^*$  в диску перед початком відпалу ( $\sigma_r^{(A)}, \sigma_{\theta}^{(A)}$ ) та напружень  $\{\sigma^{(0)}\}^1$  перед початком охолодження в процесі відпалу ( $\sigma_r^{(B)}, \sigma_{\theta}^{(B)}$ )

Вплив домінуючих при витримці виробу у високих температурах процесів повзучості та фазових перетворень на перерозподіл залишкових напружень важко спрогнозувати теоретично. Тому в даній роботі оцінка початкових перед охолодженням напружень  $\{\sigma^{(0)}\}^1$ , поданих на рис. 3 розподілом вздовж радіальної координати радіальних  $\sigma_r^{(B)}$  та кільцевих  $\sigma_{\theta}^{(B)}$  напружень, базується на вихідному перед відпалом розподілі ( $\sigma_r^{(A)}, \sigma_{\theta}^{(A)}$ , рис. 3) та на почерпнутих із роботи [4] експериментальних спостереженнях і теоретичних фактах, зміст яких зводиться до наступних положень:

1) Інтенсивність максимальних напружень перед відпалом не перевищує величини приблизно рівної межі текучості  $\sigma_T$  матеріалу при температурі середовища [4].

2) На початку витримки інтенсивність максимальних напружень не перевищує значення  $\sigma_T$  при температурі витримки.

3) Протягом витримки експериментально спостерігається незначне зниження напружень порівняно з релаксацією напружень на етапі нагріву при відпалі [4, 7]. При

цьому інтенсивність максимальних напружень в кінці витримки понижується приблизно в 2,5-3 рази відносно залишкових напружень перед початком відпалу [4].

4) Для зварних з'єднань має місце експериментально спостережувана і описана в літературі [4] закономірність, яка полягає у подібності одноосьових та двоосьових епюр залишкових напружень перед відпалом та після відпалу, якщо в зварному з'єднанні відсутні зони із нестійкими структурами.

Диск із термоізолюваними лицьовими поверхнями після витримки при температурі  $T_0 = T_0^1 = 600^\circ\text{C}$  охолоджується шляхом конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем температури  $T_c = 20^\circ\text{C}$  з коефіцієнтом тепловіддачі  $\beta = 5,6 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ . При відсутності механічних навантажень в процесі відпалу крайовими умовами задачі про НДС будуть умови (16) та умови

$$\sigma_r \Big|_{r=R_1} = 0, \quad \sigma_r \Big|_{r=R_2} = 0.$$

Залишкові напруження  $\{\sigma^{(0)}\}^2$  в кінці відпалу, отримані в результаті послідовного розв'язання для етапу охолодження задачі теплопровідності та задачі про температурні напруження, спричинені цим охолодженням, є вихідним залишковим напруженим станом у диску, який зазнає впливу наступних після відпалу модельованих експлуатаційних умов. Прогнозування виникаючих при цьому напружень є наступним етапом даного дослідження.

Після охолодження в процесі відпалу до температури середовища диск із додатково термоізолюваною зовнішньою границею  $r = R_2$  зазнає сумісного впливу силового навантаження  $P_n$  на контур отвору  $r = R_1$  і стаціонарного температурного поля із заданою на границі отвору температурою  $T_{int}$ . Розподіл цього температурного поля має вигляд

$$T(r, \theta) = \frac{T_{int}}{\ln \frac{R_2}{R_1} \ln \frac{R_2}{r}} \quad (17)$$

і отриманий в [22] як розв'язок задачі теплопровідності з крайовими умовами

$$T \Big|_{r=R_1} = T_{int}, \quad T \Big|_{r=R_2} = 0.$$

Крайовими умовами задачі визначення температурних напружень в області  $\Omega_0$  будуть умови (16) і умови

$$\sigma_r \Big|_{r=R_1} = P_n, \quad \sigma_r \Big|_{r=R_2} = 0.$$

Досліджується вплив тиску величиною  $P_n = 60$  МПа на границю отвору і стаціонарного температурного поля (17) при  $T_{int} = 80$  °C на НДС диска із залишковими після відпалу напруженнями  $\{\sigma^{(0)}\}^2$ . Розрахунки виконані для диска із сталі 0X13. Для сталі 0X13 в розглядуваному діапазоні температур спостерігається температурна залежність коефіцієнта теплопровідності  $\lambda_q$ , модуля пружності  $E$  і коефіцієнта Пуассона  $\nu$

[23] (табл.1). Межа текучості  $\sigma_T$  лінійно знижується від 96 МПа при 20 °C [15] до 1 МПа при 1000 °C. Інші характеристики приймалися постійними: питома об'ємна теплоємність  $C = 3592,44$  кДж/(м<sup>3</sup>·К), коефіцієнт лінійного температурного розширення  $\alpha_T = 11,0 \cdot 10^{-6}$  ·К [23]. Параметрами ізотропного зміцнення для сталі 0X13 є  $\beta^* = 0,515$ ,  $b = 2208$  МПа,  $m = 0,435$  [15]. Параметр кінематичного зміцнення  $\{\gamma\}^t \neq 0$  для  $t > 0$  визначається формулою (12).

**Таблиця 1.** Температурна залежність характеристик сталі 0X13 [23]

$T, \text{ }^\circ\text{C}$	$\lambda_q, \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$	$T, \text{ }^\circ\text{C}$	$E, \text{ ГПа}$	$\nu$
20	26,7	20	224,78	0,268
100	27,7	100	224,78	0,268
200	27,7	149	211,68	0,268
300	28,0	260	204,09	0,268
400	27,7	427	190,99	0,272
500	27,2	482	184,77	0,276
600	26,4	538	177,20	0,282
700	25,5	593	164,10	0,289
800	25,1	649	151,69	0,300
900	26,7	704	140,66	0,316
1000	27,7	1000	72,89	0,316

Розв'язування задач як для охолодження при відпалі, так і при наступних після відпалу термомеханічних впливах виконано для диска при дискретизації області  $\Omega_0$  сіткою із 150 скінченних елементів, поданою на рис. 2. Сітка утворена перетином концентричних дуг при рівномірному поділі відрізка  $[R_1, R_2]$  на 10 відрізків і рівномірному поділі кута  $[0, \pi/2]$  радіальними прямими на 15 кутів. Графіки розподілів отримуваних напружень будуть подані для перерізу  $A$ , вказаному на рис. 2, який перетинає в радіальному напрямку точки інтегрування скінченних елементів.

*Обчислювальні аспекти та аналіз результатів досліджень для етапу охолодження в процесі відпалу.* На цьому етапі дослідження виконані на основі моделі ізотропно-кінематичного зміцнення матеріалу ( $\{\gamma\}^t \neq 0$  для  $t > 0$ ,  $\beta^* = 0,515$ ).

У результаті розв'язування задачі теплопровідності з початковим кроком по часу  $(\Delta t)_0 = 1$  с і укрупненими часовими інтервалами в наступних обчисленнях отриманий при дискретизації на  $N_T = 4801$  кроків не-

стаціонарний, приведений до вузлів скінченно-елементної сітки, тепловий процес. Тривалість цього процесу складає  $t_{END} = 20000 \approx 5,5$  год. При цьому встановлюється практично рівномірний розподіл температури величиною  $T \approx 154$  °C. Ця температура є кінцевою при обчисленнях, оскільки наступне пониження близької до однорідної температури не викликає напружень. Укрупнення інтервалів часу в міру зменшення градієнтності температурного поля пов'язане із недоцільністю здійснення більшої кількості обчислень при збереженні приблизно такої ж точності отримуваних результатів. Інформація про отриманий тепловий режим у вигляді відповідних розподілів температури для дискретних часових моментів є вхідною інформацією для задачі про температурні напруження.

Розв'язування задачі теплопровідності і задачі аналізу НДС здійснено при різній дискретизації часового інтервалу процесу охолодження. Розрахункові температурні напруження отримані протягом 33 кроків, для яких природи часу є більшими, ніж для

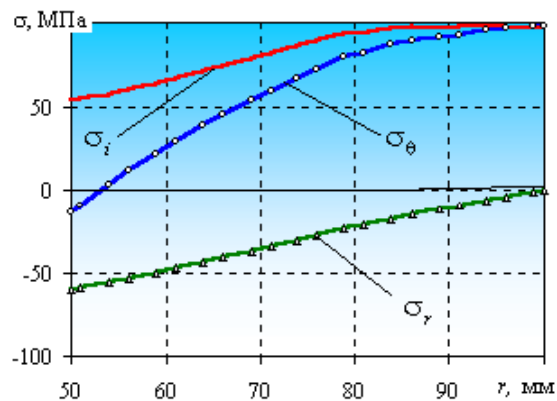
задачі теплопровідності. Укрупнення проміжків часу при розрахунку напружень здійснено для забезпечення більш високої швидкості обчислень при збереженні точності. Встановлено, що при даних умовах охолодження відбувається пружне деформування матеріалу, яке не спричинює небажаного перерозподілу напружень на стадії охолодження при відпалі. В результаті в диску отримано розподіл напружень  $\{\sigma^{(0)}\}^2$ .

Результати розрахунків свідчать, що зростання напружень в результаті охолодження не відбувається, що є бажаним ефектом з точки зору релаксації напружень при відпалі. Відомі експериментальні дані [7] і результати теоретичних досліджень [4, 18] свідчать про можливе підвищення на етапі охолодження рівня напружень, попередньо знижених в кінці витримки, за рахунок зростання модуля пружності  $E$  та межі текучості матеріалу  $\sigma_T$  із пониженням температури. Для часткового попередження цього явища створюють умови для реалізації практично рівномірного охолодження з однорідно розподіленою температурою шляхом остигання виробу в печі і наступним його вивантаженням при температурі 150 – 200 °C [4]. В даному випадку остигання при низьких градієнтах температур отримано за рахунок термоізоляції лицьових поверхонь, яка перешкоджає тепловіддачі в середовище. Тому зниження температури внаслідок теплообміну із середовищем через границю отвору  $r = R_1$  і границю  $r = R_2$  є повільним і практично рівномірним. Шляхом термоізоляції великих ділянок поверхні при охолодженні може бути в значній мірі вирішена технологічна проблема про непідвищення рівня напружень після витримки або його незначне підвищення, підтверджене розрахунковими результатами моделювання еволюції розгляданого термомеханічного процесу. Це дозволить значно скоротити час перебування виробів в печі, більш ефективно використовувати піч для відпалу інших виробів та підвищити енергозбереження.

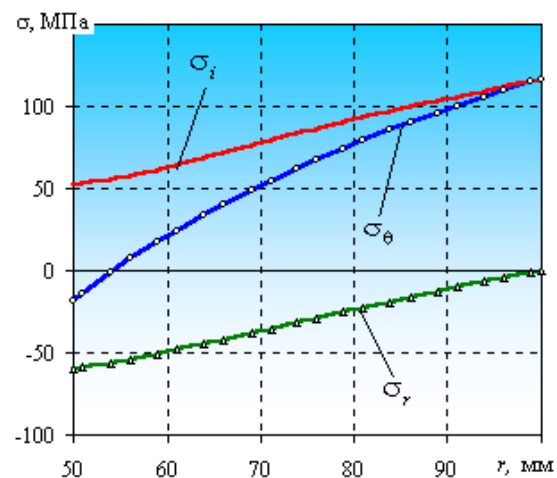
*Обчислювальні аспекти та аналіз результатів досліджень сумісного впливу після відпалу силового навантаження і стаціонарного температурного поля.* Розрахункові результати для задачі про напруження отримані при 4 кроках навантаження, відпо-

відно до яких зростає від нульового значення механічне навантаження із приростом  $\Delta P_n = 15$  МПа та зростає від  $T = T_C$  із приростом  $\Delta T_{int} = 20$  °C температура на границі отвору.

Для порівняння реалізовані результати стосовно впливу цих факторів на напруження в диску із відсутніми початковими напруженнями для пружно-пластичного матеріалу при його ізотропно-кінематичному зміцненні (рис. 4) та в припущенні пружної поведінки матеріалу (рис. 5). Відповідні графіки розподілів напружень  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  та інтенсивності напружень  $\sigma_i$  подані на рис. 4, 5. При цьому для пружно-пластичного матеріалу розрахунково спостерігається пружний характер деформування протягом початкових трьох кроків.



**Рис. 4.** Розподіл напружень в диску без початкових напружень під впливом силового навантаження на контур отвору та стаціонарного температурного поля для пружно-пластичного матеріалу при його ізотропно-кінематичному зміцненні

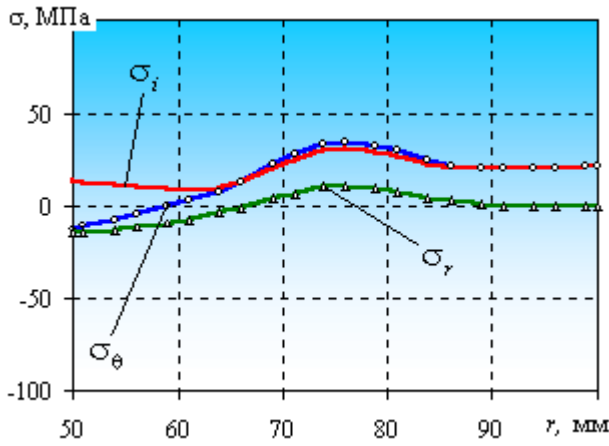


**Рис. 5.** Розподіл напружень в диску без початкових напружень під впливом силового навантаження на контур отвору та стаціонарного температурного поля в припущенні пружного характеру деформування

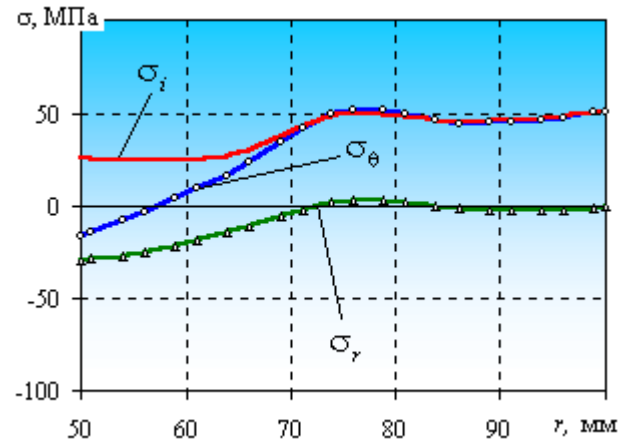


Наступні дослідження виконані в припущенні ідеального матеріалу та в рамках модельних наближень ізотропно зміцнюваного, кінематично та ізотропно-кінематично зміцнюваних матеріалів. Диск із релаксованими внаслідок відпалу напруженнями  $\{\sigma^{(0)}\}^2$  підпадає під ті ж умови. Результати

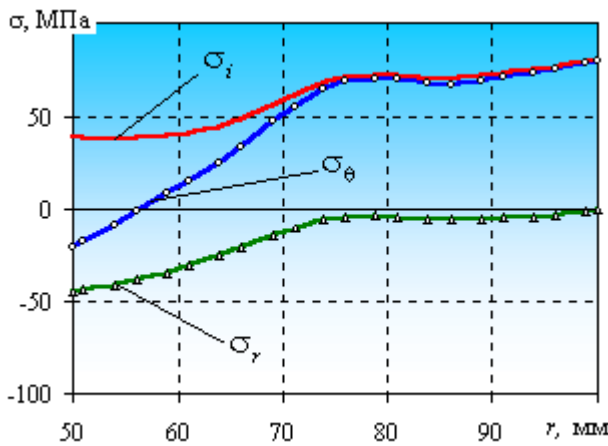
(рис. 6) ілюструють покрокову зміну напружень, які співпадають для ідеального пружно-пластичного матеріалу і в припущенні його зміцнюваності на основі трьох моделей зміцнення протягом 3 кроків деформування (рис. 6а-в).



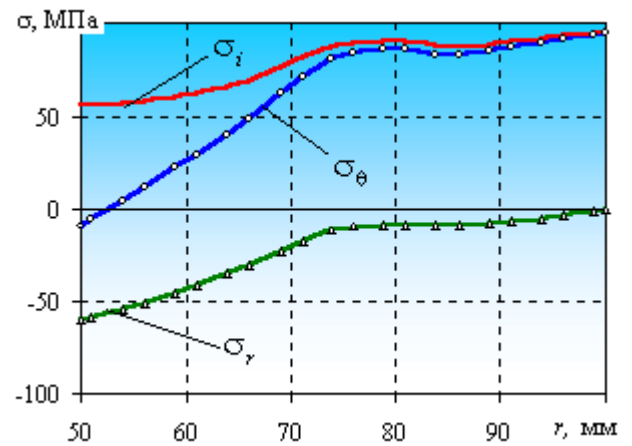
а)  $P_n = 15$  МПа,  $T_{int} = 20^\circ\text{C}$



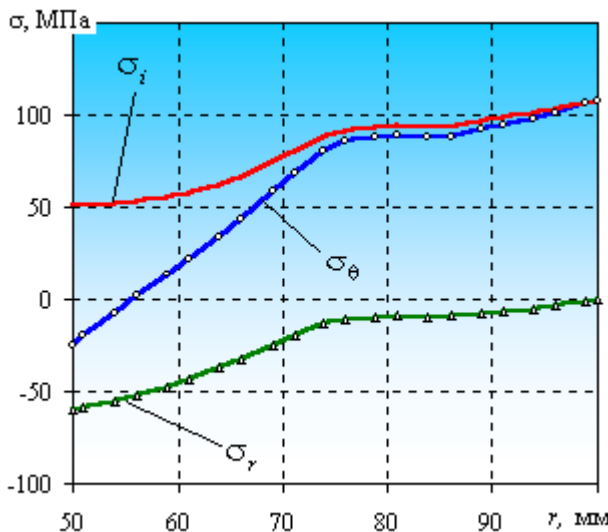
б)  $P_n = 30$  МПа,  $T_{int} = 40^\circ\text{C}$



в)  $P_n = 45$  МПа,  $T_{int} = 60^\circ\text{C}$



г)  $P_n = 60$  МПа,  $T_{int} = 80^\circ\text{C}$



д)  $P_n = 60$  МПа,  $T_{int} = 80^\circ\text{C}$

**Рис. 6.** Покрокова зміна розподілів напружень в диску з початковими напруженнями  $\{\sigma^{(0)}\}^2$  під впливом силового навантаження на контур отвору та стаціонарного температурного поля:  
 а – 1-й крок, пружність;  
 б – 2-й крок, пружність;  
 в – 3-й крок, пружність;  
 г – 4-й крок, пластичність, ідеальний або кінематично зміцнюваний матеріал;  
 д – 4-й крок, пластичність, ізотропно або ізотропно-кінематично зміцнюваний матеріал

Співпадіння цих результатів пов'язане з пружним характером поведінки розгляданого фізичного об'єкта протягом 3 кроків при досягнутому рівні термосилового навантаження. При цьому формування напружень відбувається шляхом сумування залишкових після відпалу напружень та напружень, спричинених впливом тиску і температури із досягнутими на цьому кроці рівнями у початково ненапруженому диску.

При наступному довантаженні на 4 кроці відбувається пластичне деформування матеріалу. Розрахункові результати на рис. 6г проілюстровані розподілами напружень у радіальному напрямку для ідеального ( $\{\gamma\}^t = 0, \beta^* = 0$ ) і кінематично зміцнюваного ( $\{\gamma\}^t \neq 0$  для  $t > 0, \beta^* = 0$ ) пружно-пластичного матеріалу. Ці результати для розгляданого фізичного об'єкта та умов навантаження співпадають. Також співпадають результати розв'язання задачі в припущенні ізотропно-кінематичного ( $\{\gamma\}^t \neq 0$  для  $t > 0, \beta^* = 0,515$ ) і ізотропного зміцнення ( $\{\gamma\}^t \neq 0$  для  $t > 0, \beta^* = 1$ ) матеріалу, подані на рис. 6д. Наявність початкових напружень та зон пластичного течіння істотно впливає на розподіл остаточних напружень, поданих на рис. 6г або рис. 6д (для порівняння див. рис. 4, 5). На основі узгодженості використовуваної моделі ізотропно-кінематичного зміцнення та експериментальної кривої деформування матеріалу [15] результати на рис. 6д є фізично більш обґрунтованими в порівнянні із результатами з рис. 6г. Нехтування зміцненням помітно впливає на оцінку рівня результуючих залишкових напружень і дозволяє отримати лише якісний розподіл напружень.

## 6. Висновки

Окреслено клас задач термомеханіки з вивчення впливу нестационарного процесу охолодження на перерозподіл залишкових

напружень в тілах при їх високотемпературному відпалі та впливу наступних після відпалу термомеханічних факторів, моделюючих експлуатаційні умови. Сформульовано відповідну задачу термомеханіки в рамках теорій нестационарної теплопровідності та термопластичності з урахуванням важливих для оцінки напруженого стану явищ термочутливості, пластичного деформування та зміцнюваності матеріалів. Як приклад для технологічно набутих у тонкому круглomu диску з концентричним коаксіальним отвором зварних напружень і відповідно оціненого їх перерозподілу на етапах нагріву та витримки при відпалі отримано з допомогою методу скінченних елементів остаточний в кінці відпалу напружений стан. Цей напружений стан є початковим для наступного дослідження його перерозподілу в умовах сумісного впливу тиску заданої величини на границю отвору та стаціонарного температурного поля. Встановлено закономірності розподілу напружень в диску залежно від модельованого варіанта зміцнення матеріалу. Ці закономірності полягають у помітному впливі релаксованих після відпалу зварних напружень на механічну поведінку в околі зварного шва. Спостерігаються менш значні якісні і помітні кількісні відмінності в розподілах напружень залежно від модельних наближень зміцнюючих властивостей матеріалу (ідеальний матеріал, кінематичне зміцнення, ізотропно-кінематичне та ізотропне зміцнення). Розроблена методика розв'язування задач механіки може бути використана для більш широкого класу задач у цьому напрямку. Перспективними виглядають прогнозування залишкового напруженого стану після технологічної операції гартування виробів, після наступної термообробки відпалом та моделювання експлуатаційних механічних чи (або) теплових впливів гартованих і відпалених виробів.

## Література

1. Будз С. Ф., Дробенко Б. Д., Михайлишин В. С. Компьютерное моделирование термоупруго-пластического поведения механических систем. Львов: Ин-т прикл. проблем механики и математики АН Украины, 1992. 60 с.
2. Mykhailyshyn V. S. Iterative Procedures for Problems of Nonisothermal Elastoplasticity with Isotropic Kinematic Hardening. *Materials Science*. 1999. Vol. 35, No 4. P. 561–571.

3. Гачкевич О., Михайлишин В., Равська-Скотнічна А. Числова методика розв'язування задач термомеханіки тіл у разі охолодження в процесі високотемпературного відпалювання. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ.* 2007. Вип. 12. С. 78–92.
4. Винокуров В. А. Отпуск сварных конструкций для снижения напряжений. Москва: Машиностроение, 1973. 213 с.
5. Alberg H. Material Modelling for Simulation of Heat Treatment. Lulea: University of Technology, 2003. 22 p.
6. Wang J., Lu H., Murakawa H. Numerical Simulation of Mechanical Behavior during Local Postweld Heat Treatment. *Journal of Materials*. 2000. Vol. 13, No 2. P. 722–727.
7. Касаткин Б. С., Прохоренко В. М., Чертов И. М. Напряжения и деформации при сварке. Киев: Вища шк., 1987. 246 с.
8. Khrebtov O. Investigation of electrocontact annealing in the production process of steel welding wire. *Технологічний аудит та резерв виробництва*. 2017. № 4/1(36). С. 30–34.
9. Emre H. E., Kacar R. Effect of Post Weld Heat Treatment Process on Microstructure and Properties of Friction Welded Dissimilar Drill Pipe. *Materials Research*. 2015. Vol. 18, No 3. P. 503–508.
10. Liu P., Sun S., Xu S., Cao M., Feng K. Influence of holding time of annealing treatment on microstructure and properties of TIG welded joint for P91 heat-resistant steel tube. *Kovove Mater.* 2018. No 56. P. 245–252.
11. Федосов О. В., Карпович О. В., Перерва В. О. Застосування електронного променя для відпалу зварних з'єднань титанового сплаву ВТ23. *Авиационно-космическая техника и технология*. 2015. № 6(123). С. 52–57.
12. Коваленко А. Д. Термоупругость. Киев: Вища шк., 1975. 216 с.
13. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / пер. с англ. Москва: Мир, 1987. 542 с.
14. Сахаров А. С., Альтенбах И. Метод конечных элементов в механике твердых тел. Киев: Вища шк., 1982. 480 с.
15. Морозов Е. М., Никишков Г. П., Черныш Т. А. Неизотермическая модель упругопластического тела с комбинированным законом упрочнения и ее применение для МКЭ-расчета тел с трещинами. *Аналитические и численные методы решения краевых задач пластичности и вязкоупругости*. Свердловск: Уральск. научн. центр, АН СССР. 1986. С. 87–94.
16. Писаренко Г. С., Можаровский Н. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: справ. пособие. Киев: Наук. думка, 1981. 496 с.
17. Ziegler H. A modification of Prager's hardening rule. *Quart. Appl. Math.* 1959. Vol. 17. P. 55–65.
18. Гачкевич О. Р., Михайлишин В. С. Математичне моделювання і дослідження напруженого стану тіл у процесі охолодження при високотемпературному відпалі. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2004. Т. 47, № 3. С. 186–198.
19. Allen D. H., Haisler W. E. A theory for analysis of thermoplastic materials. *Comput. & Struct.* 1981. Vol. 13, No 1. P. 129–135.
20. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. Москва: Мир, 1982. 488 с.
21. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Москва: Наука, 1969. 420 с.
22. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости / пер. с англ. Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. 576 с.
23. Теплотехнический справочник / под ред. В. Н. Юренева, П. Д. Лебедева: в 2 т. Москва: Энергия, 1976. Т. 2. 897 с.

### References

1. Budz, S. F., Drobenko, B. D. & Mykhailyshyn, V. S. (1992). Computer simulation of thermoelastoplastic behavior of mechanical system. Lvov: In-te for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Academy of Scien.
2. Mykhailyshyn, V. S. (1999). Iterative Procedures for Problems of Nonisothermal Elastoplasticity with Isotropic Kinematic Hardening. *Materials Science*, Vol. 35, No 4, pp. 561–571.

3. Hachkevych, O., Mykhailyshyn, V. & Rav'ska-Skotnichna, A. (2007). A numerical policy of solving of thermomechanics problems for bodies during cooling in high-temperature annealing process. *Visn. Lviv Univ., Ser. Prykl. Mathem. ta Inform.*, Issue 12, pp. 78–92.
4. Vinokurov, V. A. (1973). Tempering treatment of welded structures for stress reduction. Moscow: Mashynostroyeniye.
5. Alberg, H. (2003). *Material Modelling for Simulation of Heat Treatment*. Lulea: University of Technology.
6. Wang, J., Lu, H. & Murakawa, H. (2000). Numerical Simulation of Mechanical Behavior during Local Postweld Heat Treatment. *Journal of Materials*, Vol. 13, No 2, pp. 722–727.
7. Kasatkin, B. S., Prokhorenko, V. M. & Chertov I. M. (1987). Stresses and strains under welding. Kyev: Vyshha shkola.
8. Khrebtov, O. (2017). Investigation of electrocontact annealing in the production process of steel welding wire. *Tekhnologicheskij audit i rezerv proizvodstva*, No 4/1(36), pp. 30–34.
9. Emre, H. E. & Kacar, R. (2015). Effect of Post Weld Heat Treatment Process on Microstructure and Properties of Friction Welded Dissimilar Drill Pipe. *Materials Research*, Vol. 18, No 3, pp. 503–508.
10. Liu, P., Sun, S., Xu, S., Cao, M. & Feng, K. (2018). Influence of holding time of annealing treatment on microstructure and properties of TIG welded joint for P91 heat-resistant steel tube. *Kovove Mater.*, No 56, pp. 245–252.
11. Fedosov, O. V., Karpovych, O. V. & Pererva, V. O. (2015). An application of the electron ray for annealing of weldments of titanium alloy VT23. *Aviacionno-kosmicheskaya tekhnika i tehnologiya*, No 6(123), pp 52–57.
12. Kovalenko, A. D. (1975). *Thermoelasticity*. Kyev: Vyshha shkola.
13. Vaidzu, K. (1987). *Variational methods in elasticity and plasticity theory*. Moscow: Mir.
14. Sakharov, A. S. & Altenbakh, I. (1982). *Finite element method in solids mechanics*. Kyev: Vyshha shkola.
15. Morozov, Ye. M., Nikishkov, G. P. & Chernysh, T. A. (1986). Nonisothermal model of elastoplastic body with combined hardening law and its application for FEM calculating of bodies with cracks. Analytical and numerical methods of solving of plasticity and viscoelasticity boundary problems. Sverdlovsk: Ural'skij nayechnyj centr, Academy of Scien. of SUSR, pp. 87–94.
16. Pysarenko, H. S. & Mozharovskij, N. S. (1981). *Equations and boundary problems of plasticity and creep theory: reference aid*. Kyev: Naukova dumka.
17. Ziegler, H. (1959). A modification of Prager's hardening rule. *Quart. Appl. Math.*, Vol. 17, pp. 55–65.
18. Hachkevych, O. R. & Mykhailyshyn, V. S. (2004). Mathematical simulation and investigation of the stress state of bodies in cooling process during high-temperature annealing. *Mat. met. ta fiz.-mekh. polya*, Vol. 47, No 3, pp. 186–198.
19. Allen, D. H. & Haisler, W. E. (1981). A theory for analysis of thermoplastic materials. *Comput. & Struct.*, Vol. 13, No 1, pp. 129–135.
20. Rikhtmajyer, R. (1982). *Principles of modern mathematical physics*. Moscow: Mir.
21. Kachanov, L. M. (1969). *Fundamentals of plasticity theory*. Moscow: Nauka.
22. Timoshenko, S. P. & Hudyer, J. (1975). *Elasticity theory*. Moscow: Nauka.
23. Yurenev, V. N. & Lebedev, P. D. *Thermotechnical handbook*. (1976). In 2 vol. Vol. 2. Moscow: Energiya.

УДК 621.315: 519.6

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-13

## МОДЕЛЮВАННЯ СТАНУ ЕЛЕКТРОНА У ЦИЛІНДРИЧНІЙ КВАНТОВІЙ ТОЧЦІ З ОБОЛОНКОЮ

М. В. Морозов, Л. В. Халанчук

Таврійський державний агротехнологічний університет  
larysa.khalanchuk@tsatu.edu.ua

**Ключові слова:**

циліндрична квантова точка, рівняння Шредінгера, хвильова функція, власна енергія, математичне комп'ютерне моделювання, дискретна модель.

У статті розглянуто математичне, комп'ютерне моделювання стану електронів у циліндричних квантових точках (ЦКТ) з оболонкою. Досліджені хвильові функції електрона, власні значення хвильових чисел і енергії та їх залежність від параметрів квантової точки (радіуса, висоти) і параметрів оболонки (товщини, висоти потенціального бар'єра).

Використано рівняння Шредінгера для стаціонарних станів  $S$ -електронів у циліндричній системі координат і граничні умови для отримання дискретної моделі та 3D-графіків щільності ймовірності стану електрона в заданій області простору.

Для аналітичного розв'язку рівняння Шредінгера використовується метод Фур'є розділення змінних, а також чисельний метод послідовних наближень (ітерацій) при визначенні власних значень енергії електрона за допомогою граничних умов. Хвильова функція повинна бути неперервною та гладкою на границі ядро-оболонка циліндричної квантової точки.

Фінітний рух електрона розглядається у наближенні ефективної маси. Представлені результати розрахунків власної енергії та хвильових чисел для двох станів електрона: основного стану – аксіальні та радіальні квантові числа дорівнюють  $n = m = 1$  та збудженого стану – при  $n = m = 2$ .

Для математичного комп'ютерного моделювання та побудови відповідних графіків хвильової функції та щільності ймовірності знаходження електрона в заданій області циліндричної квантової точки використовуються пакети програм Scilab, MathCad, дискретні моделі розв'язку диференціальних рівнянь та дискретні структуровані сітки.

Таким чином, досліджено стан  $S$ -електрона, орбітальний момент якого  $l = 0$ , у циліндричній квантовій точці з оболонкою та обмежувачим потенціалом. У подальшому представляє значний інтерес моделювання стану електронів для інших різноманітних квантових точок: сферичних, конічних, пірамідальних.

Результати досліджень використовуються для методичного забезпечення лабораторного практикуму для магістрантів спеціальності «Комп'ютерні науки» з курсу «Фізичні основи сучасних інформаційних технологій» [1].

---

## MODELING OF ELECTRON STATE IN A CYLINDRICAL QUANTUM DOT WITH A SHELL

M. V. Morozov, L. V. Khalanchuk

Tavria State Agrotechnological University,  
larysa.khalanchuk@tsatu.edu.ua

**Key words:**

cylindrical quantum dot, Schrödinger equation, wave function, eigen energy, mathematical computer simulation, discrete model.

The article deals with mathematical and computer modeling of electron states in a cylindrical quantum dot with a shell. Electron wave functions, eigenvalues of wave numbers and energy and their dependence on the geometrical parameters of a quantum dot (radius, height) and its shell (thickness, height of the potential barrier) are studied.

The Schrödinger equation for stationary states of  $S$ -electrons in a cylindrical coordinate system and boundary conditions for obtaining a discrete model and 3D graphs of probability density of an electron state of in a given area of space are used.

The Fourier method of separating the variables is used to obtain analytic solutions of the Schrödinger equation, as well as the numerical method of successive approximations (iterations) in determining the eigenvalues of the electron energy by means of boundary conditions. The wave function are continuous and smooth unlike the boundaries of the shell of a cylindrical quantum dot.

The finitel electron motion is considered in the effective mass approximation. The calculation results for eigen energy and wave numbers of the two electron states are presented: the ground state – axial and radial quantum numbers are equal to  $n = m = 1$  and the excited state at  $n = m = 2$ . Scilab, MathCad, discrete models of the solution of differential equations and discrete structured grids are used for mathematical computer modeling as well as for plotting of corresponding graphs of the wave function and the probability density of finding an electron in a given region of a cylindrical quantum dot.

Thus, the state of the  $S$ -electron, which orbital moment is  $l = 0$ , is investigated in a cylindrical quantum dot with a shell and a limiting potential. Therefore, it is of high interest to simulate the electron states for other quantum dot geometries: spherical, conical, pyramidal.

The research results are used for an undergraduate laboratory workshop for students of «Computer Science» specialty from the course «Physical bases of modern information technologies» on the basis of mathematical and computer simulation (Scilab, MathCad) [1].

## 1. Постановка проблеми

В елементній базі сучасних інформаційних технологій (монітори, лазери, сенсори) використовують квантові точки, які мають граничні малі розміри [2]. Тому розробка теоретичних моделей різноманітних квантових точок (сферичних, циліндричних, конічних), які дозволяють дослідити спектр енергетичних рівнів, є актуальною задачею. Крім того, розгляд впливу параметрів оболонки на фінітний рух електрона у ЦКТ представляє певний інтерес та забезпечує розгляд хвильових функцій та щільності ймовірності стану електрона. Для уточнення обчислення власної енергії електрона застосовано дискретні моделі розв'язку рівняння Шредінгера.

## 2. Аналіз останніх досліджень і публікацій

Стан носіїв електричного заряду (електронів) та власні значення енергії визначаються геометричною формою, розмірами, речовиною квантової точки (КТ) (ефективна маса електрона) та параметрами оболонки. У статтях [3-5] розглянуто вплив параметрів модифікованого потенціалу Пешля-Теллера на стан електрона та власні значення енергії

у ЦКТ. У роботі [6] розглянуто стан електрона у циліндричній квантовій точці без оболонки та з'ясовано, що квантові рівні сильно сплющеної еліпсоїдальної квантової точки можна отримати заміною її на модель циліндричної КТ. Сферичні квантові точки без оболонки та з оболонкою розглянуто у працях [7-9]. Для  $S$ -електронів, коли орбітальний момент відсутній, отримано власні значення енергії та щільність ймовірності стану. Аналітичні дослідження стану електронів у пірамідальних та конічних квантових точках із застосуванням представлення рівняння Шредінгера у модифікованій циліндричній системі координат наведено в статті [10]. Розгляд конічних квантових точок та залежності енергії електрона від параметрів КТ (радіуса основи і висоти) представлено у роботах [11-13]. Дискретні моделі розв'язку диференціальних рівнянь в частинних похідних розглядаються, наприклад, в роботі [14].

**Мета статті** – розробити модель циліндричної квантової точки з оболонкою. Знайти розв'язок рівняння Шредінгера для стаціонарних станів  $S$ -електронів, застосовуючи, зокрема, дискретні моделі, знайти

власні значення енергії електрона та щільність ймовірності знаходження електрона у заданій області простору. Дослідити залежність енергії електрона від параметрів квантової точки та оболонки.

### 3. Виклад основного матеріалу

Розглянемо найпростішу модель циліндричної квантової точки радіуса  $R$  та висоти  $H$  з оболонкою товщиною  $d$  (рис. 1а).

$$U(r, z) = \begin{cases} 0 & \text{у ядрі, якщо } 0 \leq r \leq R \text{ та } -\frac{H}{2} \leq |z| \leq \frac{H}{2}, \\ U_0 & \text{у оболонці, якщо } R < r \leq R + d \text{ та } \frac{H}{2} \leq |z| \leq \frac{H}{2} + d. \end{cases} \quad (1)$$

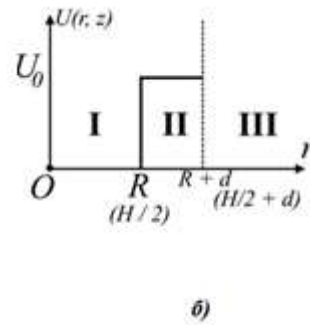
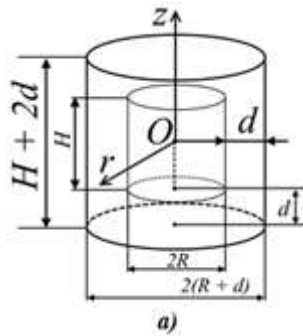


Рис. 1. а) – циліндрична квантова точка з оболонкою:  $R$  – радіус,  $H$  – висота,  $d$  – товщина оболонки; б) потенціальна енергія електрона:  $U_0$  – висота потенціальної ями

Стационарне рівняння Шредінгера для хвильової функції  $\psi_1(r, z)$   $S$ -електронів (орбітальний момент  $l = 0$ ) у наближенні ефективної маси для ядра (область I) має вигляд:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + k_1^2 \cdot \psi_1(r, z) = 0, \quad (2)$$

де хвильове число

$$k_1 = \frac{\sqrt{2m_1 E}}{\hbar}. \quad (3)$$

Розв'язок диференціального рівняння (2) знаходимо, використовуючи метод Фур'є розділення змінних:

$$\begin{aligned} \psi_1(r, z) &= A \cdot \varphi_1(r) \cdot \varphi_2(z) = \\ &= A \cdot J_0(k_3 \cdot r) \cdot \cos(k_4 \cdot z), \end{aligned} \quad (4)$$

де  $J_0(k_3 \cdot r)$  – функція Бесселя нульового порядку.

Для оболонки (область II) рівняння Шредінгера має вигляд:

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - k_2^2 \cdot \psi_2(r, z) = 0, \quad (5)$$

де хвильове число

Речовина ядра (core) ЦКТ напівпровідник  $n$ -типу, оболонки (shell) – напівпровідник  $p$ -типу. Використовуємо циліндричну систему координат. Тоді у першому наближенні потенціальна енергія (модель обмежуючого потенціалу) має вигляд (рис. 1б):

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m_1(U_0 - E)}}{\hbar}. \quad (6)$$

Диференціальне рівняння (5) є модифікованим рівнянням Бесселя та має наступний розв'язок:

$$\begin{aligned} \psi_2(r, z) &= B \cdot \varphi_3(r) \cdot \varphi_4(z) = \\ &= B \cdot K_0(k_5 \cdot r) \cdot e^{-k_6 \cdot z}, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $K_0(k_5 \cdot r)$  – функція Макдональда (модифікована функція Бесселя другого роду від уявного аргументу).

Використовуючи рівняння Шредінгера (2), отримуємо:

$$k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} = k_3^2 + k_4^2. \quad (8)$$

З рівняння (5):

$$k_2^2 = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2} = k_5^2 + k_6^2. \quad (9)$$

Тоді

$$k_3^2 + k_4^2 + k_5^2 + k_6^2 = \frac{2mU_0}{\hbar^2}. \quad (10)$$

Визначаємо власні значення енергії  $E_{n,m}$  та хвильові числа  $k_3, k_4, k_5$  та  $k_6$ . Хвильова функція  $\psi(r, z)$  повинна бути неперервною та

гладкою. Використовуємо граничні умови при  $r = R$ :

$$\begin{aligned}\psi_1(R, z) &= \psi_2(R, z), \\ \varphi_1(R) &= A \cdot J_0(k_3 \cdot R) = \varphi_3(R) = \\ &= B \cdot K_0(k_5 \cdot R),\end{aligned}$$

звідки

$$B = A \frac{J_0(k_3 \cdot R)}{K_0(k_5 \cdot R)}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned}\varphi_1'(R) &= -A \cdot k_3 \cdot J_1(k_3 \cdot R) = \\ &= \varphi_3'(R) = -B \cdot k_5 \cdot K_1(k_5 \cdot R),\end{aligned}$$

тоді:

$$\frac{k_3}{k_5} = \frac{J_0(k_3 \cdot R) \cdot K_1(k_5 \cdot R)}{K_0(k_5 \cdot R) \cdot J_1(k_3 \cdot R)}. \quad (12)$$

При  $z = \frac{H}{2}$ :

$$\psi_1\left(r, \frac{H}{2}\right) = \psi_2\left(r, \frac{H}{2}\right),$$

$$\varphi_2\left(\frac{H}{2}\right) = \cos\left(k_4 \cdot \frac{H}{2}\right) = \varphi_4\left(\frac{H}{2}\right) = e^{-k_6 \cdot \frac{H}{2}},$$

тоді:

$$\cos\left(k_4 \cdot \frac{H}{2}\right) = e^{-k_6 \cdot \frac{H}{2}}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned}\varphi_2'\left(\frac{H}{2}\right) &= -k_4 \cdot \sin\left(k_4 \cdot \frac{H}{2}\right) = \varphi_4'\left(\frac{H}{2}\right) = \\ &= -k_6 \cdot e^{-k_6 \cdot \frac{H}{2}},\end{aligned}$$

тоді:

$$k_4 \cdot \sin\left(k_4 \cdot \frac{H}{2}\right) = k_6 \cdot e^{-k_6 \cdot \frac{H}{2}}. \quad (14)$$

Систему рівнянь (10), (12), (13), (14) розв'язуємо чисельним методом послідовних наближень (ітерацій) та визначаємо хвильові числа.

