

ISSN 2413-6549 (Print)  
ISSN 2518-1785 (Online)

Міністерство освіти і науки України  
Запорізький національний університет

Заснований  
у 1997 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію  
друкованого засобу масової інформації  
Серія КВ № 24766-14706Р від 25 березня 2021 р.

## Computer Science and Applied Mathematics

**Адреса редакції:**

вул. Жуковського 66, корп. 1, ауд. 216,  
м. Запоріжжя, Україна, 69060

**Телефон**

для довідок:  
+38 066 53 57 687

**№ 1, 2022**



Видавничий дім  
«Гельветика»  
2022

Computer Science and Applied Mathematics. Запоріжжя: Видавничий дім «Гельветика», 2022. № 1. 102 с.

Рекомендовано до друку та поширення через мережу Internet вченою радою ЗНУ (протокол засідання № 2 від 27.09.2022 р.)

На підставі Наказу Міністерства освіти і науки України № 886 від 02.07.2020 р. (додаток 4) журнал включено до Переліку наукових фахових видань України категорії «Б» у галузі фізико-математичних наук (113 – Прикладна математика, 121 – Інженерія програмного забезпечення, 122 – Комп'ютерні науки та інформаційні технології).

До 25 березня 2021 р. журнал виходив під назвою «Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки».

У зв'язку зі зміною назви журналу було внесено відповідні зміни до Переліку наукових фахових видань України на підставі Наказу Міністерства освіти та науки України № 735 від 29.06.2021 р. (додаток 3).

Журнал індексується в міжнародній наукометричній базі даних Index Copernicus

Статті у виданні перевірені на наявність плагіату за допомогою програмного забезпечення StrikePlagiarism.com від польської компанії Plagiat.pl.

#### **РЕДАКЦІЙНА РАДА:**

**Головний редактор** – Гоменюк С. І., доктор технічних наук, професор

**Відповідальні**

**редактори:**

– Стеганцев Є. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент

– Швидка С. П., кандидат фізико-математичних наук, доцент

#### **РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:**

- Гребенюк С. М. – доктор технічних наук, доцент (Україна)  
Грищак В. З. – доктор технічних наук, професор (Україна)  
Єрмолаєв В. А. – кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)  
Кеберле Н. Г. – кандидат технічних наук, доцент (Україна)  
Клименко М. І. – кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)  
Козін І. В. – доктор фізико-математичних наук, професор (Україна)  
Кудін О. В. – кандидат фізико-математичних наук (Україна)  
Панасенко Є. В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)  
Чопоров С. В. – доктор технічних наук, доцент (Україна)  
Шило Г. М. – доктор технічних наук, доцент (Україна)  
Breslavsky I. – PhD in Mechanics, Docent (Канада)  
Djakon R. – Dr.sc.ing., Professor, Academician (Латвія)  
Gerasimov T. – PhD in Mathematics, Docent (Німеччина)  
Kolakowski Z. – Doctor of Science in Engineering, Professor (Польща)

# ЗМІСТ

## РОЗДІЛ I. ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

<b>Макаров V. A., Kazakova A. V.</b> <i>ESTIMATION OF MAXIMUM LIKELIHOOD IN THE CONDITIONS OF INSPECTIONS OF THE CURRENT STATE</i> .....	5
<b>Гребенюк С. М., Морозова І. Ю.</b> <i>ПОВЗДОВЖНИЙ ЕФЕКТИВНИЙ МОДУЛЬ ПРУЖНОСТІ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ В УМОВАХ НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ</i> .....	14
<b>Дзундза Н. С., Зіновєєв І. В.</b> <i>ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ОРТОТРОПНОЇ ПІВПЛОЩИНИ В УМОВАХ ПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ</i> .....	23
<b>Діхтярук М. М., Кравчук О. А.</b> <i>ДОСЛІДЖЕННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОЇ СМУГИ ЗА ПІДСИЛЕННЯ СКІНЧЕННИМ ПРУЖНИМ СТРИНГЕРОМ</i> .....	31
<b>Діхтярук М. М., Ярецька Н. О., Кравчук О. А.</b> <i>ПЕРІОДИЧНЕ ПІДСИЛЕННЯ ДВОХ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ СМУГ СКІНЧЕННИМИ ПІДКРІПЛЮЮЧИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ</i> .....	39
<b>Мороз І. П.</b> <i>МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ХАРАКТЕРИСТИК P-I-N-СТРУКТУР, ЩО ВЗАЄМОДІЮТЬ З ВИСОКОЧАСТОТНИМ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИМ ВИПРОМІНЮВАННЯМ, МЕТОДАМИ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ</i> .....	48
<b>Онишкевич В. М., Барабаш Г. М.</b> <i>«ТРЕТСЬ ПІЛО» ЯК МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КОНТАКТНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ</i> .....	59

## РОЗДІЛ II. ІНЖЕНЕРІЯ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

<b>Латанська Л. О., Макарова Л. М., Нікітіна О. Ю., Нікітін О. В.</b> <i>МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЗАДАЧАХ ОЦІНЮВАННЯ РОЗМІРУ ПРИКЛАДНОГО ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ З ВІДКРИТИМ КОДОМ НА C#</i> .....	66
<b>Москалик Д. О., Антонюк Д. С., Вакалюк Т. А., Огінський Є. В., Ковалевський В. В.</b> <i>ОГЛЯД ЗАСТОСУВАНЬ ТЕОРІЇ ГРАФІВ У РОЗРОБЦІ ТА ОБСЛУГОВУВАННІ ПРОГРАМНИХ СИСТЕМ</i> .....	75
<b>Онуфрієнко Д. М., Тараненко Ю. К.</b> <i>ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ АДАПТИВНОГО ШУМУ НА ЕФЕКТИВНІСТЬ ДИСКРЕТНОЇ БЕЗПОРОГОВОЇ ВЕЙВЛЕТ-ФІЛЬТРАЦІЇ МОДУЛЬОВАНИХ СИГНАЛІВ</i> .....	83

## РОЗДІЛ III. КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ

<b>Bondarenko V. E., Karanfilov M. S.</b> <i>DECISION-MAKING BY THE GROUP OF EXPERTS REGARDING THE EVALUATION OF PARTICIPANTS OF STATE TENDERS</i> .....	92
---	----

# CONTENTS

## SECTION I. APPLIED MATHEMATICS

<b>Makarov V. A., Kazakova A. V.</b> <i>ESTIMATION OF MAXIMUM LIKELIHOOD IN THE CONDITIONS OF INSPECTIONS OF THE CURRENT STATE</i> .....	5
<b>Grebenyuk S. M., Morozova I. Y.</b> <i>LONGITUDINAL EFFICIENT MODULE OF ELASTICITY OF FIBER COMPOSITE MATERIAL UNDER NONLINEAR DEFORMATION CONDITIONS</i> .....	14
<b>Dzundza N. S., Zinovieiev I. V.</b> <i>RESEARCH OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THE ORTHOTROPIC HALF-PLANE UNDER THE PLANAR DEFORMATION CONDITIONS</i> .....	23
<b>Dikhtyaruk N. N., Kravchuk O. A.</b> <i>INVESTIGATION OF CONTACT INTERACTION WITH STRIPE WITH INITIAL STRESSES IF SHE REINFORCED BY THE ELASTIC THIN FINITE STRINGER</i> .....	31
<b>Dikhtyaruk N. N., Yarets'ka N. O., Kravchuk O. A.</b> <i>PERIODIC REINFORCEMENT OF TWO PRE-STRESSED STRIPS BY FINISHED SUPPORTING ELEMENTS</i> .....	39
<b>Moroz I. P.</b> <i>SIMULATION OF THE P-I-N-STRUCTURES CHARACTERISTICS INTERACTING WITH HIGH-FREQUENCY ELECTROMAGNETIC RADIATION BY PERTURBATION THEORY METHODS</i> .....	48
<b>Onyshkevych V. M., Barabash G. M.</b> <i>"THIRD BODY" AS A MATHEMATICAL MODEL OF CONTACT THERMOELASTICITY</i> .....	59

## SECTION II. SOFTWARE ENGINEERING

<b>Latanska L. O., Makarova L. M., Nikitina O. Y., Nikitin O. V.</b> <i>MATHEMATICAL MODELING IN PROBLEMS OF ESTIMATING THE SIZE OF APPLICABLE OPEN-SOURCE SOFTWARE IN C #</i> .....	66
<b>Moskalyk D. O., Antoniuk D. S., Vakaliuk T. A., Ohinskyi Ye. V., Kovalevskiy V. V.</b> <i>AN OVERVIEW OF USING GRAPH THEORY IN SOFTWARE SYSTEM DEVELOPMENT AND MAINTENANCE</i> .....	75
<b>Onufrienko D. M., Taranenko Yu. K.</b> <i>INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF ADAPTIVE NOISE ON THE EFFICIENCY OF DISCRETE THRESHOLDFUL WAVELET FILTRATION OF MODULATED SIGNALS</i> .....	83

## SECTION III. COMPUTER SCIENCES

<b>Bondarenko V. E., Karanfilov M. S.</b> <i>DECISION-MAKING BY THE GROUP OF EXPERTS REGARDING THE EVALUATION OF PARTICIPANTS OF STATE TENDERS</i> .....	92
---	----

# РОЗДІЛ І. ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

UDC 539.3

DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2022-1-01>

## ESTIMATION OF MAXIMUM LIKELIHOOD IN THE CONDITIONS OF INSPECTIONS OF THE CURRENT STATE

**Makarov V. A.**

*Doctor of Engineering Sciences, Docent  
Transport and Telecommunication Institute  
Lomonosov str., 1, LV-1019, Riga, Latvia  
makarovs.valerijs@gmail.com*

**Kazakova A. V.**

*Riga State Gymnasium No. 2  
Krisjana Valdemara str., 1, LV-1010, Riga, Latvia  
kazakova.anastasija@gmail.com*

**Key words:** *observations of current state, initial damage, fully censored samples, maximum likelihood method, distribution parameters, hypothesis testing.*

The article discusses the algorithm and methods of statistical processing of one type of grouped data – interval-censored samples with overlapping observation intervals. The samples are censored by the observation time interval of the measured value. The samples consist entirely of such interval observations.

The initial information was the data of one-time and multiple inspections of the structure in operation in order to detect damage in the form of cracks. The stage of appearance of the initial crack (macrocrack) in the zone of stress concentration is determined. A macrocrack, for objective reasons, cannot be directly detected during inspections. Examples of describing the time of formation of initial cracks in the form of interval-censored samples with intersecting observation intervals are presented.

The main focus was on the development of methods for statistical processing of the studied samples. The maximum likelihood method was applied for parametric estimation of the time of appearance of macrocracks. Basic maximum likelihood equations are obtained for distributions with location and scale parameters. The computational procedure of the accumulation method with the use of Fisher's information is applied. Expressions for calculating the variances of parameter estimates are obtained. An equation for checking the existence of a solution to the system of likelihood equations is presented. The appearance of macrocracks can have a different physical nature, for example, the accumulation of fatigue or instantaneous damage due to an overload exceeding the calculated one. Different physical nature implies different types of preventive work to prevent them and is described by different probabilistic models. A likelihood ratio criterion is proposed to test the statistical hypothesis about the situation of sudden appearance of macrocracks at a load exceeding the calculated one.

The results obtained show the features of the structure of the studied samples and possible methods of statistical processing. Bibliography 11 titles Table 2.

## ОЦІНКА МАКСИМАЛЬНОЇ ІМОВІРНОСТІ В УМОВАХ ПЕРЕВІРОК СУЧАСНОГО СТАНУ

**Макаров В. А.**

*доктор технічних наук, доцент  
Інститут транспорту та зв'язку  
Ломоносова, 1, LV-1019, Рига, Латвія  
makarovs.valerijs@gmail.com*

**Казакова А. В.**

*Ризька державна гімназія № 2  
Криш'яна Валдемара, 1, LV-1010, Рига, Латвія  
kazakova.anastasija@gmail.com*

**Ключові слова:**

*спостереження поточного стану, початкові пошкодження, повністю цензуровані вибірки, метод максимальної правдоподібності, параметри розподілу, перевірка гіпотези.*

У статті розглянуто алгоритм і методи статистичної обробки одного типу згрупованих даних – інтервально-цензуваних вибірок із перекриттям інтервалів спостереження. Зразки цензуються за інтервалом часу спостереження вимірюваного значення. Вибірки повністю складаються з таких інтервальних спостережень.

Вихідною інформацією були дані одноразових та багаторазових обстежень конструкції, що експлуатується, з метою виявлення пошкоджень у вигляді тріщин. Визначено стадію появи початкової тріщини (макротріщини) в зоні концентрації напружень. Макротріщину з об'єктивних причин не можна безпосередньо виявити під час оглядів. Наведено приклади опису часу утворення початкових тріщин у вигляді інтервально-цензуваних вибірок з пересічними інтервалами спостереження.

Основну увагу було приділено розробці методів статистичної обробки досліджуваних вибірок. Для параметричної оцінки часу появи макротріщин застосовано метод максимальної правдоподібності. Отримано основні рівняння максимальної правдоподібності для розподілів з параметрами розташування та масштабу. Застосовується обчислювальна процедура методом накопичення з використанням інформації Фішера. Отримано вирази для розрахунку дисперсій оцінок параметрів. Наведено рівняння для перевірки існування розв'язку системи рівнянь правдоподібності. Виникнення макротріщин може мати різну фізичну природу, наприклад, накопичення втоми або миттєве пошкодження внаслідок перевантаження, що перевищує розрахункове. Різна фізична природа передбачає різні види профілактичної роботи з їх запобігання та описується різними імовірнісними моделями. Запропоновано критерій відношення правдоподібності для перевірки статистичної гіпотези щодо ситуації раптової появи макротріщин при навантаженні, що перевищує розрахункове.

Отримані результати показують особливості структури досліджуваних вибірок та можливі методи статистичної обробки. Бібліографія 11 назв Таблиця 2.

### 1. Introduction

The purpose of this work is to study the possibility of statistical processing of one type of grouped samples – interval censored samples with overlapping observation intervals. The study was carried out on the examples of the analysis of damage to the structure of the airframe of an aircraft in operation during inspections. Interval censored samples with overlapping observation intervals describe the

durability of the structure before the appearance of an initial crack (macrocrack).

In the absence of interfering events, the observation results will be known for all observations and the sample will be complete (sample with complete data). Censoring is defined as an interfering event that prevents the observation of the event of interest from being obtained, for example, in terms of the size of the initial damage in mm (inches). The observation result

can be indicated only in a certain time interval. The boundaries of the observation intervals are determined by the well-established names of individual data: right censored data, left censored data, interval censored data. The difference between these data is only within the boundaries of the observation intervals.

In libraries of data processing programs, for example, Reliability Python library (2021), it is possible to process samples consisting of complete data and supplemented with censored data. In this case, a certain procedure is used for ranking the inspection times in the order of non-decreasing values and grouping the data with non-overlapping intervals. These data are actually interval censored samples with non-overlapping intervals. The methods for processing such samples are standardized. For example, the International Electrotechnical Commission (2008) developed the IEC 61649: 2008 standard, Weibull analysis, for estimation using the Weibull probability distribution model.

The named programs and standards do not cover the statistical processing of interval-censored samples with overlapping observation intervals. This type of sampling was considered in due time (Artamonovskii and Kordonskii, 1970) in relation to the analysis of reliability based on the results of one-time inspections of structures. In the article, the samples are named naturally grouped. Let us indicate the main features of such samples with generalization for one-time and multiple examinations to describe the initial cracks in the structure:

- 1) the result of the observation can only be described by the time interval on all inspected structures;
- 2) the sample consists entirely of such interval observations;
- 3) the number of observations in the sample is equal to the number of observation intervals;
- 4) each observation in the sample is censored by time intervals of different length;
- 5) numeric values of interval boundaries can include infinity or zero;
- 6) the boundaries of the intervals intersect and may overlap arbitrarily.

This type of samples is defined by the object of research in this article. It is interesting for the possibility of analyzing the initial signs of degradation of structures, for example, the appearance of initial cracks (macrocracks). There are certain stages of degradation – the appearance of an initial crack of a small size, then the development of a visible crack up to a size dangerous for safe operation. This time of the appearance of the initial cracks is interesting from the point of view of the development of preventive measures. The appearance of an initial crack can have two different causes. This is the result of a gradual change in the internal state of the structure zone

(normal situation for fatigue damage) or as a result of a ‘peak load’ that exceeds the design. In the second case, preventive maintenance does not improve the design and reinforcement of the structure is necessary.

As a result of the study, a certain understanding of the structure of interval censored samples with overlapping observation intervals was obtained. The basic relations of the maximum likelihood method for estimating the parameters of the probability distribution law and their variances were obtained. An accumulation method is proposed for the computational procedure. A statistical criterion for the likelihood ratio is proposed to assess the cause of the appearance of initial cracks.

## **2. Methodology & methods**

### **2.1. Methodology**

The research methodology was based on determining the possibility of statistical processing of interval-censored samples with overlapping observation intervals and the development of statistical analysis methods.

As an example of such samples, we took the data that are encountered in the analysis of damage to the structure of the airframe of an aircraft in operation. A model of damage development has been constructed to answer the question about the nature of the appearance of initial cracks. Examples of the formation of interval censored samples with overlapping observation intervals in relation to the appearance of initial cracks are considered.

Further, an algorithm for statistical data analysis was developed using the maximum likelihood method for estimating distribution parameters. The method is usually used for complex sample structures. A parametric approach is used for a family of distributions with location and scale parameters: Weibull, lognormal, and normal. The accumulation method is used as a special case of the Newton-Raphson iterative method. The verification of the existence condition for the solution of the likelihood equations is considered. The properties of the maximum likelihood estimates are analyzed. Relationships are obtained for calculating the variances of the maximum likelihood estimates. A likelihood ratio criterion is proposed to test the statistical hypothesis about the possible quasi-static nature of the appearance of macrocracks. The selected methods of statistical processing of interval-censored samples with overlapping observation intervals are suitable for the purpose of the study.

### **2.2. Damage development model**

This section describes the model for the development of damage. The stage of the appearance of an initial crack (macrocrack) is highlighted. The time of occurrence of a macrocrack is a random variable. The size of a macrocrack can practically not be measured either during tests or during inspections

in service. It can be estimated for the airframe structure of an aircraft in the range from 1mm to the minimum size of the detected cracks. At the stage of the appearance of a macrocrack, it is important to establish the nature of the appearance of damage – material fatigue under the action of an alternating load or a load exceeding the calculated one.

For all complex technical products, there are programs for monitoring the state of the structure in operation. This is the control of aging, strength and corrosion. The rules for examining the zones of the structure, inspection technologies and the dimensions of permissible and maximum damage are determined. As a result, statistical information about damages is accumulated and processed.

We will distinguish between the concepts of damage and failure. Failure is an event consisting in a malfunction of the product. The failure time is recorded accurately. Damage is an event consisting in a violation of the healthy state of an object while maintaining a healthy state and having a certain size, for example, the length of a crack in mm (inches). Damage can be revealed after some time during routine inspections. The damage undergoes irreversible changes and can develop into failure.

Classification of damages, causes of their occurrence and probabilistic models of damageability in the work of Gertsbakh, I. and Kordonskiy Kh. (1969) allows describing the fracture propagation model as follows:

1. Unobservable period – accumulation of damages in the stress concentration zone. Damage at this stage is not detected by non-destructive testing methods (unless only acoustic emission).

2. Macrocrack, initial crack. At this stage, the incubation period of damage accumulation ends, a material discontinuity forms, and crack growth begins. The area of the structure where an initial crack is likely to occur may or may not be known.

The time of appearance is a random variable. The size of a macrocrack practically cannot be measured due to the limited possibilities of non-destructive testing and visual inspection methods, as well as the conditions of testing in operation. The probability of detecting a macrocrack is practically zero. The initial crack size can be estimated as less than the minimum detectable crack size when inspected in service.

In structural design and safety life calculations, e.g. Wood (1971), and also in the work of Tavares, S. M. O. and de Castro, P. M. S. T. (2019) an initial crack size of 0.040-0.070 inches (1-2 mm) is estimated for the airframe frame of an airplane, and this value is less than the minimum detectable crack in the sample.

3. Visible crack, trunk. Detected by non-destructive testing methods and visual inspection. The growth of a visible crack is determined by loads and damage accumulation at the crack tip. Its growth

rate depends on the stress state of the place where the crack tip is located. Measurement of the crack length is determined by technological documents. The detected cracks, as a rule, do not exceed the maximum permissible dimensions for safe operation, however, they require analysis in order to prevent them.

4. The nature of the appearance of macrocracks. For fatigue damage, there is a gradual change in the internal state that develops into a macrocrack. It is also necessary to take into account the possibility of the appearance of ‘quasi-static damage’ – when the appearance of a macrocrack is caused by a sudden single external action that initiated its appearance. This is a situation of random failures, the failure rate is constant and reinforcement of the structure is required taking into account the loads exceeding the design ones. It is necessary to distinguish between these situations, because they have a different physical nature and are described by different statistical models.

### **2.3. Observations of the current state of products during inspections**

This section discusses the schemes of one-time and multiple inspections of structures in operation. Forms of fixing the current state are presented based on the results of visual inspections or non-destructive testing, in which the operating time and the size of the detected crack are indicated. To describe the moment of the appearance of the initial crack, an event indicator is used, which takes values of 0 or 1, depending on the fact of a crack detection in the corresponding observation interval. Based on the inspection results, interval censored samples are formed with overlapping observation intervals for the moments of the appearance of macrocracks.

A one-time inspection of products is defined as a technical inspection of a set of similar products, carried out on special instructions or a bulletin in a specific area of the structure. Table 1 shows typical results from one-time structural inspections. As an operating time, i.e. the lifetime of the product, the operating time from the beginning of operation in flight hours, number of flights or years (months) is taken. The current state is shown in the left half of the table.

The right half of the table describes the events that characterize the observation results – the moments of the appearance of macrocracks  $\tau$ . The moments of occurrence of macrocracks are censored by intervals, including zero at the event  $\{\tau_i < x_i\}$  or infinity on event  $\{\tau_i \geq x_i\}$ . Observation intervals and event indicators form a sample of interval censored data with overlapping observation intervals.

The second scheme of examinations is typical results of multiple examinations, see Table 2. Inspections are carried out during structural repairs and other forms of maintenance. The operating time of the products is recorded from the start of operation



Table 1

**Results of one-time examinations and interval censoring operating time before the appearance of a macrocrack**

No	Current state during inspections		Moments of occurrence of a macrocrack $\tau$		
	Inspection time, $x_i$	Crack length, mm $\delta_i$	Interval event indicator 0 – no, 1 – yes		Censoring an event $\tau_i$
			$\{\tau_i < x_i\}$	$\{\tau_i \geq x_i\}$	
1.	5181	0	0	1	right c.
2.	4676	0	0	1	right c.
3.	4986	15	1	0	left c.
4.	4998	5	1	0	left c.
5.	4800	0	0	1	right c.
6.	4998	0	0	1	right c.
7.	5002	20	1	0	left c.
8.	6411	0	0	1	right c.

Table 2

**Results of multiple examinations and interval censoring of operating time before the appearance of a macrocrack**

	Current state during inspections			Moments of occurrence of a macrocrack $\tau$			
	Inspection time, $x_{1i} \leq x_{2i}$		Crack length, mm $\delta_i$	Interval event indicator 0 – no, 1 – yes			Censoring an event $\tau_i$
	$x_{1i}$	$x_{2i}$		$\{\tau_i < x_{1i}\}$	$\{x_{1i} \leq \tau_i < x_{2i}\}$	$\{\tau_i \geq x_{2i}\}$	
1.	6036	9531	65	0	1	0	interval c.
2.	5181	8181	0	0	0	1	right c.
3.	4678	7296	65.5	1	0	0	left c.
4.	4986	8441	8	0	1	0	interval c.
5.	4998	8068	40	1	0	0	left c.
6.	4800	7668	0	0	0	1	right c.
7.	4998	8086	0	0	0	1	right c.
8.	5002	8319	8.5	0	1	0	interval c.
9.	5002	7900	0	0	0	1	right c.
10.	5004	8366	0	0	0	1	right c.
11.	5100	8265	0	0	0	1	right c.

for the last repair (inspection)  $x_2$  and for the previous repair (inspection)  $x_1$ . The size of the detected crack at the time of the next repair is also recorded.

The right half of the table describes the events that characterize the observation results – the moments of the appearance of macrocracks. Inspection times censor the moments of occurrence of macrocracks with three types of intervals described by the events  $\{\tau_i < x_{1i}\}$ ,  $\{\tau_i \geq x_{2i}\}$  and  $\{x_{1i} \leq \tau_i < x_{2i}\}$ . Observation intervals and event indicators form a sample of interval censored data with overlapping observation intervals.

**2.4. Maximum likelihood method for distributions with location and scale parameters**

This section presents the basic relationships for statistical processing of samples with interval-censored data with overlapping intervals. Maximum

likelihood equations are obtained for estimating the parameters of probability distributions with location and scale parameters. An iterative procedure for solving systems of equations by the accumulation method (a special case of the Newton-Raphson iterative method) using the Fisher information matrix is proposed. Expressions for calculating the variances of parameter estimates are obtained. An equation for checking the existence of a solution to the system of likelihood equations is presented. The asymptotic properties of the estimates are considered.

Let us introduce the following designations:

1.  $x$  – operating time from the beginning of product operation (product life time), calculated in flight hours, number of flights, months, operating time is considered as a variable.

2.  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$  – operating time before the appearance of macrocracks. Considered as a

repeated sampling of random variables  $T_1, T_2, \dots, T_N$ , which are independent and equally distributed with an unknown cumulative distribution function  $F_\tau(x) \in \mathcal{F}$ . The class  $\mathcal{F}$  is finite-dimensional and has the form  $\mathcal{F} = \{F_x(x; \bar{\theta}), \bar{\theta} \in \Theta \subset R^m\}$ . The cumulative distribution function  $F_\tau(x; \bar{\theta})$  is known, but the parameters  $\bar{\theta}$  unknown, i.e. parameters are determined. Distribution density function  $\frac{\partial F_\tau(x)}{\partial x} = f_\tau(x), \exists f_\tau(x) \geq 0$ .

3.  $x_{1i}, x_{2i}; x_{1i} \leq x_{2i}; i = 1, \dots, N$  – inspection moments. In the general case, they are considered as values of random variables  $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1N}; X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2N}$  (for one-time examinations  $x_{1i} = x_{2i}; X_{1i} = X_{2i}; n_{2i} = 0$ ). They are independent and equally distributed with an unknown cumulative distribution function  $F_x(x) \in \mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F} = \{F_x(x; \bar{\theta}), \bar{\theta} \in \Theta \subset R^2\}$ . Distribution density

function  $\frac{\partial F_x(x)}{\partial x} = f_x(x), \exists f_x(x) \geq 0$ .

4. From physical considerations, we assume that the censored moments of the appearance of macrocracks and the censoring moments of inspections are random and independent. Accordingly, independent random variables  $T_1, T_2, \dots, T_N$  и c.B.  $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1N}, X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2N}$ . Then the inspection moments are censoring points for random values  $T_1, T_2, \dots, T_N$  and are deterministic.

5.  $n_{ri}$  indicator (0, 1), characterizing the appearance of a macrocrack in the corresponding interval of inspection times:

$$n_{ri} = \begin{cases} (1, 0, 0), & \text{if } \{\tau_i \leq x_{1i}\} \\ (0, 1, 0), & \text{if } \{x_{1i} < \tau_i \leq x_{2i}\}, i = 1, \dots, N; r = 1, 2, 3; \sum_r \sum_i n_{ri} = N. \\ (0, 0, 1), & \text{if } \{\tau_i > x_{2i}\} \end{cases}$$

The cumulative distribution function for  $\tau$  is defined through the location and scale parameters  $\theta_1, \theta_2$  and, by definition, describes the corresponding probabilities of occurrence of the events of interest to us:

$$F_\tau(x, \theta_1, \theta_2) = F_0\left(\frac{\varphi(x) - \theta_1}{\theta_2}\right). \quad (1)$$

The likelihood function is determined at a fixed value of the sample  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N)$  and independence of T and X:

$$L = L_\tau(\theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^N F_{1i}^{n_{1i}} \cdot (F_{2i} - F_{1i})^{n_{2i}} \cdot (1 - F_{2i})^{n_{3i}}. \quad (2)$$

where

$$F_{qi} = P\{\tau_i \leq x_{qi}\}, q = 1, 2; n_{ri} = (n_{1i}, n_{2i}, n_{3i}), r = 1, 2, 3, i = 1, \dots, N.$$

The estimates  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  of the parameters  $\theta_1, \theta_2$  are found by solving the system of maximum likelihood equations (for the scheme of one-time examinations  $T_{1i} = T_{2i}$ , the second terms are identically equal to zero):

$$\begin{cases} S_1(\bar{\theta}) = 0 \\ S_2(\bar{\theta}) = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

where

$$\begin{cases} S_1(\bar{\theta}) = \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} = -\frac{1}{\theta_2} \sum_{i=1}^N n_{1i} \frac{F'_{1i}}{F_{1i}} + n_{2i} \frac{F'_{2i} - F'_{1i}}{F_{2i} - F_{1i}} - n_{3i} \frac{F'_{2i}}{1 - F_{2i}} \\ S_2(\bar{\theta}) = \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} = -\frac{1}{\theta_2} \sum_{i=1}^N n_{1i} \frac{u_{1i} F'_{1i}}{F_{1i}} + n_{2i} \frac{u_{2i} F'_{2i} - u_{1i} F'_{1i}}{F_{2i} - F_{1i}} - n_{3i} \frac{u_{2i} F'_{2i}}{1 - F_{2i}} \end{cases},$$

$$u_{qi} = \frac{\ln x_{qi} - \theta_1}{\theta_2}; F'_{qi} = \frac{\partial \ln F_{qi}}{\partial u}; q = 1, 2.$$

Solving the system of maximum likelihood equations provides the maximum likelihood function. We use the computational accumulation method as an iterative procedure for finding a solution. Let us expand the maximum likelihood equations in the vicinity of  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  in a Taylor series up to linear terms (for the k – iteration):

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1}\right)_{\hat{\theta}} = \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1}\right)_{\hat{\theta}_{(k)}} + (\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_{1(k)}) \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_1^2}\right)_{\hat{\theta}_{(k)}} + (\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_{2(k)}) \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\right)_{\hat{\theta}_{(k)}} = 0 \\ \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2}\right)_{\hat{\theta}} = \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2}\right)_{\hat{\theta}_{(k)}} + (\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_{1(k)}) \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_2 \partial \theta_1}\right)_{\hat{\theta}_{(k)}} + (\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_{2(k)}) \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_2^2}\right)_{\hat{\theta}_{(k)}} = 0 \end{cases}. \quad (4)$$

Artamonovskii and Kordonskii (1970) show the asymptotic consistency of the maximum likelihood estimates and the convergence in probability of the second derivatives of the likelihood function to their mathematical expectations. We determine the elements of the Fisher information matrix  $I(\bar{\theta})$ :

$$\begin{cases} I_{11} = \frac{1}{\theta_2^2} \sum_{i=1}^N n_{1i} \frac{(F'_{1i})^2}{F_{1i}} + n_{2i} \frac{(F'_{2i} - F'_{1i})^2}{F_{2i} - F_{1i}} + n_{3i} \frac{(F'_{2i})^2}{1 - F_{2i}} \\ I_{12} = I_{21} = \frac{1}{\theta_2^2} \sum_{i=1}^N n_{1i} \frac{u_{1i} (F'_{1i})^2}{F_{1i}} + n_{2i} \frac{(F'_{2i} - F'_{1i})(u_{2i} F'_{2i} - u_{1i} F'_{1i})}{F_{2i} - F_{1i}} + n_{3i} \frac{u_{2i} (F'_{2i})^2}{1 - F_{2i}} \\ I_{22} = \frac{1}{\theta_2^2} \sum_{i=1}^N n_{1i} \frac{(u_{1i} F'_{1i})^2}{F_{1i}} + n_{2i} \frac{(u_{2i} F'_{2i} - u_{1i} F'_{1i})^2}{F_{2i} - F_{1i}} + n_{3i} \frac{(u_{2i} F'_{2i})^2}{1 - F_{2i}} \end{cases} \quad (5)$$

We also define the covariance matrix (inverse information matrix)  $I^{-1}(\bar{\theta})$ :

$$I^{-1}(\bar{\theta}) = \frac{1}{\det[I(\bar{\theta})]} \begin{pmatrix} I_{22} & -I_{12} \\ -I_{21} & I_{11} \end{pmatrix}, \text{ where } \det[I(\bar{\theta})] -$$

determinant of a matrix.

The iterative procedure for finding the maximum likelihood estimates is a function of the accumulations  $S_1(\bar{\theta}^{(k)}), S_2(\bar{\theta}^{(k)})$  and the Fisher information matrix, where the unknown parameters are replaced by  $\theta_{1(k+1)}, \theta_{2(k+1)}$ :

$$\begin{aligned} \theta_{i(k+1)} &= \theta_{i(k)} + \delta \theta_{i(k+1)}, i = 1, 2; k = 0, 1, \dots, \\ \delta \theta_{1(k+1)} &= \frac{I_{12}(\bar{\theta}^{(k)}) \cdot S_2(\bar{\theta}^{(k)}) + I_{22}(\bar{\theta}^{(k)}) \cdot S_1(\bar{\theta}^{(k)})}{\det[I(\bar{\theta}^{(k)})]}, \quad (6) \\ \delta \theta_{2(k+1)} &= \frac{I_{12}(\bar{\theta}^{(k)}) \cdot S_1(\bar{\theta}^{(k)}) + I_{11}(\bar{\theta}^{(k)}) \cdot S_2(\bar{\theta}^{(k)})}{\det[I(\bar{\theta}^{(k)})]}. \end{aligned}$$

An important point is the possibility of using the check for the existence of a solution to the system of maximum likelihood equations. Artamonovskii and Kordonskii (1970) proposed a criterion for checking the samples under study:

$$\frac{\sum_{i=1}^N (n_{1i} + n_{2i})}{\sum_{i=1}^N n_{3i}} > \frac{\sum_{i=1}^N (n_{1i} \cdot \ln x_{1i}) + \sum_{i=1}^N (n_{2i} \cdot \ln x_{2i})}{\sum_{i=1}^N (n_{3i} \cdot \ln x_{2i})}. \quad (7)$$

The results of the research (Makarov, Martinov and Rastrigin, 1981) showed the effectiveness of the estimation procedure using the accumulation method. The number of iterations was compared with respect to the procedure for applying the method of grids. The choice of the initial approximations  $\theta_{1(0)}, \theta_{2(0)}$  takes into account the peculiarities of the structure of the initial observation data during examinations. It takes up to 10 iterations to achieve the specified precision,  $\{|S_1|, |S_2|\} \leq \varepsilon$ ,  $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-6}$ .

In the studies of Rastrigin (1983, 2000), the properties of maximum likelihood estimates were established for observation schemes of states during single and multiple examinations:

1) asymptotic consistency of the estimate

$$\hat{\theta}_i \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p} \theta_i, \quad i = 1, 2,$$

2) asymptotic efficiency at which the variances of the parameter estimates correspond to the lower bound of the generalized Rao-Cramer inequality

$$D\{\hat{\theta}_1\} = \frac{I_{22}(\bar{\theta})}{\det[I(\bar{\theta})]}; \quad D\{\hat{\theta}_2\} = \frac{I_{11}(\bar{\theta})}{\det[I(\bar{\theta})]}, \quad (8)$$

3) asymptotic normality of estimates

$$\bar{\theta} \sim N(\bar{\theta}, I^{-1}[\bar{\theta}]).$$

### 5.1. Testing the hypothesis of quasi-static damage.

In this section, we solve the problem of testing the hypothesis that the sample belongs to the exponential law of operating time before the appearance of macrocracks  $\tau$  with the alternative of belonging to the Weibull distribution. When analyzing the current state of products, it is important to check the situation of the appearance of macrocracks due to a sudden external influence. In this case, further statistical analysis is not desirable, the structure does not withstand peak loads and the structure needs reinforcement. Predictive maintenance in such a damaged area does not improve design. A likelihood ratio criterion is proposed.

To solve the problem, we express the initial Weibull distribution with the parameters  $\beta, \eta$  in terms of the parameters  $\theta_1, \theta_2$ :

$$F_{\tau}(\theta_1, \theta_2) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}\right] = 1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{\ln x - \theta_1}{\theta_2}\right)\right], \quad \theta_1 = \ln \eta, \quad \theta_2 = \frac{1}{\beta}, \quad (9)$$

where  $\beta$  is the parameter of the distribution shape, shows the rate of change in the failure rate;  $\eta$  – resource, operating time, during which 63.2% of macrocracks will appear.

The hypothesis  $H_0: \beta = 1$  is tested with the alternative  $H_1: \beta \neq 1$ . Earlier (Kendall and Stuart, 1961) used the likelihood ratio test to test hypotheses. For our problem, we define the statistics  $S$  for the likelihood ratio criterion

$$S = -2 \ln \frac{L_{\tau}(\hat{\theta}_1, \theta_2 = 1)}{L_{\tau}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)}, \quad (10)$$

where

$L_{\tau}(\hat{\theta}_1, \theta_2 = 1)$  is the likelihood function of the Weibull distribution,  $\theta_2 = 1$ ,  $\hat{\theta}_1$  is the estimate of the parameter  $\hat{\theta}_1$ , which converts the likelihood function to the maximum;

$L_{\tau}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  is the likelihood function of the Weibull distribution with estimates  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ ,

$L_{\tau}(\hat{\theta}_1, \theta_2 = 1)$  – actually represents the likelihood function  $L_{\tau}(\lambda)$  of the exponential distribution:

$$F_{\tau}(\lambda) = 1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{\ln x - \theta_1}{\theta_2}\right)\right] = 1 - e^{-\lambda x}, \quad \lambda = 1/\theta_1, \quad \theta_2 = 1 \quad (11)$$

Find a new estimate  $\hat{\theta}_1$  of the parameter  $\hat{\theta}_1$  for  $\hat{\theta}_2 = 1$  from the equation:

$$S_1 = \frac{\partial L_{\tau}(\hat{\theta}_1, \theta_2 = 1)}{\partial \theta_1} = -\sum_{i=1}^N n_{1i} \frac{F'_{1i}}{F_{1i}} + n_{2i} \frac{F'_{2i} - F'_{1i}}{F_{2i} - F_{1i}} - n_{3i} \frac{F'_{2i}}{1 - F_{2i}} = 0, \quad (12)$$

where

$$u_{qi} = \frac{\ln x_{qi} - \theta_1}{\theta_2}; \quad F'_{qi} = \frac{\partial \ln F_{qi}}{\partial u}; \quad q = 1, 2, .,$$

$$F_{qi} = P\{\tau_i \leq x_{qi}\} = F_{\tau}(\hat{\theta}_1, \theta_2 = 1), \quad q = 1, 2;$$

$$i = 1, \dots, N; \quad n_{ri} = (n_{1i}, n_{2i}, n_{3i}), \quad r = 1, 2, 3.$$

The statistics  $S$  in (10) under the hypothesis  $H_0$  is asymptotically distributed over  $\chi^2_{1;0.05}$  with 1 degree of freedom. Under the hypothesis, one parameter  $\beta$  is checked, then  $r = 1$ ; distribution has  $r + s = 2$  parameters,  $s = 1$ , because  $s \neq 0$ , then the hypothesis is composite. Critical region at a significance level of 0.05  $S > \chi^2_{1;0.05} = 3.841$ .

The estimates of the parameters  $\beta, \eta$  and their variances are determined in terms of the parameters  $\theta_1, \theta_2$ :

$$\hat{\beta} = \frac{1}{\theta_2}; D\{\hat{\beta}\} = \frac{1}{\theta_2^4} D\{\hat{\theta}_2\}; \hat{\eta} = e^{\hat{\theta}_1}; D\{\hat{\eta}\} = \exp\{2\hat{\theta}_1\} \cdot D\{\hat{\theta}_1\}. \quad (13)$$

*Example.* For illustration, we present the results of data processing in Table 2 of inspections of the current state of structures to observe the moments of the appearance of macrocracks. Checking the conditions for the existence of a solution (7) of the system of equations (3) gives the result  $0.833 > 0.822$ , i.e. is a solution to the system of likelihood equations. The solution of the system of equations (3) for the Weibull distribution (9) using equations (6), (13) gives the following results:

$$\hat{\theta}_1 = 9.237, \hat{\theta}_2 = 0.429, \text{Var}(\hat{\theta}_1) = 0.159, \text{Var}(\hat{\theta}_2) = 0.187, \\ \hat{\eta} = 10270., \hat{\beta} = 2.331, \text{Var}(\hat{\eta}) = 1.6804 + E7, \text{Var}(\hat{\beta}) = 5.317.$$

Testing the hypothesis about the quasi-static nature of the appearance of macrocracks  $H_0: \beta = 1$  with the alternative  $H_0: \beta \neq 1$  according to the likelihood ratio criterion (10) gives the following result:

$$S = -2 \ln \frac{L_t(\hat{\theta}_1, \theta_2 = 1)}{L_t(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)} = -2(-11.646 - (-10.717)) = 1.858.$$

Then  $S < \chi_{1;0.05}^2$ , hence the hypothesis  $H_0$  is not rejected. This may be due to the low accuracy of estimating the parameter  $\beta$  in this sample.

## 6. Results and Discussion

**Results.** The result of the study is the methods of statistical processing of specific data that are accumulated during inspections in operation. The object of research is determined – the type of grouped samples, interval censored samples with overlapping observation intervals. Examples of samples entirely consisting of interval data are given. A model of damage development has been developed.

An algorithm and statistical methods for processing the samples under study have been developed. The method of maximum likelihood is applied to find the parameters of the distribution of the time of occurrence of the initial cracks and their dispersions. Basic equations of maximum likelihood are obtained for probability distributions with location and scale parameters. The solution of systems of equations is performed by the accumulation method (a special case of the Newton-Raphson iterative method) using the Fisher information matrix. Expressions for calculating the variances of parameter estimates are obtained. An equation for checking the existence of a solution to the system of likelihood equations is presented. The maximum likelihood estimates for the studied samples are asymptotically consistent, efficient, and normally distributed. A likelihood ratio

criterion is proposed for checking the studied samples for belonging to an exponential distribution.

**Discussion.** The discussed research topic of interval-censored samples with overlapping intervals appeared in the analysis of data from structural inspections to assess the development of damage. The period of the appearance of initial cracks, which cannot be detected by means of non-destructive testing for various reasons, is especially highlighted. This period determines the nature of damage occurrence (fatigue or overload), and also determines the initial conditions when calculating the growth rate of fatigue cracks. The importance of understanding the specifics of the processed samples in the form of fully censored observations of the appearance of initial cracks is emphasized.

The need to develop a mathematical apparatus is due to the lack of software for the samples under study. The reason is the lack of data on the exact moments of the appearance of initial cracks at least on some structures, which increase the information content of the initial data and allow the use of standard tools.

It is possible to analyze the initial signs of structural degradation through statistical processing of samples in the form of interval censored samples with overlapping observation intervals. The mathematical apparatus in the form of the maximum likelihood method is used to estimate the distribution parameters of the time of occurrence of macrocracks. The choice of the distribution law for a specific analysis is established from the physics of the damage process.

Interval censored samples with intersecting intervals characterize the durability of the structure before the appearance of an initial crack (macrocrack). Further, the main indicators of the reliability and durability of the structure can be calculated. The research results can be used to analyze the appearance of initial damage during wear and corrosion, as well as to analyze the survival rate of various research objects, taking into account the initial changes in the situation.

## 7. Conclusions

The conclusions of the study are presented. In general, the goal of the study was achieved.

The structure of interval-censored samples with overlapping observation intervals is determined. Their features in relation to other types of grouped samples are described. Examples of the formation of the studied samples according to the primary information of the results of inspections of structures in operation are considered. A damage development model has been built to answer the question about the appearance of initial cracks that cannot be detected due to the limited possibilities of non-destructive testing methods and visual inspection, as well as inspection conditions in operation. The appearance of initial cracks leads to the formation of statistical

samples in the form of interval-censored samples with intersecting intervals.

A parametric approach is proposed for the statistical analysis of the studied samples. The maximum likelihood method was used to find estimates for the parameters of the probabilistic law of distribution of continuous events, for example, the time of appearance of initial cracks (macrocracks) in the structure. To solve the system of likelihood equations, the accumulation method was applied to find estimates of the parameters and their variances. To establish the nature of the appearance of initial cracks, a statistical criterion of the likelihood ratio is proposed.

The presented mathematical apparatus can be useful for other areas of research, when the structure of the initial data coincides with interval censored samples with overlapping observation intervals. It is also possible that applying a parametric approach to a solution is not the only solution.

In general, we will be grateful for any comments and suggestions for further research of life processes.

#### Acknowledgements

Research results in the works of Artamonovskii (1970); (Makarov, Martinov and Rastrigin, 1981); Rastrigin (1983, 2000) obtained in 1970–1993 at the Riga Institute of Civil Aviation under the scientific supervision of the Honored Worker of Science and Technology of Latvia, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department and Head of the Research Laboratory of the Institute of Kordonsky Chaim Borisovich (1919–1999). In 1941 he graduated from the Faculty of Mathematics and Mechanics of the Leningrad State University.

The authors of this article are in solidarity and express their gratitude to him for the creative atmosphere at the department.

This study was carried out without financial support.

#### REFERENCES

1. Artamonovskii, V and Kordonskii, Kh. (1970) Estimate of maximum likelihood for simplest grouping of data. *Theory Probab. Appl.*, 1970, 15(1), 128–132. DOI:10.1137/1115013.
2. Gertsbakh, I., Kordonskiy, Kh. (1969) *Models of Failure*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-642-87519-9>.
3. International Electrotechnical Commission. (2008) International Standard. Weibull analysis. IEC 61649:2008. URL: <https://webstore.iec.ch/publication/5698>.
4. Kendall, Maurice G., Stuart, Alan. (1961). *The advanced theory of statistics. Volume 2. Inference and relationship. Chapter 24*. London : Charles Griffin. URL: [http://www.ru.ac.bd/stat/wp-content/uploads/sites/25/2019/03/302\\_05\\_Kendall-Advanced-Theory-of-Statistics-3rd-Edition-2010.pdf](http://www.ru.ac.bd/stat/wp-content/uploads/sites/25/2019/03/302_05_Kendall-Advanced-Theory-of-Statistics-3rd-Edition-2010.pdf).
5. Makarov, V., Martinov, J., Rastrigin, V. (1981) Application of the accumulation method for estimating the parameters of the Weibull distribution based on the data of one-time and two-time examinations. *Advanced repair methods for aviation equipment. Interuniversity collection of scientific papers*. 103–107. URL: <http://www.lib.nau.edu.ua/search/Details.aspx?id=24212&lang=uk-UA>.
6. Rao, C. Radhakrishna. (1973) *Linear Statistical Inference and its Applications*. Second Edition. New York: John Wiley and Sons Inc. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/9780470316436>.
7. Rastrigin, V. (1983) The efficiency of maximum likelihood estimates for randomly censoring observations. *Izv. Academy of Sciences of the USSR. Technical cybernetics*. 3. P. 189–191. URL: <http://catalogue.lib.tpu.ru/catalogue/document/RU%5CTPU%5Cprd%5C165583>.
8. Rastrigin, V. (2000) Application of random censoring models for statistical analysis of reliability. *Transport. Aviation transport*. Nr.1, 129-135. ISSN 1407–8015. URL: <https://ortus.rtu.lv/science/lv/publications/2031>.
9. Reliability Python library.pdf. reliability. Release 0.7.1 Oct 26, 2021. Chapter 25, 54. ISBN: 978-3-642-87519-9. URL: [https://reliability.readthedocs.io/\\_/downloads/en/stable/pdf/](https://reliability.readthedocs.io/_/downloads/en/stable/pdf/).
10. Tavares, S. M. O. and de Castro, P. M. S. T. (2019) *Damage Tolerance of Metallic Aircraft Structures*. Springer, Cham, Switzerland. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-70190-5>.
11. Wood, Howard A (1971) *Fracture Control Procedures for Aircraft Structural Integrity*. Virginia: Defense technical information center. Distribution statement: Approved for public release. Air force flight dynamics lab Wright-Patterson AFB OH. (AFF DL-TR-71-89). URL: <https://apps.dtic.mil/sti/citations/AD0731565>.

## ПОВЗДОВЖНИЙ ЕФЕКТИВНИЙ МОДУЛЬ ПРУЖНОСТІ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ В УМОВАХ НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ

**Гребенюк С. М.**

*доктор технічних наук, професор,  
завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0002-5247-9004](https://orcid.org/0000-0002-5247-9004)  
[gsm1212@ukr.net](mailto:gsm1212@ukr.net)*

**Морозова І. Ю.**

*аспірант  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0001-8200-0140](https://orcid.org/0000-0001-8200-0140)  
[irina.oleynik.1997@gmail.com](mailto:irina.oleynik.1997@gmail.com)*

**Ключові слова:** *волокно, гомогенізація, ефективний модуль пружності, коефіцієнт Пуассона, композиційний матеріал, нелінійні деформації, матриця.*

У статті розглядається математичне моделювання механічної поведінки волокнистого композиту для визначення його напружено-деформованого стану в умовах нелінійної деформації. Знайдено аналітичні співвідношення для ефективних характеристик волокнистого композиційного матеріалу, а саме модуля пружності та коефіцієнта Пуассона, з урахуванням ізотропних властивостей матриці та волокна.

У роботі для визначення ефективних характеристик застосовується метод представницького об'ємного елемента. Розглянуто спільне деформування порожнистого та суцільного циліндрів, що моделюють, відповідно, матрицю та волокно у композиті, з урахуванням того, що осьові переміщення і волокна й матриці сталі й однакові. Вважається, що в процесі деформації і матеріал матриці, і матеріал волокна підкоряються закону Гука, але в процесі деформації їх об'ємна частка в композиті змінюється. Ця зміна буде визначатися зміною площі поперечного перерізу ділянок елементарної комірки, зайнятих матрицею і волокном, враховуючи, що висота нескінченної комірки буде однаковою для матриці і волокна. Отримано співвідношення для напружено-деформованого стану ізотропного волокна та матриці, в яких передбачається, що незважаючи на лінійний характер деформування матриці та волокна, об'ємна частка компонентів змінюється при збільшенні зовнішнього навантаження й в результаті будемо мати нелінійну залежність.

Далі розглядається аналогічна задача для однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює поведінку композиційного матеріалу. Умовою узгодження для цієї задачі будуть виступати рівність осьових переміщень для довільної осьової координати та рівність радіальних переміщень на зовнішній частині циліндричної поверхні. Отримано формули для визначення поздовжнього модуля пружності композиційного матеріалу з ізотропними матрицею і волокном.

Досліджено залежність модуля пружності та коефіцієнта Пуассона від зміни об'ємного вмісту волокна в композиті в процесі деформування.

# LONGITUDINAL EFFICIENT MODULE OF ELASTICITY OF FIBER COMPOSITE MATERIAL UNDER NONLINEAR DEFORMATION CONDITIONS

**Grebenyuk S. M.**

*Doctor of Technical Sciences, Associate Professor,  
Head of the Department of Fundamental and Applied Mathematics  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-5247-9004  
gsm1212@ukr.net*

**Morozova I. Y.**

*Postgraduate Student  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-8200-0140  
irina.oleynik.1997@gmail.com*

**Key words:** *fiber,  
homogenization,  
effectivemodulusofelasticity,  
Poisson'sratio,  
compositematerial,  
nonlineardeformations, matrix.*

The article considers mathematical modeling of the mechanical behavior of a fibrous composite to determine its stress-strain state under nonlinear deformation. Analytical relations were found for the effective characteristics of the fibrous composite material, namely the modulus of elasticity and Poisson's ratio, taking into account the isotropic properties of the matrix and fiber.