Наприклад, при ефективній масі електрона  $m = 0,067m_0$  (GaAs);  $U_0 = 1,2eV \gg \gg E_{n,m}$ ;  $R = 6 \cdot 10^{-9}m$ ,  $H = 1,2 \cdot 10^{-8}m$ ,  $d = 3 \cdot 10^{-9}m$  та  $n = m = 1$  отримаємо:

$$k_{3,1,1} = 0,36 \cdot 10^9 m^{-1},$$

$$k_{4,1,1} = 0,2 \cdot 10^9 m^{-1},$$

$$k_{5,1,1} = 1,34 \cdot 10^9 m^{-1},$$

$$k_{6,1,1} = 0,4 \cdot 10^9 m^{-1}.$$

Власне значення енергії

$$E_{1,1} = 0,153 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

Аналогічно визначаємо власну енергію та хвильові числа для другої радіальної та аксіальної моди  $n = m = 2$ :

$$k_{3,2,2} = 0,81 \cdot 10^9 m^{-1},$$

$$k_{4,2,2} = 0,7 \cdot 10^9 m^{-1},$$

$$k_{5,2,2} = 0,81 \cdot 10^9 m^{-1},$$

$$k_{6,2,2} = 0,57 \cdot 10^9 m^{-1}.$$

Власне значення енергії

$$E_{2,2} = 1,034 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

Будуємо графіки хвильових функцій для радіальної моди (рис. 2) при  $A = 1$  для  $n = m = 1$  та  $n = m = 2$ :

$$\varphi_5(r) = \begin{cases} J_0(k_3 \cdot r), & \text{якщо } r \leq R, \\ B \cdot K_0(k_5 \cdot r), & \text{якщо } R < r \leq R + d. \end{cases} \quad (15)$$

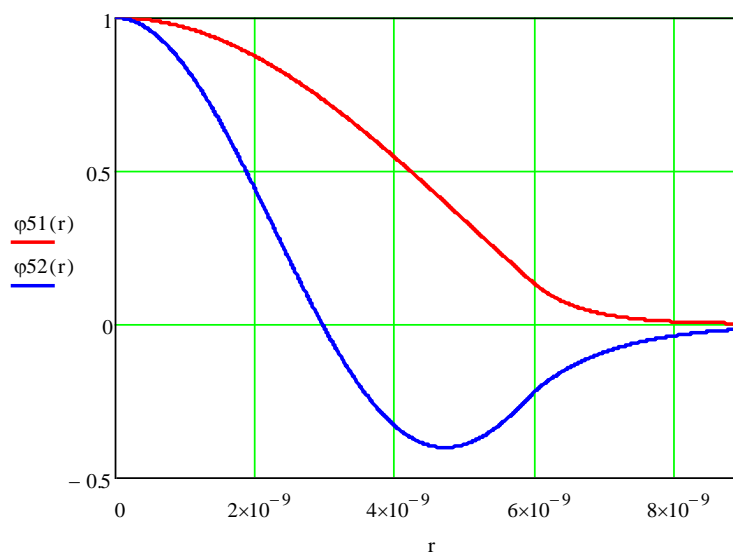


Рис. 2. Графіки хвильових функцій для радіальної моди при  $R = 6$  нм,  $H = 12$  нм,  $d = 3$  нм,  $U_0 = 1,2eV$ ,  $n = m = 1$



Будуємо графіки хвильових функцій для аксіальної моди (рис. 3) при  $A = 1$  для  $n = m = 1$  та  $n = m = 2$ :

$$\varphi_6(z) = \begin{cases} \cos(k_4 \cdot z), & \text{якщо } |z| \leq \frac{H}{2}, \\ e^{-k_6 \cdot z}, & \text{якщо } \frac{H}{2} \leq |z| \leq \frac{H}{2} + d. \end{cases} \quad (16)$$

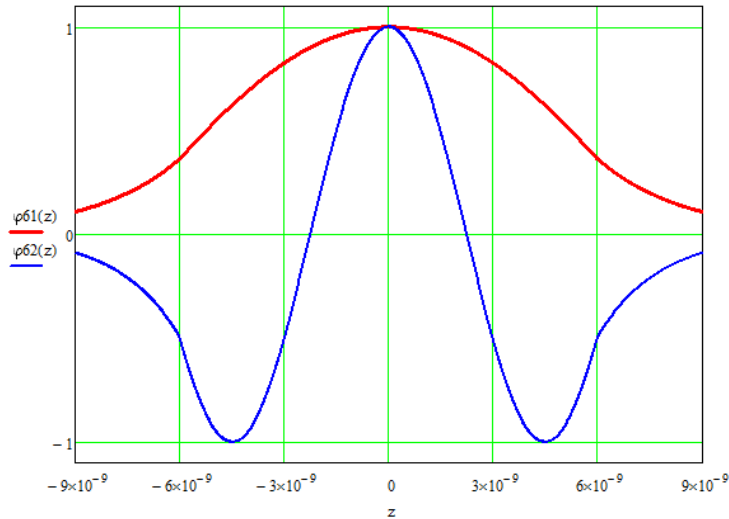


Рис. 3. Графіки хвильових функцій для аксіальної моди при  $R = 6$  нм,  $H = 12$  нм,  $d = 3$  нм,  $U_0 = 1,2$ еВ,  $n = m = 2$

Будуємо 3D графіки [15] відносної ( $A = 1$ ) щільності ймовірності для електрона у циліндричній квантовій ямі з оболонкою, яка дорівнює:

$$\rho(r, z) = |\psi(r, z)|^2 = \begin{cases} |\psi_1(r, z)|^2, & \text{якщо } |r| \leq R \text{ та } |z| \leq \frac{H}{2}, \\ |\psi_2(r, z)|^2, & \text{якщо } R < |r| < R + d \text{ або } \frac{H}{2} \leq |z| \leq \frac{H}{2} + d. \end{cases} \quad (17)$$

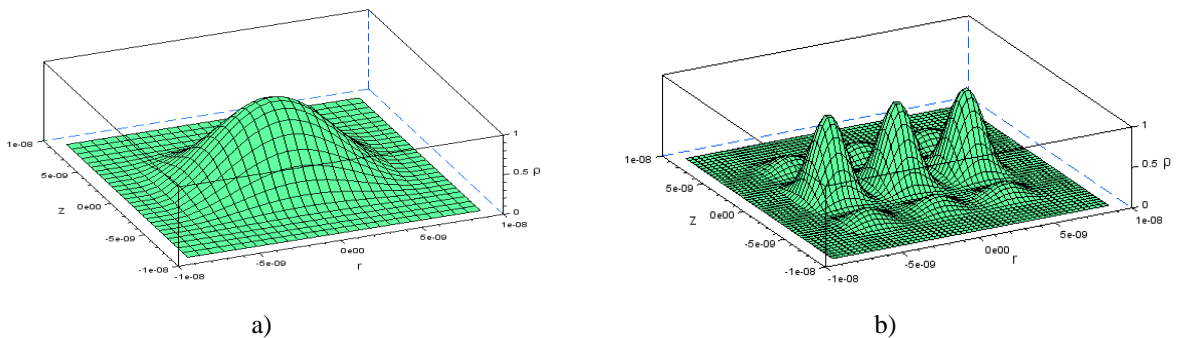


Рис. 4. Графіки щільності ймовірності для аксіальних та радіальних мод при  $R = 6$  нм,  $H = 12$  нм,  $d = 12$  нм,  $U_0 = 1,2$ еВ, а)  $n = m = 1$ , б)  $n = m = 2$

Мінімальна власна енергія електрона у ЦКТ суттєво залежить від розмірів ( $R, H$ ) квантової точки та збільшується, якщо розміри зменшуються. Мінімально допустимі розміри ЦКТ визначаються параметрами кристалічної ґратки:  $D_{min}, H_{min}$  приблизно 1 нм. В подальшому значний інтерес представляє розгляд стану електрона у сферичній квантовій точці з оболонкою.

### 3. Висновки

У роботі розглянуто розв’язок рівняння Шредінгера у циліндричній системі координат для стаціонарних станів S-електронів у ЦКТ з оболонкою. Отримано хвильові функції та дискретну модель розподілу щільності ймовірностей знаходження електрона в

заданій області ЦКТ з оболонкою. Досліджено залежність власної енергії електрона від параметрів ядра та оболонки квантової точки. Результати досліджень математичного, комп'ютерного моделювання використовуються для методичного забезпечення лабораторного практикуму з курсу «Фізичні

основи сучасних інформаційних технологій». В подальшому представляє значний інтерес дослідження моделей сферичних квантових точок з оболонкою та визначення дискретного спектру власних значень енергії електрона.

### Література

1. Дьоміна Н. А., Морозов М. В. Моделювання кванторозмірних гетероструктур у лабораторному практикумі з курсу «Фізичні основи сучасних інформаційних технологій». *Збірник наукових праць Кіровоградського державного педагогічного університету ім. Володимира Винниченка «Наукові записки – Випуск 11. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти»*. 2017. № 5 (1227). С. 72–79.
2. Грибачев В. Методы получения и применения квантовых точек. *Компоненты и технологии*. 2009. № 9. С. 127–130.
3. Айрапетян Д. Б., Казарян Э. М., Тевосян О. Х. Примесные состояния в цилиндрической квантовой точке с модифицированным потенциалом Пешля-Теллера. *Известия НАН РА: Физика*. 2014. Т. 49, № 3. С. 190–195.
4. Алексанян А., Арамян К., Никогосян Г., Буниатян В. Управление энергией основного перехода в цилиндрической квантовой точке, покрытой слоем квантовой ямы. *Ученые записки Арцахского государственного университета, естественные науки*. 2015. № 1. С. 39–44.
5. Айрапетян Д. Б., Котанджян Т. В., Тевосян О. Х. Моделирование ограничивающего потенциала для цилиндрической квантовой точки. *Известия НАН РА: Физика*. 2014. Т. 49, № 6. С. 410–414.
6. Зегря Г. Г., Константинов О. В., Матвеевцев А. В. Структура энергетических квантовых уровней в квантовой точке, имеющей форму сплюснутого тела вращения. *Физика и техника полупроводников*. 2003. Т. 37, вып. 3. С. 334–338.
7. Смирнов С. Б. Марончук И. Е., Марончук И. И., Петраш А. Н. Расчет энергетического спектра S-электронов сферической квантовой точки на основе узкозонных полупроводниковых соединений  $A^{III}B^V$  в матрице GaP. *Збірник наукових праць СНУЯЕтаП «Нетрадиційні і поновлювані джерела енергії»*. 2011. С. 164–168.
8. Игошина С. Е., Карманов А. А. Волновые функции электрона в квантовых точках «ядро/оболочка» типа I. *Молодой ученый*. 2014. №8. С. 41–45. URL: <https://moluch.ru/archive/67/11128/> (дата звернення: 12.10.2019).
9. Романова К. А., Галяметдинов Ю. Г. Моделирование квантовых состояний квантовых точек «ядро/оболочка» CdSe/CdS и CdSe/ZnS. *Вестник Казанского технологического университета*. 2017. Т. 20, № 19. С. 15–17.
10. Lozovski V., Piatnytsia V. The Analytical Study of Electronic and Optical Properties of Pyramid-Like and Cone-Like Quantum Dots. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*. 2013. Vol. 8, № 11. P. 2335–2343.
11. Kazaryan E. M., Petrosyan L. S., Shahnazaryan V. A., Sarkisyan H. A. Quasi-conical quantum dot: electron states and quantum transitions. *Communications in Theoretical Physics*. 2015, Vol. 63, № 2. P. 255–260. DOI:10.1088/0253-6102/63/2/20.
12. Hayrapetyan D. B., Chalyan A. V., Kazaryan E. M., Sarkisyan H. A. Direct Interband Light Absorption in Conical Quantum Dot. *Journal of Nanomaterials*. 2015, Article ID 915742. P. 6. DOI:10.1155/2015/915742.
13. Багдасарян Д. А., Айрапетян Д. Б., Саркисян А. А., Казарян Э. М., Медвид А. Коническая квантовая точка: электронные состояния и дипольный момент. *Известия НАН Армении, Физика*. 2017. Т. 52, № 2. С. 177–188.
14. Халанчук Л. В., Чопоров С. В. Огляд методів генерації дискретних моделей геометричних об'єктів. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2018. № 1. С. 139–152.

15. Сосницька Н. Л., Морозов М. В., Онищенко Г.О., Халанчук Л.В. Моделювання кванторозмірних гетеросистем та методичне забезпечення курсу «Фізичні основи інформаційних технологій». *Науковий вісник Львівської академії: Серія: Педагогічні науки*. 2019. Вип. 5. С. 415–421. DOI: 10.33251/2522-1477-2019-5-415-421.

### References

1. Domina, N. A. & Morozov, M. V. (2017). Modelling of quantum-sized heterostructures in laboratory practice on the course “Physical bases of modern information technologies”. Collection of scientific works of the Kirovograd State Pedagogical University named after Volodymyr Vynnychenko “Scientific Notes – Iss. 11. Ser.: Problems of Methodology of Physical-Mathematical and Technological Education”, No. 5(1227), pp. 72–79 (in Ukrainian).
2. Gribachov, V. (2009). Methods of obtaining and applying quantum dots. Components and Technology, No. 9, pp. 127–130 (in Russian).
3. Hayrapetyan, D. B., Kazaryan, E. M. & Tevosyan, O. Kh. (2014). Impurity states in a cylindrical quantum dot with a modified Peshl-Teller potential. Bulletin of NAS RA: Physics, Vol. 49, No. 3, pp. 190–195 (in Russian).
4. Aleksanyan, A., Aramyan, K., Nikogosyan, G. & Buniatyan, V. (2015). Energy control of the main transition in a cylindrical quantum dot covered with a layer of a quantum well. Scientific notes of the Artsakh State University, natural sciences, No. 1, pp. 39–44 (in Russian).
5. Hayrapetyan, D. B., Kotadzhanyan, T. V. & Tevosyan, O. Kh. (2014). Modeling the limiting potential for a cylindrical quantum dot. Bulletin of NAS RA: Physics, Vol. 49, No. 6, pp. 410–414 (in Russian).
6. Zegrya, G. G., Konstantinov, O. V. & Matveentsev, A. V. (2003). The structure of energy quantum levels at a quantum dot in the shape of a flattened body of revolution. Semiconductor Physics and Technology, Vol. 37, No. 3, pp. 334–338 (in Russian).
7. Smirnov, S. B., Maronchuk, I. E., Maronchuk, I. I. & Petrash, A. N. (2011). Calculation of the energy spectrum of S-electrons of a spherical quantum dot based on narrow-gap III – IIIV semiconductor compounds in a GaP matrix. Collection of scientific works of SNUYaETap “Non-traditional and renewable energy sources”, pp. 164–168 (in Russian).
8. Igoshina, S. E. & Karmanov, A. A. (2014). Wave functions of an electron in quantum dots “core / shell” type I. Young scientist, No. 8, pp. 41–45 (in Russian). Retrieved from <https://moluch.ru/archive/67/11128/>.
9. Romanova, K. A. & Galyametdinov, Yu. G. (2017). Modeling of quantum states of quantum dots “core / shell” CdSe / CdS and CdSe / ZnS. Bulletin of Kazan Technological University, Vol. 20, No. 19, pp. 15–17 (in Russian).
10. Lozovski, V. & Piatnytsia, V. (2013). The Analytical Study of Electronic and Optical Properties of Pyramid-Like and Cone-Like Quantum Dots. Journal of Computational and Theoretical Nanoscience, Vol. 8, No. 11, pp. 2335–2343.
11. Kazaryan, E. M., Petrosyan, L. S., Shahnazaryan, V. A. & Sarkisyan, H. A. (2015). Quasi-conical quantum dot: electron states and quantum transitions. Communications in Theoretical Physics, Vol. 63, No. 2, pp. 255–260 (in Russian). DOI:10.1088/0253-6102/63/2/20.
12. Hayrapetyan, D. B., Chalyan, A. V., Kazaryan, E. M. & Sarkisyan, H. A. (2015). Direct Interband Light Absorption in Conical Quantum Dot. Journal of Nanomaterials. Article ID 915742, 6 p. (in Russian). DOI:10.1155/2015/915742.
13. Bagdasaryan, D. A., Hayrapetyan, D. B., Sarkisyan, H. A. Kazaryan, E. M. & Medvid, A. (2017). Conical quantum dot: electronic states and dipole moment. Bulletin of the NAS of Armenia, Physics, Vol. 52, No. 2, pp. 177–188 (in Russian).
14. Khalanchuk, L. V. & Choporov, S. V. (2018). An overview of methods for generating discrete models of geometric objects Bulletin of the Zaporizhzhya National University: Collection of scientific articles. Physical and mathematical sciences, No. 1, pp. 139–152 (in Ukrainian).
15. Sosnickaya, N., Morozov, M., Onyshchenko, H. & Khalanchuk, L. (2019). Modeling of quantum-sized heterosystems and methodological support of the course “Physical Foundations of Information Technologies”. Scientific Bulletin of the Flight Academy: Series: Pedagogical Sciences. Collection of scientific works, Vol. 5, pp. 415–421. DOI: 10.33251/2522-1477-2019-5-415-421.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-14

## РОЗТЯГ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНИ З ДВОМА ПОВЕРХНЕВИМИ ТРІЩИНАМИ НА ПРЯМОЛІНІЙНІЙ МЕЖІ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ З УРАХУВАННЯМ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН ПО ЇХ ФРОНТУ

М. М. Николишин<sup>1</sup>, В. К. Опанасович<sup>2</sup>, Л. Р. Куротчин<sup>1</sup>, М. С. Слободян<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,

<sup>2</sup>Львівський національний університет ім. Івана Франка

klesi@i.ua, slobkolia@gmail.com

### Ключові слова:

розтяг, пластина, поверхневі тріщини, пластичні зони, комплексні потенціали, умова пластичності Треска, розкриття тріщини.

Розглянуто задачу про двовісний розтяг кусково-однорідної пластини з двома поверхневими тріщинами на прямолінійній межі поділу матеріалів. Припускаємо, що навантаження, властивості матеріалів і розміри тріщин такі, що біля їх вершин на продовженні тріщин утворюються пластичні зони, де виконуються умови пластичності Треска у вигляді поверхневого пластичного шару. Оскільки тріщини поверхневі, то розв'язок задачі розбито на задачу розтягу пластини та згину пластини із використанням класичної теорії згину. Використовуючи комплексні потенціали, розв'язування задачі зведено до задач лінійного спряження та знайдено їх аналітичний розв'язок у класі функцій обмежених у вершинах пластичних зон. Визначено напружений стан пластини на межі поділу матеріалів та розкриття берегів тріщин у їх вершинах. Проведено числовий аналіз та визначено довжини пластичних зон і розкриття тріщини біля їх вершин.

## TENSION OF PIECEWISE-HOMOGENEOUS PLATE WITH TWO SURFACE CRACKS ON THE LINEAR INTERFACE OF MATERIALS WITH REGARD FOR PLASTIC ZONES ALONG THEIR FRONT

M. M. Nykolyshyn<sup>1</sup>, V. K. Opanasovich<sup>2</sup>, L. R. Kurotchyn<sup>1</sup>, M. S. Slobodyan<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine,

<sup>2</sup>Ivan Franko National University of Lviv

klesi@i.ua, slobkolia@gmail.com

### Key words:

tension, plate, surface crack, plastic zones, complex potentials, Tresca plasticity condition, crack opening.

A problem on biaxial tension of piecewise-homogeneous plate on the linear interface of materials is studied. It is assumed that load, materials properties and crack sizes are such that near their tips on the crack prolongation the plastic zones are formed, where Tresca plasticity conditions are satisfied in the form of a surface plastic layer. Since the cracks are surface, the solution of the problem is divided on the problem of the plate tension and the plate bending, using the classical theory of bending. Making use of complex potentials, the solution of the problems is reduced to the problems of linear conjugation and their analytic solution is obtained in the class of functions, limited in the tops of plastic zones. The stress state of the plates on the interface of materials and crack edges opening in their tips are determined. Numerical analysis is carried out and the length of the plastic zone and crack opening near their tips are determined.

### 1. Вступ

У різних галузях техніки використовують пластинчасті елементи конструкцій, які під час виготовлення і експлуатації можуть отримати тріщиноподібні дефекти, що різко

знижують допустиме навантаження і можуть призвести до руйнування конструкції, тому важливо вивчати їхній вплив на напружено-деформований стан таких елементів.

Нашою метою є дослідити задачу про двовісний розтяг кусково-однорідної пластини з двома поверхневими тріщинами на прямолінійній межі поділу матеріалів. Вважаємо, що в процесі деформування біля вершин тріщин на їх продовженні утворилися вузькі пластичні зони по всій товщині пластини. Аналогічно як у  $\delta_c$ -моделі замінимо пластичні зони поверхнями розриву пружних переміщень, а реакцію пластичної зони на пружний об'єм – невідомими нормальними та дотичними напруженнями, які задовольняють умові пластичності Треска у вигляді поверхневого шару [2, 3]. Таким чином, пружно-пластичну задачу для пластини з тріщинами заданих розмірів зведено до задачі про пружну рівновагу такої ж пластини з наскрізними тріщинами невідомих розмірів. Оскільки тріщини поверхневі, то розв'язування задачі подаємо у вигляді суперпозиції плоскої задачі теорії пружності і задачі згину пластини з використанням класичної теорії згину. За допомогою методів теорії функцій комплексної змінної розв'язування задачі зведено до задач лінійного спряження, розв'язок яких отримано в класі функцій обмежених у вершинах тріщин. Числовий аналіз задачі проведено з використанням методу механічних квадратур [7, 10].

### 2. Формулювання задачі

Розглянемо нескінченну кусково-однорідну пластину завтовшки  $2h$  з прямолінійною межею поділу матеріалів. Вважаємо, що пластина перебуває під дією однорідного поля зусиль на нескінченності  $q$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ , а на межі поділу матеріалів наявні дві однакові

поверхневі тріщини завглибшки  $h + h_1$  і завдовжки  $2l$ . Береги тріщин вільні від зовнішнього навантаження. Виберемо в серединній площині пластини декартову систему координат  $Ox\tilde{z}$  з початком в центрі між тріщинами, а вісь  $Ox$  спрямуємо по межі поділу матеріалів. Вважаємо, що під дією зовнішнього навантаження на продовженні тріщини виникають пластичні зони завдовжки  $w_1$  – між тріщинами і  $w_2$  – зовні тріщин, крім того, матеріал у перемичці  $h_1 \leq \tilde{z} \leq h$ ,  $-l \leq x \leq l$  (рис. 1) також перейшов у пластичний стан. На межі поділу матеріалів поза тріщиною виконуються умови ідеального механічного контакту. В серединній площині пластини лінію спаю матеріалів позначимо через  $L'$ , лінію, де розміщені тріщини, – через  $L$ , а пластичні зони через –  $L'_1$ ,  $L''_1$ ,  $L'_2$ ,  $L''_2$ . Півплощину для якої  $y < 0$  ( $y > 0$ ) – через  $S_1$  ( $S_2$ ). Відстань між центрами тріщин через  $2s$ , їх кінці через  $b$  і  $c$  та  $-c$  і  $-b$ , кінці пластичних зон через  $a$  і  $d$  та  $-d$  і  $-a$ . Граничне значення відповідних величин при  $y \rightarrow \pm 0$  будемо позначати знаками «+» і «-», а для пружних сталей матеріалу  $S_j$  півплощини приписуватимемо індекс  $j$ , який надалі приймає два значення 1 чи 2, і введено позначення  $L_j = L'_j \cup L''_j$ ,  $\tilde{L} = L \cup L_1 \cup L_2$ ,  $\tilde{L} = L \cup L'_1 \cup L''_1 \cup L'_2 \cup L''_2$  (див. рис. 1). Завдяки наявності пластичної зони в перемичці розв'язок задачі подано у вигляді розв'язків двох задач: плоскої задачі та задачі згину пластини з використанням класичної теорії.

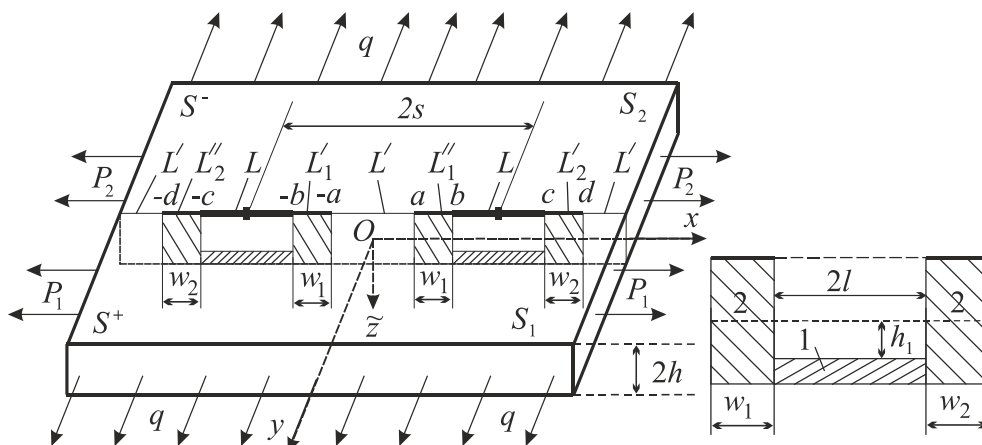


Рис. 1. Схема навантаження пластини, розміщення та вигляд тріщин і пластичних зон

Розв'язок задачі визначатимемо за таких крайових умов:

$$u_{\Pi r} = 0, \quad u_{\Pi \theta} = 0, \quad t \in L; \quad (1)$$

$$\sigma_{x_1 y_1}^{\pm} = 0, x_1 \in \tilde{L}_1; \quad \sigma_{y_1 y_1}^{\pm} = 0, x_1 \in L_1;$$

$$\sigma_{y_1 y_1}^{\pm} = \sigma_0^{(1)}, x_1 \in L'_1; \quad \sigma_{y_1 y_1}^{\pm} = \sigma_0^{(2)}, x_1 \in L''_1, \quad (2)$$

де  $u_{\Pi r}$  і  $u_{\Pi \theta}$  – компоненти вектора переміщення у полярній системі координат,  $\sigma_{x_1 y_1}$ ,  $\sigma_{y_1 y_1}$  – компоненти тензора напружень у декартовій системі координат;  $\sigma_0^{(1)}$  і  $\sigma_0^{(2)}$  – невідомі нормальні напруження у пластичних зонах, для яких виконуються умови пластичності Треска [7].

Згідно з формулюванням задачі маємо такі крайові умови:

на межі поділу матеріалів

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^+ &= \sigma_{yy}^-, \quad \sigma_{xy}^+ = \sigma_{xy}^-, \\ u^+ &= u^-, \quad v^+ = v^-, \\ M_y^+ &= M_y^-, \quad H_{xy}^+ = H_{xy}^-, \end{aligned} \quad (1^*)$$

$$N_y^+ = N_y^-, \quad w^+ = w^-,$$

$$(\partial w_y)^+ = (\partial w_y)^-$$

і на берегах тріщин з пластичними зонами

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{\pm} &= \begin{cases} \sigma_{0j}, & x \in L_j, \\ \sigma_Y \tilde{b}_1, & x \in L, \end{cases} \\ \sigma_{xy}^{\pm} &= \begin{cases} \tau_{0j}, & x \in L'_j, \\ 0, & x \in L, \\ -\tau_{0j}, & x \in L''_j, \end{cases} \end{aligned} \quad (2^*)$$

$$M_y^{\pm} = \begin{cases} M_{0j}, & x \in L_j, \\ \sigma_Y \tilde{b}_2, & x \in L, \end{cases}$$

$$H_{xy}^{\pm} = \begin{cases} H_{0j}, & x \in L'_j, \\ 0, & x \in L, \\ -H_{0j}, & x \in L''_j, \end{cases} \quad (3)$$

$$\tilde{b}_1 = (h - h_1)/(2h), \quad \tilde{b}_2 = (h^2 - h_1^2)/2, \quad (4)$$

де  $u$ ,  $v$  – проекції вектора переміщення точки серединної площини на осі  $Ox$  і  $Oy$  відповідно;  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xx}$  – компоненти тензора напружень;  $\sigma_{0j}$ ,  $\tau_{0j}$ , – невідомі нормальні і дотичні напруження у плоскій задачі в  $j$  пластичній зоні, де  $j=1,2$ ;  $w$  –

прогин серединної площини пластини;  $M_y$ ,  $H_{xy}$ ,  $N_y$  – згинальний і крутний моменти та перерізувальна сила;  $M_{0j}$ ,  $H_{0j}$  – невідомі згинальний і крутний моменти у пластичній зоні;  $\sigma_Y = \min\{\sigma_Y^{(1)}, \sigma_Y^{(2)}\}$ ,  $\sigma_Y^{(j)}$  – границя текучості матеріалу  $S_j$  – півплощини;  $\partial_s f$  – позначення часткової похідної  $\partial f / \partial s$ .

### 3. Розв'язок задачі

Розв'язок плоскої задачі. Введемо комплексні потенціали Колосова-Мухелішвілі  $\Phi_j(z)$  і  $\Psi_j(z)$  для  $S_j$  півплощини. Тоді згідно з [4] можемо записати

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} + \sigma_{xx} &= 4 \operatorname{Re}[\Phi_j(z)], \\ \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} &= \Phi_j(z) + \overline{\Phi_j(z)} + \\ &+ z\Phi_j'(z) + \overline{\Psi_j(z)}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} 2\mu_j \partial_x(u + iv) &= \kappa_j \Phi_j(z) - \overline{\Phi_j(z)} - \\ &- z\overline{\Phi_j'(z)} - \overline{\Psi_j(z)}, \end{aligned}$$

де  $z = x + iy$ ,  $i^2 = -1$ ,  $\kappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$ ;  $\mu_j$  – модуль зсуву;  $\nu_j$  – коефіцієнт Пуассона.

Для великих  $|z|$  мають місце розвинення [4]

$$\begin{aligned} \Phi_j(z) &= \Gamma_j + O(1/z^2), \\ \Psi_j(z) &= \Gamma_j' + O(1/z^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Тут

$$\Gamma_j = 0, 25(P_j + q), \quad \Gamma_j' = 0, 5(q - P_j). \quad (7)$$

Аналітично продовжимо функцію  $\Phi_j(z)$  з області  $S_j$  в область  $S_{3-j}$  за формулою [4]

$$\Phi_j(z) = -\overline{\Phi_j(z)} - z\overline{\Phi_j'(z)} - \overline{\Psi_j(z)}. \quad (8)$$

Тоді залежності (5) можемо записати так:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} &= \Phi_j(z) - \Phi_j(\bar{z}) + \\ &+ (z - \bar{z})\overline{\Phi_j'(z)}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} 2\mu_j \partial_x(u + iv) &= \kappa_j \Phi_j(z) + \Phi_j(\bar{z}) - \\ &- (z - \bar{z})\overline{\Phi_j'(z)}. \end{aligned} \quad (10)$$

На підставі (6) аналітичне продовження функції  $\Phi_j(z)$  (8) при великих  $|z|$  матиме вигляд

$$\Phi_j(z) = -\Gamma_j - \Gamma'_j + O(1/z^2). \quad (11)$$

Враховуючи (9), з крайових умов (1)-(2) отримуємо таку задачу лінійного спряження:

$$\begin{aligned} &(\Phi_1(x) + \Phi_2(x))^+ - \\ &-(\Phi_1(x) + \Phi_2(x))^- = 0, \\ &x \in \tilde{L}, \end{aligned} \quad (12)$$

розв'язавши яку одержимо

$$\theta(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) = (P_1 + P_2 - 2q)/4. \quad (13)$$

Введемо функцію

$$\Phi(z) = \mu_{3-j}\kappa_j\Phi_j(z) - \mu_j\Phi_{3-j}(z), \quad (14)$$

тоді, як видно з другої крайової умови (1) та залежності (10), вона задовольняє крайовій умові

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = 0, \quad x \in L'. \quad (15)$$

Звідси, враховуючи (6), (11), (14) і (7) при великих  $|x|$ , отримаємо

$$\begin{aligned} &\mu_1(1 + \kappa_2)P_2 - \mu_2(1 + \kappa_1)P_1 = \\ &= [3(\mu_1 - \mu_2) + \mu_2\kappa_1 - \mu_1\kappa_2]q. \end{aligned} \quad (16)$$

На підставі (13) і (14) знайдемо вирази для функцій  $\Phi_1(z)$  і  $\Phi_2(z)$  через введені функції  $\theta(z)$  і  $\Phi(z)$

$$\Phi_j(z) = \begin{cases} A_j^{-1}(\mu_j\theta(z) + \Phi(z)), & z \in S_j, \\ A_{3-j}^{-1}(\mu_j\kappa_{3-j}\theta(z) - \Phi(z)), & z \in S_{3-j}, \end{cases} \quad (17)$$

де  $A_j = \mu_j + \mu_{3-j}\kappa_j$ .

Крайову умову (2) подамо так:

$(\sigma_y - i\tau_{xy})^+ = f(x)$ ,  $x \in \tilde{L}$ , з якої на підставі (9) і (17) отримаємо

$$\Phi^+(x) - g\Phi^-(x) = -A\theta(x) + A_1f(x), \quad (18)$$

де

$$\Phi_0(z) = A_1(a_1z + a_1b_1 + a_2 + (b_1a_2 + b_2a_1 + a_3)/z + \dots), \quad (24)$$

$$b_1 = -2i\beta(d - a), \quad b_2 = 4ad\beta - 0,5(a^2 + d^2)(1 + 4\beta^2),$$

$$x \in \tilde{L},$$

$$f(x) = \sigma_{01} - i\tau_{01}, \quad x \in L'_1,$$

$$f(x) = \sigma_{01} + i\tau_{01}, \quad x \in L''_1,$$

$$f(x) = \sigma_{02} - i\tau_{02}, \quad x \in L'_2,$$

$$f(x) = \sigma_{02} + i\tau_{02}, \quad x \in L''_2,$$

$$f(x) = \sigma_Y \tilde{b}_1, \quad x \in L,$$

$$A = \mu_1\mu_2(1 - \kappa_1\kappa_2)A_2^{-1}, \quad g = -A_1A_2^{-1}.$$

Якщо ввести функцію

$$\Phi_0(z) = \Phi(z) + A\theta(z)/(1 - g), \quad (19)$$

то вона, як випливає з (18), є розв'язком такої крайової задачі:

$$\Phi_0^+(x) - g\Phi_0^-(x) = A_1f(x), \quad x \in \tilde{L}. \quad (20)$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (20), одержимо

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) = &A_1X_0(z) \left[ \sigma_Y \tilde{b}_1 g(L, z) + \right. \\ &+ \sigma_{01}g(L_1, z) + \sigma_{02}g(L_2, z) - \\ &- \tau_{01}ig(L'_1, z) + \tau_{01}ig(L''_1, z) - \\ &\left. - \tau_{02}ig(L'_2, z) + \tau_{02}ig(L''_2, z) \right], \end{aligned} \quad (21)$$

де

$$\beta = \frac{\ln|g|}{-2\pi},$$

$$g(L, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{dt}{X_0^+(t)(t - z)},$$

$$X_0(z) = \frac{[(z + a)(z - d)]^{0,5+i\beta}}{[(z + d)(z - a)]^{-0,5+i\beta}}. \quad (22)$$

Враховуючи (6), (11), (13), (14), (19), для функції  $\Phi_0(z)$  при великих  $|z|$  має місце розв'язання

$$\Phi_0(z) = A_1q/(1 - g) + O(1/z^2). \quad (23)$$

З іншого боку, на підставі (21) при великих  $|z|$  отримаємо

$$\begin{aligned}
a_1 &= ie^{\beta\pi} \left[ -\sigma_Y \tilde{b}_1 I_s^{bc} - \sigma_{01} I_s^{ab} - \sigma_{02} I_s^{cd} + \tau_{01} I_c^{ab} - \tau_{02} I_c^{cd} \right] / \pi, \\
a_2 &= e^{\beta\pi} \left[ \sigma_Y \tilde{b}_1 I_{ct}^{bc} + \sigma_{01} I_{ct}^{ab} + \sigma_{02} I_{ct}^{cd} + \tau_{01} I_{st}^{ab} - \tau_{02} I_{st}^{cd} \right] / \pi, \\
a_3 &= ie^{\beta\pi} \left[ -\sigma_Y \tilde{b}_1 I_{st2}^{bc} - \sigma_{01} I_{st2}^{ab} - \sigma_{02} I_{st2}^{cd} + \tau_{01} I_{ct2}^{ab} - \tau_{02} I_{ct2}^{cd} \right] / \pi, \\
I_{\rho}^{km} &= \int_k^m g_{\rho}(t) dt, \quad I_{\rho t}^{km} = \int_k^m g_{\rho}(t) t dt, \quad I_{\rho t2}^{km} = \int_k^m g_{\rho}(t) t^2 dt,
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
g_c(t) &= b_3^{-1}(t) \cos b(t), \quad g_s(t) = b_3^{-1}(t) \sin b(t), \quad b_3(t) = \sqrt{(t^2 - a^2)(d^2 - t^2)}, \\
b(t) &= \beta \ln \left\{ \left[ (t+a)(d-t) \right] / \left[ (t-a)(t+d) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Тут індекс  $\rho$  набуває двох значень  $c$  чи  $s$ , а  $km - ab, bc, cd$ .

Враховуючи (23) і (24), отримаємо

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0, \quad a_2 = q/(1-g), \\
a_3 &= 2i\beta(d-a)q/(1-g). \tag{26}
\end{aligned}$$

Систему алгебричних рівнянь (25), (26) стосовно  $\sigma_{0j}$  і  $\tau_{0j}$  запишемо так:

$$\begin{aligned}
\sigma_Y \tilde{b}_1 I_s^{bc} + \sigma_{01} I_s^{ab} + \sigma_{02} I_s^{cd} - \\
-\tau_{01} I_c^{ab} + \tau_{02} I_c^{cd} = 0, \tag{27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_Y \tilde{b}_1 I_{ct}^{bc} + \sigma_{01} I_{ct}^{ab} + \sigma_{02} I_{ct}^{cd} + \\
+\tau_{01} I_{st}^{ab} - \tau_{02} I_{st}^{cd} = q\pi e^{-\beta\pi} (1-g), \tag{28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\sigma_Y \tilde{b}_1 I_{st2}^{bc} - \sigma_{01} I_{st2}^{ab} - \sigma_{02} I_{st2}^{cd} + \\
+\tau_{01} I_{ct2}^{ab} - \tau_{02} I_{ct2}^{cd} = \frac{2\beta\pi(d-a)}{(1-g)e^{\beta\pi}} q. \tag{29}
\end{aligned}$$

$$\sigma_{yy}^{\pm}(x) = \sigma_{01}, \quad \sigma_{xy}^{\pm}(x) = -\tau_{01}, \quad x \in (a, b),$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^+(x) &= b_4(\sigma_{01} - q) + P_1 + 2b_3(x) \left[ (\sigma_Y \tilde{b}_1 - \sigma_{01}) b_5^{bc}(x) + (\sigma_{02} - \sigma_{01}) b_5^{cd}(x) + \right. \\
&\quad \left. + \tau_{01} \{ 2b_{6-}^{ab}(x) + b_7^{bc}(x) + b_7^{cd}(x) \} - \tau_{02} b_8^{cd}(x) \right] / \pi, \quad x \in (a, b),
\end{aligned}$$

$$\sigma_{yy}^{\pm}(x) = \sigma_{02}, \quad \sigma_{xy}^{\pm}(x) = \tau_{02}, \quad x \in (c, d), \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^+(x) &= b_4(\sigma_{02} - q) + P_1 + 2b_3(x) \left[ (\sigma_Y \tilde{b}_1 - \sigma_{02}) b_5^{bc}(x) + (\sigma_{01} - \sigma_{02}) b_5^{ab}(x) - \right. \\
&\quad \left. - \tau_{02} \{ 2b_{6-}^{cd}(x) + b_7^{bc}(x) + b_7^{ab}(x) \} + \tau_{01} b_8^{ab}(x) \right] / \pi, \quad x \in (c, d),
\end{aligned}$$

де

$$b_4 = (3+g)/(1-g), \quad b_{6\pm}^{km}(x) = \sin b(x) I_{sp}^{km}(x) \pm \cos b(x) I_{cp}^{km}(x),$$

$$b_5^{km}(x) = \sin b(x) (I_{cp}^{km} + I_{cm}^{km}) + \cos b(x) (I_{sp}^{km} - I_{sm}^{km}),$$

$$b_7^{km}(x) = \sin b(x) (I_{sp}^{km} - I_{sm}^{km}) - \cos b(x) (I_{cp}^{km} + I_{cm}^{km}),$$

$$b_8^{km}(x) = \sin b(x) (I_{sp}^{km} + I_{sm}^{km}) - \cos b(x) (I_{cp}^{km} - I_{cm}^{km}),$$

Компоненти тензора напружень вздовж осі  $Ox$  знайдемо за формулами

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy}^{\pm} - i\sigma_{xy}^{\pm} &= A_1^{-1} \left[ \Phi_0^+(x) - g\Phi_0^-(x) \right], \\
\sigma_{xy}^+ &= A_1^{-1} \operatorname{Re} \left[ 3\Phi_0^+(x) + g\Phi_0^-(x) \right] + \\
&\quad + P_1 - q(3+g)/(1-g), \tag{30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^+ + \sigma_{xx}^- - 2\sigma_{yy}^{\pm} &= \\
&= P_1 + P_2 - 2q, \quad -\infty < x < \infty.
\end{aligned}$$

Введемо позначення

$$I_{\rho p}^{km}(x) = \int_k^m \frac{g_{\rho}(t)}{(t+x)} dt, \quad I_{\rho m}^{km}(x) = \int_k^m \frac{g_{\rho}(t)}{(t-x)} dt,$$

тоді на підставі залежностей (30) отримано вирази для компонент тензора напружень на дійсній осі, які наведемо через їх громіздкий вигляд тільки у зонах пластичності



$$b_9^{km}(x) = \sin b(x)(I_{cp}^{km} - I_{cm}^{km}) + \cos b(x)(I_{sp}^{km} + I_{sm}^{km}).$$

Задача згину пластини. Введемо комплексні потенціали  $\Phi_{3j}(z)$  і  $\Psi_{3j}(z)$  для кожної з півплощин  $S_j$  та аналітичне продовження функції  $\Phi_{3j}(z)$  з області  $S_j$  в область  $S_{3-j}$  за формулою

$$\Phi_{3j}(z) = -\bar{\Phi}_{3j}(\bar{z}) - z\bar{\Phi}'_{3j}(\bar{z}) - \bar{\Psi}_{3j}(z),$$

тоді згідно з [8] можемо записати

$$\begin{aligned} \partial_x(\partial_x w + i\partial_y w) = \\ = \Phi_{3j}(z) - \Phi_{3j}(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'_{3j}(z)}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$z \in S_j;$$

$$\begin{aligned} 2\tilde{\mu}_j \tilde{f} = \tilde{\kappa}_j \Phi_{3j}(z) + \Phi_{3j}(\bar{z}) - \\ - (z - \bar{z})\overline{\Phi'_{3j}(z)}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$z \in S_j,$$

де

$$\tilde{f} = M_y + i \left( H_{xy} + \int_{-a}^x N_y dx \right),$$

$$\tilde{\mu}_j = -0,75(1 + \nu_j) / E_j h^3,$$

$$\tilde{\kappa}_j = (3 + \nu_j) / (1 - \nu_j),$$

$E_j$  – модуль Юнга.

Для комплексного потенціалу  $\Phi_{3j}(z)$  має місце розвинення

$$\Phi_{3j}(z) = O(1/z^2), \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (34)$$

Введемо функції

$$\theta_3(z) = \tilde{\Phi}_{31}(z) + \tilde{\Phi}_{32}(z), \quad z \in S_j, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(z) = \tilde{\mu}_{3-j} \tilde{\kappa}_j \Phi_{3j}(z) - \tilde{\mu}_j \Phi_{33-j}(z), \\ z \in S_j. \end{aligned} \quad (36)$$

З частини крайових умов (3) можемо записати

$$\tilde{f}^+ = \tilde{f}^-, \quad x \in \tilde{L}. \quad (37)$$

Якщо врахувати (33) і (36), то з крайової умови (37) одержимо, що функція  $\Phi_3(z)$  задовольняє задачі лінійного спряження

$$\Phi_3^+(x) - \Phi_3^-(x) = 0, \quad x \in \tilde{L},$$

розв'язок якої набув вигляду

$$\Phi_3(z) = 0. \quad (38)$$

Розв'язавши систему алгебричних рівнянь (35) і (36) стосовно  $\Phi_{3j}(z)$  та врахувавши (38), отримаємо

$$\Phi_{3j}(z) = \begin{cases} \tilde{A}_j^{-1} \tilde{\mu}_j \theta_3(z), & z \in S_j, \\ \tilde{A}_{3-j}^{-1} \tilde{\mu}_j \tilde{\kappa}_{3-j} \theta_3(z), & z \in S_{3-j}. \end{cases} \quad (39)$$

Тут  $\tilde{A}_j = \tilde{\mu}_j + \tilde{\mu}_{3-j} \tilde{\kappa}_j$ .

Якщо врахувати крайові умови (3) і (4), а також залежності (32), (33) і (39), то одержимо, що функція  $\theta_3(z)$  задовольняє таким крайовим умовам:

$$\theta_3^+(x) - \theta_3^-(x) = 0, \quad x \in L', \quad (40)$$

$$\theta_3^+(x) - \tilde{g} \theta_3^-(x) = \tilde{A}^{-1} \tilde{f}_1(x), \quad x \in \tilde{L},$$

де

$$\tilde{f}_1(x) = \sigma_y \tilde{b}_2, \quad x \in L,$$

$$\tilde{A} = \tilde{\kappa}_1 / (2\tilde{A}_1), \quad \tilde{g} = -\tilde{\kappa}_2 \tilde{A}_1 / (\tilde{A}_2 \tilde{\kappa}_1),$$

$$\tilde{f}_1(x) = M_{0j} + iH_{0j}, \quad x \in L'_j,$$

$$\tilde{f}_1(x) = M_{0j} - iH_{0j}, \quad x \in L''_j.$$

Розв'язок задачі лінійного спряження (40) можна зобразити:

$$\begin{aligned} \theta_3(z) = \tilde{A}^{-1} \tilde{X}_0(z) \left[ \sigma_y \tilde{b}_2 \tilde{g}(L, z) + \right. \\ \left. + M_{01} \tilde{g}(L_1, z) + M_{02} \tilde{g}(L_2, z) + \right. \\ \left. + iH_{01} \tilde{g}(L'_1, z) - iH_{01} \tilde{g}(L''_1, z) + \right. \\ \left. + iH_{02} \tilde{g}(L'_2, z) - iH_{02} \tilde{g}(L''_2, z) \right], \end{aligned} \quad (41)$$

де

$$\tilde{\beta} = \frac{\ln|\tilde{g}|}{-2\pi}, \quad \tilde{g}(L, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{dt}{\tilde{X}_0^+(t)(t-z)},$$

$$\tilde{X}_0(z) = \frac{[(z+a)(z-d)]^{0,5+i\tilde{\beta}}}{[(z+d)(z-a)]^{-0,5+i\tilde{\beta}}}. \quad (42)$$

Розвинення функції  $\theta_3(z)$  при  $|z| \rightarrow \infty$  знайдемо двояко, враховуючи формули (35) і (34)

$$\theta_3(z) = O(1/z^2) \quad (43)$$

та залежність (41)

$$\theta_3(z) = \tilde{A}^{-1} (\tilde{a}_1 z + \tilde{a}_1 b_1 + \tilde{a}_2 + (b_1 \tilde{a}_2 + b_2 \tilde{a}_1 + \tilde{a}_3) / z + \dots). \quad (44)$$

Тут

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= ie^{\tilde{\beta}\pi} \left[ -\sigma_Y \tilde{b}_2 \tilde{I}_s^{bc} - M_{01} \tilde{I}_s^{ab} - M_{02} \tilde{I}_s^{cd} - H_{01} \tilde{I}_c^{ab} + H_{02} \tilde{I}_c^{cd} \right] / \pi, \\ \tilde{a}_2 &= e^{\tilde{\beta}\pi} \left[ \sigma_Y \tilde{b}_2 \tilde{I}_{ct}^{bc} + M_{01} \tilde{I}_{ct}^{ab} + M_{02} \tilde{I}_{ct}^{cd} - H_{01} \tilde{I}_{st}^{ab} + H_{02} \tilde{I}_{st}^{cd} \right] / \pi, \\ \tilde{a}_3 &= ie^{\tilde{\beta}\pi} \left[ -\sigma_Y \tilde{b}_2 \tilde{I}_{st2}^{bc} - M_{01} \tilde{I}_{st2}^{ab} - M_{02} \tilde{I}_{st2}^{cd} - H_{01} \tilde{I}_{ct2}^{ab} + H_{02} \tilde{I}_{ct2}^{cd} \right] / \pi. \end{aligned} \quad (45)$$

Вирази для  $\tilde{I}_\rho^{km}$ ,  $\tilde{I}_{\rho t}^{km}$ ,  $\tilde{I}_{\rho t2}^{km}$  отримано із виразів для  $I_\rho^{km}$ ,  $I_{\rho t}^{km}$ ,  $I_{\rho t2}^{km}$  заміною  $\beta \rightarrow \tilde{\beta}$ .

На підставі (43) і (44) запишемо

$$\tilde{a}_1 = 0, \quad \tilde{a}_2 = 0, \quad a_3 = 0. \quad (46)$$

Підставляючи (45) у (46), отримано систему лінійних алгебричних рівнянь стосовно  $M_{0j}$  і  $H_{0j}$

$$\begin{aligned} \sigma_Y \tilde{b}_2 I_s^{bc} + M_{01} I_s^{ab} + M_{02} I_s^{cd} + \\ + H_{01} I_c^{ab} - H_{02} I_c^{cd} = 0, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \sigma_Y \tilde{b}_2 I_{ct}^{bc} + M_{01} I_{ct}^{ab} + M_{02} I_{ct}^{cd} - \\ - H_{01} I_{st}^{ab} + H_{02} I_{st}^{cd} = 0, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} -\sigma_Y \tilde{b}_2 I_{st2}^{bc} - M_{01} I_{st2}^{ab} - M_{02} I_{st2}^{cd} - \\ - H_{01} I_{ct2}^{ab} + H_{02} I_{ct2}^{cd} = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Згинальні та крутні моменти на дійсній осі визначимо за формулами

$$\begin{aligned} M_y^\pm + iH_{xy}^\pm &= \tilde{A} \left[ \theta_3^+(x) - \tilde{g} \theta_3^-(x) \right], \\ M_x^+ &= \tilde{A} \operatorname{Re} \left[ d_1 \theta_3^+(x) + \tilde{g} \theta_3^-(x) \right], \\ M_x^- &= -\tilde{A} \operatorname{Re} \left[ \theta_3^+(x) + \tilde{g} d_2 \theta_3^-(x) \right], \end{aligned} \quad (50)$$

$$d_j = (\tilde{\kappa}_j - 2) / \tilde{\kappa}_j, \quad c_j = (\tilde{\kappa}_j - 1) / \tilde{\kappa}_j.$$

Якщо врахувати вирази для функцій  $\theta_3(z)$  (41), то на підставі (48) отримано моменти на всій дійсній осі, а наведено у пластичних зонах

$$M_y^\pm(x) = M_{01}, \quad H_{xy}^\pm(x) = -H_{01}, \quad x \in (a, b),$$

$$\begin{aligned} M_x^+(x) &= M_{01} (d_1 + \tilde{g}) / (1 - \tilde{g}) + c_1 b_3(x) \left[ (\sigma_Y \tilde{b}_2 - M_{01}) \tilde{b}_5^{bc}(x) + (M_{02} - \right. \\ &\left. - M_{01}) \tilde{b}_5^{cd}(x) + H_{01} \{ 2\tilde{b}_{6-}^{ab}(x) + \tilde{b}_7^{bc}(x) + \tilde{b}_7^{cd}(x) \} - H_{02} \tilde{b}_8^{cd}(x) \right] / \pi, \quad x \in (a, b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x^-(x) &= -M_{01} (1 + d_2 \tilde{g}) / (1 - \tilde{g}) - c_2 b_3(x) \left[ (\sigma_Y \tilde{b}_2 - M_{01}) \tilde{b}_5^{bc}(x) + (M_{02} - \right. \\ &\left. - M_{01}) \tilde{b}_5^{cd}(x) + H_{01} \{ 2\tilde{b}_{6-}^{ab}(x) + \tilde{b}_7^{bc}(x) + \tilde{b}_7^{cd}(x) \} - H_{02} \tilde{b}_8^{cd}(x) \right] / \pi, \quad x \in (a, b), \end{aligned}$$

$$M_y^\pm(x) = M_{02}, \quad H_{xy}^\pm(x) = H_{02}, \quad x \in (c, d), \quad (51)$$

$$\begin{aligned} M_x^+(x) &= M_{02} (d_1 + \tilde{g}) / (1 - \tilde{g}) + c_1 b_3(x) \left[ (\sigma_Y \tilde{b}_2 - M_{02}) \tilde{b}_5^{bc}(x) + (M_{01} - \right. \\ &\left. - M_{02}) \tilde{b}_5^{ab}(x) - H_{02} \{ 2\tilde{b}_{6-}^{cd}(x) + \tilde{b}_7^{bc}(x) + \tilde{b}_7^{ab}(x) \} + H_{01} \tilde{b}_8^{ab}(x) \right] / \pi, \quad x \in (c, d), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x^-(x) &= -M_{02} (1 + d_2 \tilde{g}) / (1 - \tilde{g}) - c_2 b_3(x) \left[ (\sigma_Y \tilde{b}_2 - M_{02}) \tilde{b}_5^{bc}(x) + (M_{01} - \right. \\ &\left. - M_{02}) \tilde{b}_5^{ab}(x) - H_{02} \{ 2\tilde{b}_{6-}^{cd}(x) + \tilde{b}_7^{bc}(x) + \tilde{b}_7^{ab}(x) \} + H_{01} \tilde{b}_8^{ab}(x) \right] / \pi, \quad x \in (c, d), \end{aligned}$$

де вирази для  $\tilde{b}_5^{km}(x)$ ,  $\tilde{b}_{6\pm}^{km}(x)$ ,  $\tilde{b}_7^{km}(x)$ ,  $\tilde{b}_8^{km}(x)$ ,  $\tilde{b}_9^{km}(x)$  отримаємо із виразів для  $b_5^{km}(x)$ ,  $b_6^{km}(x)$ ,  $b_7^{km}(x)$ ,  $b_8^{km}(x)$ ,  $b_9^{km}(x)$  заміною  $\beta \rightarrow \tilde{\beta}$ .

#### 4. Числовий аналіз та висновки

Числовий аналіз задачі проведено для нитесилу  $\sigma_Y^{(1)} = 278$  МПа,  $E_1 = 1,38 \cdot 10^5$  МПа

та технічно чистого заліза  $\sigma_Y^{(2)} = 130$  МПа,  $E_2 = 2,08 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ . На рис. 2-7 графіки наведені на верхній основі пластини ( $z = -h$ ).

Скористаємося умовою пластичності Треска-Сен-Венана [1] у вигляді поверхневого шару [2, 3]

$$\max \{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2| \} = 2\tau_Y = \sigma_Y, \quad (52)$$

де

$$\sigma_{1,2} = \left( \tilde{\sigma}_{xx} + \tilde{\sigma}_{yy} \pm \sqrt{(\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\sigma}_{yy})^2 + 4(\tilde{\sigma}_{xy})^2} \right) / 2,$$

$$\tilde{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} + \sigma_{xx}^3, \quad \tilde{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy} + \sigma_{yy}^3,$$

$$\tilde{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy} + \sigma_{xy}^3, \quad \sigma_{xx}^3 = -\frac{3M_x}{2h^2},$$

$$\sigma_{yy}^3 = -\frac{3M_y}{2h^2}, \quad \sigma_{xy}^3 = -\frac{3H_{xy}}{2h^2}, \quad \sigma_{xy}^3 = -\frac{3H_{xy}}{2h^2}$$

та умовою однозначності переміщень для плоскої задачі та задачі згину

$$\int_a^d [\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x)] dx = 0,$$

$$\int_a^d [\theta_0^+(x) - \theta_0^-(x)] dx = 0. \quad (53)$$

Розкриття тріщини  $\delta$  у вершинах  $b$  і  $c$  на верхній основі пластини знайдемо за формулами  $\delta_b = \delta_{ab} + \delta_{ab}^3$ ,  $\delta_c = \delta_{dc} + \delta_{dc}^3$ .

$$\delta_{ab} = \frac{A_1(g-1)^b}{4\pi g \mu_1 \mu_2 a} \int_a^b b_3(x) \left[ (\sigma_Y \tilde{b}_1 - \sigma_{01}) \tilde{b}_7^{bc}(x) + (\sigma_{02} - \sigma_{01}) \tilde{b}_7^{cd}(x) - \tau_{01} \{ 2\tilde{b}_{6+}^{ab}(x) + \tilde{b}_5^{bc}(x) + \tilde{b}_5^{cd}(x) \} + \tau_{02} \tilde{b}_9^{cd}(x) \right] dx,$$

$$\delta_{ab}^3 = h \frac{\tilde{A}(\tilde{g}-1)^b}{2\pi \tilde{g}} \int_a^b b_3(x) \left[ (\sigma_Y \tilde{b}_2 - M_{01}) \tilde{b}_7^{bc}(x) + (M_{02} - M_{01}) \tilde{b}_7^{cd}(x) - H_{01} \{ 2\tilde{b}_{6+}^{ab}(x) + \tilde{b}_5^{bc}(x) + \tilde{b}_5^{cd}(x) \} + H_{02} \tilde{b}_9^{cd}(x) \right] dx,$$

$$\delta_{dc} = \frac{A_1(g-1)^c}{4\pi g \mu_1 \mu_2 d} \int_b^c b_3(x) \left[ (\sigma_Y \tilde{b}_1 - \sigma_{02}) \tilde{b}_7^{bc}(x) + (\sigma_{01} - \sigma_{02}) \tilde{b}_7^{ab}(x) + \tau_{02} \{ 2\tilde{b}_{6+}^{cd}(x) + \tilde{b}_5^{bc}(x) + \tilde{b}_5^{ab}(x) \} - \tau_{01} \tilde{b}_9^{ab}(x) \right] dx,$$

$$\delta_{dc}^3 = h \frac{\tilde{A}(\tilde{g}-1)^c}{2\pi \tilde{g}} \int_b^c b_3(x) \left[ (\sigma_Y \tilde{b}_2 - M_{02}) \tilde{b}_7^{bc}(x) + (M_{01} - M_{02}) \tilde{b}_7^{ab}(x) + H_{02} \{ 2\tilde{b}_{6+}^{cd}(x) + \tilde{b}_5^{bc}(x) + \tilde{b}_5^{ab}(x) \} - H_{01} \tilde{b}_9^{ab}(x) \right] dx.$$

Отриману систему рівнянь (27)-(29), (47)-(49), (52), (53) відносно шуканих величин розв'язуємо за допомогою методу Ньютона, а інтеграли обчислено методом механічних квадратур [7].

На рис. 2-7 суцільним лініям відповідають  $w_1^*$ ,  $\delta_1^*$ , а пунктирним –  $w_2^*$ ,  $\delta_2^*$ , причому використано обезрозмірення  $w_j^* = w_j/l$ ,  $\delta_j^* = \delta_j E_1 / (l \sigma_Y)$ ,  $q^* = q / \sigma_Y$ ,  $P_1^* = P_1 / \sigma_Y$ ,  $s^* = s/l$ ,  $h_1^* = h_1/h$ .

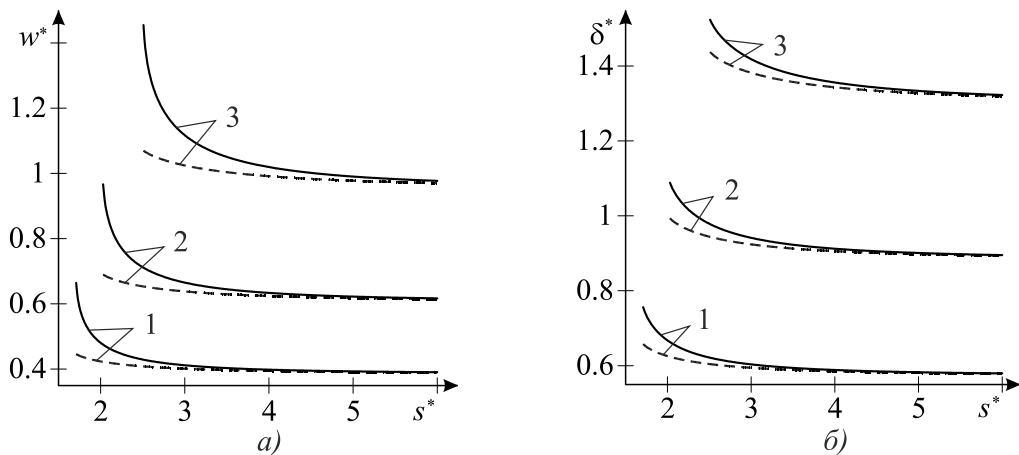


Рис. 2. Графічна залежність довжин зон пластичності  $w_j^*$  та розкриття  $\delta_j^*$  від відстані між тріщинами  $s^*$  при різних  $q^*$

Для  $h_1^* = 0,8$ ,  $P_1^* = 0,1$  на рис. 2 подано графічні залежності довжин зон пластичності  $w_j^*$  (рис. а) та розкриття  $\delta_j^*$  (рис. б) від відстані між тріщинами  $s^*$  при різних значеннях навантаження  $q^*$ , причому кривим 1,

2, 3 відповідає  $q^* = 0,4; 0,5; 0,6$ . З віддаленням тріщин виходимо на результати для однієї тріщини [5], а при збільшенні навантаження шукані величини зростають. Крім того, довжина пластичної зони та розкриття тріщин у внутрішній вершині більші, ніж у зовнішній.

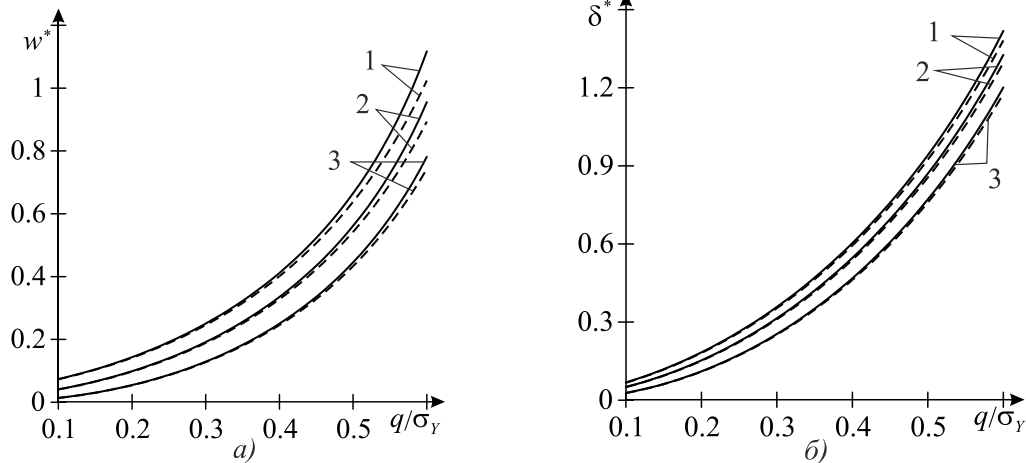


Рис. 3. Графічна залежність довжин зон пластичності  $w_j^*$  та розкриття  $\delta_j^*$  від навантаження  $q^*$  при різному  $h_1^*$

Для  $P_1^* = 0,1$ ,  $s^* = 3$  на рис. 3 зображено графічні залежності довжин зон пластичності  $w_j^*$  (рис. а) і розкриття  $\delta_j^*$  (рис. б) від навантаження  $q^*$  при різному значенні  $h_1^*$ .

Криві 1-3 побудовані при  $h_1^* = 0,8; 0,9; 1$ . Числовий аналіз показав, що для наскрізних тріщин довжини зон пластичності на верхній основі менші, ніж для поверхневих тріщин.

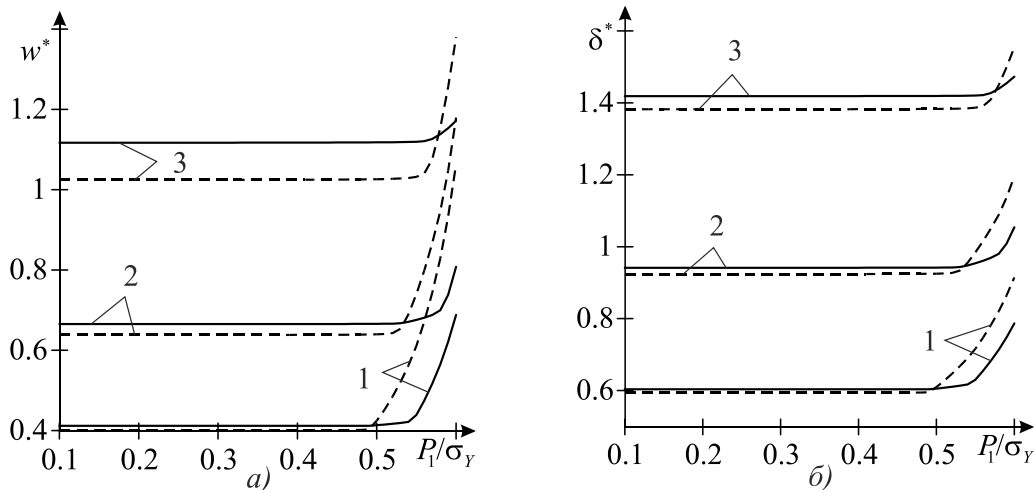


Рис. 4. Графічна залежність довжин зон пластичності  $w_j^*$  та розкриття  $\delta_j^*$  від зусилля  $P_1^*$  при різних значеннях  $q^*$

Для  $h_1^* = 0,8$ ,  $s^* = 3$  на рис. 4 подано графічні залежності довжин зон пластичності  $w_j^*$  (рис. а) та розкриття  $\delta_j^*$  (рис. б) від навантаження  $P_1^*$  при різних значеннях нормального навантаження  $q^*$ , причому кривим

1-3 відповідає  $q^* = 0,4; 0,5; 0,6$ . Числовий аналіз показує, що вплив навантаження  $P_1^*$  на досліджені параметри  $w_j^*$ ,  $\delta_j^*$  проявляється тільки при великому його значенні.

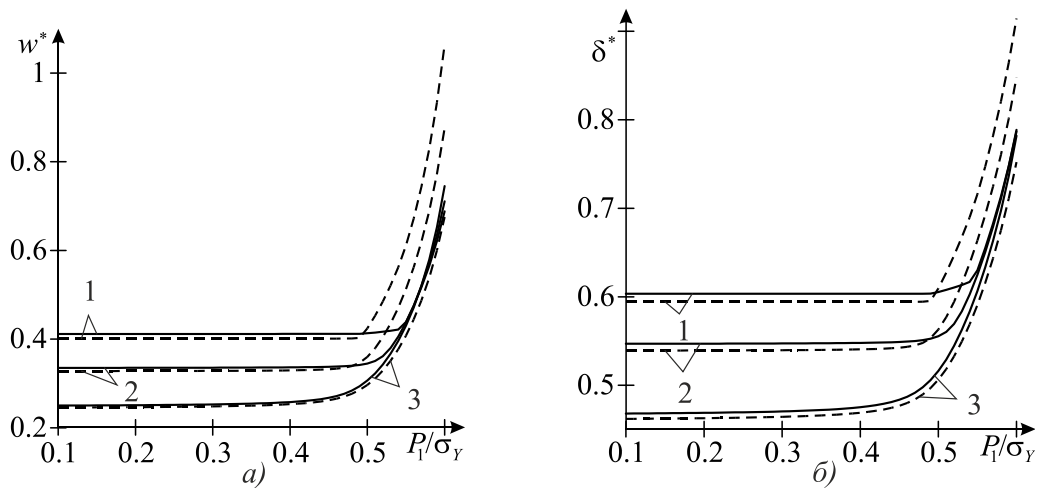


Рис. 5. Графічна залежність довжин зон пластичності  $w_j^*$  та розкриття  $\delta_j^*$  від зведеного зусилля  $P_1^*$  при різному  $h_1^*$

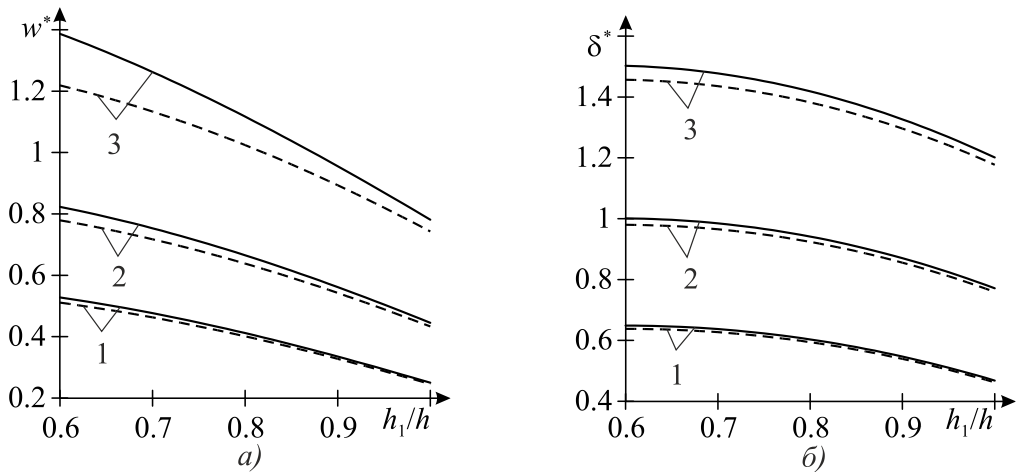


Рис. 6. Графічна залежність довжин зон пластичності  $w_j^*$  та розкриття  $\delta_j^*$  від  $h_1^*$  при різних значеннях зусилля  $q^*$

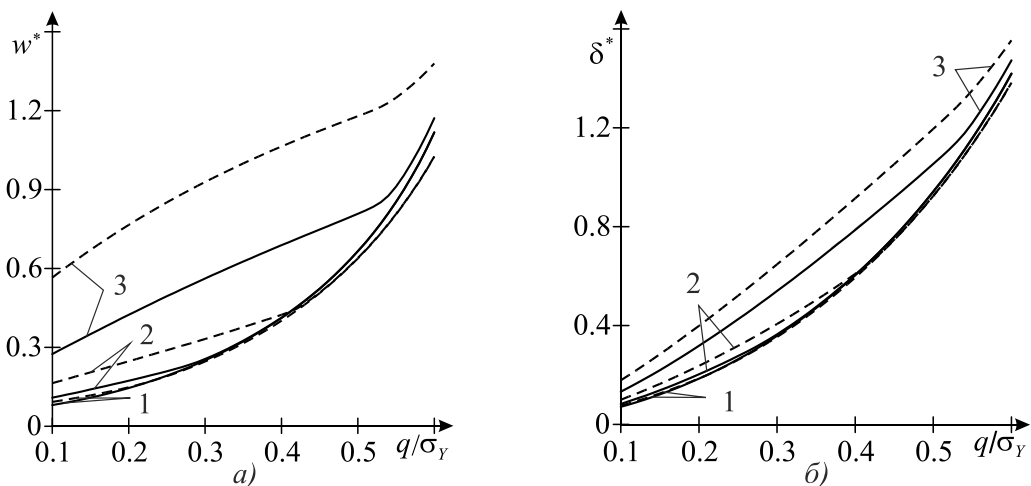


Рис. 7. Графічна залежність довжин зон пластичності  $w_j^*$  та розкриття  $\delta_j^*$  від зусилля  $q^*$  при різному  $P_1^*$

Для  $q^* = 0,4$ ,  $s^* = 3$  на рис. 5 подано графічні залежності довжин зон пластичності  $w_j^*$  (рис. а) та розкриття  $\delta_j^*$  (рис. б) від навантаження  $P_1^*$  при різній глибині тріщин

$h_1^*$ , причому кривим 1-3 відповідає  $h_1^* = 0,8; 0,9; 1$ . У випадку наскрізних тріщин  $h_1^* = 1$  отримуємо відомі результати із статті [6].

Для  $P_1^* = 0,1$ ,  $s^* = 3$  на рис. 6 подано графічні залежності довжин зон пластичності  $w_j^*$  (рис. а) та розкриття  $\delta_j^*$  (рис. б) від глибини тріщин  $h_1^*$  при різних значеннях нормального навантаження  $q^*$ , причому кривим 1-3 відповідає відповідно  $q^* = 0,4; 0,5; 0,6$ . Бачимо, що на верхній осн. пластини шукані значення спадають до результатів наскрізних тріщин [6].

Для  $h_1^* = 0,8$ ,  $s^* = 3$  на рис. 7 зображено графічні залежності довжин зон пластичності  $w_j^*$  (рис. а) і розкриття  $\delta_j^*$  (рис. б)

від навантаження  $q^*$  при різних значеннях навантаження  $P_1^*$ . Криві 1-3 побудовані при  $P_1^* = 0,4; 0,5; 0,6$ . Числовий аналіз показав, що навантаження  $q^*$  на довжини зон пластичності та розкриття суттєво впливає.

На основі числового аналізу встановлено, що при віддаленні тріщини одна від одної отримуємо результати для однієї поверхневої тріщини [5] і шукані величини зменшуються, а при нульовій величині перемички під тріщинами виходимо на результати для наскрізних тріщин [6].

### Література

1. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пластичності та міцності. Львів: Світ, 1999. Т. 1. 531 с.
2. Кир'ян В. І., Осадчук В. А., Николишин М. М. Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій. Львів: СПОЛОМ, 2007. 320 с.
3. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. Львів: СПОЛОМ, 2003. 320 с.
4. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 708 с.
5. Николишин М., Опанасович В., Куротчин Л., Слободян М. Двовісний розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів та ненаскрізною тріщиною в ній з урахуванням пластичних зон біля її вершин. *Вісник Львів. нац. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 2012. Вип. 72. С. 29–45.
6. Николишин М. М., Опанасович В. К., Куротчин Л. Р., Слободян М. С. Двовісний розтяг кусково-однорідної пластини з двома тріщинами на межі поділу матеріалів з урахуванням пластичних зон біля їхніх вершин. *Фізико-хімічна механіка матеріалів.* 2014. № 6 С. 67–72.
7. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распространение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 444 с.
8. Пруссов И. А. Метод сопряжения в теории плит. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. 256 с.
9. Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. Киев: Наук. думка, 1989. 248с.
10. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружності рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. 716 с.

### References

1. Bozhydarnyk, V. V. & Sulim, G. T. (1999). Elements of the theory of plasticity and strength. Lviv: Svit.
2. Kyryjan, V. I., Osadchuk, V. A. & Nykolyshyn, M. M. (2007). Fracture mechanics of metal welded joints. Lviv: SPOLOM.
3. Kushnir, R. M., Nikolishin, M. M. & Osadchuk, V. A. (2003). Elastic and elastic-plastic shells with boundary condition defects. Lviv: SPOLOM.
4. Mushelishvili, N. I. (1966). Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Moscow: Nauka.
5. Nykolyshyn, M. M., Opanasovych, V. K., Kurotchyn, L. R. & Slobodyan, M. S. (2012). Biaxial tension of piecewise-homogeneous isotropic plate with a straight boundary between material and non-

- through crack in it, taking into account the plastic zone at its edges. *Bulletin of Lviv. Univ. Series meh.-mate*, No. 72, pp. 29–45.
6. Nykolyshyn, M. M., Opanasovych, V. K., Kurotchyn, L. R. & Slobodyan, M. S. (2014). Biaxial tension piecewise homogeneous plate with two cracks at the interface of materials based on plastic zones near their vertices. *Fiziko-himichna mehanika materialiv*, No 6, pp. 67–72.
  7. Panasyuk, V. V., Savruk, M. P. & Datsishin, A. P. (1976). *Distribution of stresses around cracks in plates and shells*. Kiev: Naukova Dumka.
  8. Prusov, I. A. (1975). *The method of conjugation in the theory of plates*. Minsk: Izdatelstvo Beloruskogo universitetu.
  9. Savruk, M. P. (1981). *Two-dimensional problems of elasticity for bodies with cracks*. Kiev: Naukova Dumka.
  10. Sulym, G. T. (2007). *Fundamentals of the mathematical theory of thermoelastic equilibrium deformed solids with thin inclusions*. Lviv: Research and Publishing Center of Shevchenko.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-15

## ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ ГУМОПОДІБНОГО МАТЕРІАЛУ НА ПРИКЛАДІ ТЕРМОМЕХАНІЧНОЇ ЗАДАЧІ ПРО КОЛИВАННЯ В'ЯЗКОПРУЖНОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО СТЕРЖНЯ

О. Х. Остос, Я. О. Жук

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка  
ostos.alexander1994@gmail.com, y.zhuk@i.ua

### Ключові слова:

гумоподібний стержень, кінематичне навантаження, комплексні модулі, дисипативний розігрів, гармонічні коливання.

Досліджено термомеханічні властивості в'язкопружного матеріалу. Розглянуто задачу про гармонічні коливання гумоподібного стержня при кінематичному навантаженні, прикладеному на одному з його кінців. Для розв'язання задачі використано концепцію комплексних модулів. Отримані амплітудно-частотні характеристики для напруження та деформації. Введено дисипативну функцію, за допомогою якої досягнуто дисипативний розігрів стержня. На основі скінченно-елементної моделі побудовано розв'язок задачі з врахуванням в'язкопружних властивостей матеріалу. Проаналізовано результати згідно з термомеханічними властивостями матеріалу. Зроблені відповідні висновки щодо поведінки гумоподібного матеріалу при термомеханічному навантаженні. Перевірено достовірність значень частот для перших резонансів.

## RESEARCH OF THE BEHAVIOUR OF THE RUBBER-LIKE MATERIAL ON THE EXAMPLE OF A THERMOMECHANICAL PROBLEM ON VIBRATION OF A VISCOELASTIC CYLINDRICAL ROD

O. J. Ostos, Ya. O. Zhuk

Taras Shevchenko National University of Kyiv  
ostos.alexander1994@gmail.com, y.zhuk@i.ua

### Key words:

rubber-like rod, kinematic load, complex moduli, dissipative heating, harmonic vibration.

The Thermomechanical coupling problems are common phenomena in the field of Solid Mechanics. In the area of structural mechanics and materials engineering the primary motivation for studying damping is its importance as an engineering property in the analysis of structural response and performance. There are a number of interesting applications where modeling viscoelastic materials is fundamental, including uses in civil engineering, the food industry, land mine detection and ultrasonic imaging. Nowadays, in structural design, the analysis of all but simple structures is carried out using the finite element method. This investigation deals with the notions of stress-strain and strain-displacements relation, which are fundamental in understanding mechanics.

The problem on harmonic vibration of a viscoelastic rubber-like rod under kinematic load at one of its ends is considered. The thermomechanical properties of a viscoelastic material is investigated. The external loading has a significant influence on the dynamic characteristics of the material. By using the complex moduli, the problem on vibration of the viscoelastic rod was solved. The complex shear and Young's moduli of a rubber-like material should exhibit the same dependence on frequency. The properties of a rubber-like material was applied. The temperature influence is associated both with the Newton boundary conditions and dissipative heating. The dissipative function is expressed in terms of deformations. The frequencies of high-damping materials occur at or near frequencies that are normally of interest in vibration problems at room temperature. For solving the problem a finite element model was applied. Using this model, qualitative analysis of the influence of dynamic load and dissipative heating on the resonant vibrations of viscoelastic rod is performed. According to the theory of viscoelasticity an analysis of the results was



done. The reliability of the values of frequencies for the first resonances was checked. The numerical results of the problem on vibration of a viscoelastic cylindrical rod under kinematic load at one of its end by the general thermomechanical laws on vibration in damped mechanical systems were obtained and investigated. The numerical understanding of the thermomechanical coupling of rubber-like materials is a prerequisite to predict the temperature rise in viscoelastic components. Distribution of the temperature of dissipative heating along the rod axis is built and analyzed.

### 1. Вступ

Еластомерні та полімерні матеріали є незамінними в багатьох практичних застосуваннях завдяки їх дисипативним властивостям та високій деформівній здатності. Важливість дослідження термомеханічної поведінки елементів конструкції, які складаються з полімерів та еластомерів, виникає в багатьох сферах сучасної техніки, у тому числі при розрахунку механічного та теплового стану гумотехнічних виробів, віброізоляторів, великогабаритних пневматичних шин тощо. Виходячи з досягнень та вимог в технічному плані у промисловому світі, такі елементи, як автомобільні шини, ролики транспортерів, покришки, підшипники, в процесі експлуатації піддаються дії цілого комплексу навантажень, які мають суттєвий вплив на динамічні характеристики матеріалів. Внаслідок таких специфічних властивостей цих матеріалів, як істотна залежність механічних характеристик від температури, низька теплопровідність, значні внутрішні втрати, тривале динамічне навантаження, може супроводжуватися високим рівнем дисипативного розігріву. Взаємодія теплових та механічних полів у в'язкопружних тілах вивчається в межах теорії термов'язкопружності. Тепер термомеханічний стан гумоподібних елементів досліджується зазвичай на основі розв'язання зв'язаних задач лінійної термов'язкопружності, в яких співвідношення між напруженнями та деформаціями є лінійними, хоча при цьому враховується залежність властивостей матеріалу від температури. Демпфуюча здатність матеріалу грає величезну роль в динамічній поведінці конструкції. Існує велика кількість досягнень та розробок в цій сфері науки, але також є багато матеріалів, над якими можна проводити розрахунки та отримувати нові результати.

### 2. Математична модель термопружних коливань

Використання концепції комплексних модулів має широке застосування в сучасній інженерії [5], крім того, цей метод є зручним для опису поведінки в'язкопружного матеріалу [7]. Комплексними будуть модуль Юнга  $\tilde{E} = E' + iE''$ , амплітуда напруження  $\tilde{\sigma} = \sigma' + i\sigma''$ , амплітуда деформації  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon' + i\varepsilon''$ , при цьому коефіцієнт Пуассона  $\nu$  залишається дійсним. Запишемо основні співвідношення між комплексними модулями для в'язкопружного матеріалу:

$$\tilde{\mu} = \frac{\tilde{E}}{2(1 + \nu)}, \tilde{\lambda} = \frac{\nu\tilde{E}}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \quad (1)$$

Гармонічні коливання у в'язкопружному середовищі у спрощеній постановці описуються рівнянням вигляду

$$(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})\nabla\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mu}\nabla^2\tilde{\mathbf{u}} + \rho\omega^2\tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (2)$$

де  $\tilde{\lambda} = \lambda' + i\lambda''$ ,  $\tilde{\mu} = \mu' + i\mu''$  – комплексні коефіцієнти Ламе,  $\omega$  – кругова частота коливань,  $\rho$  – густина матеріалу. Рівняння записане в термінах переміщень.