The method of representative three-dimensional element is used to determine the effective characteristics. The joint deformation of the hollow and solid cylinders, which simulate, respectively, the matrix and the fiber in the composite, taking into account the fact that the axial displacements and the fiber matrix have become the same.

It is believed that in the process of deformation both the matrix material and the fibrous material obey Hooke's law, but in the process of deformation their volume fraction in the composite changes. In addition, this change will be determined by the change in the cross-sectional area of the units of the unit cell occupied by the matrix and the fiber, given that the height of the infinite cell will be the same for the matrix and the fiber. The relations for the stress-strain state of the isotropic fiber and the matrix are obtained. In which it is assumed that despite the linear nature of the deformation of the matrix and the fiber, the volume fraction of the components changes with increasing external load and as a result we will have a nonlinear dependence.

Next, a similar problem is considered for a homogeneous transversely isotropic material that simulates the behavior of a composite material. The condition of agreement for this problem will be the equality of axial displacements for an arbitrary axial coordinate and the equality of radial displacements on the outer part of the cylindrical surface. The formula for determining the longitudinal modulus of elasticity of a composite material with isotropic matrix and fiber is obtained.

The dependence of the modulus of elasticity and Poisson's ratio on the change in the volumetric content of the fiber in the composite during deformation has been studied.

## ВСТУП

Застосування композиційних матеріалів, які мають високу питому міцність і жорсткість, дозволяє у сучасних машинах та конструкціях знизити матеріаломісткість і підвищити корозійну стійкість, відкриває принципово нові можливості оптимального проектування та створення нових конструкцій.

При створенні нових конструкцій із композиційного матеріалу важливою задачею є визначення напружено-деформованого стану такої конструкції в реальних умовах експлуатації. При математичному моделюванні деформування конструкцій із композиційного матеріалу актуальним є описання механічних характеристик матеріалу. Зважаючи на те, що, як правило, частота армування волокнами є досить високою, а поперечний розмір волокна малим, створити математичну модель матеріалу, яка б враховувала кожне окреме волокно, досить проблематично. Тому неоднорідний композиційний матеріал представляється однорідним з механічними характеристиками, які називають ефективними і які залежать від механічних характеристик матриці та волокна і об'ємної частки кожного з них у композиційному матеріалі.

Теоретичні основи визначення ефективних пружних сталих трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює поведінку композиційного матеріалу, представлені в роботах [1–6].

У роботі [1] розглянуто модель ефективних визначальних співвідношень трансверсально-ізотропного композита зі скінченними деформаціями. Запропоновано метод розділення зв'язних у задачах мікро- та макроскопічного деформування.

У роботі [2] описано методи та критерії накопичення пошкодження у волокнистих шаруватих композитах. Запропоновані підходи, що ґрунтуються на співвідношеннях теорії шарових пластин, що можуть бути використані при розрахунках, оптимізації та прогнозування механічної поведінки композитних матеріалів та елементів з них.

Роботу [3] присвячено математичному моделюванню механічної поведінки волокнистих композитів та програмній реалізації підходів до визначення їх напружено-деформованого стану.

У роботі [4] пропонується підхід до визначення ефективного модуля пружності для односпрямованого волокнистого композиційного матеріалу. Композит, що складається з ізотропної матриці та ізотропного волокна, моделюється суцільним однорідним трансверсально-ізотропним матеріалом. При цьому модулі пружності матриці та волокна розглядаються як випадкові величини з нормальними законами розподілу.

Розроблено метод розрахунку нелінійно-пружних характеристик композитів із скінченними деформаціями на основі асимптотичної теорії осереднення періодичних структур [5]. Використані визначальні співвідношення нелінійно-пружних середовищ із скінченними деформаціями, запропоновані автором раніше. Отримано аналітичні розв'язки локальних задач для шаруватих композитів із скінченними деформаціями.

У статті [6] запропоновано модель, що дозволяє на основі співвідношень теорії шаруватих пластин та апроксимації кривої деформування односпрямованого шару при зсуві в площині шару прогнозувати нелінійне деформування шаруватого вуглепластику. Отримані аналітичні співвідношення для матриць жорсткості й податливості пакета у вигляді добутку відповідних матриць пружних характеристик на матриці, що враховують нелінійні властивості пакета.

У роботі [7] проведено нелінійний аналіз вільної вібрації композитних ламінованих пластин і неглибоких циліндричних/сферичних/гіперболоїдних оболонок з урахуванням геометричної нелінійності з використанням неполіноміальної оберненої тригонометричної теорії деформацій зсуву вищого порядку з сімома ступенями вільності (DOFs). Ця теорія припускає параболічну зміну напружень поза площиною. Розроблено та застосовано нелінійну скінченно-елементну модель для отримання дискретних нелінійних рівнянь.

Теорія великих деформацій на основі деформацій Гріна з малими обертаннями [8] запропонована та використовується для аналізу на згин композитних пластин. Для виведення скінченно-елементних моделей використовується ізогеометричний аналіз спільно з теорією деформацій зсуву першого порядку. Сформульовано співвідношення деформація-зміщення в сенсі теорії фон-Кармана та запропонованої теорії. Досліджено числові приклади, включаючи ізотропні та ламіновані композитні пластини за різних граничних умов.

Однак у наявних роботах припускається, що процес деформування або лінійний, або нелінійність обмежується врахуванням окремих випадків й не може бути застосована для широкого кола композитів. Так, якщо розглянути один із видів волокнистих композитів – гумовокордні матеріали – то можна зауважити, що в процесі деформування гума може зазнавати значних деформацій, причому у межах закону Гука. Врдночас при такому деформуванні гума не змінює свій об'єм (коефіцієнт Пуасона близький до 0,5), а волокна (металеві або тканинні) при деформуванні свій об'єм змінюють (коефіцієнт Пуасона варіюється від 0,25-0,35 для металевих до 0,8 для тканинних), в результаті при деформуванні змінюються об'ємні частки волокна та матриці у композиті.



**Метою дослідження** цієї статті є визначення залежності поєздовжнього модуля пружності та коефіцієнта Пуассона від об'ємного вмісту корда, з урахування нелінійності деформування волокнистого композиційного матеріалу.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

Розглянемо волокнистий композиційний матеріал із довгими волокнами при гексагональній схемі армування. Для виконання поставленої задачі скористаємося методом представницького об'ємного елемента. Виокремимо із об'єму композиту елементарну гексагональну комірку, що містить волокно та оточуючу його матрицю. Зважаючи, що композит армований довгими волокнами, будемо вважати довжину елементарної комірки нескінченною. Гексагональний поперечний переріз комірки апроксимуємо кругом, так щоб об'ємна частка волокна у комірці не змінилася. В результаті елементарний представницький елемент композиційного матеріалу буде складатися з нескінченного суцільного циліндра, що моделює волокно, та нескінченного порожнистого циліндра, що моделює матрицю (рис. 1).

Будемо вважати, що в процесі деформування і матеріал матриці, і матеріал волокна підкорюються закону Гука, але в процесі деформування змінюється їх об'ємна частка у композиті. Ця зміна буде визначатися зміною площі поперечного перерізу областей елементарної комірки, що займає матриця та волокно, враховуючи, що висота нескінченної комірки буде однаковою і для матриці, і для волокна.

З'ясуємо, як зміниться напружено-деформований стан елементарної комірки, якщо в процесі

деформування її радіус зміниться з  $b$  до  $b+\Delta b$ , а радіус волокна – з  $a$  до  $a+\Delta a$  (рис. 1). Умовою контакту на межі розділу матеріалів в процесі деформування будемо вважати ідеальне зчеплення.

Розглянемо поєздовжнє (у напрямку осі волокна) розтягнення елементарної комірки композиційного матеріалу.

Крайові умови підбрано таким чином, щоб вони відповідали експериментальним даним, отриманим для композиційного матеріалу. В місці зчеплення волокна з матрицею відсутній стрибок за радіальним переміщенням та радіальним напруженням, осьові переміщення і волокна матриці сталі й однакові:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{\circ}(a+\Delta a) &= \sigma_{rr}^*(a+\Delta a), u_r^{\circ}(a+\Delta a) = u_r^*(a+\Delta a), \\ u_z^{\circ}(h) &= u_z^*(h), \end{aligned} \quad (1)$$

Тут і далі символ  $\circ$  означає величини, що відносяться до волокна, а символом  $*$  – величини, що відносяться до матриці.

Крім цього, крайові умови в напруженнях при сумісному деформуванні матриці й волокна запишуться таким чином:

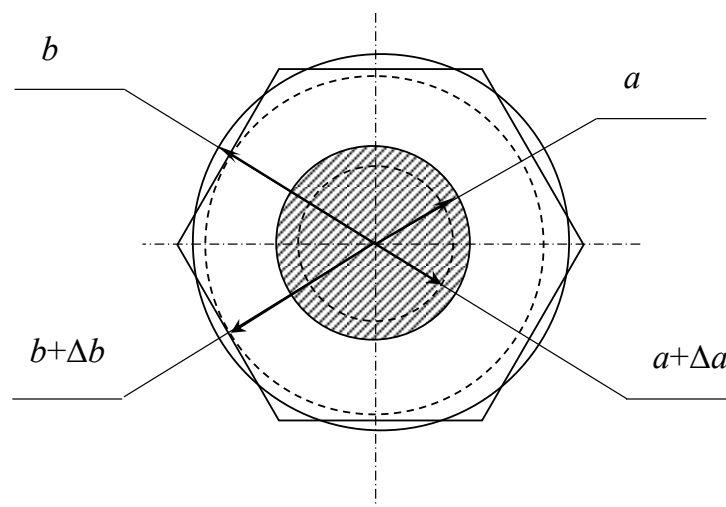
$$\sigma_{rr}^*(b+\Delta b) = 0. \quad (2)$$

Радіальні переміщення трансверсально-ізотропного волокна запишуться у вигляді:

$$u_r^{\circ}(r+\Delta r) = C(r+\Delta r). \quad (3)$$

де  $C$  – стала, що визначається з граничних умов.

Тоді напружено-деформований стан трансверсально-ізотропного волокна буде описуватися, окрім (3), такими співвідношеннями:



**Рис. 1. Поперечний переріз елементарної комірки композиційного матеріалу**

$$u_z^{\circ}(z + \Delta z) = \frac{1}{(1 - v^{\circ})} \left( \frac{(\sigma_0^{\circ} + \Delta\sigma_0^{\circ})(1 - v^{\circ} - 2(v^{\circ})^2) - 2Cv^{\circ}}{E^{\circ}} \right) (z + \Delta z), \quad (4)$$

$$\sigma_{rr}^{\circ}(r + \Delta r) = \frac{E^{\circ}}{(1 - v^{\circ})} \left( \frac{(\sigma_0^{\circ} + \Delta\sigma_0^{\circ})v^{\circ}}{E^{\circ}} + C \right);$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{\circ}(r + \Delta r) = \frac{E^{\circ}}{(1 - v^{\circ})} \left( \frac{(\sigma_0^{\circ} + \Delta\sigma_0^{\circ})v^{\circ}}{E^{\circ}} + C \right). \quad (5)$$

Аналогічно запишемо співвідношення, які описують напружено-деформований стан трансверсально-ізотропної матриці:

$$u_r^*(r + \Delta r) = A(r + \Delta r) + \frac{B}{(r + \Delta r)};$$

$$u_z^*(z + \Delta z) = \frac{1}{(1 - v^*)} \left( \frac{(\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*)(1 - v^* - 2(v^*)^2) - 2Av^*}{E^*} \right) (z + \Delta z), \quad (6)$$

$$\sigma_{rr}^*(r + \Delta r) = E^* \left( \frac{(\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*)v^*}{E^*(1 - v^*)} + \frac{A}{1 - v^*} - \frac{B}{(r + \Delta r)^2(1 + v^*)} \right);$$

$$\sigma_{\theta\theta}^*(r + \Delta r) = E^* \left( \frac{(\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*)v^*}{E^*(1 - v^*)} + \frac{A}{1 - v^*} - \frac{B}{(r + \Delta r)^2(1 + v^*)} \right). \quad (7)$$

Виходячи з крайових умов (1), (2) знайдемо тепер сталі  $A$ ,  $B$ ,  $C$  та залежність між  $\sigma_0^{\circ}$  та  $\sigma_0^*$ . Із другої рівності (1) маємо:

$$C = A + \frac{B}{(a + \Delta a)^2}. \quad (8)$$

Із рівності (2) отримуємо:

$$A = \frac{B}{(b + \Delta b)^2} \frac{(1 - v^*)}{(1 + v^*)} - \frac{(\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*)v^*}{E^*}. \quad (9)$$

Тоді (8) запишеться у вигляді:

$$C = B \left( \frac{(f + \Delta f)(1 - v^*) + (1 + v^*)}{(a + \Delta a)^2(1 + v^*)} \right) - \frac{(\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*)v^*}{E^*}. \quad (10)$$

Із першої рівності (1) маємо:

$$\frac{E^{\circ}}{(1 - v^{\circ})} \left( \frac{(\sigma_0^{\circ} + \Delta\sigma_0^{\circ})v^{\circ}}{E^{\circ}} - \frac{(\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*)v^*}{E^*} \right) =$$

$$= \frac{B}{(a + \Delta a)^2} \left( \frac{E^*}{(1 + v^*)} ((f + \Delta f) - 1) - \right.$$

$$\left. - \frac{E^{\circ}}{(1 - v^{\circ})(1 + v^*)} ((f + \Delta f)(1 - v^*) + (1 + v^*)) \right),$$

$$B = \left( \frac{(\sigma_0^{\circ} + \Delta\sigma_0^{\circ})v^{\circ}}{E^{\circ}} - \frac{(\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*)v^*}{E^*} \right) \quad (11)$$

$$\frac{(a + \Delta a)^2 E^{\circ} (1 + v^*)}{E^* ((f + \Delta f) - 1)(1 - v^{\circ}) - E^{\circ} ((f + \Delta f)(1 - v^*) + (1 + v^*))},$$

Позначимо

$$f = \frac{a^2}{b^2},$$

$$\Delta f = \frac{(a + \Delta a)^2}{(b + \Delta b)^2} - \frac{a^2}{b^2},$$

$$d_1 = E^* ((f + \Delta f) - 1)(1 - v^{\circ}),$$

$$d_2 = E^{\circ} ((f + \Delta f)(1 - v^*) + (1 + v^*)). \quad (12)$$

Тоді

$$B = \frac{v^{\circ} (a + \Delta a)^2 (1 + v^*)}{d_1 - d_2} (\sigma_0^{\circ} + \Delta\sigma_0^{\circ}) -$$

$$- \frac{(a + \Delta a)^2 E^{\circ} (1 + v^*)}{d_1 - d_2} \frac{v^*}{E^*} (\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*);$$

$$C = \frac{d_2}{d_1 - d_2} \frac{v^{\circ}}{E^{\circ}} (\sigma_0^{\circ} + \Delta\sigma_0^{\circ}) -$$

$$- \frac{v^*}{E^*} \frac{d_1}{d_1 - d_2} (\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*);$$

$$A = \frac{(f + \Delta f)v^{\circ}(1 - v^*)}{d_1 - d_2} (\sigma_0^{\circ} + \Delta\sigma_0^{\circ}) -$$

$$- \frac{v^* (f + \Delta f)E^{\circ}(1 - v^*) + (d_1 - d_2)}{E^* (d_1 - d_2)} (\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*). \quad (13)$$

Нарешті, з третьої рівності (1) знаходимо співвідношення між  $\sigma_0^{\circ}$  та  $\sigma_0^*$ :

$$\left( \frac{(1 - 2(v^{\circ})^2 - v^{\circ})(d_1 - d_2)}{E^{\circ}(1 - v^{\circ})} - \frac{2(v^{\circ})^2 d_2}{E^{\circ}(1 - v^{\circ})} + \frac{2(f + \Delta f)v^{\circ}v^*}{1} \right) (\sigma_0^{\circ} + \Delta\sigma_0^{\circ}) =$$

$$= \left[ \frac{(1 - 2(v^*)^2 - v^*)(d_1 - d_2)}{E^*(1 - v^*)} + \frac{2(v^*)^2 ((f + \Delta f)E^{\circ}(1 - v^*) + d_1 - d_2)}{E^*(1 - v^*)} - \right.$$

$$\left. - \frac{2d_1 v^{\circ} v^*}{E^*(1 - v^*)} \right] (\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*). \quad (14)$$

Позначивши

$$d^{\circ} = \frac{E^* ((f + \Delta f) - 1)(1 - 2(v^{\circ})^2 - v^{\circ})}{E^{\circ}}$$

$$- ((f + \Delta f)(1 - v^* - 2v^{\circ}v^*) + (1 + v^*));$$

$$d^* = ((f + \Delta f) - 1)(1 - 2(v^{\circ})^2 - v^{\circ}) -$$

$$-\frac{E^{\circ} \left( (f + \Delta f) (1 - v^* - 2v^{\circ} v^*) + (1 + v^*) \right)}{E^*}; \quad (15)$$

Отримуємо

$$d^{\circ} (\sigma_0^{\circ} + \Delta \sigma_0^{\circ}) = d^* (\sigma_0^* + \Delta \sigma_0^*) \quad (16)$$

Розглянемо тепер аналогічну задачу для однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює поведінку композиційного матеріалу. В цьому випадку поле напружень буде визначатися такими співвідношеннями:

$$\sigma_{zz} = \sigma_0, \quad \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = 0. \quad (17)$$

Причому для того, щоб збіглися умови рівноваги для обох задач, необхідно, щоб виконувалися умови:

$$\pi a^2 (\sigma_0^{\circ} + \Delta \sigma_0^{\circ}) + \pi (b^2 - a^2) (\sigma_0^* + \Delta \sigma_0^*) = \pi b^2 (\sigma_0 + \Delta \sigma_0),$$

або

$$(\sigma_0^{\circ} + \Delta \sigma_0^{\circ}) f + (\sigma_0^* + \Delta \sigma_0^*) (1 - f) = (\sigma_0 + \Delta \sigma_0), \quad (18)$$

З урахуванням (16) отримаємо:

$$\begin{aligned} \sigma_0^* + \Delta \sigma_0^* &= \frac{(\sigma_0 + \Delta \sigma_0) d^{\circ}}{d^{\circ} + (f + \Delta f)(d^* - d^{\circ})} \sigma_0^{\circ} + \\ &+ \Delta \sigma_0^{\circ} = \frac{(\sigma_0 + \Delta \sigma_0) d^*}{d^{\circ} + (f + \Delta f)(d^* - d^{\circ})}. \end{aligned} \quad (19)$$

З урахуванням (17) рівняння стану ізотропного матеріалу набудуть вигляду:

$$\varepsilon_{rr} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} (\sigma_0 + \Delta \sigma_0); \quad \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E_1} (\sigma_0 + \Delta \sigma_0). \quad (20)$$

Тоді переміщення, згідно з співвідношеннями Коші, будуть визначатися формулами

$$\begin{aligned} u_r(r + \Delta r) &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} (\sigma_0 + \Delta \sigma_0) (r + \Delta r) + C_1; \\ u_z(z + \Delta z) &= \frac{1}{E_1} (\sigma_0 + \Delta \sigma_0) (z + \Delta z) + C_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Сталі  $C_1 = C_2 = 0$  з урахуванням того, що для цієї задачі будуть виконуватися умови  $u_r(0) = 0$  та  $u_z(0) = 0$ , тоді

$$\begin{aligned} u_r(r + \Delta r) &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} (\sigma_0 + \Delta \sigma_0) (r + \Delta r); \\ u_z(z + \Delta z) &= \frac{1}{E_1} (\sigma_0 + \Delta \sigma_0) (z + \Delta z). \end{aligned} \quad (22)$$

Будемо вважати, що як умови узгодження для задачі про поздовжнє розтягнення однорідного

трансверсально-ізотропного композита та задачі про сумісне поздовжнє розтягнення матриці й волокна будуть виступати рівність осевих переміщень для довільної осевої координати та рівність радіальних переміщень на зовнішній частині циліндричної поверхні:

$$\begin{aligned} u_r(b + \Delta b) &= u_r^*(b + \Delta b), \\ u_z(h + \Delta h) &= u_z^{\circ}(h + \Delta h) = u_z^*(h + \Delta h), \end{aligned} \quad (23)$$

Тоді друге зі співвідношень (23) з урахуванням (6) та (22) запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - v^*)} \left( \frac{(\sigma_0^* + \Delta \sigma_0^*) (1 - v^* - 2(v^*)^2)}{E^*} - 2Av^* \right) (z + \Delta z) &= \\ &= \frac{1}{E_1} (\sigma_0 + \Delta \sigma_0) (z + \Delta z) \\ \frac{(\sigma_0^* + \Delta \sigma_0^*) (1 - v^* - 2(v^*)^2)}{E^* (1 - v^*)} - \frac{2Av^*}{(1 - v^*)} &= \frac{1}{E_1} (\sigma_0 + \Delta \sigma_0), \end{aligned} \quad (24)$$

а з урахуванням (23) та (29) отримаємо співвідношення:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_1} &= \frac{1}{d^{\circ} + (f + \Delta f)(d^* - d^{\circ})} \left( -\frac{2v^*(f + \Delta f)v^{\circ}}{d_1 - d_2} d^* + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{(1 - v^* - 2(v^*)^2)}{E^*(1 - v^*)} + \frac{2v^*}{(1 - v^*)} \frac{v^*(f + \Delta f)E^{\circ}(1 - v^*) + d_1 - d_2}{d_1 - d_2} \right) d^{\circ} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Після перетворень отримуємо формулу для визначення поздовжнього модуля пружності композиційного матеріалу з ізотропними матрицею і волокном:

$$E_1 + \Delta E_1 = \frac{(\alpha - 2v^{\circ}\beta)E^*(1 - (f + \Delta f)) + (\alpha - 2v^{\circ}\beta)E^{\circ}(f + \Delta f)}{\alpha - 2\beta v^{\circ} + 2(f + \Delta f)v^*E^{\circ}(v^{\circ} - v^*)} \quad (26)$$

з урахуванням співвідношень

$$\begin{aligned} \alpha &= E^*(1 - (f + \Delta f))(1 - v^{\circ}) + E^{\circ}((f + \Delta f)(1 - v^*) + (1 + v^*)); \\ \beta &= v^{\circ}E^*(1 - (f + \Delta f)) + v^*(f + \Delta f)E^{\circ}, \end{aligned} \quad (27)$$

отримаємо формулу для модуля пружності:

$$\begin{aligned} E_1 + \Delta E_1 &= \frac{\alpha E^*(1 - f) + \alpha E^{\circ}f + 2\beta f(v^{\circ}E^* - v^*E^{\circ}) +}{\alpha - 2\beta v^{\circ} + 2fv^*E^{\circ}(v^{\circ} - v^*) +} \\ &+ \frac{\Delta f \left[ \alpha(E^{\circ} - E^*) + 2\beta(v^{\circ}E^* - v^*E^{\circ}) \right]}{\Delta f \left[ 2v^*E^{\circ}v^{\circ} - 2E^{\circ}(v^*)^2 \right]}. \end{aligned}$$

Із першої з умов (23) знайдемо співвідношення  $-v_{12}/E_1$  для композиційного матеріалу. Тоді, з урахуванням виразу для  $A$  (23), отримуємо

$$\frac{(f + \Delta f)v^*(1 - v^*)}{d_1 - d_2} \Delta(\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*) - \frac{v_{12}}{E_1} \Delta \frac{(f + \Delta f)E^*(1 - v^*) + d_1 - d_2}{d_1 - d_2} \times$$

$$\times (\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*) + \frac{B}{(b + \Delta b)^2} = -\frac{v_{12}}{E_1} (\sigma_0^* + \Delta\sigma_0^*) \quad (28)$$

Підставляючи в останній вираз співвідношення для  $B$  (23), остаточно отримуємо:

$$-\frac{v_{12}}{E_1} = \frac{1}{(d^* + (f + \Delta f)(d^* - d^*))} \times$$

$$\times \left( \frac{2(f + \Delta f)v d^*}{d_1 - d_2} - \frac{v^*}{E^*} \frac{2(f + \Delta f)E^*(d_1 - d_2)d^*}{d_1 - d_2} \right).$$

Використовуючи співвідношення для ефективного поздовжнього модуля пружності композиційного матеріалу, отримуємо співвідношення для коефіцієнта Пуассона:

$$v_{12} + \Delta v_{12} = \frac{(\alpha - 2v\beta)v^* + f(2E^*v^* - 2E^*v^*) + \Delta f(2E^*v^* - 2E^*v^*)}{\alpha - 2\beta v^* + 2f(v^*E^*v^* - 2(v^*)^2 E^*) + \Delta f(2v^*E^*v^* - 2(v^*)^2 E^*)}. \quad (30)$$

Розглянемо гумовокордний матеріал з ізотропною матрицею та ізотропним кордом з такими пружними характеристиками: модуль пружності текстильного корда  $E^o = 1,6 \cdot 10^3$  МПа, коефіцієнт Пуассона  $v = 0,8$ , модуль пружності гуми  $E^* = 4,5$  МПа, коефіцієнт Пуассона  $v^* = 0,49$ .

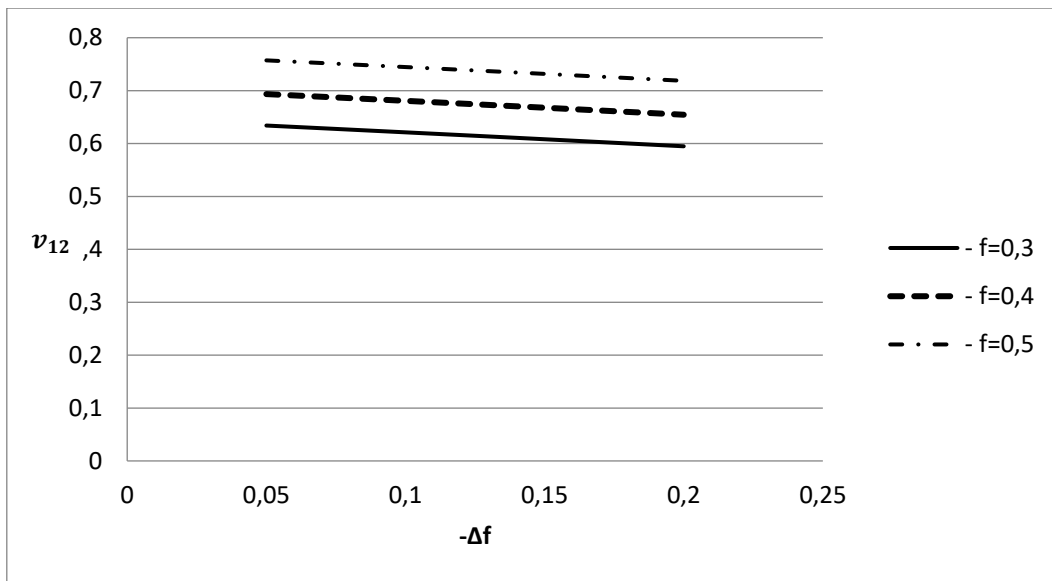


Рис. 2. Залежність коефіцієнта Пуассона від об'ємного вмісту корда у композиті

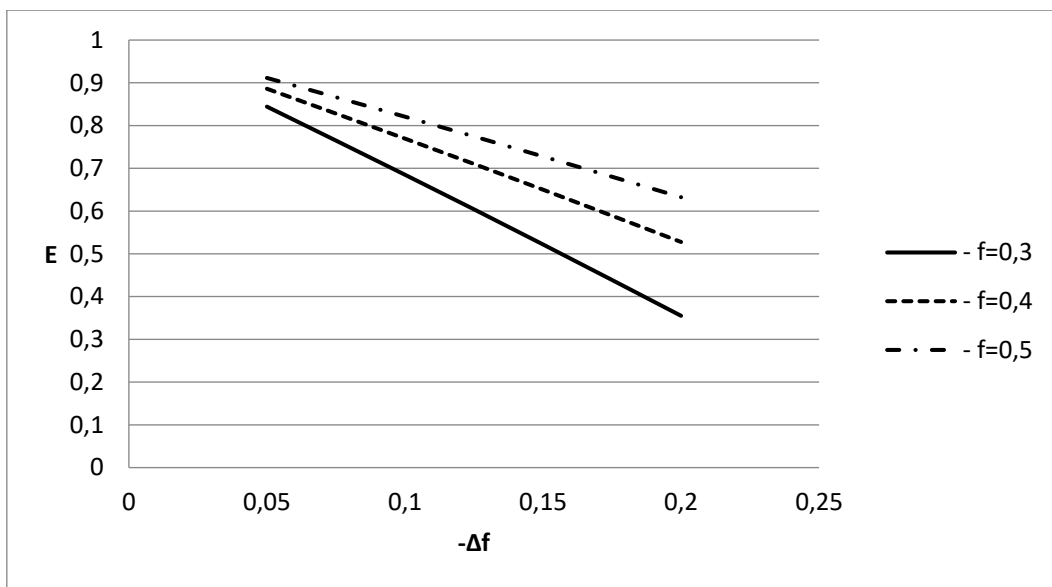


Рис. 3. Залежність модуля пружності від об'ємного вмісту корда у композиті

Отримані результати у частинному випадку ізотропії співпадають з результатами роботи [3] для лінійного випадку, а значення модуля пружності із збільшенням рівня деформацій зменшується. Аналогічна картина спостерігається й для коефіцієнта Пуассона.

Як можна зауважити з наведених графіків, для реальних композиційних матеріалів, при зміні об'ємного вмісту волокна до 15% в процесі деформування, значно впливає на ефективний поперечний модуль пружності, який змінюється у 1,5–2 рази для різних значень початкового об'ємного вмісту волокна (рис. 3). Для

ефективного коефіцієнта Пуассона цей вплив менш суттєвий – до 10% (рис. 2). Хоча характер залежностей і нелінійний, для досліджуваного композиційного матеріалу він досить близький до лінійного при заданих параметрах деформування матеріалу.

У роботі вперше отримано аналітичні залежності для ефективних характеристик односпрямованого волокнистого композиційного матеріалу – поперечного модуля пружності та коефіцієнта Пуассона – із врахуванням рівня деформування, що відображається у зміні об'ємного вмісту компонентів у композиті.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Димитриєнко Ю.И., Губарева Е.А., Каримов С.Б., Кольжанова Д.Ю. Моделирование эффективных характеристик трансверсально-изотропных несжимаемых композитов с конечными деформациями. *Математическое моделирование и численные методы*. 2018. № 1. С. 72–91.
2. Думанский А.М. Накопление повреждений и деформирование волокнистых композитов. *Научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*. 2014. № 1. С. 250–257.
3. Гребенюк С.М., Гоменюк С.І., Клименко М.І. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2019. 350 с.
4. Гребенюк С.М., Клименко М.І. Визначення ефективного модуля пружності композита при нормальному розподілі модулів пружності волокна та матриці. *Вестник Херсонского национального технического университета*. 2014. Вип. 3(№ 50). С. 254–258.
5. Димитриєнко Ю.И. Моделирование нелинейно-упругих характеристик композитов с конечными деформациями методом асимптотического осреднения. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 2015. № 11. С. 6–77.
6. Русланцев А.Н., Думанский А.М. Модель нелинейного деформирования и накопление повреждений в полимерных композитах. *Машиностроение и компьютерные технологии*. 2014. № 2. С. 324–331.
7. Suganyadevi Sarangan, Singh B. N. Nonlinear free vibration analysis of laminated composite plates and shell panels using non-polynomial higher-order sheared deformation theory. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2021. № 6. С. 14–25.
8. Tuan Le-Manh, Jaehong Lee. Isogeometric analysis for flexural behavior of composite plates considering large deformation with small rotations. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2016. № 23. С. 328–336.
9. Емельянов А.Н. Эффективные характеристики волокнистых композитов в линейной моментной теории упругости. *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика*. 2016. № 3. С. 66–70.
10. Стружанов В.В., Бурмашева Н.В. Теория упругости: основные положения : учеб. пособие. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2019. 204 с.

#### REFERENCES

1. Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Karimov S.B., Kolzhanova D.Yu. (2018) *Modelirovanie effektivnykh kharakteristik transversal'no-izotropnykh neshzimaemykh kompozitov s konechnymi deformatsiyami* [Modeling of effective characteristics of transversely-isotropic incompressible composites with finite deformations]. *Moscow State Technical University*, no.1, pp. 72–91.
2. Dumansky A.M. (2014) *Nakoplenie povrezhdeniy i deformirovanie voloknistykh kompozitov* [Accumulation of damages and deformation of fibrous composites]. *Moscow State Technical University. N.E. Bauman*, no.1, pp. 250–257.
3. Grebenyuk S.M., Gomenyuk S.I., Klimenko M.I. (2019) *Napruzhenno-deformovaniy stan prostorovikh konstruktсий na osnovi gomogenizatsii voloknistykh kompozitiv* [Stress-strain state of spatial structures based on homogenization of fibrous composites] Kherson: *Helvetica Publishing House*. (in Ukrainian)
4. Grebenyuk S.M., Klimenko M.I. (2014) *Viznachennya effektivnogo modulya pruzhnosti kompozita pri normal'nomu rozpodili moduliv pruzhnosti volokna ta matritsi* [Determination of the effective modulus of elasticity of the composite at a normal distribution of modulus of elasticity of the fiber and matrix], vol. 3, no.50, pp. 254–258.

5. Dimitrienko Yu.I. (2015) *Modelirovanie nelineynno-uprugikh kharakteristik kompozitov s konechnimi deformatsiyami metodom asimptoticheskogo osredneniya* [Modeling of nonlinear-elastic characteristics of composites with finite deformations by the method of asymptotic averaging]. *MSTU im. N.E. Bauman*, no.11, pp. 68–77.
6. Ruslantsev A. N., Dumansky A. M. (2014) *Model' nelineynogo deformirovaniya i nakoplenie povrezhdeniy v polimernykh kompozitakh* [Nonlinear deformation and damage accumulation model in polymer composites]. *MSTU im. N.E. Bauman*, no. 2, pp. 324–331.
7. Suganyadevi Sarangan, Singh B. N. (2021) [Nonlinear free vibration analysis of laminated composite plates and shell panels using non-polynomial higher-order sheared formation theory]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, no. 6, pp. 14–25.
8. TuanLe-Manh, TuanLuu-Anh, JaehongLee (2016), "Isogeometric analysis for flexural behavior of composite plates considering large deformation with small rotations", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, no. 23, pp. 328–336.
9. Emelyanov A.N. (2016) *Effektivnye kharakteristiki voloknistykh kompozitov v lineynoy momentnoy teorii uprugosti* [Effective characteristics of fibrous composites in the linear moment theory of elasticity]. *Moscow State University. M.V. Lomonosov*, no.3, pp. 66–70.
10. Struzhanov V.V., Burmasheva N.V. (2019) *Teoriya uprugosti: osnovnye polozheniya : ucheb. posobie* [Theory of elasticity: the main provisions: textbook]. *Ural Publishing House*. p. 204. (in Russian)

УДК 539.3  
DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2022-1-03>

## ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ОРТОТРОПНОЇ ПІВПЛОЩИНИ В УМОВАХ ПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

**Дзундза Н. С.**

*аспірантка кафедри загальної математики  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0003-4075-474X](https://orcid.org/0000-0003-4075-474X)  
[natalii.dzundza@gmail.com](mailto:natalii.dzundza@gmail.com)*

**Зіновєєв І. В.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
завідувач кафедри загальної математики  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0002-7392-2327](https://orcid.org/0000-0002-7392-2327)  
[zinoveyev@gmail.com](mailto:zinoveyev@gmail.com)*

**Ключові слова:** пружна ортотропна півплощина, плоска деформація, напружено-деформований стан, функція напружень, інтегральне перетворення Фур'є.

Розглядається перша основна гранична задача теорії пружності про визначення напружено-деформованого стану ортотропної півплощини в умовах плоскої деформації. На межі  $y = 0$  відомі навантаження. На нескінченності напруження прямують до нуля. Необхідно визначити напруження та переміщення в довільній точці півплощини.

Наводиться короткий огляд наукових праць, у яких висвітлюються методи та підходи розв'язання задач теорії пружності, міцності щодо визначення напружень і деформацій в ортотропних тілах, зокрема пластинах, плитах, балках.

Розв'язок поставленої граничної задачі для ортотропної півплощини шукається у просторі трансформант одновимірного інтегрального перетворення Фур'є. Усі основні рівняння задачі та граничні умови піддаються прямому перетворенню одновимірного інтегрального перетворення Фур'є.

Розв'язання сформульованої плоскої задачі базується на побудові трансформанти Фур'є функції напружень, яка задовольняє відповідному аналогу бігармонічного диференціального рівняння у просторі трансформант для випадку ортотропного матеріалу.

Вигляд трансформанти функції напружень залежить від значень пружних сталих ортотропного матеріалу, а саме від значень коренів отриманого у просторі трансформант характеристичного рівняння. Розглянуто один із трьох можливих випадків.

Установлюються співвідношення між трансформантою функції напружень і трансформантами напружень і переміщень. Трансформанти функції напружень виражаються через чотири допоміжні функції, які пов'язані з навантаженнями на поверхні півплощини. З умов на межі  $y = 0$  знаходимо дві із чотирьох допоміжних функцій. Умови на нескінченності дозволили встановити зв'язок між двома знайденими допоміжними функціями та двома іншими. Після підстановки знайдених виразів у трансформанти напружень і переміщень і застосування оберненого інтегрального перетворення Фур'є отримуємо істинні значення напружень і переміщень в точках ортотропної півплощини.

Отримано розв'язки для конкретних випадків і проведено аналіз числових результатів. Отримані розрахунки свідчать про адекватність результатів і логічність застосування обраного методу для розв'язання поставленої задачі.

---

## RESEARCH OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THE ORTHOTROPIC HALF-PLANE UNDER THE PLANAR DEFORMATION CONDITIONS

**Dzundza N. S.**

*Postgraduate Student at the Department of General Mathematics  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0003-4075-474X  
natalii.dzundza@gmail.com*

**Zinovieiev I. V.**

*Philosophy Doctor, Associate Professor,  
Professor at the Department of General Mathematics  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-7392-2327  
zinoveyev@gmail.com*

**Key words:** *elastic orthotropic half-plane, planar deformation, stress-strain state, stress function, integral Fourier transformation.*

The first basic boundary problem of the elasticity theory connected with the determination of the stress-strain state of the orthotropic half-plane under the planar deformation conditions has been considered. The stresses at the boundary  $y = 0$  are known. The stresses tend to zero at infinity. It is necessary to determine the stress and displacement at any point of the half-plane.

A brief overview of the scientific works which highlight the methods and approaches to solving the problems of the theory of elasticity, the strength as for the determination of stresses and deformations in orthotropic bodies, in particular plates, slabs, and beams is provided.

The solution of the given boundary problem for the orthotropic half-plane is sought in the transformant space of the one-dimensional integral Fourier transformation. At the same time, all the main equations of the problem and the boundary conditions are subjected to direct one-dimensional integral Fourier transformation.

The solution of the formulated planar problem is based on the construction of the Fourier transform of the stress function, which satisfies the corresponding analogue of the biharmonic differential equation in the transformant space for the case of an orthotropic material.

The form of the transformant of the stress function depends on the values of the orthotropic material elastic constants, namely on the values of the roots of the characteristic equation obtained in the transformant space. One of three possible cases have been considered.

The relations between the transformant of the stress function and the transformants of stresses and displacements are established. The transformants of the stress function are expressed in terms of four auxiliary functions, which are related to the loads on the surface of the half-plane. We find two auxiliary functions from the boundary condition ( $y = 0$ ). The infinity conditions make it possible to establish the connection between two found auxiliary functions and the other two functions. After substituting the found expressions into transformants of stresses and displacements and applying the inverse integral



Fourier transformation, we obtain the true values of stresses and displacements at the points of the orthotropic half-plane. The solutions for the specific cases have been obtained and the numerical results have been analyzed. The obtained calculations demonstrate the adequacy of the results and the logic of using the chosen method for the solution of the given problem.

**Вступ.** У механіці особливе місце належить дослідженням напружено-деформованого стану конструкцій, пружних тіл із різних матеріалів. Ортотропні матеріали, що використовуються в багатьох галузях промисловості, мають високу міцність, жорсткість.

Сучасний стан досліджень задач на знаходження напружено-деформованого стану тіл представлений великою кількістю робіт, у яких застосовуються різні методи. У праці О.Г. Кучера [1] використовується метод скінчених елементів для розрахунку деформованого стану багатопарової криволінійної ортотропної пластини. У статті S.J. Antony, K. Chandrasherhara [2] застосовується комбінація методу скінчених елементів і аналітичного підходу до розрахунку деформації ортотропного тіла. Для підвищення точності розрахунків у порівнянні з методом скінчених елементів у роботах Н.В. Здолбіцької, М.В. Делявського [3; 4] було розроблено аналітико-числовий метод мікроелементів, який застосовано для розрахунку тонких ортотропних плит на пружній основі Вінклера. У своїх роботах О.В. Горик, С.Б. Ковальчук [5; 6] описують аналітичний метод розрахунку двохпорних багатопарових ортотропних балок. Також заслуговує на увагу робота М.В. Жука та Н.М. Щербини [7], у якій наведено підхід, що поєднує метод Канторовича і матрицантний числово-аналітичний метод розв'язування задачі на згин ортотропної пластини. Внесок у чисельно-аналітичні методи знаходження напружено-дефор-

мованого стану зробив також А.Я. Григоренко, який у своїй праці [8] запропонував поєднання методу сплайн-колокації та методу дискретної ортогоналізації для розв'язання прямокутної ортотропної пластини. J. Schroder, F. Gruttmann, J. Loblein у статті [9] представили скінченноелементну модель поведінки ортотропного пружно-пластичного матеріалу за скінчених деформацій, яка для одного окремого випадку зводиться до теорії Гріна-Нагді.

Отже, можна зробити висновок, що розроблення ефективних методів дослідження властивостей таких матеріалів, зокрема напружено-деформованого стану, є актуальною проблемою і нині.

**Постановка завдання.** Розглядається перша основна гранична задача теорії пружності про визначення напружено-деформованого стану ортотропної півплощини без дефектів в умовах плоскої деформації.

На межі  $y=0$  відомі навантаження  $\sigma_y(x,0) = f_1(x), \tau_{xy}(x,0) = f_2(x)$ . На нескінченності напруження прямують до нуля. Ортотропна півплощина займає область  $G(x,y): \{-\infty < x < +\infty, 0 \leq y < +\infty\}$ . Для математичної постановки введемо систему координат так, як подано на рис. 1. Матеріал півплощини характеризується пружними константами  $\nu_{xz}, \nu_{xy}, \nu_{yz}, \nu_{zy}, E_x, E_y$ .

Потрібно визначити напруження та переміщення в довільній точці півплощини за умови, що деформація плоска.

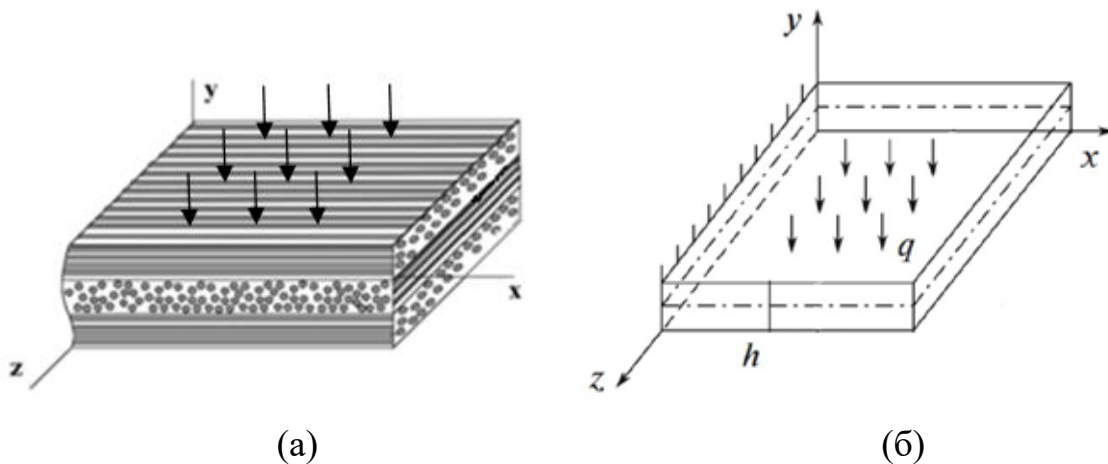


Рис. 1. Фізична (а) і геометрична (б) постановка завдання

**Методи.** Одним із методів розв’язання задач визначення напружено-деформованого стану тіл, необмежених у плані (шарів, багат шарових основ, півплощин), є метод інтегральних перетворень. Даний метод у поєднанні з методом функцій податливості для ізотропних матеріалів запропонований і розвинутий у роботах А.К. Приварникова та його учнів, наприклад: [10; 11; 12]. Поставимо за мету поширити метод, розроблений у роботах А.К. Приварникова, на випадок ортотропної півплощини.

Задача визначення напружено-деформованого стану півплощини має різні методи розв’язання. Одним із таких підходів є метод визначення напружень за допомогою функції напружень  $\varphi(x, y)$  (функції Ері). Функція напружень може бути подана у вигляді алгебраїчних поліномів (у цілих функціях), тригонометричних рядів (розв’язок Файлона або Рів’єра) або за допомогою кінцевих різниць (метод сіток) [13]. Причому функція напружень  $\varphi(x, y)$  обирається так, щоб тотожно задовольняла умовам:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (1)$$

Розглянемо підхід, що базується на застосуванні методу одновимірного інтегрального перетворення Фур’є [12] до функції напружень за змінною  $x$ .

$$\bar{\varphi}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) \cdot e^{i\xi x} dx, \varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\xi, y) \cdot e^{-i\xi x} d\xi. \quad (2)$$

Перша формула визначає пряме одновимірне інтегральне перетворення Фур’є для функції  $\varphi(x, y)$ , друга – обернене. Функція  $\bar{\varphi}(\xi, y)$  називається трансформантою Фур’є функції  $\varphi(x, y)$ . Має місце властивість [10]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^k \varphi(x, y)}{\partial x^k} \cdot e^{i\xi x} dx = (-i\xi)^k \cdot \bar{\varphi}(\xi, y). \quad (3)$$

Беручи до уваги особливості ортотропного матеріалу, маємо не звичайне бігармонічне диференціальне рівняння, а його аналог, до якого застосуємо інтегральне перетворення Фур’є й отримаємо рівняння [15]:

$$A_1 \cdot \frac{d^4 \bar{\varphi}}{dy^4} - 2A_3 \xi^2 \cdot \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dy^2} + A_2 \xi^4 \cdot \bar{\varphi} = 0, \quad (4)$$

де

$$c_{11} = \frac{1 - \nu_{xz} \cdot \nu_{zx}}{E_x}, c_{22} = \frac{1 - \nu_{yz} \cdot \nu_{zy}}{E_y}, c_{33} = \frac{1}{G_{xy}},$$

$$c_{12} = c_{21} = \frac{\nu_{xy} + \nu_{xz} \cdot \nu_{zy}}{E_y} = \frac{\nu_{yx} + \nu_{zx} \cdot \nu_{yz}}{E_x},$$

$G_{xy} = \frac{\sqrt{E_x \cdot E_y}}{2 \cdot (1 + \sqrt{\nu_{xy} \cdot \nu_{yx}})}$  – константи пружності в законі Гука,  $A_1 = c_{11}, A_2 = c_{22}, A_3 = \frac{c_{33}}{2} - c_{12}, \bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\xi, y)$  – трансформанта Фур’є за змінною  $x$  від  $\varphi(x, y)$ .

Запишемо відповідне до (4) характеристичне рівняння:

$$r^4 - \frac{2A_3 \lambda^2}{A_1} \cdot r^2 + \frac{A_2 \lambda^4}{A_1} = 0, \lambda = |\xi|.$$

Розв’язавши це рівняння, отримаємо корені:

$$r_{1,4} = \pm \sqrt{\frac{A_3 \lambda^2}{A_1} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{A_1 A_2}{A_3^2}}\right)} = \pm \lambda \cdot \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \cdot \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{A_1 A_2}{A_3^2}}}. \quad (5)$$

Залежно від умов задачі можливі три випадки  $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} > 1, \frac{A_1 A_2}{A_3^2} < 1, \frac{A_1 A_2}{A_3^2} = 1$ . Розглянемо задачу за умови  $\frac{A_1 A_2}{A_3^2} = 1$ , тоді з (5) отримаємо дійсні кратні

корні  $r_{1,2} = |\xi| \cdot \sqrt{\frac{A_3}{A_1}}$  і  $r_{3,4} = -|\xi| \cdot \sqrt{\frac{A_3}{A_1}}$ , а трансформанта функції напруження  $\bar{\varphi}(\xi, y)$  може бути представлена у вигляді (6):

$$\bar{\varphi} = A sh(ry\sqrt{a}) + B\sqrt{a}y sh(ry\sqrt{a}) + C ch(ry\sqrt{a}) + D\sqrt{a}y ch(ry\sqrt{a}), \quad (6)$$

де  $r = |\xi|, \sqrt{a} = \sqrt{\frac{A_3}{A_1}}, A, B, C, D$  – функції параметра  $\xi$ .