При коливаннях в'язкопружного матеріалу відбуваються втрати енергії, що приводить до його нагрівання. Інтенсивність виділення тепла при гармонічних коливаннях описується усередненою дисипативною функцією, яка може бути виражена через амплітуди деформацій

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{D} = & \frac{\omega}{2} [\lambda'' \{(\varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22} + \varepsilon'_{33})^2 + \\ & + (\varepsilon''_{11} + \varepsilon''_{22} + \varepsilon''_{33})^2\} + \mu'' \{2(\varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22} + \\ & + \varepsilon'_{33}) + (\gamma'_{12} + \gamma'_{13} + \gamma'_{23}) + \\ & + 2(\varepsilon''_{11} + \varepsilon''_{22} + \varepsilon''_{33}) + \\ & + (\gamma''_{12} + \gamma''_{13} + \gamma''_{23})\}], \quad (3) \end{aligned}$$

де  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ ,  $i \neq j$ ,

$$\lambda'' = \frac{\nu E''}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu'' = \frac{E''}{2(1+\nu)}.$$

Передачу тепла у середовищі описуватимемо рівнянням теплопровідності відносно наближених, усереднених за період коливань значень температури  $\bar{T}$ :

$$k\nabla^2 \bar{T} + \bar{D} = \rho c \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}, \quad (4)$$

де  $k$  – коефіцієнт теплопровідності,  $c$  – теплоємність.

### 3. Постановка задачі про термопружні коливання циліндричного стержня з кінематичним збудженням

Задача про дисипативний розігрів розв'язується на прикладі гармонічних коливань скінченного циліндричного стержня  $0 \leq z \leq l$  та радіусом  $R$  (рис. 1).

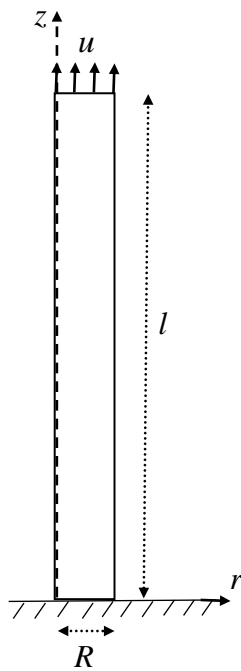


Рис. 1. Схема навантаження

На верхньому кінці стержня задана кінематична умова:

$$\tilde{u}_z|_{z=l} = u_0. \quad (5)$$

Нижній край стержня жорстко закріплений.

У початковий момент часу стержень має температуру навколишнього середовища  $T_0$ . На його бічній поверхні накладається умова Ньютона, яка наближено описує конвективну теплопередачу:

$$Q = -k \frac{\partial \bar{T}}{\partial n} |_{r=R} = \alpha (\bar{T} - T_0), \quad (6)$$

де  $Q$  – густина теплового потоку,  $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі. Верхній та нижній кінці стержня теплоізовані (рис. 2).

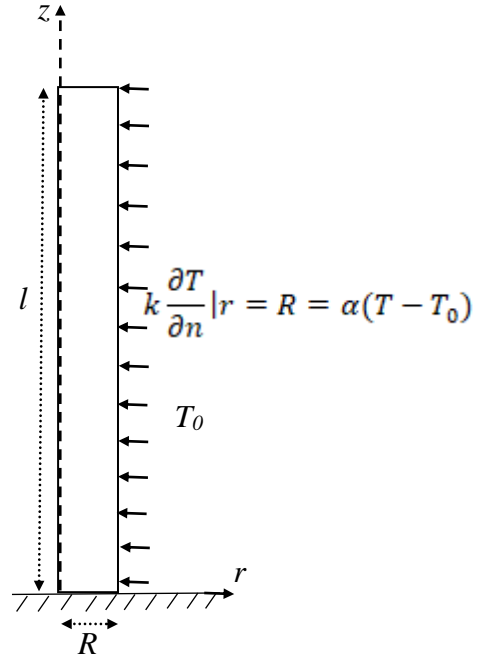


Рис. 2. Схема теплової задачі

### 4. Розв'язок задачі та чисельні розрахунки

При чисельному розрахунку задачі були взяті наступні значення:  $R = 0,01$  м,  $l = 0,2$  м,  $u_0 = 0,0001$  м,  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ .

Для отриманої зв'язаної термомеханічної задачі як гумоподібний матеріал був вибраний неогуківський матеріал, який має наступні термомеханічні величини:

$$E' = 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, E'' = 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},$$

$$\mu' = \frac{E'}{2(1+\nu)} = 3,356 \times 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},$$

$$\mu'' = \frac{E''}{2(1+\nu)} = 3,356 \times 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},$$

$$\nu = 0,49, \rho = 1200 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, c = 2005 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}},$$

$$k = 0,09 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}, \alpha = 8,2 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C}}.$$

Задача розглядалася в наступному частотному діапазоні:  $0 \leq f \leq 1000$  Гц, а розв'язок задачі будувався в околі першого резонансу  $f = 114$  Гц.

Використовуючи скінченно-елементну модель, були отримані розподіли напруження, деформації, переміщення та температури вздовж стержня при частоті, близькій до резонансної при заданих механічних та теплових умовах. Нижче наведені розподіли деформації та температури, де значення температур вказані в градусах °C (рис. 3, 4).

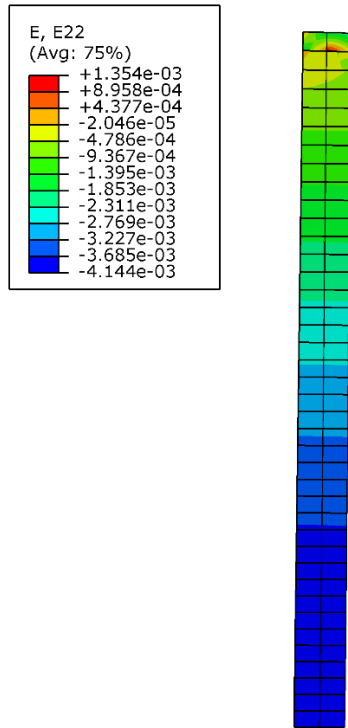


Рис. 3. Розподіл деформації вздовж стержня

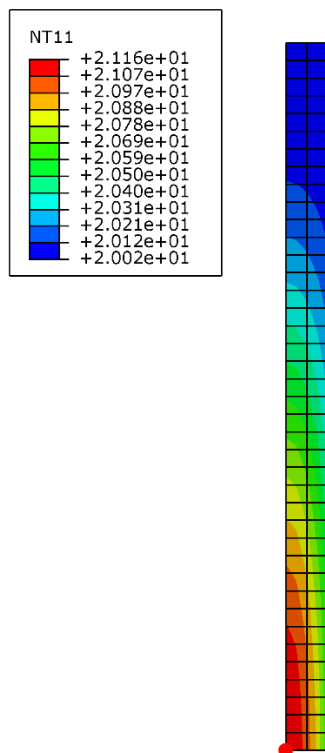


Рис. 4. Розподіл температури вздовж стержня

Задача про дисипативний розігрів в'язкопружного стержня нестационарна, тому також побудовано температурно-часова (час вказано в секундах) залежність в точці максимального розігріву, яку помітно з розподілу температури вздовж стержня (рис. 5).

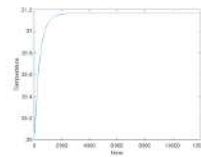


Рис. 5. Залежність температури від часу в точці найбільшого розігріву

З графіка бачимо, що температура з часом встановлюється, тобто ніяких небезпечних процесів не відбувається.

### 5. Висновки

Використовуючи концепцію комплексних модулів, була розв'язана термомеханічна задача про розігрів циліндричного стержня при гармонічних поздовжніх коливаннях в околі першої резонансної частоти. Дану задачу в термінах комплексних амплітуд основних польових змінних розв'язано із застосуванням методу скінченних елементів, який узагальнено на випадок амплітудних співвідношень при гармонічному деформуванні. З графіка розподілу температури бачимо, що температура зростає згори донизу та спадає від середини стержня до бічної поверхні. Це зумовлено збільшенням амплітуди деформацій та напружень на даній формі коливань у нижній частині стержня. При амплітуді переміщення на верхній поверхні стержня  $10^{-3}$  м та температурі зовнішнього середовища  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  найбільше значення температури досягається в нижній середній точці стержня:  $T_{\max} = 21,16\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Таким чином, можемо зробити висновок, що скінченно-елементне моделювання дозволяє ефективно розв'язувати термомеханічні задачі про розігрів в'язкопружних тіл з використанням концепції комплексних модулів.

## Література

1. Anderson V. W., Lazan B. J. Damping and fatigue properties of magnesium and magnese-copper alloys proposed as new high damping materials. Minnesota: Internal rept., Aero Library. 1957. 243 p.
2. Snowdon J. C. Vibration and shock in damped mechanical systems. New York: The Pensylvania State University, 1968. 486 p.
3. Green A. E., Adkins J. E. Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics. Oxford: At the Clarendon Press, 1960. 455 p.
4. Behnke R., Kalishke M. Thermo-mechanically coupled inves-tigation of steady state rolling tires by numerical simulation and experiment. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2015. N 68. P. 101–131.
5. Карнаухов В. Г., Гуменюк Б. П. Термомеханика предварительно деформированных вязкоупругих тел. Киев: Наук. думка, 1990. 304 с.
6. Карнаухов В. Г., Сенченков И. К., Червинко О. П. Влияние предварительного деформирования на резонансные колебания и диссипативный разогрев вязкоупругого цилиндра конечной длины. *Прикладная механика*. 1997. 33, № 1. С. 39–42.
7. Nashif A. D., Jones D. I., Henderson J. P. Vibration Damping. New York: A Wiley-Interscience Publication, 1985. 448 p.
8. Карнаухов В. Г., Сенченков И. К., Гуменюк Б. П. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении. Киев: Наук. думка, 1985. 288 с.
9. Astarita G. Thermodynamics of dissipative materials with entropic elasticity. *Polymer Engineering & Sci*. 1974. 14, N 10. P. 730–733.
10. Babra R. C. Thermodynamics of simple materials of differential type. *J. Mech*. 1976. 15, N 3. P. 457–466.
11. Goodman J. Mechanics applied to engineering. London: Longmans-Green, 1899. 148 p.

## References

1. Anderson, V. W. & Lazan, B. J. (1957). Damping and fatigue properties of magnesium and magnese-copper alloys proposed as new high damping materials. Minnesota: Internal rept., Aero Library.
2. Snowdon, J. C. (1968). Vibration and shock in damped mechanical systems. New York: The Pensylvania State University.
3. Green, A. E. & Adkins, J. E. (1960). Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics. Oxford: At the Clarendon Press.
4. Behnke, R. & Kaliske, M. (2015). Thermomechanically coupled investigation of steady state rolling tires by numerical simulation and experiment. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, No. 68, pp. 101–131.
5. Karnaukhov, V. G. & Gumenuk, B. P. (1990). The thermomechanics of pre-deformed viscoelastic bodies. Kyev: Naukova dumka.
6. Karnaukhov, V. G., Senchenkov, I. K. & Chervinko, O. P. (1997). The effect of preliminary deformation on resonant vibrations and disipative heating of a viscoelastic cylinder of finite length. *Applied mechanics*, No 33(1), pp. 39–42.
7. Nashif, A. D., Jones, D. I. & Henderson, J. P. (1985). Vibration Damping. New York: A Wiley-Interscience Publication.
8. Karnaukhov, V. G., Senchenkov, I. K. & Chervinko, O. P. (1985). The thermomechanical behavior of viscoelastic bodies under harmonic loading. Kyev: Naukova dumka.
9. Astarita, G. (1974). Thermodynamics of dissipative materials with entropic elasticity. *Polymer Engineering & Sci*, No 14(10), pp. 730–733.
10. Babra, R. C. (1976). Thermodynamics of simple materials of differential type. *J. Mech.*, No 15(3), pp. 457–466.
11. Goodman, J. (1899). Mechanics applied to engineering. London: Longmans-Green.

УДК 517.9

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-16

## ЗБУРЕННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛЯПУНОВА У ПРОСТОРИ ГІЛЬБЕРТА

Є. В. Панасенко, А. І. Анохін, А. А. Гужва, М. М. Чміль

Запорізький національний університет  
panasenko.yevgeniy@gmail.com

**Ключові слова:**

крайова задача, псевдообернений оператор, рівняння Ляпунова, простір Гільберта.

Рівняння Ляпунова має багато застосувань у квантовій механіці, теорії оптимального керування та теорії ігор, варіаційному численні. У статті розглянуто збурену крайову задачу для рівняння Ляпунова у критичному випадку у просторі Гільберта. Досліджено задачу у припущенні, коли породжуюча крайова задача не має розв'язків. Множина розв'язків будується за допомогою теорії псевдообернених і нормально розв'язних операторів. Отримано достатні умови біфуркації збуреної крайової задачі для рівняння Ляпунова, коли  $[A(t), Z(t)] = AZ(t) - Z(t)A$ , побудовано збіжний ітераційний алгоритм. Розв'язок  $Z(t, \varepsilon) \in C^1([a, b]; L(H_1)) \times C(0, \varepsilon_0]$  шукається для фіксованого  $\varepsilon_0 > 0$ . Запропонований підхід до знаходження розв'язків крайової задачі застосовано до крайової задачі у просторі  $m = l_\infty$  обмежених числових послідовностей із зліченновимірними матрицями у диференціальному рівнянні.

## PERTURBATION OF A BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A LYAPUNOV EQUATION IN A HILBERT SPACE

Ye. V. Panasenko, A. I. Anokhin, A. A. Guzhva, M. M. Chmil

Zaporizhzhia National University  
panasenko.yevgeniy@gmail.com

**Key words:**

boundary-value problem, pseudoinverse operator, Lyapunov equation, Hilbert space.

This article is devoted to the boundary problem for a Lyapunov equation in a Hilbert space. A Lyapunov equation has abundance of applications, e.g. it is used in quantum mechanics, linear theories of Hamiltonian systems, games theory, optimal control theory, variations calculus and in a number of other supplements. The problem is investigated on the assumption that generating boundary-value problem does not have any solutions and the operator that describes linear boundary-value problem is noetherian. Set of solutions is based on pseudoinverse theory [8, 17], normally resolvable operators [2] and the Vishik-Lyusternik method. The condition of bifurcation solution of boundary-value problem for Lyapunov equation in critical case was found given that  $[A(t), Z(t)] = AZ(t) - Z(t)A$ .

The solution  $Z(t, \varepsilon) \in C^1([a, b]; L(H_1)) \times C(0, \varepsilon_0]$  can be found for fixed  $\varepsilon_0 > 0$ . The paper is the continuation of authors' research [14]. It should be noted that boundary problems for Lyapunov and Riccati equations investigate as in finite-dimensional so in infinite-dimensional spaces in set of papers [3, 19-21]. In infinite-dimensional case such problems have been investigated insufficiently. As a rule, such equations investigate in regular case, when the problem has only one solution. In irregular case this equation was investigated (periodical case) in the works of Boichuk O.A. and Krivosheya S.A. [3]. In this paper a Lyapunov equation investigates in operator, matrix case or in the differential-operator case.

In the article [14] sufficient conditions of bifurcation solutions of boundary-value problem for the Lyapunov equation in the Hilbert space were obtained given that generating boundary-value problem has

solutions. In the paper [12] a controllability of boundary-value problem for the Lyapunov equation in the Hilbert space was considered. Optimization of boundary-value problem for the Lyapunov equation in the Hilbert space was examined in [15]. Nonlinear boundary-value problem for the Lyapunov equation in  $L_p$  space was considered in [16].

In this article an example of boundary-value problem for the countable system of such equations was provided. All necessary and sufficient conditions of the boundary-value problem solutions for the Lyapunov equation in the Hilbert space were found. Suggested approach can be employed in research papers dedicated to boundary-value problems for differential-operator equations of general type.

## 1. Постановка задачі

Дослідженню крайових задач для диференціальних рівнянь як у скінченновимірному, так і у нескінченновимірному випадках присвячена величезна кількість робіт [3, 11-16, 19-21]. Серед останнього класу добре відомим є рівняння Ляпунова [3]. У статті розглядається задача про достатні умови біфуркації розв'язків крайової задачі для рівняння Ляпунова у просторі Гільберта, коли  $[A(t), Z(t)] = AZ(t) - Z(t)A$ . Дана робота є продовженням роботи авторів [14].

Розглянемо крайову задачу

$$\dot{Z}(t, \varepsilon) = AZ(t, \varepsilon) - Z(t, \varepsilon)A + \varepsilon C(t)Z(t, \varepsilon) + \Phi(t), \quad (1)$$

$$lZ(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon l_1 Z(\cdot, \varepsilon), \quad (2)$$

де  $A \in L(H_1)$  – лінійний обмежений оператор,  $\Phi(t), C(t) \in C([a, b]; L(H_1))$  – неперервні оператор-функції,  $l, l_1 : C^1([a, b]; L(H_1)) \rightarrow H_2$  – лінійні обмежені оператори,  $\varepsilon$  – малий параметр,  $L(H_1)$  – простір лінійних та обмежених операторів, що діють з простору Гільберта  $H_1$  у себе;  $H_1, H_2$  – простори Гільберта,  $\alpha \in H_2$ . Шукається розв'язок  $Z(t, \varepsilon) \in C^1([a, b]; L(H_1)) \times C(0, \varepsilon_0]$  для фіксованого  $\varepsilon_0 > 0$ .

У роботі [14] отримано достатні умови біфуркації розв'язків крайової задачі для рівняння Ляпунова у просторі Гільберта, коли породжуюча крайова задача має розв'язки і не має розв'язків. У роботі [12] досліджено крайову задачу на керованість для рівняння Ляпунова в просторі Гільберта. Задача опти-

мізації крайової задачі для рівняння Ляпунова у просторі Гільберта розглянута у [15]. Нелінійна крайова задача для рівняння Ляпунова в просторі  $L_p$  розглянута у [16].

## 2. Лінійна задача

При  $\varepsilon = 0$  отримаємо породжуючу крайову задачу:

$$\dot{Z}_0(t) = AZ_0(t) - Z_0(t)A + \Phi(t), \quad (3)$$

$$lZ_0(\cdot) = \alpha. \quad (4)$$

Загальний розв'язок (3) має вигляд:

$$Z_0(t, \bar{C}_0) = e^{tA} \bar{C}_0 e^{-tA} + \int_0^t e^{(t-\tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau-t)A} d\tau \quad (5)$$

для всіх  $\bar{C}_0 \in L(H_1)$ . Переконаємось у цьому:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_0(t, \bar{C}_0) &= A e^{tA} \bar{C}_0 e^{-tA} - e^{tA} \bar{C}_0 e^{-tA} A + \Phi(t) + \\ &+ A \int_0^t e^{(t-\tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau-t)A} d\tau - \\ &- \int_0^t e^{(t-\tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau-t)A} d\tau A = \\ &= AZ_0(t, \bar{C}_0) - Z_0(t, \bar{C}_0)A + \Phi(t), \end{aligned}$$

так як

$$\begin{aligned} &\left( \int_0^t e^{(t-\tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau-t)A} d\tau \right)' = \\ &= \Phi(t) + A \int_0^t e^{(t-\tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau-t)A} d\tau - \\ &- \int_0^t e^{(t-\tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau-t)A} d\tau. \end{aligned}$$

Підставляючи (5) у крайову умову, отримаємо наступне операторне рівняння

$$Q \bar{C}_0 = g_0,$$

де  $QC = l e^A C e^{-A}$ . Тоді

$$g_0 = \alpha - l \int_0^1 e^{(-\tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau-1)A} d\tau.$$

Розглянемо випадок, коли  $R(Q) = \overline{R(Q)}$ ; тоді, розв'язок існує тоді й тільки тоді, коли виконується наступна умова [2]:

$$P_{N(Q^*)} g_0 = 0, \quad (6)$$

де  $P_{N(Q^*)}$  – проєктор на ядро оператора  $Q^*$ , спряженого до оператора  $Q$ . Ця умова гарантує належність правої частини рівняння  $Q\bar{C}_0 = g_0$  множині значень оператора  $Q$ :

$$\left[ \alpha - l \int_0^1 e^{(-\tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau-1)A} d\tau \right] \in R(Q).$$

У цьому випадку загальний розв'язок операторного рівняння  $Q\bar{C}_0 = g_0$  матиме вигляд:

$$\bar{C}_0 = Q^+ g_0 + P_{N(Q)} C_0, C_0 \in L(H_1).$$

Тоді загальний розв'язок задачі (3), (4) матиме вигляд:

$$Z_0(t, C_0) = e^{tA} P_{N(Q)} C_0 e^{-tA} + (G[\Phi, \alpha])(t), \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} (G[\Phi, \alpha])(t) = & e^{tA} Q^+ \left( \alpha - l \int_0^1 e^{(-\tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau-1)A} d\tau \right) e^{-tA} + \\ & + \int_0^t e^{(t-\tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau-t)A} d\tau. \end{aligned}$$

Таким чином, отримали теорему.

**Теорема 1.** Нехай оператор  $QC = le^A C e^{-A}$ , що діє з гільбертового простору  $H_1$  у гільбертовий простір  $H_2$ , має псевдообернений. Крайова задача (3), (4) має розв'язки тоді і тільки тоді, коли виконується умова (6). При цьому розв'язки крайової задачі (3), (4) мають вигляд (7).

### 3. Збурена задача

Припустимо, що у породжуючій крайовій задачі (3), (4) не існує розв'язків. Це означає, що умова розв'язності  $P_{N(Q^*)} g_0 = 0$  не виконується. В цьому випадку розв'язок шукаємо у вигляді ряду:

$$Z(t, \varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i Z_i(t). \quad (8)$$

Підставимо ряд (8) у крайову задачу (1), (2) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon^{-1}$  приходимо до однорідної крайової задачі:

$$\dot{Z}_{-1}(t) = AZ_{-1}(t) - Z_{-1}(t)A, \quad (9)$$

$$\ell Z_{-1}(\cdot) = 0. \quad (10)$$

Задача (9), (10) має розв'язок:

$$Z_{-1}(t, C_{-1}) = e^{tA} P_{N(Q)} C_{-1} e^{-tA} \quad (11)$$

для довільного елемента  $C_{-1} \in H_1$ , який буде знайдений нижче. Операторне рівняння (9) має розв'язок:

$$Z_{-1}(t, \bar{C}_{-1}) = e^{tA} \bar{C}_{-1} e^{-tA}. \quad (12)$$

Переконаємося у справедливості представлення (11):

$$\dot{Z}_{-1}(t, \bar{C}_{-1}) = A e^{tA} \bar{C}_{-1} e^{-tA} - e^{tA} \bar{C}_{-1} e^{-tA} A.$$

Підставимо (12) у крайову умову (10), отримаємо наступне операторне рівняння

$$Q\bar{C}_{-1} = 0,$$

де  $Q\bar{C}_{-1} = le^A \bar{C}_{-1} e^{-A}$ . Тоді

$$\bar{C}_{-1} = P_{N(Q)} C_{-1}. \quad (13)$$

Підставляючи (13) у (12), отримаємо співвідношення (11). Прирівнюючи коефіцієнти при  $\varepsilon^0$ , маємо крайову задачу для визначення коефіцієнта  $Z_0(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{Z}_0(t, C_{-1}) = & AZ_0(t, C_{-1}) - Z_0(t, C_{-1})A + \\ & + C(t)Z_{-1}(t, C_{-1}) + \Phi(t), \quad (14) \end{aligned}$$

$$\ell Z_0(\cdot, C_{-1}) = \alpha + \ell_1 Z_{-1}(\cdot, C_{-1}). \quad (15)$$

Операторне рівняння (14) має розв'язок:

$$\begin{aligned} Z_0(t, \bar{C}_0) = & e^{tA} \bar{C}_0 e^{-tA} + \\ & + \int_0^t e^{(t-\tau)A} [C(\tau)Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau)] e^{(\tau-t)A} d\tau. \quad (16) \end{aligned}$$

Підставляючи  $Z_0(t, \bar{C}_0)$  в крайову умову (15), отримаємо наступне операторне рівняння

$$Q\bar{C}_0 = g_0,$$

де  $Q\bar{C}_0 = le^A \bar{C}_0 e^{-A}$ ,

$$g_0 = \alpha + \ell_1 Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) - \\ - \ell \int_0^t e^{(-\tau)A} [C(\tau)Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau)] e^{(\tau-)A} d\tau.$$

У випадку, коли  $R(Q) = \overline{R(Q)}$ , розв'язок існує тоді й тільки тоді, коли виконується умова (6), або ж враховуючи те що  $Z_{-1}(t, C_{-1}) = e^{tA} P_{N(Q)} C_{-1} e^{-tA}$ , маємо:

$$B_0 C_{-1} = \\ = -P_{N(Q^*)} \left[ \alpha - \ell \int_0^t e^{(-\tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau-)A} d\tau \right], \quad (17)$$

де оператор  $B_0$  має вигляд

$$B_0 C_{-1} = P_{N(Q^*)} \left[ \ell_1 e^{tA} P_{N(Q)} C_{-1} e^{-tA} - \\ - \ell \int_0^t e^{(-\tau)A} C(\tau) e^{tA} P_{N(Q)} C_{-1} e^{-tA} e^{(\tau-)A} d\tau \right].$$

Рівняння (17) є розв'язним тоді і лише тоді, коли його права частина задовольняє умові

$$P_{N(B_0^*)} P_{N(Q^*)} \left[ \alpha - \ell \int_0^t e^{(-\tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau-)A} d\tau \right] = 0.$$

Остання умова виконується, якщо буде виконана умова:

$$P_{N(B_0^*)} P_{N(Q^*)} = 0, \quad (18)$$

а операторне рівняння (17) при цьому буде мати хоча б один розв'язок у вигляді:

$$C_{-1} = \\ = -B_0^+ P_{N(Q^*)} \left[ \alpha - \ell \int_0^t e^{(-\tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau-)A} d\tau \right]. \quad (19)$$

У цьому випадку розв'язок рівняння  $QC_0 = g_0$  матиме вигляд:

$$\bar{C}_0 = Q^+ g_0 + P_{N(Q)} C_0, C_0 \in H$$

або

$$\bar{C}_0 = Q^+ \{ \alpha + \ell_1 Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) \} - \\ - Q^+ \ell \int_0^t e^{(-\tau)A} [C(\tau)Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau)] e^{(\tau-)A} d\tau + \\ + P_{N(Q)} C_0.$$

Таким чином, розв'язок  $Z_0(t, C_0)$  можна записати у наступному вигляді:

$$Z_0(t, C_0) = e^{tA} P_{N(Q)} C_0 e^{-tA} + \bar{Z}_0(t) \quad (20)$$

для довільного елемента  $C_0 \in H_1$ , який буде знайдений нижче.

$$\bar{Z}_0(t) = e^{tA} [Q^+ \{ \alpha + \ell_1 Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) \}] e^{-tA} + \\ + (G[C(\cdot)Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) + \Phi(\cdot)])(t), \quad (21)$$

де оператор Гріна має вигляд:

$$(G[C(\cdot)Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) + \Phi(\cdot)])(t) = \\ = \int_0^t e^{(t-\tau)A} [C(\tau)Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau)] e^{(\tau-t)A} d\tau - \\ - e^{tA} \left[ Q^+ \ell \int_0^t e^{(-\tau)A} [C(\tau)Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau)] e^{(\tau-)A} d\tau \right] e^{-tA}. \quad (22)$$

При  $\varepsilon^1$  приходимо до визначення коефіцієнта  $Z_1(t)$  до крайової задачі

$$\dot{Z}_1(t) = AZ_1(t) - Z_1(t)A + C(t)Z_0(t, C_0), \quad (23)$$

$$\ell Z_1(\cdot) = \ell_1 Z_0(\cdot, C_0). \quad (24)$$

Операторне рівняння (23) має розв'язок:

$$Z_1(t, \bar{C}_1) = e^{tA} \bar{C}_1 e^{-tA} + \\ + \int_0^t e^{(t-\tau)A} C(\tau) Z_0(\tau, C_0) e^{(\tau-t)A} d\tau. \quad (25)$$

Підставляючи  $Z_1(t)$  в крайову умову (24), отримаємо наступне операторне рівняння

$$Q\bar{C}_1 = g_1,$$

де  $Q\bar{C}_1 = \ell e^{tA} \bar{C}_1 e^{-tA}$ ,

$$g_1 = \ell_1 Z_0(\cdot, C_0) - \\ - \ell \int_0^t e^{(-\tau)A} C(\tau) Z_0(\tau, C_0) e^{(\tau-)A} d\tau.$$

У випадку, коли  $R(Q) = \overline{R(Q)}$ , розв'язок існує тоді й тільки тоді, коли виконується наступна умова  $P_{N(Q^*)} g_1 = 0$ ,

або ж враховуючи те, що  $Z_0(t, C_0) = e^{tA} P_{N(Q)} C_0 e^{-tA} + \bar{Z}_0(t)$ , маємо:

$$B_0 C_0 = -P_{N(Q^*)} \left[ \ell_1 \bar{Z}_0(\cdot) - \\ - \ell \int_0^t e^{(-\tau)A} C(\tau) \bar{Z}_0(\tau) e^{(\tau-)A} d\tau \right], \quad (26)$$

де оператор  $B_0$  має вигляд:



$$B_0 C_0 = P_{N(Q^*)} \left[ \ell_1 e^{tA} P_{N(Q)} C_0 e^{-A} - \int_0^t e^{(t-\tau)A} C(\tau) Z_1(\tau, C_1) e^{(\tau-t)A} d\tau \right] - \ell \int_0^t e^{(t-\tau)A} C(\tau) e^{tA} P_{N(Q)} C_0 e^{-A} e^{(\tau-t)A} d\tau. \quad (33)$$

Рівняння (26) належить до рівнянь вигляду (17) і при тій же умові (18) операторне рівняння (26) має хоча б один розв'язок у вигляді:

$$C_0 = -B_0^+ P_{N(Q^*)} \left[ \ell_1 \bar{Z}_0(\cdot) - \ell \int_0^t e^{(t-\tau)A} C(\tau) \bar{Z}_0(\tau) e^{(\tau-t)A} d\tau \right]. \quad (27)$$

В цьому випадку розв'язок рівняння  $QC_1 = g_1$  матиме вигляд:

$$\bar{C}_1 = Q^+ g_1 + P_{N(Q)} C_1, \quad C_1 \in H, \quad (28)$$

або

$$\bar{C}_1 = Q^+ \ell_1 Z_0(\cdot, C_0) - Q^+ \ell \int_0^t e^{(t-\tau)A} [C(\tau) Z_0(\tau, C_0)] e^{(\tau-t)A} d\tau + P_{N(Q)} C_1.$$

Таким чином, розв'язок  $Z_1(t)$  можна записати у наступному вигляді:

$$Z_1(t, C_1) = e^{tA} P_{N(Q)} C_1 e^{-tA} + \bar{Z}_1(t) \quad (29)$$

для довільного елемента  $C_1 \in H_1$ , який буде знайдений нижче.

$$\bar{Z}_1(t) = e^{tA} \left[ Q^+ \ell_1 Z_0(\cdot, C_0) \right] e^{-tA} + (G[C(\cdot) Z_0(\cdot, C_0)])(t), \quad (30)$$

де оператор Гріна має вигляд:

$$\begin{aligned} & (G[C(\cdot) Z_0(\cdot, C_0)])(t) = \\ & = \int_0^t e^{(t-\tau)A} C(\tau) Z_0(\tau, C_0) e^{(\tau-t)A} d\tau - e^{tA} \left[ Q^+ \times \right. \\ & \left. \times \ell \int_0^t e^{(t-\tau)A} [C(\tau) Z_0(\tau, C_0)] e^{(\tau-t)A} d\tau \right] e^{-tA}. \quad (31) \end{aligned}$$

При  $\varepsilon^2$  приходимо до визначення коефіцієнта  $Z_2(t)$  до крайової задачі:

$$\dot{Z}_2(t) = AZ_2(t) - Z_2(t)A + C(t)Z_1(t, C_1), \quad (31)$$

$$\ell Z_2(\cdot) = \ell_1 Z_1(\cdot, C_1). \quad (32)$$

Операторне рівняння (32) має розв'язок:

$$Z_2(t) = e^{tA} \bar{C}_2 e^{-tA} +$$

Підставляючи  $Z_2(t)$  в крайову умову (32), отримаємо наступне операторне рівняння:

$$Q\bar{C}_2 = g_2,$$

де  $Q\bar{C}_2 = \ell e^{tA} \bar{C}_2 e^{-tA}$ ,

$$g_2 = \ell_1 Z_1(\cdot, C_1) -$$

$$- \ell \int_0^t e^{(t-\tau)A} C(\tau) Z_1(\tau, C_1) e^{(\tau-t)A} d\tau.$$

У випадку, коли  $R(Q) = \overline{R(Q)}$ , розв'язок існує тоді й тільки тоді, коли виконується наступна умова  $P_{N(Q^*)} g_2 = 0$ ,

або ж враховуючи те, що  $Z_1(t, C_1) = e^{tA} P_{N(Q)} C_1 e^{-tA} + \bar{Z}_1(t)$ , маємо:

$$B_0 C_1 = -P_{N(Q^*)} \left[ \ell_1 \bar{Z}_1(\cdot) - \ell \int_0^t e^{(t-\tau)A} C(\tau) \bar{Z}_1(\tau) e^{(\tau-t)A} d\tau \right], \quad (34)$$

де оператор  $B_0$  має вигляд:

$$B_0 C_1 = P_{N(Q^*)} \left[ \ell_1 e^{tA} P_{N(Q)} C_1 e^{-tA} - \ell \int_0^t e^{(t-\tau)A} C(\tau) e^{tA} P_{N(Q)} C_1 e^{-tA} e^{(\tau-t)A} d\tau \right].$$

Рівняння (34) належить до рівнянь вигляду (17) і при тій же умові (18) операторне рівняння (34) має хоча б один розв'язок у вигляді

$$C_1 = -B_0^+ P_{N(Q^*)} \left[ \ell_1 \bar{Z}_1(\cdot) - \ell \int_0^t e^{(t-\tau)A} C(\tau) \bar{Z}_1(\tau) e^{(\tau-t)A} d\tau \right]. \quad (35)$$

В цьому випадку розв'язок рівняння  $Q\bar{C}_2 = g_2$  матиме вигляд:

$$\bar{C}_2 = Q^+ g_2 + P_{N(Q)} C_2, \quad C_2 \in H$$

або

$$\begin{aligned} & \bar{C}_2 = Q^+ \ell_1 Z_1(\cdot, C_0) - \\ & - Q^+ \ell \int_0^t e^{(t-\tau)A} [C(\tau) Z_1(\tau, C_1)] e^{(\tau-t)A} d\tau + \\ & + P_{N(Q)} C_2. \end{aligned}$$

Таким чином, розв'язок  $Z_2(t)$  можна записати у наступному вигляді:

$$Z_2(t, C_2) = e^{tA} P_{N(Q)} C_2 e^{-tA} + \bar{Z}_2(t) \quad (36)$$

для довільного елемента  $C_2 \in H_1$ , який буде знайдений нижче.

$$\begin{aligned} \bar{Z}_2(t) = e^{tA} [Q^+ \ell_1 Z_1(\cdot, C_1)] e^{-tA} + \\ + (G[C(\cdot) Z_1(\cdot, C_1)])(t), \end{aligned} \quad (37)$$

де оператор Гріна має вигляд:

$$\begin{aligned} (G[C(\cdot) Z_1(\cdot, C_1)])(t) = \\ = \int_0^t e^{(t-\tau)A} C(\tau) Z_1(\tau, C_1) e^{(\tau-t)A} d\tau - e^{tA} [Q^+ \times \\ \times \ell \int_0^t e^{(-\tau)A} [C(\tau) Z_1(\tau, C_1)] e^{(\tau-t)A} d\tau] e^{-tA}. \end{aligned} \quad (38)$$

Діючи за індукцією, для визначення коефіцієнта  $x_i(t)$  при  $\varepsilon^i$  ряду (8) приходимо до крайової задачі

$$\begin{aligned} \dot{Z}_i(t) = AZ_i(t) - Z_i(t)B + \\ + C(t)Z_{i-1}(t, C_{i-1}), \end{aligned} \quad (39)$$

$$\ell Z_i(\cdot) = \ell_1 Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1}). \quad (40)$$

При тій же умові (18) крайова задача (39), (40) має розв'язок:

$$Z_i(t, C_i) = e^{tA} P_{N(Q)} C_i e^{-tA} + \bar{Z}_i(t), \quad (41)$$

$$Z_i(t, C_i) = \begin{cases} e^{tA} P_{N(Q)} C_i e^{-tA}, & \text{якщо } i = -1; \\ e^{tA} P_{N(Q)} C_i e^{-tA} + \bar{Z}_i(t), & \text{якщо } i = \overline{0, \infty}, \end{cases} \quad (45)$$

$$C_i = \begin{cases} -B_0^+ P_{N(Q^*)} \left[ \alpha - \ell \int_0^t e^{(-\tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau-t)A} d\tau \right], & \text{якщо } i = -1; \\ -B_0^+ P_{N(Q^*)} \left[ \ell_1 \bar{Z}_i(\cdot) - \ell \int_0^t e^{(-\tau)A} C(\tau) \bar{Z}_i(\tau) e^{(\tau-t)A} d\tau \right], & \text{якщо } i = \overline{0, \infty}, \end{cases} \quad (46)$$

$$\bar{Z}_i(t) = \begin{cases} e^{tA} [Q^+ (\alpha + \ell_1 Z_{-1}(\cdot, C_{-1}))] e^{-tA} + (G[C(\cdot) Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) + \Phi(\cdot)])(t), & \text{якщо } i = -1; \\ e^{tA} [Q^+ \ell_1 Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1})] e^{-tA} + (G[C(\cdot) Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1})])(t), & \text{якщо } i = \overline{0, \infty}, \end{cases} \quad (47)$$

$$(G[C(\cdot) Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1})])(t) = \begin{cases} \int_0^t e^{(t-\tau)A} [C(\tau) Z_{i-1}(\tau, C_{i-1}) + \Phi(\tau)] e^{(\tau-t)A} d\tau - \\ - e^{tA} \left[ Q^+ \ell \int_0^t e^{(-\tau)A} [C(\tau) Z_{i-1}(\tau, C_{i-1}) + \Phi(\tau)] e^{(\tau-t)A} d\tau \right] e^{-tA}, & \text{якщо } i = 0; \\ \int_0^t e^{(t-\tau)A} C(\tau) Z_{i-1}(\tau, C_{i-1}) e^{(\tau-t)A} d\tau - \\ - e^{tA} \left[ Q^+ \ell \int_0^t e^{(-\tau)A} [C(\tau) Z_{i-1}(\tau, C_{i-1})] e^{(\tau-t)A} d\tau \right] e^{-tA}, & \text{якщо } i = \overline{1, \infty}. \end{cases} \quad (48)$$

де частинний розв'язок  $\bar{Z}_i(t)$  крайової задачі (39), (40) має вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_i(t) = e^{tA} [Q^+ \ell_1 Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1})] e^{-tA} + \\ + (G[C(\cdot) Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1})])(t). \end{aligned} \quad (42)$$

Довільний елемент  $C_i \in H$  знаходиться за формулою:

$$\begin{aligned} C_i = -B_0^+ P_{N(Q^*)} \left[ \ell_1 \bar{Z}_i(\cdot) - \right. \\ \left. - \ell \int_0^t e^{(-\tau)A} C(\tau) \bar{Z}_i(\tau) e^{(\tau-t)A} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

$(G[C(\cdot) Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1})])(t)$  – оператор Гріна неоднорідно крайової задачі (39), (40), який діє на оператор  $C(\cdot) Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1}) \in C([a; b]; H_1)$  наступним чином:

$$\begin{aligned} (G[C(\cdot) Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1})])(t) = \\ = \int_0^t e^{(t-\tau)A} C(\tau) Z_{i-1}(\tau, C_{i-1}) e^{(\tau-t)A} d\tau - e^{tA} [Q^+ \times \\ \times \ell \int_0^t e^{(-\tau)A} [C(\tau) Z_{i-1}(\tau, C_{i-1})] e^{(\tau-t)A} d\tau] e^{-tA}. \end{aligned} \quad (44)$$

Таким чином, маємо ітераційний алгоритм побудови розв'язку крайової задачі (39), (40):

Отже, критерій розв'язності крайової задачі (1), (2) у гільбертовому просторі може бути сформульований наступним чином.

**Теорема 2.** Нехай оператор  $QC_i = le^{-A}C_i e^{-A}$ , що діє з гільбертового простору  $H_1$  у гільбертовий простір  $H_2$ , має псевдообернений і породжуюча крайова задача, отримана із (1), (2) при  $\varepsilon = 0$ , при довільних неоднорідностях  $\Phi(t) \in C([a;b], L(H_1))$  та  $\alpha \in H_2$  не має розв'язків. Тоді, якщо виконуються умови:

1) оператор  $B_0$  має псевдообернений оператор;

$$2) P_{N(B_0^*)}P_{N(Q^*)} = 0,$$

то збурена крайова задача (1), (2) при довільних неоднорідностях  $\Phi(t) \in C([a;b], L(H_1))$  та  $\alpha \in H_2$  має хоча б один розв'язок у вигляді ряду:

$$Z(t) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i Z_i(t),$$

абсолютно збіжного при довільних фіксованих  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ , а оператор  $B_0$  має вигляд

$$B_0 C_0 = P_{N(Q^*)} \left[ \ell_1 e^{-A} P_{N(Q)} C_0 e^{-A} - \ell \int_0^{\cdot} e^{(-\tau)A} C(\tau) e^{-A} P_{N(Q)} C_0 e^{-A} e^{(\tau-)A} d\tau \right],$$

і коефіцієнти ряду визначаються ітераційним алгоритмом (45)-(48).