Ураховуючи зв’язок функції напружень  $\varphi(\xi, y)$  з напруженнями  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  та властивість перетворення Фур’є (3), отримаємо відповідні вирази у просторі трансформант Фур’є:

$$\bar{\sigma}_x(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot e^{i\xi x} dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \cdot e^{i\xi x} dx = \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2},$$

$$\bar{\sigma}_y(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot e^{i\xi x} dx = -\xi^2 \bar{\varphi},$$

$$\bar{\tau}_{xy}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot e^{i\xi x} dx = -\frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot e^{i\xi x} dx = i\xi \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}.$$

Враховуючи (6), отримаємо:

$$\bar{\sigma}_x(\xi, y) = r^2 a \bar{\varphi} + 2ra \cdot (B ch(ry\sqrt{a}) + D sh(ry\sqrt{a})), \bar{\sigma}_y(\xi, y) = -\xi^2 \bar{\varphi},$$

$$\bar{\tau}_{xy}(\xi, y) = i\xi (A\sqrt{a} + Bary + D\sqrt{a}) \cdot ch(ry\sqrt{a}) + (C\sqrt{a} + Dary + B\sqrt{a}) \cdot sh(ry\sqrt{a}). \quad (7)$$

З формул  $\varepsilon_x = c_{11} \sigma_x - c_{12} \sigma_y, \gamma_{xy} = c_{33} \tau_{xy}$  отримаємо трансформанти переміщень:

$$\begin{aligned}\bar{u}_x(\xi, y) &= \frac{i}{\xi} \cdot \left( \xi^2 \bar{\varphi} \cdot (c_{11}a + c_{12}) + 2rac_{11} \left( Bch(ry\sqrt{a}) + Dsh(ry\sqrt{a}) \right) \right), \\ \bar{u}_y(\xi, y) &= -\frac{2rac_{11}}{\xi^2} \cdot \left( Br\sqrt{a}sh(ry\sqrt{a}) + Dr\sqrt{a}ch(ry\sqrt{a}) \right) + (ac_{11} + c_{12} - c_{33}) \cdot \frac{d\bar{\varphi}}{dy}.\end{aligned}\quad (8)$$

Уведемо в розгляд функції  $\alpha(\xi), \delta(\xi), \beta(\xi), \varepsilon(\xi)$ , пов'язані з умовами на межі  $y=0$  [10]:

$$\begin{aligned}\alpha(\xi) &= \bar{\sigma}_y|_{y=0} = -C\xi^2, \delta(\xi) = -\frac{i\xi}{r} \cdot \bar{\tau}_{xy}|_{y=0} = \sqrt{a} \cdot (Ar^2 + Dr), \\ \beta(\xi) &= \frac{r}{2ac_{11}} \cdot \bar{u}_y|_{y=0} = Dr\sqrt{a} + \frac{\delta(\xi) \cdot (ac_{11} + c_{12} - c_{33})}{2ac_{11}}, \\ \gamma(\xi) &= -\frac{i\xi}{2ac_{11}} \cdot \bar{u}_x|_{y=0} = Br - \frac{\alpha(\xi) \cdot (ac_{11} + c_{12})}{2ac_{11}}.\end{aligned}\quad (9)$$

Виразимо  $A, B, C, D$  через  $\alpha(\xi), \delta(\xi), \beta(\xi), \varepsilon(\xi)$ , отримаємо:

$$\begin{aligned}A &= \frac{-2ac_{11}\beta + 3ac_{11}\delta + c_{12}\delta - c_{33}\delta}{2a\sqrt{ar^2c_{11}}}, B = \frac{ac_{11}\alpha + 2ac_{11}\gamma + c_{12}\alpha}{2arc_{11}}, \\ C &= -\frac{\alpha}{r^2}, D = \frac{2ac_{11}\beta - ac_{11}\delta - c_{12}\delta + c_{33}\delta}{2a\sqrt{arc_{11}}}.\end{aligned}\quad (10)$$

Тепер підставимо отримані вирази у трансформанти напружень:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_x(\xi, y) &= (a^2c_{11}ry\alpha + 2a^2c_{11}ry\gamma + ac_{12}ry\alpha + 2ac_{11}\beta + ac_{11}\delta - c_{12}\delta + c_{33}\delta) \cdot \\ &\cdot \frac{sh(ry\sqrt{a})}{2\sqrt{ac_{11}}} + \frac{ch(ry\sqrt{a})}{2c_{11}} \cdot (2ac_{11}ry\beta - ac_{11}ry\delta - c_{12}ry\delta + c_{33}ry\delta + 4ac_{11}\gamma + 2c_{12}\alpha), \\ \bar{\sigma}_y(\xi, y) &= (a^2c_{11}ry\alpha + 2a^2c_{11}ry\gamma + ac_{12}ry\alpha - 2ac_{11}\beta + 3ac_{11}\delta + c_{12}\delta - c_{33}\delta) \cdot \\ &\cdot \frac{sh(ry\sqrt{a})}{-2a\sqrt{ac_{11}}} + \frac{ch(ry\sqrt{a})}{2ac_{11}} \cdot (-2ac_{11}ry\beta + ac_{11}ry\delta + c_{12}ry\delta - c_{33}ry\delta + 2ac_{11}\alpha), \\ \bar{\tau}_{xy}(\xi, y) &= (-2ac_{11}ry\beta + ac_{11}ry\delta + c_{12}ry\delta - c_{33}ry\delta + ac_{11}\alpha - 2ac_{11}\gamma - c_{12}\alpha) \cdot \\ &\cdot \frac{i\xi \cdot sh(ry\sqrt{a})}{-2\sqrt{ac_{11}}r} + \frac{i\xi \cdot ch(ry\sqrt{a})}{2c_{11}r} \cdot (ac_{11}ry\alpha + 2ac_{11}ry\gamma + c_{12}ry\alpha + 2c_{11}\delta).\end{aligned}\quad (11)$$

Аналогічно підставимо отримані вирази у трансформанти переміщень:

$$\begin{aligned}\bar{u}_x(\xi, y) &= (a^3c_{11}^2ry\alpha + 2a^3c_{11}^2ry\gamma + 2a^2c_{11}c_{12}ry\alpha + 2a^2c_{11}c_{12}ry\gamma + ac_{12}^2ry\alpha + 2a^2c_{11}^2\beta + a^2c_{11}^2\delta - 2ac_{11}c_{12}\beta + 2ac_{11}c_{12}\delta + ac_{11}c_{33}\delta + c_{12}^2\delta - c_{12}c_{33}\delta) \cdot \\ &\cdot \frac{ish(ry\sqrt{a})}{2a\sqrt{a\xi c_{11}}} + \frac{ich(ry\sqrt{a})}{2a\xi c_{11}} \cdot (2a^2c_{11}^2ry\beta - a^2c_{11}^2ry\delta + 2ac_{11}c_{12}ry\beta - 2ac_{11}c_{12}ry\delta + ac_{11}c_{33}ry\delta + 4a^2c_{11}^2\gamma - c_{12}^2ry\delta + c_{12}c_{33}ry\delta), \\ \bar{u}_y(\xi, y) &= (2a^2c_{11}^2ry\beta - a^2c_{11}^2ry\delta + 2ac_{11}c_{12}ry\beta - 2ac_{11}c_{33}ry\beta - 2ac_{11}c_{12}ry\delta + 2ac_{11}c_{33}ry\delta + a^2c_{11}^2\alpha + 6a^2c_{11}^2\gamma - c_{12}^2ry\delta + \\ &+ 2c_{12}c_{33}ry\delta - c_{33}^2ry\delta + 2ac_{11}c_{12}\alpha + ac_{11}c_{33}\alpha + 2ac_{11}c_{12}\gamma - 2ac_{11}c_{33}\gamma + c_{12}^2\alpha - c_{12}c_{33}\alpha) \cdot \frac{sh(ry\sqrt{a})}{2\sqrt{ac_{11}}r} + \frac{ch(ry\sqrt{a})}{2c_{11}r} \cdot \\ &\cdot (a^2c_{11}^2ry\alpha + 2a^2c_{11}^2ry\gamma + 2ac_{11}c_{12}ry\alpha - ac_{11}c_{33}ry\alpha + 2ac_{11}c_{12}ry\gamma - 2ac_{11}c_{33}ry\gamma + c_{12}^2ry\alpha - c_{12}c_{33}ry\alpha + 4ac_{11}^2\beta).\end{aligned}\quad (12)$$

Формули (11) для трансформант напружень є лінійними комбінаціями функцій  $sh(ry\sqrt{a}), ch(ry\sqrt{a})$  і  $rysh(ry\sqrt{a}), ry ch(ry\sqrt{a})$ , кожна з яких за  $r \neq 0$  і  $y \rightarrow \infty$  необмежено зростає. Водночас  $Ash(ry\sqrt{a}) + Bch(ry\sqrt{a})$ , і  $Crysh(ry\sqrt{a}) + Dry ch(ry\sqrt{a})$  прямує до 0 за нескінченності у випадках  $A + B = 0$  та  $C + D = 0$ . З яких ми отримуємо функції:

$$\beta(\xi) = \frac{-(a\sqrt{ac_{11}} + \sqrt{ac_{12}}) \cdot \alpha(\xi) - 2a\sqrt{ac_{11}} \gamma(\xi) + (ac_{11} + c_{12} - c_{33}) \cdot \delta(\xi)}{2ac_{11}},$$

$$\gamma(\xi) = \frac{(ac_{11} - c_{12}) \cdot \alpha(\xi) - 2\sqrt{ac_{11}} \cdot \delta(\xi)}{2ac_{11}}. \quad (13)$$

Отримані вирази підставляємо в (11), (12), отримуємо остаточні вирази для трансформант напружень і переміщень. Отримані вирази піддаємо оберненому інтегральному перетворенню й отримуємо істинні значення. В окремих випадках вдається отримати аналітичні вирази, у разі неможливості застосовується чисельне інтегрування за допомогою формул високого ступеня точності.

**Числові розрахунки.** Розглянемо ортотропну півплощину, матеріал якої характеризується пружними константами  $E_x = 1.73 \cdot 10^3$  МПа,  $E_y = 3.31 \cdot 10^3$  МПа,  $\nu_{xz} = 0.235$ ,  $\nu_{xy} = 0.26$ ,  $\nu_{yz} = 0.17$ ,  $\nu_{zy} = 0.3$ .

На межі  $y = 0$  задано навантаження  $\sigma_y(x, 0) = \frac{1}{x^2 + 1}$ ,  $\tau_{xy}(x, 0) = e^{-|x|}$ . За  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$  напруження дорівнюють нулю.

За формулами (2), (9), (13) маємо:

$$\alpha(\xi) = \pi \cdot e^{-|\xi|}, \delta(\xi) = -\frac{2i\xi}{(\xi^2 + 1) \cdot r},$$

$$\gamma(\xi) = \frac{1.175320840 \cdot re^{-|\xi|} (\xi^2 + 1) + 2.352246170i\xi}{(\xi^2 + 1) \cdot r},$$

$$\beta(\xi) = \frac{-2.671142753 \cdot re^{-|\xi|} (\xi^2 + 1) - 0.7482324860i\xi}{(\xi^2 + 1) \cdot r}.$$

Застосовуючи обернене перетворення Фур'є (2) до (11), (12), отримуємо істинні значення напружень і переміщень точок півплощини (рис. 2).

Як бачимо з наведених розрахунків, найбільші значення в околі  $x = 0$ . У разі віддалення від нуля значення зменшуються. Отримані результати свідчать про дотримання межових умов і умов на нескінченності  $\sigma_y(0, 0) = 1$  та  $\tau_{xy}(0, 0) = 1$ .

На рис. 3 наведено числові розрахунки для переміщень  $u_x, u_y$ .

Отримані результати цілком узгоджуються з очікуваною фізичною картиною розподілу напружень і переміщень у півплощині.

**Висновки.** Розглянутий підхід визначення напружено-деформованого стану ортотропної півплощини, що базується на застосуванні методу одновимірного інтегрального перетворення Фур'є до функції напружень.

На базі отриманих аналітичних розв'язків для ортотропної півплощини були зроблені числові розрахунки, побудовані графіки та виконаний їх аналіз. Отримані розрахунки свідчать про адекватність результатів і логічність застосування обраного методу для розв'язання поставленої задачі.

Наступним етапом досліджень є поширення описаного підходу на клас задач про визначення напружено-деформованого стану пружних шарів і багат шарових основ з урахуванням ортотропії матеріалу шарів.

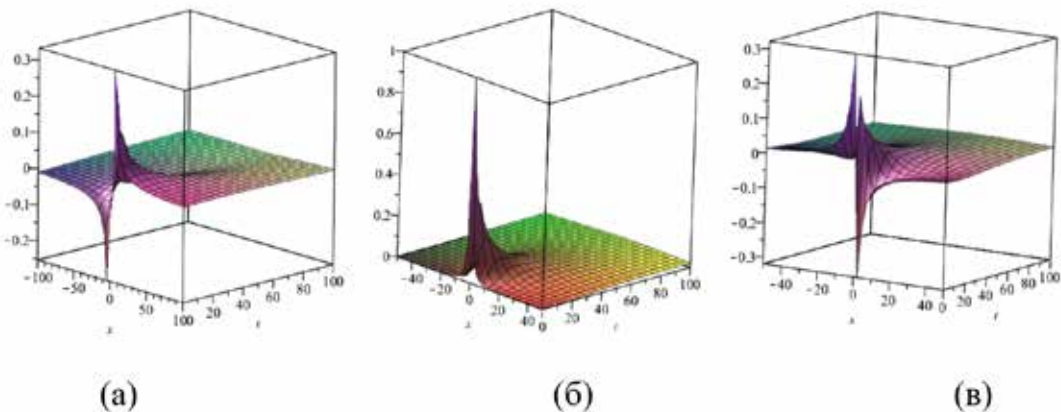


Рис. 2. Істинні значення напружень  $\tilde{A}_x(x, y)$  (а),  $\tilde{A}_y(x, y)$  (б) та  $\tilde{A}_{xy}(x, y)$  (в)

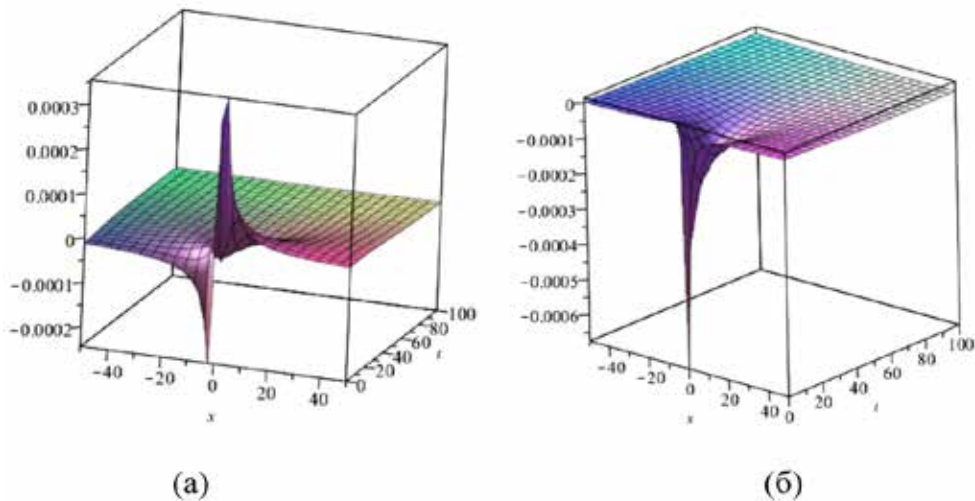


Рис. 3. Істинні значення переміщень  $u_x(x, y)$  (а),  $u_y(x, y)$  (б)

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Кучер О.Г., Харитон В.В. Розрахунок деформованого стану криволінійної багатошарової пластини методом скінченних елементів із числовим визначенням матриці жорсткості. *Вісник Національного авіаційного університету*. 2004. № 1 (1). С. 92–97.
2. Antony S.J., Chandrashekhara K. Contact Stresses for a Footing on an Orthotropic Elastic Medium. *Strain: an international Journal for Experimental Mechanics*. 1997. Vol. 33 (4). P. 127–132. DOI: 10.1111/j.1475-1305.1997.tb01060.x.
3. Напружено-деформований стан тонкої ортотропної плити на пружній основі / Н.В. Здолбіцька та ін. *Сучасні проблеми механіки і математики*. 2008. Т. 2. С. 40–42.
4. Визначення напружено-деформованого стану в тонких плитах ортотропних плит на пружній основі Вінклера / М.В. Делявський та ін. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2014. Т. 50. № 6. С. 15–22.
5. Kovalchuk S., Gorik A. Major stress-strain state of double support multilayer beams under concentrated load. Part 1. Model construction. *Journal of Mechanical Engineering*. 2018. Vol. 21 (4). P. 30–36.
6. Kovalchuk S., Gorik A. Major stress-state of double support multilayer beams under concentrated load. Part 2 : Model implementation and calculation results. *Journal of Mechanical Engineering*. 2019. Vol. 22 (1). P. 24–32. DOI: 10.15407/pmach2019.01.024.
7. Аналітико-числовий підхід до розв'язування задачі про згин прямокутних ортотропних пластин на пружній основі / М. Жук та ін. *Вісник Львівського університету. Серія «Прикладна математика та інформатика»*. 2014. № 21. С. 84–98.
8. О напруженно-деформированном состоянии ортотропных толстостенных прямоугольных пластин / А.Я. Григоренко и др. *Доповіді Національної академії наук України. Серія «Математика, природознавство, технічні науки»*. 2011. № 9. С. 49–55.
9. A simple orthotropic finite elasto–plasticity model based on generalized stress-strain measures / J. Schröder et al. *Computational Mechanics*. 2002. Vol. 30. P. 48–64. DOI: 10.1007/s00466-002-0366-3.
10. Приварников А.К. Двумерные граничные задачи теории упругости для многослойных оснований. Запорожье : Запорожский государственный университет, 1990. 84 с.
11. Приварников А.К., Ламзюк В.Д. Упругие многослойные основания. Днепропетровск : Днепропетровский университет, 1985. 162 с.
12. Приварников А.К. О контакте слоя с упругим полупространством. *Механика твердого тела*. 1972. № 4. С. 163–167.
13. Бейгул О.О., Лепетова Г.Л. Методи теорії пружності для дослідження та розрахунків обладнання : навчальний посібник. Дніпродзержинськ : Дніпродзержинський держ. техн. ун-т, 2016. 56 с.
14. Перетворення Фур'є, Лапласа: узагальнення та застосування : навчально-методичний посібник / Г.П. Лопушанська та ін. Львів : Видавництво Львівського університету, 2014. 153 с.
15. Дзундза Н.С., Зіновєєв І.В. Алгоритм знаходження напружено-деформованого стану пружного ортотропного шару. *Scientific discussion*. 2022. Vol. 1 (64). P. 16–20.

## REFERENCES

1. Kucher O.G., Kharyton V.V. (2004). Definition of the deformed shape of a layered curved plate by final elements method with numerical definition of the stiffness matrix. *Visnyk of the National Aviation University*, 1 (1), pp. 92–97 (in Ukrainian).
2. Antony S.J., Chandrashekhara K. (1997). Contact Stresses for a Footing on an Orthotropic Elastic Medium. *Strain: an international Journal for Experimental Mechanics*, 33 (4), pp. 127–132. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1475-1305.1997.tb01060.x>.
3. Zdolbitska N., Delyavskyy M., Zdolbitskyy A. (2008). Stress-strain state of a thin orthotropic plate on an elastic basis. *Modern problems of mechanics and mathematics*. Vol. 2. Pp. 40–42 (in Ukrainian).
4. Delyavskyy M., Zdolbitska N., Zdolbitskyy A., Onishko L. (2014). Determination of the stress-strain state in thin orthotropic plates resting on the elastic Vinkler's foundation. *Physicochemical Mechanics of Materials*. 50 (6), pp. 15–22 (in Ukrainian).
5. Kovalchuk S., Gorik A. (2018). Major stress-strain state of double support multilayer beams under concentrated load. Part 1. Model construction. *Journal of Mechanical Engineering*. Vol. 21 (4), pp. 30–36.
6. Kovalchuk S., Gorik A. (2019). Major stress-state of double support multilayer beams under concentrated load. Part 2. Model implementation and calculation results. *Journal of Mechanical Engineering*. Vol. 22 (1), pp. 24–32. DOI: <https://doi.org/10.15407/pmach2019.01.024>.
7. Zhuk M., Kindybaljuk Adrana, Shcherbyna N. (2014). Analytically-numerical approach to solution of the problem of bending of orthotropic rectangular plates resting on an elastic foundation. *Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics*. Vol. 21. Pp. 84–98 (in Ukrainian).
8. Grigorenko A.Ya., Bergulyov A.S., Yaremchenko S.N. (2011). Stress-strain state of thick-walled orthotropic rectangular plates. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*. Vol. 9. Pp. 49–55 (in Russian).
9. Schröder J., Gruttmann F., Löblein J. (2002). A simple orthotropic finite elasto-plasticity model based on generalized stress–strain measures. *Computational Mechanics*. Vol. 30, pp. 48–64. DOI: 10.1007/s00466-002-0366-3.
10. Privarnikov A.K. Two-dimensional boundary value problems of the theory of elasticity for multilayer based. Zaporizhzhia : Zaporizhzhia National University, 1990. 84 p. (in Russian).
11. Pryvarnikov A.K., Lamzyuk V.D. Elastic multi-layer foundations. Dnipropetrovsk University. Dnipropetrovsk, 1985. 162 p. (in Russian).
12. Privarnikov A.K. (1972). On the contact of a layer with an elastic half-space. *Solid body mechanics*. Vol. 4. Pp. 163–167 (in Russian).
13. Beigul O., Lepetova G. Methods of the theory of elasticity for research and calculations of equipment: textbook. Dniprodzerzhynsk : Dniprodzerzhynsk state. tech. university, 2016. 56 p. (in Ukrainian).
14. Lopushanska G.P., Lopushanskyj A., Myaus O. Fourier transform, Laplace: generalization and application. Lviv : LNU, 2014. 153 p. (in Ukrainian).
15. Dzundza N., Zinovieiev I. (2022). Algorithm of finding the stress-strain state deforming of the elastic orthotropic layer. *Scientific discussion*. Vol. 1 (64), pp. 16–20 (in Ukrainian).

УДК 539.3  
DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2022-1-04>

## ДОСЛІДЖЕННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОЇ СМУГИ ЗА ПІДСИЛЕННЯ СКІНЧЕННИМ ПРУЖНИМ СТРИНГЕРОМ

**Діхтярук М. М.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань  
Хмельницький національний університет  
вул. Інститутська, 11, Хмельницький, Україна  
[orcid.org/0000-0002-0819-3842](https://orcid.org/0000-0002-0819-3842)  
[mega-dihtyaruk@ukr.net](mailto:mega-dihtyaruk@ukr.net)*

**Кравчук О. А.**

*старший викладач кафедри вищої математики  
та комп'ютерних застосувань  
Хмельницький національний університет  
вул. Інститутська, 11, Хмельницький, Україна  
[orcid.org/0000-0001-6937-5001](https://orcid.org/0000-0001-6937-5001)  
[kravchukoa2@gmail.com](mailto:kravchukoa2@gmail.com)*

**Ключові слова:** лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактні задачі, інтегральне перетворення Фур'є.

У статті в рамках лінеаризованої теорії пружності розглядається контактна задача про підкріплення скінченним пружним стрингером попередньо напруженої пружної смуги. Пружна смуга вільною від підкріплення і навантаження гранню жорстко защемлена з основою. Задачу розв'язано для випадків рівних і нерівних коренів визначального рівняння у випадку пружних потенціалів довільної структури. Дослідження проведено в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій у межах лінеаризованої теорії пружності за довільної структури пружного потенціалу. Припускається, що початковий напружений стан пружного стрингера та смуги в області контакту є однорідним. Дослідження проводяться в координатах початкового деформованого стану, які пов'язані з лагранжевими координатами (природного стану). Окрім того, зовнішнє зосереджене навантаження викликає невеликі збурення відповідних величин основного напружено-деформованого стану. Наведені загальні розв'язки основних диференціальних рівнянь лінеаризованої теорії пружності. Виходячи із припущення про те, що стрингер одночасно навантажується вертикальними і горизонтальними силами, потрібно зауважити, що пружний стрингер у вертикальному напрямку згинається як звичайна балка, а в горизонтальному напрямку стискається або розтягується, як звичайний стрижень зі скінченною жорсткістю, який перебуває в одноосьовому напружено-деформованому стані, задача математично формулюється як система інтегро-диференціальних рівнянь щодо невідомих контактних напружень. За допомогою перетворень Фур'є система розв'язується в замкнутому вигляді. У кінцевому результаті вирази для контактних напружень представлені у вигляді інтегралів Фур'є.

У випадку нерівних коренів для хімічно активної гуми СКУ-6 і потенціалу Трелоара (матеріал неогуківського типу) наведено результати чисельного аналізу, що подані у вигляді графіка, який ілюструє досить значний

вплив початкових напружень. Отже, вплив початкових напружень на напружено-деформований стан пружної смуги полягає в тому, що початкові напруження у смугі призводять у разі стиснення до зменшення напружень в області контакту, а в разі розтягу до їх збільшення. Щодо переміщень в області контакту стрингера зі смугою – усе відбувається навпаки.

---

**INVESTIGATION OF CONTACT INTERACTION  
WITH STRIPE WITH INITIAL STRESSES  
IF SHE REINFORCED BY THE ELASTIC THIN FINITE STRINGER**

**Dikhtyaruk N. N.**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Higher Mathematics  
and Computer Applications  
Khmelnytsky National University  
Institutska str., 11, Khmelnytsky, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-0819-3842  
mega-dihtyaruk@ukr.net*

**Kravchuk O. A.**

*Senior Lecturer at the Department of Higher Mathematics  
and Computer Applications  
Khmelnytsky National University  
Institutska str., 11, Khmelnytsky, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-6937-5001  
kravchukoa2@gmail.com*

**Key words:** *linearized theory of elasticity, initial (residual) stresses, contact problems, integral Fourier transform.*

In this paper, within the framework of the linearized theory of elasticity, the contact problem of reinforcement of a prestressed elastic band by a finite elastic stringer is considered. Elastic strip, free from reinforcement and load face, rigidly clamped to the base. The problem is solved for the cases of equal and unequal roots of the defining equation in the case of elastic potentials of an arbitrary structure. The research is carried out in general for the theory of large initial deformations and two variants of the theory of small initial deformations within the linearized theory of elasticity at arbitrary structure of elastic potential. It is assumed that the initial stress state of the elastic stringer and the band in the contact area is homogeneous. The research is carried out in the coordinates of the initial deformed state, which are related to the Lagrangian coordinates (natural state). In addition, the external concentrated load causes small perturbations of the corresponding values of the ground stress-strain state. The general solutions of the basic differential equations of the linearized theory of elasticity are given. Assuming that the stringer is loaded with both vertical and horizontal forces, it should be noted that the elastic stringer bends in the vertical direction like a normal beam, and in the horizontal direction is compressed or stretched like a normal rod with finite stiffness, which is in uniaxial stress. deformed state, the problem is mathematically formulated as a system of integro-differential equations with respect to unknown contact stresses. Using the Fourier transform, the system is solved in a closed form. Ultimately, the expressions for the contact voltages are represented as Fourier integrals.

In the case of uneven roots for chemically active rubber SKU-6 and Treloir potential (neogukov type material), the results of numerical analysis are



presented, presented in the form of a graph illustrating a fairly significant effect of initial stresses. Therefore, the effect of initial stresses on the stress-strain state of the elastic band is that the initial stresses in the strip lead to a decrease in stress in the contact area in the case of compression, and in the case of tension to increase them. As for the movements in the area of contact of the stringer with the strip, the opposite is true.

**Вступ.** У всіх реальних конструкціях і деталях машин практично завжди існують початкові або залишкові напруження, причини їх виникнення можуть бути різними. Найчастіше початкові напруження в деталях і конструкціях створюються спеціально під час їх виготовлення або вони виникають у процесі виконання з'єднувальних робіт. Також вони можуть з'являтися у процесі експлуатації, як під впливом механічних чинників, як-от незворотні пластичні деформації, так і із причин, що мають немеханічний характер (локальна зміна агрегатного стану, фізико-хімічні процеси та структурні зміни в матеріалі). Нарешті, початкові напруження можуть бути зумовлені постійною дією масових (наприклад, гравітаційних) сил. Наявність початкових напружень позначається на всьому напружено деформованому стані тіл, тому може впливати на міцність конструкцій, призводити до внутрішньої втрати стійкості, сприяти локальному руйнуванню матеріалу. Взяття до уваги впливу залишкових напружень у розрахунках елементів конструкцій, машин і споруд дозволяє більш ефективно врахувати міцнісні ресурси матеріалів, шляхом правильної оцінки запасів міцності. Натепер у техніці для поліпшення характеристик міцнісних властивостей деталей, можливості їх використання в умовах підвищених температур або в агресивних середовищах широко застосовуються різні покриття (тонкі оболонки). Оскільки такі деталі часто є відповідальними елементами конструкцій, чиє руйнування може призвести до катастрофічних наслідків, необхідна їх регулярна діагностика. У теоретичному плані ця проблема може бути зведена до розгляду контактних задач за різних напружено-деформованих станів у нескінченному шарі чи смугі зі змішаними граничними умовами. Аналогічні завдання можуть виникати і в разі розрахунку важких фундаментних плит і будівельних перекриттів, що перебувають у полі дії гравітаційних сил. Характерною особливістю таких задач є те, що в математичному плані вони в основному є задачами зі змішаними граничними умовами (контактними задачами) для стисливих і нестисливих тіл за однорідних початкових умов і зводяться зазвичай до розв'язування інтегральних рівнянь. Однак за умови великих початкових напружень (деформацій) можна обмежитися розглядом лінеаризованої теорії пружності [1; 2; 6].

У статті в рамках лінеаризованої теорії пружності розглядається плоска контактна задача про передачу навантаження від нескінченного пружного стрингера до смуги з початковими напруженнями. Дослідження проведені в загальному вигляді для теорії великих (скінченних) початкових деформацій і різних варіантів теорії малих початкових деформацій, за довільної структури пружного потенціалу. За допомогою інтегрального перетворення Фур'є одержано основні інтегро-диференціальні рівняння. Подальший розв'язок яких представлено у вигляді квазірегулярних нескінченних систем алгебраїчних рівнянь. Досліджено вплив наявних у смугі початкових (залишкових) напружень на закон розподілу контактних напружень за лінією її контакту зі скінченим стрингером [3–5].

**Огляд літератури.** Дослідження впливу початкових (залишкових) напружень стали активно проводитися в нашій країні та за кордоном лише наприкінці ХХ століття. Необхідно відзначити, що загалом сувора постановка таких завдань вимагає залучення апарату нелінійної теорії пружності, що істотно ускладнює побудову аналітичних розв'язків. Останнім часом наукові результати, що стосуються механіки твердих деформованих тіл та їх контактної взаємодії, охоплюють усе ширші кола питань. Ці результати представлені багатьма працями монографічного й оглядового характеру, серед яких [1; 3; 12]. У працях [2; 4] у межах лінеаризованої теорії пружності розглянуто контактну задачу для пружної смуги з початковими напруженнями, підсиленими нескінченим стрингером. У монографії [2] представлені методи розв'язку мішаних задач для пружної смуги з початковими напруженнями. В оглядових статтях [3; 10] академіком О.М. Гузем висвітлено проблеми неklasичної механіки руйнування, що дало поштовх для вдосконалення та подальшого розвитку наукових досліджень із теорії механіки твердих деформованих тіл. Існує також низка узагальнювальних публікацій [8; 13; 14], які цілком або частково пов'язані з тематикою даної статті. Метод аналітичного та чисельного розв'язку контактної задачі про підсилення попередньо напруженої смуги нескінченим пружним стрингером представлено у працях [11; 13]. Також, зважаючи на необхідність підвищення міцності конструкції завдяки підсиленню її деяких несучих елементів

пружними стрингерами, пропонуються для ознайомлення дослідження, подані у працях [7; 9; 14].

**Методи дослідження.** У межах лінеаризованої теорії пружності [1; 2; 5] результати дослідження представимо в загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій за довільної структури пружного потенціалу.

Розрізняють три стани попередньо напружених тіл: а) природний (відсутність напружень); б) початковий напружений стан; в) збурений стан (усі величини якого складаються із суми відповідних величин початкового стану та збурень). До того ж збурення від докладання зовнішнього навантаження вважаємо набагато меншими від відповідних величин початкового напруженого стану. Для розв'язку задачі застосуємо координати початкового деформованого стану  $(y_1, y_2)$ , які пов'язані з лагранжевими координатами  $(x_1, x_2)$  співвідношеннями:  $y_i = \lambda_i x_i$ , де  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2$ ) – коефіцієнт видовження вздовж координатної осі. Припустимо, що пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовані функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [2; 3], а початковий деформований стан є однорідним. Уважатимемо, що початкові напруження діють уздовж області контакту. Матеріали тіл будимо вважати ізотропним стисливими або нестисливими з довільною структурою пружного потенціалу.

Отже, сформулюємо задачу: нехай попередньо напружена смуга (товщини  $t$ ), підсилена пружним стрингером скінченної довжини, перебуває під дією зосередженого навантаження  $P\delta(y_1)$ , у напрямку до осі  $Oy_1$  під кутом  $\alpha$  (рис. 1), де  $\delta(y_1)$  – одинична функція Дірака.

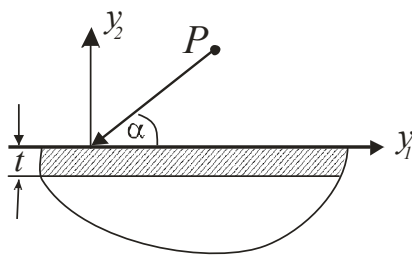


Рис. 1. Дія сили на смугу

Усі дослідження виконані для стисливих і нестисливих тіл у випадку пружних потенціалів довільної структури в загальному вигляді для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій. Для переходу до різних варіантів теорії малих початкових деформацій необхідно ввести спрощення, зазначене у [3; 4; 7].

Для визначення поля пружних переміщень і напружень (функції впливу) від прикладеної на її грані зосередженої сили  $P\delta(y_1)$ , прикладеної

під кутом  $\alpha$  до осі  $Oy_1$ , одержуємо такі граничні умови на кромці пружної смуги за  $y_2 = 0$  (рис. 1):

$$Q_{22}(y_1, 0) = -P \sin \alpha \cdot \delta(y_1); \quad Q_{21}(y_1, 0) = -P \cos \alpha \cdot \delta(y_1), \quad (1)$$

на лінії з'єднання пружної смуги та напівплощини за  $y_2 = -t$ :

$$u_1(y_1, -t) = 0; \quad u_2(y_1, -t) = 0. \quad (2)$$

Дотримуючись [3; 10], вирази для переміщень і напружень граничних точок смуги з початковими напруженнями у випадку рівних і нерівних коренів визначального рівняння запишемо у вигляді:

$$u_1(y_1, x_j) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [L^+(A_1 + A_2) + \alpha z_1 [(B_1 + B_2)]] \exp(-i\alpha y_1) d\alpha$$

$$u_2(y_1, x_j) = \frac{m_1}{2\pi\sqrt{n_1}} \int_{-\infty}^{\infty} [L^+(B_1 + s_1 B_2) + \alpha z_1 [(A_1 + s_1 A_2)]] \exp(-i\alpha y_1) d\alpha \quad (3)$$

$$\bar{Q}_{22}(y_1, x_j) = \frac{c_{44}(1+m_1)l_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [L^+(A_1 + s_0 A_2) + \alpha z_1 [(B_1 + s_0 B_2)]] \exp(-i\alpha y_1) d\alpha$$

$$\bar{Q}_{21}(y_1, x_j) = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{c_{44}(1+m_1)}{\sqrt{n_1}} \int_{-\infty}^{\infty} [L^+(B_1 + s_0 B_2) + \alpha z_1 [(A_1 + s_0 A_2)]] \exp(-i\alpha y_1) d\alpha.$$

$$\text{Тут } z_i = (n_i)^{-\frac{1}{2}} y_2; \quad s_0 = \frac{1+m_1}{1+m_2}; \quad s = s_0 \frac{l_2}{l_1}; \quad s_1 = \frac{m_2-1}{m_1};$$

$$L^+(A + Bz) = \begin{cases} (A + Bz)ch\alpha z_1 + B(\alpha z_1)sh\alpha z_1; & n_1 = n_2; \\ Ach\alpha z_1 + Bzch(\alpha z_2); & n_1 \neq n_2; \end{cases}$$

$$L^-(A + Bz) = \begin{cases} (A + Bz)(\alpha z_1)^{-1} sh\alpha z_1 + Bch\alpha z_1; & n_1 = n_2; \\ Ash\alpha z_1 + B(\alpha z_1)^{-1} sh\alpha z_2; & n_1 \neq n_2; \end{cases}$$

Тут  $l_i, m_i, c_{44}$  – параметри, що визначають початковий напружений стан смуги,  $n_i$  – корені визначального рівняння [2; 3] ( $i = 1, 2$ ).

Якщо задовольнимо граничні умови (1) і (2) з урахуванням (3) після низки перетворень для визначення невідомих коефіцієнтів  $A_i, B_i$  ( $i = 1, 2$ ) у випадку рівних і нерівних коренів визначального рівняння [2; 3; 12], одержимо системи алгебраїчних рівнянь.

Після розв'язання систем знайдемо коефіцієнти  $A_i, B_i$  ( $i = 1, 2$ ), що виражаються через параметри, які визначають початковий напружений стан. Вирази для цих коефіцієнтів знаходимо відповідно:

– для рівних коренів визначального рівняння [2,5]  $n_1 = n_2$  знаходимо коефіцієнти  $A_i, B_i$  ( $i = 1, 2$ ):

$$A_1 = \{-n_0[-s_1(s_0+1)sh^2\phi_1 - \phi_1^2 + (s_1-s_0)] + m_0[-s_0sh\phi_1ch\phi_1 - sl_1]\} \xi_1^{-1}$$

$$A_2 = \{n_0[(s_1-s_0) - \bar{s}_1sh^2\phi_1] + m_0[\phi_1 + \bar{s}_1sh\phi_1ch\phi_1]\} \xi_1^{-1} \quad ; \quad (4)$$

$$B_1 = \{-n_0[-s_0\bar{s}_1sh\phi_1ch\phi_1] + m_0[s_0sh^2\phi_1 + \phi_1^2 - s\bar{s}_1]\} \xi_1^{-1}$$

$$B_2 = \{n_0[-\bar{s}_1sh^2\phi_1ch\phi_1 + \phi_1] + m_0[-\bar{s}_1sh^2\phi_1 + \bar{s}]\} \xi_1^{-1}$$

для нерівних коренів визначального рівняння [2; 5]  $n_1 \neq n_2$  знаходимо  $A_i, B_i$  ( $i = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \left\{ -n_0 \left[ s_0 \omega_1(\alpha) - s_1 s_0 \phi_1 \omega_1(\alpha) - 2s_1 s_0 h^2 \phi_1^2 - s_1 \right] - m_0 \left[ \bar{s} s_1 \omega_2(\alpha) + s \omega_4(\alpha) \right] \right\} \xi_1^{-1}(\alpha) \\
 A_2 &= \left\{ n_0 \left[ s_0 (\phi_1^2 - 2) s h^2 \phi_1 + s_1 \omega_1(\alpha) + \phi_1 \omega_1(\alpha) - s_0 \right] + m_0 \left[ s_1 \phi_1 \omega_2(\alpha) + \omega_3(\alpha) \right] \right\} \xi_2^{-1}(\alpha) \\
 B_1 &= \left\{ n_0 \left[ s_0 s_1 \omega_3(\alpha) - s_0 \phi_1 \omega_2(\alpha) \right] + m_0 \left[ s s_1 \omega_1(\alpha) + s \phi_1 \omega_2(\alpha) - s_1 c h 2 \phi_1 \right] \right\} \xi_2^{-1} \\
 B_2 &= \left\{ n_0 \left[ \phi_1 \omega_2(x) + s_1 \omega_3(\alpha) \right] + m_0 \left[ s_1 (\phi_1^2 - 2) s h^2 \phi_1 - s_1 \phi_1 \omega_4(\alpha) + \omega_4(x) - s \right] \right\} \xi_2^{-1} . \quad (5)
 \end{aligned}$$

Підставимо значення (4) і (5) у (3) і знайдемо функцію впливу у пружній смузі з початковими напруженнями для рівних і нерівних коренів визначального рівняння у вигляді:

$$\begin{aligned}
 u_{11}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{11}(\alpha, y_2) e^{-i\alpha y_1} d\alpha \\
 u_{12}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{12}(\alpha, y_2) e^{-i\alpha y_1} d\alpha . \quad (6)
 \end{aligned}$$

Розглянемо два випадки граничних точок ( $y_2 = 0$ ) пружної смуги з початковими напруженнями.

I. Одиначна сила  $\delta(y_1)$  ( $P \equiv 1$ ) діє нормально до верхньої грані пружної смуги з початковими напруженнями.

II. Одиначна сила  $\delta(y_1)$  ( $P \equiv 1$ ) діє тангенціально до верхньої грані пружної смуги з початковими напруженнями.

У першому випадку зміщення граничних точок ( $y_2 = 0$ ) пружної смуги з початковими напруженнями можна обчислити за формулами:

$$\begin{aligned}
 u_{11}(y_1, 0) &= u_1(y_1, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{11}(\alpha) \cos \alpha y_1 d\alpha \\
 u_{12}(y_1, 0) &= u_2(y_1, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{12}(\alpha) \sin \alpha y_1 d\alpha . \quad (7)
 \end{aligned}$$

Тут за  $n_1 = n_2$ :

$$H_{11}(\alpha) = n_0 \left[ \left( s_0 s h^2 \alpha \phi_1 + s_1 s_0 s h^2 \alpha \phi_1 - \alpha \phi_1 N + (\alpha \phi_1)^2 - \bar{s}_1 N + \phi_1 \right) \xi_1^{-1}(\alpha) \right], \quad (8)$$

$$H_{12}(\alpha) = i \frac{n_0 m_1}{\sqrt{n_1}} \left[ s_0 s_1 N_3 - s_0 (\alpha \phi_1) N_2 + s_1 ((\alpha \phi_1) N_2 - s_1 N_3) \right] \xi_1^{-1}(\alpha);$$

за  $n_1 \neq n_2$ :

$$H_{11}(\alpha) = n_0 \left[ \left( s_0 c h 2 \alpha \phi_1 + s_0 N_1 + s_1 s_0 N_1 \alpha \phi_1 - \alpha \phi_1 N + s_0 (\alpha \phi_1)^2 s h^2 \alpha \phi_1 - s_0 c h^2 \alpha \phi_1 + s_1 N_1 + \alpha \phi_1 N_1 \right) \xi_2^{-1}(\alpha) \right]$$

$$H_{12}(\alpha) = i \frac{n_0 m_1}{\sqrt{n_1}} \left[ s_0 s_1 N_3 - s_0 (\alpha \phi_1) N_1 + s_1 ((\alpha \phi_1) N_2 - s_1 N - s_1 N_1) \right] \xi_2^{-1}(\alpha) . \quad (9)$$

Окрім того, для функцій  $H_{11}(\alpha), H_{12}(\alpha)$  слушні такі граничні співвідношення:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} H_{11}(\alpha) = Q(1) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} H_{12}(\alpha) = Q(\alpha^{-1}), \quad (10)$$

у другому випадку переміщення знайдемо за аналогічними формулами:

$$\begin{aligned}
 u_{21}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{21}(\alpha) \sin \alpha y_1 d\alpha; \quad -\infty < y_1 < \infty \\
 u_{22}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{22}(\alpha) \cos \alpha y_1 d\alpha; \quad -\infty < y_1 < \infty
 \end{aligned} . \quad (11)$$

Тут за  $n_1 = n_2$   $H_{21}(\alpha)$  і  $H_{22}(\alpha)$  визначаються з виразів:

$$\begin{aligned}
 H_{21} &= m_0 \left[ -(s+1)(s s h \alpha \phi_1 \cdot c h \alpha \phi_1 - \alpha \phi_1) - c h^2 \alpha \phi_1 - s_1 s h^2 \alpha \phi_1 - s \right] \xi_1^{-1}(\alpha) \\
 H_{22} &= \frac{i m_0 m_1}{\sqrt{n_1}} \left[ s s_1 c h^2 \alpha \phi_1 + (\alpha \phi_1)^2 - \alpha \phi_1 N - s_1^2 c h^2(\alpha \phi_1) - s s_1 \right] \xi_1^{-1}(\alpha) \quad ; \quad (12)
 \end{aligned}$$

за  $n_1 \neq n_2$ :

$$\begin{aligned}
 H_{21}(\alpha) &= m_0 \left[ s s_1 (\alpha \phi_1) N_2 - s N_3 + s (\alpha \phi_1) N_2 + N_3 \right] \xi_2^{-1}(\alpha) \\
 H_{22}(\alpha) &= \frac{i m_0 m_1}{\sqrt{n_1}} \left[ 1 - s_1 c h(2 \alpha \phi_1) + s s_1 N + s \alpha \phi_1 N_4 + s s_1 (\alpha \phi_1)^2 s h \alpha \phi_1 - s s_1 c h^2 \alpha \phi_1 - \right. \\
 &\quad \left. - s_1^2 (\alpha \phi_1) N_4 + N_3 \right] \xi_2^{-1}(\alpha); \quad (13)
 \end{aligned}$$

Варто зазначити, що для функцій  $H_{21}(\alpha)$  і  $H_{22}(\alpha)$ , як і у випадку (10), мають місце асимптотичні розклади:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} H_{21}(\alpha) = Q(1) \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} H_{22}(\alpha) = Q(\alpha^{-1}) . \quad (14)$$

Отже, переміщення в задачі I та горизонтальні переміщення у другій задачі в точці прикладання мають логарифмічну особливість.

За допомогою принципу суперпозиції переміщення точок пружної смуги з початковими напруженнями за напрямком осей  $Oy_1, Oy_2$  від водночас діючих нормальних  $p(y_1)$  і тангенціальних  $q(y_1)$  напружень, згідно із (7) і (11), визначаються формулами:

$$\begin{aligned}
 u_1(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{11}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u_{12}(y_1 - \tau) q(\tau) d\tau \\
 u_2(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{21}(y_1 - \tau) p(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u_{22}(|y_1 - \tau|) q(\tau) d\tau
 \end{aligned} , \quad (15)$$

де  $u_{ij}$ , ( $ij = 1, 2$ ) – функції впливу.

Припустивши, що пружна накладка у вертикальному напрямку згинається як звичайна балка, тобто:

$$D \frac{d^4 u_2}{dy_1^4} = p(x) - p_0(x) \quad -\infty \leq x \leq \infty , \quad (16)$$

де  $u_2(y_1)$  – вертикальне переміщення точок пружної накладки,  $D$  – жорсткість накладки на згин.

А в горизонтальному напрямку розтягується або стискається як одночасно навантажений стрижень. З урахуванням умов рівноваги пружної накладки [2] для невідомих контактних напружень одержимо систему інтегро-диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
 D \frac{d^4 u_2}{dy_1^4} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} u_{11}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u_{12}(y_1 - \tau) q(\tau) d\tau \right\} &= p(y_1) - p_0(y_1) \\
 E_1 h \frac{d}{dy_1} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} u_{21}(y_1 - \tau) p(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u_{22}(|y_1 - \tau|) q(\tau) d\tau \right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} [q(\tau) - q_0(\tau)] d\tau
 \end{aligned} . \quad (17)$$

У разі дії тільки вертикальних сил  $q_0(y_1) \equiv 0$  замість системи (17) будемо мати тільки одне інтегро-диференціальне рівняння:

$$D \frac{d^4}{dy_1^4} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} u_{11}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau \right] = p(y_1) - p_0(y_1), \quad |x| \leq \infty , \quad (18)$$

а в разі відсутності вертикальних сил  $p_0(y_2) \equiv 0$  накладка лише розтягується, тоді одержимо:

$$E_1 \frac{d}{dy_1} \int_{-\infty}^{\infty} u_{22}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [q(y_1) - q_0(y_1)] dt. \quad (19)$$

**Результати.** Чисельний аналіз проведеного дослідження представлений для потенціалу Трелоара (тіла неогуківського типу) у разі хімічно активної гуми СКУ-6 за таких параметрів видовжень:  $\lambda_1 = 0.7; 0.8; 0.9; 1; 1.1; 1.2$ . Алгоритм чисельного розв'язку базується на методі редукції та реалізований у вигляді програми в пакеті Maple. Також зазначимо, що чисельне дослідження системи типу (17) представлено в [1; 2].

Вплив початкових напружень на закон розподілу контактних характеристик для задачі про підсилення попередньо напруженої смуги, підсиленої стрингером скінченної довжини (скінченною пружною накладкою) у випадку потенціалу Трелоара, представлено на рис. 2.

Тут  $q^*(\xi)$  – безрозмірні контактні тангенціальні напруження. Значення  $\lambda_1 = 1$  (на графіку

пунктирна лінія) відповідає класичній теорії пружності та збігається з результатами праці [8];  $\lambda_1 = 0.7; 0.8; 0.9$  – відповідають початковим напруженням стиску;  $\lambda_1 = 1.1; 1.2; 1.3$  – відповідають початковим напруженням розтягу;  $\xi$  – безрозмірна координата початкового напруженого стану у пружній смузі з початковими напруженнями.

**Дискусія.** У результаті проведених досліджень розв'язок задачі представлений у вигляді інтегро-диференціальних рівнянь, розв'язок яких за допомогою оберненого перетворення Фур'є зводиться до обчислення інтегралів відомої простої структури.

Беручи до уваги проведене дослідження, для потенціалу Трелоара, що відповідає нерівним кореням визначального рівняння [2], вплив початкових напружень на напружено-деформований стан в області контакту можна описати так:

1. Початкові напруження в разі стиску призводять до зменшення сили напружень в області контакту, а в разі розтягу – до їх збільшення, у разі переміщень все відбувається навпаки. Тобто

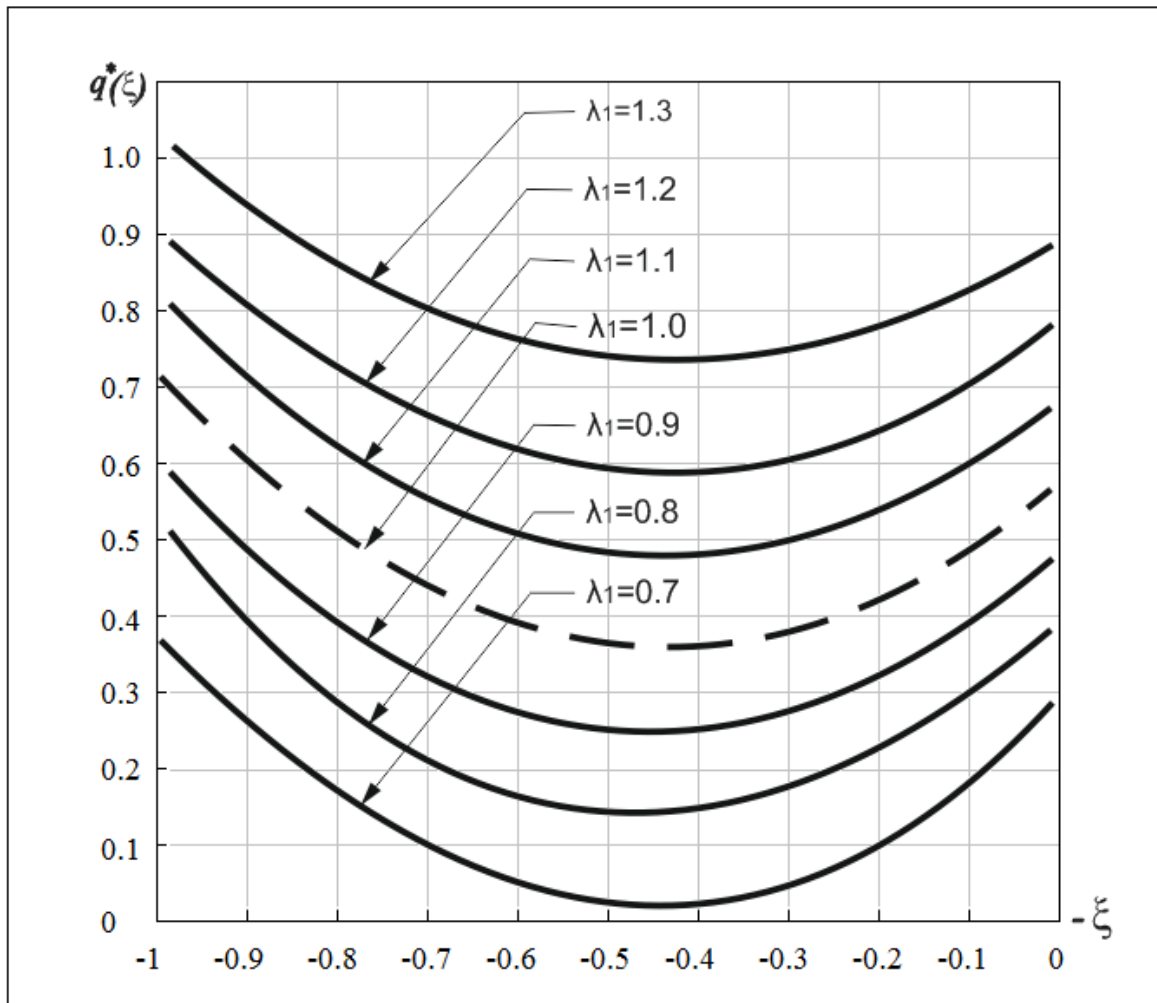


Рис. 2. Розподіл напружень в області контакту

наявність попередньо напруженого стану під час контактної взаємодії пружних тіл дає змогу регулювати контактні напруження та переміщення.