#### 4. Приклад

Розглянемо збурену крайову задачу (1), (2) для рівняння Ляпунова у просторі  $m = l_\infty$  обмежених числових послідовностей із зліченновимірними матрицями  $A$ ,  $C(t)$  і  $\Phi(t)$ :

$$A = \text{diag} \left( \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0, \dots, \frac{1}{4}, 0, \dots \right),$$

$$C(t) = \text{diag} \left( e^{\frac{1}{8}t}, e^{\frac{1}{8}t}, e^{\frac{1}{8}t}, e^{\frac{1}{8}t}, \dots, e^{\frac{1}{8}t}, e^{\frac{1}{8}t}, \dots \right),$$

$$\Phi(t) = \text{diag} \left( e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{1}{2}t}, \dots, e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{1}{2}t}, \dots \right)$$

та крайовою умовою наступного вигляду:

$$lZ(\cdot, \varepsilon) = MZ(0, \varepsilon) - NZ(8 \ln 2, \varepsilon) = \alpha,$$

де

$$M = \text{diag}(10, 8, 10, 8, \dots, 10, 8, \dots),$$

$$N = \text{diag}(8, 8, 8, 8, \dots, 8, 8, \dots),$$

$$\alpha = \text{diag}(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \dots, \alpha_{nn}, \dots).$$

Проектори  $P_{N(Q)}$  і  $P_{N(Q^*)}$  дорівнюють:

$$P_{N(Q)} = \text{diag}(0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, \dots),$$

$$P_{N(Q^*)} = \text{diag}(0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, \dots).$$

Породжуюча крайова задача (3), (4) (при  $\varepsilon = 0$ ) має розв'язок, коли виконується умова розв'язності

$$P_{N(Q^*)} \left[ \alpha - l \int_0^{\cdot} e^{(-\tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau-)A} d\tau \right] = 0,$$

$$\begin{cases} \alpha_{22} + 240 = 0, \\ \alpha_{44} + 240 = 0, \\ \dots \\ \alpha_{2n2n} + 240 = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{22} = -240, \\ \alpha_{44} = -240, \\ \dots \\ \alpha_{2n2n} = -240, \end{cases} \quad \text{і } \forall \alpha_{(2n-1)(2n-1)} \in R.$$

Тепер розглянемо, яким чином потрібно збурити крайову задачу (3), (4), щоб збурена крайова задача (1), (2) мала розв'язок навіть для тих  $\alpha$ , які не задовольняють умові розв'язності

$$P_{N(Q^*)} \left[ \alpha - l \int_0^{\cdot} e^{(-\tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau-)A} d\tau \right] = 0.$$

Для розв'язання цієї проблеми знайдемо оператор  $B_0$ :

$$B_0 = \text{diag}(0, 64, 0, 64, \dots, 0, 64, \dots).$$

Оператор  $B_0$  має псевдообернений оператор:

$$B_0^+ = \text{diag} \left( 0, \frac{1}{64}, 0, \frac{1}{64}, \dots, 0, \frac{1}{64}, \dots \right).$$

Проектори  $P_{N(B_0)}$  і  $P_{N(B_0^*)}$  відповідно дорівнюють:

$$P_{N(B_0)} = \text{diag}(1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots),$$

$$P_{N(B_0^*)} = \text{diag}(1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots).$$

Умова розв'язності  $P_{N(B_0^*)} P_{N(Q^*)} = 0$  виконується. Таким чином, усі умови теорему 2 виконано і у даному випадку задача має єдиний розв'язок.

### 5. Висновки

У роботі розглянуто збурену крайову задачу для рівняння Ляпунова у просторі Гільберта. Дана теорія працює як у критичному, так й у регулярному випадках [2]. Аналогічна задача у випадку, коли оператор  $A$  є необмеженим або несталим, вимагає окремого дослідження. Теорія,

розроблена в роботі [14], дозволяє досліджувати умови біфуркації розв'язків рівняння Ляпунова й у тому випадку, коли множини значень операторів  $Q$  та  $B_0$  не є замкненими  $R(Q) \neq \overline{R(Q)}$ ,  $R(B_0) \neq \overline{R(B_0)}$ , тобто оператори  $Q$ ,  $B_0$  не є нормально розв'язними. У такому випадку побудована вище процедура даватиме узагальнені розв'язки або квазірозв'язки. Запропонований підхід можна застосовувати до дослідження крайових задач для операторно-диференціальних рівнянь загального типу.

### Література

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. Москва: Наука, 1969. 368 с.
2. Бойчук А. А., Журавлєв В. Ф., Самойленко А. М. Обобщенно-обратные операторы и неётеровы краевые задачи. Київ: Ін-т мат-ки НАНУ, 1995. 320 с.
3. Бойчук О. А., Кривошея С. А. Критерій розв'язності матричних рівнянь типу Ляпунова. *Український математичний журнал*. 1998. Т. 50, № 8. С. 1021–1026.
4. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Москва: Наука, 1970. 534 с.
5. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. Москва: Наука, 1969. 527 с.
6. Ванько В. И., Ермошина О. В., Кувыркин Г. Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление: учебник для вузов. Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. 488 с.
7. Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. Москва: Наука, 1983. 384 с.
8. Журавлев В. Ф. Псевдообратный оператор к матричному в бесконечномерном гильбертовом пространстве. *Науковий вісник Ужгородського університету*. 2011. Вип. 22. С. 52–63.
9. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Москва: Наука, 1967. 464 с.
10. Найфе А.Х. Методы возмущений. Москва: Мир, 1976. 454 с.
11. Панасенко Є. В., Покутний О. О. Крайові задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі з необмеженим оператором в лінійній частині. *Нелінійні коливання*. 2013. Т. 16, № 4. С. 518–526.
12. Панасенко Є. В., Покутний О. О. Керованість крайових задач для рівнянь Ляпунова в просторі Гільберта. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2015. № 3. С. 212–220.
13. Панасенко Є. В., Покутний О. О. Крайові задачі для рівняння Ляпунова у банаховому просторі. *Нелінійні коливання*. Київ: Ін-т математики НАНУ, 2016. Т. 19, № 2. С. 240–246.
14. Панасенко Є. В., Покутний О. О. Умова біфуркації розв'язків рівняння Ляпунова у просторі Гільберта. *Нелінійні коливання*. Київ: Ін-т математики НАНУ, 2017. Т. 20, № 3. С. 373–390.
15. Панасенко Є. В. Задача оптимізації крайової задачі для рівняння Ляпунова в просторі Гільберта. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2017. № 2. С. 216–223.
16. Панасенко Є. В., Покутний О. О. Нелінійні крайові задачі для рівняння Ляпунова у просторі  $L_p$ . *Нелінійні коливання*. 2018. Т. 21, № 4. С. 523–536.
17. Покутний О. О. Узагальнено-обернений оператор в просторах Фреше, Банаха та Гільберта. *Вісник Київського національного університету імені Т. Шевченка. Фізико-математичні науки*. 2013. № 4. С. 158–161.
18. Чуйко С. М. Обобщенный оператор Грина неётеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2016. № 8. С. 74–83.

19. Чуйко С. М. О решении матричных уравнений Ляпунова. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Математика, прикладна математика і механіка*. 2014. № 1120. С. 85–94.
20. Bhatia Rajendra. A note on the Lyapunov equation. *Linear algebra and its applications*. 1997. № 259. P. 71–76.
21. Datko R. Extending a theorem of a A. M. Lyapunov to Hilbert space. *Journal of mathematical analysis and applications*. 1970. № 32. P. 610–616.

### References

1. Bellman, R. (1969). Introduction to the theory of matrices. Moscow: Science.
2. Bojchuk, A. A., Zhuravlyov, V. F. & Samoilenko, A. M. (1995). Generalized inverse operators and Noetherian boundary-value problems. Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine.
3. Bojchuk, O. A. & Krivosheya, S. A. (1998). The criterion of solvability of Lyapunov type matrix equations. *Ukrayinskij matematichnij zhurnal*, Vol. 50, No. 8, pp. 1021–1026 (in Ukrainian).
4. Dalecjkij, Yu. L. & Krejn, M. G. (1970). Stability of solutions of differential equations in a Banach space. Moscow: Science.
5. Vajnberg, M. M. & Trenogin, V. A. (1969). *Teoriya vetvleniya reshenij nelinejnyh uravnenij*. Moscow: Nauka.
6. Vanko, V. I., Ermoshina, O. V. & Kuvyrki, G. N. (2006). Calculus of variations and optimal control: a textbook for universities. Moscow: Moscow State Technical University Publishing House Bauman.
7. Dalecjkij, Yu. L. & Fomin, S. V. (1983). Measures and differential equations in infinite-dimensional spaces. Moscow: Science.
8. Zhuravlev, V. F. (2011). Pseudo-inverse operator to a matrix one in an infinite-dimensional Hilbert space. *Nukovij visnik Uzhgorodskogo universitetu*, Iss. 22, pp. 52–63 (in Russian).
9. Krejn, S. G. (1967). Linear differential equations in a Banach space. Moscow: Science.
10. Najfe, A. H. (1976). Perturbation methods. Moscow: World.
11. Panasenko, Ye. V. & Pokutniy, O. O. (2013). Boundary-value problems for differential equations in a Banach space with an unbounded operator in a linear part. *Nelinijni kolivannya*, Vol. 16, No. 4, pp. 518–526 (in Ukrainian).
12. Panasenko, Ye. V. & Pokutniy, O. O. (2015). Guidance of boundary value problems for Lyapunov equations in Hilbert space. *Visnik Zaporizkogo nacionalnogo universitetu. Fiziko-matematichni nauki*, No. 3, pp. 212–220 (in Ukrainian).
13. Panasenko, Ye. V. & Pokutniy, O. O. (2016). Boundary value problems for the Lyapunov equation in a Banach space. *Nelinijni kolivannya*, Vol. 19, No. 2, pp. 240–246 (in Ukrainian).
14. Panasenko, Ye. V. & Pokutniy, O. O. (2017). The condition for bifurcation of solutions of the Lyapunov equation in Hilbert space. *Nelinijni kolivannya*, Vol. 20, No. 3, pp. 373–390 (in Ukrainian).
15. Panasenko, Ye. V. (2017). The problem of optimizing the boundary value problem for the Lyapunov equation in the Hilbert space. *Visnik Zaporizkogo nacionalnogo universitetu. Fiziko-matematichni nauki*, No. 2, pp. 216–223 (in Ukrainian).
16. Panasenko, Ye. V. & Pokutniy, O. O. (2018). Nonlinear boundary value problems for the Lyapunov equation in  $L_p$  space. *Nelinijni kolivannya*, Vol. 21, No. 4, pp. 523–536 (in Ukrainian).
17. Pokutniy, O. O. (2013) A generalized inverse operator in Frechet, Banach, and Hilbert spaces. *Visnik Kiyivskogo nacionalnogo universitetu imeni T. Shevchenka. Fiziko-matematichni nauki*, Vol. 4, pp. 158–161 (in Ukrainian).
18. Chujko, S. M. (2016). The generalized Green operator of the Noetherian boundary value problem for a matrix differential equation. *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Matematika*, Vol. 8, pp. 74–83 (in Ukrainian).
19. Chujko, S. M. (2014). On the solution of the Lyapunov matrix equations. *Visnik Harkyvs'kogo nacionalnogo universitetu imeni V.N. Karazina. Matematika, prikladna matematika i mehanika*, Vol. 1120, pp. 85–94 (in Ukrainian).
20. Bhatia Rajendra (1997). A note on the Lyapunov equation. *Linear algebra and its applications*, Vol. 259, pp. 71–76.
21. Datko, R. (1970). Extending a theorem of a A. M. Lyapunov to Hilbert space. *Journal of mathematical analysis and applications*, Vol. 32, pp. 610–616.

UDC 519.6

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-17

## TIMOSHENKO EQUATION, VIOLATION OF CONTINUITY AND SOME APPLICATIONS

I. T. Selezov

*Institute of Hydromechanics  
igor.selezov@gmail.com*

**Key words:**

the Timoshenko equation,  
hyperbolicity, violation of continuity,  
elastic foundation, wavelength,  
frequency, Euclidean space.

We study the Timoshenko model of bending beam vibrations, that includes the beginning from a brief general consideration and the fast transition from  $n$ -dimensional Euclidean space to 4-dimensional space with respect to spatial coordinates and time. As a result, the Timoshenko equation is obtained on the basis of a mathematical approach, without a correction coefficient (shear coefficient) as a special case of a more general our extended refined equation. We investigate the problem of the effect of liquid, as a special case of an elastic base, on shear in Timoshenko elastic plate. It is shown that any media contacting with the plate reduce the shear effect. The violation of continuity is noted, which has not been considered previously. The works based on the Timoshenko model are presented for a beam on an elastic base. In the case of a rectangular change in the cross section, another matching problem immediately arises, connected with appearing reflected and transmitted waves. From the solvability of the problem for the phase velocity in the case of short wavelengths (high frequencies), the yield to the characteristic is studied and it is shown that in connection with the violation of continuity, the applicability of the classical theory takes place at wavelengths of more than 5 thicknesses. The problem of elastic plates floating on a liquid layer is studied in detail, using various theories. Variational formulations without taking into account the violation of continuity are considered and commented, the separation of variables in the Timoshenko equation is considered.

---

## РІВНЯННЯ ТИМОШЕНКА, ПОРУШЕННЯ БЕЗПЕРЕРВНОСТІ І ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ

I. T. Селезов

*Інститут гідромеханіки НАНУ  
igor.selezov@gmail.com*

**Ключові слова:**

рівняння Тимошенка, гіперболічність, порушення суцільності, пружна основа, довжина хвилі, частота, евклідовий простір

Досліджено модель Тимошенка згинних коливань балки, що включає спочатку загальні міркування і перехід від  $n$ -мірного евклідова простору  $R^n$  до 4-мірного простору відносно просторових координат  $x_1, x_2, x_3$  і часу  $t$ . На основі математичного підходу рівняння Тимошенка одержано без коректуючого коефіцієнта (коефіцієнт зсуву) як окремий випадок більш загального розширеного рівняння. Досліджено задачу впливу рідини як окремий випадок пружної основи в пластині Тимошенка. Показано, що будь-яке середовище, що контактує з пластиною нівелює ефект зсуву. Відмічено порушення суцільності, яке раніше не розглядалося. Дослідження, основані на моделі Тимошенка, представлялись для балки на пружній основі. У випадку прямокутного виду поперечного перерізу виникає інша задача, пов'язана з появою відбитих хвиль. З розв'язку задачі досліджується фазова швидкість у випадку коротких довжин хвиль (високі частоти), виявлено, що у випадку порушення суцільності застосування класичної теорії обмежено довжиною хвиль, що перевищує 5 товщин балки. На основі різних теорій детально вивчено задачу про пружні пластини, що плавають на рідкому шарі. Описуються і обговорюються варіаційні формулювання без урахування порушення суцільності, розглядається відокремлення змінних в рівнянні Тимошенка.

### 1. Introduction

The Cauchy-Poisson method was proposed considering the bending vibrations of an elastic beam-plate based on the equations of elastodynamics (Cauchy, 1828) [1], (Poisson, 1829) [2]. A generalization of the Cauchy-Poisson method to  $n$ -dimensional Euclidian space was obtained in (Selezov, 2000) [3]. The violation of continuity was shown in (Selezov, 2018) [4].

The violation of continuity in the Timoshenko model has been not investigated in all previous considerations and it is an absolutely new problem under consideration. That is why, a numerous of traditional investigations of the Timoshenko equation is not considered here. Moreover, these investigations are else considered in detail in a book dedicated to the Timoshenko (P: Statement of the problem Grigolyuk and Selezov, 1973) [5].

The paper consists of some points presented below. Statement of the problem in Euclidian space presents the problem in Euclidian space  $R^n$  represented by a finite system of partial differential equations. Corresponding boundary-value problem and some assumptions are considered; Extended refined equation in 4-th dimensional space presents the problem in 4-

dimensional Euclidian space and an extended generalized refined equation including the Timoshenko equation as a particular case; Violation of continuity and the effect of elastic foundation are noted and commented and the influence of the elasticity of the base on processes is investigated; Wave propagation in elastic floating plate presents the problem of wave propagation in a floating elastic plate; On variational formulations without violation of continuity considers variational principles without the violation of continuity and an asymptotic approach which are based on the continuity of elastic media; Separation of variables in the Timoshenko equation shows the application of the method of separation of variables.

### 2. Statement of the problem in euclidean space

We consider in Euclidian space  $R^n$  with coordinates  $x^q, q=\overline{1, n}$  a mathematical model represented by a finite system of partial differential equations for which a boundary-value problem is posed in a domain  $\Omega \times [0, X^m]$ ,

$X^m > 0$  bounded by hypersurfaces (the index is fixed):

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} x \in R^n : -\infty < (x^1, x^2, \dots, x^{s-1}, x^{s+1}, \dots, x^{n-1}) < \infty, \\ x^n \geq 0, \quad -h^s \leq x^s \leq h^s. \end{array} \right\}$$

We assume that hypersurfaces  $x^s = \pm h^s$  are removed from the middle hypersurface  $x^s = 0$  and it is considered the composition with respect to  $x^s = 0$ . The case is considered when conditions are given on hypersurfaces  $x^s = \pm h^s$ .

It is assumed that the model depends on a finite number  $\nu$  of parameters  $\varepsilon_r, r = \overline{1, \nu}$ .

Formally, such a model can be defined as a system  $k$  of differential equations in partial derivatives of  $p$ -th order with  $k$  unknowns  $u_i (i = \overline{1, k})$  and  $n$  arguments (Dunford & Schwartz, 1969) [6]

$$F_i \left( x^1, \dots, x^n; u_1, \dots, u_k; \underbrace{u_{1,1}, \dots, u_{k,n}}_{P \text{ times}}; \dots; \underbrace{u_{1,1 \dots 1}, \dots, u_{k, n \dots n}}_{P \text{ times}}; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\nu \right) = P_i(x^1, \dots, x^n), \quad (1)$$

$$j = \overline{1, (k \cdot p)} \text{ in } \Omega.$$

The following system of boundary conditions on hypersurfaces  $x^s = -h^s, x^s = h^s$  is defined

$$f_j \left( x^1, \dots, x^n; u_1, \dots, u_k; \underbrace{u_{1,1}, \dots, u_{k, n \dots n}}_{(P-1) \text{ times}}; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\nu \right) \Big|_{x^s = \pm h^s} = Q_j^\pm, \quad j = \overline{1, (k \cdot p)}. \quad (2)$$

Here, the index after the “comma” denotes differentiation with respect to the corresponding coordinate, in the general case  $p \neq n$  it depends on all possible partial derivatives up to the  $p$ -th order inclusively, the position of the hypersurface may depend on  $u_i$  and their derivatives. The solution of the boundary value problem (1), (2) consists of determination of the functions  $u_i$  transforming equations (1) into identities, and in selection of a set of these functions those functions that satisfy conditions (2).

### 3. Extended refined equation in 4- th dimensional space

Further we consider 4-th dimensional space with respect to spatial coordinates  $x_1, x_2, x_3$  and time  $t$ . When constructing a generalized equation, dimensionless quantities are introduced, taking thickness  $2h$  (m), shear wave velocity  $c_s$  (m / s), and elastic medium density  $\rho$  (kg / m) as characteristic quantities

$$\begin{aligned} u_k^* &= \frac{1}{2h} u_k, \quad (x_1^*, x_2^*) = \frac{1}{2h} (x_1, x_2), \\ t^* &= \frac{c_s}{2h} t, \quad q^* = \frac{1}{G} q, \\ h^* &= \frac{1}{2}, \quad c_s^2 = \frac{G}{\rho}. \end{aligned}$$

In the study of wave propagation, dimensionless quantities are introduced:  $l^* = \frac{1}{2h} l$  is

the wavelength,  $c^* = \frac{c}{c_s}$  is the phase velocity.

The extended differential equation for the transverse coordinate  $u_3 = w_0$  has the form (asterisks are omitted)

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + a_1 \nabla^2 \nabla^2 \right)_K - \right. \right. \\ & \left. \left. - a_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 + a_3 \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right]_{TM} - \right. \\ & \left. - b_1 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 + b_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \nabla^2 - \right. \\ & \left. - b_3 \frac{\partial^4}{\partial t^4} \nabla^2 + b_4 \frac{\partial^6}{\partial t^6} \right\}_{TMC}, \end{aligned}$$

$$w_0 = \left\{ \left[ 1 - d_1 \nabla^2 + d_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right]_{TM} + d_3 \nabla^2 \nabla^2 - \right. \\ \left. - d_4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 + d_5 \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right\}_{TMC} (q^+ - q^-). \quad (3)$$

In (3), the following notations are accepted:  $w_0(x_1, t)$  transverse deviation (deflection),  $t$  is a time,  $(q_1 - q_2)$  transverse load,

An operator with index K corresponds to the Bernoulli-Euler equation (extended to plates by Kirchhoff). The operator with the TM index corresponds to the Timoshenko equation (extended to plates by Ufland and developed by Mindlin). The Rayleigh equation is included in the operator TM with  $a_3 = 0$ . An operator with the TMC index corresponds to the extended equation (constructed by Selezov). It follows from the above analytical construction, as a special case, the Timoshenko equation, but without the introduction of a correction parameter (the shear coefficient).

The Timoshenko equation is of hyperbolic type as a generalization of 4-th order parabolic equation, rather than 2-th order equation, which only in this case has always been generalized before.

With increasing frequencies. those. as the wavelength decreases and the characteristic is reached, violation of continuity occurs in accordance with the Timoshenko model.

When deriving the Timoshenko equation, the slope of the tangent to the bend curve is postulated. those it is represented in the form  $\partial w / \partial x = \psi + \gamma$  where  $\psi$  is the bending deformation,  $\gamma$  is the shear deformation. At high frequencies and sharp inhomogeneities, this will manifest itself.

### 4. Violation continuity and the effect of elastic foundation

From the analysis (Selezov, 2018) [4], it was found that the Timoshenko model is applicable at wavelengths  $\lambda$  of more than five thicknesses  $h$ , that is,  $\frac{\lambda}{h} > 5$  when the influence of the thickness shear is already small and there is no discontinuity. We considered a beam-strip of an elastic plate, for which they were derived strictly mathematically, following Cauchy and



Poisson. refined equations, including the Timoshenko equation as a special case.

The effect of an elastic base was investigated in (Selezov and Korsunsky, 1991) [7], in which it was shown that this reduces the effect of thickness shear in the Timoshenko model. Note that water can also be considered as an elastic base.

For the first time, a beam on an elastic foundation was examined by Timoshenko (Timoshenko, 1956) [8]. After his emigration to America, works appeared on the effect of an elastic foundation on the shear deformation in his equation. For example, in (Achenbach et al., 1967) [9], the propagation of free elastic waves in a plate lying on an elastic half-space was studied. It was shown in (Yu, 1960) [10] that in a three-layer plate, the effect of shear and inertia of rotation of the outer plates relative to their middle surfaces is negligible. In (Lloid and Miklowitz, 1962) [11], vibrations of an elastic plate on an elastic base are considered.

In well-known works considering the Timoshenko beam of variable cross-section, no conditions were imposed on the value of the permissible change in the cross-section, which can lead to the violation of continuity. we present only one of them (Shubov, 2002) [12].

**5. Wave propagation in elastic floating plate**

We consider the problem of the propagation of plane unsteady bending waves in elastic plate located on a liquid surface of finite depth  $d$ , assuming that in time  $t = 0$  a stationary normal load at a point is applied to the surface  $p = p_0 p_1(x) p_2(t)$ . The plate bending motions are described by a refined theory, taking into account the inertia of rotation and transverse shear deformation (Grigulyuk and Selezov, 1973) [5], and the fluid is considered compressible isentropic. The corresponding initial-boundary-value problem is formulated to find solutions to the system

$$D\psi_{xx} - k^2 Gh(\psi + w_x) = \rho_1 I \psi_{tt}, \quad (4)$$

$$k^2 Gh(w_{xx} + \psi_x) - \rho_2 w - \rho_2 \varphi_t|_{z=0} + p = \rho_1 h w_{tt}, \quad (5)$$

$$\varphi_{xx} + \varphi_{zz} - c_0^{-2} \varphi_{tt} = 0, \quad (6)$$

$$\rho_2 x \in (-\infty, \infty); z \in [-d, 0]; t \in [0, \infty).$$

Under boundary conditions

$$w_t = \varphi_z|_{z=0}; \varphi_z|_{z=-d} = 0 \quad (7)$$

and initial conditions for  $t = 0$

$$\psi = 0; \psi_t = 0; w = 0; w_t = 0; \varphi = 0; \varphi_t = 0. \quad (8)$$

The boundary conditions (7) express the equality of the vertical velocity components of the plate and the liquid at the interface and the impermeability condition at the bottom. Value  $\psi(x, t)$  is the angle of rotation of the plate;  $\varphi$  is the potential of fluid velocities,  $\rho_1$  and  $\rho_2$  are the densities of the plate and fluid,  $k^2 = 2/(2 - \nu + \sqrt{0.5 - \nu})$  is the shear coefficient,  $I = h^3/12$  moment of inertia of the cross section,  $c_0$  the speed of sound and fluid. In (4) (8) and further, dimensionless quantities are introduced by the formulas

$$(x^*, z^*, w^*, d^*) = \frac{1}{h}(x, z, w, h, d),$$

$$t^* = \frac{\sqrt{gh}}{h} t, \quad P_0^* = \frac{p_0}{gh\rho_1},$$

$$c_0^* = \frac{c_0}{\sqrt{gh}}, \quad \varphi^* = \frac{\varphi}{h\sqrt{gh}},$$

$$I^* = \frac{I}{h^3}, \quad D^* = \frac{D}{gh^4\rho_1}, \quad G^* = \frac{g}{gh\rho_1},$$

$$\lambda^* = \frac{\lambda}{gh\rho_1}, \quad \rho_i^* = \frac{\rho}{\rho_i} (i = 1, 2).$$

The above statement (4)-(8) also includes special cases. So, for an incompressible fluid ( $c_0 \rightarrow \infty$ ), instead of the wave equation (6), the Laplace equation  $\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0$  is solved; plate motion is described by the classical Kirchhoff theory:

$$Dw_{xxxx} + \rho_1 w_{tt} + \rho_2 w + \rho_2 \varphi_t|_{z=0} = p; \quad (9)$$

the movement of the plate is described by the equation taking into account only the inertia of rotation:

$$Dw_{xxxx} - \rho_1 I w_{tttt} + \rho_1 h w_{tt} + \rho_2 w + \rho_2 \varphi_t|_{z=0} = p, \quad (10)$$

$$\psi + w_x = 0;$$

the movement of the plate is described by the equation, taking into account only the transverse shear strain

$$Dw_{xxxx} - \frac{\rho_1 D}{k^2 G} w_{txx} + \rho_1 h w_{tt} + \left(1 - \frac{D}{k^2 Gh} \partial_{xx}\right) (\rho_2 w + \rho_2 \varphi_t|_{z=0} - p) = 0; \quad (11)$$

$$D\psi_{xx} - k^2 Gh (\psi + w_x) = 0.$$

To solve this problem, the integral Fourier transforms in coordinate  $x$  and Laplace transforms in time  $t$  are applied:

$$F(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\kappa x} dx;$$

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

The transition from the space of Laplace images to the space of originals in some cases is carried out by (Deutsch, 1956) [13]. In other cases, the original is found by casting an integral of the Riemann-Mellin type.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{f}(s) e^{st} ds,$$

to the Fourier transform (Krylov and Skoblya, 1974) [14]

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re}(\bar{f}(s)) + \operatorname{Im}(\bar{f}(s))] e^{it\tau} d\tau,$$

where  $s = c + i\tau$ .

In the general case, the solution of the problem (4)-(11) under consideration has the form

$$w = \frac{p_0}{4\pi^2 i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_1(\kappa) \bar{P}_2(s) \eta_0 \kappa_1 e^{i\kappa x + st} d\kappa ds}{\kappa_2 (C_1 s^4 + 2C_2 s^2 + C_3^2)}. \quad (12)$$

The choice of other parameters is determined by the model.

So, for the Kirchhoff model (9) we have

$$\kappa_1 = 1, \quad \kappa_2 = \rho_1 h \eta_0 + \rho_2 cth \eta_0 d,$$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1/2, \quad C_3^2 = \eta_0 (D\kappa^4 + \rho_2) / \kappa_2.$$

In the case of the Timoshenko plate (4), (5)

$$\kappa_1 = 1 + \frac{\kappa^2 D}{k^2 Gh} + \frac{s^2 \rho_1 I}{k^2 Gh},$$

$$\kappa_2 = \frac{\rho_2 I}{k^2 G} \left( \eta_0 + \frac{\rho_1}{h} cth \eta_0 d \right); \quad C_1 = 1;$$

$$C_2 = \left\{ \left[ \rho_1 h \left( 1 + \frac{\kappa^2 D}{k^2 Gh} \right) + \rho_1 I \left( \frac{\rho_2}{k^2 Gh} + \kappa^2 \right) \right] \eta_0 + \rho_2 \left( 1 + \frac{\kappa^2 D}{k^2 Gh} \right) cth \eta_0 d \right\} / 2\kappa_2;$$

$$C_3 = \eta_0 \left[ D\kappa^4 + \rho_2 \left( 1 + \frac{D\kappa^2}{k^2 Gh} \right) \right] / \kappa_2.$$

For the inertia of rotation model

$$\kappa_1 = 1; \quad \kappa_2 = (\rho_1 I \kappa^2 + \rho_1 h) \eta_0 + \rho_2 cth \eta_0 d;$$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1/2, \quad C_3^2 = \eta_0 (D\kappa^4 + \rho_2) / \kappa_2.$$

For the transverse shear strain model (11)

$$\kappa_1 = 1 + \frac{D\kappa^2}{k^2 Gh};$$

$$\kappa_2 = \left( 1 + \frac{D\kappa^2}{k^2 Gh} \right) (\rho_1 h \eta_0 + \rho_2 cth \eta_0 d),$$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1/2,$$

$$C_3^2 = \eta_0 \left[ D\kappa^4 + \rho_2 \left( 1 + \frac{D\kappa^2}{k^2 Gh} + \rho_2 \right) \right] / \kappa_2.$$

The normal component of the tensor is

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2G) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (13)$$

where the components  $u$  and  $w$  of the displacement vector has the form (Grigolyuk and Selezov, 1973) [5]: for the Kirchhoff model  $u = -z \frac{\partial w}{\partial x}$ , and in other cases  $u = z\psi$ . Then expression (13), taking into account (12), is reduced to the form

$$\sigma_{xx} = \frac{z p_0 (\lambda + 2G)}{4\pi^2 i} \times \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_1(\kappa) P_2(s) \eta_0 \kappa^2 e^{i\kappa x + st} d\kappa ds}{\kappa_2 (C_1 s^4 + 2C_2 s^2 + C_3^2)}. \quad (14)$$

For an incompressible fluid, the transition from the space of Laplace images to the space of originals is carried out according to (Deutsch, 1956) [13] based on the convolution theorem. In this case, we have the following expressions:

$$\frac{\bar{p}_2(s)}{s^2 + C_3^2} \rightarrow \frac{1}{C_3} \int_0^t p_2(t-\tau) \sin C_3 \tau d\tau, \tag{15}$$

$$\frac{\bar{p}_2(s)}{s^4 + 2C_2 s^2 + C_3^2} \rightarrow \begin{cases} 0,5C_2^{-3/2} \int_0^t p_2(t-\tau) (\sin C_2^{1/2} \tau - C_2^{1/2} \tau \cos C_2^{1/2} \tau) d\tau, \\ 0,25C_2^{-3/2} (C_2^2 - C_3^2)^{-1/2} \int_0^t p_2(t-\tau) (s_1 \sin s_2 \tau - s_2 \sin s_1 \tau) d\tau, \\ C_2^2 - C_3^2 > 0, \end{cases}$$

where  $s_{1,2}^2 = C_2 \pm \sqrt{C_2^2 - C_3^2}$ .

Let us consider the case when the load in spatial and temporal coordinates changes according to the laws

$$p_1(x) = x_0^2 / (x_0^2 + x^2);$$

$$p_2(t) = \left\{ t/a, 0 \leq t \leq a; e^{-b(t-a)}, t > a \right\}.$$

Then, for an incompressible fluid, from (14), taking into account (15), we obtain the expression of the normal component of the stress tensor in particular cases (9)-(11)

$$\sigma_{xx} = \frac{z p_0 (\lambda + 2G)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\kappa^3 P_1(\kappa) f(t)}{\kappa_2} \cos \kappa x d\kappa,$$

where  $P_1(\kappa) = \kappa_0 e^{-x_0 \kappa}$ ;

$$f(t) = \frac{1}{C_3^2 a} \left( t - \frac{\sin C_3 t}{C_3} \right) + f_1(t); f_1(t) = 0; t \leq a,$$

$$f_1(t) = -\frac{1}{C_3^2 a} \left( t_1 - \frac{\sin C_3 t_1}{C_3} \right) + \frac{1}{C_3^2 (b^2 + C_3^2)} (b \sin C_3 t_1 - C_3 \cos C_3 t_1) + \frac{e^{-b t_1}}{C_3 (b^2 + C_3^2)} - \frac{1 - \cos C_3 t_1}{C_3^2}, t_1 = t - a > 0.$$

Numerical calculations were performed at the normal stress  $\sigma_{xx}$  following parameter values:  $\rho_1 = 910 \text{ kg/m}^3$ ;  $\rho_2 = 1000 \text{ kg/m}^3$ ;  $c_0 = 1400 \text{ m/s}$ ;  $\nu = 0,33$ ;  $E = 5,88 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ ;  $d = 20 \text{ m}$ ;  $h = 1 \text{ m}$ ;  $\kappa_0 = 1$ ;  $a = 10^{-1}$ ;  $b = 10^4$ ;  $z = h/2$ .

Comparison of normal stress calculations  $\sigma_{xx}$  is performed in cases where the plate is described by the Kirchhoff model with and without liquid. It is shown that taking the liquid into account leads to a significant decrease of the normal stress in the plate. Accounting for shear deformation significantly reduces the value  $\sigma_{xx}$  and in addition, leads to a shift in the maximum values.

### 6. On variational formulations without violation of continuity

In most studies, variational formulations and asymptotic approaches of the Timoshenko model using the law of continuity of the medium show the incorrectness of the Timoshenko model. Therefore, all further arguments and conclusions about the frequency spectra and the meaning of the second spectrum remain in question (Barbashov & Nesterenko, 1983) [15], (Nesterenko, 1989) [16], (Nesterenko, 1993) [17], (Chervyakov & Nesterenko, 1993) [18].

An attempt to use the mathematical method of asymptotic expansions taking into account the continuity of the medium leads to the incorrectness of the Timoshenko equation (Bakhalov and Eglit, 2005) [19].

### 7. Separation of variables in the timoshenko equation

We also note the fundamental difference between the Rayleigh equation

$$\xi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \xi^3 a_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \xi^3 a_2 \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} = (q^+ - q^-), \tag{16}$$

including the Euler-Bernoulli equation, and the Timoshenko equation

$$\begin{aligned} & \xi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \xi^3 a_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \\ & - \xi^3 a_2 \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + \xi^3 a_3 \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = \quad (17) \\ & = \left( 1 - \xi^2 d_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \xi^2 d_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (q^+ - q^-). \end{aligned}$$

A classic method of the variable separation

$$w(x, t) = W(x)T(t),$$

does not lead to the separation of variables in equation (17), in contrast to the complete separation of variables in equation (16). In the case of harmonic oscillations, the method is applicable to (16) and (17).

### 8. Conclusion

The violation of continuity in the Timoshenko beam equation at short wavelengths has been shown and discussed. It follows from the

generalized refined equation of 4-dimensional Euclidian space obtained in this paper as a special case. It was considered the conclusions about the incorrectness and inconsistency of the Timoshenko model in well-known variation formulations and asymptotic approaches based on the law of continuity. A decrease in the influence of shear deformation in the Timoshenko equation was noted upon contact of the beam-strip with an elastic base and water, as well as a special case of an elastic base. It was shown when the violation of continuity at high frequencies and sharp changes in the beam thickness the Timoshenko model is not applicable. A decrease of the shear effect in the Timoshenko equation was shown from the solution of the problem for a floating elastic plate using the classical Kirchhoff equation and the refined Timoshenko equation. It was noted the inapplicability of separation of variables in the Timoshenko equation.

### References

1. Cauchy, A. L. (1828). Sur l'équilibre et le mouvement d'une lame solide. Exercices Math., No. 3. pp. 245-327.
2. Poisson, S. D. (1829). Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques. Mém. Acad. Roy. Sci., No. 8. pp. 357-570.
3. Selezov, I. T. (2000). Degenerated hyperbolic approximation of the wave theory of elastic plates. Ser. Operator Theory. Advances and Applications. Differential Operators and Related Topics. Proc. of Mark Krein Int. Conf. (Ukraine, Odessa, 18–22 August 1997). Basel/Switzerland: Birkhauser, No. 117. P. 339–354.
4. Selezov, I. T. (2018). Development and application of the Cauchy-Poisson method to layer elastodynamics and the Timoshenko equation. Cybernetics and Systems Analysis, Vol. 54, No.3, pp. 434-442. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0044-x>.
5. Grigolyuk, E. I. & Selezov, I. T. (1973). Nonclassical theories of vibrations of bars, plates and shells. Advances in Sciences and Engineering. Mechanics of Deforming Solids, Moscow: Acad. Sci. USSR.
6. Dunford, N. & Schwartz, J. T. (1963). Linear operators. Part II. Spectral theory. Adjoint operators in Hilbert space. New York London: Interscience Publishers.
7. Selezov, I. T. & Korsunsky, S. V. (1991). Transformation of plane waves overmoving, or elastic bottom inhomogeneity. Rozprawy Hydrotechniczne, No. 54, pp. 49–54.
8. Timoshenko, S. (1956). Strength of materials. Part 2. Advanced theory and problems. Third Edition. D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton. New Jersey, Toronto, New York, London.
9. Achenbach, A. D., Keshava, S. P. & Herrmann, G. (1967). Free waves in a plate supported by a semi-infinite continuum. Trans. ASME, E34, N 4. pp. 397–404.
10. Yu, Y.-Y. (1960). Nonlinear flexural vibrations of sandwich plates. J. Aero/Space. Vol. 27, No. 4, pp. 272–282.
11. Lloid, J. R. & Miklowitz, J. (1962). Wave propagation in an elastic beam or plate on an elastic foundation. Trans. ASME, E29, No. 3. pp. 450–464.
12. Shubov, M. A. (2002). Asymptotic and Spectral Analysis of the Spatially Nonhomogeneous Timoshenko Beam Model. Mathematische Nachrichten, 241(1). pp. 125–162. doi: [https://doi.org/10.1002/1522-2616\(200207\)241:1<125::AID-MANA125>3.0.CO;2-3](https://doi.org/10.1002/1522-2616(200207)241:1<125::AID-MANA125>3.0.CO;2-3).
13. Doetsch, G. (1956). Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation: R. Oldenbourg, Muenchen.

14. Krylov, V. I. & Skoblya, N. S. (1974). Methods of approximate Fourier transform and inverting Laplace transform. Moscow: Nauka (In Russian).
15. Barbashov, B. M. & Nesterenko, V. V. (1983). Continuous symmetries in field theory. *Fortsch. Phys.*, B 11, No. 10. pp. 535–567.
16. Nesterenko, V. V. (1989). Singular Lagrangians with higher derivatives. *J. Phys. A. Math. Gen.*, Vol. 22, No. 10, pp. 1673–1687.
17. Nesterenko, V. V. (1993). To the theory of transverse vibrations of the Timoshenko beam. *Appl. math and mekh.*, Vol. 57, No. 4. pp. 83–91 (In Russian).
18. Chervyakov, A. M. & Nesterenko, V. V. (1993). Is it possible to assign physical meaning to field theory with higher derivatives. *Physical Review D.*, Vol. 48, No. 12. pp. 5811–5817.
19. Bakhvalov, N. S. & Eglit, M. E. (2005). On equations of higher order exactness describing vibrations of thin plates (In Russian). *Appl. math and mekh.*, Vol. 69 (4). pp. 656–675.

УДК 531

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-18

## РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ И КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОДКРЕПЛЕННОГО ОБОЛОЧКОЙ ВЯЗКОУПРУГОГО ЦИЛИНДРА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕРМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

И. К. Сенченков<sup>1</sup>, О. П. Червинко<sup>1</sup>, Е. В. Доля<sup>2</sup><sup>1</sup>Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины,<sup>2</sup>Киевский национальный университет строительства и архитектуры  
term@inmech.kiev.ua**Ключевые слова:**

многослойный полый цилиндр, ракетный двигатель на твердом топливе, линейный вязкоупругий материал, термонапряженное состояние.

Статья посвящена численному моделированию температурных полей и квазистатического напряженно-деформированного состояния демонстрационного варианта ракетного двигателя на твердом топливе при резком изменении температуры окружающей среды. Задача решается методом конечных элементов с использованием шаговой схемы интегрирования по времени.

## РОЗРАХУНОК ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ТА КВАЗИСТАТИЧНОГО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПІДКРІПЛЕНОГО ОБОЛОНКОЮ В'ЯЗКОПРУЖНОГО ЦИЛІНДРА ПРИ НЕСТАЦІОНАРНОМУ ТЕРМІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

І. К. Сенченков<sup>1</sup>, О. П. Червінко<sup>1</sup>, О. В. Доля<sup>2</sup><sup>1</sup>Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України<sup>2</sup>Київський національний університет будівництва і архітектури  
term@inmech.kiev.ua**Ключові слова:**

багатошаровий порожнистий циліндр, ракетний двигун на твердому паливі, лінійний в'язкопружний матеріал, термонапружений стан.

Стаття присвячена чисельному моделюванню температурних полів і квазистатичного напружено-деформованого стану демонстраційного варіанта ракетного двигуна на твердому паливі при різкій зміні температури навколишнього середовища. Задача розв'язується методом скінченних елементів з використанням крокової схеми інтегрування за часом.

## CALCULATION OF TEMPERATURE FIELDS AND QUASISTATIC STRESS-STRAIN STATE OF STIFFENED BY SHELL VISCOELASTIC CYLINDER UNDER UNSTEADY THERMAL LOADING

I. K. Senchenkov<sup>1</sup>, O. P. Chervinko<sup>1</sup>, E. V. Dolya<sup>2</sup><sup>1</sup>S. P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS of Ukraine,<sup>2</sup>Kiev National University of Construction and Architecture  
term@inmech.kiev.ua**Key words:**

Multilayer hollow cylinder, solid fuel rocket motor, linear viscoelastic material, thermal stress state.

The article is devoted to the numerical simulation of temperature fields and the quasistatic stress-strain state of multilayer cylindrical elements of rocket motor under non-stationary temperature effects. Solid propellant rocket motor (SRM), in particular, is considered. The motor consists of a hollow cylinder propellant, supported on the side surface and the ends of a three-layer shell. The fuel material is assumed to be a linearly viscoelastic material, while the shell is assumed to be a linearly elastic material. The problem of the thermo stress-strain state of the motor with a sharp change of ambient temperature is considered. Equations of viscoelasticity for fuel are simplified by the Shapery method, with volume deformation assumed to be elastic. In this case, the initial problem is reduced to the problem of thermoelasticity, which is solved by the finite element method

using a stepwise integration scheme over time. For the demonstration version of solid propellant rocket motors, the effect of temperature difference on its surface on the deformed state was studied. Estimates are given of tensile deformations on the surface of the channel, as well as radial stresses at the fuel-insulation, insulation-corpus interface when the ambient temperature changes from 20°C to -40°C.

## 1. Введение

Проектирование ракетных двигателей с твердым топливом привело к изучению системы, состоящей из полого вязкоупругого цилиндра, заключенного в тонкую упругую оболочку [1, 2, 3].

Одной из основных проблем проектирования ракет с ракетным двигателем на твердом топливе (РДТТ) является обеспечение прочности элементов ракеты. При этом можно выделить следующую отдельную задачу – расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) корпуса и заряда ракеты с РДТТ в условиях переменных температур.

Температурное нагружение корпуса и заряда ракеты имеет место в течение всего времени эксплуатации ракеты, начиная с момента ее изготовления и кончая работой двигателя во время полета. Температурные напряжения возникают при полимеризации заряда, при послеполимеризационном охлаждении, в процессе хранения и термостатировании ракеты, при нагреве в полете, при воздействии вибрационных нагрузок в результате повышения температуры из-за гистерезисных потерь в вязкоупругом материале заряда и т.п. Поэтому расчет температуры корпуса и заряда ракеты, а также вызванных ею температурных напряжений и деформаций является очень важным при оценке работоспособности РДТТ.

Расчет температурных напряжений в ракетных двигателях на твердом топливе связан с математическими и вычислительными трудностями, обусловленными такими факторами, как сложность геометрии ракетного двигателя, сложное реологическое поведение заряда ракеты, в частности, его неупругие (вязкоупругие) свойства [4], и существенная зависимость механических характеристик топлива от температуры, нелинейность определяющих уравнений, связывающих напряжения, деформации и температуры и др. Поэтому при математическом мо-

делировании термомеханического состояния корпуса ракеты и заряда необходимо принимать некоторые упрощающие предположения. Во-первых, принимается предположение о линейности определяющих уравнений. Во-вторых, предполагается, что зависимость функций релаксации в этих уравнениях от температуры может быть учтена согласно гипотезе о его терморологически простом поведении [5]. Объемное деформирование топлива предполагается упругим, а уравнение для сдвигового деформирования упрощается на основе метода Шепери [6]. Аналитические методы не позволяют получить решения указанных задач для реальной геометрии двигателя.

В настоящей работе с учетом сделанных выше предположений на основе разработок [7] развита конечно-элементная методика и проведен расчет температурного поля и НДС РДТТ при резком изменении температуры окружающей среды.

## 2. Постановка задачи

В качестве объекта исследования рассматривается демонстрационный вариант РДТТ, меридиональное сечение которого показано на рис. 1 а (конечно-элементная разбивка).

На рис. 1 б показано сечение А–А с точками 1, 2 и 3, в которых ниже будет проведен анализ НДС. Точка 3 расположена в центре жесткой оболочки корпуса, которая ограничена двумя слоями теплоизолирующего материала. Область между точками 1 и 2 занята топливом. Канал двигателя предполагается круговым.

Постановка осесимметричной задачи теплопроводности в системе координат  $Orz\phi$  включает балансовые уравнения в цилиндрической системе координат для каждого из слоев

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = c \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (1)$$

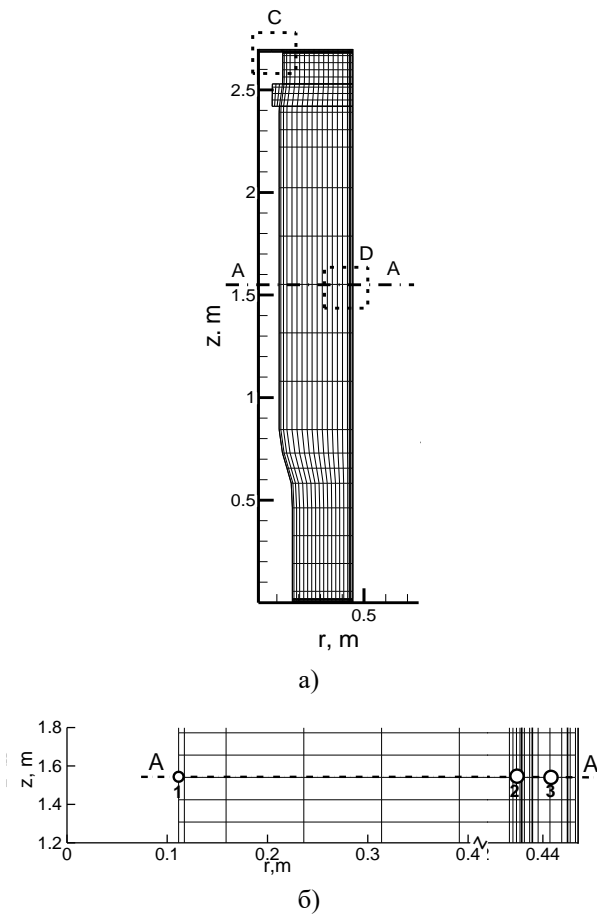


Рис. 1. Схема объекта

Граничные условия на поверхности имеют вид

$$-\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} n_z + \lambda \frac{\partial T}{\partial r} n_r\right) = \alpha_s (T - T_c). \quad (2)$$

На поверхности между слоями  $k$  и  $k + 1$  принимаются условия идеального теплового контакта

$$T^{(k)} = T^{(k+1)}, q_n^{(k)} = q_n^{(k+1)}. \quad (3)$$

Задаются также начальные условия для температуры

$$T(z, r, 0) = T_0(z, r). \quad (4)$$

Здесь  $T$  – температура,  $c$  – объемная теплоемкость,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\alpha_s$  – коэффициент теплоотдачи в точке  $(z, r)$  на граничной поверхности,  $T_c$  – температура окружающей среды,  $T_0$  – начальная температура,  $n_r$  и  $n_z$  – компоненты вектора внешней нормали.

Уравнения квазистатического равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{\phi\phi}$  – компоненты тензора напряжений.

Вся поверхность тела предполагается свободной от нагрузки, а на поверхностях контакта слоев имеет место идеальный механический контакт.

Механические свойства материалов слоев цилиндра описываются определяющими уравнениями.

Твердое топливо (ТТ) предполагается линейно вязкоупругим изотропным термо-реологически простым материалом. С учетом гипотезы объемной упругости связь девиаторных и шаровых составляющих тензоров напряжений и деформаций имеет вид:

$$s_{ij}(x_i, t) = 2 \int_{-\infty}^t G(\xi - \xi') \frac{\partial e_{ij}(x_i, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (6)$$

$$\sigma_{kk} = 3K(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^T). \quad (7)$$

где  $K$  – модуль объемного сжатия,  $K = const$ ,  $G(\xi)$  – функция релаксации при сдвиге.

Здесь приведенные времена  $\xi$  и  $\xi'$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi &= \int_0^t \frac{d\eta}{a_T(T(x_i, \eta))}, \\ \xi' &= \int_0^\tau \frac{d\eta}{a_T(T(x_i, \eta))}, \end{aligned} \quad (8)$$

причем  $a_T(T)$  – функция сдвига, определяющая горизонтальный сдвиг изотермической функции релаксации вдоль шкалы  $\log t$  для разных температур.

Согласно Williams-Landel-Ferry [5] имеем

$$\log a_T = \frac{-C_1(T - T_{ref})}{C_2 + (T - T_{ref})}, \quad (9)$$

где  $T_{ref}$  – отсчетная температура,  $C_1$ ,  $C_2$  – материальные коэффициенты.

Физические уравнения термоупругости для материалов изоляции и оболочки описываются законом Гука.

Следуя Sharpy [6], принимаем функцию релаксации при одноосном растяжении  $E_{rel}$  в виде ряда Прони:

$$E_{rel}(t) = E_\infty + \sum_{k=1}^n A_k \exp(-t/2a_T\tau_k), \quad (10)$$

где  $E_\infty$  – равновесный модуль,  $\tau_k$  – времена релаксации,  $A_k$  – константы.



Преобразование Лапласа для (10) дает т.н. операционный модуль:

$$E(s) = s\bar{E}_{rel}(s) = E_{\infty} + \sum_{k=1}^n \frac{sA_k}{s + \frac{1}{2a_T\tau_k}} \quad (11)$$

С учетом гипотезы  $K = const$  получаем выражения операционных коэффициентов Пуассона и модуля сдвига

$$\nu(s) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{E(s)}{3K} \right],$$

$$G(s) = \frac{3KE(s)}{9K - E(s)}. \quad (12)$$

Для любого момента времени, подставляя величину  $s = 1/2t$  в уравнения (11), (12), получаем величины  $G(t)$ ,  $\nu(t)$  и  $E(t)$ , которые могут быть использованы в ассоциированном упругом решении. Оно может рассматриваться как приближенное в смысле Шепери зависящее от времени решение задачи вязкоупругости.

### 3. Методика решения задачи

Конечно-элементный подход основан на Лагранжевых вариационных формулировках, представленных выше осесимметричных задач теплопроводности и квазистатики

$$\delta I(T) = \int_F \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \delta \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \delta \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \right.$$

Таблица 1. Значения параметров  $\tau_k$  и  $A_k$

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$lg \tau_k$	-8,	-7,	-6,	-5,	-4,	-3,	-2,	-1,	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,
$A_k$	0,117	15,88	38,73	53,02	22,56	13,93	5,22	4,56	1,39	1,19	0,446	0,414	0,026	0,010	0,046	0,066

Для длительного  $E_{\infty}$ , мгновенного  $E(0)$  (согласно (15)), а также отсчетного  $E_n$  (используемого в упругих расчетах) модуля имеем значения

$$E_{\infty} = 2\text{МПа}, E(0) = 159,6\text{МПа},$$

$$E_n = 5\text{МПа}. \quad (16)$$

В рамках приближенного метода Шепери преобразование Лапласа уравнения (15) приводит к упругой задаче с переменным модулем

$$E(t) = E_{\infty} + \sum_{k=1}^{16} \frac{sA_k}{s + \frac{1}{2a_T\tau_k}}, \quad (17)$$

$$+ c \frac{\partial T}{\partial t} \delta T \Big] rdzdr + \int_L \alpha_s (T - T_c) \delta T r dl = 0, \quad (13)$$

$$\delta E(u) = \int_F (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - K_i \delta u_i) dF - \int_L t_{ni} \delta u_i dl = 0, (i, j = z, r, \phi), \quad (14)$$

где  $F$  и  $L$  – поверхность и контур меридионального сечения,  $\vec{t}_n$  – вектор внешних усилий.

При решении вариационных уравнений (13) и (14) используется изопараметрический восьмиузловой четырехугольный конечный элемент.

Поскольку задача термомеханики не является связанной, то сначала решается задача теплопроводности, а затем, с учетом зависимости свойств материала от температуры, решается задача квазистатического равновесия.

Вязкоупругие характеристики топлива задаются выражениями для функции релаксации при одноосном растяжении  $E_{rel}$  и модуля объемного сжатия  $K$ :

$$E_{rel} = E_{\infty} + \sum_{k=1}^n A_k e^{-\frac{t}{2\tau_k a_T}}, \quad (15)$$

$$K = const = 3530\text{МПа},$$

значения  $\tau_k$  и  $A_k$  приведены в таблице 1 [8].

где  $s = 1/2t$ .

Для коэффициента линейного теплового расширения  $\alpha$ , коэффициента теплопроводности  $k$  и объемной теплоемкости топлива  $c$  имеем [9]

$$\alpha = 10^{-4} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}, k = 0,15 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^{\circ}\text{C}},$$

$$c = 1,98 \cdot \frac{10^6 \text{Дж}}{\text{м}^3}^{\circ}\text{C} \quad (18)$$

и значения:

$$C_1 = 6, C_2 = 157,$$

$$T_{ref} = 193^{\circ}\text{K} (-80^{\circ}\text{C}). \quad (19)$$

Теплоизоляция предполагается упругим материалом со следующими значениями физико-механических характеристик:

$$\begin{aligned}
 E &= 5,0 \text{ МПа}, \nu = 0,4999, \\
 \alpha &= 3 \cdot 10^{-4} \frac{1}{^\circ\text{C}}, k = 0,2 \frac{\text{Вт}}{\text{м}} ^\circ\text{C}, \\
 c &= 6,46 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} ^\circ\text{C}. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Корпус заряда предполагается изготовленным из изотропного упругого материала со следующими физико-механическими характеристиками [10]:

$$\begin{aligned}
 E &= 38,29 \text{ ГПа}, \alpha = 2 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}, \\
 k &= \frac{2,1 \text{ Вт}}{\text{м}} ^\circ\text{C}, c = 1,8 \cdot \frac{10^6 \text{ Дж}}{\text{м}^3} ^\circ\text{C}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

#### 4. Расчет термонапряженного состояния РДТТ

Рассматривается задача для объекта (рис. 1 а) с начальной температурой  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , помещенного в окружающую среду с температурой  $T_c = -20^\circ\text{C}$  и  $T_c = -40^\circ\text{C}$ . Осуществляется конвективный теплообмен на внешней боковой поверхности изделия  $r = 0,45 \text{ м}$ ,  $0 < z < 2,7 \text{ м}$  и по торцам  $z = 0$  и  $z = 2,7 \text{ м}$  с коэффициентом теплоотдачи  $\alpha = 20 \text{ Вт/м}^2 ^\circ\text{C}$ . Внутренняя поверхность теплоизолирована.

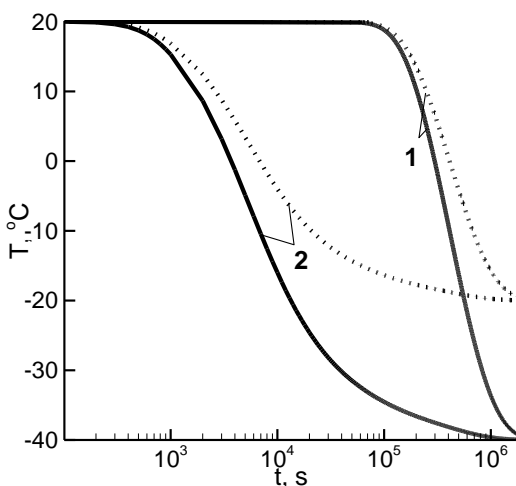


Рис. 2. Кривые охлаждения точек 1 и 2 при температуре окружающей среды  $T_c = -20^\circ\text{C}$  (пунктирные линии) и  $T_c = -40^\circ\text{C}$  (сплошные линии)

Кривые охлаждения крайних точек топлива 1 и 2 в срединном сечении  $A - A$  (рис. 1б) показаны на рис. 2.

Временные зависимости компонент напряжений в точке 1 показаны на рис. 3а.

Видно, что при  $t \approx 10^4 \text{ с}$  напряжения в этой точке проходят фазу сжатия, затем на внутренней поверхности в интервале  $10^5 \text{ с} < t < 10^6 \text{ с}$  в топливе формируются растягивающие напряжения. Основным результатом является формирование существенных по уровню окружающих напряжений  $\sigma_{\phi\phi}$ . В окрестности точки 2 (рис. 1б) напряжения проходят те же стадии эволюции, но по уровню они примерно в 2 раза ниже.

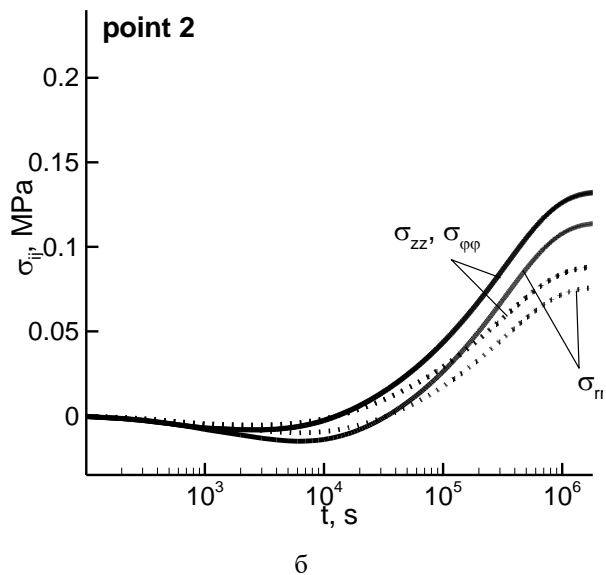
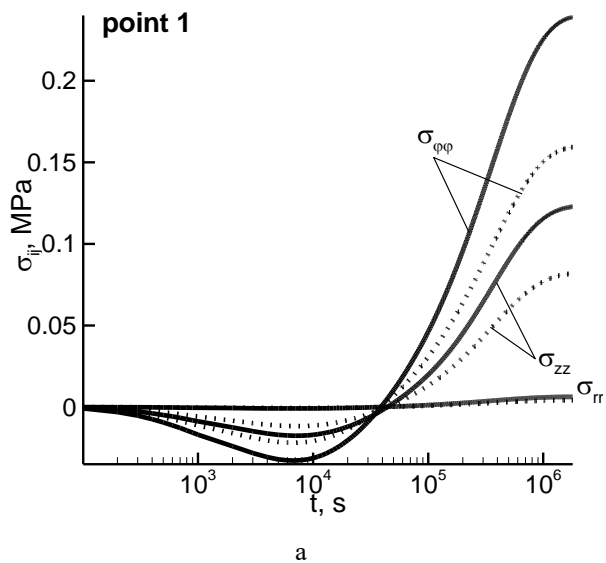
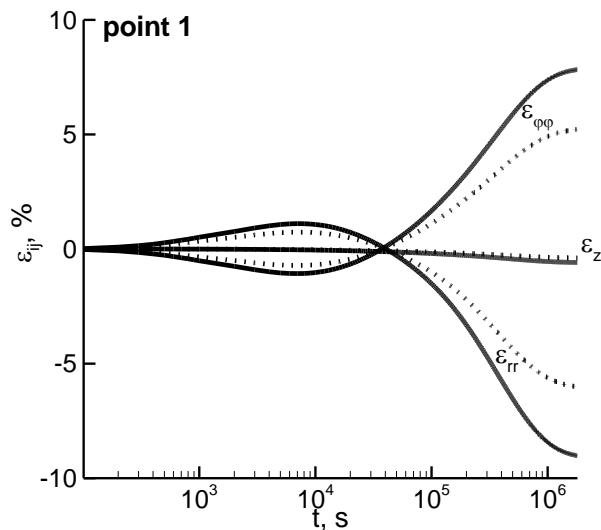


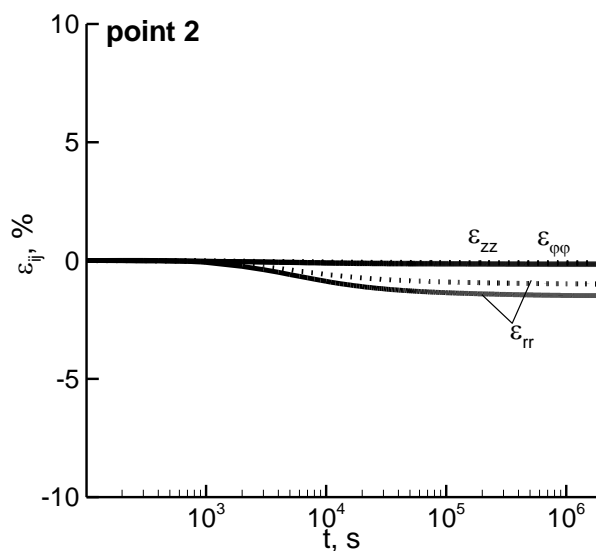
Рис. 3. Временные зависимости напряжений в точках 1 и 2. Сплошные линии –  $T_c = -40^\circ\text{C}$ , пунктирные –  $T_c = -20^\circ\text{C}$

Аналогичным образом происходит эволюция деформаций (рис. 4). При этом максимальной растягивающей компонентой яв-

ляется  $\varepsilon_{\phi\phi}$ , которая достигает 8%. Деформации в точке 2 на порядок ниже, чем в точке 1, поскольку материал стеснен жесткой оболочкой корпуса.



a

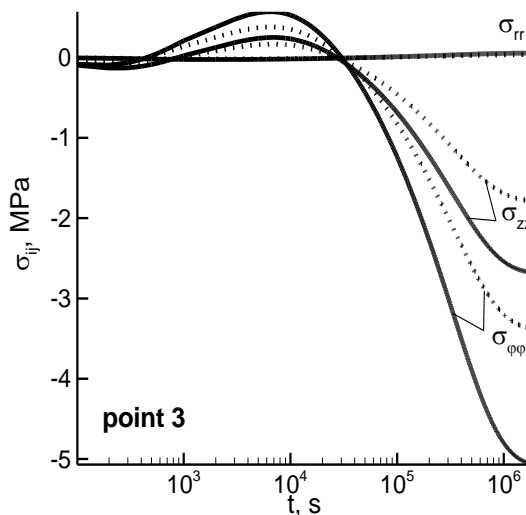


б

**Рис. 4.** Временные зависимости деформаций в точках 1 и 2. Сплошные линии –  $T_c = -40^\circ\text{C}$ , пунктирные –  $T_c = -20^\circ\text{C}$

Эволюция напряжений в точке 3, расположенной в срединной поверхности корпуса изделия, показана на рис. 5. В корпусе при остывании в сечении А–А формируются сжимающие остаточные напряжения.

Максимальными по модулю являются окружные напряжения  $\sigma_{\phi\phi}$ , достигающие при  $T_c = -40^\circ\text{C}$  значения – 5 МПа.



**Рис. 5.** Временные зависимости напряжений в точке 3. Сплошные линии –  $T_c = -40^\circ\text{C}$ , пунктирные –  $T_c = -20^\circ\text{C}$

Растяжение топлива и сжатие оболочки в равновесном охлажденном состоянии обусловлено тем, что коэффициент теплового расширения топлива существенно выше, чем композита оболочки.

Для восприятия полной картины остаточного напряженного состояния на рис. 6 приведены изолинии наиболее существенной компоненты  $\sigma_{\phi\phi}$  в меридиональной плоскости. В средней части изделия наибольшие напряжения в зоне топлива достигаются в области малого радиуса канала (рис. 6 а).

Там же действуют и максимальные сжимающие напряжения в оболочке (рис. 6 б). В окрестности торцов изделия имеются области концентрации напряжений, обусловленные конструктивными особенностями сопряжения топлива и корпуса.

В области малого радиуса канала действуют и максимальные растягивающие окружные деформации (рис. 7). Максимальную деформируемость этой зоны подтверждают и радиальные распределения растягивающих деформаций  $\varepsilon_{\phi\phi}$  и сжимающих  $\varepsilon_{rr}$ , показанные на рис. 8 а и 8 б.

### 5. Выводы

Представленные результаты для задачи об остывании РТТД позволяют сделать следующие выводы для случая  $T_c = -40^\circ\text{C}$ .

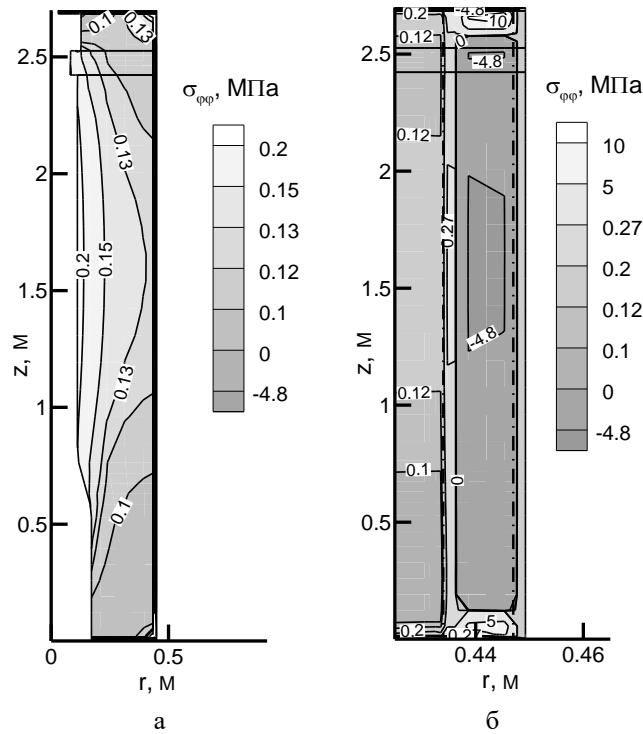


Рис. 6. Распределение  $\sigma_{\phi\phi}$  при  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ,  $T_c = -40^\circ\text{C}$ : а – в топливе; б – в оболочке

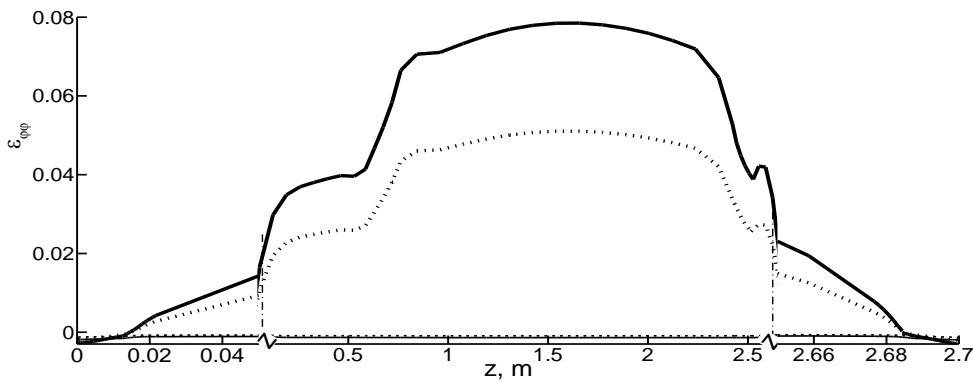


Рис. 7. Распределение  $\epsilon_{\phi\phi}$  по  $z$  в наполнителе вдоль внутренней поверхности канала.  
Сплошная линия –  $T_c = -40^\circ\text{C}$ , пунктирная –  $T_c = -20^\circ\text{C}$ .  
Тонкие линии – распределение  $\epsilon_{\phi\phi}$  в топливе вдоль линии контакта с изоляцией

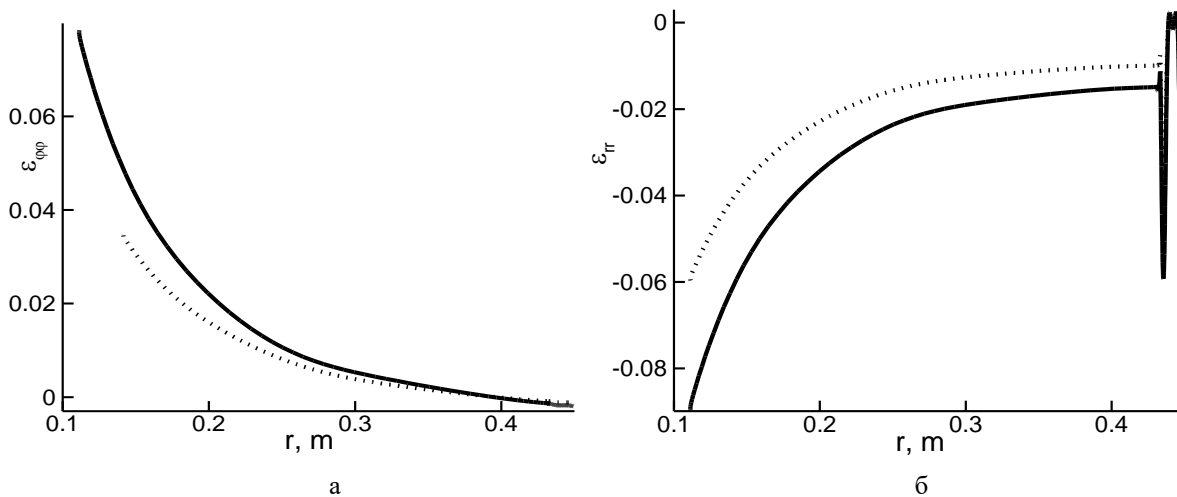


Рис. 8. Распределение  $\epsilon_{\phi\phi}$  (а) и  $\epsilon_{rr}$  (б) по  $r$  в среднем сечении (сечение А – А на рис. 5.3а).  
Сплошная линия –  $T_c = -40^\circ\text{C}$ , пунктирная –  $T_c = -20^\circ\text{C}$

В остаточном состоянии топливо находится в состоянии растяжения (по напряжениям) с максимальным растягивающим напряжением  $\sigma_{\phi\phi} \approx 5 \text{ МПа}$ .

Максимальные растягивающие напряжения и деформации  $\varepsilon_{\phi\phi} \approx 8\%$  достигаются на поверхности канала.

Максимальные радиальные напряжения  $\sigma_{rr}$  на границах топливо–изоляция, изоляция–оболочка(корпус), корпус–внешняя изоляция не превышают  $0,1 \text{ МПа}$ .

В торцевых областях РДТТ имеет место концентрация напряжений, обусловленная особенностями сопряжения топлива и корпуса.

### Литература

1. Москвитин В. В. Сопротивление вязкоупругих материалов. Применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе. Москва: Наука, 1972. 325 с.
2. Синюков А. М., Волков П. И., Львов А. И., Мишкович А. М. Баллистическая ракета на твердом топливе. Москва: Воениздат, 1972. 512 с.
3. Фахрутдинов И. Х., Котельников А. В. Конструкции и проектирование ракетных двигателей твердого топлива. Москва: Машиностроение, 1957. 325 с.
4. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. Москва: Мир, 1974. 335 с.
5. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. Москва: Изд-во иностр. лит., 1963. 536 с.
6. Shapery R. A. Approximate methods of transform inversion of viscoelastic stress analysis. *Proc. U.S. Nath. Congr. Appl. Mech.* 1962. Vol. 2. P. 1075–1055.
7. Мотовиловец И. А., Козлов В. И. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 1. Термоупругость. Киев: Наук. думка, 1957. 264 с.
8. Renganahan K., Nageswara Rao B., Jana M. K. Slump Estimation of Cylindrical Segment Grains of a Typical Rocket Motor under Vertical Storage Conditions. *Trends in Applied Sciences Research.* 2006. Vol. 1, No 1. P. 97–104.
9. Marimuthu R., Nageswara Rao B. Development of efficient finite elements for structural integrity analysis of solid rocket motor propellant grains. *Intern. Jour. Pressure Vessels and Piping.* 2013. Vol. 111-112. P. 131–145.
10. Jayakumar K., Yadav D., Nageswara Rao B. A multi-layer cylindrical shell under electro-thermo-mechanical loads. *Trends in Applied Sciences Research.* 2006. Vol. 1, No 4. P. 356–401.

### References

1. Moskvitin, V. V. (1972). Resistance of viscoelastic materials. Applied to the charges of rocket engines for solid fuels. Moscow: Nauka.
2. Sinyukov, A. M., Volkov, P. I., L'vov, A. I. & Mishkovich, A. M. (1972). Solid fuel ballistic missile. Moscow: Voenizdat.
3. Fakhrutdinov, I. H. & Kotel'nikov, A. V. (1957). Construction and design of the solid fuel rocket motors. Moscow: Mashinostroyeniye.
4. Kristensen, R. (1974). Introduction to the theory of viscoelasticity. Moscow: Mir.
5. Ferry, J. (1963). Viscoelastic properties of polymers. Moscow: Izd-vo inostr. lit.
6. Shapery, R. A. (1962). Approximate methods of transform inversion of viscoelastic stress analysis. *Proc. U.S. Nath. Congr. Appl. Mech.*, Vol. 2, pp. 1075–1055.
7. Motovilovets, I. A. & Kozlov, V. I. (1957). The mechanics of related fields in structural elements. (Vol. 1). Thermoelasticity. Kyev: Naukova dumka.
8. Renganahan, K., Nageswara, Rao B. & Jana, M. K. (2006). Slump Estimation of Cylindrical Segment Grains of a Typical Rocket Motor under Vertical Storage Conditions. *Trends in Applied Sciences Research*, Vol. 1, No 1, pp. 97–104.
9. Marimuthu, R. & Nageswara, Rao B. (2013). Development of efficient finite elements for structural integrity analysis of solid rocket motor propellant grains. *Intern. Jour. Pressure Vessels and Piping*, Vol. 111-112, pp. 131–145.
10. Jayakumar, K., Yadav, D. & Nageswara, Rao B. (2006). A multi-layer cylindrical shell under electro-thermo-mechanical loads. *Trends in Appl. Sci. Research*, Vol. 1, No 4, pp. 356–401.

УДК 517.95+518.517+629.735.33-519

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-19

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОЧИХ КОЛЕС НАСОСОВ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ НА 3D-ПРИНТЕРЕ

Т. И. Шейко<sup>1</sup>, К. В. Максименко-Шейко<sup>1,2</sup>, Ю. С. Литвинова<sup>3</sup>, А. И. Морозова<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,

<sup>2</sup>Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина,

<sup>3</sup>Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»,

<sup>4</sup>Харьковский национальный университет радиоэлектроники

<sup>1</sup>sheyko@ipmach.kharkov.ua, <sup>2</sup>m-sh@ipmach.kharkov.ua, <sup>3</sup>litjuli56@gmail.com,

<sup>4</sup>anna.morozova@nure.ua

### Ключевые слова:

3D-печать, 3D-принтер, 3D-моделирование, рабочие колеса, R-функции, центробежные насосы

В статье на основе конструктивных средств теории R-функций построены уравнения рабочих колес центробежных насосов с целью их реализации на 3D-принтере. Использована методика поэтапного построения уравнений геометрических объектов и методика построения уравнений объектов с точечной симметрией циклического типа. Возможность введения буквенных параметров в уравнениях позволяет оперативно изменять форму проектируемого объекта. Свойство положительности построенной функции во внутренних точках объекта весьма удобно для реализации 3D-печати.

## МАТЕМАТИЧНЕ І КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОБОЧИХ КОЛЕС НАСОСІВ ДЛЯ РЕАЛІЗАЦІЇ НА 3D-ПРИНТЕРІ

Т. І. Шейко<sup>1</sup>, К. В. Максименко-Шейко<sup>1,2</sup>, Ю. С. Літвінова<sup>3</sup>, А. І. Морозова<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України,

<sup>2</sup>Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна,

<sup>3</sup>Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»,

<sup>4</sup>Харківський національний університет радіоелектроніки

<sup>1</sup>sheyko@ipmach.kharkov.ua, <sup>2</sup>m-sh@ipmach.kharkov.ua, <sup>3</sup>litjuli56@gmail.com,

<sup>4</sup>anna.morozova@nure.ua

### Ключові слова:

3D-друк, 3D-принтер, 3D-моделювання, робочі колеса, R-функції, відцентрові насоси.

Відцентрові насоси - одні з найпоширеніших насосів у світі. Відцентрові насоси настільки універсальні, що їх використовують майже у всіх галузях промисловості (хімічній, гірничодобувній, харчовій, енергетичній тощо). Основними перевагами відцентрових насосів є проста конструкція та висока ефективність. Серед недоліків, які варто відзначити, є низька зносостійкість крильчатки. Форма і розміри лопатей крильчатки насоса визначаються трудомісткими розрахунками. Крильчатки насоса можна розділити на три категорії: відкриті, напівзакриті, закриті.

Відомі різні способи виготовлення крильчаток відцентрових насосів. Обробка профілю лопатевого диска може здійснюватися на програмно-керованій копіювально-фрезерній машині, кришка та диск приварюються один до одного аргонодуговим зварюванням, а коло піддають термічній обробці для зняття напруг після зварювання. Недоліками цього способу є складність забезпечення високої міцності колеса. У цьому випадку зварні шви спотворюють форму міжлопатевих каналів.

Іноді крильчатка виготовляється з двох частин за допомогою стикового зварного з'єднання двох елементів. Недоліками цього способу є технологічні труднощі, а в деяких випадках неможливість отримання складної просторової форми міжлопатевих каналів для малих коліс.

У зарубіжному та вітчизняному насособудуванні продовжують проводитись дослідження з метою пошуку оптимальних схем техноло-

гічного процесу для підготовки деталей з полімерів. Основні способи обробки пластикових виробів включають пресування, лиття під тиском, екструзію, вакуум-формування, продувку, штампування.

Світовий виробник насосів і клапанів різних типів, концерн KSB (Німеччина), став найбільшим світовим новатором у галузі застосування 3D-друку в ливарній галузі. За допомогою 3D-принтера виготовляються основні моделі та запчастини до насосів, що дозволяє значно скоротити час на ремонт чи виготовлення нових моделей.

Однак існує проблема задання інформації для друку, тобто створення математичної та комп'ютерної моделі проєктованого об'єкта. Одним із методів вирішення цього завдання є застосування теорії R-функцій, яка дозволяє описати геометричні об'єкти складної форми єдиним аналітичним виразом.

Метою даної роботи є розробка на основі теорії R-функцій методів математичного та комп'ютерного моделювання крильчаток насосів для їх реалізації на 3D-принтері.

При побудові математичних моделей методом R-функцій використовуватимуться як найпростіші R-операції, так і R-операції для згладжування гострих країв і кутів. При побудові рівнянь, що відповідають геометричним об'єктам із симетрією циклічного типу, для зменшення кількості R-операцій було розроблено метод, заснований на доведеній раніше теоремі.

Для побудови об'єкта заданої товщини було використано його нормалізоване рівняння, що також в деяких випадках дозволяє значно зменшити кількість R-функцій.

Було побудовано кілька математичних моделей відкритих крильчаток у відцентрових насосах: з радіальними лопатями, із шістьма вигнутими лопатями та балансуєчими отворами та з п'ятьма криволінійними лопатями різного кута нахилу в центральній зоні. Змінюючи буквенні параметри, введені в програму, в межах однієї програми можуть бути отримані крильчатки з іншими конструктивними елементами (такими, як кількість радіальних лопатей, кількість балансуєчих отворів, різні кути нахилу лопаті в центральній зоні тощо). Отримані рівняння візуалізовано за допомогою програми RFPreview, а їх реалізація на 3D-принтері проводиться в Інституті проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного Національної академії наук України.

На основі розроблених алгоритмів побудовані математичні та комп'ютерні моделі напівзакритих крильчаток відцентрових насосів.

Переваги використання 3D-друку очевидні - виробництво нестандартних моделей, скорочення часу на створення нових прототипів і скорочення часу ремонту, простота та значна дешевизна виготовлення, використання сучасних важких матеріалів. У цій роботі теорія R-функцій використовується для математичного та комп'ютерного моделювання крильчаток насоса при впровадженні технології 3D-друку. Метод побудови рівнянь геометричних об'єктів типу циклічної симетрії в 3D використовувався для побудови рівняння відкритої крильчатки відцентрового насоса з радіальними лопатями. А для побудови математичних моделей крильчаток відцентрових насосів зі згнутими лопатями був розроблений новий підхід, заснований на теорії R-функцій.

Аналітичний запис спроектованих об'єктів дає можливість використовувати буквенні геометричні параметри, складні суперпозиції функцій, що, своєю чергою, дозволяє швидко змінювати їх структурні елементи.

# MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELING OF PUMPS IMPELLERS FOR IMPLEMENTATION ON A 3D-PRINTER

T. I. Sheyko<sup>1</sup>, K. V. Maksimenko-Sheyko<sup>1,2</sup>, Yu. S. Litvinova<sup>3</sup>, A. I. Morozova<sup>4</sup>

<sup>1</sup>A. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems of the NAS of Ukraine,

<sup>2</sup>V. N. Karazin Kharkiv National University,

<sup>3</sup>National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute",

<sup>4</sup>Kharkiv National University of Radio Electronics

<sup>1</sup>sheyko@ipmach.kharkov.ua, <sup>2</sup>m-sh@ipmach.kharkov.ua, <sup>3</sup>litjuli56@gmail.com,

<sup>4</sup>anna.morozova@nure.ua

## Key words:

3D printing, 3D printer, 3D modeling, impellers, R functions, centrifugal pumps.

Centrifugal pumps are one of the most common pumps in the world. Centrifugal pumps are so versatile that they are used in almost all industries (chemical, mining, food, energy, etc.). The main advantages of centrifugal pumps are simple design and high efficiency. Among the shortcomings worth noting is the low wear resistance of the impeller. The shape and size of the pump impeller blades are determined by time-consuming calculations. Pump impellers can be divided into three categories: open, semi-closed, closed.

Various manufacturing methods are known for centrifugal pumps impellers. The processing of the blade disk profile can be done on a program-controlled copy-milling machine, cover disc and blade disk are welded to each other by argon-arc welding, and the wheel is heat-treated to relieve stresses after welding. The disadvantages of this method are the difficulty of ensuring high wheel strength. In this case, the welds distort the shape of the inter-blade channels.

Sometimes the impeller is made of two parts, forming each blade by means of a butt weld joint of two elements. The disadvantages of this method are technological difficulty, and in some cases the impossibility of obtaining a complex spatial shape of the inter-blade channels for small wheels.

In foreign and local pump engineering, researches continue to be carried out to find optimal process flow schemes for preparing parts from polymers. The main methods of plastic products processing include pressing, injection molding, extrusion, vacuum forming, blowing, stamping.

The global manufacturer of various types of pumps and valves, the KSB concern (Germany), has become the world's largest innovator in the field of 3D printing applications in the foundry industry. With the help of a 3D printer, master models and spare parts for pumps are manufactured, which can significantly reduce the time to repair or manufacture new models.

However, there is the problem of setting information for printing, i.e. creating a mathematical and computer model of the designed object. One of the methods for solving this problem is the application of the R-functions theory, which allows one to describe geometric objects of complex shape with a single analytical expression.

The aim of this work is to develop, on the basis of the theory of R-functions, methods of mathematical and computer simulation of pump impellers for their implementation on a 3D-printer.

When constructing mathematical models using the R-functions method, both the simplest R-operations as  $x \wedge_0 y$ ;  $x \vee_0 y$  and R-operations for smoothing sharp edges and corners  $x \wedge_\rho y$ ;  $x \vee_\rho y$  will be used. When constructing equations corresponding to geometrical objects with cyclic-type point symmetry, to reduce the number of R-operations a method based on the theorem proved earlier was developed.

To construct an object of a given thickness, its normalized equation was used, which also in some cases allows to significantly reduce the number of R-functions.

Several mathematical models of open impellers in centrifugal pumps were built: with radial blades, with six curved blades and balancing holes



and with five curvilinear blades of different inclination angles in the central zone. By varying the alphabetic parameters entered into the program, impellers with other structural elements (such as number of radial blades, number of balancing holes, various blade inclination angles in the central zone, etc.) may be obtained within the same program. The obtained equations are visualized using RFPreview program, and their 3D-printer implementation is made in the Institute of Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine.