2. Більш суттєво, у кількісному плані, початкові напруження діють у високоеластичних матеріалах у порівнянні з більш жорсткими, але їхній якісний вплив зберігається.

3. За допомогою числової реалізації методу дослідження встановлено особливості впливу наявності початкових напружень на закон розпо-

ділу контактних напружень і переміщень в області контакту, порівняно з випадком відсутності початкових напружень.

Отже, можна зробити висновок про те, що вплив початкових напружень на контактну взаємодію пружних тіл досить сильний і суттєво діє на закон розподілу контактних характеристик. Тому його врахування дасть можливість значно покращити точність інженерних обчислень у розрахунках на міцність конструкцій і деталей машин.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Контактна взаємодія тіл з початковими напруженнями : навчальний посібник / О.М. Гузь та ін. Київ : Вища школа, 1995. 305 с.
2. Гузь А.Н., Рудницький В.Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями : монография. Хмельницький, 2006. 710 с.
3. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями : монография. Германия : Saarbrücken LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.
4. Діхтярук М.М. Визначення функції впливу для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями. *Матеріали 4-го Міжнародного симпозиуму із трибофатики (ISTF), м. Тернопіль, 23–27 вересня 2002 р.* / відп. ред. В.Т. Троценко. Тернопіль : Терноп. держ. техн. ун-т ім. Івана Пулюя, 2002. С. 426–431.
5. Діхтярук Н.Н. О равновесии полосы с начальными напряжениями, усиленной упругими накладками. *Прикладная механика*. 2004. 40. № 3. С. 63–70.
6. Рудницький В.Б., Діхтярук Н.Н. Упругая полоса с начальными напряжениями, усиленная упругими накладками. *Прикладная механика*. 2002. 38. № 11. С. 81–88.
7. Рудницький В.Б., Діхтярук Н.Н. Контактная задача о взаимодействии бесконечного стрингера и двух одинаковых полос с начальными напряжениями. *Прикладная механика*. 2017. 53. № 2. С. 41–48.
8. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками : учебное пособие. Ереван : Изд. Ереван. ун-та, 1983. 260 с.
9. Rudnitskii V. B., Dikhtyaruk N. N. Interaction Between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. *International Applied Mechanics*. 2017. 53, № 2. P. 149–155.
10. Guz A.N. Nonclassical Problems of Fracture. *Failure Mechanics: On the Occasion of the 50<sup>th</sup> Anniversary of Research : Review. III. International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55. № 4. P. 343–415.
11. Yaretskaya N.F. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics : Review*. 2018. Vol. 54. № 5. P. 539–543. DOI: 10.1007/s10778-018-0906-y.
12. Бабич С.Ю., Ярецька Н.О. Контактна взаємодія попередньо напружених кільцевого штампу і півпростору. *Доповіді НАН України*. 2020.
13. Babich S.Yu., Dikhtyaruk N.N. Load transfer from an infinite inhomogeneous stringer to an elastic strip clamped by one face with initial stresses. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56. № 6. P. 346–356.
14. Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses / S.Yu. Babich et al. *International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55. № 6. P. 629–635.

## REFERENCES

1. Huz O.M., Babych S.Iu., Rudnytskyi V.B. (1995). Kontaktna vzaiemodiia pruzhnykh til z pochatkovymy napruzhenniamy. K. : Vyshcha shk. [in Ukrainian].
2. Guz', A.N., Rudnickij V.B. (2006). Osnovy teorii kontaktnogo vzaimodejstvija uprugih tel s nachal'nymi (ostatochnymi) napryazhenijami. Hmel'nic'kij, vyd. PP Mel'nik [in Russian].
3. Guz', A.N., Babich, S.Yu., & Glukhov, Yu.P. (2015). Smeshannye zadachi dlya uprugogo osnovaniya s nachal'nymi napryazheniyami [Mixed problems for an elastic base with initial stresses]. LAP LAMBERT Academic Publishing [in Russian].
4. Dikhtiaruk M.M. (2002). Vyznachennia funktsii vplyvu dlia pruzhnoi smuhy z pochatkovymy (zalyshkovymy) napruzhenniamy [Title]. Pr. 4-ho Mizhnarodnoho sympoziumu z trybofatyky (ISTF) (m. Ternopil, Ukraina, 23–27 veresnia 2002 r.) / Vidp. red. V.T. Troshchenko. Ternopil : Ternop. derzh. tekhn. un-t im. Ivana Puliua. P. 426–431 [in Ukrainian].

5. Dikhtyaruk N.N. (2004). Equilibrium of a Prestressed Strip Reinforced with Elastic Plates. *Int. Appl. Mech.* 40 (3). P. 290–296.
6. Rudnitsky V.B., Dikhtyaruk N.N. Elastic strip with initial stresses, reinforced with elastic pads. *App. mechanics.* 2002. 38, № 11. P. 81–88 (in Russian).
7. Rudnitsky V.B., Dikhtyaruk N.N. Contact problem on the interaction of an infinite stringer and two identical bands with initial voltages. *App. mechanics.* 2017. 53. № 2. P. 41–48 (in Russian).
8. Sargsyan V.S. Contact tasks for half-planes and strips with elastic overlays. Yerevan : Ed. Yerevan. University, 1983. 260 p. (in Russian).
9. Rudnitskii V.B., Dikhtyaruk N.N. Interaction Between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. *International Applied Mechanics.* 2017. 53. № 2. P. 149–155.
10. Guz A.N. Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: On the Occasion of the 50'th Anniversary of Research (Review). III. *International Applied Mechanics.* 2019. Vol. 55. № 4. P. 343–415.
11. Yaretskaya N.F. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *Int. Appl. Mech. Rew.* 2018. Vol. 54. № 5. P. 539–543. DOI: //doi.org/10.1007/s10778-018-0906-y.
12. Babich S.Yu., Yaretskaya N.O. Contact interaction of pre-stressed annular stamp and half-space. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine.* 2020 (in Ukrainian).
13. Babich S.Yu., Dikhtyaruk N.N. Load transfer from an infinite inhomogeneous stringer to an elastic strip clamped by one face with initial stresses. *International Applied Mechanics.* 2020. Vol. 56. № 6. P. 346–356.
14. Babich S.Yu., Dikhtyaruk N.N., Degtyar S.V. Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses. *International Applied Mechanics.* 2019. Vol. 55. № 6. P. 629–635.

УДК 539.3  
DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2022-1-05>

## ПЕРІОДИЧНЕ ПІДСИЛЕННЯ ДВОХ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ СМУГ СКІНЧЕНИМИ ПІДКРІПЛЮЮЧИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

**Діхтярук М. М.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань  
Хмельницький національний університет  
вул. Інститутська, 11, Хмельницький, Україна  
[orcid.org/0000-0002-0819-3842](https://orcid.org/0000-0002-0819-3842)  
[petrenkoiv@khnmu.edu.ua](mailto:petrenkoiv@khnmu.edu.ua)*

**Ярецька Н. О.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань  
Хмельницький національний університет  
вул. Інститутська, 11, Хмельницький, Україна  
[orcid.org/0000-0002-3726-2878](https://orcid.org/0000-0002-3726-2878)  
[yaretskano@khnmu.edu.ua](mailto:yaretskano@khnmu.edu.ua)*

**Кравчук О. А.**

*старший викладач кафедри вищої математики  
та комп'ютерних застосувань  
Хмельницький національний університет  
вул. Інститутська, 11, Хмельницький, Україна  
[orcid.org/0000-0001-6937-5001](https://orcid.org/0000-0001-6937-5001)  
[kravchukoa2@gmail.com](mailto:kravchukoa2@gmail.com)*

**Ключові слова:** лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактні задачі, функції Якобі, інтегральне перетворення Фур'є.

У статті досліджено якісний і кількісний вплив початкових (залишкових) напружень на закон розподілу контактних характеристик при взаємодії пружних скінчених накладок (стрингерів), при їх періодичному розміщенні, з двома попередньо напруженими смугами, що защемлені одним краєм. Дослідження проведено у загальному вигляді для теорії великих (скінчених) початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій в рамках лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу для стисливих та нестисливих тіл. Також використані методи інтегральних перетворень Фур'є, методи розв'язку гармонійних диференціальних рівнянь, сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь та числових методів. Зроблено припущення, що в області контакту початковий напружений стан, з певним ступенем точності, вважаємо однорідним. Вважаємо, що пружна смуга з початковими (залишковими) напруженнями знаходиться в умовах плоскої деформації, а для пружної накладки, навантаженої одночасно вертикальними і горизонтальними силами, справедлива загальноприйнята модель згину балки в поєднанні з моделлю одновісного напружено-деформованого стану пружної накладки. Виведено сингулярне інтегрально-диференціальне рівняння з ядром Гілберта, що дозволяє розв'язати поставлену задачу. Аналітичний розв'язок рівняння знаходимо у вигляді рядів від функції Якобі. Для матеріалів з пружними потенціалами гармонічного типу (стисливі тіла) та пружними

потенціалами Бартенєва-Хазановича і Трелоара (нестисливі тіла) проведені числові дослідження. Розглянуто випадок, коли всі періодично розміщені накладки, що підкріплюють пружні смуги з початковими напруженнями, навантажені тангенціальною силою. Аналіз числових результатів свідчить про суттєвий вплив початкових (залишкових) напружень на розподіл контактних характеристик періодично підсилених смуг тонкими підкріплюючими елементами. Отримані результати можуть бути використані для інженерних розрахунків на міцність та довговічність конструкцій з урахуванням початкових напружень для широкого вибору конструкційних матеріалів.

---

## PERIODIC REINFORCEMENT OF TWO PRE-STRESSED STRIPS BY FINISHED SUPPORTING ELEMENTS

**Dikhtyaruk N. N.**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Higher Mathematics  
and Computer Applications  
Khmelnysky National University  
Institute str., 11, Khmelnytsky, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-0819-3842  
petrenkoiv@khnmu.edu.ua*

**Yarets'ka N. O.**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Higher Mathematics  
and Computer Applications  
Khmelnysky National University  
Institute str., 11, Khmelnytsky, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-3726-2878  
yaretskano@khnmu.edu.ua*

**Kravchuk O. A.**

*Senior Lecturer at the Department of Higher Mathematics  
and Computer Applications  
Khmelnysky National University  
Institute str., 11, Khmelnytsky, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-6937-5001  
kravchukoa2@gmail.com*

**Key words:** *stress-strain state, initial (residual) stresses, contact tasks, Jacobi function, Fourier transform.*

The qualitative and quantitative influence of initial (residual) stresses on the law of distribution of contact characteristics at interaction of elastic finished overlays (stringers), at their placement, with two prestressed strips which are clamped by one edge. In general, the research was carried out for the theory of great initial (ultimate) and two variants of the theory of small initial deformations within the framework of linearized theory of elasticity with the elastic potential having arbitrary structure for compressible and incompressible bodies. Fourier integral methods, methods for solving harmonic differential equations, singular integral-differential equations and numerical methods were used too. It is assumed that in the contact area the initial stress state, with a certain degree of accuracy, is considered homogeneous. We make



the assumption that the elastic band with initial (residual) stresses is in the conditions of plane deformation. Also, for an elastic lining loaded with both vertical and horizontal forces, the generally accepted model of beam bending in combination with the model of uniaxial stress-strain state of the elastic lining is valid. A singular integral-differential equation with the Gilbert kernel was derived, which allows us to solve this problem. We find the analytical solution of the equation in the form of series from the Jacobi function. Numerical studies were performed for materials with elastic potentials of harmonic type (compressible bodies) and elastic potentials of Bartenev-Khazanovich and Treloar (incompressible bodies). Numerical studies have been performed for materials with elastic potentials of harmonic type (compressible bodies) and elastic potentials of Bartenev-Khazanovich and Treloir (incompressible bodies). We have considered the case when all periodically placed pads that support elastic bands with the initial stresses were loaded with tangential force. Analysis of numerical results shows a significant effect of initial (residual) stresses on the distribution of contact characteristics of periodically reinforced strips with thin reinforcing elements. The results obtained can be used for engineering calculations for the strength and durability of structures, taking into account the initial stresses for a wide range of structural materials.

**Вступ.** Актуальність наукових досліджень проблеми контактної взаємодії пружних тіл постійно зростає і вдосконалюються їхні методи, враховуючи розвиток сучасних інформаційних технологій та математичних обчислень. Це зумовлено актуальністю використання результатів таких досліджень під час будівництва споруд, виробництва та конструювання деталей машин та їх конструкцій.

Врахування початкових напружень під час дослідження контактних задач значно ускладнює математичні розрахунки, в зв'язку з ускладненням розрахункових формул, але водночас дає можливість отримати більш реальний результат процесів, які підлягають дослідженню.

Тематика дослідження контактної взаємодії пружних тіл з початковими напруженнями також є актуальною і для фундаментальних досліджень з механіки твердого деформованого тіла.

Таким чином, дана робота присвячена дослідженню питання контактної взаємодії попередньо напружених смуг з періодично розміщеними скінченними пружними накладками. Об'єктом даного дослідження є дві нескінченні, однакові, попередньо напружені смуги, які однією гранню жорстко защемлені, а іншими гранями з'єднані між собою періодично розміщеними скінченними пружними накладками. Предметом дослідження є вплив початкових напружень на закон розподілу контактних напружень і переміщень пружних тіл в області їхнього контакту.

Метою роботи є отримання розрахункових інтегро-диференціальних рівнянь, розв'язки яких описують напружено-деформований стан в області контакту, а також отримання чисельних результатів у випадку пружних потенціалів конкретної структури. Дослідження проведено в рамках лінеаризованої теорії пружності в загальному

вигляді для теорії великих (скінченних) початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу [1–3].

**Огляд літератури.** Контактна взаємодія тіл з початковими напруженнями належить до однієї з актуальних областей механіки деформівного твердого тіла. Розв'язок таких задач пов'язаний з широким кругом проблем, які виникають в машинобудуванні, будівельній галузі та інших галузях промисловості. Контактні задачі класичної теорії пружності в нашій країні і за кордоном в останні десятиліття одержали подальший розвиток як за глибиною нових підходів, так і за шириною досліджень. Про це свідчить велика кількість вчених, які працюють над заданою проблемою, і кількість поданих доповідей на симпозиуми, з'їзди та конференції як у нашій країні, так і за кордоном в останні десятиліття. Як відомо, початкові (залишкові) напруження практично завжди присутні в елементах конструкцій і деталях машин. Дія останніх викликає в попередньо напруженому тілі такий самий ефект, як і будь-які інші напруження, які можуть визвати деформації, руйнування, збільшити тенденцію до втрати стійкості і внутрішнього тертя. Тому вивчення і дослідження якісного і кількісного впливу початкових (залишкових) напружень на закон розподілу контактних напружень є досить актуальною проблемою як в теоретичному, так і в практичному аспектах. Не дивлячись на досить великий спектр досліджень з визначення закону розподілу контактних характеристик в конструкціях і деталях машин в класичній теорії пружності, неможливо (виходячи з прийнятої лінійної моделі) врахувати початковий (залишковий) напружено-деформований стан тіл, що перебувають в контакті. Попередньо напру-

жений стан можна врахувати, використавши лінеаризовану теорію пружності, яка розроблена академіком НАН України О.М. Гузем в 70 роках минулого століття. Хоча в загальному випадку строга постановка таких задач вимагає застосування нелінійної теорії пружності [4]. Проте при досить великих величинах початкових (залишкових) напружень можна обмежитися її лінеаризованим варіантом. Історично дослідження контактних задач в рамках лінеаризованої теорії пружності складалося на двох напрямках. Перший пов'язаний з дослідженнями контактної взаємодії тіл з конкретною формою пружного потенціалу. Це праці В.М. Александрова, Н.Х. Арутюняна і їхніх учнів [5]. Другий підхід започаткований академіком НАН України О.М. Гузем і його учнями, професорами С.Ю. Бабичем і В.Б. Рудницьким – це дослідження просторових та плоских задач контактної взаємодії тіл з початковими (залишковими) напруженнями з довільною структурою пружного потенціалу для стисливих і нестисливих матеріалів у випадку теорії скінченних (великих) і декількох варіантів теорії малих початкових (залишкових) деформацій [1–3; 6–8]. Існує також ряд узагальнюючих публікацій [9–15], які повністю або частково пов'язані з тематикою даної статті. Приклад числового розв'язку контактних задач подано у статті [16]. Також, враховуючи необхідність підвищення міцності конструкції за рахунок підсилення її деяких несучих елементів пружними стрингерами, пропонуються для ознайомлення дослідження, подані у працях [16–19].

**Методи дослідження.** Використаємо співвідношення лінеаризованої теорії пружності [1–3], причому дослідження представимо в загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Будемо розрізняти три стани попередньо напружених тіл: а) природний (відсутність напружень); б) початковий стан; в) збурений стан (всі величини якого складаються із суми відповідних величин початкового стану та збурень). До того ж,

збурення вважаємо набагато меншими від відповідних величин початкового стану.

Для розв'язку задачі застосуємо координати початкового деформованого стану  $(y_1, y_2)$ , які пов'язані з лагранжевими координатами  $(x_1, x_2)$  співвідношеннями:  $y_i = \lambda_i x_i$ , де  $\lambda_i$  ( $i=1,2$ ) – коефіцієнти видовжень вздовж координатної осі  $y_1$ .

Припустимо, що дві нескінченні пружні смуги виготовлені з стисливого або нестисливого матеріалу з потенціалом довільної структури. Також припускаємо, що в них діють ідентичні початкові (залишкові) напруження. Нехай смуги з'єднані між собою на скінченних відрізках  $[-a + 2kl; a + 2kl]$  ( $l > a$ ,  $k = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$ ), які періодично повторюються, пружними накладками малої товщини  $h$ . Початкові напруження в пружних накладках відсутні, модуль пружності матеріалу накладок  $E_p$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu_1$  і вони знаходяться в умовах плоскої деформації. Товщина попередньо напружених смуг  $H$ . Потрібно дослідити вплив присутності початкових напружень в смугах на закон розподілу нормальних  $p(y_1)$  і тангенціальних  $q(y_1)$  контактних напружень в області контакту пружних накладок з попередньо напруженими смугами, коли на накладки діє горизонтальне періодичне навантаження з періодом  $2l$  та інтенсивністю  $q_0(y_1)$  (рис. 1).

Враховуючи періодичність представлені задачі, слід відмітити, що вплив початкових напружень під кожною тонкою пружною накладкою буде однаковим, тому можна обмежитись розглядом тільки однієї з них. Розглянемо, наприклад, накладку яка розміщена на відрізку  $[-a, a]$ . Як відомо, з основ опору матеріалів пружна накладка в вертикальному напрямку осі  $Oy_2$  згинається як звичайний брус, а в горизонтальному напрямку осі  $Oy_1$  стискується, або розтягується, як звичайний стрижень з скінченною жорсткістю, який знаходиться в одновісному напружено-деформованому стані [18]. Отже, матимуть місце такі рівняння:

$$\frac{du(y_1)}{dy_1} = \frac{1}{E_1 h} \int_{-a}^{y_1} [2q(\xi) - q_0(\xi)] d\xi \quad (-a < y_1 < a), \quad (1)$$

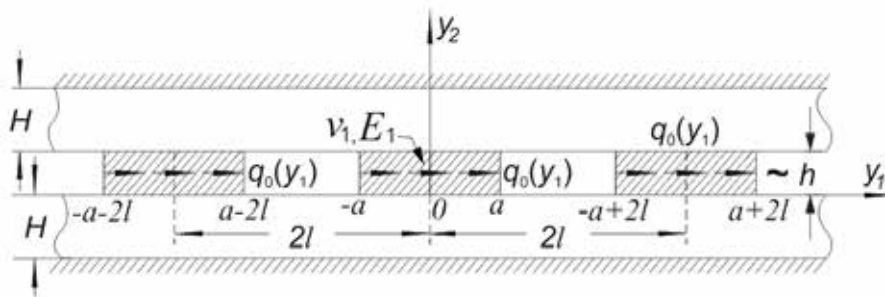


Рис. 1

$$\frac{d^v(y_1)}{dy_1} = 0, \quad \forall y_1 \in (-a < y_1 < a),$$

де  $u(y_1)$ ,  $v(y_1)$  – переміщення граничних точок накладки.

Умови контакту накладки та смуги з початковими напруженнями мають вигляд:

$$u(y_1) = u_1(y_1); \quad v(y_1) = u_2(y_1); \quad (-a < y_1 < a), \quad (2)$$

де  $u_1(y_1)$ ,  $u_2(y_1)$  – переміщення граничних точок пружної смуги з початковими напруженнями. Граничні умови на кінцях пружної накладки внаслідок відсутності зовнішніх сил можна записати у вигляді:  $Q(y_1) = 0$ ;  $P(y_1) = 0$ ;  $M(y_1) = 0$  при  $y_1 = \pm a$ , де

$$Q(y_1) = \int_{-a}^{y_1} [q(\tau) - q_0(\tau)] d\tau, \quad |y_1| \leq a;$$

$$P(y_1) = \int_{-a}^{y_1} [p(\tau) - p_0(\tau)] d\tau, \quad |y_1| \leq a;$$

$$M(y_1) = \int_{-a}^{y_1} (y_1 - \tau) [p(\tau) - p_0(\tau)] d\tau, \quad |y_1| \leq a.$$

Тут  $Q(y_1)$  – повздовжня сила;  $P(y_1)$  – поперечна сила;  $M(y_1)$  – згинаючий момент в поперечному перерізі накладки.

Якщо врахувати (2) і вирази для обчислення переміщень граничних точок в області контакту  $y_1 \in [-a, a]$  на грані  $y_2 = 0$  пружної смуги з початковими напруженнями [18; 19], отримаємо відому систему інтегрально-диференціальних рівнянь. Якщо для цієї системи ввести нову функцію і зробити заміну

$$X(\tau) = \tilde{p}(\tau) + i\tilde{q}(\tau); \quad (\tau = \xi, \eta); \quad \delta = \pi a / l, \quad (3)$$

то після деяких перетворень отримаємо сингулярне інтегральне рівняння з ядром Гільберта [17]:

$$\begin{aligned} i\beta_1 X(\xi) + \int_{-\delta}^{\delta} X(\eta) \operatorname{ctg} \frac{\xi - \eta}{2} d\eta - \int_{-\delta}^{\delta} \tilde{L}_{11}(\xi - \eta) X(\eta) d\eta - \\ - i \int_{-\delta}^{\delta} \tilde{L}_{12}(\xi - \eta) X(\eta) d\eta - \int_{-\delta}^{\delta} \tilde{L}_{22}(\xi - \eta) \bar{X}(\eta) d\eta + \\ + \beta_2 \int_{-\delta}^{\delta} [X(\eta) - \bar{X}(\eta)] d\eta = \\ = i[\beta_2 \tilde{Q}_1(\xi) + \lambda_4] d\tau - \frac{\beta_1}{2\pi} \quad (-\delta < \xi < \delta) \end{aligned} \quad (4)$$

з граничною умовою

$$\int_{-\delta}^{\delta} X(\eta) d\eta = \frac{i\pi}{l}. \quad (5)$$

Де  $\bar{X}(\eta)$  – функція комплексно спряжена до функції  $X(\eta)$

$$\tilde{Q}_1(\xi) = \int_{-\delta}^{\delta} \tilde{q}_0(\eta) d\eta; \quad Q_0 = \int_{-a}^a q(\eta) d\eta; \quad M_0 = \int_{-a}^a \xi p(\xi) d\xi;$$

$$\tilde{p}(\tau) = p\left(\frac{l\tau}{\pi}\right) \frac{1}{Q_0}; \quad \tilde{q}(\tau) = q\left(\frac{l\tau}{\pi}\right) \frac{1}{Q_0}; \quad \tilde{q}_0(\tau) = q_0\left(\frac{l\tau}{\pi}\right) \frac{1}{Q_0}. \quad (6)$$

Величини  $\tilde{L}_{ij}(\tau)$ ,  $\beta_i$ ,  $\lambda_4$  характеризують початковий напружений стан і визначаються для стиснутих і нестисливих матеріалів у випадку конкретних пружних потенціалів окремо для рівних та нерівних коренів визначального рівняння виразами [1]. Також,  $\tilde{Q}_1(\xi)$  – функція розподілу тангенціальних контактних напружень вздовж лінії контакту накладки і пружної смуги з початковими напруженнями.

Таким чином, поставлена задача зводиться до розв'язування сингулярного інтегрального рівняння (4) з граничними умовами (5).

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді ряду за функціями Якобі [18; 20]:

$$X(\xi) = w(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{X}_n P_n^{(\alpha, \beta)} \left( \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \right) \quad (|\xi| < \delta), \quad (7)$$

де  $\{P_n^{(\alpha, \beta)}(\operatorname{ctg} \delta / 2 - \operatorname{tg} \xi / 2)\}_{n=0}^{\infty}$  – многочлени Якобі, що ортогональні на відрізку  $[-\delta; \delta]$  відносно ваги  $w(\xi) = \sec \frac{\xi}{2} \left( \sin \frac{\delta - \xi}{2} \right)^{\alpha} \left( \sin \frac{\delta + \xi}{2} \right)^{\beta}$ ,

$$\alpha = -\frac{1}{2} - i\alpha_1; \quad \beta = -\frac{1}{2} + i\alpha_1; \quad \alpha_1 = \frac{\ln(3 - 4c_{44})}{2\pi}.$$

Тут  $c_{44}$  – параметр, який визначає початковий напружений стан в смугі.

Слід відзначити, що  $\tilde{X}_n$  – це нескінченний ряд невідомих комплексних коефіцієнтів, які потрібно визначити. Для їх визначення підставляємо значення (7) в рівняння (4). В подальшому, використавши властивості ортогональності многочленів Якобі [19; 20], для визначення невідомих величин  $\tilde{X}_n$  отримуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} l_m \tilde{X}_m + \sum_{n=1}^{\infty} [D_{m,n}^{(1)} \tilde{X}_n + D_{m,n}^{(2)} \bar{\tilde{X}}_n] = \\ = -[D_m^{(0)} + D_m^{(1)} X_0 + D_m^{(2)} \bar{X}_0] \quad (m = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (8)$$

Тут введено позначення

$$l_m = \frac{4\pi \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \Gamma(m - \alpha) \Gamma(m - \beta)}{\operatorname{ch} \pi \alpha_1 (m!)^2};$$

$$D_{m,n}^{(1)} = L_{m,n}^{(11)} + L_{m,n}^{(12)} + L_{m,n}^{(13)}; \quad D_{m,n}^{(2)} = L_{m,n}^{(22)} + L_{m,n}^{(23)};$$

$$D_m^{(1)} = L_m^{(11)} + L_m^{(12)} - L_m^{(13)}; \quad D_m^{(2)} = L_m^{(22)} + L_m^{(23)};$$

$$D_m^{(0)} = \int_{-\delta}^{\delta} Q_1^*(\xi) w_1(\xi) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)} \left( \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \right) d\xi;$$

$$L_{m,n}^{(j3)} = \lambda_1 \int_{-\delta}^{\delta} \left\{ \int_{-\delta}^{\xi} [(2-j)w(\eta) \cdot P_n^{(\alpha,\beta)} \left( \text{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \text{tg} \frac{\eta}{2} \right) + (j-1)\bar{w}(\eta) \bar{P}_n^{(\alpha,\beta)} \left( \text{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \text{tg} \frac{\eta}{2} \right)] d\eta \right\} w_1(\xi) \times \\ \times P_{m-1}^{(-\alpha,-\beta)} \left( \text{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \text{tg} \frac{\xi}{2} \right) d\xi;$$

$$L_m^{(j3)} = \lambda_1 \int_{-\delta}^{\delta} \left\{ \int_{-\delta}^{\xi} [(2-j)w(\eta) + (j-1)\bar{w}(\eta)] d\eta \right\} w_1(\xi) \\ P_{m-1}^{(-\alpha,-\beta)} \left( \text{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \text{tg} \frac{\xi}{2} \right) d\xi;$$

$$L_{m,n}^{(1j)} = [(2-j) + i(j-1)] \int_{-\delta}^{\delta} \left\{ \int_{-\delta}^{\xi} \tilde{L}_{ij}(\xi-\eta)w(\eta) \cdot P_n^{(\alpha,\beta)} \left( \text{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \text{tg} \frac{\xi}{2} \right) d\xi \right\} \times \\ \times w_1(\xi) \cdot P_{m-1}^{(-\alpha,-\beta)} \left( \text{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \text{tg} \frac{\xi}{2} \right) d\xi, \quad j=1, 2;$$

$$L_{m,n}^{(22)} = \int_{-\delta}^{\delta} \left\{ \int_{-\delta}^{\xi} \tilde{L}_{22}(\xi-\eta) \bar{w}(\eta) d\eta \right\} w_1(\xi) P_{m-1}^{(-\alpha,-\beta)} \left( \text{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \text{tg} \frac{\xi}{2} \right) d\xi;$$

$$L_m^{(22)} = \int_{-\delta}^{\delta} \left\{ \int_{-\delta}^{\xi} [\beta_2(\xi-\eta)^2 + \beta_3] \bar{w}(\eta) d\eta \right\} w_1(\xi) \\ P_{m-1}^{(-\alpha,-\beta)} \left( \text{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \text{tg} \frac{\xi}{2} \right) d\xi,$$

де  $\beta_i, \lambda_1$  – параметри, які визначають початковий напружений стан в смузі,

$$w_1(\xi) = \sec \frac{\xi}{2} \left( \sin \frac{\delta-\xi}{2} \right)^\alpha \left( \sin \frac{\delta+\xi}{2} \right)^\beta.$$

Для використання числових методів при розв'язуванні системи (8) необхідно ще визначити коефіцієнт  $X_0$ , який входить в праву частину системи [16; 18; 20]. Коефіцієнт  $X_0$  можна знайти з граничної умови (5) за допомогою ряду (7). У результаті отримуємо

$$X_0 = \frac{\text{ch} \pi \alpha_1 \cdot \cos \frac{\delta}{2}}{2l} i. \quad (9)$$

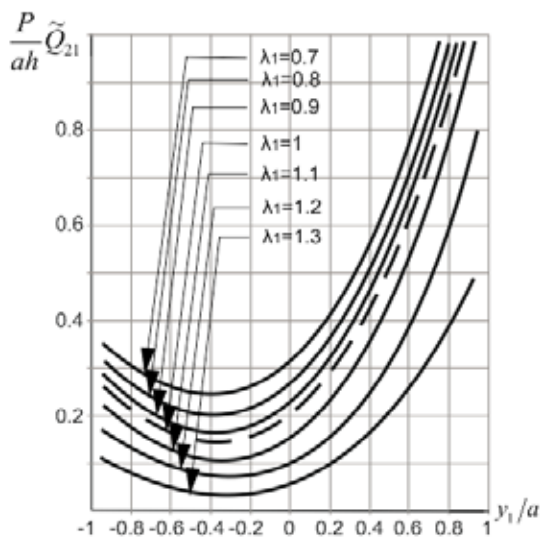


Рис. 2

Система (8) квазірегулярна, так вираз

$$L_m = l_m m^\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\varepsilon} \left[ |D_{m,n}^{(1)}| + |D_{m,n}^{(2)}| \right] \quad (m=1, 2, \dots), \quad (10)$$

та вільний член  $d_m = l_m^* m^\varepsilon \left[ \|D_m^0\| + \|D_m^{(1)}\| + \|D_m^{(2)}\| \right]$ ,

де  $l_m^* = (ml_m)^{-1} = O(1)$ , мають порядок  $O(m^{-(1/2)+\varepsilon})$  при  $m \rightarrow \infty$ . Такі оцінки дають можливість стверджувати, що система квазірегулярна для довільних значень фізичних і геометричних параметрів широкого класу конструкційних матеріалів.

**Результати.** Числовий аналіз проведеного дослідження представлений для гармонічного потенціалу (рис. 2) і потенціалу Бартенєва-Хазановича (рис. 3) за допомогою відомих параметрів початкового стану при  $\lambda_1 = 0.7; 0.8; 0.9; 1; 1.1; 1.2$ . Алгоритм числового розв'язку ґрунтується на методі редукції та реалізований у вигляді програми в пакеті Maple. Також зазначимо, що чисельне дослідження системи типу (8) на квазірегулярність представлено в [1].

Вплив початкових напружень на закон розподілу контактних характеристик для даної задачі представлено на рис. 2 та 3.

Тут  $\frac{P}{ah} \tilde{Q}_{21}$  – безрозмірні контактні тангенціальні напруження;  $\lambda_1$  – початкові видовження вздовж осі  $Oy_1$ , які визначають переміщення початкового стану;  $P$  – вертикальне навантаження прикладене до накладки;  $\tilde{Q}_{21} = q_0(y_1)\delta(y_1)$  – тангенціальна сила, яка діє на накладку, де  $\delta(y_1)$  – відома функція Дірака.

Значення  $\lambda_1 = 1$  (на графіках пунктирна лінія) відповідає класичній теорії пружності і співпадає з результатами роботи [20];  $\lambda_1 = 0.7; 0.8; 0.9$  відповідають початковим напруженням стиску;

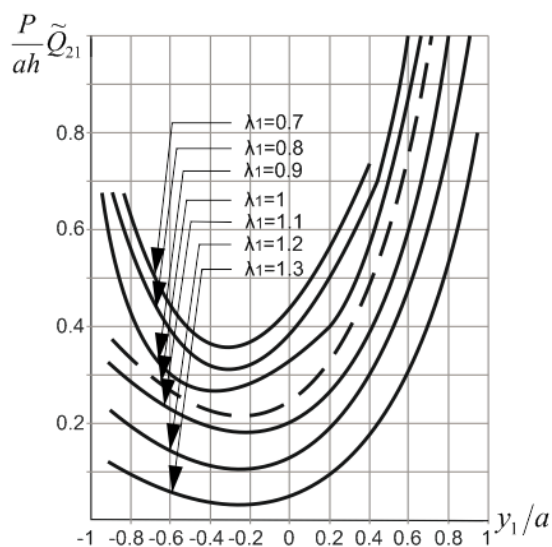


Рис. 3

$\lambda_1 = 1, 1, 1, 2, 1, 3$  відповідають початковим напруженням розтягу;  $y_1/a$  – безрозмірна координата початкового напруженого стану в пружних смугах з початковими напруженнями.

**Дискусія.** У результаті проведених досліджень розв’язок задачі представлений у вигляді нескінченних рядів, коефіцієнти яких визначаються з нескінченної квазірегулярної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (8). Ці коефіцієнти залежать від структури пружного потенціалу і параметрів, що задають початковий напружено-деформований стан.

Враховуючи проведене дослідження, для потенціалів гармонічного і Бартенєва-Хазановича вплив початкових напружень на напружено-деформований стан в області контакту пружних накладок з попередньо напруженими смугами виражається таким чином:

1. Початкові напруження при стиску призводять до зменшення сили напружень в області контакту, а при розтязі – до їх збільшення, у випадку переміщень все відбувається навпаки. Тобто наявність попередньо напруженого стану під час контактної взаємодії пружних тіл дає змогу регулювати контактні напруження та переміщення.

2. Відстань між накладками є важливим параметром їх взаємного впливу. Але було встановлено, що на закон розподілу контактних напружень, крім відстані між накладками, суттєвий вплив здійснюють початкові напруження в смугах.

3. Більш суттєвий вплив (у кількісному плані) початкові напруження здійснюють у високоеластичних матеріалах у порівнянні із більш жорсткими, але якісно їх вплив зберігається.

Наукова новизна результатів проведеного дослідження:

1. Отримано розв’язок плоскої контактної задачі лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями при довільній структурі пружного потенціалу для стисливих і нестисливих тіл.

2. Встановлено аналітичні залежності, які дозволяють досліджувати поведінку напружень та переміщень в області контакту для періодично розміщених пружних накладок і смуг з початковими напруженнями.

3. За допомогою числової реалізації методу дослідження встановлено особливості впливу початкових напружень на закон розподілу контактних напружень і переміщень в області контакту, а також представлено порівняння отриманих результатів з випадком відсутності початкових напружень.

Отже, можна зробити висновок про те, що вплив початкових напружень на контактну взаємодію пружних тіл достатньо сильний і суттєво впливає на закон розподілу контактних характеристик. Тому його врахування дозволить значно покращити точність інженерних обчислень при розрахунках на міцність конструкцій та деталей машин, а також дозволить суттєво зменшити матеріалоемність конструкцій.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н., Рудницький В.Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями : монография. Хмельницький : вид. ПП Мельник, 2006. 710 с.
2. Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями : навч. посіб. Київ : Вища шк., 1995. 305 с.
3. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями : монография. Германия : Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.
4. Guz A. N. Nonclassical Problems of Fracture / Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of Research (Review). *III. International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55, No 4. P. 343–415. URL: <https://doi.org/10.1007/s10778-019-00960-4>.
5. Aleksandrov V. M., Arutyunyan N. Ky. Contact problems for prestressed deformed bodies. *Soviet Applied Mechanics*. 1984. Vol. 20, No 3. P. 209–215. URL: <https://doi.org/10.1007/BF00883134>.
6. Babich S.Yu., Guz A.N., Rudnitsky V.B. Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches. *International Applied Mechanics*. 2004. Vol. 40, No 7. P. 744–765.
7. Guz, O.M., Babych, S.Y., Glukhov, A.Y. Axisymmetric Waves in Prestressed Highly Elastic Composite Material. Long Wave Approximation. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57, No 2. P. 134–147. URL: <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01068-4>.
8. Babych S.Y., Yarets'ka N.O. Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57, No 3. P. 297–305. URL: <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7>.
9. Vasu, T. S., and Bhandakkar, T. K. A Study of the Contact of an Elastic Layer–Substrate System Indented by a Long Rigid Cylinder Incorporating Surface Effects. *ASME. J. Appl. Mech.* 2016. Vol. 83, No 6. P. 061009. URL: <https://doi.org/10.1115/1.4033079>(April 6, 2016).

10. Yaretskaya N.A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *Int. Appl. Mech.* 2014. Vol. 50, No 4. P. 378–388. URL: <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0641-y>.
11. Bagno, O.M. Effect of Finite Initial Strains on the Wave Process in the System of an Incompressible Half-Space and an Ideal Liquid Layer. *Int Appl Mech.* 2021. Vol. 57, No 6. P. 644–654. URL: <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01114-9>.
12. Petinrin M.O., Oyedele A.A., Ajide O.O. Numerical Analysis of Thermo-Elastic Contact Problem of Disc Brakes for Vehicle on Gradient Surfaces. *World Journal of Engineering and Technology.* 2016. Vol. 4, No 1. P. 51–58.
13. Босаков С. В. Две контактные задачи о вдавливании кольцевого штампа в упругое полупространство. *Наука и техника.* 2018. № 6(17). С. 458–464. URL: <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2018-17-6-458-464>.
14. Semenyuk, N.P., Zhukova, N.B. Stability of a Sandwich Cylindrical Shell with Core Subject to External Pressure and Pressure in the Inner Cylinder. *International Applied Mechanics.* 2020. Vol. 56, No 1. P. 40–53.
15. Meish, V.F., Meish, Y.A. & Kornienko, V.F. Dynamics of Three-Layer Shells of Different Geometry with Piecewise-Homogeneous Core Under Distributed Loads. *Int Appl Mech.* 2021. Vol. 57, No 6. P. 659–668. URL: <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01116-7>.
16. Рудницький В.Б., Ярецька Н.О., Венгер В.О. Застосування ІТ технологій в механіці деформованого твердого тіла. *Проблеми трибології.* Хмельницький : ХНУ. 2017. Том 84, No 2. С. 32–40.
17. Діхтярук М.М. Визначення функції впливу для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями. *Пр. 4-го Міжнародного симпозиуму з трибофатики (ISTF) (м. Тернопіль, 23-27 вересня 2002 р.) / відп. ред. В.Т. Трощенко.* Тернопіль : Терноп. держ. техн. ун-т ім. Івана Пулюя, 2002. С. 426–431.
18. Dikhtyaruk N.N. Equilibrium of a Prestressed Strip Reinforced with Elastic Plates. *Int. Appl. Mech.* 2004. Vol. 40, No 3. P. 290–96.
19. Rudnitsky V.B., Dikhtyaruk N.N. A prestressed elastic strip with elastic reinforcements. *Int. Appl. Mech.* 2002. Vol. 38, No 11. P. 1354–1360.
20. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками : монография. Ереван : Изд. Ереван. ун-та, 1983. 260 с.

## REFERENCES

1. Guz', A.N., Rudnickij V.B. (2006). *Osnovy teorii kontaktного vzaimodejstviya uprugih tel s nachal'nymi (ostatocnymi) napryazheniyami.* Hmel'nic'kij, vyd. PP Mel'nik. [in Russian]
2. Huz O.M., Babych S.Iu., Rudnitskyi V.B. (1995). *Kontaktna vzaiemodiia pruzhnykh til z pochatkovymy napryzhenniamy.* K. : Vyshcha shk. [in Ukrainian]
3. Guz', A. N., Babich, S. Yu., & Glukhov, Yu. P.(2015). *Smeshannyye zadachi dlya uprugogo osnovaniya s nachal'nymi napryazheniyami* [Mixed problems for an elastic base with initial stresses]. LAP LAMBERT Academic Publishing. [in Russian]
4. Guz A. N. (2019). *Nonclassical Problems of Fracture / Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of Research (Review).* III. *International Applied Mechanics.* 55(4), 343–415. <https://doi.org/10.1007/s10778-019-00960-4>
5. Aleksandrov V. M., Arutyunyan N. Ky. (1984) *Contact problems for prestressed deformed bodies.* *Soviet Applied Mechanics.* 20(3), 209–215. <https://doi.org/10.1007/BF00883134>
6. Babich S.Yu., Guz A.N., Rudnitsky V.B. (2004). *Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches.* *International Applied Mechanics.* 40(7), 744 – 765.
7. Guz, O.M., Babych, S.Y., Glukhov, A.Y. (2021). *Axisymmetric Waves in Prestressed Highly Elastic Composite Material. Long Wave Approximation.* *International Applied Mechanics.* 57(2), 134 – 147. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01068-4>
8. Babych S.Y., Yarets'ka N. O. (2021). *Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses.* *International Applied Mechanics.* 57(3), 297 – 305. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7>
9. Vasu, T. S., and Bhandakkar, T. K. (April 6, 2016). *A Study of the Contact of an Elastic Layer–Substrate System Indented by a Long Rigid Cylinder Incorporating Surface Effects.* *ASME. J. Appl. Mech.* 83(6): 061009. <https://doi.org/10.1115/1.4033079>
10. Yaretskaya N.A. (2014). *Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses.* *Int. Appl. Mech.* 50(4), 378 – 388. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0641-y>

11. Bagno, O.M. (2021). *Effect of Finite Initial Strains on the Wave Process in the System of an Incompressible Half-Space and an Ideal Liquid Layer*. *Int Appl Mech.* 57(6), 644–654. <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01114-9>
12. Petinrin M.O., Oyedele A.A., Ajide O.O. (2016). *Numerical Analysis of Thermo-Elastic Contact Problem of Disc Brakes for Vehicle on Gradient Surfaces*. *World Journal of Engineering and Technology*, 4(1), 51–58.
13. Bosakov S. V. (2018). *Dve kontaktnyye zadachi o vdavlivanii koltseвого shtampa v uprugoe poluprostranstvo* [Two contact problems on the indentation of an annular stamp into an elastic half-space]. *Nauka i tehnika*, 6(17), 458–464. (in Russian)
14. Semenyuk, N.P., Zhukova, N.B. (2020) *Stability of a Sandwich Cylindrical Shell with Core Subject to External Pressure and Pressure in the Inner Cylinder*. *International Applied Mechanics*, 56(1), 40–53.
15. Meish, V.F., Meish, Y.A. & Kornienko, V.F. (2021). *Dynamics of Three-Layer Shells of Different Geometry with Piecewise-Homogeneous Core Under Distributed Loads*. *Int Appl Mech.* 57(6), 659–668. <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01116-7>
16. Rudnytskyi V.B., Iaretska N.O., Venher V.O. (2017). *Zastosuvannia IT tekhnolohii v mekhanitsi deformovanoho tverdoho tila*. *Problemy trybolohii*. Khmelnytskyi: KhNU. 84(2), 32-40. [in Ukrainian]
17. Dikhtiaruk M.M. (2002). *Vyznachennia funktsii vplyvu dlia pruzhnoi smuhy z pochatkovymy (zalyshkovymy) napruzhenniamy*. [Title]. Pr. 4-ho Mizhnarodnoho sympoziumu z trybofatyky (ISTF), (m. Ternopil, Ukraina, 23 – 27 veresnia 2002 r.) / Vidp. red. V.T. Troshchenko. Ternopil: Ternop. derzh. tekhn. un-t im. Ivana Puliuia, 426 – 431. [in Ukrainian]
18. Dikhtyaruk N.N. (2004). *Equilibrium of a Prestressed Strip Reinforced with Elastic Plates*. *Int. Appl. Mech.* 40(3), 290 – 296.
19. Rudnitsky V.B., Dikhtyaruk N.N. (2002). *A prestressed elastic strip with elastic reinforcements*. *Int. Appl. Mech.* 38(1), 1354 – 1360.
20. Sarkisyan V.S. (1983). *Kontaknnyye zadachi dlya poluploskostey i polos s uprugimi nakladkami*. Yerevan : Izd. Yerevan. un-ta. [in Russian]

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ХАРАКТЕРИСТИК P-I-N-СТРУКТУР, ЩО ВЗАЄМОДІЮТЬ З ВИСОКОЧАСТОТНИМ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИМ ВИПРОМІНЮВАННЯМ, МЕТОДАМИ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ

**Мороз І. П.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
докторант кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики  
Національний університет водного господарства та природокористування  
вул. Соборна, 11, Рівне, Україна  
[orcid.org/0000-0001-6381-2266](https://orcid.org/0000-0001-6381-2266)  
[Igor\\_Moroz@yahoo.com](mailto:Igor_Moroz@yahoo.com)*

**Ключові слова:** *сингулярно збурена крайова задача, асимптотичний ряд, примежова поправка, електронно-діркова плазма, p-i-n-діод.*

Запропоновано математичну модель прогнозування характеристик електронно-діркової плазми активної області (і-області) p-i-n-структур, яка враховує вплив на формування просторового заряду струму зміщення, викликаного стороннім надвисокочастотним (НВЧ) електромагнітним полем. Основу моделі становить сингулярно збурена нелінійна крайова задача для системи рівнянь неперервності електронного і діркового струмів та Пуассона (рівняння Пуассона містить природним чином сформований малий параметр). Модельна нелінійна крайова задача шляхом залучення асимптотичних методів, зокрема методу пограничного шару, та методу комплексних амплітуд, приведена до рекурентної послідовності лінійних крайових задач для визначення розподілів концентрацій електронно-діркової плазми та електричного потенціалу в і-області. Особливістю запропонованої математичної моделі є те, що вона відображає роль пограничного шару в приконтактних зонах p-i-n-структури у формуванні просторового заряду і враховує дію струму зміщення, який викликаний НВЧ випромінюванням. Побудовано алгоритм прогнозування розподілу концентрацій носіїв заряду в електронно-дірковій плазмі. Показано, що стороннє НВЧ поле спричиняє додаткове зростання стаціонарної концентрації електронів і дірок в активній області, на фоні якої відбуваються коливання концентрації плазми на частоті НВЧ поля (поява вищих гармонік у моделі не враховується). В зонах p-i-, n-i- контактів ефект зростання стаціонарного складника концентрації виражений сильніше. Запропонована математична модель та розроблений алгоритм аналізу поставленої задачі важливі для розробників напівпровідникових елементів НВЧ електроніки, зокрема p-i-n-структур, які використовуються для комутації потужних електромагнітних полів і як захисних пристроїв вхідних трактів радіотехнічних систем.



# SIMULATION OF THE P-I-N-STRUCTURES CHARACTERISTICS INTERACTING WITH HIGH-FREQUENCY ELECTROMAGNETIC RADIATION BY PERTURBATION THEORY METHODS

**Moroz I. P.**

*Ph.D., Associate Professor,*

*Doctoral Student at the Department of Computer Science and Applied Mathematics*

*National University of Water and Environmental Engineering*

*Soborna str., 11, Rivne, Ukraine*

*orcid.org/0000-0001-6381-2266*

*Igor\_Moroz@yahoo.com*

**Key words:** *singularly perturbed boundary value problem, asymptotic series, boundary function, electron-hole plasma, p-i-n diode.*

The mathematical model is proposed for the electron-hole plasma characteristics predicting of the active region (i-region) of p-i-n structures, taking into account the effect of the displacement current (induced by an external microwave electromagnetic field) on the formation of a space charge. The model is based on a singularly perturbed nonlinear boundary value problem for the system of the electron-hole current continuity equations and Poisson's (the Poisson's equation contains a naturally formed small parameter). The model nonlinear boundary value problem is reduced to a recurrent sequence of linear boundary value problems for determining of the electron-hole plasma concentrations and the electric potential distributions in the i-region by using asymptotic methods, in particular, the boundary layer method and complex amplitudes. The proposed mathematical model feature is that it reflects the role of the boundary layer in the p-i-n structure contact zones in the formation of a space charge and takes into account the effect of a displacement current caused by microwave radiation. An algorithm for predicting the charge carrier concentrations distribution in the electron-hole plasma is constructed. It is shown that an extraneous microwave field entails an additional increase in the stationary concentration of electrons and holes in the active region, against which the plasma concentration fluctuates at the microwave field frequency (the appearance of higher harmonics is not taken into account in the model). The effect of the growth of the concentration stationary component is more pronounced in the zones of p-i-, n-i-contacts. The proposed mathematical model and the developed algorithm for analyzing the problem posed are important for developers of microwave electronics semiconductor elements, in particular, p-i-n structures used for switching powerful electromagnetic fields and as protective devices for the input paths of radio engineering systems.

## **Вступ.**

Проблема проектування керуючих напівпровідникових пристроїв НВЧ (зокрема, р-і-п-діодів [1]) стикається із необхідністю комп'ютерного моделювання фізичних процесів (стаціонарних / нестаціонарних), що протікають у відповідних напівпровідникових структурах, на які, зокрема, здійснює вплив НВЧ випромінювання. При цьому вирішуються складні задачі зі знаходження розподілів поля і концентрацій носіїв заряду в електродинамічній системі з відповідними активними елементами. Задачі визначення характеристик напівпровідникових структур у конкретних електродинамічних системах від рівня потужності діючого НВЧ сигналу є не досить вивче-

ними [1; 2]. Зі зростанням потужності сигналу та його частоти можливі істотні зміни властивостей напівпровідникових структур.

Базові математичні моделі в гідродинамічному наближенні стану електронно-діркової плазми активної області напівпровідникових пристроїв, які описують розподіли концентрації дірок ( $n$ ), електронів ( $p$ ) та потенціалу ( $\varphi$ ), містять рівняння неперервності діркового і електронного струмів та рівняння Пуассона [1; 2; 3]. Граничні умови будуються на основі уявлень про протікання на виділених ділянках межі активної області інжекційних, дифузійно-дрейфових та рекомбінаційних процесів [3] у разі прикладених до контактних ділянок заданих струму і напруги. Традиційно властивості напівпровідникових структур вивчають за умови

стаціонарності, малосигнальності за сталих коефіцієнтів моделі.