On the basis of the developed algorithms, mathematical and computer models of semi-closed impellers of centrifugal pumps were built.

The advantages of using 3D printing are obvious – the production of non-standard models, the reduction of time for the creation of new prototypes and the reduction of repair time, the simplicity and considerable cheapness of production, the use of modern heavy-duty materials. In this paper, the theory of R-functions is used for mathematical and computer simulation of pump impellers in the implementation of 3D printing technology. The method of constructing equations of geometrical objects with cyclic symmetry type in 3D was used to construct the equation of an open centrifugal pump impeller with radial blades. And to build mathematical models of the centrifugal pumps impellers with curved blades, a new approach was developed based on the theory of R-functions.

Analytical recording of the designed objects makes it possible to use alphabetic geometric parameters, complex superpositions of functions, which, in turn, allows to change their structural elements quickly.

## 1. Введение

Центробежные насосы являются одними из самых распространённых насосов в мире. Благодаря своим конструкционным решениям и стабильной работе, этот тип насосов нашел широкое применение как для решения бытовых задач, так и для основных технологических процессов в различных отраслях промышленности. Центробежные насосы настолько универсальны в использовании, что применяются практически во всех отраслях промышленности (химическая, горнодобывающая, пищевая, энергетика и пр.). Центробежные насосы применяются для перекачивания различных жидкостей, начиная с воды и заканчивая высокоагрессивными и абразивными суспензиями. Выбор материалов для основных элементов центробежных насосов очень широкий, и чаще всего он основывается на стойкости данного материала к свойствам перекачиваемой жидкости и условиям работы самого насоса.

Основными преимуществами центробежных насосов являются простая конструкция, высокий КПД и т.д. Среди недостатков стоит отметить низкую износостойкость рабочего колеса, которое является основным элементом центробежного насоса. Форма, размеры лопатки рабочего колеса

насоса определяются благодаря трудоемким расчётам. Рабочие колёса насосов можно разделить на три категории: открытые, полузакрытые, закрытые.

Сейчас в насосостроении рабочие колёса открытого типа практически не применяются из-за низкого КПД, который составляет менее 40%. Несмотря на этот существенный недостаток, открытый тип рабочих колёс имеет и ряд неоспоримых достоинств: ремонт их очень прост, насосы с рабочим колесом открытого типа гораздо меньше засоряются, можно существенно продлить их срок службы с помощью накладок из износостойкой стали. Полузакрытые рабочие колёса не применяются в больших грунтовых насосах. Тем не менее, часть производителей небольших насосов, для которых тема засорения весьма актуальна, стараются применять именно полузакрытые колёса. Закрытые рабочие колёса насоса позволяют добиться максимального КПД, что вызывает наибольший интерес со стороны как производителей, так и потребителей. Преимуществом такого типа рабочих колёс является более высокая прочность. Но есть и недостатки, а именно – более сложный ремонт и защита от износа. На рабочих колёсах расположены лопатки, количество которых находится в пределах 2-5, изредка – 6.

На внешней поверхности дисков закрытого рабочего колеса часто делают радиальные выступы. Их иногда делают не радиальными, а повторяющими очертание лопаток.

По технологической схеме изготовления рабочих колес обработку профиля диска с лопатками производят на копировально-фрезерном станке с программным управлением, покрывной диск и диск с лопатками сваривают между собой аргонодуговой сваркой, для снятия напряжений после сварки производят термообработку колеса. Недостатками этого способа являются трудность обеспечения высокой прочности колеса с помощью тех сварных соединений, которые возможны при указанном разделении колеса на части, например, таврового или в виде прорезных швов, а также необходимость термообработки всего колеса после сварки. При этом сварные швы, вообще говоря, искажают форму межлопастных каналов.

Известен способ изготовления рабочего колеса центробежного насоса, согласно которому рабочее колесо выполняют из двух частей, образуя каждую лопасть посредством стыкового сварного соединения двух элементов, один из которых выполняют в виде выступа на основном диске как одно целое с последним, а другой — на покрывающем диске как одно целое с последним. Недостатками этого способа являются технологическая трудность, а в некоторых случаях и невозможность получения сложной пространственной формы межлопастных каналов для колес небольших размеров. В зарубежном и отечественном насосостроении продолжают проводиться исследования по изысканию оптимальных схем технологического процесса изготовления деталей из полимеров, отвечающих необходимым технико-экономическим требованиям. К основным способам переработки изделий из пластмасс относятся прессование, литье под давлением, экструзия, вакуум-формирование, выдувание, штамповка. В некоторых случаях применяется и механическая обработка из блоков материала. Применение полимерных композиций для изготовления рабочих колес шахтных центробежных насосов связано со значительными технологическими трудностями. Колесо центробежного

насоса представляет собой пространственную конструкцию закрытого типа. Закрытое рабочее колесо можно изготавливать из полимерных материалов двумя путями — прессованием и литьем под давлением. Результаты исследования износостойкости и технологичности изготовления показали преимущества полимерных материалов перед традиционно применяемыми стальным и чугуном литьем. В производственном отношении изготовление рабочих колес и других деталей из термопластических материалов значительно проще, чем из бронзы, чугуна или терморезистивных пластмасс. Например, детали из полиамидных смол очень легко отливать в металлические формы на обычных литьевых машинах. Сохранение необходимых геометрических форм, точность размеров и чистота поверхностей при этом обеспечиваются в нужных пределах без большого труда.

Для быстрой замены изношенных деталей в современной промышленности используют 3D-печать. Мировой производитель различных видов насосов и арматуры, концерн KSB (Германия), стал крупнейшим в мире новатором в области применения 3D-печати в литейном производстве. С помощью 3D-принтера изготавливаются мастер-модели и запчасти к насосам, что позволяет существенно сократить время ремонта или появления новых моделей на рынке.

Однако возникает проблема задания информации для печати, т.е. создания математической и компьютерной модели проектируемого объекта. Одним из методов решения этой проблемы является применение теории R-функций, которая позволяет описывать геометрические объекты сложной формы единым аналитическим выражением [1-3].

**Целью работы** является разработка на основе теории R-функций методов математического и компьютерного моделирования рабочих колес насосов для их реализации на 3D-принтере.

## 2. Основная часть

При построении математических моделей методом R-функций будут использованы как простейшие R-операции [1-3]

$$fk \wedge_0 fl = fk + fl - \sqrt{fk^2 + fl^2};$$

$$fk \vee_0 fl = fk + fl + \sqrt{fk^2 + fl^2},$$

так и R-операции для сглаживания острых кромок и углов [3, 4]:

$$fk \wedge_\rho fl = fk + fl - \sqrt{fk^2 + fl^2 + \frac{FR}{8\rho^2}(FR + |FR|)},$$

$$fk \vee_\rho fl = fk + fl + \sqrt{fk^2 + fl^2 + \frac{FR}{8\rho^2}(FR + |FR|)},$$

где

$$FR = \rho^2 - fk^2 - fl^2.$$

При построении уравнений, соответствующих геометрическим объектам с точечной симметрией циклического типа, для сокращения количества R-операций будут использованы результаты следующей теоремы [3].

**Теорема.** Пусть трансляционная область  $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y, z) \geq 0]$  симметрична относительно оси абсцисс, а область  $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y, z) \geq 0]$  может быть размещена внутри сектора  $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{n}$ . Области  $\Sigma_k = [\sigma_0(r \cos(\theta - 2\pi k/n) - r_0, r \sin(\theta - 2\pi k/n), z) \geq 0]$

получены в результате поворота области  $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y, z) \geq 0]$  в плоскости  $xOy$  вокруг начала координат на углы  $\frac{2\pi k}{n}$ . Тогда уравнение границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega = \bigcup_{k=0}^{n-1} \Sigma_k$  имеет вид

$$\omega(x, y) \equiv \sigma_0(r \cos \mu(\theta, n) - r_0, r \sin \mu(\theta, n), z) = 0,$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\theta = \arctg \frac{y}{x}$ .

$$\mu(n\theta) = \frac{8}{n\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[ (2k-1) \frac{n\theta}{2} \right]}{(2k-1)^2}.$$

(В процессе численной реализации для построения уравнения границы  $\partial\Omega$  с рациональной точностью достаточно количество членов ряда  $k = 5$ ).

Кроме того, для построения объекта заданной толщины  $\delta$  использовалось его нормализованное уравнение  $\omega(x, y, z) \geq 0$ ,  $\frac{\partial\omega}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 1$ . Хорошо известно, что функция  $\omega(x, y, z)$  в окрестности границы  $\partial\Omega$  ведет

себя как расстояние до  $\partial\Omega$ . Тогда функция  $\omega_1(x, y, z) = \frac{\delta}{2} - |\omega(x, y, z)| \geq 0$  будет положительна только в пояске шириной  $\delta$ . Использование этого подхода в ряде случаев позволяет существенно сократить количество R-операций, а, следовательно, и сократить вычислительный процесс.

1. Построим математическую модель открытого рабочего колеса центробежного насоса с радиальными лопатками.

$$f1 = (10^2 - x^2 - y^2) \wedge_0 (0.5 - z) \times (0.1 + z) \geq 0; f2 = (6^2 - x^2 - y^2) \wedge_0$$

$$\wedge_0 (2 - z)z \geq 0;$$

$$f12 = (f1 \vee_0 f2) \wedge_0$$

$$\wedge_0 (x^2 + y^2 - 4.5^2) \geq 0$$

$$f123 = f12 \vee_0 f3 \geq 0; \text{ (рис. 1, а)}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \theta = \arctg \frac{y}{x}; no = 24;$$

$$ff = \theta \frac{no}{2};$$

$$\mu = \frac{8}{no\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin[(2k-1)ff]}{(2k-1)^2};$$

$$x1 = \rho \cos \mu; y1 = \rho \sin \mu;$$

$$fr = ((0.25 - |y1|) \wedge_0 z(1.9 - z)) \wedge_0$$

$$\wedge_0 (10^2 - x1^2 - y1^2) \wedge_0$$

$$\wedge_0 (x1^2 + y1^2 - 5^2) \geq 0; \text{ (рис. 1, б)}$$

$$f4 = (4.5^2 - x^2 - y^2) \wedge_0$$

$$\wedge_0 (x^2 + y^2 - 3^2) \geq 0;$$

$$f5 = ((1 - x^2) \vee_0 (1 - y^2)) \wedge_0$$

$$\wedge_0 z(1.93 - z) \geq 0;$$

$$f6 = f4 \wedge_0 f5 \geq 0;$$

$$f7 = (0.3^2 - x^2 - (y - 3.7)^2) \vee_0$$

$$\vee_0 (0.3^2 - x^2 - (y + 3.7)^2) \geq 0;$$

$$fv = f6 \wedge_0 - f7 \geq 0; \text{ (рис. 1, в)}$$

$$r2 = 0.4; sr2 = r2^2 - fr^2 - f123^2;$$

$$fpr = fr + f123 +$$

$$+ \sqrt{fr^2 + f123^2 + \frac{sr2}{8r2^2}(sr2 + |sr2|)} \geq 0;$$

$$W = fv \vee_0 fpr \geq 0; \text{ (рис. 1, г)}$$

$$fpas = (0.35^2 - y^2) \wedge_0 x(2 - x) \geq 0;$$

$$\phi = \frac{\pi}{2}; nd = 8; th = \frac{\phi}{nd}; t1 = \theta - \frac{\pi}{2} + \frac{\phi}{2};$$

$$ft = \left( t1 - \frac{th}{2} \right) \frac{\pi}{th};$$

$$\mu_0 = \frac{4th}{\pi^2} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin[(2k-1)ft]}{(2k-1)^2};$$

$$wl = 0.5(t1 - \frac{th}{2} + \phi - t1 - \frac{th}{2} -$$

$$-abs(t1 - \frac{th}{2} - \phi + t1 + \frac{th}{2})) \geq 0;$$

$$\mu z = 0.5(\mu_0 + wl - abs(\mu_0 - wl)) \geq 0;$$

$$\begin{cases} x1k = \rho \cos \mu z, \\ y1k = \rho \sin \mu z; \end{cases} \begin{cases} xkk = -\frac{0.8x1k}{z-0.8}, \\ ykk = -\frac{0.8y1k}{z-0.8}; \end{cases}$$

$$fk = (0.3^2 - xkk^2 - ykk^2) \Lambda_0$$

$$\Lambda_0 (z - 0.8) \geq 0;$$

$$WKOL = (\omega \Lambda_0 \overline{fk}) \Lambda_0 \overline{f pas} \geq 0. \text{ (рис. 1, д)}$$

Меняя значения буквенных параметров  $no, nd$  и других, можно в рамках этой же программы получать колеса с другими конструктивными параметрами.

2. Построим математическую модель открытого рабочего колеса центробежного насоса с шестью криволинейными лопатками и балансировочными отверстиями

$$f01 = ((2.2^2 - x^2 - y^2) \Lambda_0$$

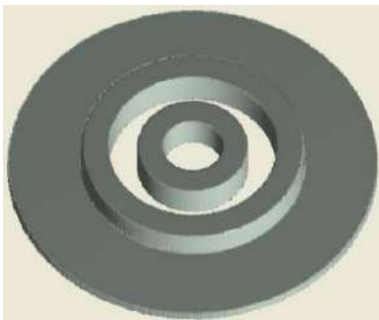
$$\Lambda_0 (x^2 + y^2 - 1)) \Lambda_0 (2 - z)z \geq 0;$$

$$f0 = ((10^2 - x^2 - y^2) \Lambda_0$$

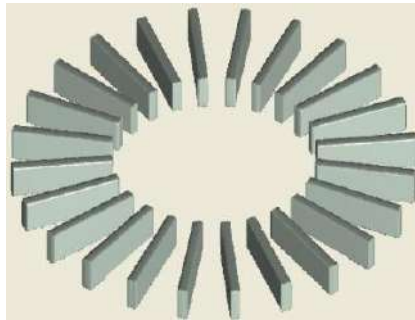
$$\Lambda_0 (2 + z)(0.2 - z)) \vee_0 f01 \geq 0; \text{ (рис. 2, а)}$$

$$f11 = \left( 0.5 - \left| \frac{(5^2 - (y-5)^2 - x^2)}{10} \right| \right) \Lambda_0$$

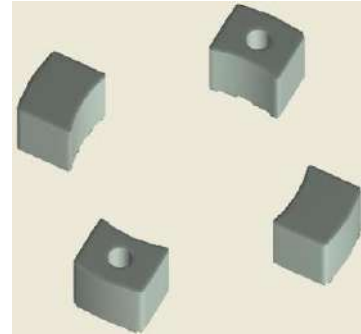
$$\Lambda_0 \bar{x} \geq 0;$$



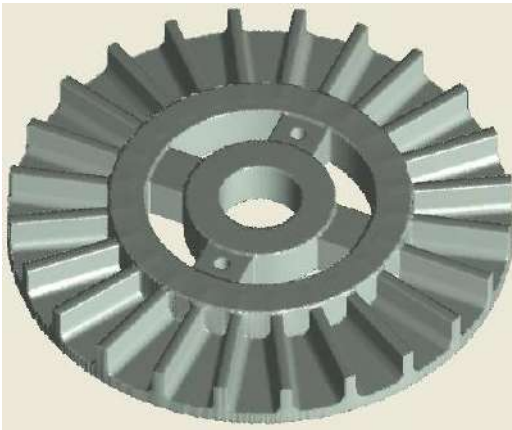
а)



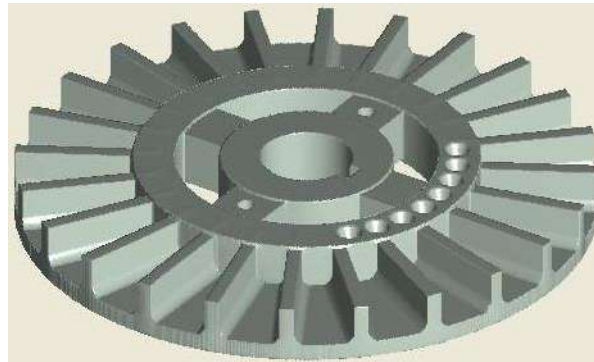
б)



в)



г)



д)

Рис. 1. Визуализация поэтапного построения уравнения открытого рабочего колеса центробежного насоса с радиальными лопатками

$$x1 = x \cos \frac{\pi}{3} + y \sin \frac{\pi}{3};$$

$$y1 = -x \sin \frac{\pi}{3} + y \cos \frac{\pi}{3};$$

$$f1 = \left( 0.5 - \left| \frac{(5^2 - (y1 - 5)^2 - x1^2)}{10} \right| \right) \Lambda_0$$

$$\Lambda_0 \bar{x}1 \geq 0;$$

$$x2 = x \cos \frac{2\pi}{3} + y \sin \frac{2\pi}{3};$$

$$y2 = -x \sin \frac{2\pi}{3} + y \cos \frac{2\pi}{3};$$

$$f2 = \left( 0.5 - \left| \frac{(5^2 - (y2 - 5)^2 - x2^2)}{10} \right| \right) \Lambda_0$$

$$\Lambda_0 \bar{x}2 \geq 0;$$

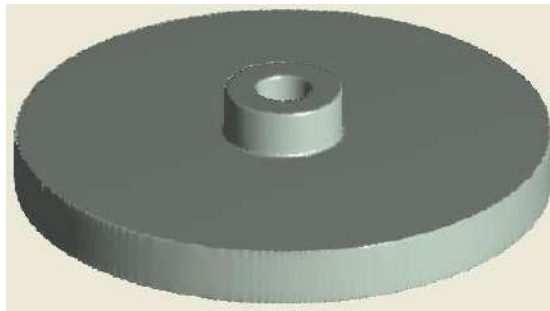
$$\begin{aligned}
 x_3 &= x \cos \frac{3\pi}{3} + y \sin \frac{3\pi}{3}; \\
 y_3 &= -x \sin \frac{3\pi}{3} + y \cos \frac{3\pi}{3}; \\
 f_3 &= \left( 0.5 - \left| \frac{(5^2 - (y_3 - 5)^2 - x_3^2)}{10} \right| \right) \Lambda_0 \\
 \Lambda_0 \bar{x}_3 &\geq 0; \quad x_4 = x \cos \frac{4\pi}{3} + y \sin \frac{4\pi}{3}; \\
 y_4 &= -x \sin \frac{4\pi}{3} + y \cos \frac{4\pi}{3}; \\
 f_4 &= \left( 0.5 - \left| \frac{(5^2 - (y_4 - 5)^2 - x_4^2)}{10} \right| \right) \Lambda_0 \\
 \Lambda_0 \bar{x}_4 &\geq 0; \\
 x_5 &= x \cos \frac{5\pi}{3} + y \sin \frac{5\pi}{3}; \\
 y_5 &= -x \sin \frac{5\pi}{3} + y \cos \frac{5\pi}{3}; \\
 f_5 &= \left( 0.5 - \left| \frac{(5^2 - (y_5 - 5)^2 - x_5^2)}{10} \right| \right) \Lambda_0 \\
 \Lambda_0 \bar{x}_5 &\geq 0; \\
 f_{1112345} &= ((((((f_{11} \vee_0 f_1) \vee_0 \\
 &\vee_0 f_2) \vee_0 f_3) \vee_0 f_4) \vee_0 f_5) \Lambda_0 \\
 &\Lambda_0 (2 - z)z) \Lambda_0 (x^2 + y^2 - 3^2)) \geq 0; \\
 f_v &= f_{1112345} \Lambda_0 (9.7^2 - x^2 - y^2) \geq 0; \\
 (\text{рис. 2, б}) \quad f_{i0} &= f_0 \vee_0 f_v \geq 0; \quad (\text{рис. 2, в}) \\
 \phi &= \frac{\pi}{2}; \quad nd = 6; \quad th = \frac{\phi}{nd}; \quad \theta = \arctg \frac{x}{y}; \\
 t_1 &= \theta - \frac{\pi}{2} + \frac{\phi}{2}; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ff &= \left( t_1 - \frac{th}{2} \right) \frac{\pi}{th}; \\
 \mu &= \frac{4th}{\pi^2} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin[(2k-1)ff]}{(2k-1)^2}; \\
 e_1 &= t_1 - \frac{th}{2}; \quad e_2 = \phi - t_1 - \frac{th}{2}; \\
 S &= 0.5(e_1 + e_2 - |e_1 - e_2|) \geq 0; \\
 \mu S &= 0.5(\mu + S - |\mu - S|) \geq 0; \\
 y_{11} &= \rho \sin \mu S; \\
 fb &= ((0.8^2 - (z + 1)^2 - y_{11}^2) \Lambda_0 \\
 &\Lambda_0 (x^2 + y^2 - 3^2)) \Lambda_0 x \geq 0; \\
 WKOL &= f_{i0} \Lambda_0 \bar{fb} \geq 0. \quad (\text{рис. 2, г})
 \end{aligned}$$

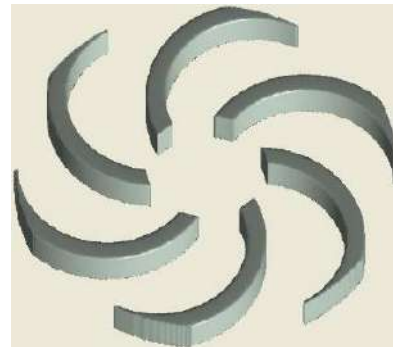
Меняя параметр  $nd$ , можно регулировать количеством балансировочных отверстий.

3. Построим математическую модель открытого рабочего колеса центробежного насоса с пятью криволинейными лопатками.

$$\begin{aligned}
 f_{01} &= ((2.2^2 - x^2 - y^2) \Lambda_0 \\
 &\Lambda_0 (x^2 + y^2 - 1.7^2)) \Lambda_0 (2 - z)z \geq 0; \\
 f_{02} &= ((1.7^2 - x^2 - y^2) \Lambda_0 \\
 &\Lambda_0 (x^2 + y^2 - 1.2^2)) \Lambda_0 (1.5 - z)z \geq 0; \\
 f_{001} &= f_{01} \vee_0 f_{02} \geq 0; \\
 f_{00} &= ((12.5^2 - x^2 - y^2) \Lambda_0 \\
 &\Lambda_0 (3 + z)(0.5 - z)) \vee_0 f_{001} \geq 0; \\
 &(\text{рис. 3, а})
 \end{aligned}$$



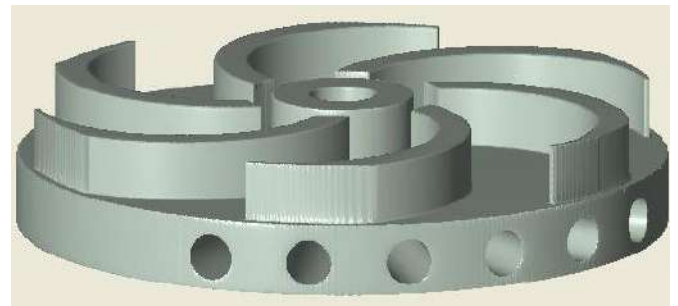
а)



б)



в)



г)

Рис. 2. Визуализация поэтапного построения уравнения колеса

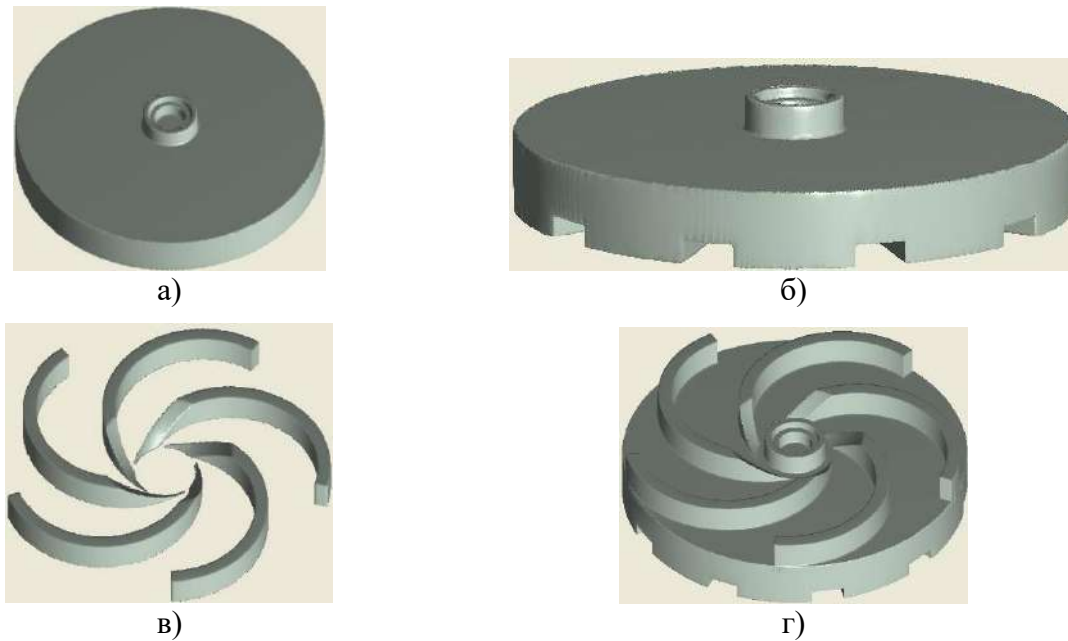


Рис. 3. Визуалізація поетапного побудови рівняння колеса

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \theta = \arctg \frac{y}{x}; no = 10;$$

$$ff = \theta \frac{no}{2};$$

$$\mu = \frac{8}{no\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin[(2k-1)ff]}{(2k-1)^2};$$

$$x1 = \rho \cos \mu; y1 = \rho \sin \mu;$$

$$fn1 = ((1.2^2 - y1^2) \wedge_0 (-z - 2)) \wedge_0$$

$$\wedge_0 (x^2 + y^2 - 8^2) \geq 0;$$

$$f11 = \left(0.5 - \left| \frac{(7^2 - x^2 - (y-5)^2)}{14} \right| \right) \wedge_0$$

$$\wedge_0 \bar{x} \geq 0;$$

$$x1 = x \cos \frac{2\pi}{5} + y \sin \frac{2\pi}{5};$$

$$y1 = -x \sin \frac{2\pi}{5} + y \cos \frac{2\pi}{5};$$

$$f1 = \left(0.5 - \left| \frac{(7^2 - x1^2 - (y1 - 5)^2)}{14} \right| \right) \wedge_0$$

$$\wedge_0 \bar{x1} \geq 0;$$

$$x2 = x \cos \frac{4\pi}{5} + y \sin \frac{4\pi}{5};$$

$$y2 = -x \sin \frac{4\pi}{5} + y \cos \frac{4\pi}{5};$$

$$f2 = \left(0.5 - \left| \frac{(7^2 - x2^2 - (y2 - 5)^2)}{14} \right| \right) \wedge_0$$

$$\wedge_0 \bar{x2} \geq 0;$$

$$x3 = x \cos \frac{8\pi}{5} + y \sin \frac{8\pi}{5};$$

$$y3 = -x \sin \frac{8\pi}{5} + y \cos \frac{8\pi}{5};$$

$$f3 = \left(0.5 - \left| \frac{(7^2 - x3^2 - (y3 - 5)^2)}{14} \right| \right) \wedge_0]$$

$$\wedge_0 \bar{x3} \geq 0;$$

$$x4 = x \cos \frac{16\pi}{5} + y \sin \frac{16\pi}{5};$$

$$y4 = -x \sin \frac{16\pi}{5} + y \cos \frac{16\pi}{5};$$

$$f4 = \left(0.5 - \left| \frac{(7^2 - x4^2 - (y4 - 5)^2)}{14} \right| \right) \wedge_0$$

$$\wedge_0 \bar{x4} \geq 0;$$

$$xk = -\frac{z_0 x}{z - z_0}; yk = -\frac{z_0 y}{z - z_0};$$

$$fk = xk^2 + yk^2 - r^2 \geq 0; x_0 = 0; y_0 = 0;$$

$$z_0 = -2; r = 2.2.$$

$$f111234 = (((((11 \vee_0 f1) \vee_0 f2) \vee_0$$

$$\vee_0 f3) \vee_0 f4) \wedge_0 (2.5 - z)z) \wedge_0 fk \geq 0;$$

(рис. 3,в)

$$WKOL = f111234 \vee_0 f0 \geq 0. \text{ (Рис. 3,г)}$$

Меняя значения  $z_0, r$  для конической поверхности, можем получать различные углы наклона лопатки в центральной зоне.

Полученные уравнения моделей колес визуализированы с помощью программы RFPreview [5], а их реализация на 3D-принтере (рис. 4) выполнена в ИПМаш им. А.Н. Подгорного НАН Украины.

На основе разработанных алгоритмов построены математические и компьютерные модели полузакрытых рабочих колес центробежных насосов, приведенных на рис. 5.

### 3. Выводы

Создание математических моделей для реализации 3D-печати представляют значительный интерес, который связан с актив-

ным внедрением 3D-печати в различные отрасли промышленности. Достоинства применения 3D-печати очевидны — это изготовление нестандартных моделей, сокращение времени на создание новых прототипов и сокращение времени ремонта, простота и значительная дешевизна производства, использование современных сверхпрочных материалов. В данной работе применяется теория R-функций для математического и компьютерного моделирования рабочих колес насосов при реализации технологии 3D-печати.

Метод построения уравнений геометрических объектов, обладающих циклическим типом симметрии в 3D, был использован для построения уравнения открытого рабочего колеса центробежного насоса с радиаль-

ными лопатками. А для построения математических моделей колес центробежных насосов с криволинейными лопатками был разработан новый подход на основе теории R-функций.

Достоверность полученных результатов, их адекватность проектируемым объектам подтверждается визуализацией как в условиях эксплуатации программы RFPreview, так и реализацией на 3D-принтере. Аналитическая запись проектируемых объектов дает возможность использовать буквенные геометрические параметры, сложные суперпозиции функций, что, в свою очередь, позволяет оперативно изменять их конструктивные элементы.



Рис. 4. Макеты колес центробежных насосов, выполненные на 3D-принтере

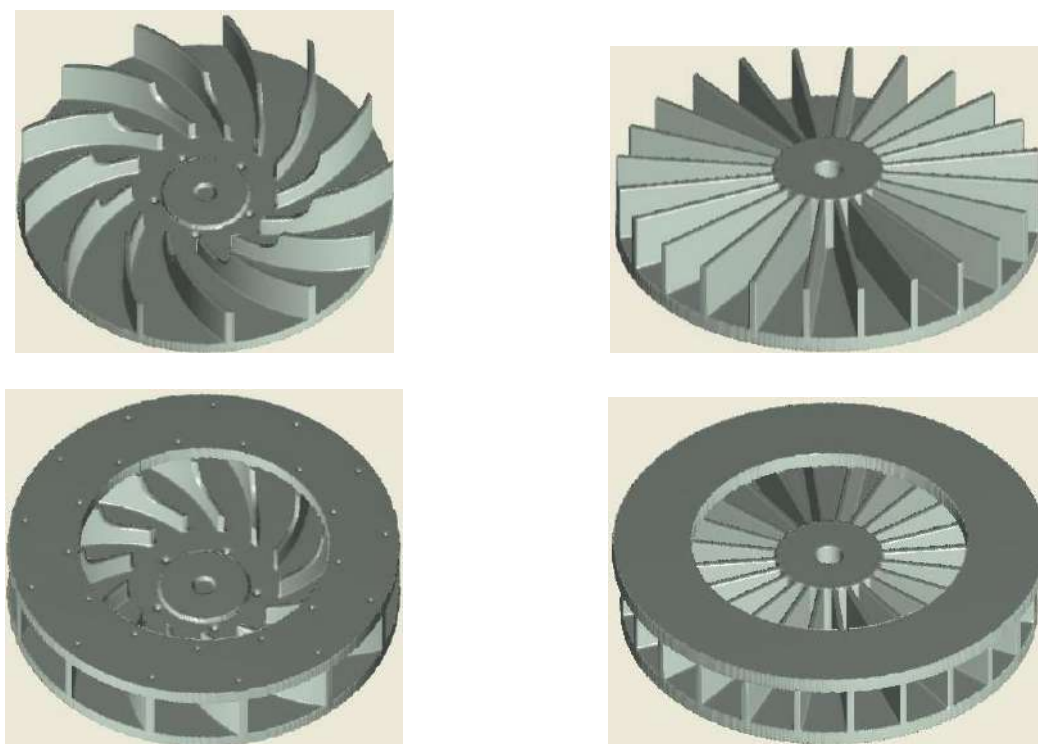


Рис. 5. Полузакрывые рабочие колеса центробежных насосов

### Литература

1. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 552 с.
2. Rvachev V. L., Sheiko T. I. R-functions in boundary value problems in mechanics. *Applied Mechanics Reviews*. 1995. Vol. 4. P. 151–188.
3. Максименко-Шейко К. В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. 306 с.
4. Литвинова Ю. С., Максименко-Шейко К. В., Шейко Т. И., Толлок А. В. Аналитическая идентификация машиностроительных деталей с помощью R-функций. *Информационные технологии в проектировании и производстве*. 2016. №1 (161). С. 38–44.
5. Лисин Д. А., Максименко-Шейко К. В., Толлок А. В., Шейко Т. И. R-функции в компьютерном моделировании дизайна 3D-поверхности автомобиля. *Прикладная информатика*. 2011. №6 (36). С. 78–85.

### References

1. Rvachev, V. L. (1982). The theory of R-functions and some of its applications. Kiev: Nauk. dumka (in Russian).
2. Rvachev, V. L. & Sheiko, T. I. (1995). R-functions in boundary value problems in mechanics. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 4, pp. 151–188.
3. Maksimenko-Sheyko, K. V. (2009). R-functions in mathematical modeling of geometric objects and physical fields. Khar'kov: IPMash NAN Ukrainy (in Russian).
4. Litvinova, YU. S., Maksimenko-Sheyko, K. V., Sheyko, T. I. & Tolok, A. V. (2016). Analytical identification of machine parts using R functions. *Informatsionnyye tekhnologii v proyektirovanii i proizvodstve*, Vol. 1(161), pp. 38–44 (in Russian).
5. Lisin, D. A., Maksimenko-Sheyko, K. V., Tolok, A. V. & Sheyko, T. I. (2011). R-functions in computer simulation of a 3D car surface design. *Prikladnaya informatika*, Vol. 6 (36), pp. 78–85 (in Russian).



УДК 539.1:534.1

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-20

## НЕСТАЦІОНАРНІ ВІСЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ЕЛЕКТРОПРУЖНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ СКІНЧЕННОЇ ДОВЖИНИ

**І. В. Янчевський, О. А. Савченко**

Національний технічний університет України «КПІ ім. І. Сікорського»  
i.yanchevskiy@kpi.ua

**Ключові слова:**

циліндрична електропружна оболонка, нестационарні коливання, інтегральне перетворення Лапласа.

Представлено чисельно-аналітичне розв'язання задачі про нестационарні коливання біморфної (метал-п'єзокераміка) циліндричної оболонки з шарнірно закріпленими торцями. Розглянуті режими прямого і зворотного п'єзоелектричного ефекту. Динамічні процеси моделюються в рамках лінійної теорії тонких електропружних оболонок, заснованої на узагальнених гіпотезах Кірхгофа–Лява. Представлені числові результати для випадку східчастого електромеханічного навантаження оболонки та дано їх аналіз.

## NON-STATIONARY AXISYMMETRIC VIBRATION OF FINITE-LENGTH ELECTROELASTIC CYLINDRICAL SHELL

**I. V. Yanchevskiy, O. A. Savchenko**

National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»,  
i.yanchevskiy@kpi.ua

**Key words:**

cylindrical electroelastic shell, non-stationary vibration, Laplace integral transform.

The numerically-analytical solution of a problem on non-stationary vibration of bimorph (metal-piezoceramic) cylindrical shell with hinged ends is presented. Modes of direct and inverse piezoelectric effect are considered. Dynamic processes are modeled within the limits of the linear theory of the thin electroelastic shells based on generalized Kirchhoff–Love hypotheses. Numerical results for stepped electromechanical loadings of the shell are presented and their analysis are included.

### 1. Вступ

Область практичного застосування приладів і пристроїв, що використовують у своїх конструкціях п'єзокерамічні перетворювачі енергії, у цей час досить широка [7]. З усього розмаїття конфігурацій перетворювачів до досить розповсюджених відносяться елементи у вигляді тонкостінних циліндричних оболонок, вивченню динамічної поведінки яких приділяється велика увага [1, 2, 10]. Особливий інтерес при цьому представляють дослідження коливань при прикладанні імпульсних електромеханічних навантажень [4, 8, 9]. Разом з тим, залишаються відкритими питання поведінки п'єзокерамічних елементів з конструктивними особливостями при різних варіантах їх закріплення.

У даній роботі представлено ефективний чисельно-аналітичний метод дослідження перехідних процесів у біморфному

(метал-п'єзокераміка) перетворювачі у вигляді циліндричної оболонки скінченної довжини при її механічному і/або електричному імпульсному навантаженні. При цьому розглянуто найпростіший випадок вісесиметричного навантаження оболонки, торці якої шарнірно закріплені.

### 2. Постановка задачі

Розглядається замкнена кругова циліндрична оболонка довжиною  $l$ , яка складається з тонких, жорстко з'єднаних між собою, внутрішнього електропружного і зовнішнього пружного шарів з товщинами  $h_p$  і  $h_m$  відповідно. Радіус поверхні з'єднання шарів рівний  $R_1$ . На поляризований по товщині електропружний (п'єзоелектрично активний) шар нанесені суцільні, нескінченно тонкі електроди, внутрішній з яких «зазем-

лений», а електричний потенціал на зовнішньому електроді рівний  $V_0(t)$ . На оболонку діє також розподілене вісесиметричне нестационарне нормальне навантаження з інтенсивністю  $q$ . Торці оболонки шарнірно закріплені.

Віднесемо оболонку до циліндричної системи координат, вісь  $z$  якої збігається з віссю оболонки, а площини  $z=0$  й  $z=l$  співпадають з її торцями. Тоді в рамках узагальнених на випадок електромеханіки гіпотез Кірхгофа–Лява вхідна система рівнянь вісесиметричного руху поверхні зведення [5] досліджуваного біморфного циліндричного п'єзоперетворювача має вигляд [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + w + \delta \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial z} = \\ = q + V - \zeta_p \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}; \\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} - \nu \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут  $w(z,t)$ ,  $u_0(z,t)$  – нормальна і осьова складові вектора переміщень, відповідно;  $V(z,t)$  – функція, що описує профіль електричного потенціалу на зовнішньому струмопровідному покритті;  $\zeta_p$  – відстань між поверхнею зведення, що має радіус кривизни  $R_0 = R_1 - \zeta_0$ , і серединною поверхнею електропружного шару.

Відстань  $\zeta_0$  між поверхнями зведення та з'єднання шарів обрана таким чином, що має місце найбільш простий зв'язок між зусиллями та деформаціями [6]:

$$\begin{aligned} N_1 = \frac{\partial u_0}{\partial z} + \nu w - V, \\ M_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\zeta_p}{\delta} V. \end{aligned} \quad (2)$$

Рівняння руху (1) доповнимо нульовими початковими умовами (до моменту  $t=0$  перетворювач перебуває в стані спокою)

$$w|_{t=0} = \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = u_0|_{t=0} = \frac{\partial u_0}{\partial t}|_{t=0} = 0$$

і механічними граничними умовами

$$w|_{z=0,l} = 0; \quad N_1|_{z=0,l} = 0; \quad M_1|_{z=0,l} = 0, \quad (3)$$

що відповідають умові шарнірного закріплення торців.

Форма електричних граничних умов залежить від виду електродування п'єзоактивного шару і способу підведення (знімання) електричної енергії. Якщо покласти, що суцільні електроди підключені до генератора напруги або закорочені, то функцію

$$V(z,t) = V_0(t) \quad (4')$$

у системі (1) вважаємо заданою. Якщо ж електроди розімкнуті або підключені до електронного пристрою з нескінченно великим вхідним опором, то необхідне виконання рівності нулеві погонного струму зсуву через серединну поверхню п'єзошару. У цьому випадку вираз для невідомої різниці потенціалів  $V_0(t)$  між суцільними електродами шару запишеться у вигляді [6]:

$$V(z,t) = V_0(t) = \frac{\delta_1}{l} \int_0^l \left( \frac{\partial u_0}{\partial z} + w - \zeta_p \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) dz. \quad (4'')$$

Співвідношення (1)–(4) представляють собою повну систему рівнянь зв'язаних коливань досліджуваного біморфного електропружного перетворювача.

Слід зазначити, що рівняння записані з використанням безрозмірних змінних: час  $t$  віднесений до  $R_0 \sqrt{m_h / D_N}$ ; переміщення  $w$ ,  $u_0$  – до  $R_0$ ; різниця потенціалів  $V$  – до  $R_0 D_N / e_1$ .

Розрахункові формули для вхідних в (1)–(4) постійних коефіцієнтів наведені в [6].

### 3. Метод розв'язання задачі

Для граничних умов (3) функції  $w$  і  $u_0$  представимо у вигляді

$$\begin{aligned} w(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \sin\left(\frac{k\pi z}{l}\right); \\ u_0(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \cos\left(\frac{k\pi z}{l}\right), \end{aligned} \quad (5)$$

де  $a_k$ ,  $b_k$  – невідомі коефіцієнти;  $z \in [0, l]$ .

Електричний потенціал також задаємо у вигляді тригонометричного ряду Фур'є, тобто

$$V(z,t) = V_0(t) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} v_k \sin\left(\frac{k\pi z}{l}\right), \quad (6)$$

коефіцієнти  $v_k$  якого на підставі рівностей (4) рівні  $v_k = (2/k\pi) \cdot [1 - (-1)^k]$ .

Механічне навантаження  $q$  вважається рівномірно розподіленим на ділянці  $[z_1, z_2]$ , тобто

$$q(z, t) = -q_0(t) [H(z - z_1) - H(z - z_2)],$$

де  $H$  – одинична функція Хевісайда, і також може бути представлена у формі, аналогічній (6):

$$q_3 = q_0(t) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin\left(\frac{k\pi z}{l}\right);$$

$$f_k = -\frac{2}{k\pi} \left[ \cos\left(\frac{k\pi z_1}{l}\right) - \cos\left(\frac{k\pi z_2}{l}\right) \right]. \quad (7)$$

Після підстановки розвинень (5)–(7) у трансформовану за Лапласом систему (1) отримаємо алгебраїчну систему рівнянь відносно зображень шуканих коефіцієнтів  $a_k$  і  $b_k$ :

$$a_k^L(s) \cdot (s^2 + \xi_k^{(1)}) + b_k^L(s) \cdot \xi_k^{(2)} =$$

$$= q_0^L(s) \cdot f_k + V_0^L(s) \cdot v_k \xi_k^{(4)};$$

$$a_k^L(s) \cdot \xi_k^{(2)} + b_k^L(s) \cdot (s^2 + \xi_k^{(3)}) =$$

$$= V_0^L(s) \cdot v_k \xi_k^{(5)}. \quad (8)$$

Тут  $s$  – параметр перетворення (верхнім індексом  $L$  позначені трансформовані за Лапласом функції);  $\xi_k^{(5)} = -k\pi/l$ ;  $\xi_k^{(1)} = 1 + \delta \xi_k^{(5)4}$ ;  $\xi_k^{(2)} = v \xi_k^{(5)}$ ;  $\xi_k^{(3)} = \xi_k^{(5)2}$ ;  $\xi_k^{(4)} = 1 + \zeta_p \xi_k^{(3)}$ .

Розв'язком системи (8) буде

$$a_k^L(s) = D_k^a(s) / D_k(s);$$

$$b_k^L(s) = D_k^b(s) / D_k(s), \quad (9)$$

де

$$D_k = s^4 + s^2 \lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)};$$

$$D_k^a = f_k q_0^L(s^2 + \lambda_k^{(3)}) + \xi_k^{(4)} v_k V_0^L(s^2 + \lambda_k^{(4)});$$

$$D_k^b = -\xi_k^{(2)} f_k q_0^L + \xi_k^{(5)} v_k V_0^L(s^2 + \lambda_k^{(5)}),$$

при цьому

$$\lambda_k^{(1)} = \xi_k^{(1)} + \xi_k^{(3)}; \quad \lambda_k^{(2)} = \xi_k^{(1)} \xi_k^{(3)} - \xi_k^{(2)2}; \quad \lambda_k^{(3)} = \xi_k^{(3)};$$

$$\lambda_k^{(4)} = \xi_k^{(3)} - \frac{\xi_k^{(2)} \xi_k^{(5)}}{\xi_k^{(4)}}; \quad \lambda_k^{(5)} = \xi_k^{(1)} - \frac{\xi_k^{(2)} \xi_k^{(4)}}{\xi_k^{(5)}}.$$

Далі, використовуючи звичайні правила операційного обчислення, здійснюється перехід у простір оригіналів. В результаті нескладних математичних операцій отримаємо

$$a_k(t) = q_0(t) (f_k I_k^{(3)}(t)) + V_0(t) (v_k \xi_k^{(4)} I_k^{(4)}(t));$$

$$b_k(t) = q_0(t) (f_k \xi_k^{(2)} I_k^{(2)}(t)) +$$

$$+ V_0(t) (v_k \xi_k^{(5)} I_k^{(5)}(t)), \quad (10)$$

де позначено  $f(t) * I(t) = \int_0^t f(\tau) I(t - \tau) d\tau$ . Підінтегральні функції  $I$  можуть бути представлені в компактному вигляді у такий спосіб:

$$I_k^{(r)}(t) = \sum_{j=1}^2 \frac{\beta_k^{(r,j)}}{\alpha_k^{(j)}} \sin(\alpha_k^{(j)} t) \quad (r = \overline{2,5});$$

$$\beta_k^{(2,j)} = \frac{-1}{\alpha_k^{(1)2} - \alpha_k^{(j)2}}; \quad \beta_k^{(\rho,j)} = \frac{\lambda_k^{(\rho)} - \alpha_k^{(j)2}}{\alpha_k^{(1)2} - \alpha_k^{(j)2}};$$

$$(1, j = \overline{1,2}; \quad 1 \neq j; \quad \rho = \overline{3,5}).$$

Тут  $\alpha_k^{(j)}$  ( $j = \overline{1,2}$ ) – модулі уявних коренів бікватратного рівняння  $D_k(s) = 0$ .

У випадку електромеханічного навантаження перетворювача функції  $q_0(t)$  і  $V_0(t)$ , що входять в (10), вважаються заданими. Якщо ж п'єзоактивний шар перебуває в режимі прямого п'єзо ефекту (має місце режим «холостого ходу»), то  $V_0$  – невідома. Її значення залежить від деформованого стану оболонки і обчислюється на підставі граничної умови (4''), яка після підстановки в нього виразів (5) прийме вигляд:

$$V_0(t) = \frac{\delta_1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} v_k \left[ a_k(t) \cdot (1 + \zeta_p \xi_k^{(5)2}) + \right.$$

$$\left. + b_k(t) \cdot \xi_k^{(5)} \right]. \quad (11)$$

Подальше виключення невідомої  $V_0$  з (10) з використанням рівності (11) приведе до нескінченної системи інтегральних рівнянь Вольтерри 2-го роду для коефіцієнтів  $a_k(t)$  і  $b_k(t)$ :

$$a_k - \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \left[ \frac{\delta_1}{2} v_n (1 + \zeta_p \xi_n^{(5)2}) v_k \xi_k^{(4)} I_k^{(4)} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} b_n * \left( \frac{\delta_1}{2} v_n \xi_n^{(5)} v_k \xi_k^{(4)} I_k^{(4)} \right) = q_0 * (f_k I_k^{(3)});$$

$$b_k - \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \left[ \frac{\delta_1}{2} v_n (1 + \zeta_p \xi_n^{(5)2}) v_k \xi_k^{(5)} I_k^{(5)} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} b_n * \left( \frac{\delta_1}{2} v_n \xi_n^{(5)} v_k \xi_k^{(5)} I_k^{(5)} \right) = q_0 * (f_k \xi_k^{(2)} I_k^{(2)}). \quad (12)$$

Її розв'язання може бути реалізоване чисельно з використанням класичних квадратурних формул, зокрема формули середніх прямокутників. Загалом, структура даної системи дозволяє звести її розв'язок до рекурентного розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка може бути записана в матричній формі в такий спосіб

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}_m = \mathbf{Y}_m \quad (m = \overline{1, M}),$$

$$\{\mathbf{A}\}_{k,n} = \phi_{k,n} - \int_0^{\Delta t} \frac{\delta_1}{2} v_n (1 + \zeta_p \xi_n^{(5)2}) v_k \xi_k^{(4)} I_k^{(4)}(\tau) d\tau \quad ; \quad \{\mathbf{A}\}_{k,n+N} = - \int_0^{\Delta t} \frac{\delta_1}{2} v_n \xi_n^{(5)} v_k \xi_k^{(4)} I_k^{(4)}(\tau) d\tau ;$$

$$\{\mathbf{A}\}_{k+N,n} = - \int_0^{\Delta t} \frac{\delta_1}{2} v_n (1 + \zeta_p \xi_n^{(5)2}) v_k \xi_k^{(5)} I_k^{(5)}(\tau) d\tau \quad ; \quad \{\mathbf{A}\}_{k+N,n+N} = \phi_{k+N,n+N} - \int_0^{\Delta t} \frac{\delta_1}{2} v_n \xi_n^{(5)} v_k \xi_k^{(5)} I_k^{(5)}(\tau) d\tau ;$$

$$\{\mathbf{Y}_m\}_k = \int_0^{m\Delta t} q_0(\tau) f_k I_k^{(3)}(m\Delta t - \tau) d\tau + \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{n=1}^N \int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t} \frac{\delta_1}{2} v_n \left[ a_{n,p} (1 + \zeta_p \xi_n^{(5)2}) + b_{n,p} \xi_n^{(5)} \right] v_k \xi_k^{(4)} I_k^{(4)}(m\Delta t - \tau) d\tau ;$$

$$\{\mathbf{Y}_m\}_{k+N} = \int_0^{m\Delta t} q_0(\tau) f_k \xi_k^{(2)} I_k^{(2)}(m\Delta t - \tau) d\tau + \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{n=1}^N \int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t} \frac{\delta_1}{2} v_n \left[ a_{n,p} (1 + \zeta_p \xi_n^{(5)2}) + b_{n,p} \xi_n^{(5)} \right] v_k \xi_k^{(5)} I_k^{(5)}(m\Delta t - \tau) d\tau ;$$

де  $N$  – кількість утримуваних у розвиненнях (5)–(7) членів ( $k, n = \overline{1, N}$ );  $M$  – кількість кроків за часом ( $M\Delta t = T_{inv}$ ;  $T_{inv}$  – час дослідження;  $\Delta t$  – крок дискретизації часової координати при використанні методу квадратур);  $\phi_{k,n}$  – символ Кронекера.

Маючи значення  $a_{n,m}$  і  $b_{n,m}$  на наступному етапі здійснюється їх підстановка в співвідношення (5) і (11) для обчислення як компонент вектора переміщень ( $w(z,t)$ ,  $u_0(z,t)$ ), так і різниці потенціалів  $V_0(t)$  між розімкнутими електродами п'єзоелектричного шару.

де  $\mathbf{X}_m = [a_{1,m} \dots a_{N,m} \quad b_{1,m} \dots b_{N,m}]^T$  –  $(2N \times 1)$  матриця-стовбець, який містить значення шуканих коефіцієнтів ( $a_{n,m} = a_n(m\Delta t)$ ;  $b_{n,m} = b_n(m\Delta t)$ );  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{Y}_m$  –  $(2N \times 2N)$  і  $(2N \times 1)$  матриці, елементи якої визначаються за формулами:

#### 4. Числові результати та їх аналіз

Числові дані отримані для біморфної оболонки безрозмірної довжини  $l = 2R_0$ , яка складена з шару п'єзокераміки марки PZT-5 товщиною  $h_p = 0.04R_0$  і шару титанового сплаву VT-6 ( $h_m = h_p/2$ ). Матеріальні характеристики наведено в [3]. При виконанні розрахунків у розвиненнях (5)–(7) утримано 60 членів, що забезпечує наближення до суми з погрішністю не більш 2%. Точність розрахунків також контролювалася варіюванням кроку дискретизації часового інтервалу  $\Delta t$  в методі квадратур.

На рис. 1 суцільною кривою представлені обчислені за формулами (6) і (10) радіальні коливання точки  $z = 0.5l$  у випадку дії

на оболонку з короткозамкненими електродами ( $V_0=0$ ) механічного навантаження східчастого профілю ( $q_0(t)=H(t)$ ). При цьому вважається, що навантаження рівномірно розподілене на області зовнішньої поверхні оболонки із границями  $z_1=0.25l$  і  $z_2=0.75l$ .

Штрихова крива на цьому рисунку ілюструє коливання оболонки в досліджуваній точці ( $z=0.5l$ ) при миттєвому прикладанні до суцільних електродів п'єзоактивного шару одиничного електричного навантаження ( $V_0(t)=H(t)$ ,  $q_0=0$ ).

Представлені на рис. 1 криві свідчать, що при електромеханічному східчастому навантаженні оболонка здійснює коливання

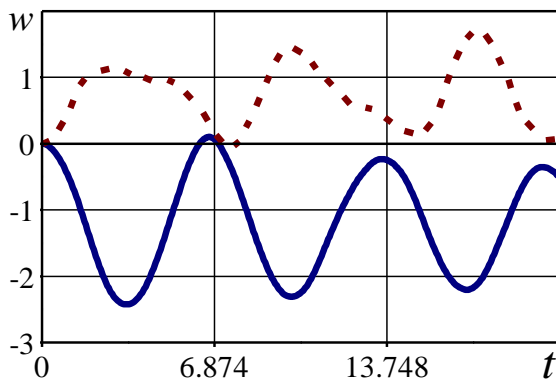


Рис. 1. Деформація оболонки при східчастому електромеханічному навантаженні

Рисунок 2 ілюструє різницю потенціалів  $V_0(t)$  у випадку розімкнутих електродів п'єзокерамічного шару при дії розглянутого вище механічного навантаження –  $q(z,t)=H(t) \cdot [H(z-z_1) - H(z-z_2)]$ . При цьому графік функції  $w(0.5l,t)$ , обчислений на основі (6) і (12), практично збігається (з точністю до товщини лінії) із представленою на рис. 1 суцільною кривою. Тут доречно відзначити, що виконані чисельні експерименти показали, що з прийнятною точністю (відносна погрішність для максимальних значень радіального переміщення не перевищує 1%) визначення  $a_k(t)$  і  $b_k(t)$  у цьому випадку може бути виконане не з системи рівнянь (12), а безпосередньо з рівностей (10), у яких функцію  $V_0(t)$  слід прийняти рівною нулеві:

відносно деякого статичного деформованого стану, що відображає властиві лінійним нестационарним завданням механіки характерні риси. Період зазначених коливань близький до значення  $2\pi/\alpha_{1,1}$ , де  $\alpha_{1,1}$  – частота основної моди коливань оболонки ( $\alpha_{1,1}=0.914$ ). При цьому при електричному збудженні оболонки має місце більш складний характер зміни в часі радіальних переміщень, ніж при механічному, що обумовлене наявністю похідних по просторовій координаті в правій частині розрахункової системи диференціальних рівнянь руху оболонки (1). Водночас порядок максимальних деформацій оболонки при її механічному і електричному безрозмірному одиничному навантаженні є порівняльним.

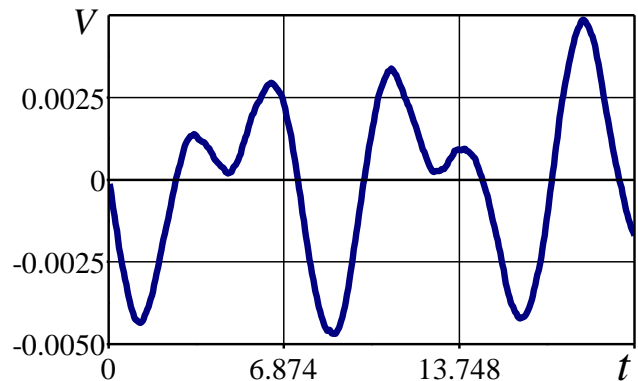


Рис. 2. Різниця потенціалів між розімкненими електродами оболонки

$$a_k(t) = \int_0^t q_0(\tau) f_k I_k^{(3)}(t-\tau) d\tau$$

$$b_k(t) = \int_0^t q_0(\tau) f_k \xi_k^{(2)} I_k^{(2)}(t-\tau) d\tau$$

Загалом, з аналізу представлених на рис. 1 і рис. 2 кривих випливає, що різниця потенціалів між електродами досліджуваної оболонки в режимі прямого п'єзоелектричного ефекту суттєво менша різниці потенціалів, необхідної для збудження коливань оболонки з порівняльними за максимальними значенням деформаціям. А це свідчить про слабку ефективність використання обраного варіанта закріплення торців досліджуваного циліндричного перетворювача та схеми його електродування в якості джерела електричного сигналу. Покращення ефективності електромеханічного перетворення

енергії можливо за рахунок секціонування струмопровідного покриття і/або заміни варіанта граничних умов механічної групи (зокрема, вільні границі). Для розв'язання задачі у такій постановці можуть бути використані отримані в даній роботі результати. Також, з врахуванням викладених у роботі [6] матеріалів, вони можуть бути узагальнені на випадок невісесиметричного електромеханічного навантаження оболонки.

### 5. Висновки

У роботі отримано розв'язок задачі про нестационарне деформування двошарового (метал-п'єзокераміка) електропружного перетворювача у вигляді циліндричної оболонки скінченної довжини з шарнірно закріпленими торцями. З використанням розв'язання шуканих функцій у ряди Фур'є та перетворення Лапласа за часовою координатою задача зведена до виразів для коефіціє-

нтів зазначених розвинень (різниця потенціалів між суцільними електродами відома) або до нескінченної системи інтегральних рівнянь (різниця потенціалів невідома), яка розв'язується чисельно методом усикання. Аналіз результатів виконаних чисельних експериментів показав слабку ефективність розглянутого перетворювача та обраної комбінації граничних умов у якості джерела електричного сигналу.

Отримані результати можуть бути використані при розв'язанні прикладних задач активного керування нестационарними коливаннями конструктивних елементів у вигляді циліндричних оболонок скінченної довжини. Представлені в даній роботі співвідношення можуть бути узагальнені на випадок невісесиметричного механічного навантаження біморфної оболонки та секціонування струмопровідного покриття її електропружного шару.

### Література

1. Guz A. N., Kubenko V. D., Babaev A. E. Dynamics of shell systems interacting with a liquid. *Int. Appl. Mech.* 2002. Vol. 38, Iss. 3. P. 260–301. DOI: 10.1023/A:1016073909775.
2. Karlash V. L. Resonant electromechanical vibrations of piezoelectric shells of revolution (review). *Int. Appl. Mech.* 2008. Vol. 44, Iss. 4. P. 361–387. DOI: 10.1007/s10778-008-0050-1.
3. Kubenko V. D., Yanchevskii I. V. Vibrations of a nonclosed two-layer spherical electroelastic shell under impulsive electromechanical loading. *Int. Appl. Mech.* 2013. Vol. 49, Iss. 3. P. 303–314. DOI: 10.1007/s10778-013-0568-8.
4. Кубенко В. Д., Янчевский И. В. Нестационарные неосесимметричные колебания цилиндрической оболочки металл-пьезокерамика. *Зб. наук. праць «Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла»*. 2011. Вип. 12. С. 188–196.
5. Rudnitskii S. I., Sharapov V. M., Shul'ga N. A. Vibrations of a bimorphic disk transducer of the metal-piezoceramic type. *Int. Appl. Mech.* 1990. Vol. 26, Iss. 10. P. 973–980. DOI: 10.1007/BF00888849.
6. Янчевский И. В., Бабаев А. А. Уравнения нестационарных колебаний электроупругих конической и цилиндрической оболочек конечной длины. *Вісник ЗНУ. Фіз.-мат. науки*. 2017. № 2. С. 332–338.
7. Qiu J., Ji H. The application of piezoelectric materials in smart structures. *Int. J. of Aeronautical & Space Sc.* 2010. Vol. 11, No. 4. P. 266–284. DOI:10.5139/IJASS.2010.11.4.266.
8. Wang H. M., Ding H. J., Chen Y. M. Dynamic solution of a multilayered orthotropic piezoelectric hollow cylinder for axisymmetric plane strain problems. *Int. J. Sol. and Struct.* 2005. Vol. 42, Iss. 1. P. 85–102.
9. Yanchevskii I. V. Nonstationary deformation of an electroelastic nonclosed cylindrical shell under mechanical and electric loading. *Int. Appl. Mech.* 2013. Vol. 49, Iss. 4. P. 475–481.
10. Yang J. S. Piezoelectric transformer structural modeling – A review. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 2007. Vol. 54, No. 6. P. 1154–1170.

### References

1. Guz, A. N., Kubenko, V. D. & Babaev, A. E. (2002). Dynamics of shell systems interacting with a

- liquid. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 38, Iss. 3, pp. 260–301. DOI: 10.1023/A:1016073909775.
2. Karlash, V. L. (2008). Resonant electromechanical vibrations of piezoelectric shells of revolution (review). *Int. Appl. Mech.*, Vol. 44, Iss. 4, pp. 361–387. DOI: 10.1007/s10778-008-0050-1.
  3. Kubenko, V. D. & Yanchevskii, I. V. (2013). Vibrations of a nonclosed two-layer spherical electroelastic shell under impulsive electromechanical loading. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 49, Iss. 3, pp. 303–314. DOI: 10.1007/s10778-013-0568-8.
  4. Kubenko, V. D. & Yanchevskiy, I. V. (2011). Nonstationary nonaxisymmetric vibrations of metal-piezoceramics cylindrical shell. *Zb. nauk. prac «Metody rozviazuvannia prykladnyh zadach mekhaniky deformivnogo tverdogo tila»*, Iss. 12, pp. 188–196.
  5. Rudnitskii, S. I., Sharapov, V. M. & Shul'ga N. A. (1990). Vibrations of a bimorphic disk transducer of the metal-piezoceramic type. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 26, Iss. 10, pp. 973–980. DOI: 10.1007/BF00888849.
  6. Yanchevskiy, I. V. & Babaev A. A. (2017). Equations of non-stationary oscillations of electroelastic conic and cylindrical shells of finite length. *Visnyk ZNU. Fiz.-mat. nauky*, No. 2, pp. 332–338.
  7. Qiu, J. & Ji, H. (2010). The application of piezoelectric materials in smart structures. *Int. J. of Aeronautical & Space Sc.*, Vol. 11, No. 4, pp. 266–284. DOI:10.5139/IJASS.2010.11.4.266.
  8. Wang, H. M., Ding, H. J. & Chen, Y. M. (2005). Dynamic solution of a multilayered orthotropic piezoelectric hollow cylinder for axisymmetric plane strain problems. *Int. J. Sol. and Struct.*, Vol. 42, Iss. 1, pp. 85–102. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2004.06.059.
  9. Yanchevskii, I. V. (2013). Nonstationary deformation of an electroelastic nonclosed cylindrical shell under mechanical and electric loading. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 49, Iss. 4, pp. 475–481. DOI: 10.1007/s10778-013-0581-y.
  10. Yang, J. S. (2007). Piezoelectric transformer structural modeling – A review. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, Vol. 54, No. 6, pp. 1154–1170. DOI: 10.1109/TUFFC.2007.369.

УДК 519.6

## ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У «ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ. ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ»

А. А. Автора<sup>1</sup>, А. Б. Авторб<sup>1</sup>, Б. Б. Авторв<sup>2</sup><sup>1</sup>Запорізький національний університет,<sup>2</sup>Науково-дослідний інститут супертехнологій  
avtor@znu.edu.ua**Ключові слова:**

Математика, механіка, математична модель, динаміка, інформаційні технології.

Текст анотації українською мовою повинен бути не менш 1800 знаків з пробілами. В анотації необхідно коротко висвітлити суть задачі, що розв'язується, особливості запропонованих наукових підходів або методів, розкрити наукову новизну отриманих результатів.

## ЗАГОЛОВОК СТАТТІ НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ

О. О. Автора<sup>1</sup>, О. Б. Авторб<sup>1</sup>, Б. Б. Авторв<sup>2</sup><sup>1</sup>Запорожский национальный университет,<sup>2</sup>Научно-исследовательский институт супертехнологий,  
znu@znu.edu.ua**Ключевые слова:**

математика, механика, математическая модель, динамика, информационные технологии.

Текст аннотации должен быть объемом не менее 1800 знаков с пробелами. В аннотации необходимо кратко отразить суть решаемой задачи, особенности предложенных научных подходов или методов, раскрыть научную новизну полученных результатов.

## THE HEADLINE OF THE ARTICLE IN ENGLISH

N. Authora<sup>1</sup>, N. Authorb<sup>1</sup>, M. Authorc<sup>2</sup><sup>1</sup>Zaporizhzhia National University,<sup>2</sup>Scientific Research Institute of Super Technologies  
znu@znu.edu.ua**Key words:**

mathematics, mechanics, mathematical model, dynamics, information technologies.

The abstract in English should be greater than 1800 characters (with spaces). In the abstract, you should briefly describe a problem, used scientific approaches or methods, scientific novelty.

### 1. Оформлення тексту статті

Для оформлення тексту статті рекомендується використовувати стильовий файл `template_math_ua.dot`, розміщений на сайті Видання.

Параметри сторінки: розмір паперу – А4, верхнє поле – 2 см, нижнє поле – 2 см, лівє поле – 3 см, правє поле – 1,5 см.

У першому рядку файлу з текстом статті необхідно вказати УДК (стиль – «УДК»). Шрифт: Times New Roman, 10 пунктів.

У другому рядку набирається заголовок статті на мові статті (стиль – «Заголовок статті»). Шрифт: Times New Roman, 14 пт, напівжирний, всі прописні. Абзац: вирівнювання – по лівому краю, перед – 6 пт, після – 0 пт, міжрядковий інтервал – полуторний.

Після заголовка на мові статті необхідно перерахувати авторів (стиль «Автори»). Для кожного учасника спочатку вказуються ініціали, потім прізвище (наприклад, «І. І. Іванов»). Шрифт: Times New

Roman, 12 пт, напівжирний. Абзац: вирівнювання – по лівому краю, перед – 0 пт, після – 3 пт, міжрядковий інтервал – одинарний.

Потім необхідно вказати місце роботи авторів і e-mail автора, відповідального за листування (стиль – «Місце роботи автора»). Шрифт: Times New Roman, 11 пт, курсив. Абзац: вирівнювання – по лівому краю, перед – 0 пт, після – 6 пт, міжрядковий інтервал – одинарний.

Далі в таблиці з невидимими межами (крім нижньої), що складається з двох стовпців і одного рядка, вказуються ключові слова (перший стовпець, стиль – «Ключові слова») і анотація (стиль – «Загальні відомості»). Перелік ключових слів повинен починатися зі словосполучення «Ключові слова», виділеного напівжирним, за яким слідує мінімум 5 ключових слів. Анотація мовою статті повинна містити не менше 1800 символів (з пробілами).



Назва статті, автори, місце роботи, ключові слова, анотація іншими мовами оформлюються аналогічно наведеному вище опису українською мовою.

Основний текст статті необхідно оформляти з використанням шрифту Time New Roman, 12 пт (стиль «Звичайний»). Абзац: вирівнювання – по ширині, відступ зліва – 0 см, відступ справа – 0 см, перший рядок – відступ на 0,7 см, інтервал перед текстом – 0 см, інтервал після тексту – 0 см, міжрядковий інтервал – одинарний. Верстка основного тексту виконується в дві колонки (ширина – 8 см, проміжок – 0,5 см).

Основний текст необхідно розбити на розділи. Кожен розділ повинен починатися з заголовка розділу (стиль «Заголовок розділу»). Шрифт: Times New Roman, 12 пт, напівжирний. Абзац: вирівнювання – по центру, інтервал перед текстом – 6 пт, інтервал після тексту – 3 пт, міжрядковий інтервал – одинарний.

## 2. Структура статті

Матеріали в статті повинні бути структуровані. Стаття обов'язково повинна містити наступні розділи:

- вступ;
- аналіз стану проблеми;
- мета і завдання дослідження;
- матеріали і методи дослідження (даний розділ необхідно назвати таким чином, щоб була зрозуміла суть розроблених або використаних методів, підходів, методологій);

- результати дослідження;
- обговорення результатів;
- висновки;
- подяки (при наявності таких);
- література;
- references.

Всі розділи необхідно нумерувати. Розділи можуть містити підрозділи, з номерами в рамках розділу. Наприклад, розділ «4. Метод геометричного моделювання властивостей поверхонь», може містити підрозділ «4.1. Логічне конструювання поверхні».

В кінці статті необхідно на трьох мовах (українській, російській і англійській) вказати такі відомості про авторів:

- прізвище, ім'я та по батькові (повністю);
- місце роботи, посада;
- науковий ступінь і вчене звання.

## 3. Вимоги до вмісту анотацій

Анотація повинна повною мірою відображати суть статті. Порядок викладення в анотації повинен відповідати порядку викладення матеріалів у статті. Необхідно коротко спочатку пояснити суть розв'язаної задачі. Потім пояснити особливості застосованих або розроблених методів, підходів, методик. У заключній частині анотації необхідно описати отримані результати і наукову новизну.

Текст анотацій повинен мати якісний переклад та відповідати оригінальній анотації.

## 4. Оформлення рисунків

Рисунки повинні наочно ілюструвати суть викладеного матеріалу. Рисунок необхідно розташувати в наступному абзаці після згадки його в тексті

(наприклад, рис. 1). Якщо ширина рисунка більше ширини колонки, то необхідно його вставити, використовуючи розрив колонки. Рекомендується при наявності великих рисунків розташовувати їх підтискаючи або до верхньої, або до нижньої границі сторінки.

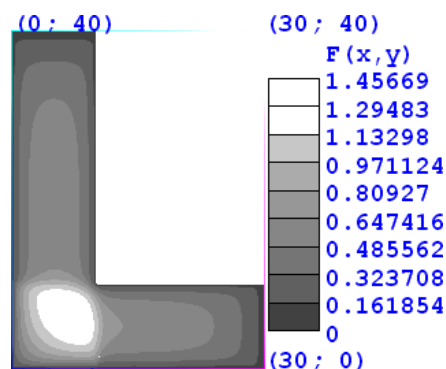


Рис. 1. Приклад рисунка

Рисунки вирівнюються по центру (колонки або сторінки) з використанням стилю «Рисунок». Після кожного рисунка розміщується підпис (стиль – «Підпис до рисунка»), яка складається з номера рисунка і назви, наприклад, «Рис. 1. Модель поверхні літального апарату» (Слово «Рис.» і номер рисунка виділяються напівжирним).

Якщо ширина рисунка більше ширини колонки, то необхідно його вставити, використовуючи розрив колонок. Рекомендується при наявності великих рисунків розташовувати їх підтискаючи або до верхньої, або до нижньої границі сторінки.

## 5. Оформлення таблиць

Таблицю необхідно розмістити в наступному абзаці після згадування її в тексті (наприклад, табл. 1).

Таблиця 1. Параметри НДС

	u, м	v, м	w, м
Мінімум	0	0	0
Максимум	0,57	0,24	0,285

Таблиці вирівнюються по ширині (колонки або сторінки), заповнюючи весь доступний простір. Перед кожною таблицею розміщується підпис (стиль – «Підпис до таблиці»), який складається з номера таблиці і назви, наприклад, «Табл. 1. Розподіл значень параметрів напружено-деформованого стану» (Слово «Табл.» і номер таблиці виділяються напівжирним).

Якщо ширина таблиці більше ширини колонки, то необхідно її вставити, використовуючи розрив колонок. Рекомендується при наявності великих таблиць розташовувати їх підтискаючи або до верхньої, або до нижньої межі сторінки.

## 6. Оформлення формул

Всі формули, що мають самостійне значення, повинні розташовуватися в окремому рядку і мати номер. Формули вирівнюються по центру рядка, а її номер по правому краю. Для оформлення формул необхідно використовувати стиль «Формула» (вирівнювання – по ширині, відступ перед текстом – 3 пт, відступ після – 3 пт).

$$D_f = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad D_c = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Якщо ширина формули більше ширини колонки, то необхідно її вставити, використовуючи розрив колонок.

Розміри формул повинні відповідати розміру шрифту тексту статті.

### 7. Вимоги до вмісту розділу «Обговорення результатів»

У розділі «Обговорення результатів» необхідно виконати кількісне і якісне співставлення отриманих результатів з роботами, опублікованими раніше. При цьому необхідно явно посилатися на джерела, які використовуються для співставлення. З вмісту цього розділу повинно бути зрозуміло місце результатів дослідження серед інших робіт.

### 8. Вимоги до оформлення літератури і References

Література розміщується в кінці статті в одну колонку. Для оформлення літератури необхідно використовувати ДСТУ 8302 до: 2015.

### Література

1. Аніловська Г. Я., Марушко Н. С., Стоколоса Т. М. Інформаційні системи і технології у фінансах: навч. посіб. Львів: Магнолія 2006, 2015. 312 с.
2. Операційне числення: навч. посіб. / С. М. Гребенюк та ін. Запоріжжя: ЗНУ, 2015. 88 с.
3. Підготовка докторів філософії (PhD) в умовах реформування вищої освіти: матеріали Всеукр. наук.-практ. конф., м. Запоріжжя, 5-6 жовт. 2017 р. Запоріжжя: ЗНУ, 2017. 216 с.
4. Левчук С. А. Матриці Гріна рівнянь і систем еліптичного типу для дослідження статичного деформування складених тіл: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.02.04. Запоріжжя, 2002. 150 с.
5. Люмінісцентний матеріал: пат. 25742 Україна: МПК6 C09K11/00, G01T1/28, G21H3/00. № 200701472; заявл. 12.02.07; опубл. 27.08.07, Бюл. № 13. 4 с.
6. Левчук С. А., Хмельницький А. А. Дослідження статичного деформування складених циліндричних оболонок за допомогою матриць типу Гріна. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя, 2015. № 3. С. 153–159.
7. Bletska D. I., Glukhov K. E., Frolova V. V. Electronic structure of 2H-SnSe<sub>2</sub>: ab initio modeling and comparison with experiment. *Semiconductor Physics Quantum Electronics & Optoelectronics*. 2016. Vol. 19, No 1. P. 98–108.
8. Яцків Я. С., Маліцький Б. А., Бублик С. Г. Трансформація наукової системи України протягом 90-х років ХХ століття: період переходу до ринку. *Наука та інновації*. 2016. Т. 12, № 6. С. 6–14. DOI: <https://doi.org/10.15407/scin12.06.006>.

### References

1. Anilovs'ka, H. YA., Marushko, N. S. & Stokolosa, T. M. (2015). Information systems and technologies in finance: textbook. tool. Lviv: Magnolia 2006.
2. ...

Для публікації автору необхідно подати текст статті у електронному варіанті та файл з відомостями про авторів на електронну адресу редколегії.

**Адреса редакції:** Україна, 69600, м. Запоріжжя, МСП-41, вул. Жуковського, 66

**Адреса електронної пошти:** [editor@znu.edu.ua](mailto:editor@znu.edu.ua)

**Контактні телефони:**

(8-061)228-75-21 – редакційно-видавничий відділ ЗНУ (IV корпус, ауд. 323)

(8-061)289-12-52 – редколегія «Вісника Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки» (I корпус, ауд. 216)

Після списку літератури обов'язково наводиться розділ «References» відповідно до міжнародного стандарту APA. Рекомендації щодо оформлення «References» можна знайти за таким посиланням: <http://visnykznu.org/docs/oformlennya-References-dlya-statti--fiziko-matematichni-visnik.pdf>.

### 9. Списки

Маркований список – стиль «Список з маркерами»:

– приклад;

– ще приклад.

Нумерований список 1 – стиль «Список з номерами 1»:

1. Приклад.

2. Приклад.

Нумерований список 2 – стиль «Список з номерами 2»:

1) Приклад

2) Приклад

Список з буквами – стиль «Список з буквами»:

a) приклад;

b) приклад.

Список з римськими цифрами – стиль «Список з римськими цифрами»:

I. Приклад.

II. Приклад.

## ПРОЦЕС РЕЦЕНЗУВАННЯ

До публікації у журналі всі рукописи спочатку розглядаються редакторами на предмет оцінки їх відповідності тематиці і вимогам журналу. Після рішення редакторів представлені рукописи спрямовуються експертам, працюючим у відповідній області. **Рукопис проходить одностороннє сліпе рецензування:** автори не знають рецензента, рецензенти знають авторів.

Рецензування існує для того, щоб журнали публікували високоякісні наукові дослідження. Зміни та покращення статті є частиною процесу публікації. **Рецензування є позитивним процесом і невід'ємною частиною наукової публікації,** що підтверджує високу якість наукових статей. Рецензенти, які вкладають свій час для поліпшення вашої статті, є експертами з тематики наукового дослідження, викладеного у статті.

У процесі рецензування матеріал статті має стати більш достовірним. Рецензенти можуть вказати на недоліки у роботі, які вимагають більш докладного пояснення або додаткових досліджень і експериментів. Матеріал статті повинен стати більш доступним для сприйняття. Якщо якісь моменти у роботі є важкими для сприйняття читачами, рецензенти можуть попросити їх виправити. Рецензенти розглядають дослідження на предмет важливості в рамках своєї предметної області. Інший аспект наявності політики рецензування у журналі: редакція має бути впевненою, що публікує тільки якісні матеріали у своєму виданні.

### Поширені причини для відмови публікації

Відмова в публікації статті, можлива, якщо:

- стаття неправильно структурована;
- стаття недостатньо кваліфіковано деталізована для розуміння постановки задачі та аналізу, запропонованих авторами;
- у статті недостатньо сформульована наукова новизна;
- відсутність достатньої кількості актуальних посилань на літературні джерела;
- стаття містить теорії, концепції або висновки, які не повністю підкріплені даними аналізу, аргументами, наданою інформацією;
- стаття не забезпечує досить докладний опис методів і матеріалів, які б дозволили іншим ученим повторити теоретичне дослідження та експеримент;
- у статті відсутні чіткі описи чи пояснення гіпотез, що перевірялись, описи експериментів, прикладів статистичних або експериментальних вибірок;
- у статті недостатньо описано методику проведення експериментів;

- зауваження до якості мови написання.

### Повторний розгляд статті та відповідь на зауваження рецензента

За повторного перегляду статті та відповіді на зауваження рецензентів необхідно:

- звернути увагу на всі зауваження, які надані редактором і рецензентом;
- описати всі зміни в статті у зворотному листі;
- виконати додаткові експерименти або аналізи, які рекомендує рецензент, або дати докладне обґрунтування, чому цього не потрібно робити;
- у зворотному листі описати окремо всі моменти, в яких ви згодні з рецензентом і в яких не згодні;
- забезпечити ввічливе і наукове обґрунтування моментів, з якими ви не згодні;
- чітко зазначити всі зміни у статті, які ви внесли;
- повернути переглянутий рукопис і зворотний лист в строк, встановлений редактором.

Пам'ятайте, що рецензент є експертом у вашій предметній області. Якщо пропозиції, які вносить рецензент не вірні, то це, ймовірно, тому що рецензент не вірно зрозумів вашу роботу. Це значить, що ваша робота написана важко для сприйняття, а значить і читач не зможе належним чином розібратися у вашому дослідженні. Таким чином, вам слід зробити текст статті більш чітким і зрозумілим для читача.

Редакція не надає персональних даних рецензента, усе спілкування відбувається через редколегію журналу.

Важливо бути наполегливим при спробі опублікувати статтю. Якщо вчасно, коректно і науково обґрунтовано відповідати на зауваження редакторів та рецензентів, можна в подальшому домогтися публікації статті.

Краще не обирати інший журнал, доки не сталася одна з наступних подій:

- редактор дав відповідь, що тематика вашої роботи в корені не відповідає тематиці журналу;
- редактор дає відмову вашому рукопису без права його повторного надання;
- Вашому рукопису дали відмову навіть після того, як ви відповіли на всі виправлення і коментарі рецензента;
- Ви отримали відмову від рецензента.

Публікація є складним процесом, тому ви повинні бути готовим працювати над своєю статтею, відповідаючи на коментарі як редакторів, так і рецензентів, і вносити необхідні виправлення у вашу роботу.

## PROCESS OF REVIEW

Before publication in the journal, all manuscripts are initially considered by the editors to evaluate their compliance with the topics and requirements of the journal. After the editors' decision, the submitted manuscripts are sent to experts working in the relevant field. The manuscript passes a one-sided blind review: the authors do not know the reviewer, reviewers know the authors.

There is a review to ensure that journals publish high-quality research. Changes and improvements to the article are part of the publishing process. Reviewing is a positive process and an integral part of scientific publication, which confirms the high quality of scientific articles. Reviewers who invest time to improve your article are experts on the subject of scientific research outlined in the article.

In the review process, the material of the article should become more reliable. Reviewers may indicate disadvantages in the work that require more detailed explanation or additional research and experiments. The material of the article should become more accessible for perception. If any moments in the work are difficult for readers to perceive, reviewers may ask to correct them. Reviewers consider research on relevance within their subject area. Another aspect of the existence of a review policy in magazines: the editorial should be sure that publishes only qualitative materials in their publication.

### Common Reasons to Discard Publication

Refusal to publish an article is possible in the following situations:

- the article is incorrectly structured;
- the article is insufficiently qualified in detail to understand the problem statement and analysis proposed by the authors;
- scientific novelty in the article is not sufficiently formulated;
- lack of sufficient number of actual references to literary sources;
- the article contains theories, concepts or conclusions that are not fully supported by the analysis data, the arguments provided by the information;
- the article does not provide a sufficiently detailed description of the methods and materials that would allow other scientists to repeat the theoretical study and experiment;
- the article does not contain clear descriptions or explanations of the hypotheses that were tested, description of experiments, examples of statistical or experimental samples;
- the article does not describe enough the technique of conducting experiments;
- remarks on the quality of the writing language.

### Repeated review of the article and the response to the reviewer's remarks

For reconsideration of the article and responses to comments by reviewers, you must:

- pay attention to all comments provided by the editor and reviewers;
- describe all changes in the article in the reverse letter;
- perform additional experiments or analyzes that the reviewer recommends, or provide a detailed justification why this does not need to be done;
- in a return letter describe separately all the points in which you agree with the reviewer and which do not agree;
- provide a polite and scientific justification of the moments you disagree with;
- clearly state all changes in the article you have made;
- return the revised manuscript and the letter back in time set by the editor.

Remember that the reviewer is an expert in your subject area. If the suggestions made by the reviewer are not correct, then this is probably because the reviewer did not understand your work correctly. This means that your work is written hard to perceive, and therefore the reader will not be able to properly understand your research. Thus, you should make the text of the article more clear and understandable to the reader.

The editorial staff does not provide personal data to the reviewer, all communication takes place through the editorial board of the journal.

It's important to be persistent when you try to publish an article. If timely, correctly and scientifically substantiated to respond to the comments of editors and reviewers, you can further achieve the publication of the article.

It's better not to choose another journal until one of the following events has occurred:

- the editor replied that the topics of your work are fundamentally not relevant to the topic of the magazine, the editor refuses your manuscript without the right to re-submit it;
- Your manuscript was refused even after you answered all the corrections and comments by the reviewer;
- You have received a refusal from the reviewer.

Publication is a complex process, so you should be ready to work on your article, responding to comments from both editors and reviewers, and make the necessary corrections to your work.

**ДЛЯ ПОДАТОК**

Збірник наукових праць

Вісник Запорізького національного університету  
Фізико-математичні науки  
**№ 2, 2019**

Технічний редактор – *Н. В. Непритворна*

Верстка, дизайн-проробка, оригінал-макет і друк виконані  
в редакційно-видавничому відділі  
Запорізького національного університету  
тел. (061) 289-12-98

Підписано до друку 12.02.2020. Формат 60 × 90/8.  
Папір Data Copy. Гарнітура «Таймс».  
Умовн.-друк. арк. 23,8  
Замовлення № 48. Наклад 100 прим.

Запорізький національний університет  
69600, м. Запоріжжя, МСП-41  
вул. Жуковського, 66

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виготівників  
і розповсюджувачів видавничої продукції