У випадку взаємодії напівпровідникових пристроїв з НВЧ електромагнітним випромінюванням на процеси протікання струму провідності накладаються низка кінетичних та теплових процесів, зумовлених дією НВЧ електромагнітного поля. Зокрема, змінюються значення характеристик матеріалів напівпровідникових структур у потужних НВЧ полях, спостерігається розігрів активної області напівпровідникових структур, мають місце нелінійні явища детектування НВЧ хвиль, породження вищих гармонік у хвильових процесах тощо [4; 5]. Одним із факторів впливу НВЧ поля є наведений струм зміщення [6], який необхідно враховувати в математичних моделях оцінки стану електронно-діркової плазми. Очевидно, базові математичні моделі потребують удосконалення.

Ефективними для розв'язання складних нелінійних задач теорії напівпровідникових пристроїв, що враховують комплексний вплив різних факторів, є асимптотичні методи [7; 8; 9; 10; 11], які дозволяють провести декомпозицію початкової нелінійної задачі моделювання, привести її до рекурентної послідовності простіших задач, які розв'язуються аналітичними або числовими методами. Можливість застосування асимптотичних методів, зокрема методу приміжових поправок [7; 8; 9; 10; 11], зумовлена тим, що постановки відповідних задач містять природним чином сформовані малі параметри. Істотним також є те, що асимптотичні методи дозволяють встановити ступінь впливу певного фактора дії НВЧ поля на стан електронно-діркової плазми активної області.

**Мета роботи** є розвиток методології моделювання розподілу концентрації електронно-діркової плазми в активній області р-і-п-діодів (плазмових діодів) з урахуванням впливу на стан системи струму зміщення, викликаного НВЧ полем, та розвиток асимптотичних методів розв'язання відповідних сингулярно збурених нелінійних задач, що забезпечує можливість отримання додаткової інформації про імпедансні властивості р-і-п-діодів.

#### Постановка задачі.

Електропровідні властивості р-і-п-структур в основному визначає розподіл концентрації носіїв заряду в активній області (область  $\Omega = \{(\rho, \theta, z) : 0 < \rho < R, 0 < \theta < 2\pi, 0 < z < w\}$ , рис. 1). Розподіл концентрації плазми знаходять у результаті розв'язання системи рівнянь неперервності електронно-діркових струмів та рівняння Пуассона за заданих граничних і початкових умов [1; 2; 3]. Дію стороннього електромагнітного поля пропонуємо враховувати у базовій математичній

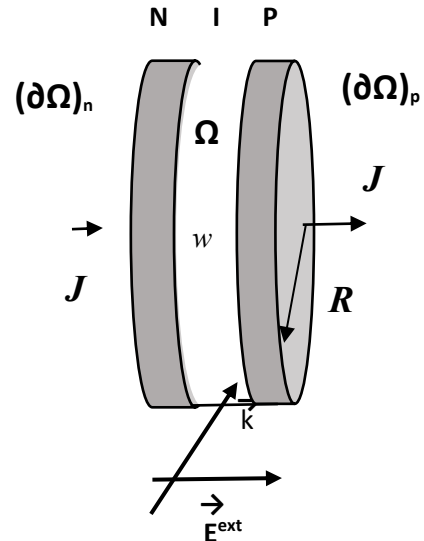


Рис 1. Схематичне зображення р-і-п-діода і проникаючої в діод НВЧ хвилі

моделі таким чином (дрейф носіїв заряду відбувається у стаціонарному електричному полі  $-\nabla\phi$ , на яке накладається проникаюче в і-область швидкозмінне стороннє поле  $\vec{E}^{ext}$ ):

$$\begin{cases} D_n \Delta n - \mu_n \nabla \cdot (n(\nabla\phi - \vec{E}^{ext})) - \frac{1}{\tau_n^*} n = \frac{\partial n}{\partial t}, \\ D_p \Delta p + \mu_p \nabla \cdot (p(\nabla\phi - \vec{E}^{ext})) - \frac{1}{\tau_p^*} p = \frac{\partial p}{\partial t}, \\ \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{e} \nabla \cdot (\nabla\phi - \vec{E}^{ext}) = -(p - n + N_l), \end{cases} \quad (1)$$

де  $p, n$  – функції розподілу концентрацій дірок і електронів відповідно;  $\phi$  – функція розподілу потенціалу;  $\vec{E}^{ext}$  – вектор напруженості електричної компоненти стороннього НВЧ поля;  $\tau_n^*, \tau_p^*$  – характерні релаксаційні часи життя електронів та дірок в і-області;  $e$  – заряд електрона;  $D_p, D_n$  – коефіцієнти дифузії,  $\mu_p, \mu_n$  – рухомості відповідно дірок та електронів ( $\mu_{n,p} = \frac{k_B T}{e} D_{n,p}$ , де  $T$  – температура (300 °К),  $k_B$  – стала Больцмана);  $\varepsilon, \varepsilon_0$  – відносна діелектрична проникність напівпровідника та діелектрична стала;  $N_l = N_a - N_d$  – задана функція профілю легування (описує різницю концентрацій акцепторів і донорів в активній області). Рівняння неперервності базової математичної моделі будуються із врахуванням уявлень про протікання струмів провідності і зміщення (викликаний швидкозмінним електричним полем і зв'язаною із ним змінною у часі концентрацією носіїв заряду) [6].

Граничні умови на інжектуючих контактах (поверхні  $(\partial\Omega)_n, (\partial\Omega)_p$ ) записуємо з урахуванням припущення про те, що через межу  $(\partial\Omega)_n$  струм переносять лише електрони, відповідно через

$(\partial\Omega)_p$  – дірки (у разі широкої активної області більша частина інжектованих носіїв заряду рекомбінує в і-області і не встигає потрапити в область протилежного контакту) [3]. Струм, який підводиться до контактних ділянок, в активній області р-і-п-діода розподіляється між дифузійною, дрейфовою і рекомбінаційною складовими частинами струму провідності та струмом зміщення ( $\bar{J}^{zm} = \frac{\partial \bar{D}^{ext}}{\partial t}$ ). В традиційних моделях струм зміщення не враховується, оскільки він відсутній у стаціонарному випадку і незначний у малосигнальному режимі роботи діода або у разі роботи на низьких частотах. Отримуємо:

$$\frac{\partial n}{\partial v} + \frac{\mu_n}{D_n} n (E_v^{in} + E_v^{ext}) - 2\gamma_n n + \frac{J_v^{zm}}{eD_n} \Big|_{(\partial\Omega)_n} = \frac{J}{eD_n},$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\mu_p}{D_p} p (E_v^{in} + E_v^{ext}) \Big|_{(\partial\Omega)_n} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\mu_p}{D_p} p (E_v^{in} + E_v^{ext}) + 2\gamma_p p - \frac{J_v^{zm}}{eD_p} \Big|_{(\partial\Omega)_p} = -\frac{J}{eD_p},$$

$$\frac{\partial n}{\partial v} + \frac{\mu_n}{D_n} n (E_v^{in} + E_v^{ext}) \Big|_{(\partial\Omega)_p} = 0, \quad (3)$$

де  $\bar{v}$  – вектор нормалі до поверхні;  $\gamma_n = \frac{\alpha_n}{D_n}$ ,  $\gamma_p = \frac{\alpha_p}{D_p}$ ,  $\alpha_{n,p}$  – коефіцієнти поверхневої рекомбінації відповідно електронів і дірок;  $\bar{E}^{in} = -\nabla\phi$  – внутрішнє електростатичне поле активної області.  $J_v^{zm} = \frac{\partial D_v^{ext}}{\partial t}$  – струм зміщення,  $D_v^{ext} = \varepsilon_0 \varepsilon E_v^{ext}$ ,  $E_v^{ext}$  – напруженість проникаючого в і-область НВЧ поля.

Функція потенціалу задовольняє такі граничні умови:

$$\phi|_{(\partial\Omega)_n} = 0, \quad \phi|_{(\partial\Omega)_p} = U + U^{ext}, \quad (4)$$

де  $U$  – стала, що визначає напругу на контактах р-і-п-структури;  $U^{ext}$  – наведена напруга НВЧ полем. Припускається (за умови дії високочастотного сигналу), що напруга у основному прикладена до високоомної ділянки р-і-п-структури, падінням напруги на інжектуючих n-і-, р-і- контактах нехтуємо.

На бічній поверхні діода  $(\partial\Omega)_0$  шукані функції задовольняють умови аналогічні до (2)–(4):

$$\frac{\partial n}{\partial v} - \gamma_n^* n \Big|_{(\partial\Omega)_0} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial v} - \gamma_p^* p \Big|_{(\partial\Omega)_0} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial v} \Big|_{(\partial\Omega)_0} = 0. \quad (5)$$

Розглянемо задачу (1)–(5) за умови впливу слабого НВЧ поля на процеси переносу зарядів

в активній області:  $\nabla\phi \gg \bar{E}^{ext} = \mu\bar{E}^-$  ( $U \gg U^{ext}$ ). Також вважаємо, що в активній області структури відсутні донорні й акцепторні домішки (область нелегована):  $N_i = 0$ .

Після застосування процедури нормування рівняння системи (1) набувають такого вигляду:

$$\begin{cases} \Delta n - \nabla \cdot (n(\nabla\phi - \mu\bar{E}^- w)) - A_n n = B_n \frac{\partial n}{\partial t}, \\ \Delta p + \nabla \cdot (p(\nabla\phi - \mu\bar{E}^- w)) - A_p p = B_p \frac{\partial p}{\partial t}, \\ \mu\Delta\phi - \mu^2 \nabla \cdot \bar{E}^- w = -(p - n), \end{cases} \quad (6)$$

де  $\mu = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 k_B T}{e^2 w^2 N_i}$  (малий параметр задачі,  $\mu \sim 10^{-8}$ ),

$$A_n = \frac{w^2}{D_n \tau_n^*}, A_p = \frac{w^2}{D_p \tau_p^*}, B_n = \frac{w^2}{D_n}, B_p = \frac{w^2}{D_p}, \tilde{\rho} = \frac{\rho}{w},$$

$$\tilde{z} = \frac{z}{w} \quad (0 < \tilde{z} < 1), \quad \tilde{\phi} = \frac{e\phi}{k_B T}, \quad \tilde{U} = \frac{eU}{k_B T}, \quad \bar{E}^- = \frac{e\bar{E}^{ext}}{k_B T},$$

$$\tilde{n} = \frac{n}{N_i} \quad (0 \leq \tilde{n} \leq \frac{n_{max}}{N_i}), \quad \tilde{p} = \frac{p}{N_i} \quad (0 \leq \tilde{p} \leq \frac{p_{max}}{N_i}), \text{ де}$$

$N_i$  – концентрація електронів у власному напівпровіднику, залежить від вибраного матеріалу напівпровідника. З метою спрощення запису рівнянь знак “~” в (6) і наступних викладках опущено.

Граничні умови при цьому набувають вигляду:

$$\frac{\partial n}{\partial v} + n(E_v^{in} + \mu E_v^-) w - 2\gamma_n w n + \frac{J_v^{zm}}{eD_n} \frac{w}{N_i} \Big|_{(\partial\Omega)_n} = \frac{J}{eD_n} \frac{w}{N_i},$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} - p(E_v^{in} + \mu E_v^-) w \Big|_{(\partial\Omega)_n} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} - p(E_v^{in} + \mu E_v^-) w + 2\gamma_p w p - \frac{J_v^{zm}}{eD_p} \frac{w}{N_i} \Big|_{(\partial\Omega)_p} = -\frac{J}{eD_p} \frac{w}{N_i},$$

$$\frac{\partial n}{\partial v} + n(E_v^{in} + \mu E_v^-) w \Big|_{(\partial\Omega)_p} = 0,$$

$$\phi|_{(\partial\Omega)_n} = 0, \quad \phi|_{(\partial\Omega)_p} = U + U^{ext},$$

$$\frac{\partial n}{\partial v} - \gamma_n^* w n \Big|_{(\partial\Omega)_0} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial v} - \gamma_p^* w p \Big|_{(\partial\Omega)_0} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial v} \Big|_{(\partial\Omega)_0} = 0.$$

#### Алгоритм декомпозиції задачі.

Пошук розв’язку задачі ґрунтується на використанні методу примезових поправок [7; 8; 9] із залученням методів комплексних амплітуд [12], розділення змінних [12] та відповідних чисельних методів. Вважаємо, що характеристики (амплітуда, фаза) проникаючої в активну область діода

НВЧ хвилі відомі. Вважаємо, що напруженість електричного складника поля НВЧ хвилі змінюється в часі за гармонічним законом, причому ( $\omega$  – частота коливань,  $J^2 = -1$ ):

$$E_{\rho,\theta,z}^{\sim}(\rho, \theta, z, t) = \frac{1}{2} \left( E_{\rho,\theta,z}^*(\rho, \theta, z) e^{j\omega t} + E_{\rho,\theta,z}^*(\rho, \theta, z) e^{-j\omega t} \right), \quad (8)$$

де функції  $E_{\rho,\theta,z}^*(\rho, \theta, z)$  та  $E_{\rho,\theta,z}^*(\rho, \theta, z)$  комплексно спряжені; величини  $\sqrt{E_{\rho,\theta,z}^*(\rho, \theta, z) E_{\rho,\theta,z}^*(\rho, \theta, z)}$  визначають амплітуду коливального процесу.

На процеси протікання електронно-діркового струму накладається процес коливання просторового заряду, тому розподіли концентрацій носіїв заряду у плазмі і-області та потенціалу пропонуємо шукати у такому вигляді:

$$n(\rho, \theta, z, t) = n^{st}(\rho, \theta, z) + \frac{1}{2} \left( n_*(\rho, \theta, z) e^{j\omega t} + n^*(\rho, \theta, z) e^{-j\omega t} \right), \quad (9)$$

$$p(\rho, \theta, z, t) = p^{st}(\rho, \theta, z) + \frac{1}{2} \left( p_*(\rho, \theta, z) e^{j\omega t} + p^*(\rho, \theta, z) e^{-j\omega t} \right),$$

$$\phi(\rho, \theta, z, t) = \phi^{st}(\rho, \theta, z) + \frac{1}{2} \left( \phi_*(\rho, \theta, z) e^{j\omega t} + \phi^*(\rho, \theta, z) e^{-j\omega t} \right), \quad (10)$$

де  $n^{st}(\rho, \theta, z)$ ,  $p^{st}(\rho, \theta, z)$ ,  $\phi^{st}(\rho, \theta, z)$  – стаціонарні розподіли концентрацій електронів і дірок відповідно;  $n_*(\rho, \theta, z)$ ,  $p_*(\rho, \theta, z)$ ,  $\phi_*(\rho, \theta, z)$  – швидкозмінні складники, які мають зміст комплексних амплітуд;  $n^*(\rho, \theta, z)$ ,  $p^*(\rho, \theta, z)$ ,  $\phi^*(\rho, \theta, z)$  – комплексно спряжені амплітуди.

Підстановка (9), (10) в (6) та виділення стаціонарних членів і швидкозмінних компонент (містять множники  $e^{j\omega t}$  та  $e^{-j\omega t}$ , що описують коливання на частоті стороннього поля) дають можливість отримати такі системи рівнянь:

$$\begin{cases} \Delta n^{st} - \nabla \cdot (n^{st} \nabla \phi^{st}) - A_n n^{st} = \frac{1}{4} \left( \nabla \cdot (n_* (\nabla \phi^* - \mu \vec{E}^* w)) + \nabla \cdot (n^* (\nabla \phi_* - \mu \vec{E}_* w)) \right), \\ \Delta p^{st} + \nabla \cdot (p^{st} \nabla \phi^{st}) - A_p p^{st} = -\frac{1}{4} \left( \nabla \cdot (p_* (\nabla \phi^* - \mu \vec{E}^* w)) - \nabla \cdot (p^* (\nabla \phi_* - \mu \vec{E}_* w)) \right), \\ \mu \Delta \phi^{st} = -(p^{st} - n^{st}), \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \Delta n_* - \nabla \cdot (n_* \nabla \phi^{st}) - (A_n + j\omega B_n) n_* = \nabla \cdot (n^{st} (\nabla \phi_* - \mu \vec{E}_* w)), \\ \Delta p_* + \nabla \cdot (p_* \nabla \phi^{st}) - (A_p + j\omega B_p) p_* = -\nabla \cdot (p^{st} (\nabla \phi_* - \mu \vec{E}_* w)), \\ \mu \Delta \phi_* - \mu^2 w \nabla \cdot \vec{E}_* = -(p_* - n_*), \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \Delta n^* - \nabla \cdot (n^* \nabla \phi^{st}) - (A_n - j\omega B_n) n^* = \nabla \cdot (n^{st} (\nabla \phi^* - \mu \vec{E}^* w)), \\ \Delta p^* + \nabla \cdot (p^* \nabla \phi^{st}) - (A_p - j\omega B_p) p^* = -\nabla \cdot (p^{st} (\nabla \phi^* - \mu \vec{E}^* w)), \\ \mu \Delta \phi^* - \mu^2 w \nabla \cdot \vec{E}^* = -(p^* - n^*). \end{cases} \quad (13)$$

Відзначимо, що системи рівнянь (11)–(13) описують поведінку стаціонарних компонент шуканих функцій і тих, що коливаються на частоті збурюючого НВЧ поля. Базова система (6) нелінійна і тут можлива поява коливальних компонент на вищих частотах, які в рамках цього дослідження не вивчаються.

Аналогічним способом перетворюються граничні умови (7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial n^{st}}{\partial \nu} - n^{st} (\nabla \phi^{st})_{\nu} - \frac{1}{4} n_* (\nabla \phi^* - \mu \vec{E}^* w)_{\nu} - \frac{1}{4} n^* (\nabla \phi_* - \mu \vec{E}_* w)_{\nu} - 2\gamma_n w n^{st} \Big|_{(\partial\Omega)_n} &= \frac{J}{eD_n} \frac{w}{N_i}, \\ \frac{\partial p^{st}}{\partial \nu} + p^{st} (\nabla \phi^{st})_{\nu} + \frac{1}{4} p_* (\nabla \phi^* - \mu \vec{E}^* w)_{\nu} + \frac{1}{4} p^* (\nabla \phi_* - \mu \vec{E}_* w)_{\nu} \Big|_{(\partial\Omega)_n} &= 0, \quad \phi^{st} \Big|_{(\partial\Omega)_n} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p^{st}}{\partial v} + p^{st} (\nabla \phi^{st})_v + \frac{1}{4} p_* (\nabla \phi^* - \mu \bar{E}^{*-} w)_v + \frac{1}{4} p^* (\nabla \phi_* - \mu \bar{E}_*^- w)_v + 2\gamma_p w p^{st} \Big|_{(\partial\Omega)_p} &= -\frac{J}{eD_p} \frac{w}{N_i}, \\
\frac{\partial n^{st}}{\partial v} - n^{st} (\nabla \phi^{st})_v - \frac{1}{4} n_* (\nabla \phi^* - \mu \bar{E}^{*-} w)_v - \frac{1}{4} n^* (\nabla \phi_* - \mu \bar{E}_*^- w)_v \Big|_{(\partial\Omega)_p} &= 0, \quad \phi^{st} \Big|_{(\partial\Omega)_p} = U, \\
\frac{\partial n^{st}}{\partial v} - \gamma_n^* w n^{st} \Big|_{(\partial\Omega)_0} &= 0, \quad \frac{\partial p^{st}}{\partial v} - \gamma_p^* w p^{st} \Big|_{(\partial\Omega)_0} = 0, \quad \frac{\partial \phi^{st}}{\partial v} \Big|_{(\partial\Omega)_0} = 0. \\
\frac{\partial n_*}{\partial v} - n^{st} (\nabla \phi_* - \mu \bar{E}_*^-)_v - n_* (\nabla \phi^{st})_v - \gamma_n w n_* + 2j\omega \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mu E_{*v}^-}{eD_n} \frac{w}{N_i} \Big|_{(\partial\Omega)_n} &= 0, \\
\frac{\partial p_*}{\partial v} + p^{st} (\nabla \phi_* - \mu \bar{E}_*^-)_v + p_* (\nabla \phi^{st})_v \Big|_{(\partial\Omega)_n} &= 0, \quad \phi_* \Big|_{(\partial\Omega)_n} = 0, \\
\frac{\partial p_*}{\partial v} + p^{st} (\nabla \phi_* - \mu \bar{E}_*^-)_v + p_* (\nabla \phi^{st})_v + \gamma_p w p_* - 2j\omega \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mu E_{*v}^-}{eD_p} \frac{w}{N_i} \Big|_{(\partial\Omega)_p} &= 0, \\
\frac{\partial n_*}{\partial v} - n^{st} (\nabla \phi_* - \mu \bar{E}_*^-)_v - n_* (\nabla \phi^{st})_v \Big|_{(\partial\Omega)_p} &= 0, \quad \phi_* \Big|_{(\partial\Omega)_p} = \frac{U^{ext}}{2}, \\
\frac{\partial n_*}{\partial v} - \gamma_n^* w n_* \Big|_{(\partial\Omega)_0} &= 0, \quad \frac{\partial p_*}{\partial v} - \gamma_p^* w p_* \Big|_{(\partial\Omega)_0} = 0, \quad \frac{\partial \phi_*}{\partial v} \Big|_{(\partial\Omega)_0} = 0. \\
\frac{\partial n^*}{\partial v} - n^{st} (\nabla \phi^* - \mu \bar{E}^{*-})_v - n^* (\nabla \phi^{st})_v - 2\gamma_n w n^* - j\omega \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mu E_{*v}^-}{eD_n} \frac{w}{N_i} \Big|_{(\partial\Omega)_n} &= 0, \\
\frac{\partial p^*}{\partial v} + p^{st} (\nabla \phi^* - \mu \bar{E}^{*-})_v + p^* (\nabla \phi^{st})_v \Big|_{(\partial\Omega)_n} &= 0, \quad \phi^* \Big|_{(\partial\Omega)_n} = 0, \\
\frac{\partial p^*}{\partial v} + p^{st} (\nabla \phi^* - \mu \bar{E}^{*-})_v + p^* (\nabla \phi^{st})_v + 2\gamma_p w p^* + j\omega \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mu E_{*v}^-}{eD_p} \frac{w}{N_i} \Big|_{(\partial\Omega)_p} &= 0, \\
\frac{\partial n^*}{\partial v} - n^{st} (\nabla \phi^* - \mu \bar{E}^{*-})_v - n^* (\nabla \phi^{st})_v \Big|_{(\partial\Omega)_p} &= 0, \quad \phi^* \Big|_{(\partial\Omega)_p} = \frac{U^{ext}}{2}, \\
\frac{\partial n^*}{\partial v} - \gamma_n^* w n^* \Big|_{(\partial\Omega)_0} &= 0, \quad \frac{\partial p^*}{\partial v} - \gamma_p^* w p^* \Big|_{(\partial\Omega)_0} = 0, \quad \frac{\partial \phi^*}{\partial v} \Big|_{(\partial\Omega)_0} = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\frac{\partial n^*}{\partial v} - n^{st} (\nabla \phi^* - \mu \bar{E}^{*-})_v - n^* (\nabla \phi^{st})_v - 2\gamma_n w n^* - j\omega \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mu E_{*v}^-}{eD_n} \frac{w}{N_i} \Big|_{(\partial\Omega)_n} = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial v} + p^{st} (\nabla \phi^* - \mu \bar{E}^{*-})_v + p^* (\nabla \phi^{st})_v \Big|_{(\partial\Omega)_n} = 0, \quad \phi^* \Big|_{(\partial\Omega)_n} = 0,$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial v} + p^{st} (\nabla \phi^* - \mu \bar{E}^{*-})_v + p^* (\nabla \phi^{st})_v + 2\gamma_p w p^* + j\omega \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mu E_{*v}^-}{eD_p} \frac{w}{N_i} \Big|_{(\partial\Omega)_p} = 0,$$

$$\frac{\partial n^*}{\partial v} - n^{st} (\nabla \phi^* - \mu \bar{E}^{*-})_v - n^* (\nabla \phi^{st})_v \Big|_{(\partial\Omega)_p} = 0, \quad \phi^* \Big|_{(\partial\Omega)_p} = \frac{U^{ext}}{2},$$

$$\frac{\partial n^*}{\partial v} - \gamma_n^* w n^* \Big|_{(\partial\Omega)_0} = 0, \quad \frac{\partial p^*}{\partial v} - \gamma_p^* w p^* \Big|_{(\partial\Omega)_0} = 0, \quad \frac{\partial \phi^*}{\partial v} \Big|_{(\partial\Omega)_0} = 0.$$

Задача (11)–(16) є сингулярно збуреною [7; 8; 9; 10; 11], оскільки містить малий параметр за старшої похідної у рівнянні Пуассона. На структуру її розв'язку в основному впливають умови на контактних ділянках  $(\partial\Omega)_n$  та  $(\partial\Omega)_p$ , через які здійснюється наповнення  $i$ -області носіями заряду, тому пропонуємо шукати розв'язок поставленої задачі у вигляді таких асимптотичних рядів (показано структуру розв'язку для стаціонарних складників шуканих функцій):

$$\begin{pmatrix} \phi^{st}(\rho, \theta, z, \mu) \\ n^{st}(\rho, \theta, z, \mu) \\ p^{st}(\rho, \theta, z, \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi^{st}_{(m)}(\rho, \theta, z, \mu) \\ N^{st}_{(m)}(\rho, \theta, z, \mu) \\ P^{st}_{(m)}(\rho, \theta, z, \mu) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\Phi}^{st}_{(m)}(\rho, \theta, \underline{\xi}, \mu) \\ \underline{N}^{st}_{(m)}(\rho, \theta, \underline{\xi}, \mu) \\ \underline{P}^{st}_{(m)}(\rho, \theta, \underline{\xi}, \mu) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{\Phi}^{st}_{(m)}(\rho, \theta, \overline{\xi}, \mu) \\ \overline{N}^{st}_{(m)}(\rho, \theta, \overline{\xi}, \mu) \\ \overline{P}^{st}_{(m)}(\rho, \theta, \overline{\xi}, \mu) \end{pmatrix} = \quad (17)$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu}^i \phi_i^{st}(\rho, \theta, z) \\ \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu}^i n_i^{st}(\rho, \theta, z) \\ \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu}^i p_i^{st}(\rho, \theta, z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu}^i \Phi_i^{st}(\rho, \theta, \underline{\xi}) \\ \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu}^i N_i^{st}(\rho, \theta, \underline{\xi}) \\ \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu}^i P_i^{st}(\rho, \theta, \underline{\xi}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu}^i \overline{\Phi}_i^{st}(\rho, \theta, \overline{\xi}) \\ \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu}^i \overline{N}_i^{st}(\rho, \theta, \overline{\xi}) \\ \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu}^i \overline{P}_i^{st}(\rho, \theta, \overline{\xi}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \square_{\phi}^{st}(\rho, \theta, z, \mu) \\ \square_{n}^{st}(\rho, \theta, z, \mu) \\ \square_{p}^{st}(\rho, \theta, z, \mu) \end{pmatrix},$$

де  $\Phi^{st}_{(m)}(\rho, \theta, z, \mu)$ ,  $N^{st}_{(m)}(\rho, \theta, z, \mu)$ ,  $P^{st}_{(m)}(\rho, \theta, z, \mu)$  – регулярні частини асимптотик;  $\underline{\Phi}^{st}_{(m)}(\rho, \theta, \underline{\xi}, \mu)$ ,  $\underline{N}^{st}_{(m)}(\rho, \theta, \underline{\xi}, \mu)$ ,  $\underline{P}^{st}_{(m)}(\rho, \theta, \underline{\xi}, \mu)$ ,  $\overline{\Phi}^{st}_{(m)}(\rho, \theta, \overline{\xi}, \mu)$ ,  $\overline{N}^{st}_{(m)}(\rho, \theta, \overline{\xi}, \mu)$ ,  $\overline{P}^{st}_{(m)}(\rho, \theta, \overline{\xi}, \mu)$  – примежові поправки асимптотик відповідно в околах точок  $z=0$  і  $z=1$  ( $\underline{\xi} = \frac{z}{\sqrt{\mu}}$ ,  $\overline{\xi} = \frac{1-z}{\sqrt{\mu}}$  – регуляризуючі розтяги);  $R_{\phi}^{st}(\rho, \theta, z, \mu)$ ,  $R_{n}^{st}(\rho, \theta, z, \mu)$ ,  $R_{p}^{st}(\rho, \theta, z, \mu)$  – залишкові члени. Комплексні і комплексноспряжені амплітуди коливального процесу також шукаємо у вигляді, аналогічному до (17).

У результаті підстановки асимптотичних рядів (17) в рівняння і граничні умови (11)–(16) та групування відповідних доданків у степеневих рядах для кожної із незалежних змінних  $z, \underline{\xi}, \overline{\xi}$  отримуємо такі задачі для пошуку головних членів регулярних частин асимптотик:

$$\begin{cases} \Delta n_0^{st} - \nabla \cdot (n_0^{st} \nabla \phi_0^{st}) - A_n n_0^{st} = \frac{1}{4} (\nabla \cdot (n_{*0} \nabla \phi_{*0}^*) + \nabla \cdot (n_0^* \nabla \phi_{*0})), \\ \Delta p_0^{st} + \nabla \cdot (p_0^{st} \nabla \phi_0^{st}) - A_p p_0^{st} = -\frac{1}{4} (\nabla \cdot (p_{*0} \nabla \phi_{*0}^*) - \nabla \cdot (p_0^* \nabla \phi_{*0})), \\ p_0^{st} = n_0^{st}, \end{cases} \quad (18)$$

$$\left. \frac{\partial n_0^{st}}{\partial v} - n_0^{st} (\nabla \phi_0^{st})_v - \underline{N}_0 (\nabla \phi_0^{st})_v - \frac{1}{4} n_{*0} (\nabla \phi_{*0}^*)_v - \frac{1}{4} n_0^* (\nabla \phi_{*0})_v - 2\gamma_n w n_0^{st} - 2\gamma_n w \underline{N}_0 \right|_{(\partial\Omega)_n} = \frac{J}{eD_n} \frac{w}{N_i},$$

$$\left. \frac{\partial p_0^{st}}{\partial v} + p_0^{st} (\nabla \phi_0^{st})_v + \underline{P}_0 (\nabla \phi_0^{st})_v + \frac{1}{4} p_{*0} (\nabla \phi_{*0}^*)_v + \frac{1}{4} p_0^* (\nabla \phi_{*0})_v \right|_{(\partial\Omega)_n} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial p_0^{st}}{\partial v} + p_0^{st} (\nabla \phi_0^{st})_v + \overline{P}_0 (\nabla \phi_0^{st})_v + \frac{1}{4} p_{*0} (\nabla \phi_{*0}^*)_v + \frac{1}{4} p_0^* (\nabla \phi_{*0})_v + 2\gamma_p w p_0^{st} + 2\gamma_p w \overline{P}_0 \right|_{(\partial\Omega)_p} = -\frac{J}{eD_p} \frac{w}{N_i},$$

$$\left. \frac{\partial n_0^{st}}{\partial v} - n_0^{st} (\nabla \phi_0^{st})_v - \overline{N}_0 (\nabla \phi_0^{st})_v - \frac{1}{4} n_{*0} (\nabla \phi_{*0}^*)_v - \frac{1}{4} n_0^* (\nabla \phi_{*0})_v \right|_{(\partial\Omega)_p} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial n_0^{st}}{\partial v} - \gamma_n^* w n_0^{st} \right|_{(\partial\Omega)_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial p_0^{st}}{\partial v} - \gamma_p^* w p_0^{st} \right|_{(\partial\Omega)_0} = 0.$$

$$\begin{cases} \Delta n_{*0} - \nabla \cdot (n_{*0} \nabla \phi_{*0}^{st}) - (A_n + j\omega B_n) n_{*0} = \nabla \cdot (n_0^{st} \nabla \phi_{*0}), \\ \Delta p_{*0} + \nabla \cdot (p_{*0} \nabla \phi_{*0}^{st}) - (A_p + j\omega B_p) p_{*0} = -\nabla \cdot (p_0^{st} \nabla \phi_{*0}), \\ p_{*0} = n_{*0}, \end{cases} \quad (19)$$

$$\frac{\partial n_{*0}}{\partial v} - n_0^{st} (\nabla \phi_{*0})_v - n_{*0} (\nabla \phi_0^{st})_v - \underline{N}_{*0} (\nabla \phi_0^{st})_v - 2\gamma_n w n_{*0} - 2\gamma_n w \underline{N}_{*0} + j\omega \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mu E_{*v}^-}{e D_n} \frac{w}{N_i} \Big|_{(\partial\Omega)_n} = 0,$$

$$\frac{\partial p_{*0}}{\partial v} + p_0^{st} (\nabla \phi_{*0})_v + p_{*0} (\nabla \phi_0^{st})_v + \underline{P}_{*0} (\nabla \phi_0^{st})_v \Big|_{(\partial\Omega)_n} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{p}_{*0}}{\partial v} + \bar{p}_0^{st} (\nabla \phi_{*0})_v + \bar{p}_{*0} (\nabla \phi_0^{st})_v + \bar{P}_{*0} (\nabla \phi_0^{st})_v + 2\gamma_p w p_{*0} + 2\gamma_p w \bar{P}_{*0} - j\omega \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mu E_{*v}^-}{e D_p} \frac{w}{N_i} \Big|_{(\partial\Omega)_p} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{n}_{*0}}{\partial v} - \bar{n}_0^{st} (\nabla \phi_{*0})_v - \bar{n}_{*0} (\nabla \phi_0^{st})_v - \bar{N}_{*0} (\nabla \phi_0^{st})_v \Big|_{(\partial\Omega)_p} = 0,$$

$$\frac{\partial n_{*0}}{\partial v} - \gamma_n^* w n_{*0} \Big|_{(\partial\Omega)_0} = 0, \quad \frac{\partial p_{*0}}{\partial v} - \gamma_p^* w p_{*0} \Big|_{(\partial\Omega)_0} = 0.$$

Задачі для пошуку комплексно спряжених амплітуд та наступних членів регулярних частин асимптотик мають структуру, аналогічну до (18)–(19).

Формуємо задачі для знаходження головних членів примезових поправок (стаціонарних (20) та швидкозмінних (21)):

$$\frac{\partial^2 \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}^2} = -(\underline{P}_0 - \underline{N}_0), \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{N}_0}{\partial \underline{\xi}^2} - \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{N}_0 \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} \right) - n_0 \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}^2} = \frac{1}{4} \left( n_{*0} \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_0^*}{\partial \underline{\xi}^2} + \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{N}_{*0} \frac{\partial \underline{\Phi}_0^*}{\partial \underline{\xi}} \right) + n_0^* \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}^2} + \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{N}_0^* \frac{\partial \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}} \right) \right),$$

$$\frac{\partial^2 \underline{P}_0}{\partial \underline{\xi}^2} + \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{P}_0 \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} \right) + p_0 \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}^2} = -\frac{1}{4} \left( p_{*0} \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_0^*}{\partial \underline{\xi}^2} + \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{P}_{*0} \frac{\partial \underline{\Phi}_0^*}{\partial \underline{\xi}} \right) + p_0^* \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}^2} + \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{P}_0^* \frac{\partial \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}} \right) \right),$$

$$\frac{\partial \underline{N}_0}{\partial \underline{\xi}} - \underline{N}_0 \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} - n_0 \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} \Big|_{x=0} = \frac{1}{4} \left( (n_{*0} + \underline{N}_{*0}) \frac{\partial \underline{\Phi}_0^*}{\partial \underline{\xi}} + (n_0^* + \underline{N}_0^*) \frac{\partial \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}} \right), \quad \lim_{\underline{\xi} \rightarrow \infty} \underline{N}_0(\underline{\xi}) = 0,$$

$$-\frac{\partial \underline{P}_0}{\partial \underline{\xi}} - \underline{P}_0 \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} - p_0 \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} \Big|_{x=0} = \frac{1}{4} \left( (p_{*0} + \underline{P}_{*0}) \frac{\partial \underline{\Phi}_0^*}{\partial \underline{\xi}} + (p_0^* + \underline{P}_0^*) \frac{\partial \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}} \right), \quad \lim_{\underline{\xi} \rightarrow \infty} \underline{P}_0(\underline{\xi}) = 0,$$

$$\phi_0^{st} + \underline{\Phi}_0 \Big|_{\underline{\xi}=0} = 0, \quad \lim_{\underline{\xi} \rightarrow \infty} \underline{\Phi}_0(\underline{\xi}) = \frac{U}{2}.$$

$$\frac{\partial^2 \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}^2} = -(\underline{P}_{*0} - \underline{N}_{*0}), \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{N}_{*0}}{\partial \underline{\xi}^2} - \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{N}_{*0} \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} \right) - n_{*0} \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}^2} = \left( n_0 \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}^2} + \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{N}_0 \frac{\partial \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}} \right) \right),$$

$$\frac{\partial^2 \underline{P}_{*0}}{\partial \underline{\xi}^2} + \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{P}_{*0} \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} \right) + p_{*0} \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}^2} = - \left( p_0 \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}^2} + \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{P}_0 \frac{\partial \underline{\Phi}_{*0}}{\partial \underline{\xi}} \right) \right),$$

$$\frac{\partial \underline{N}_{*0}}{\partial \underline{\xi}} - \underline{N}_{*0} \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} - n_{*0} \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} \Big|_{x=0} = 0, \quad \lim_{\underline{\xi} \rightarrow \infty} \underline{N}_{*0}(\underline{\xi}) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial P_{*0}}{\partial \xi} + P_{*0} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} + p_{*0} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} \right|_{x=0} = 0, \lim_{\xi \rightarrow \infty} P_{*0}(\xi) = 0, \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_{0z}}{\partial \xi} = -N_0, \\ \frac{\partial N_0}{\partial \xi} + (N_0 E_{0z}) = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \xi} (|\tilde{E}_{0z}|^2), \end{array} \right. \quad (24)$$

$$\phi_{*0} + \Phi_{*0} \Big|_{\xi=0} = 0, \lim_{\xi \rightarrow \infty} \Phi_{*0}(\xi) = \frac{U^{ext}}{4}.$$

Задачі для пошуку комплексно спряжених амплітуд ( $\underline{N}_0, \underline{P}_0, \Phi_0$ ) та наступних членів прилежових поправок мають структуру, аналогічну до (20)–(21). Задачі для знаходження прилежових поправок на межі області  $(\partial\Omega)_p$  ( $z=1$ ) також будуть аналогічними до (20)–(21).

У результаті додавання першого і другого рівняння у системах (18)–(19) та врахування умови рівності концентрацій електронів і дірок у активній області отримуємо:

$$\Delta n_0^{st} - \frac{(A_n + A_p)}{2} n_0^{st} = 0, \quad (22)$$

$$\left. \frac{\partial n_0^{st}}{\partial z} - \gamma_n w n_0^{st} - \gamma_n w N_0 \right|_{z=0} = \frac{wJ}{2eD_n N_i},$$

$$\left. \frac{\partial n_0^{st}}{\partial z} + \gamma_p w n_0^{st} + \gamma_p w \bar{P}_0 \right|_{z=1} = -\frac{wJ}{2eD_p N_i},$$

$$\left. \frac{\partial n_0^{st}}{\partial \rho} - \frac{(\gamma_n^* + \gamma_p^*)}{2} w n_0^{st} \right|_{\rho=\frac{R}{w}} = 0.$$

$$\Delta n_{*0} - \left[ \frac{(A_n + A_p)}{2} + i\omega \frac{(B_n + B_p)}{2} \right] n_{*0} = 0, \quad (23)$$

$$\left. \frac{\partial n_{*0}}{\partial z} - \gamma_n w n_{*0} - \gamma_n w N_{*0} + j\omega \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mu E_{*v}^*}{2eD_n} \frac{w}{N_i} \right|_{z=0} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial p_{*0}}{\partial z} + \gamma_p w p_{*0} + \gamma_p w \bar{P}_{*0} + j\omega \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mu E_{*v}^*}{2eD_p} \frac{w}{N_i} \right|_{z=1} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial n_{*0}}{\partial \rho} - \frac{(\gamma_n^* + \gamma_p^*)}{2} w n_{*0} \right|_{\rho=\frac{R}{w}} = 0.$$

Постановки задач (20)–(21) перепишемо з урахуванням даних про те, що прилежові поправки з концентрації дірок відсутні ( $\underline{P}_0 = P_{*0} = P_0^* = 0$ ) [5] (на границі  $z=1$  викладки аналогічні за умови, що тут відсутні прилежові поправки з концентрації електронів) і умов  $p_0^{st} = n_0^{st}$ ,  $p_{*0} = n_{*0}$ . Також врахуємо співвідношення  $E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$ . Отримуємо:

де  $|\tilde{E}_{0z}|^2 = E_{*0z} E_{0z}^*$ , граничні умови для шуканих функцій:  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} N_0(\xi) = 0$ ,  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} E_{0z}(\xi) = \frac{E_{max}}{2}$  ( $E_{max}$  стала, яка знаходиться на основі граничних умов для потенціалу  $\int_0^1 (E_{0z} + \bar{E}_{0z}) dz = U$ ).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_{*0z}}{\partial \xi} = -N_{*0}, \\ \frac{\partial N_{*0}}{\partial \xi} + (N_{*0} E_{0z}) = -(N_0 E_{*0z}), \end{array} \right. \quad (25)$$

при  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} N_{*0}(\xi) = 0$ ,  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} E_{*0z}(\xi) = \frac{E_z^{ext}}{4}$ . Зауважимо, що  $E_z^{ext}$  – усереднене щодо просторових координат у площині  $z=1/2$  при  $\rho \leq R$  значення напруженості електричної компоненти НВЧ поля. Для отримання значення електричної індукції  $\varepsilon \varepsilon_0 E_v^{ext}(z=0)$  (умови на межі області  $z=1$  отримуємо в результаті аналогічних міркувань) скористаємось теоремою Гаусса [6]:  $\varepsilon \varepsilon_0 E_v^{ext}(z=0) = \varepsilon_i \varepsilon_0 E_v^{ext} - \int_0^\infty e N_{*0}(\xi) d\xi$ . Задачі (24)–(25) розв’язуються сумісно. На наступному етапі знаходимо розв’язки задач (22)–(23). В результаті отримуємо головні члени асимптотик, які дають можливість прогнозувати розподіл концентрації просторового заряду в активній області  $p$ -і-п-структур з точністю порядку  $\sqrt{\mu}$  ( $\sim 10^{-4}$ ).

Оцінку залишкових членів ( $R_{\phi(m)}^{st}(z, \sqrt{\mu})$ ,  $R_{n(m)}^{st}(z, \sqrt{\mu})$ ,  $R_{p(m)}^{st}(z, \sqrt{\mu})$ ,  $R_{*z(m)}^{st}(z, \sqrt{\mu})$ ,  $R_{*n(m)}^{st}(z, \sqrt{\mu})$ ,  $R_{*p(m)}^{st}(z, \sqrt{\mu})$ ,  $R_{\phi(m)}^*(z, \sqrt{\mu})$ ,  $R_{n(m)}^*(z, \sqrt{\mu})$ ,  $R_{p(m)}^*(z, \sqrt{\mu})$ ) проводимо аналогічно до [13] за додаткових умов гладкості та їх узгодженості. Встановлюємо, що всі вони мають порядок малості  $O(\sqrt{\mu}^m)$ .

### Аналіз результатів та висновки

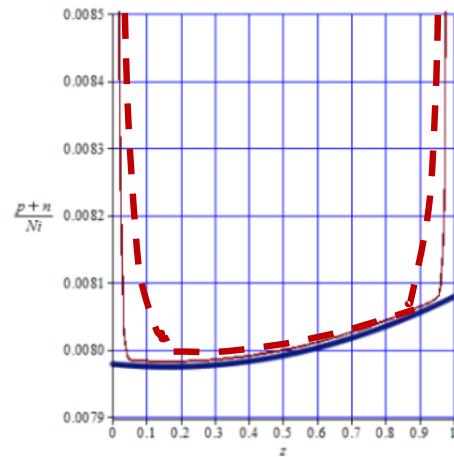
Тестова задача вирішувалась засобами математичного пакета Maple за таких вхідних даних: відстань між інжектуючими контактами  $w=30$  мкм; концентрація носіїв заряду у власному напівпровіднику  $N_i=10^{16}$  см<sup>3</sup>; елементарний заряд  $e=16 \cdot 10^{-20}$  Кл; коефіцієнти дифузії відповідно електронів і дірок  $D_n=35$  см<sup>2</sup>/с,  $D_p=25$  см<sup>2</sup>/с;



температура  $T_0=300$  К; час життя носіїв заряду  $\tau_n^*=\tau_p^*=10^{-7}$  с; прикладені напруга і струм  $U=5$  В,  $J=2\cdot 10^5$  А/см<sup>2</sup>; сталі  $\varepsilon=11$ ,  $\varepsilon_0=885\cdot 10^{-14}$  Ф/м; значення малого параметра  $\mu=6.25\cdot 10^{-6}$ ; швидкості поверхневої рекомбінації  $\alpha_n=2\cdot 10^5$  см/с,  $\alpha_p=10^5$  см/с; напруженість електричної компоненти НВЧ хвилі  $E_0^{ext}=2\cdot 10^4$  В/м.

На рис. 2 показано результати чисельно-аналітичного моделювання для стаціонарних головних членів асимптотик. Суцільна потовщена крива відображає розподіл концентрації носіїв заряду згідно з класичної моделі амбіполярної дифузії (моделі лінеаризації) [1; 2; 3], суцільна тонка – результати моделювання із залученням методу пограничного шару без врахування наведених НВЧ випромінюванням напруги і струмів в активній області р-і-п-структури і пунктирна крива – з урахуванням впливу НВЧ випромінювання. Також в активній області з'являються коливальні складники концентрації плазми (відіграють ключову роль у реактивній складовій частині імпедансу р-і-п-структури), які співставні за величиною із стаціонарною концентрацією.

Застосований у разі виконання дослідження асимптотичний метод (метод пограничного шару) дозволяє обійти обчислювальні проблеми, пов'язані із наявністю в досліджуваній області ділянок із великими градієнтами шуканих функцій [14]. Відзначимо, що вже на етапі пошуку головних членів асимптотик отримуємо результати, які забезпечують необхідний рівень адекватності



**Рис. 2. Розподіл концентрації зарядів в активній області ( $R=0$ , стаціонарна компонента)**

розв'язання відповідних електродинамічних задач НВЧ техніки. Результати математичного моделювання узгоджуються із відповідними даними експериментів [15].

Запропонована математична модель та розроблений алгоритм аналізу поставленої задачі важливі для розробників напівпровідникових елементів НВЧ електроніки, зокрема р-і-п-структур, які використовуються для комутації потужних електромагнітних полів і як захисних пристроїв входних трактів радіотехнічних систем.

### Література

1. Sze S., Kwok K. Physics of Semiconductor Devices. New York : Wiley-Interscience, 2006. 815 p. DOI: <https://doi.org/10.1002/0470068329>.
2. Kwok K. Complete Guide to Semiconductor Devices. New York : Wiley-Interscience, 2002. 740 p. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/book/5271197>.
3. Адирович Э.И., Карагеоргий-Алкалаев П.М., Лейдерман А.Ю. Токи двойной инжекции в полупроводниках. / Под ред. Гальперина. Москва : Сов. радио, 1978. 320 с.
4. Bonch-Bruевич V.L., Kalashnikov S.G. Physics of Semiconductors. Berlin : VEB, 1982.
5. Бомба А.Я., Мороз І.П. Математичне моделювання дифузійно-дрейфового процесу в активній області р-і-п діодів з врахуванням розігріву та рекомбінації методами теорії збурень. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*, 2021. № 1(135). С. 29–35.
6. Tamm I.E. Fundamentals of the Theory of Electricity. Central Books Ltd, 1980. 684 p.
7. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры. *Математический сборник*, 1952. № 31(73), 3, С. 575–586.
8. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. *УМН*, 1957. № 12(5). С. 3–122.
9. Vasil'eva A.B., Butusov V.F., Kalachev L.V. The Boundary Function Method for Singular Perturbation Problems. SIAM, Philadelphia, 1995.
10. Smith D.R. Singular-Perturbation Theory. An Introduction with Applications. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1985. 520 p.
11. Bomba A., Safonyk A., Fursachik E. Identification of Mass Transfer Distribution Factor and Its Account for Magnetic Filtration Process. *Modeling Journal of Automation and Information Sciences*, 2013. No. 45. 4. P. 16–22.
12. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of mathematical physics. Courier Corporation, 2013. 800 p.

13. Бомба А.Я. Про асимптотичний метод наближеного розв'язання однієї задачі масопереносу у разі фільтрації в пористому середовищі. *Український математичний журнал*, 1982. № 34(4). С. 37–40.
14. Polsky B.S., Rimshans J.S. Numerical simulation of transient processes in 2-D bipolar transistor. *Solid State Electron.*, 1981. No. 24. P. 1081–1085.
15. Usanov D.A., Gorbatov S.S., Kvasko V.Y., Fadeev A.V., Kalyamin A.A. Spatial oscillations of the electric field and the charge density in a silicon p-i-n diode. *Technical Physics Letters*, 2014. No. 40. 11. P. 984–986.

#### References

1. Sze, S., Kwok, K. (2006). *Physics of Semiconductor Devices*. New York: Wiley-Interscience, 815. DOI: <https://doi.org/10.1002/0470068329>.
2. Kwok, K. (2002). *Complete Guide to Semiconductor Devices*. New York: Wiley-Interscience, 740. Retrieved from: <https://ieeexplore.ieee.org/book/5271197>.
3. Adirovich, E.I., Karageorgii-Alkalaev, P.M., Leiderman, A.Iu. (1978). Toki dvoynoi inzhetskii v poluprovodnikakh [Currents double injection in semiconductors]. Moscow: Sov. radio, 320 [in Russian].
4. Bonch-Bruevich, V.L., Kalashnikov, S.G. (1982). *Physics of Semiconductors*. Berlin: VEB.
5. Bomba, A., Moroz, I. (2021). Matematychnе modeluvannya dyfuzijno-drejfovogo protsesu v aktivnij oblasti p-i-n diodiv z vrahuvannyam rozigrivu ta rekombinatsiji metodamy teorii zburеn'. *Journal obchyslual'noji ta prykladnoji matematyky*, 1 (135), 29–35 [in Ukrainian].
6. Tamm, I.E. (1980). *Fundamentals of the Theory of Electricity*. Central Books Ltd, 684.
7. Tikhonov, A.N. (1952). Sistemy differentsyal'nyh uravnenij, sodergaschie malye parametry. *Mat. Sb.*, 31(73), 3, 575–586 [in Russian].
8. Vishik, M., Lusternik, L.A. (1957). Reguljarnoe vyrogdenie i pogranychni sloi dlya lineinyh differentsyal'nyh uravnenij s malym parametrom. *Usp. Mat. Nauk.*, 12(5), 3–122 [in Russian].
9. Vasil'eva, A.B., Butusov, V.F., Kalachev, L.V. (1995). *The Boundary Function Method for Singular Perturbation Problems*. SIAM, Philadelphia.
10. Smith, D.R. (1985). *Singular-Perturbation Theory. An Introduction with Applications*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 520.
11. Bomba, A., Safonyk, A., Fursachik, E. (2013). Identification of Mass Transfer Distribution Factor and Its Account for Magnetic Filtration Process Modeling *Journal of Automation and Information Sciences*, 45, 4, 16–22.
12. Tikhonov, A.N., Samarskii, A.A. (2013). *Equations of mathematical physics*. Courier Corporation, 800.
13. Bomba, A. (1982). Pro asymptotychnyi metod nablygennogo rozv'yazannya odnijej zadachi masoperenosu pry fil'tratsii v porystomu seredovyschi. *Ukr. Math. J.* 34(4), 37–40 [in Ukrainian].
14. Polsky, B.S., Rimshans, J.S. (1981). Numerical simulation of transient processes in 2-D bipolar transistor. *Solid State Electron.*, 24, 1081–1085.
15. Usanov, D.A., Gorbatov, S.S., Kvasko, V.Y., Fadeev, A.V., Kalyamin, A.A. (2014). Spatial oscillations of the electric field and the charge density in a silicon p-i-n diode. *Technical Physics Letters*, 40, 11, 984–986.

УДК 539.3  
DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2022-1-07>

## «ТРЕТЄ ТІЛО» ЯК МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КОНТАКТНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

**Онишкевич В. М.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри математики і фізики  
Національний лісотехнічний університет України  
вул. Генерала Чупринки, 103, Львів, Україна  
[orcid.org/0000-0002-4657-5462](https://orcid.org/0000-0002-4657-5462)  
[onyshkevych@nltu.edu.ua](mailto:onyshkevych@nltu.edu.ua)*

**Барабаш Г. М.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри математичної економіки  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
вул. Університетська, 1, Львів, Україна  
[orcid.org/0000-0003-3258-8518](https://orcid.org/0000-0003-3258-8518)  
[galynabarabash71@gmail.com](mailto:galynabarabash71@gmail.com)*

**Ключові слова:** *тертя,  
теплоутворення, зношування,  
трибологія, контактна  
провідність, термічна  
проникність контакту.*

Температура тіл тертя істотно впливає на процеси, що відбуваються в місці контакту. Тому визначення температурних полів у тілах, що взаємодіють, у разі їх відносного ковзання є одним із найважливіших завдань трибології та триботехніки. Розмаїття природи чинників впливу на тепловий режим контактної пари зумовлює складність опису та математичного моделювання такого практичного завдання. Серед чинників впливу є як теплофізичні (теплопровідність, теплоємність, коефіцієнт лінійного розширення тіл, що взаємодіють, та інші), так і механічні (пружність, твердість тощо). Пропонується математично моделювати режими тертя, зношування та теплоутворення за допомогою розгляду так званого умовного «третього тіла» – тонких приповерхневих і проміжкових шарів тіл, що взаємодіють, фізико-механічні властивості яких відрізняються від властивостей тіл контактної пари, та мікрогеометрією поверхонь тіл у контактній зоні. Розглянуто метод визначення термопроникності контакту пари тертя. Оскільки у трибологічних задачах контактний тиск у різних точках є різним, то і контактна провідність теж не буде сталою величиною. На основі числового аналізу досліджено залежність термічної проникності контакту від різних вхідних чинників, побудовано відповідні графіки, виявлено неістотний або суттєвий вплив окремих вхідних чинників. Для визначення впливу вхідних параметрів на зміну температури та теплових потоків розглянуто контактну нестационарну задачу термопружності з теплоутворенням від дії сил тертя на межі двох півпросторів, яка за складністю відповідає суперпозиції двох одновимірних задач термопружності. Розв'язок задачі отримано з використанням інтегрального перетворення Лапласа. Розглянуто три різні найбільш типові випадки задання напружень. Отримано аналітичні вирази для розподілу температури та теплових потоків, побудовано відповідні графіки, проаналізовано вплив параметрів поверхонь, що контактують, на теплоутворення від тертя. Обчислені в одновимірних задачах значення термічної проникності контакту можуть використовуватись у моделюванні задач із неповним контактом.

## “THIRD BODY” AS A MATHEMATICAL MODEL OF CONTACT THERMOELASTICITY

**Onyshkevych V. M.**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Physics and Mathematics  
Ukrainian National Forestry University  
General Chuprynka str., 103, Lviv, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-4657-5462  
onyshkevych@nltu.edu.ua*

**Barabash G. M.**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Mathematical Economy  
Ivan Franko National University of Lviv  
Universytetska str., 1, Lviv, Ukraine  
orcid.org/0000-0003-3258-8518  
galynabarabash71@gmail.com*

**Key words:** *friction, heat generation, wear, tribology, contact conductance, contact thermal conductivity.*

The variety of factors affecting the thermal conditions of a frictional couple results in complexity of the simulation of this problem. Among these factors, thermophysical (thermal conductivity, specific heat, coefficient of linear expansion of bodies, etc.) and also mechanical ones (elasticity, hardness of contacting bodies, etc.) play an important role. The conditions of friction, wear and heat generation are also determined by the characteristics of the so-called “third body”, i.e., thin near-surface and intermediate layers, the physical and mechanical properties of which differ from those of the interacting bodies, and by the microgeometry of their surfaces in the contact zone. The method of determination of thermal contact conductance in mathematical modelling of contact interaction with considering friction and heat generation by “third body” is presented. Using of modified conditions of heat contact in mathematical model of contact thermoelasticity taking into account of friction and heat generation is proposed. After numerical analysis, the graphs of dependence of thermal contact conductance on the input parameters are constructed and substantial influence of some of them is detected. In the tribological problems a contact pressure in the different points is different, so contact thermal conductivity is not constant value for this different points. The one-dimensional non-stationary contact problem of thermoelasticity with heat generation of friction on the border of two half-spaces for finding of the influence of some physical and mechanical parameters on the temperature and heat fluxes in the contact bodies is investigated. This contact problem is equivalent to superposition of two one-dimensional contact problems of thermoelasticity. The three most typical different cases of given stresses are investigated. The solution of problems by Laplace integral transformation is constructed. The analytical expressions for distributions of temperature and heat fluxes is obtained. On the base of numerical analysis, the dependence of thermal conductivity on different input factors is investigated, corresponding graphs are built, essential or not substantive influence of certain factors is detected.

**Вступ.** Визначення температурних полів у тілах, що взаємодіють, у разі їх відносного ковзання є одним із найважливіших завдань трибології та триботехніки. Розмаїтість чинників впливу на тепловий режим трибологічної пари зумовлює складність опису та математичного моделювання такого практичного науково-технічного завдання. Серед чинників впливу є як теплофізичні (теплопровідність, теплоємність, коефіцієнт лінійного розширення тіл, взаємодіють, та інші), так і механічні (пружність, твердість тощо). Уперше умови неідеального теплового контакту, які враховують термічний опір тонкого проміжкового шару між тілами, було запропоновано в [1, с. 133]. Термопружна контактна взаємодія тіл за наявності поверхневих теплофізичних неоднорідностей уперше була досліджена у [2, с. 23]. Вплив різниці температур тіл на розподіл теплової енергії між ними було з'ясовано у [3, с. 410]. Аналітичному опису теплових процесів з урахуванням неоднорідностей структури тіл, що контактують, присвячено низку сучасних праць, зокрема [4; 5]. Однак вибір адекватних умов теплового контакту і математичне моделювання теплових процесів в елементах конкретної трибосистеми з максимальною точністю є складною проблемою.

**Метою роботи** є отримання й аналіз аналітичного розв'язку нестационарної контактної задачі термопружності з теплоутворенням від дії сил тертя на межі двох півпросторів, яка за складністю відповідає суперпозиції двох одновимірних задач термопружності. Пропонується математично моделювати режими тертя, зношування та теплоутворення за допомогою розгляду так званого умовного «третього тіла» [6, с. 82] – тонких приповерхневих і проміжкових шарів тіл, що контактують, фізико-механічні властивості яких відрізняються від властивостей тіл контактної пари, та мікрогеометрією поверхонь тіл у контактній зоні.

**Модель «третього тіла».** Для дослідження контактної термопружності з урахуванням тертя і теплоутворення за вихідні умови використаємо узагальнені умови теплового контакту, які враховують інтегральну характеристику – коефіцієнт термопроникності контакту  $h$  [2, с. 25]:

$$\lambda \Delta(t^{(1)} + t^{(2)}) + 2 \left( \lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial n} - \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial n} \right) = c(i^{(1)} + i^{(2)}) - 2Q, \quad (1)$$

$$\lambda \Delta(t^{(1)} - t^{(2)}) + 2 \left( \lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial n} + \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial n} \right) - 12h(t^{(1)} - t^{(2)}) = c(i^{(1)} - i^{(2)}), \quad (2)$$

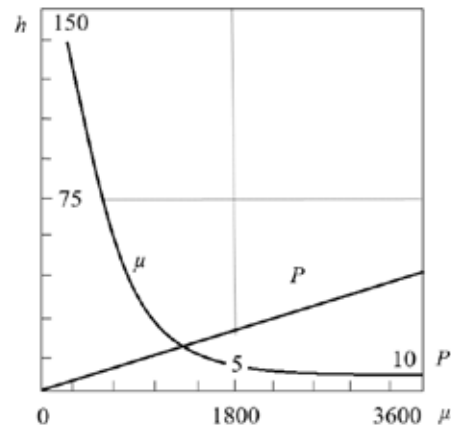
де індексами «1» та «2» позначено величини, які належать відповідно до першого і другого тіл;  $n$  – нормаль до поверхні контакту тіл;  $\lambda$  – зведена теплопровідність;  $\Delta$  – двовимірний оператор Лапласа;  $c$  – зведена теплоємність;  $Q$  – інтенсив-

ність теплових джерел,  $h$  – коефіцієнт термопроникності контакту. Проведений числовий аналіз показав, що нехтування коефіцієнтом  $\lambda$  незначно впливає на розподіл температурних полів у тілах пари тертя, а суттєвий вплив на результати має інтегральна характеристика – коефіцієнт термопроникності контакту  $h$ . Тому для практичних розрахунків можна рекомендувати такі спрощені теплофізичні умови на ділянці контакту:

$$\lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial n} - \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial n} = \frac{c}{2}(i^{(1)} + i^{(2)}) - Q, \quad (3)$$

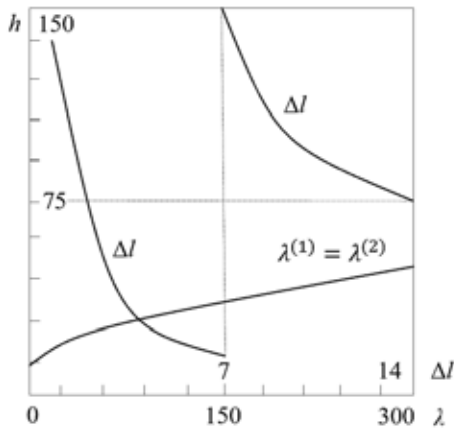
$$\lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial n} + \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial n} - 2h(t^{(1)} - t^{(2)}) = \frac{c}{6}(i^{(1)} - i^{(2)}). \quad (4)$$

З'ясовано [6, с. 85], що середня температура в області контакту тіл мало відрізняється від температури  $t^{(1)} = t^{(2)}$  в разі ідеального теплового контакту тіл. Оскільки для знаходження коефіцієнта термопроникності контакту  $h$ , який пов'язує тепловий потік і різницю температур ( $q = h\Delta t$ ), необхідно знати середню температуру, то розв'язок задачі із запропонованими спрощеними граничними умовами (3) – (4) за  $h \rightarrow \infty$  можна розглядати і як перший етап для знаходження  $h$ . Чинники, від яких залежить  $h$ , як і весь процес теплоутворення, є численними та складними [7, с. 87]. Проведений числовий аналіз експериментальних даних дозволив установити суттєвий вплив на зміну термопроникності контакту деяких із них (рис. 1 та рис. 2).



**Рис. 1.** Залежність коефіцієнта термопроникності контакту  $h$  (кВт/(м<sup>2</sup>·К)) від тиску  $P$  (МПа) та твердості за Мейером  $\mu$  (МПа)

Для визначення впливу вказаних параметрів на різницю температур і теплових потоків розглянуто нестационарну контактну задачу термопружності з теплоутворенням від дії сил тертя на межі двох півпросторів, яка за складністю відповідає суперпозиції двох одновимірних задач термопружності.



**Рис. 2. Залежність коефіцієнта теплопроникувості контакту  $h$  (кВт/м<sup>2</sup> · К) від чистоти обробки поверхонь  $\Delta l$  (мкм) і коефіцієнтів теплопровідності (взято  $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)}$ , Вт/(м · К))**

**Математична постановка задачі.** Припускаємо, що два пружні півпростори з нульовою температурою спочатку є нерухомими, а в момент часу  $\tau=0$  зближуються і з тертя починають переміщуватися з відносною сталою швидкістю  $V$ . Процес тертя на межі контакту супроводжується теплоутворенням, теплові граничні умови враховують коефіцієнт теплопроникувості контакту  $h$ . Математично задача полягає в розв’язанні рівнянь термопружності:

$$\frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial x_i^2} = \beta^{(i)} \frac{\partial t^{(i)}}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 t^{(i)}}{\partial x_i^2} = \frac{1}{a^{(i)}} \frac{\partial t^{(i)}}{\partial \tau}, \quad (5)$$

за таких умов:

$$t^{(i)}|_{\tau=0} = 0, \quad \sigma_{x_i} = \sigma_{x_2}, \quad u^{(1)} + u^{(2)} = const, \quad (6)$$

$$\lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial x_1} + \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial x_2} = fV\sigma_{x_1} = fV\sigma_{x_2}, \quad (7)$$

$$\lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial x_1} - \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial x_2} - 2h(t^{(1)} - t^{(2)}) = 0, \quad (8)$$

де  $f$  – коефіцієнт тертя між тілами,  $\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha_i$ ,  $\lambda, \mu$  – коефіцієнти Ламе,  $\alpha_i$  – температурний коефіцієнт лінійного розширення,  $a^{(i)}$  – коефіцієнт теплопровідності для  $i$ -го тіла,  $i = 1, 2$ .

Нехай  $t^{(i)}|_{x_i \rightarrow \infty} = 0$ ,  $\sigma_{x_i}|_{x_i \rightarrow \infty} = -\sigma_{x_i}^\infty$ ,  $\bar{\sigma}_{x_i}|_{x_i \rightarrow \infty} = -\bar{\sigma}_{x_i}^\infty$ , ( $i = 1, 2$ ). Тоді розв’язок задачі (5) – (8) можна побудувати за допомогою інтегрального перетворення Лапласа:

$$\bar{t}^{(i)} = \frac{fV\bar{\sigma}^\infty}{2\Lambda_i\sqrt{p}} \left\{ 1 + \frac{h(\Lambda_i - \Lambda_j)}{2\Lambda_i\Lambda_j} \frac{1}{\sqrt{p} + \frac{h(\Lambda_i + \Lambda_j)}{2\Lambda_i\Lambda_j}} \right\} \exp(-\sqrt{p/a^{(i)}})x_i, \quad (9)$$

$$\bar{q}^{(i)} = \frac{fV\bar{\sigma}^\infty}{2} \left\{ 1 + \frac{h(\Lambda_i - \Lambda_j)}{2\Lambda_i\Lambda_j} \frac{1}{\sqrt{p} + \frac{h(\Lambda_i + \Lambda_j)}{2\Lambda_i\Lambda_j}} \right\} \exp(-\sqrt{p/a^{(i)}})x_i, \quad (10)$$

$$\bar{u}^{(i)} = a_i - \frac{(1 + \nu^{(i)})(1 - 2\nu^{(i)})}{E^{(i)}(1 - \nu^{(i)})} \bar{\sigma}^\infty x_i -$$

$$-\beta^{(i)}\sqrt{a^{(i)}}(1 + \beta^{(i)}) \frac{fV\bar{\sigma}^\infty}{p} \frac{\Lambda_i\sqrt{p} + h}{2\Lambda_i\Lambda_j\sqrt{p} + h(\Lambda_i + \Lambda_j)} \exp(-\sqrt{p/a^{(i)}})x_i, \quad (11)$$

де  $\Lambda_i = \lambda^{(i)}/\sqrt{a^{(i)}}$ ,  $i = 1, 2$ .

Розглянемо типові випадки для різних законів задання напружень  $\sigma^\infty(\tau)$ , які б дозволяли аналітично отримати зображення за Лапласом шуканих функцій.

Випадок 1. Нехай  $\sigma^\infty = P_0 = const$  за  $\tau \geq 0$ , тобто  $\sigma^\infty(\tau) = P_0H(\tau)$ , де  $H(\tau) = \begin{cases} 1, \tau \geq 0 \\ 0, \tau < 0 \end{cases}$  – функція Хевісайда. Тоді у просторі зображень маємо  $\bar{\sigma}^\infty = \frac{P_0}{p}$ .

Випадок 2. Нехай  $\sigma^\infty = P_0[H(\tau) - H(\tau - \tau_0)]$ , де  $P_0 = const$ ,  $H(\tau)$  – функція Хевісайда. Тоді у просторі зображень  $\bar{\sigma}^\infty = \frac{P_0}{p} - \frac{P_0}{p} \exp(-\tau_0 p)$ .

Випадок 3. Нехай  $\sigma^\infty = P_0/\sqrt{\pi\tau}$ , де  $P_0 = const$ . Тоді у просторі зображень за Лапласом отримаємо  $\bar{\sigma}^\infty = \frac{P_0}{\sqrt{p}}$ .

Вказані три випадки дають змогу аналітично отримати шукані функції у просторі оригіналів [8]. Наприклад, для випадку 3 задання на безмежності напруження вигляду  $\sigma|_\infty = P_0/\sqrt{\pi\tau}$  з використанням теорем обернення інтегрального перетворення Лапласа для розподілу температури і теплових потоків у контактуючих тілах за глибиною отримано такі формули:

$$t^{(i)}(x_i, \tau) = \frac{fVP_0}{2\Lambda_i(\Lambda_i + \Lambda_j)} \left\{ 2\Lambda_i \operatorname{erfc} \frac{x_i}{2\sqrt{a^{(i)}}\tau} - (\Lambda_i - \Lambda_j) \exp \left( \frac{h^2(\Lambda_i + \Lambda_j)^2}{4\Lambda_i^2\Lambda_j^2} \tau + \frac{x_i h}{\sqrt{a^{(i)}}} \frac{\Lambda_i + \Lambda_j}{2\Lambda_i\Lambda_j} \right) \times \operatorname{erfc} \left( \frac{x_i}{2\sqrt{a^{(i)}}\tau} + \frac{h(\Lambda_i + \Lambda_j)}{2\Lambda_i\Lambda_j} \sqrt{\tau} \right) \right\}, \quad (12)$$

$$q^{(i)}(x_i, \tau) = \frac{fVP_0}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \exp \left( -\frac{x_i^2}{4a^{(i)}\tau} \right) + \frac{h(\Lambda_i - \Lambda_j)}{2\Lambda_i\Lambda_j} \times \right.$$

$$\times \exp\left(\frac{h^2(\Lambda_i + \Lambda_j)^2}{4\Lambda_i^2\Lambda_j^2}\tau + \frac{x_i h}{\sqrt{a^{(i)}}} \frac{\Lambda_i + \Lambda_j}{2\Lambda_i\Lambda_j}\right) \times \operatorname{erfc}\left(\frac{x_i}{2\sqrt{a^{(i)}}\tau} + \frac{h(\Lambda_i + \Lambda_j)}{2\Lambda_i\Lambda_j}\sqrt{\tau}\right), \quad (13)$$

де  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$  – функція помилок,

$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$  – доповнювальна функція помилок.

**Числові результати.** Досліджено залежність різниці температур  $\Delta t = t^{(2)} - t^{(1)}$  (рис. 3–4) і теплових потоків  $\Delta q = q^{(2)} - q^{(1)}$  (рис. 5–6) від різних ухідних параметрів, що впливають на тер-

мопроникність контакту: від тиску  $P$  між тілами на ділянці контакту; від твердості за Мейером  $\mu$  м'якшого матеріалу; від чистоти обробки поверхонь  $\Delta l$ ; від коефіцієнтів теплопровідності  $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}$  півпросторів, що контактують.

**Висновки.** За отриманими числовими результатами можна зробити такі висновки:

1) зі збільшенням теплопровідності тіл, що контактують, і тиску в зоні контакту термопроникність контакту зростає, а в разі збільшення жорсткості і твердості матеріалів тіл – спадає;

2) зі збільшенням теплопровідності нижнього тіла, жорсткості та твердості матеріалів пари тертя різниця температур тіл, що контактують, зростає, а зі збільшенням теплопровідності верхнього тіла – спадає;

3) зміна номінального тиску між тілами на ділянці контакту мало впливає на різницю температур і теплових потоків у тілах;

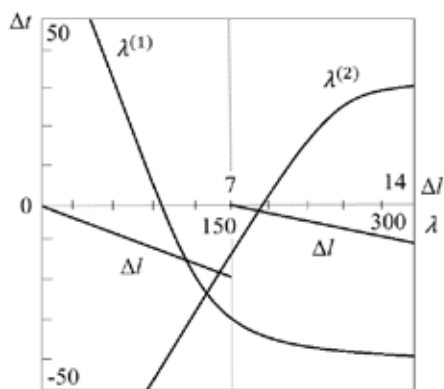


Рис. 3. Залежність різниці температур  $\Delta t$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) від чистоти обробки поверхонь  $\Delta l$  (мкм) і коефіцієнтів теплопровідності  $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}$  ( $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ )

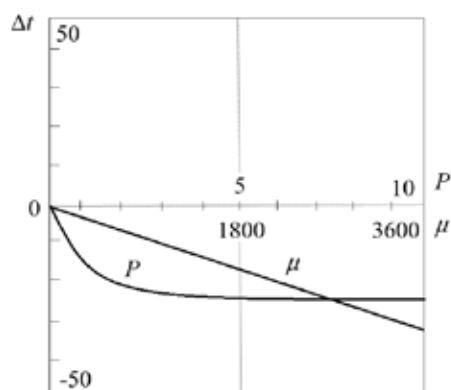


Рис. 4. Залежність різниці температур  $\Delta t$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) від тиску  $P$  (МПа) і твердості за Мейером  $\mu$  (МПа)

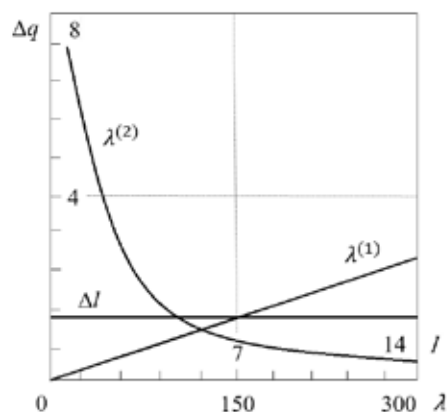


Рис. 5. Залежність теплових потоків  $\Delta q$  ( $\text{кВт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ) від чистоти обробки поверхонь  $\Delta l$  (мкм) і коефіцієнтів теплопровідності  $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}$  ( $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ )

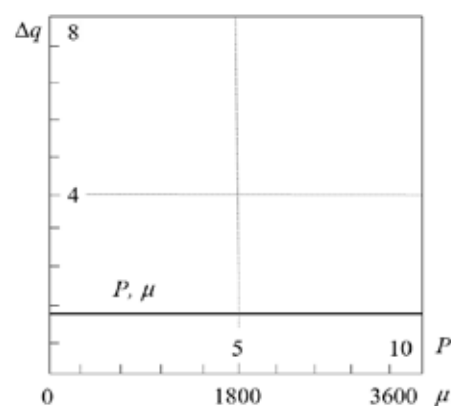


Рис. 6. Залежність теплових потоків  $\Delta q$  ( $\text{кВт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ) тиску  $P$  (МПа) і твердості за Мейером  $\mu$  (МПа)

4) зі збільшенням теплопровідності верхнього тіла різниця теплових потоків тіл, що контактують, зростає, для нижнього тіла ефект протилежний;

5) зміна твердості та жорсткості матеріалів тіл, що контактують, мало впливає на різницю теплових потоків у них.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в тому, що проведений аналіз впливу параметрів контакту і стану поверхонь, що контактують, на температурні поля та теплові потоки через інтегральну характеристику  $h$  – коефіцієнт термопроникності контакту дозволив уперше використати математичну модель «третього тіла» для отримання аналітичного розв'язку нестационарної задачі термопружності з теплоутворенням від дії сил тертя на межі двох півпросторів. У розвиток досліджень [6; 7] розглянуто три різні

закони задання напружень, які дають можливість побудови аналітичного розв'язку. У частинному випадку ідеального теплового контакту тіл отримані числові результати якісно узгоджуються із [3], де питома потужність тепловиділення приймається сталою чи задається конкретною числовою залежністю. Побудовані розв'язки одновимірних задач дозволяють внести поправку в обчисленні коефіцієнта термопроникності контакту за станом поверхонь, які контактують [4]. З іншого боку, у результаті порівняння експериментальних даних і виведення теоретичного розв'язку на експериментальний можна робити висновки про шорсткість поверхонь, що контактують, контактний тиск, площу контакту тощо, що матиме велике значення для коректної математичної постановки задач із неповним контактом у наступних дослідженнях.

### Література

1. Подстригач Я.С. Термоупругое поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя. *Инженерно-физический журнал*. 1963. Т. 6. № 10. С. 129–136.
2. Швец Р.Н., Мартыняк Р.М. Термоупругое контактное взаимодействие тел при наличии поверхностных теплофизических неоднородностей. *Математические методы и физико-механически поля*. 1988. Вып. 27. С. 23–28.
3. Berry G.A., Barber J.R. Division of frictional heat: guide to the nature of sliding contact. *ASME Journal of tribology*. 1984. Vol. 106. P. 405–415.
4. Thermomechanical slip in elastic contact between identical materials / Y. Streliaiev et al. *Acta mechanica et automatica*. 2021. Vol. 15. № 4. P. 187–192.
5. Трансформація кільцевого зазору між півпростором і жорсткою основою під дією розподілених по колу стоків тепла / М.М. Микитин и др. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2021. Вип. 33. С. 126–136. DOI: 10.15421/4221011.
6. Левицький В.П., Онишкевич В.М. Дослідження впливу властивостей «третього тіла» на теплоутворення від тертя. Математичні методи та фізико-механічні поля. 1999. Вип. 42. № 1. С. 82–86.
7. Онишкевич В.М., Барабаш Г. М. Моделювання контактної взаємодії «третім тілом» у трибологічних задачах. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія «Фізико-математичні науки»*. 2021. № 3. С. 85–88. DOI: 10.17721/1812-5409.2021/3.15.
8. PriMat. URL: [https://primat.org/news/prjamo\\_e\\_i\\_obratnoe\\_preobrazovanie\\_laplasa/2014-11-30-871](https://primat.org/news/prjamo_e_i_obratnoe_preobrazovanie_laplasa/2014-11-30-871).

### REFERENCES

1. Podstrigach Ya.S. (1963). Termouprugoye pole v sisteme tvyordych tel, sopryazhonnyh s pomoshchyu tonkogo promezhutochnogo sloya. [Thermoelastic field in the system of rigid bodies, conjugated with help of thin intermediate layer]. *IFZh*, vol. 6, № 10, pp. 129–136 (in Russian).
2. Shvec R.N., Martynyak R.M. (1988). Termouprugoye kontaktnoye vzaimodeystviye tel pri nalichii poverhnostnyh teplofizicheskikh neodnorodnostey. [Thermoelastic contact interaction of bodies in the presence of surface heat-physical non-homogeneities]. *Mat. metody i fiz.-meh. polia*, vol. 27, pp. 23–28 (in Russian).
3. Berry G.A., Barber J.R. (1984). Division of frictional heat: guide to the nature of sliding contact. *ASME Journal of tribology*, vol. 106, pp. 405–415.
4. Streliaiev Y., Martynyak R., Chumak K. (2021). Thermomechanical slip in elastic contact between identical materials. *Acta mechanica et automatica*, vol. 15, № 4, pp. 187–192.
5. Mykityn M.M., Martynyak R.M., Serednytska Kh.I. (2021). Transformaciya kilcevogo zazoru mizh pivprostorum i zhorstkoyu osnovoyu pid diyeyu rozpodilenyh po kolu stokiv tepla [Transformation of the annular gap between half-space and rigid base under the action of heat sinks distributed around the circle]. *Problemy obchysluvalnoyi mekhaniky i micnosti konstrukciy*, vol. 33, pp. 126–136 (in Ukrainian).



6. Levytskyi V.P., Onyshkevych V.M. (1999). Doslidjennia vplyvu vlastyvostey “tretiogo tila” na teploutvorennia vid tertia [Investigation of influence of “third body” properties on heat generation due to friction]. *Mat. metody ta fiz.-meh. polia*, vol. 42, № 1, pp. 82–86 (in Ukrainian).
7. Onyshkevych V.M., Barabash G.M. (2021). Modeliuvannia kontaktnoyi vzayemodiyi “tretim tilom” u trybologichnyh zadachah [Modelling of contact interaction by “third body” in tribological problems]. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series “Physics and Mathematics”*, vol. 3, pp. 85–88 (in Ukrainian).
8. PriMat. URL: [https://primat.org/news/prjamoe\\_i\\_obratnoe\\_preobrazovanie\\_laplasa/2014-11-30-871](https://primat.org/news/prjamoe_i_obratnoe_preobrazovanie_laplasa/2014-11-30-871).

## РОЗДІЛ II. ІНЖЕНЕРІЯ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

УДК 004.942:519.25

DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2022-1-08>

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЗАДАЧАХ ОЦІНЮВАННЯ РОЗМІРУ ПРИКЛАДНОГО ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ З ВІДКРИТИМ КОДОМ НА C#

**Латанська Л. О.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри програмного забезпечення автоматизованих систем  
Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова  
просп. Героїв України, 9, Миколаїв, Україна  
[orcid.org/0000-0001-6473-7624](https://orcid.org/0000-0001-6473-7624)  
[llatanskaya@gmail.com](mailto:llatanskaya@gmail.com)*

**Макарова Л. М.**

*кандидат технічних наук, доцент,  
доцент кафедри програмного забезпечення автоматизованих систем  
Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова  
просп. Героїв України, 9, Миколаїв, Україна, 54007  
[orcid.org/0000-0003-2903-3001](https://orcid.org/0000-0003-2903-3001)  
[lidia.makarova@nuos.edu.ua](mailto:lidia.makarova@nuos.edu.ua)*

**Нікітіна О. Ю.**

*студент  
Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова  
просп. Героїв України, 9, Миколаїв, Україна, 54007  
[orcid.org/0000-0003-3241-0816](https://orcid.org/0000-0003-3241-0816)  
[olena.yuryevna.nikitina@gmail.com](mailto:olena.yuryevna.nikitina@gmail.com)*

**Нікітін О. В.**

*студент  
Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова  
просп. Героїв України, 9, Миколаїв, Україна, 54007  
[orcid.org/0000-0002-4035-8213](https://orcid.org/0000-0002-4035-8213)  
[alex.nikitin.gm@gmail.com](mailto:alex.nikitin.gm@gmail.com)*

**Ключові слова:** регресійне рівняння, нелінійна регресія, нормалізуюче перетворення Джонсона, довірчий інтервал, інтервал передбачення, мова програмування.

Оцінювання розміру програмного забезпечення, зокрема прикладного з відкритим кодом на C#, на сьогодні є дуже важливою частиною в процесі розробки подібних проєктів. Знаючи розмір прикладного програмного забезпечення на ранніх етапах розробки та використовуючи такі моделі, як СОСОМО, СОСОМО II, або методи та моделі алгоритмічного моделювання чи інші, які виконують розрахунки на основі кількісних значень розміру прикладного програмного забезпечення, можна розрахувати трудовитрати та вартість проєкту та передбачити ризики, пов'язані з розробкою.

У цій роботі виконано аналіз наявних регресійних рівнянь для оцінювання розміру прикладного програмного забезпечення з використанням різних мов програмування, який показав необхідність побудови нелінійного регресійного рівняння для оцінювання розміру прикладного програмного забезпечення з відкритим кодом на C# із застосуванням універсального одновимірного нормалізуючого перетворення сім'ї SB Джонсона, що дало можливість побудувати нелінійне регресійне рівняння досить високої якості ( $R^2 = 0,974$ ,  $MMRE = 0,198$ ,  $PRED(0,25) = 0,778$ ), та яке має кращі показники порівняно з лінійним регресійним рівнянням без застосування нормалізуючих перетворень для емпіричних даних ( $R^2 = 0,887$ ,  $MMRE = 1,028$ ,  $PRED(0,25) = 0,361$ ), а також порівняно з нелінійним регресійним рівнянням з використанням натурального логарифму як нормалізуючого перетворення ( $R^2 = 0,819$ ,  $MMRE = 0,222$ ,  $PRED(0,25) = 0,694$ ). Крім цього, використання універсального одновимірного нормалізуючого перетворення Джонсона сім'ї SB дало змогу побудувати більш вузькі довірчий інтервал та інтервал передбачення для нелінійного регресійного рівняння порівняно з інтервалами, які були побудовані з використанням натурального логарифму як нормалізуючого перетворення.

У результаті розроблено програмний додаток для оцінювання розміру прикладного програмного забезпечення з відкритим кодом на C# з використанням нелінійного регресійного рівняння на основі універсального одновимірного нормалізуючого перетворення сім'ї SB Джонсона, який автоматизує процес розрахунку та спрощує застосування побудованого нелінійного регресійного рівняння, що дало змогу значно скоротити час проведення відповідних розрахунків та зменшити кількість розрахункових помилок.

---

## MATHEMATICAL MODELING IN PROBLEMS OF ESTIMATING THE SIZE OF APPLICABLE OPEN-SOURCE SOFTWARE IN C#

**Latanska L. O.**

*Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Automated Systems Software  
Admiral Makarov National University of Shipbuilding  
Heroiv Stalinhradu Ave., 9, Mykolaiv, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-6473-7624  
llatanskaya@gmail.com*

**Makarova L. M.**

*Ph.D. in Technical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Automated Systems Software  
Admiral Makarov National University of Shipbuilding  
Heroiv Stalinhradu Ave., 9, Mykolaiv, Ukraine  
orcid.org/0000-0003-2903-3001  
lidiia.makarova@nuos.edu.ua*

**Nikitina O. Y.**

*Student  
Admiral Makarov National University of Shipbuilding  
Heroiv Stalinhradu Ave., 9, Mykolaiv, Ukraine  
orcid.org/0000-0003-3241-0816  
olena.yuryevna.nikitina@gmail.com*

**Nikitin O. V.**

*Student*

*Admiral Makarov National University of Shipbuilding*

*Heroiv Stalinhradu Ave., 9, Mykolaiv, Ukraine*

*orcid.org/0000-0002-4035-8213*

*alex.nikitin.gm@gmail.com*

**Key words:** *regression equation, non-linear regression, Johnson normalizing transformation, prediction interval, confident interval, programming language.*

Estimating the size of software, including open-source applications in C#, is currently an especially important part of the development of such projects. Knowing the size of application software in the initial stages of development and using models such as COCOMO, COCOMO II or methods and models of algorithmic modeling and others that perform calculations based on quantitative values of application software it can be calculated labor costs and project cost and anticipate risks related to development.

In this paper it was analyzed existing regression equations for estimating the software size of different programming languages which in turn indicated the need to construct a nonlinear regression equation for open-source application software in C# using the universal one-dimensional Johnson normalizing transformation for the SB family, which allowed to construct a nonlinear regression equation of high quality ( $R^2 = 0.974$ ,  $MMRE = 0.198$ ,  $PRED(0.25) = 0.778$ ), and which has better performance compared to the linear regression equation without using of normalizing transformations for empirical data ( $R^2 = 0.887$ ,  $MMRE = 1.028$ ,  $PRED(0.25) = 0.361$ ), as well as in compared with the nonlinear regression equation using the natural logarithm as a normalizing transformation ( $R^2 = 0.819$ ,  $MMRE = 0.222$ ,  $PRED(0.25) = 0.694$ ). In addition, the use of the universal one-dimensional normalizing Johnson transformation of the SB family made it possible to construct a narrower confidence interval and prediction interval for the nonlinear regression equation compared to the intervals that were constructed using the natural logarithm as a normalizing transformation.

As a result, a software application was developed for estimating the size of open source application software in C#, using a nonlinear regression equation based on the universal one-dimensional Johnson normalizing transformation for the SB family, which automates the calculation process and simplifies the using constructed nonlinear regression equations that reduced the time of relevant calculations and reduced the number of calculation errors.

**Вступ.** Сучасний світ усе більше впроваджує інформаційні технології в різні сфери діяльності людини. Розширення сфери застосування персональних комп'ютерів підвищує потребу в розробці прикладного програмного забезпечення.

Відомо, що майже 90% операційних систем персональних комп'ютерів становить ОС Windows [1]. Тому використання об'єктно-орієнтованої мови програмування C# [2], розробленої компанією Microsoft спеціально під ОС Windows, є сучасним підходом для реалізації прикладних проєктів.

Виконуючи розробку програмних продуктів, необхідно на ранніх стадіях проєктів адекватно оцінювати трудомісткість їх реалізації. Одним із основних факторів, що визначають трудомісткість розробки програмного забезпечення, є його розмір. Відомо, що розмір програми значною мірою залежить від особливостей мови програмування, платформи розробки та інших факторів.

Тому наявні методи та моделі для прогнозування розміру майбутнього програмного продукту, що призначені для вузького класу задач.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Оцінювання розміру прикладного програмного забезпечення тісно пов'язане з моделями оцінювання вартості програмного продукту та трудовитрат на його розробку. Наявні різні методи та моделі оцінювання розміру ПЗ, основні з яких назвав Б. Боем [3].

Ці методи та моделі поділяються на алгоритмічні та неалгоритмічні. До неалгоритмічних належать такі як:

- метод експертних оцінок, що оснований на опитуванні технічних експертів, які своєю чергою дають оцінку розміру проєкту;

- метод аналогій, який базується на порівнянні запланованого проєкту з попередніми проєктами з подібними характеристиками.

До алгоритмічних відносять:

- нейронні мережі, які базуються на навчанні з використанням штучного інтелекту;
- генетичні алгоритми, які базуються на використанні оператора схрещування, використовують механізми природного відбору та спадкоємства. Генетичні алгоритми можуть використовуватися самостійно або спільно з нейронними мережами як комбіновані методи;
- регресійні методи, які використовують лінійну та нелінійну, однофакторну та багатфакторну регресію.

Побудова регресійних рівнянь для оцінювання розміру прикладного програмного забезпечення – це багатоетапний процес, який може містити таке: пошук проєктів; збір метричних значень для кожного проєкту; аналіз зібраних даних; пошук та видалення аномальних значень (викидів); перевірку даних на нормальність розподілу; вибір нормалізуючого перетворення; нормалізацію даних; оцінку коефіцієнтів регресійного рівняння; побудову довірчого інтервалу; побудову інтервалу передбачення; зворотне перетворення розрахованих даних; розрахунки характеристик моделі; порівняння моделей та вибір найкращої.

Оскільки наявні методи та моделі, які здійснюють розрахунки на основі кількісного показника розміру програмного забезпечення, а прикладне програмне забезпечення розробляється з використанням різноманітних мов програмування, стиль та синтаксис яких дуже різняться, виникає потреба в розробці моделі для оцінювання розміру програмного забезпечення для кожної мови окремо. Саме тому спочатку було проведено пошук наявних регресійних рівнянь оцінювання розміру ПЗ для різних мов програмування.

Було знайдено такі регресійні рівняння: для оцінювання розміру вебдодатків на Java [4]; для оцінювання розміру ПЗ інформаційних VB-систем [5]; для оцінювання розміру програмного забезпечення на Java [6; 7]; для оцінювання розміру Web-застосунків, що створюються з використанням фреймворку Laravel [8]; для оцінювання розміру PHP-застосунків [9]; для оцінювання розміру програмного забезпечення для крос-платформної розробки мобільних застосунків із використанням платформи Xamarin [10].

**Постановка завдання.** Оскільки відомо, що розмір ПЗ залежить від мови розробки, а регресійного рівняння для прикладного програмного забезпечення на C# не було знайдено, тож виникає потреба в побудові регресійного рівняння для оцінювання розміру такого програмного забезпечення.

Метою роботи є побудова нелінійного регресійного рівняння для оцінювання розміру прикладного програмного забезпечення з відкритим

кодом на C# шляхом застосування нормалізуючого перетворення Джонсона, що дозволить отримати більш достовірний результат.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Для побудови нелінійного регресійного рівняння оцінювання розміру прикладного програмного забезпечення з відкритим кодом на C# було вибрано 37 проєктів на відкритому ресурсі GitHub [11]. Як залежну змінну вибрано кількість тисяч строк коду (вибірка  $Y$ ), а як незалежну змінну – кількість класів (вибірка  $X$ ).

Для перевірки отриманих даних на нормальність розподілу використали критерій Пірсона [12], а також розраховали основні характеристики вибірки.

Основні характеристики емпіричних даних:  $n = 37$ ;  $\hat{m}_X = 48,43$ ;  $\hat{\sigma}_X = 47,40$ ;  $\hat{A}_X = 1,19$ ;  $\hat{\varepsilon}_X = 4,02$ ;  $\hat{m}_Y = 4,16$ ;  $\hat{\sigma}_Y = 5,42$ ;  $\hat{A}_Y = 2,48$ ;  $\hat{\varepsilon}_Y = 10,15$ ; де  $n$  – кількість значень;  $\hat{m}_X$  та  $\hat{m}_Y$  – вибіркове середнє вибірок  $X$  та  $Y$  відповідно;  $\hat{\sigma}_X$  та  $\hat{\sigma}_Y$  – середньоквадратичне відхилення вибірок  $X$  та  $Y$  відповідно;  $\hat{A}_X$  та  $\hat{A}_Y$  – асиметрія вибірок  $X$  та  $Y$  відповідно;  $\hat{\varepsilon}_X$  та  $\hat{\varepsilon}_Y$  – ексцес вибірок  $X$  та  $Y$  відповідно.

За оцінками асиметрії та ексцесу для обох вибірок було вибрано сім'ю розподілу  $S_B$  Джонсона [13], яка має такий вигляд:

$$Z_X = \gamma + \upsilon \ln \left( \frac{X - \theta}{\lambda + \theta - X} \right),$$

$$\theta < X < \theta + \lambda; \upsilon > 0; -\infty < \gamma < +\infty; -\infty < \theta < +\infty; \lambda > 0, \quad (1)$$

де  $\gamma, \upsilon, \theta, \lambda$  – параметри перетворення Джонсона.

Оцінювання параметрів сім'ї  $S_B$  Джонсона виконано методом математичного програмування [14].

Оскільки для побудови регресійного рівняння дуже важливо, щоб усі дані були однорідними та не містили аномальних значень (викидів), для пошуку викидів скористались квадратом відстані Махаланобіса [15] за такою формулою:

$$M_D^2 = (X_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (X_i - \mu), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

де:  $\Sigma^{-1}$  – зворотна матриця коваріації;  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  – середній вектор вибірки  $X$ .

У результаті розрахунків було виявлено та видалено один викид. Далі для вибірки без викидів знову оцінюємо параметри сім'ї  $S_B$  Джонсона, використовуючи метод математичного програмування [14].

Значення параметрів нормалізуючого перетворення Джонсона сім'ї  $S_B$ :

$$\upsilon_X = 0,560; \gamma_X = 1,010; \theta_X = 0,480; \lambda_X = 202,650;$$

$$\upsilon_Y = 0,670; \gamma_Y = 1,890; \theta_Y = 0,007; \lambda_Y = 38,073.$$

Характеристики нормалізованої вибірки:  $n=36$ ;  
 $\hat{m}_X = -0,001$ ;  $\hat{\sigma}_X = 1,003$ ;  $\hat{A}_X = 0,021$ ;  $\hat{\varepsilon}_X = 3,014$ ;  
 $\hat{m}_Y = 0,005$ ;  $\hat{\sigma}_Y = 1,001$ ;  $\hat{A}_Y = 0,089$ ;  $\hat{\varepsilon}_Y = 3,105$ .

За розрахунками, для вибірки  $Z_X$  значення  $\chi^2$  спостереження дорівнює 1,18, а для вибірки  $Z_Y$  значення  $\chi^2$  спостереження дорівнює 1,32, тож обидва значення є меншими за  $\chi_{0,5,2}^2$  критичне, яке дорівнює 5,99. Виходячи з отриманих значень, можемо стверджувати, що обидві вибірки підпорядковуються нормальному закону розподілу, тож приступимо до побудови регресійного рівняння, яке у загальному вигляді має вигляд:

$$\hat{Y} = f(X), \quad (3)$$

де  $\hat{Y}$  – залежна змінна (кількість строк коду);  $f(X)$  – функція регресійного рівняння (нелінійна або лінійна);  $X$  – незалежна змінна (кількість класів).

Вище було доведено, що дані підпорядковуються нормальному закону розподілу, тому можемо будувати лінійне регресійне рівняння, яке має такий вигляд:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X, \quad (4)$$

де:  $X$  – незалежна змінна;  $\hat{Y}$  – залежна змінна;  $b_0$  та  $b_1$  – коефіцієнти рівняння, які знаходять за методом найменших квадратів [16].

Для лінійного регресійного рівняння знайдено довірчий інтервал, який розрахований за такою формулою:

$$I_{CI} = \hat{y} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} * S_y * \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{j=1}^m (x_j - \bar{x})^2}}, \quad (5)$$

де  $S_y = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^m (y_j - \hat{y}_j)^2}$ ;  $t_{\frac{\alpha}{2}, n-2}$  – квантіль

розподілу Стьюдента [17].

Аналогічно отримано інтервал передбачення за такою формулою:

$$I_{PI} = \hat{y} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} * S_y * \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{j=1}^m (x_j - \bar{x})^2}}, \quad (6)$$

Для переходу від лінійного регресійного рівняння для нормалізованих даних до нелінійного регресійного рівняння використано зворотне перетворення сім'ї  $S_B$  Джонсона, яке має такий вигляд:

$$X = \theta + \lambda \frac{e^k}{1 + e^k},$$

$$v > 0; -\infty < \gamma < +\infty; -\infty < \theta < +\infty; \lambda > 0, \quad (7)$$

де  $k = \frac{Z_X - \gamma}{v}$ .

Як результат отримано нелінійне регресійне рівняння для оцінювання розміру прикладного програмного забезпечення з відкритим кодом на C#, яке має такий вигляд:

$$\hat{Y} = \frac{38,08e^k + 0,0072}{1 + e^k}, \quad (8)$$

$$\text{де } k = \frac{0,555 \ln\left(\frac{X - 0,48}{203,13 - X}\right) - 0,884}{0,67}.$$

Також для порівняння побудовано лінійне регресійне рівняння без нормалізації даних, яке має вигляд:

$$\hat{Y} = 0,1078X - 0,9167; \quad (9)$$

та нелінійне регресійне рівняння з використанням як нормалізуючого перетворення натурального логарифму, яке має такий вигляд:

$$\hat{Y} = e^{-2,4992} * X^{0,9936}. \quad (10)$$

Для нелінійних регресійних рівнянь та лінійного регресійного рівняння (без нормалізації вихідних даних) побудовані довірчі інтервали та інтервали передбачення.

На рис. 1 представлено емпіричні дані, нелінійне регресійне рівняння, яке отримане з використанням нормалізуючого перетворення сім'ї  $S_B$  Джонсона, з його довірчим інтервалом та інтервалом передбачення.

Як видно з рис. 1, всі значення вихідних даних лежать у межах інтервалу передбачення, що вказує на те, що перевірка даних, пошук та видалення викидів дали гарний результат та дані, що залишились, не містять аномальних значень.

На рис. 2 представлено емпіричні дані, нелінійне регресійне рівняння, яке отримане з використанням натурального логарифму як нормалізуючого перетворення, його довірчий інтервал та інтервал передбачення.

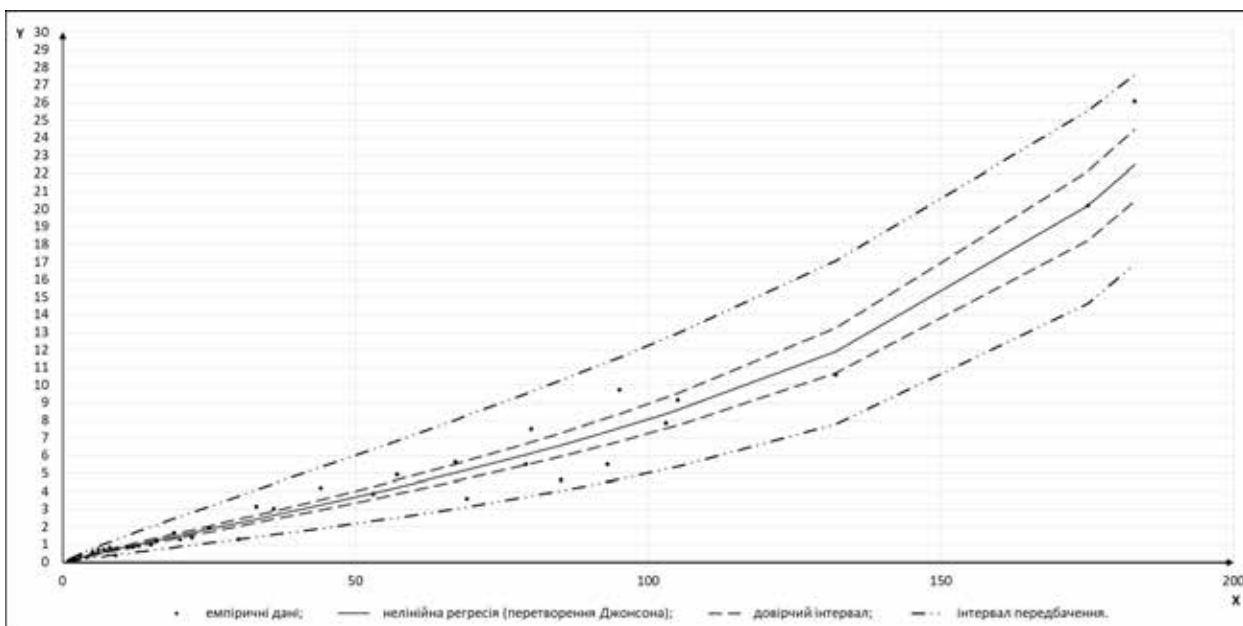
Як видно з рис. 2, всі емпіричні дані знаходяться у середині інтервалу прогнозування.

На рис. 3 представлено емпіричні дані, лінійне регресійне рівняння без нормалізації вихідних даних, його довірчий інтервал та інтервал передбачення.

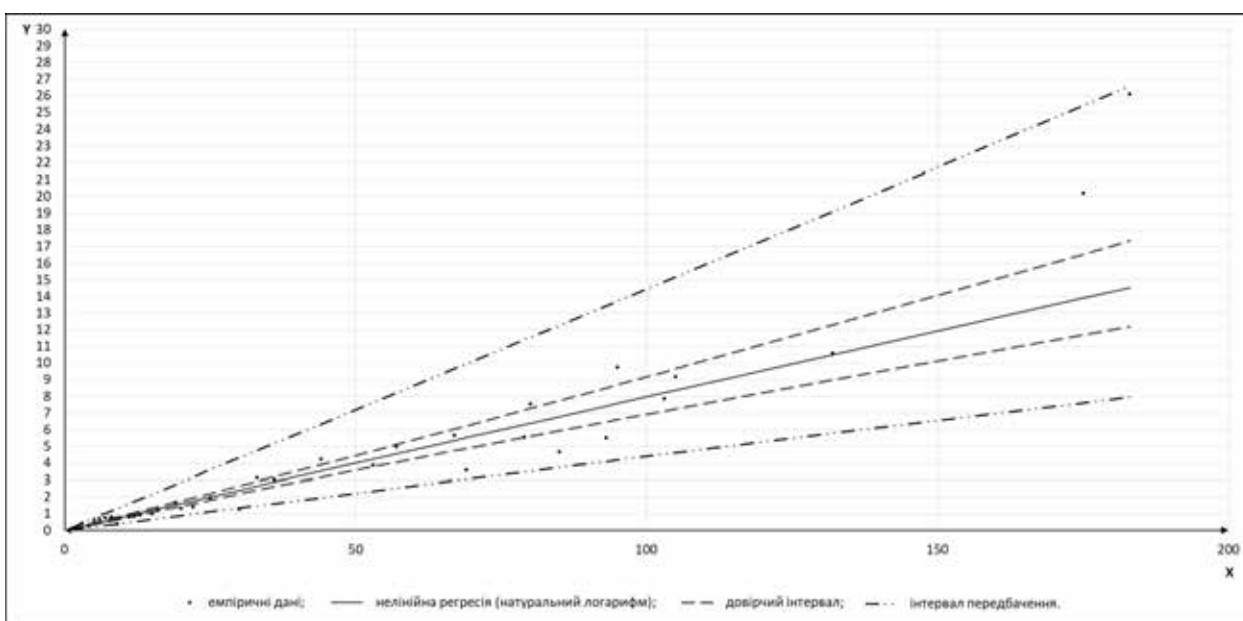
Як видно з рис. 3, нижні границі інтервалу передбачення та довірчого інтервалу містять від'ємні значення, що унеможливило використання такого регресійного рівняння для оцінювання розміру прикладного програмного забезпечення з відкритим кодом на C#. До того ж видно, що емпіричні дані мають аномальне значення (викид).

**Дискусія.** Характеристики якості побудованих регресійних рівнянь представлені в табл. 1.

Виконавши аналіз табл. 1, бачимо, що найкращі характеристики має нелінійне регресійне рівняння з використанням нормалізуючого перетворення сім'ї  $S_B$  Джонсона порівняно з неліній-



**Рис. 1. Емпіричні дані, нелінійне регресійне рівняння, яке отримане з використанням нормалізуючого перетворення сім'ї  $S_B$  Джонсона, його довірчий інтервал та інтервал передбачення**



**Рис. 2. Емпіричні дані, нелінійне регресійне рівняння, яке отримане з використанням натурального логарифму як нормалізуючого перетворення, його довірчий інтервал та інтервал передбачення**

ним регресійним рівнянням з використанням натурального логарифму як нормалізуючого перетворення та лінійним регресійним рівнянням (побудованим без нормалізації вихідних даних).

Також у роботі виконано порівняння отриманих регресійних рівнянь з нелінійним регресійним рівнянням, яке побудоване на основі нормалі-

зуючого перетворення Джонсона для оцінювання розміру вебдодатків на Java із [4]. У разі застосування вказаного регресійного рівняння для оцінювання розміру прикладного програмного забезпечення з відкритим кодом на C# отримано такі характеристики якості:  $R^2 = 0,663$ ,  $MMRE = 0,407$ ,  $PRED(0,25) = 0,514$ , які не є прийнятними.

Таким чином, якість прогнозів щодо оцінювання розміру програмного забезпечення з допомогою регресійного рівняння залежить від мови програмування та типу програмних додатків, на основі яких рівняння розроблялося та випробувалося, а також від виду нормалізуючого перетворення. Це підтверджує вузьконаправленість наявних регресійних рівнянь у разі прогнозування розміру програмного забезпечення, тобто не існує універсального регресійного рівняння, яке в усіх випадках забезпечить прийнятні показники якості.

**Висновки.** Для оцінювання розміру прикладного програмного забезпечення з відкритим кодом на C# побудували нелінійні регресійні рівняння з використанням нормалізуючого перетворення сім'ї  $S_B$  Джонсона та нормалізуючого перетворення на основі натурального логарифму, а також лінійне регресійне рівняння без нормалізації емпіричних даних. Для кожного з отриманих рівнянь регресії були побудовані довірчий інтервал та інтервал передбачення, які є вузькими для нелінійного регресійного рівняння, отриманого з використанням нормалізуючого перетворення сім'ї  $S_B$  Джонсона.

З побудованих рівнянь було вибрано рівняння з кращими значеннями характеристик якості – нелінійне регресійне рівняння з використанням нормалізуючого перетворення сім'ї  $S_B$  Джонсона, яке має прийнятні значення характеристик ( $R^2 = 0,974$ ,  $MMRE = 0,198$ ,  $PRED(0,25) = 0,778$ ).

Вибране нелінійне регресійне рівняння можна використовувати для прогнозування розміру прикладного програмного забезпечення з відкритим кодом на C# та отримані результати використовувати в подальших розрахунках трудомісткості та вартості проекту.

У майбутньому планується розробка нелінійного регресійного рівняння для прогнозування розміру прикладного програмного забезпечення з відкритим кодом на C# з використанням багатовимірної нормалізації та побудова багатофакторних моделей, що дозволить підвищити якість прогнозування.

Також було розроблено програмне забезпечення для автоматизації оцінювання розміру прикладного програмного забезпечення з відкритим кодом на C#, яке реалізує нелінійне регресійне рівняння з використанням нормалізуючого перетворення сім'ї  $S_B$  Джонсона.

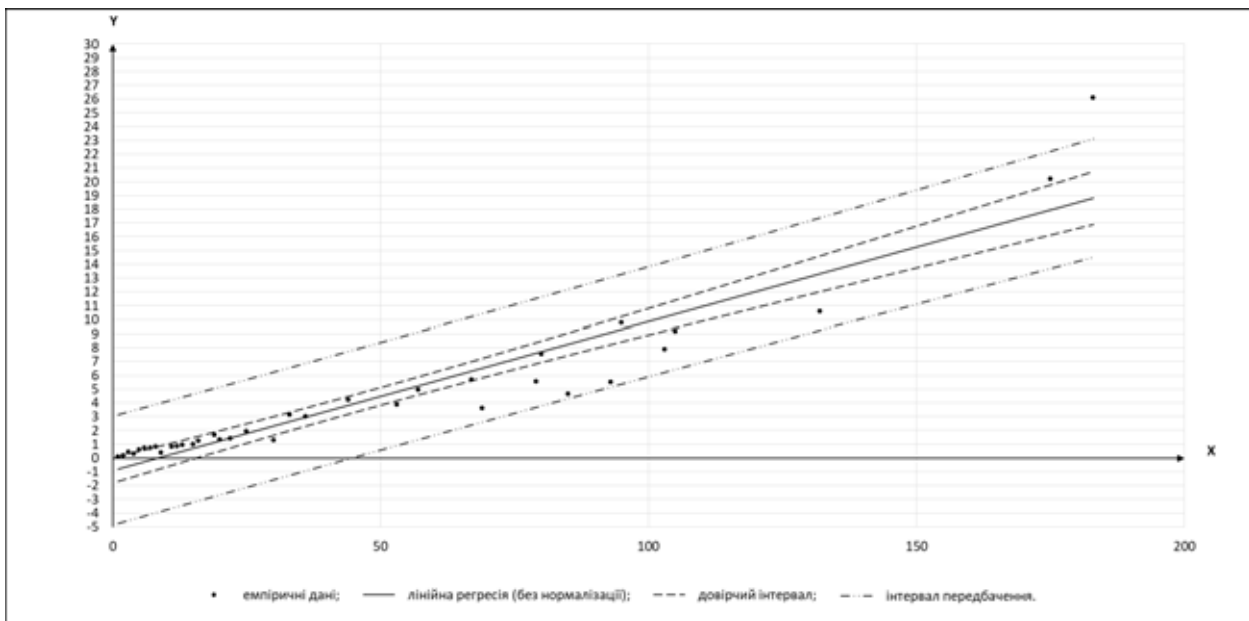


Рис. 3. Емпіричні дані, лінійне регресійне рівняння без нормалізації вихідних даних, його довірчий інтервал та інтервал передбачення

Таблиця 1

#### Характеристики якості регресійних рівнянь

Характеристики (найменування)	Вид рівняння		
	Нелінійне (Джонсон)	Нелінійне (натуральний логарифм)	Лінійне (без нормалізації)
$R^2$	0,974	0,819	0,887
MMRE	0,198	0,222	1,028
PRED (0,25)	0,778	0,694	0,361



## ЛІТЕРАТУРА

1. OS Windows. URL: <https://www.microsoft.com/en-us/windows> (дата звернення: 10.01.2022).
2. C#. URL: <https://dotnet.microsoft.com/languages/csharp> (дата звернення: 01.02.2022).
3. Boehm B.W. Software Engineering Economics. New Jersey : Prentice-Hall, 1981. 767 p.
4. Макарова Л.М., Приходько Н.В., Кудін О.О. Побудова нелінійної регресійної моделі для оцінювання розміру вебдодатків, реалізованих мовою Java. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. Херсон, 2019. № 2(69). С. 145–153.
5. Приходько Н.В., Приходько С.Б. Нелінійна регресійна модель для оцінювання розміру програмного забезпечення інформаційних систем на базі VB. *Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія*. Вінниця, 2018. № 3. С. 37–42. URL: <https://doi.org/10.31649/1999-9941-2018-43-3-37-42>.
6. Приходько С.Б., Приходько Н.В., Смикодуб Т.Г. Чотирьохфакторна нелінійна регресійна модель для оцінювання розміру Java-застосунків з відкритим кодом. *Вчені записки ТНУ імені В.І. Вернадського. Серія «Технічні науки»*. Київ, 2020. Том 31(70). Ч. 1. № 2. С. 157–162. URL: <https://doi.org/10.32838/2663-5941/2020.2-1/2>.
7. Prykhodko N.V., Prykhodko S.B. The non-linear regression model to estimate software size of open source java-based systems. *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2018, No. 3, pp. 158–166. URL: <http://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-3-17>.
8. Приходько С.Б., Приходько Н.В., Ворона М.В., Беловол І.О. Нелінійна регресійна модель для оцінювання розміру web-застосунків, що створюються з використанням фреймворку laravel. *Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія*. Вінниця, 2021. № 50(1). С. 115–121. URL: <https://doi.org/10.31649/1999-9941-2021-50-1-115-121>.
9. Приходько С.Б., Ворона М.В. Оцінювання розміру php-застосунків з відкритим кодом за нелінійними регресійними моделями з різними факторами. *Збірник наукових праць НУК*. Миколаїв, 2021. № 1. С. 92–98. URL: [https://doi.org/10.15589/znp2021.1\(484\).13](https://doi.org/10.15589/znp2021.1(484).13).
10. Макарова Л.М., Латанська Л.О., Нікітін О.В., Нікітіна О.Ю. Математичні моделі для оцінювання розміру програмного забезпечення для крос-платформної розробки мобільних застосунків із використанням платформи Xamarin. *Вчені записки ТНУ імені В.І. Вернадського. Серія «Технічні науки»*. Київ, 2022. Том 33(72). № 1. С. 150–156. URL: <https://doi.org/10.32838/2663-5941/2022.1/23>.
11. GitHub. URL: <https://github.com> (дата звернення: 21.01.2022).
12. Бахрушин В.Є. Методи аналізу даних : навчальний посібник для студентів. Запоріжжя : КПУ, 2011. 268 с.
13. Приходько С.Б., Макарова Л.Н. Аналитическая зависимость для выбора распределения Джонсона семейства  $S_L$ . *Вестник Херсонского национального технического университета*. Херсон : ХНТУ, 2012. № 02 (45). С. 101–104.
14. Приходько С.Б. Оценка параметров нелинейных стохастических дифференциальных уравнений на основе нормализующих преобразований. *Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи»*. Харків, 2012. № 1015. С. 276–282.
15. Prykhodko S., Prykhodko N., Makarova L., Pukhalevych A. Outlier Detection in Non-Linear Regression Analysis Based on the Normalizing Transformations. *Proceedings of the 2020 IEEE 15th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET)(Ukraine, Lviv-Slavske, February 25–29, 2020)*, IEEE, 2020, pp. 407–410. URL: <https://doi.org/10.1109/tcset49122.2020.235464>.
16. Крянев А.В., Лукин Г.В., Удумян Д.К. Метрический анализ и обработка данных. Москва : Физматлит, 2012. 308 с.
17. Сток Д., Уотсон М. Введение в эконометрику / пер. с англ. Москва : Дело, 2015. 864 с.

## REFERENCES

1. OS Windows. Retrieved from: <https://www.microsoft.com/en-us/windows> (Last accessed: 10 January 2022).
2. C#. Retrieved from: <https://dotnet.microsoft.com/languages/csharp> (Last accessed: 1 February 2022).
3. Boehm, B.W. (1981). *Software engineering economics*. New Jersey: Prentice-Hall.
4. Makarova, L.M., Prykhodko, N.V., Kudin, O.O. (2019). Pobudova nelinijnoji reghresijnoji modeli dlja ocinjuvannja rozmiru veb-dodatkov, realizovanykh movoju Java [Constructing the non-linear regression model for size estimation of web-applications implemented in Java]. *Visnyk of Kherson National Technical University*, Vol. 2, No. 69, pp. 145–153.
5. Prykhodko, N.V., Prykhodko, S.B. (2018). Nelinijna reghresijna modelj dlja ocinjuvannja rozmiru programnogho zabezpechennja informacijnykh system na bazi VB [Non-linear regression model to

- estimate the software size of VB-based information systems]. *Information Technology And Computer Engineering*, No. 3, pp. 37–42. Retrieved from: <https://doi.org/10.31649/1999-9941-2018-43-3-37-42>.
6. Prykhodko, S.B., Prykhodko, N.V., Smykodub, T.G. (2020). Chotyryjokhfakorna nelineijna reghresijna modelj dlja ocinjuvannja rozmiru Java-zastosunkiv z vidkryтым kodom [Four-factor non-linear regression model to estimate the size of open source Java-based applications]. *Scientific Notes of Taurida National V.I. Vernadsky University. Series: Technical Sciences*, Vol. 31(70), Part 1, No. 2, pp. 157–162. Retrieved from: <https://doi.org/10.32838/2663-5941/2020.2-1/25>.
  7. Prykhodko, N.V., Prykhodko, S.B. (2018). The non-linear regression model to estimate the software size of open source Java-based systems. *Radio Electronics, Computer Science, Control*, No. 3, pp. 158–166. Retrieved from: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-3-17>.
  8. Prykhodko, S.B., Prykhodko, N.V., Vorona, M.V., Belovol, I.A. (2021). Nelineijna reghresijna modelj dlja ocinjuvannja rozmiru web-zastosunkiv, shho stvorjuyutsja z vykorystannjam frejmorku laravel [Nonlinear regression model for estimating the size of web-applications created using the Laravel Framework]. *Information Technology and Computer Engineering*, Vol. 50, No. 1, pp. 115–121. Retrieved from: <https://doi.org/10.31649/1999-9941-2021-50-1-115-121>.
  9. Prykhodko, S.B., Vorona, M.V. (2021). Ocinyuvannja rozmiru php-zastosunkiv z vidkryтым kodom za nelineijnymy reghresijnymy modeljamy z riznymy faktoramy [Estimating the size of open-source PHP-based apps by nonlinear regression models with various factors]. *Collection of Scientific Publications NUS*, No. 1, pp. 92–98. Retrieved from: [https://doi.org/10.15589/znp2021.1\(484\).13](https://doi.org/10.15589/znp2021.1(484).13).
  10. Makarova, L.M., Latanska, L.O., Nikitin, O.V., Nikitina, O.Yu. (2022). Matematychni modeli dlja ocinjuvannja rozmiru prohramnogho zabezpechennja dlja kros-platformnoji rozrobky mobiljnykh zastosunkiv iz vykorystannjam platformy Xamarin [Mathematical models for software size estimation for cross-platform development of mobile applications using Xamarin platform]. *Scientific Notes of Taurida National V.I. Vernadsky University. Series: Technical Sciences*, Vol. 33(72), No. 1, pp. 150–156. Retrieved from: <https://doi.org/10.32838/2663-5941/2022.1/23>.
  11. GitHub. Retrieved from: <https://github.com/> (accessed 8 February 2022).
  12. Bakhrushyn, V.Ye. (2011). *Metody analizu danykh: navchalnyj posibnyk dlja studentiv* [Methods of data analysis. A textbook for students]. Zaporizhzhya: KPU [in Ukrainian].
  13. Prykhodko, S.B., Makarova, L.N. (2012). Analiticheskaya zavisimost dlja vybora raspredeleniya Dzhonsona semeystva  $S_L$  [The analytical dependence for choosing the Johnson distribution of the  $S_L$  family]. *Bulletin of Kherson National technical university*, Vol. 02, No. 45, pp. 101–104.
  14. Prykhodko, S.B. (2012). Otsenka parametrov nelineinikh stokhasticheskikh differentsialnykh uravnenii na osnove normalizuiushchikh preobrazovaniy [Parameter estimation of nonlinear stochastic differential equations based on the normalizing transformations]. *Bulletin of Kharkiv National university. Series: "Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems"*, No. 1015, pp. 276–282.
  15. Prykhodko, S., Prykhodko, N., Makarova, L., Pukhalevych, A. (2020). Outlier detection in non-linear regression analysis based on the normalizing transformations. *2020 IEEE 15th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET)* (Ukraine, Lviv–Slavske, February 25–29, 2020), IEEE, pp. 407–410. Retrieved from: <https://doi.org/10.1109/tcset49122.2020.235464>.
  16. Kryanev, A.V., Lukin, G.V., Udumyan, D.K. (2012). *Metricheskij analiz i obrabotka dannykh* [Metric analysis and data processing]. Moscow: Fizmatlit [in Russian].
  17. Stok, J., Watson, M. (2015). *Vvedenie v ekonometriku / per. s angl.* [Introduction to econometrics]. Moscow: Delo [in Russian].

УДК 519.17+004.4  
DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2022-1-09>

## ОГЛЯД ЗАСТОСУВАНЬ ТЕОРІЇ ГРАФІВ У РОЗРОБЦІ ТА ОБСЛУГОВУВАННІ ПРОГРАМНИХ СИСТЕМ

**Москалик Д. О.**

*аспірант кафедри інженерії програмного забезпечення  
Державний університет «Житомирська політехніка»  
вул. Чуднівська, 103, Житомир, Україна  
[orcid.org/0000-0002-4421-9325](https://orcid.org/0000-0002-4421-9325)  
[d.moskalyk@sana-commerce.com](mailto:d.moskalyk@sana-commerce.com)*

**Антонюк Д. С.**

*кандидат педагогічних наук, доцент,  
доцент кафедри інженерії програмного забезпечення  
Державний університет «Житомирська політехніка»  
вул. Чуднівська, 103, Житомир, Україна  
[orcid.org/0000-0001-7496-3553](https://orcid.org/0000-0001-7496-3553)  
[dmitry\\_antonyuk@yahoo.com](mailto:dmitry_antonyuk@yahoo.com)*

**Вакалюк Т. А.**

*доктор педагогічних наук, професор,  
професор кафедри інженерії програмного забезпечення  
Державний університет «Житомирська політехніка»  
вул. Чуднівська, 103, Житомир, Україна  
[orcid.org/0000-0001-6825-4697](https://orcid.org/0000-0001-6825-4697)  
[tetianavakaliuk@gmail.com](mailto:tetianavakaliuk@gmail.com)*

**Огінський Є. В.**

*аспірант кафедри інженерії програмного забезпечення  
Державний університет «Житомирська політехніка»  
вул. Чуднівська, 103, Житомир, Україна  
[orcid.org/0000-0002-7777-8449](https://orcid.org/0000-0002-7777-8449)  
[oginsky2@gmail.com](mailto:oginsky2@gmail.com)*

**Ковалевський В. В.**

*аспірант кафедри інженерії програмного забезпечення  
Державний університет «Житомирська політехніка»  
вул. Чуднівська, 103, Житомир, Україна  
[orcid.org/0000-0001-7144-1899](https://orcid.org/0000-0001-7144-1899)  
[s.kovalevsky@sana-commerce.com](mailto:s.kovalevsky@sana-commerce.com)*

**Ключові слова:** *граф, теорія графів, розробка програмних систем, обслуговування програмних систем, застосування теорії графів.*

Теорія графів здобула неабияку популярність у великій кількості сфер застосування завдяки своїй універсальності, в тому числі зручності моделювання та наочності візуалізації. Загалом, у вигляді графу можна представити довільну модель об'єктів реального світу та зв'язків між ними, що дозволяє застосовувати до нього будь-які відомі алгоритми та піддавати іншим видам подальшого аналізу.

Теоретичні основи графів також широко використовуються у сфері дослідження операцій. Наприклад, завдання комівояжера, пошук найменшого кістякового дерева у зваженому графі, знаходження найкоротшого шляху між двома вершинами та інші. Метою цієї роботи

є саме аналіз практичного застосування теорії графів як безпосередньо в розробці програмного забезпечення, так і для його розробки, а також у разі подальшого обслуговування та підтримки програмних систем.

Окрім використання теоретичних основ графів в інших галузях науки, теорія графів також знайшла широке застосування у вирішенні багатьох практичних задач у великому спектрі життєдіяльності людини, як-то у хімії, соціології, логістиці, біології, економіці, техніці та ін.

Так само і в розробці програмного забезпечення теорія графів посіла своє почесне місце. За її допомогою вирішуються задачі багатьох різних видів, як у процесі розробки програм, так і для розвитку самої програмної інженерії.

У результаті проведеної роботи з аналізу можливостей практичного застосування теорії графів для розробки та обслуговування програмних систем було виявлено той факт, що на більшості етапів циклу розробки програмного забезпечення графи використовуються тільки для моделювання та візуалізації різних видів інформації, проте майже відсутній автоматизований алгоритмічний аналіз отриманих моделей. Це може свідчити про наявність перспективного напрямку для пошуку додаткових можливостей застосування графів у процесах розробки програмного забезпечення.

## AN OVERVIEW OF USING GRAPH THEORY IN SOFTWARE SYSTEM DEVELOPMENT AND MAINTENANCE

**Moskalyk D. O.**

*Postgraduate Student at the Department of Software Engineering  
Zhytomyr Polytechnic State University  
Chudnivska str., 103, Zhytomyr, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-4421-9325  
d.moskalyk@sana-commerce.com*

**Antoniuk D. S.**

*Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Software Engineering  
Zhytomyr Polytechnic State University  
Chudnivska str., 103, Zhytomyr, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-7496-3553  
dmitry\_antonyuk@yahoo.com*

**Vakaliuk T. A.**

*Doctor of Pedagogical Sciences, Professor,  
Professor at the Department of Software Engineering  
Zhytomyr Polytechnic State University  
Chudnivska str., 103, Zhytomyr, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-6825-4697  
tetianavakaliuk@gmail.com*

**Ohinskyi Ye. V.**

*Postgraduate Student at the Department of Software Engineering  
Zhytomyr Polytechnic State University  
Chudnivska str., 103, Zhytomyr, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-7777-8449  
oginsky2@gmail.com*

**Kovalevskiy V. V.**

*Postgraduate Student at the Department of Software Engineering*

*Zhytomyr Polytechnic State University*

*Chudnivska str., 103, Zhytomyr, Ukraine*

*orcid.org/0000-0001-7144-1899*

*s.kovalevsky@sana-commerce.com*

**Key words:** *graph, graph theory, software systems development, software systems maintenance, graph theory applications.*

Graph theory has gained considerable popularity in many areas of application due to its versatility, including ease of modeling and visualization. In general, a graph can represent an arbitrary model of real-world objects and the relationships between them, which allows applying any known algorithms to it and subject it to other types of further analysis.

The theoretical foundations of graphs are also widely used in the field of operations research. For example, the travelling salesman problem, finding the minimum spanning tree of a weighted graph, finding the shortest path between two vertices etc. The purpose of this work is to analyze the practical applications of graph theory, both in the process of software development and for software development in general, as well as in the subsequent maintenance and support of software systems.

In addition to using the theoretical foundations of graphs in other branches of science, graph theory has also found wide application in solving many practical problems in different areas of human life, such as chemistry, sociology, logistics, biology, economics, technology and so on. Similarly, in software development, graph theory has taken its rightful place. Many kinds of problems are solved with its help, both in the process of software engineering and for the development of software engineering itself.

The analysis of the graph theory application opportunities for software development and maintenance has shown that at most stages of the software development cycle, graphs are used only for modeling and visualization of various kinds of information, but there is almost no automated algorithmic analysis of the obtained models. This may indicate a promising direction for discovering additional opportunities of graph theory usage in the software development processes.

**Вступ.** У сучасному світі теорія графів знаходить своє місце, мабуть, в усіх сферах діяльності людини. Її використовують як в інших галузях науки, так і у вирішенні багатьох прикладних задач. З її допомогою досліджують молекули, атоми, хімічні зв'язки. Вона широко використовується у соціології для вимірювання популярності акторів чи для дослідження механізмів дифузії інновацій. Теорія графів застосовується в біології для відслідковування міграції живих істот, де регіони проживання позначаються вершинами графу, а ребра відображають шляхи міграції чи переміщення між різними регіонами. Ця інформація дуже важлива для дослідження поширення захворювань, паразитів та вивчення впливу міграцій одного виду на життєдіяльність іншого.

Теоретичні основи графів також широко використовуються у сфері дослідження операцій. Наприклад, завдання комівояжера, пошук найменшого кістякового дерева у зваженому графі, знаходження найкоротшого шляху між двома вершинами та інші.

Неможливо не згадати застосування теорії графів у моделюванні транспортних мереж та мереж діяльності. Мережі використовують для розв'язання великої кількості комбінаторних задач. Найбільш поширене та вдале застосування мереж у дослідженні операцій – це планування великих та складних проєктів.

Застосування графів до теорії ігор дозволяє розв'язувати проблеми в машинобудуванні, економіці та військовій справі для пошуку оптимального плану виконання визначених задач у конкурентному середовищі. Для репрезентації скінченної гри використовують орієнтований граф, в якому позиції представлені вершинами, а ребра відображають можливі ходи.

**Мета** цієї роботи – здійснити аналіз практичного застосування теорії графів у розробці програмного забезпечення у разі подальшого обслуговування та підтримки програмних систем.

**Результати.** Найпершим, найочевиднішим та найширшим варіантом застосування графів є різноманітні структури даних. Насамперед ідеться

про сам граф як окрему структуру даних. За допомогою графу дані організуються таким чином, щоб відображати об'єкти разом з відповідними зв'язками між ними. Частіше за все, графи використовуються для ефективного зберігання даних в оперативній пам'яті, але існують також і спеціалізовані системи для зберігання великих об'ємів даних, представлених у вигляді графу.

Одним з типів таких систем є ієрархічні бази даних, такі як, наприклад, "Neo4j" чи "Amazon Neptune", які орієнтовані на збереження об'єктів разом з їх властивостями у вигляді вершин графу та зв'язків між ними, представлених ребрами. Графові бази даних підтримують спеціальні мови запитів, що дозволяють оперувати даними в графі, в тому числі виконувати загальновідомі алгоритми над графами, наприклад, пошук найкоротшого шляху тощо.

Одним з яскравих прикладів моделей даних, які найзручніше зберігати саме в графовій базі даних, є модель соціальної мережі, наприклад, "Facebook", оскільки саме зв'язки людей з іншими людьми, спільнотами, їх вподобання відіграють ключову роль в ефективному функціонуванні соціальної мережі.

Ще однією дуже поширеною структурою даних, яка за своєю суттю також являє собою граф, є дерево. На практиці використовують досить багато різних видів дерев, відштовхуючись від конкретних вимог. Серед найпоширеніших структур даних можна відзначити пошукові дерева та їх варіації, пріоритетні дерева, префіксні дерева та інші. Деревоподібні структури даних переважно використовуються для зберігання ієрархічних даних та для оптимізації швидкодії у разі імплементації різноманітних алгоритмів.

Найпоширенішими прикладами застосування дерев є файлові системи, ієрархії класів у більшості об'єктно-орієнтованих мов програмування, абстрактні синтаксичні дерева, об'єктні моделі XML та HTML документів тощо. На рисунку 1 зображено приклад бінарного пошукового дерева, де в кожному лівому піддереві містяться тільки вершини з меншим ключем, ніж у предка, а в правому – тільки з більшим ключем.

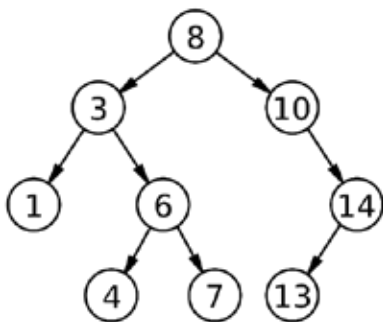


Рис. 1. Приклад бінарного пошукового дерева

Однією з найширших сфер використання графів є саме моделювання об'єктів реального світу для їх подальшого аналізу. Графи, на відміну від списків чи таблиць, є дуже зручною формою візуалізації об'єктів та їх зв'язків, що може зумовлювати таку високу популярність їх використання в моделюванні.

Найпершим прикладом можна навести представлення скінченного автомату у вигляді орієнтованого графу, де вершинами графу відображаються різні стани скінченного автомату, а ребрами – переходи з одного стану в інший. Оскільки скінченні автомати дуже широко використовуються в розробці програмного забезпечення, візуалізація за допомогою графу допомагає швидше зрозуміти механізм роботи конкретного скінченного автомату та дозволяє без зайвих зусиль перевірити автомат на коректність станів та переходів. На рисунку 2 наведений приклад представлення скінченного автомату у вигляді графу.

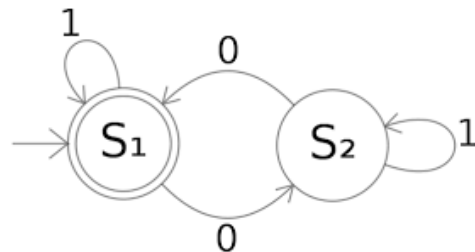


Рис. 2. Скінченний автомат у вигляді графу

Моделювання за допомогою графів застосовується не тільки під час розробки програмного забезпечення, але і на більш ранніх стадіях, як-от у разі аналізу функціональних вимог майбутньої програмної системи.

На етапі збору та аналізу функціональних вимог будують діаграму потоків даних, яка візуалізує процеси перетворення даних, сховища даних, зовнішніх стосовно системи сутності, та потоки даних між ними. Потоки даних подають у вигляді ребер графу, які сполучають інші типи елементів діаграми між собою, представлених вершинами графу [3, с. 27].

Абстрактний приклад діаграми потоків даних зображено на рисунку 3.

Проектування програмної системи також не обходиться без моделювання її структури і зазвичай це також моделюється у вигляді графу, оскільки програмне забезпечення середнього розміру та більше має досить складну структуру, яку дуже важко зобразити за допомогою простіших графічних форм.

На поточний момент одним з найпоширеніших способів візуалізації архітектури програмної системи є UML-діаграми, які поділяють на структурні, поведінкові та діаграми взаємодії, але нині

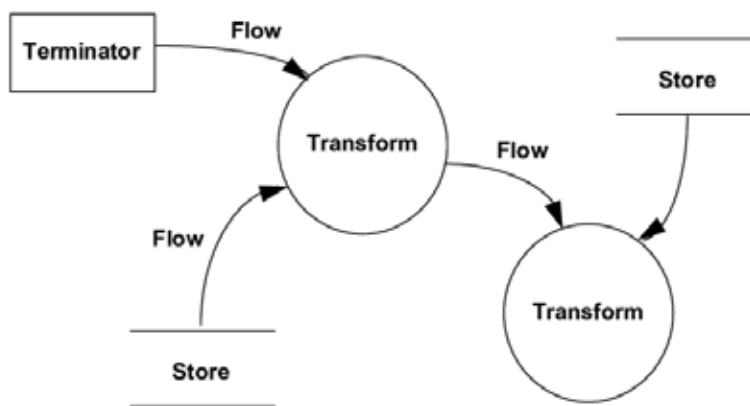


Рис. 3. Абстрактна діаграма потоків даних

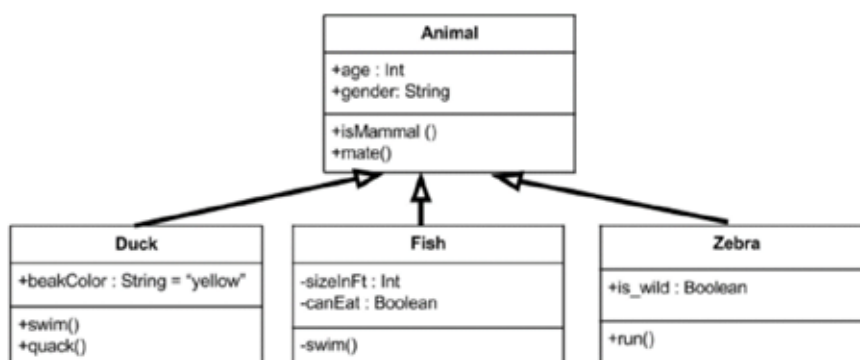


Рис. 4. UML-діаграма класів

набирає все більшої популярності «модель С4» для візуалізації архітектури програмного продукту [4].

Як і в більшості UML-діаграм, так і в «моделі С4» усі діаграми являють собою орієнтовані або неорієнтовані графи з додатковим інформаційним навантаженням, що означає, що вони також піддаються тим самим методам аналізу графів. На рисунку 4 зображений приклад UML-діаграми класів.

Не можна також не згадати, що графи широко використовуються для моделювання комп'ютерних мереж. Такий підхід також дуже стає в нагоді як у разі проектування розподіленого програмного комплексу, так і у разі його розгортання, особливо в мережі хмарних ресурсів, оскільки топологія внутрішньої мережі розподіленої системи зазвичай має дуже значний вплив на його швидкодію загалом.

У 1976 році Дж.П. Хейз запропонував підхід до моделювання відмово-стійких програмних систем. Для цього використовуються два графи. Перший – граф програмної системи, в якому вершинами представлені всі програмні та апаратні обчислювальні засоби, які можуть у будь-який момент вийти з ладу, а ребрами виступають комунікаційні зв'язки між ними. Другий – це граф алго-

ритму, чії вершини відображають обчислювальні засоби, необхідні для виконання такого алгоритму, а ребра – необхідні зв'язки між ними. Для того щоб система могла виконати такий алгоритм, граф алгоритму повинен бути ізоморфним до породженого підграфу системи. Видаляючи з початкового графу системи вершини та їх суміжні ребра, які відображають ті обчислювальні засоби, що можуть вийти з ладу одночасно, можна робити висновки чи такий алгоритм все ще може бути виконаний поточною програмною системою шляхом повторної перевірки умови ізоморфізму графу алгоритму до породженого підграфу програмної системи [5].

Ще одним корисним прикладом моделювання в розробці програмного забезпечення є створення так званого «вебграфу» – орієнтованого графу багатосторінкового вебдодатку, де вершинами графу виступають окремі вебсторінки, а ребрами – можливі переходи (посилання чи переадресації) з однієї сторінки на іншу. На рисунку 5 зображено приклад графу вебблогу.

Така модель даних корисна насамперед для ідентифікації недосяжних сторінок, але також широко використовується для пошуку довжин шляхів з початкової сторінки до цільової задля покращення користувацького досвіду.



Рис. 5. Граф переходів між сторінками вебблогу

Звичайно ж, першим та найочевиднішим застосуванням є завдання розфарбовування суміжних країн на політичній карті світу [3, с. 368], але це є далеко не єдиний приклад використання. Такий підхід також застосовується у разі розфарбовування дротів або доріжок на електронній схемі [3, с. 375], для виділення радіочастот під суміжні радіостанції, в яких перетинаються зони трансляції [3, с. 353; 6], а також для відокремленого зберігання хімічних сполук, які можуть спалахнути у разі їх змішування [3, с. 354]. На рисунку 6 зображено приклад графу накладання радіочастот.

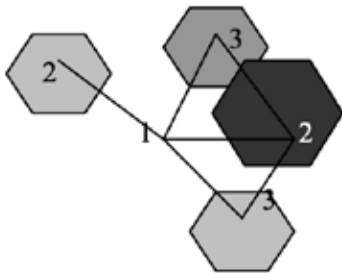


Рис. 6. Граф накладання радіочастот

Та у сфері інформаційних технологій також є досить прикладів застосування проблеми розфарбовування графів. Найбільш широкою сферою використання проблеми розфарбовування графів є вирішення конфліктів у разі складання розкладу екзаменів, планування виконання роботи тощо.

В операційних системах розфарбовування графу застосовують для планування роботи процесору, де різні задачі представлені вершинами графу, а ребра з'єднують ті з них, які не повинні виконуватись одночасно.

У деяких обчислювальних системах є обмежена кількість процесорних регістрів спеціального призначення, які дозволяють пришвидшити виконання деяких алгоритмічних операцій порівняно з використанням звичайної пам'яті. Програмні змінні, які використовуються найчастіше, можуть бути позначені як ті, що потрібно збе-

рігати в даних регістрах, проте, якщо кількість змінних буде перевищувати кількість доступних спеціальних регістрів, то час, витрачений на переміщення значень змінних зі звичайної пам'яті в регістри та назад, буде повністю нівелювати користь від приросту швидкодії під час використання цих регістрів.

Для вирішення такої проблеми всі змінні представляються у вигляді вершин графу, а ребрами з'єднуються ті з них, що можуть бути активними одночасно. В такому випадку хроматичне число графу процедури буде дорівнювати кількості необхідних спеціальних регістрів, що дає змогу уникати надмірного копіювання змінних [3, с. 354].

У матеріалах курсу лекцій з теорії графів Масчачусетського технологічного інституту 2010 року професор Том Лейтон наводив приклад застосування проблеми розфарбовування графів для оновлення програмного забезпечення на серверах компанії "Akamai" [7, с. 146].

Френк Томсон Лейтон – генеральний виконавчий директор та співзасновник американської компанії "Akamai Technologies", яка пропонує послуги мережі доставки контенту, кібербезпеки та розподілених обчислень. Платформа "Akamai Intelligent Edge Platform" є нині однією з найбільших платформ розподілених обчислень у світі [8].

Проблема, яка постала перед компанією, в той момент полягала в такому. У глобальній мережі компанії на той момент використовувались більше ніж 75000 серверів, на кожному з яких працювало їх власне програмне забезпечення різних видів, серед яких – і системи маршрутизації трафіку, і системи зберігання даних тощо. Поставлене завдання полягало в необхідності оновлення програмного забезпечення на всіх серверах компанії без зупинки постачання послуг кінцевим споживачам.

Для оновлення програмного забезпечення на одному сервері такий сервер потрібно було відключати від загальної мережі, а сам процес оновлення тривав близько однієї години. У разі неупорядкованого паралельного оновлення серверів є ризик відмови всієї системи, якщо всі екземпляри програм одного типу призначення будуть вимкнені одночасно. У разі оновлення усіх серверів по черзі процес повного оновлення тривав би близько 8,5 року.

Для вирішення цього завдання вся мережа серверів була представлена у вигляді неорієнтованого графу, де вершинами були сервери, а ребра з'єднували попарно сервери, на яких виконувались задачі однакового типу. Далі граф розфарбовувався в найменшу необхідну кількість кольорів, що гарантувало можливість одночасного оновлення всіх серверів одного кольору без ризику відмови всієї системи. Таким чином, у компа-



нії “Akamai” змогли оновити всі 75000 серверів усього за 8 «хвиль» оновлень.

Іншою категорією задач, які вимагають вирішення в комп’ютерних системах, є пошук шляхів у графах. Як уже згадувалось раніше, теорія графів дуже часто використовується для моделювання комп’ютерних мереж. Основною ціллю моделювання мережі є, звичайно, відображення її складників, структури та топології, але також така модель є дуже зручною для подальшого її аналізу, наприклад, для пошуку найкоротшого шляху для маршрутизації трафіку між двома вузлами чи для знаходження максимального потоку трафіку в поточній мережі.

Задача оптимізації потоків даних є актуальною не тільки для організації комп’ютерних мереж, але також і для їх подальшого використання. Для прикладу, топологія розміщення компонентів розподіленої програмної системи в різних мережах буде мати дуже суттєвий вплив на кінцеву швидкість такої системи загалом. У такому випадку аналізу підлягають як довжини шляхів комунікації між різними компонентами, так і інтенсивність та об’єм цих комунікацій, що своєю чергою вимагає аналізу потоків та пропускних здібностей каналів зв’язку між окремими віддаленими складниками програмної системи.

Ще одним наочним прикладом необхідності аналізу шляхів у графі є реалізація так званих «збирачів сміття» у деяких віртуальних машинах для виконання проміжного коду з автоматичними механізмами керування пам’яттю. Для прикладу, однією з таких віртуальних машин є платформа для розробки додатків “.NET” від компанії “Microsoft”. Тоді як віртуальна машина виявляє факт нестачі керованої пам’яті для подальшого виділення під нові дані, запускається процес «збирання сміття», який аналізує, які раніше виділені об’єкти більше не потрібні і можуть бути видалені для звільнення зайнятої ними області пам’яті. Для виконання поставленої задачі «збирач сміття» аналізує граф посилок між всіма наявними об’єктами, починаючи з кореневих об’єктів програми, та видаляє ті вершини-об’єкти, які є недосяжними, тобто до яких не існує шляху в графі від початкових вершин.

У сучасному світі існує дуже багато засобів, які допомагають швидше та краще розробляти програмне забезпечення більш високої якості. Зазвичай більшість таких засобів вбудовані в інтегровані середовища розробки програмного забезпечення або прив’язані до конкретної мови програмування або середовища виконання програм, але інколи трапляються і окремі програмні комплекси, що створені для тієї ж мети. Однією з основних функцій таких засобів є допомога в написанні коректного, зручного для читання та якісного коду.

Всі ці засоби та системи об’єднує одна спільна риса – найкращі з них оперують вихідним кодом, представленим у вигляді графів. Вони використовують як синтаксичне абстрактне дерево коду, так і семантичне, а також надбудовують ще і додаткові довільні графи для подальшого більш високорівневого аналізу.

Прикладами задач, які допомагають вирішити такі автоматизовані засоби, можна назвати пошук конструкцій коду, які ніколи не використовуються, посилання на неіснуючі змінні чи класи, знаходження конфліктів імен змінних у спільній області видимості, виявлення недосяжних інструкцій у тілі функції та загублених необхідних розгалужень коду та багато чого іншого [9].

Можливості для розширення аналізу вихідного коду на базі графів ще далеко не вичерпані і мають досить великий потенціал. Основним обмеженням можливостей для такого аналізу є те, яку інформацію можна включити в такий граф, а яку ні. Саме тому мови програмування зі статичною типізацією (наприклад, C#, F#, Java, TypeScript) набагато краще піддаються аналізу, ніж мови з динамічною типізацією (наприклад, JavaScript, Ruby, Python).

Задача пошуку найменшого вершинного покриття графу також знайшла своє застосування у сфері програмної інженерії, а саме в розробці систем кіберзахисту в реальному часі. У такому випадку алгоритм пошуку найменшого вершинного покриття графу використовується для симуляції поширення скритних вірусів-хробаків у великих комп’ютерних мережах та розробки оптимальної стратегії захисту мережі від вірусів у реальному часі. Проведена симуляція у великій інтернет-подібній віртуальній мережі показала, що топологія маршрутизації має дуже великий вплив на швидкість поширення шкідливого програмного забезпечення в мережі. Важливість вивчення механізму поширення вірусу-хробака полягає в необхідності перешкодження його поширенню в режимі реального часу. Головною ідеєю тут є пошук найменшого вершинного покриття графу, вершинами якого є сервери маршрутизації, а ребрами – зв’язки між серверами. У разі знаходження оптимального механізму поширення вірусу можна побудувати ефективну стратегію захисту мережі в реальному часі [10].

**Висновки.** Теорія графів здобула неабияку популярність у великій кількості сфер застосування завдяки своїй універсальності, в тому числі зручності моделювання та наочності візуалізації. Загалом, у вигляді графу можна представити довільну модель об’єктів реального світу та зв’язків між ними, що дозволяє застосовувати до нього будь-які відомі алгоритми та піддавати іншим видам подальшого аналізу.

Окрім використання теоретичних основ графів в інших галузях науки, теорія графів також знайшла широке застосування у вирішенні багатьох практичних завдань у великому спектрі життєдіяльності людини, як-то у хімії, соціології, логістиці, біології, економіці, техніці та ін. Так само і в розробці програмного забезпечення теорія графів посіла своє почесне місце. За її допомогою вирішуються задачі багатьох різних видів як у процесі розробки програм, так і для розвитку самої програмної інженерії.

У результаті проведеної роботи з аналізу можливостей практичного застосування теорії графів для розробки та обслуговування програмних систем було виявлено той факт, що на більшо-

сті етапів циклу розробки програмного забезпечення графи використовуються тільки для моделювання та візуалізації різних видів інформації, проте майже відсутній автоматизований алгоритмічний аналіз отриманих моделей. Це може свідчити про наявність перспективного напрямку для пошуку додаткових можливостей застосування графів у процесах розробки програмного забезпечення.

Беручи до уваги те, що деякі задачі, пов'язані з теорією графів, усе ще не мають ефективних алгоритмів для їх вирішення, знаходження таких алгоритмів може спричинити великий стрибок як у розвитку самої теорії графів, так і значно розширити сфери її застосування.

### ЛІТЕРАТУРА

1. K. Appel and W. Haken. Every Planar Map is Four Colorable. *Bull. Amer. Math. Soc.* 82, 1976. Pp. 711–712.
2. Narasingh Deo. Graph theory with applications to engineering and computer science, Prentice Hall of India, 1990.
3. Jonathan L. Gross, Jay Yellen. Graph Theory and Its Applications: 2nd edition, Chapman and Hall/CRC, 2005.
4. The C4 model for visualising software architecture. URL: <https://c4model.com>.
5. John P. Hayes. A graph Model for Fault Tolerant Computing Systems, IEEE, September 1976.
6. Perri Mehonon, Janne Riihijarvi, Marina Petrova. Automatic Channel allocation for small wireless area networks using graph coloring algorithm approach. IEEE, 2004.
7. Tom Leighton. Mathematics for Computer Science, MIT, 2010. URL: <https://ocw.mit.edu/courses/6-042j-mathematics-for-computer-science-fall-2010/pages/readings/>.
8. Nygren Erik, Sitaraman Ramesh K., Sun Jennifer. The Akamai Network: A Platform for High-Performance Internet Applications.
9. Understand the.NET Compiler Platform SDK model. URL: <https://docs.microsoft.com/en-us/dotnet/csharp/roslyn-sdk/compiler-api-model>.
10. Shariefuddin Pirzada and Ashay Dharwadker. Applications of graph theory. *Journal of the Korean Society for Industrial and applied Mathematics*, Volume 11, No. 4, 2007.

### REFERENCES

1. K. Appel and W. Haken. Every Planar Map is Four Colorable, *Bull. Amer. Math. Soc.* 82, 1976. Pp. 711–712.
2. Narasingh, Deo. Graph theory with applications to engineering and computer science, Prentice Hall of India, 1990
3. Jonathan L. Gross, Jay Yellen. Graph Theory and Its Applications: 2nd edition, Chapman and Hall/CRC, 2005.
4. The C4 model for visualising software architecture. Retrieved from: <https://c4model.com>.
5. John P. Hayes. A graph Model for Fault Tolerant Computing Systems, IEEE, September 1976.
6. Perri Mehonon, Janne Riihijarvi, Marina Petrova. Automatic Channel allocation for small wireless area networks using graph coloring algorithm approach. IEEE, 2004.
7. Tom Leighton. Mathematics for Computer Science, MIT, 2010. Retrieved from: <https://ocw.mit.edu/courses/6-042j-mathematics-for-computer-science-fall-2010/pages/readings/>.
8. Nygren, Erik, Sitaraman, Ramesh K., Sun, Jennifer. The Akamai Network: A Platform for High-Performance Internet Applications.
9. Understand the.NET Compiler Platform SDK model. Retrieved from: <https://docs.microsoft.com/en-us/dotnet/csharp/roslyn-sdk/compiler-api-model>.
10. Shariefuddin Pirzada and Ashay Dharwadker. Applications of graph theory. *Journal of the Korean Society for Industrial and applied Mathematics*, Volume 11, No. 4, 2007.

УДК 53.088.3 + 53.088.7  
DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2022-1-10>

## ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ АДАПТИВНОГО ШУМУ НА ЕФЕКТИВНІСТЬ ДИСКРЕТНОЇ БЕЗПОРОГОВОЇ ВЕЙВЛЕТ-ФІЛЬТРАЦІЇ МОДУЛЬОВАНИХ СИГНАЛІВ

**Онуфрієнко Д. М.**

*аспірант кафедри комп'ютерних та радіоелектронних систем  
контролю та діагностики*

*Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»*

*вул. Курпичева, 2, Харків, Україна*

*[orcid.org/0000-0002-1365-798X](https://orcid.org/0000-0002-1365-798X)*

*[OnufrienkoResearcher@gmail.com](mailto:OnufrienkoResearcher@gmail.com)*

**Тараненко Ю. К.**

*доктор технічних наук, професор*

*Приватне підприємство «Лікопак»*

*вул. Качалова, 1, Дніпро, Україна*

*[orcid.org/0000-0003-2209-2244](https://orcid.org/0000-0003-2209-2244)*

*[taranen@rambler.ru](mailto:taranen@rambler.ru)*

**Ключові слова:** модельна функція, безпороговий метод, дискретна вейвлет-фільтрація.

Для дослідження фільтрації модульованих сигналів використовувався спеціально згенерований модельний сигнал, який складається із затухаючих гармонік випадкової початкової частоти і фази з половинним перекриттям. За допомогою вікна hanning забезпечена плавність на кінцях згенерованого сигналу. Завдяки використанню евклідових норм векторів, сформованих із вейвлет-коефіцієнтів апроксимації та деталізації для всіх рівнів декомпозиції модельного сигналу із шумом і без, отримана математична модель, що враховує вплив змін потужності шуму на ефективність фільтрації. Дослідження отриманої математичної моделі довело наявність двох різних розподілів за рівнями декомпозиції відносної похибки від впливу шуму для коефіцієнтів апроксимації та деталізації залежно від кількості гармонік у модельному сигналі. Для запропонованого модельного сигналу незалежно від початкових частот гармонік і коефіцієнта затухання зміна відносної похибки, визначеної через евклідові норми векторів для коефіцієнтів апроксимації та деталізації, відбувається в разі перевищення кількості гармонік більше двадцяти семи. Важливим результатом такого аналізу є те, що він дозволяє виявити такі рівні розкладання, на яких відносна похибка обох коефіцієнтів як деталізації, так і апроксимації буде мінімальна. Це підтверджує наявність мінімуму середньоквадратичного показника MSE ефективності безпорогової вейвлет-фільтрації, який залишається на другому рівні декомпозиції для згенерованого модельного сигналу в разі зміни потужності шуму. Окрім того, значення похибки додатково зменшується вибором дискретного вейвлету. Проведено порівняння безпорогового методу дискретної вейвлет-фільтрації з методами загального й універсального порогів для запропонованої модельної функції в умовах зміни потужності шуму. Безумовною перевагою методу без порогу є мінімальне застосування обчислювальних ресурсів. Наведена методика вейвлет-фільтрації може бути використана для інших функцій сигналів. Запропонована модельна функція наведена як узагальнювальний приклад.

## INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF ADAPTIVE NOISE ON THE EFFICIENCY OF DISCRETE THRESHOLDFUL WAVELET FILTRATION OF MODULATED SIGNALS

**Onufrienko D. M.**

*Postgraduate Student at the Department of Computer and Electronic  
Control and Diagnostic Systems  
National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute”  
Kirpycheva str., 2, Kharkiv, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-1365-798X  
OnufrienkoResearcher@gmail.com*

**Taranenko Yu. K.**

*Doctor of Technical Sciences, Professor  
Private Enterprise “Likopak”  
Kachalova str., 1, Dnipto, Ukraine  
orcid.org/0000-0003-2209-2244  
taranen@rambler.ru*

**Key words:** *Model function,  
non-threshold method, discrete  
wavelet filtering.*

To study the filtering of modular signals, a specially generated model signal was used, which consists of attenuating harmonics of a random initial frequency and a phase with half overlap. With the help of the window ganning provides smoothness at the end of the generated signal. Due to the use of Euclidean norms of vectors formed from wavelet coefficients of approximation and detail for all levels of decomposition of the model signal with noise and without obtaining a mathematical model, the change of noise power for filtration efficiency is taken into account. The study of the obtained mathematical model proved the existence of two different levels of decomposition distributed error from the influence of noise for the coefficients of appropriation and detail depending on the number of harmonics in the signal model. For the proposed model signal is indeterminate from the initial frequencies and attenuation coefficients of changes in the error of the error determined through the Euclidean norms of vectors for the coefficients of approximation and detail occurs when the number of harmonics of twenty families is exceeded. An important result of this analysis is that it allows to identify such levels of decomposition at which the relative error of both coefficients of both detail and approximation will be minimal. This confirms the presence of a minimum average dramatic MSE of the threshold filtering efficiency in which remains powerful at the second level of decomposition for the generated model signal when the noise changes. In addition, this error value is further reduced by selecting a discrete wavelet. The non-threshold method of discrete filter wavelet is compared with the methods of general and universal thresholds for the proposed model function in the conditions of noise power change. The unconditional advantage of the method without a threshold is the minimal use of computing resources. The above wavelet filtering technique can be used for other signal functions. The proposed model function is given as a general example.

**Вступ.** У галузі розвитку та вдосконалення методів дискретної вейвлет-фільтрації дотепер були відомі тільки два алгоритми: VisuShrink [1], із загальним порогом обмеження, BayesShrink [2, 3], з універсальним порогом обмеження вейвлет-коєфіцієнтів деталізації для кожного рівня декомпозиції. Особливості цих алгоритмів – складне форму-

вання порогової функції та самого порогу залежно від багатьох факторів, а саме: характеру самого сигналу, закону розподілення шумових перешкод і обрання функції базового вейвлету. В Україні вперше було винайдено і досліджено безпороговий метод вейвлет-фільтрації [4], основною перевагою якого є простота реалізації та незалежність

як від форми сигналу, так і від характеру самого шуму. Порівняння похибок алгоритмів VisuShrink та BayesShrink і безпорогового методу наведено в роботі [5]. Метою роботи є дослідження безпорогового методу в частині залежності похибки фільтрації від зміни потужності шуму для сигналів із частотною та фазовою модуляцією, що здійснюється за випадковим принципом. Саме вирішенню зазначеного завдання присвячена ця публікація.

**Огляд літератури.** Публікації щодо DWT-фільтрації протягом останніх років умовно поділяються на дві групи. Перша стосується застосування відомих алгоритмів VisuShrink і BayesShrink для вирішення практичних завдань. Приклади типових завдань: керування приводами [6], пошук артефактів на електрокардіограмах [7; 8]. Друга група – це нове застосування відомих методів, наприклад аналіз ефективності вейвлет-пакетного перетворення, застосованого до конкретних ультразвукових сигналів виявлення [9]. Окремо в цій групі варто виділити публікацію [10]. У згаданій публікації замість окремих рішень пошуку загального або універсального порога обмеження коефіцієнтів деталізація (VisuShrink та BayesShrink) запропоновано комплексний підхід до підвищення ефективності DWT-фільтрації, який полягає в чисельному рішенні проблеми зменшення похибки за комплексним критерієм порогової функції, порога та базового вейвлету.

**Короткі теоретичні відомості, необхідні для подальшого викладення матеріалу публікації**

Сигнал з адитивним шумом гауса можна описати співвідношенням:

$$f_{\eta}(t_i) = f(t_i) + \eta, \quad (1)$$

де  $f(t_i)$  – функція сигналу;  $f_{\eta}(t_i)$  – функція сигналу із шумом;  $\eta$  – білий нормально розподілений шум.

Розкладання сигналу  $f_{\eta}(t_i)$  за всіма рівнями декомпозиції для коефіцієнтів апроксимації та деталізації визначається співвідношеннями [11]:

Для сигналів без впливу шуму:

$$\left. \begin{aligned} a_{j+j_0,k} &= \int_R f(t_i) \cdot \varphi_{j+j_0,k}(t) dt \\ d_{j+j_0,k} &= \int_R f(t_i) \cdot \psi_{j+j_0,k}(t) dt \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Для сигналів з адитивним доданим шумом згідно з (1):

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_{j+j_0,k} &= \int_R f_{\eta}(t_i) \cdot \varphi_{j+j_0,k}(t) dt \\ \bar{d}_{j+j_0,k} &= \int_R f_{\eta}(t_i) \cdot \psi_{j+j_0,k}(t) dt \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

де  $R$  – галузь визначення функції  $f(t_i), f_{\eta}(t_i)$ ;  $\bar{a}_{j+j_0,k}, \bar{d}_{j+j_0,k}, a_{j+j_0,k}, d_{j+j_0,k}$  – коефіцієнти апроксимації та деталізації під впливом шуму і без відповідно;  $\varphi_{j+j_0,k}(t), \psi_{j+j_0,k}(t)$  – «материн-

ський» і «батьківський» вейвлети відповідно;  $j_0, j, k$  – початковий, поточний і порядковий номер вейвлет-коефіцієнтів. Функція сигналу після його чищення від шуму:

$$\tilde{f}(t_i) = \sum_k \bar{a}_{j+j_0,k} \cdot \varphi_{j+j_0,k}(t) + \sum_{j=1}^J \sum_k F(\lambda_j) \cdot \bar{d}_{j+j_0,k} \cdot \psi_{j+j_0,k}(t), \quad (4)$$

де  $\tilde{f}(t_i)$  – функція сигналу очищеного від шуму;  $F(\lambda_j)$  – функція порогу  $\lambda_j$ ;  $\varphi_{j+j_0,k}(t), \psi_{j+j_0,k}(t), F(\lambda_j)$  – параметри дискретної вейвлет-фільтрації, які забезпечують мінімальну похибку фільтрації:

$$E = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (\tilde{f}(t_i) - f_{\eta}(t_i))^2, \quad (5)$$

де  $E$  – мінімальна середньоквадратична похибка фільтрації (MSE моделі).

**Математична модель дискретної вейвлет-фільтрації без порога з урахуванням відносних похибок вейвлет-коефіцієнтів від впливу зміни потужності шуму**

Для отримання математичної моделі вейвлет-фільтрації без порога досить змінити друге додавання у співвідношенні (4) на

$$\sum_{j_{opt}}^{j_{max}} \sum_k d_{j+j_0,k} \cdot \psi_{j+j_0,k}(t), \quad (6)$$

де  $j_{opt}$  – рівень декомпозиції, який забезпечує мінімальну MSE і до якого всі коефіцієнти декомпозиції замінюють нулями (тобто без використання порога, тому метод дістав назву «безпороговий»);  $j_{max}$  – максимально можливий рівень декомпозиції, який залежить від довжини сигналу й обраного вейвлету.

Для аналізу впливу шуму на ефективність фільтрації безпороговим методом у частотній галузі треба визначити похибки, які вносить шум у вейвлет-коефіцієнти, і знайти рівень декомпозиції, на якому ці похибки будуть мінімальні. За допомогою евклідових норм векторів для рядів (2), (3) отримаємо співвідношення для відносних похибок залежно від рівня декомпозиції:

$$\left. \begin{aligned} \delta_j^d &= \frac{\left\| \sum_{j_0}^J \sum_k \bar{d}_{j+j_0,k} - \sum_{j_0}^J \sum_k d_{j+j_0,k} \right\|}{\left\| \sum_{j_0}^J \sum_k d_{j+j_0,k} \right\|} \\ \delta_j^a &= \frac{\left\| \sum_{j_0}^J \sum_k \bar{a}_{j+j_0,k} - \sum_{j_0}^J \sum_k a_{j+j_0,k} \right\|}{\left\| \sum_{j_0}^J \sum_k a_{j+j_0,k} \right\|} \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

де  $\delta_j^d, \delta_j^a$  – відносні похибки вейвлет-коефіцієнтів залежно від рівня  $j$  декомпозиції;  $\| \dots \|$  – позначення евклідових норм відповідних векторів.

### Генерація модельної функції для демонстрації методики фільтрації

Опускаємо деталі формування масивів випадкових частот  $\omega_i$  і фаз  $\varphi_i$  гармонік  $n$ , а також структуру функції *hanning*( $j$ ) для перекриття гармонік та забезпечення віконної версії вихідного сигналу із затуханням завдяки множнику  $e^{-\gamma t_j}$ . Запишемо модельну функцію в надто загальному вигляді:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \sum_j^k e^{-\gamma t_j} \cdot \cos(\omega_i t_j + \varphi_i) \cdot \text{hanning}(j). \quad (8)$$

Наведемо графіки функції (8) для двох значень кількості гармонік, за яких, як буде показано далі, змінюється характер розподілу похибок (7) за рівнями декомпозиції для різних потужностей гаусового шуму.

### Дослідження впливу потужності гаусового шуму на розподіл коефіцієнтів вейвлет-декомпозиції та похибку моделі в часовій галузі

За допомогою співвідношення (7), (8) побудуємо розподіли похибок коефіцієнтів, для кожного характеру розподілу наведемо похибку моделі MSE в часовій галузі згідно з (5). Для мінімізації MSE під розподіли рівня декомпозиції обирається вейвлет. Розподіл будемо спостерігати для модельної функції з 15 гармонік (рис. 1)

Наведені графіки показують, що коефіцієнти деталізації приймають близькі до нуля значення похибки незалежно від потужності шуму на дру-

гому, третьому та четвертому рівнях декомпозиції ще до фільтрації. Коефіцієнти деталізації демонструють різке зростання похибки в сильній залежності від потужності шуму. Після фільтрації без порога ми маємо мінімальну похибку на другому рівні декомпозиції та зростання MSEopt у разі обрання різних вейвлетів більш ніж на порядок.

Далі спостерігаємо розподіл для модельної функції:

Отримаємо інший характер розподілу вейвлет-похибки та вейвлет-коефіцієнтів деталізації до фільтрації, а саме: маємо їх значення, близьке до нуля, починаючи із другого рівня декомпозиції, незалежно від потужності шуму. Однак порівняння графіків розподілу MSE моделі безпорогового метода фільтрації, наведених на рис. 4 та рис. 7, дозволяє нам дійти висновку, що саме на другому рівні декомпозиції спостерігається мінімальна похибка, розподіл якої за потужністю шуму однаковий.

Для остаточного висновку щодо ефективності безпорогового методу фільтрації на прикладі запропонованої модельної функції проведемо порівняльний аналіз наявних методів із загальним і універсальним порогом обмеження коефіцієнтів деталізації.

**Висновки.** Отримана математична модель, яка дозволяє дослідити вплив потужності адитивного гаусового шуму на відносні похибки коефіцієнтів апроксимації та деталізації на кожному рівні

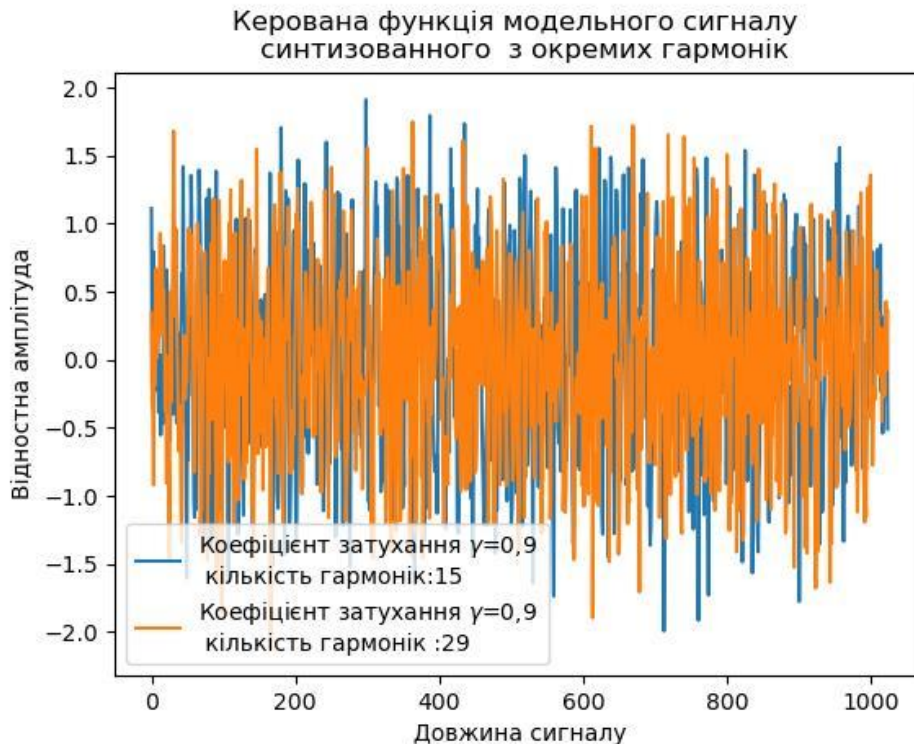


Рис. 1

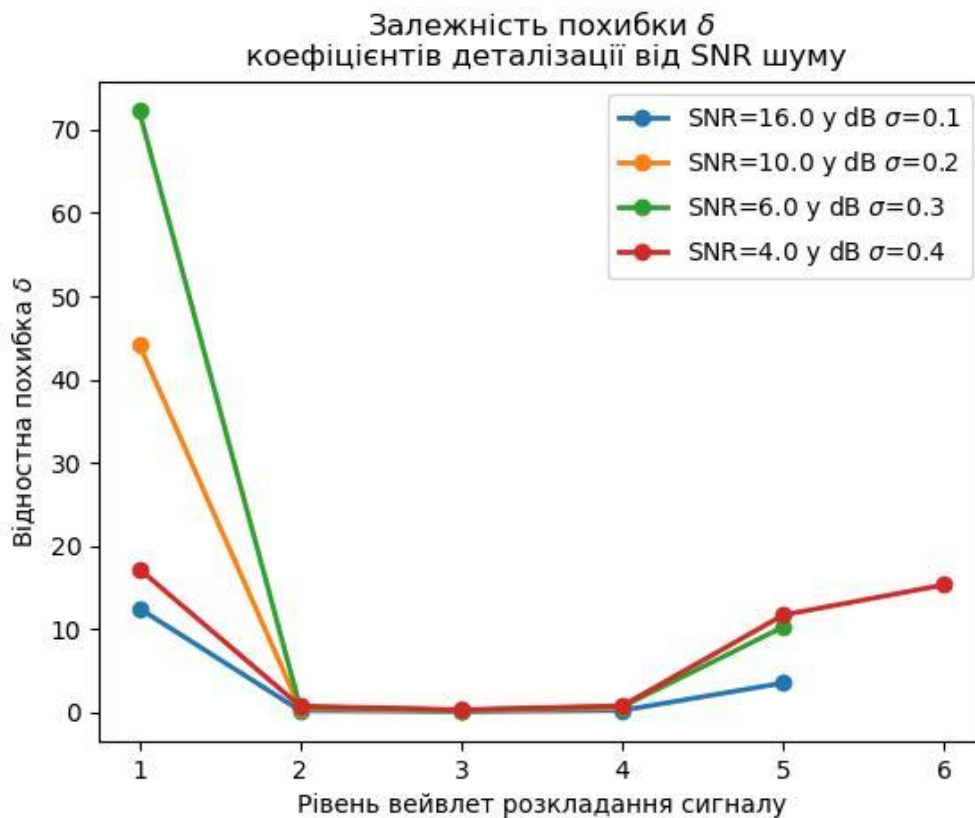


Рис. 2

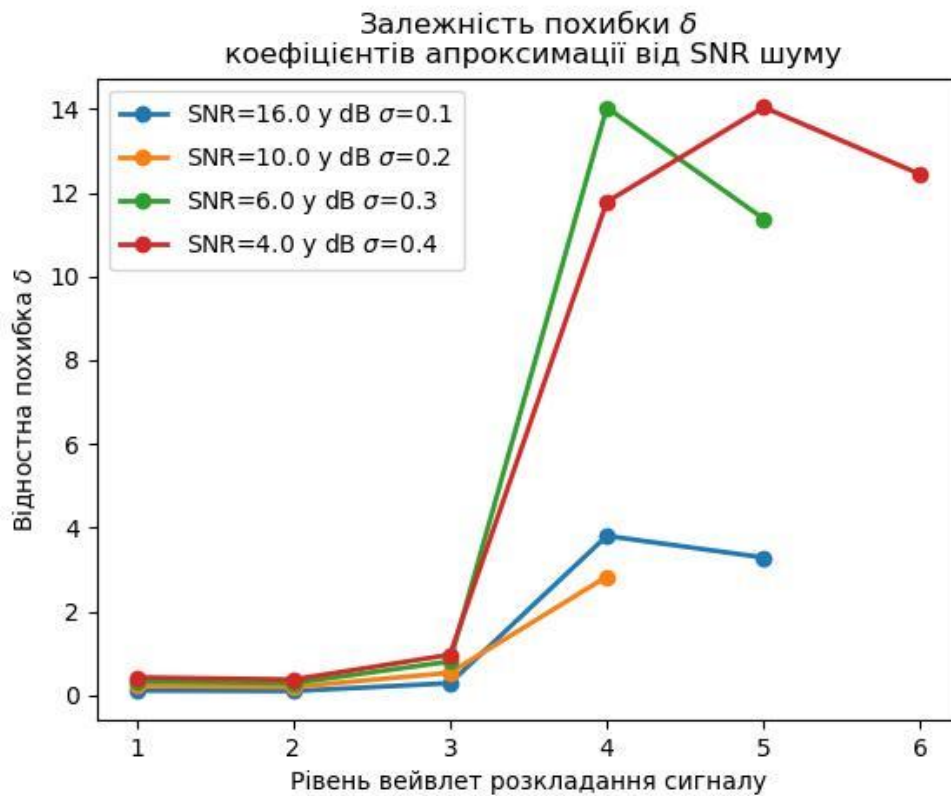


Рис. 3

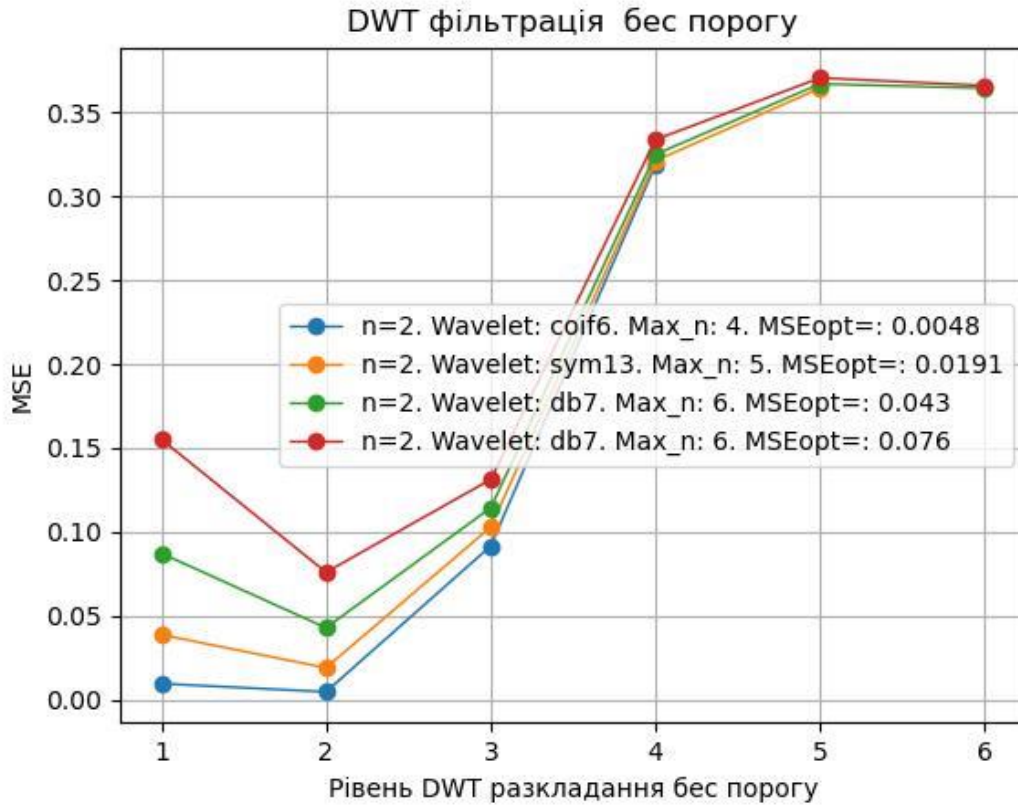


Рис. 4

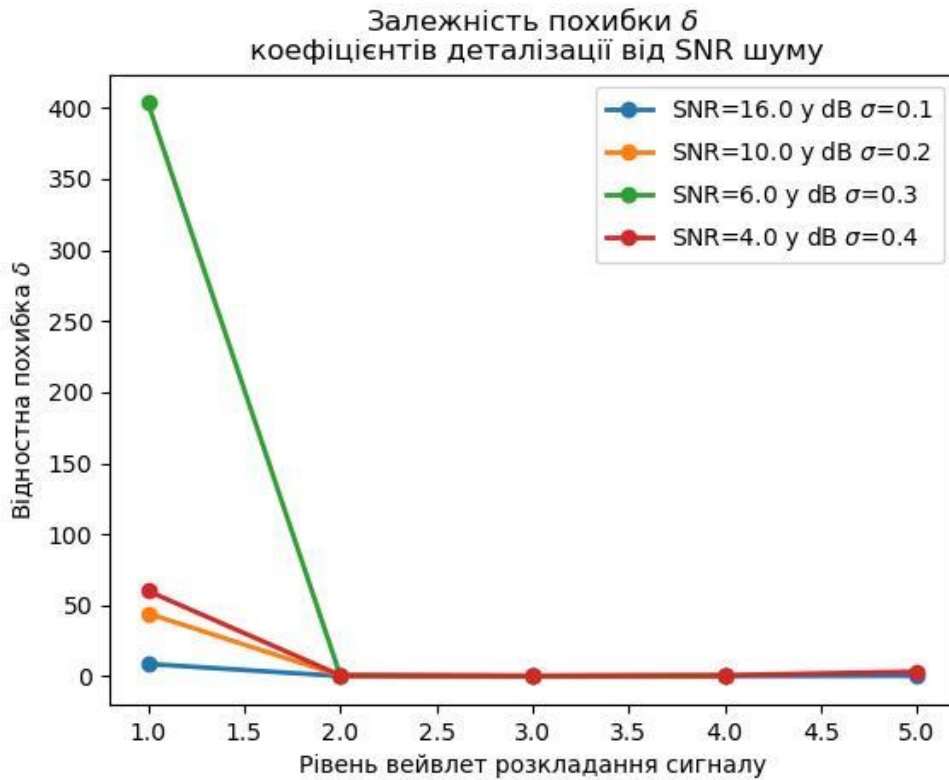


Рис. 5



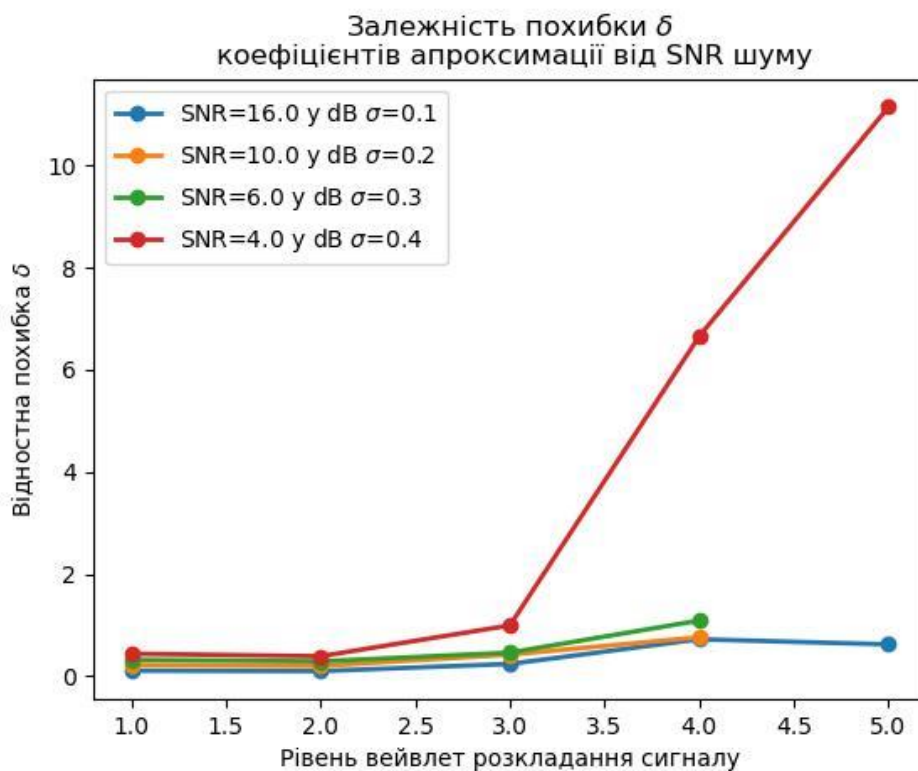


Рис. 6

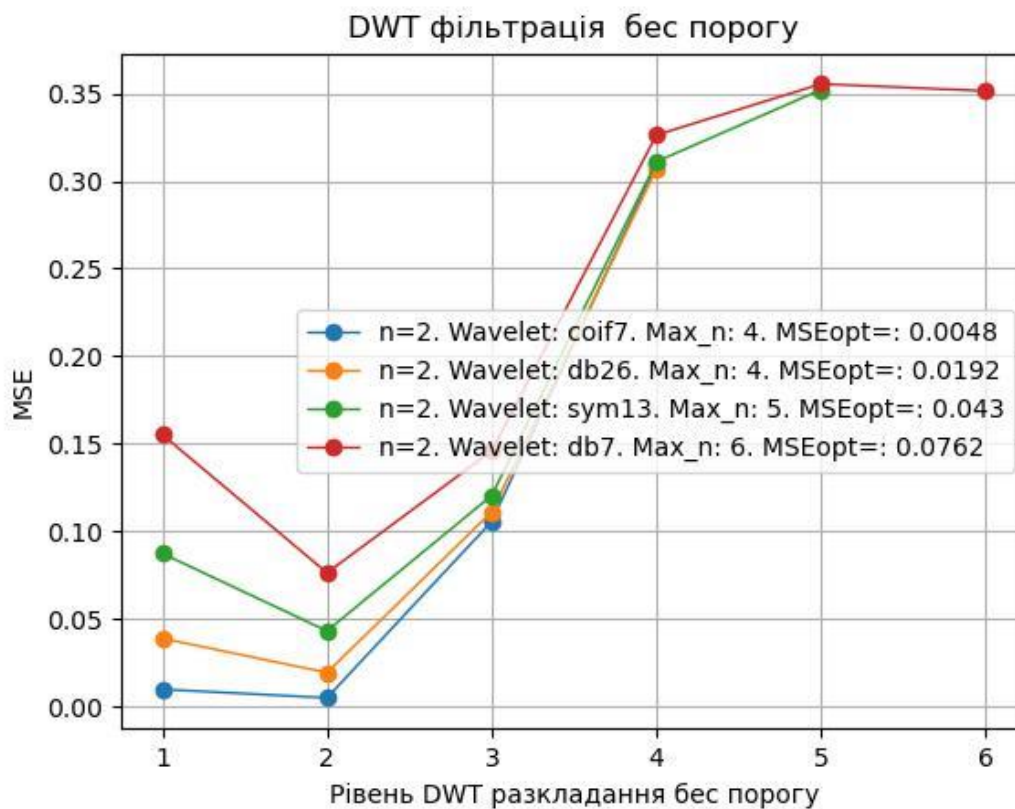


Рис. 7

## Порівняльний аналіз впливу шуму за методами фільтрації

Метод вейвлет-фільтрації із загальним порогом. Час виконання програми – 45,3 с					
$\sigma_i$	Вейвлет	$F(\lambda_i)$	$\lambda$	$MSE_i$	$MSE_4 - MSE_1$
0,1	db35	garotte	0,2	0,0059	0,0702
0,2	sym13	garotte	0,3	0,0204	
0,3	sym13	garotte	0,4	0,0451	
0,4	sym13	garotte	0,6	0,0761	
Метод вейвлет фільтрації з універсальним порогом. Час виконання програми 2,9 с.					
0,1	coif7	garotte	–	0,0048	0,0714
0,2	db26	garotte	–	0,0192	
0,3	sym13	garotte	–	0,0430	
0,4	db7	garotte	–	0,0762	
Метод вейвлет фільтрації без порогу. Час виконання програми 0,4 с.					
$\sigma_i$	Вейвлет	$j_{opt}$	$J_{max}$	$MSE_i$	$MSE_4 - MSE_1$
0,1	coif6	2	4	0,0048	0,0713
0,2	db34	2	3	0,0191	
0,3	sym10	2	5	0,0429	
0,4	db7	2	6	0,0761	

декомпозиції та визначити рівень декомпозиції, на якому похибка MSE безпорогового методу фільтрації буде мінімальною для заданої потужності шуму. Для аналізу роботи математичної моделі згенерована спеціальна модельна функція, яка дозволила дослідити вплив зміни розподілу похибок коефіцієнтів на ефективність фільтрації. Чисельним експериментом доведено, що вказана

зміна не впливає на MSE фільтрації. Проведено порівняльний аналіз методів вейвлет-фільтрації. З'ясовано, що показники MSE збігаються для всіх наведених методів саме завдяки обранню вейвлету. Але метод без порога потребує значно менше обчислювальних ресурсів, що є його суттєвою перевагою, особливо в разі використання в мобільних пристроях.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Donoho D.L., Johnstone I.M. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *Proceedings in Biometrika*. 1994. Vol. 81. № 3. P. 425–455.
2. The scikit-image contributors. scikit-image: image processing in Python / S. van der Walt et al. *PeerJ* 2: e453. 2014. DOI: 10.7717/peerj.453.
3. Feng L., Lin L. Comparative Analysis of Image Denoising Methods Based on Wavelet Transform and Threshold Functions. *IJE Transactions B: Applications*. 2017. Vol. 30. № 2. P. 199–206.
4. Вейвлет-фільтрація безпороговим методом на прикладі моделі функції DOPPLER / Ю.К. Тараненко та ін. *Вісник вищих навчальних закладів. Радіоелектроніка*. 2021. Вип. 64. № 7. С. 438–448. DOI: 10.20535/S0021347021070049.
5. Тараненко Ю.К. Методи дискретної вейвлет-фільтрації измерительних сигналів: алгоритм вибору методу. *Измерительная техника*. 2021. № 10. DOI: 10.1007/s11018-022-02007-6
6. Detection of Induction Motor Improper Bearing Lubrication by Discrete Wavelet Transforms (DWT) Decomposition. *Instrumentation* / B. Belkacemi et al. *Mesure Métrologie*. 2020. Vol. 19. № 5. P. 347–354. DOI: 10.18280/i2m.190504.
7. Automatic ECG Artifact Removal Techniques by Detecting Influential Independent Components / S.K. Goh et al. *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computational Intelligence*. 2017. Vol. 1. № 4. P. 270–279. DOI: 10.1109/TETCI.2017.2690913.
8. Алгоритм анализа форм кардиоциклов ЭКГ с использованием технологий машинного обучения / А.К. Лагирвандзе и др. *Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе*. 2019. № 4. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/algoritm-analiza-form-kardiotsiklov-ekg-s-ispolzovaniem-tehnologiy-mashinnogo-obucheniya>.
9. Performance analysis of a wavelet packet transform applied to concrete ultrasonic detection signals / T. Hu et al. *Journal of Physics: Conference. Series 1894 012062 IOP*. 2021. DOI: 10.1088/1742-6596/1894/1/012062.

10. Тараненко Ю.К. Эффективность использования вейвлет-преобразований при фильтрации шумов в сигналах измерительных преобразователей. *Измерительная техника*. 2021. № 2. С. 16–21. DOI: 10.32446/0368-1025it.2021-2-16-21.

#### REFERENCES

1. Donoho, D.L., and Johnstone, I.M. (1994). Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *Proceedings in Biometrika*. Vol. 81, № 3, pp. 425–455.
2. van der Walt S., Schönberger J.L., Nunez-Iglesias J., Boulogne F., Warner J.D., Yager N., Gouillart E., Yu T. (2014). The scikit-image contributors. *scikit-image: image processing in Python*. *PeerJ* 2: e453. URL: <https://doi.org/10.7717/peerj.453>.
3. Feng, L., and Lin, L. (2017). “Comparative Analysis of Image Denoising Methods Based on Wavelet Transform and Threshold Functions”, *IJE Transactions B: Applications*, Vol. 30, № 2, pp. 199–206.
4. Taranenko Yu.K., Lopatin V.V., Oleinik O.Yu. (2021). Wavelet filtratsia bespogorovym metodom na primere modelnoi funktsii DOPPLER. *New of higher education institutions. Radio electronics*. Vol. 64, № 7, pp. 438–448. URL: <https://doi.org/10.20535/S0021347021070049>.
5. Taranenko Yu.K. (2021). Metody diskretnoi wavelet-filtratsii izmeritelnykh signalov: algoritm vybora metoda. *Journal “Computer engineering”*. № 10. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s11018-022-02007-6>.
6. Belkacemi B., Saad S., Ghemari Z., Zaamouche F., Khazzane A. (2020). Detection of Induction Motor Improper Bearing Lubrication by Discrete Wavelet Transforms (DWT) Decomposition. *Instrumentation. Mesure Métrologie*, Vol. 19, № 5, pp. 347–354. URL: <https://doi.org/10.18280/i2m.190504>.
7. Goh S.K., Abbass H., Tan K.C. (2017). Automatic ECG Artifact Removal Techniques by Detecting Influential Independent Components. *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computational Intelligence*. Vol. 1, № 4, pp. 270–279. URL: <https://doi.org/10.1109/TETCI.2017.2690913>.
8. Lagirvandze A.K. (2019). Algoritm analiza form kardiotsiklov EKG s ispolzovaniem tekhnologii mashynnogo obucheniya / A.K. Lagirvandze, A.N. Kalinitchenko, T.V. Morgunova. *Models, systems, networks in economics, technology, nature, and society*. Vol. 4, № 32, pp. 75–84. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/algoritm-analiza-form-kardiotsiklov-ekg-s-ispolzovaniem-tehnologiy-mashinnogo-obucheniya>.
9. Hu T., Zhao J., Yan S., Zhang W. (2021). Performance analysis of a wavelet packet transform applied to concrete ultrasonic detection signals. *Journal of Physics: Conference Series* 1894 012062 IOP. URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1894/1/012062>.
10. Taranenko, Y.K. (2021). Efficiency of Using Wavelet Transforms for Filtering Noise in the Signals of Measuring Transducers. *Meas Tech* 64, pp. 94–99. URL: <https://doi.org/10.1007/s11018-021-01902-8>.

## РОЗДІЛ III. КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ

UDC 339.186

DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2022-1-11>

### DECISION-MAKING BY THE GROUP OF EXPERTS REGARDING THE EVALUATION OF PARTICIPANTS OF STATE TENDERS

**Bondarenko V. E.**

*Doctor of Technical Sciences,  
Professor at the Department of Computer Sciences  
National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine  
Heroiv Oborony str., 15, Kyiv, Ukraine  
[orcid.org/0000-0001-5591-1504](https://orcid.org/0000-0001-5591-1504)  
[victorbondarenko@ukr.net](mailto:victorbondarenko@ukr.net)*

**Karanfilov M. S.**

*Senior Lecturer at the Department of Information Systems in Economics  
Kyiv National Economic University  
Peremogy ave., 54/1, Kyiv, Ukraine  
[orcid.org/0000-0002-2084-0571](https://orcid.org/0000-0002-2084-0571)  
[123kms123@gmail.com](mailto:123kms123@gmail.com)*

**Key words:** *decision-making,  
decision support systems,  
government procurement,  
Purchase Tender, supplier.*

The article is devoted to the development of a decision support system in a Purchase Tender. Such the system allows an institution that announced a Purchase Tender to estimate suppliers that have an interest in supply and can take part in such tender offering different conditions of purchase. The main method that is used to build a decision support system was chosen as the method of the analytic hierarchy process that was developed by T.L. Saaty based on construction pairwise comparisons matrices of suppliers and their features. These matrices are constructed by experts and they need for coherent often, because expert' assessment of one pair elements of a matrix can be controversial sometimes to assessment of second pair elements of such matrix. Such controversies are connected with difficulties for expert, which can be in process of complex relations estimation. This method is modified in the direction of building coherent matrices of pairwise comparisons. It presents an approach to assessing the consistency of pairwise comparisons matrices based on the analysis of the transitivity of the graph that is constructed with the help of the matrix of pairwise comparisons.

The pairwise comparisons matrix is seen as a adjacencies matrix of a graph. Besides, the paper proposes an approach to the evaluation of pairwise comparisons of suppliers and their features with the help of a group of experts that helped make the evaluation more accurate. The estimate of elements of pairwise comparisons matrix is calculated as a weighted average of all experts' assessments with the coefficient of confidence. The coefficient of confidence is change for every expert. This change is connected with the correctness of experts' estimation in previous evaluations.

Based on the developed modification of the analytic hierarchy process it built a software system for decision support, which is implemented in the C++ language. One of the areas of the system application is the analysis of decision-making problems in the field of public procurement to assess the companies-bidders for the construction of industrial facilities.

## УХВАЛЕННЯ РІШЕНЬ ГРУПОЮ ЕКСПЕРТІВ ЩОДО ОЦІНКИ УЧАСНИКІВ ДЕРЖАВНИХ ТЕНДЕРІВ

**Бондаренко В. Є.**

*доктор технічних наук,  
професор кафедри комп'ютерних наук  
Національний університет біоресурсів і природокористування України  
вул. Героїв Оборони, 15, Київ, Україна  
orcid.org/0000-0001-5591-1504  
victorbondarenko@ukr.net*

**Каранфілов М. С.**

*старший викладач кафедри інформаційних систем в економіці  
Київський національний економічний університет  
просп. Перемоги, 54/1, Київ, Україна  
orcid.org/0000-0002-2084-0571  
123kms123@gmail.com*

**Ключові слова:** *ухвалення рішень, системи підтримки ухвалення рішень, державні закупівлі, тендер на закупівлю, постачальник.*

Стаття присвячена розробленню системи підтримки ухвалення рішень у тендері на закупівлю. Така система дозволяє установі, яка оголосила тендер на закупівлю, оцінити постачальників, які зацікавлені в постачанні та можуть взяти участь у такому тендері, пропонуючи різні умови закупівлі. Основним методом, який використовується для побудови системи підтримки ухвалення рішень, обрано метод аналізу ієрархій, розроблений Т.Л. Сааті на основі побудови матриць попарного порівняння постачальників і їхніх характеристик. Ці матриці будуються експертами, і вони часто потребують узгодженості, оскільки експертна оцінка однієї пари елементів матриці іноді може суперечити оцінці другої пари елементів такої матриці. Такі суперечності пов'язані із труднощами для експерта, які можуть виникнути у процесі оцінки складних відношень. Цей метод модифікований у напрямі побудови узгоджених матриць попарних порівнянь. Представлено підхід до оцінки узгодженості матриць попарних порівнянь на основі аналізу транзитивності графа, побудованого за допомогою матриці попарних порівнянь. Матриця попарного порівняння розглядається як матриця суміжності графа, де його вершини мітяться постачальниками (характеристиками), а дуги між вершинами задають кількісне значення переваги одного постачальника (характеристики) над іншим. Окрім того, у роботі запропоновано підхід до оцінки попарних порівнянь постачальників та їх характеристик за допомогою групи експертів, що допомогло зробити оцінку більш точною. Оцінка елементів матриці попарних порівнянь розраховується як середньозважене значення всіх оцінок експертів із коефіцієнтом довіри. Коефіцієнт довіри змінюється для кожного експерта. Ця зміна пов'язана із правильністю оцінки експертів у попередніх оцінках. На основі розробленої модифікації методу аналізу ієрархій побудовано програмну систему підтримки ухвалення рішень, яка реалізована мовою C++. Одним із напрямів застосування системи є аналіз проблем ухвалення рішень у сфері державних закупівель для оцінки компаній – учасників торгів на будівництво промислових об'єктів.

**1. INTRODUCTION**

A Purchase Tender (PT) is used to drive competition between several suppliers to get the best offer for a list of products or services. An institution announces a Purchase Tender and suppliers that have an interest in supply can take part in such tender offering different conditions of purchase, where each supplier is competing with one another. An institution can select the supplier that offers the best conditions.

We have many papers that describe Consumer Decision-Making [1–3]. There exist sites that can help in a purchase tender organization (www.tendertiger.com, www.indiatenders.com ). C. Csaba [4] describes general questions of decision making of public procurement. The group of authors [5] investigates the lowest cost for a project. It does not guarantee the terms of time and quality of a project. More particularly, the risk exposure during the tendering process is usually very high and the success of the project is strongly related to managing this risk.

In [6] authors research the algorithm of suppliers evaluation based on the weight coefficients. This algorithm does not evaluate the expert’s logic that can do contradictory assessments. Besides, the confidence to experts is constant and do not connect with their previous estimations quality. This can influence on the results quality.

Authors [7] describe tender price evaluation of construction project. As we know price is very important feature, but we have other features that we should take into account, for example, term of work finish.

Take into account the experience of existing papers, we will describe an analytical approach and an algorithm of the estimate the best supplier from a tender group on the base of a features’ set with the help of the concordance opinion an experts’ group.

Therefore, aim of this paper is to find approach, which allows us to find the best supplier from  $n$  suppliers on the base of  $m$  features. These features determine characteristics of suppliers. For example, goods price, service quality, the warranty term, et al.

In this paper, the selected subject area is the decision-making in the field of public procurement, which is regulated by the Law of Ukraine “On Public Procurement” [8]. As the trends of the Ukrainian government aimed at combating corruption, and the bulk of corruption in the state related to public procurement, it is advisable to automate the public procurement process, which minimizes interference of corrupt officials in this process. Therefore, the topic of work devoted to such automation is extremely relevant to Ukraine.

Therefore, the main purpose of this paper is to consider an approach to the construction of an expert system that can estimate Purchase Tender suppliers on the base of their features set.

Let there is a set of  $n$  suppliers  $D_1, D_2, \dots, D_n$  participants of a Purchase Tender. Let there is a set of  $m$  features  $k_1, k_2, \dots, k_m$  that characterized the suppliers. For example, price of goods, warranty service, location of the enterprise, fixed assets of the enterprise.

The main idea of an expert system construction is based on the analytic hierarchy process [9] that is modified in this paper.

According to the analytic hierarchy process, it is necessary for every feature to form a matrix of pairwise comparisons suppliers. Expert evaluation of  $n$  suppliers on the base feature  $k_i$  is formed into a matrix of the form (Table 1).

Table 1

**Matrix of pairwise comparisons of suppliers**

$k_i$	$D_1$	$D_2$	...	$D_n$
$D_1$	1	$a_{12}$		
$D_2$	$a_{21}$	1		
...			1	
$D_n$	$a_{n1}$			1

The cells  $a_{ij}$  of the matrix include the estimates of experts which mean how many times more preferable from the point of view of feature  $k_i$  we can select the supplier  $D_j$ , which marks the row of the matrix than the supplier  $D_i$ , which marks the column of the matrix. From this definition, it can be seen that the main diagonal of the matrix has values 1.

Thus, if  $D_i = pD_j$ , i.e. the supplier  $D_i$  occurs  $p$  times more preferable than the supplier  $D_j$ , then we have  $D_j = 1/p D_i$ .

That is, if the estimate  $a_{ij} = p$ , then  $a_{ji} = 1/p$  and  $a_{ii} = 1$ .

Similar to the supplier matrices, experts build a matrix of pairwise comparisons of features (Table 2), where each row and column of the matrix is marked by the features  $k_1, k_2, \dots, k_m$  that characterize suppliers.

Table 2

**Matrix of pairwise comparisons of features**

	$k_1$	$k_2$	...	$k_m$
$k_1$	1	$a_{12}$		
...		1		
$k_m$	$a_{m1}$			1

For the matrix of features, as for the matrix of suppliers, there are relations:  $a_{ij} = p$ , then  $a_{ji} = 1/p$ , and  $a_{ii} = 1$ .

Expert evaluations of  $a_{ij}$  are recorded in the cells of the matrix, which means how many times is more preferable for a tender announces institution the feature  $k_i$ , which marks the row of the matrix than the feature  $k_j$ , which marks the column of the matrix.

**2. Expert group evaluation of pairwise comparison matrices of suppliers and features**

To improve the construction of suppliers and features matrices, it is advisable to use an expert team for this comparison [10]. The method of such use is developed by the author and it is given below.

The evaluation of the  $i$ -th supplier (feature) relative to the  $j$ -th supplier (feature)  $a_{ij}$  of pairwise comparisons is performed by a group of  $m$  experts according to the algorithm below with the possible use of  $T$  evaluation steps to improve its quality.

The algorithm 1.

1. The estimate  $a_{ij}$  is calculated as a weighted average by the following formula (1)

$$a_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^m \rho_k S_{ij}^k}{\sum_{k=1}^m \rho_k}, \tag{1}$$

where  $\rho_k$  is the coefficient of confidence to the  $k$ -th expert (in the first stage of evaluation, the coefficients of confidence of all experts are the same and equal to 1),  $S^{kij}$  is the estimate of the  $i$ -th supplier (feature) relative to the  $j$ -th supplier (feature) determined by the  $k$ -th expert,  $m$  is the number of experts. The indicators  $S^{kij}$  are estimated by each expert based on the scale of preference, which values are determined in the range from 1 to 9.

2. The coefficient of confidence to the  $k$ -th expert is adjusted according to the following formula (2):

$$\hat{A}_k = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T A_k^t, \tag{2}$$

where  $T$  is the number of evaluation stages,  $\rho_k^t$  is the coefficient of confidence to the  $k$ -th expert at the  $t$ -th stage of evaluation (3):

$$\hat{A}_k = \exp\left(-\frac{(G_{ij} - S_{ij}^k)^2}{2\hat{A}_k}\right), \tag{3}$$

where  $G_{ij}$  is a posteriori evaluation of the  $i$ -th supplier (feature) relative to the  $j$ -th supplier (feature) (that is, the estimate, which is determined in the process of checking the matrices of suppliers and features for inconsistency),  $\sigma_k$  is forgetting factor of the  $k$ -th expert.

3. Checking the consistency of the matrix  $a_{ij}$  and its correction by experts. As a result, we get a new matrix  $a_{ij}^{new}$ .

4. Paragraphs 1–3 will be repeated until the change in estimates, matrices of suppliers (features) due to the inconsistency check is less than the specified value  $\varepsilon$  (4).

$$\sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^B |a_{ij}^{new} - a_{ij}|^2 < \mu \tag{4}$$

**3. harmonization of suppliers and features matrices**

In the process of constructing the matrices of the features and suppliers, they must be coordinated, that

is, the transitivity given by the matrix of relations must be performed.

Transitivity allows us to test the logic of the expert’s thinking. If the expert considers that the factor  $A$  (supplier or feature) exceeds the factor  $B$ , and the factor  $B$ , in turn, exceeds the factor  $C$ , then by a pairwise comparison the factor  $A$  must exceed the factor  $C$ , that is, the inequality  $A > B > C$  must be satisfied, where the symbol “>” means outperforms.

In addition, numerical estimates of the transitivity of relationships must be performed. For example, if factor  $A$  exceeds factor  $B$  2 times, and factor  $B$ , in turn, exceeds factor  $C$  3 times, then factor  $A$  must exceed factor  $C$  in  $m = 2 \times 3 = 6$  times.

Lack of consistency can be a serious limiting factor for using the method.

To study the transitivity of relations in the matrices of features and suppliers, the paper proposes to use oriented graphs.

One of the first questions that arise when studying graphs is the question of the existence of paths between pairs of vertices. The answer to the question is the above ratio of reach at the vertices of the graph  $G = (V, E)$ , where  $V$  is the set of vertices, and  $E$  is the set of relations between the vertices of the graph.

The vertex  $w \in V$  is reachable from the vertex  $v \in V$  if  $v = w$  or  $G$  is the path from  $v$  to  $w$ . In other words, the reach ratio is a reflexive and transitive closure of the  $E$ .

To analyze the matrices of features and suppliers, we construct a graph using the matching matrix as the adjacency matrix of the graph, where the values of the element of the matrix will be interpreted as the weight of the edges of the graph.

Since the matrix of features and suppliers is constructed in such a way that,  $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$ , where  $a_{ij}$  is

an element of the matrix of features or suppliers, it is possible do not use the relations for which  $a_{ij} < 1$  for  $i \neq j$  and  $a_{ii} = 1$ .

The matrix is shown in Table 3 compares some features that characterize suppliers.

Using the matrix of Table 3 as the matrix of adjacencies of a graph, we construct a graph for the analysis of inconsistencies of a matrix of pairwise comparisons (Fig. 1). To simplify the image, branches with weights less or equal to 1 were not displayed on the graph.

From the analysis of the graph in Fig. 1, it can be seen that the pairwise comparisons matrix (Table 3) is inconsistent because the path 1–2–4 has a weight of 18, and the path 1–4 only 8. Path 1–3–2 has a weight of 15, and path 1–2 only 3. Path 1–3–4 has a weight of 45, and path 1–4 only 8.

Fig. 1b shows a graph based on a harmonized by experts matrix of pairwise comparisons of features. Such the harmonized pairwise comparisons matrix is given in Table 4.

Table 3

Matrix of pairwise comparisons of features that characterize suppliers

	Price of goods	Warranty service	Location of the enterprise	Fixed assets of the enterprise
Price of goods	1	3	5	8
Warranty service	1/3	1	1/3	6
Location of the enterprise	1/5	3	1	9
Fixed assets of the enterprise	1/8	1/6	1/9	1

Table 4

Matrix of pairwise comparisons of features of suppliers (after concordance)

	Price of goods	Warranty service	Location of the enterprise	Fixed assets of the enterprise
Price of goods	1	6	2	8
Warranty service	1/6	1	1/3	1,33
Location of the enterprise	1/2	3	1	4
Fixed assets of the enterprise	1/8	1/1,33	1/4	1

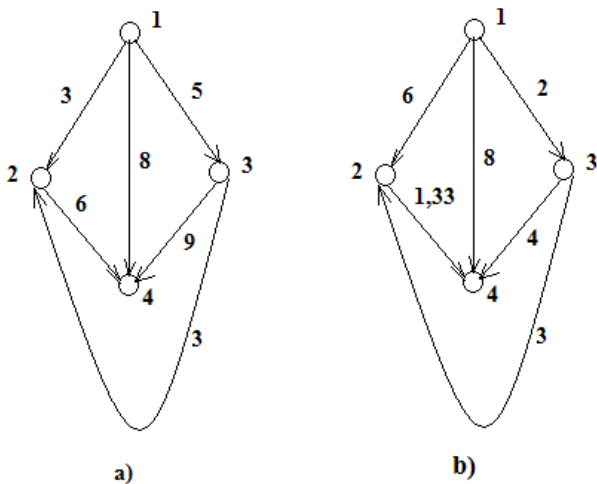


Fig. 1. Graph to analyze inconsistencies of the matrix of pairwise comparisons: a) the pairwise comparison matrix is inconsistent; b) the pairwise comparison matrix is consistent.

Matrix matching of pairwise comparisons is performed by an expert team in an iterative mode.

**4. Estimation of suppliers' priority**

To determine the priority suppliers and features of each supplier, it is necessary to determine the geometric average (5), which indicates the typical value of a set of numbers by using the product of their values. We will obtain a normalized vector of features if this typical value will be divided by the sum of typical values of all suppliers (6).

The vector  $\{c_r\}_{r=1}^n$  can be calculated by the following relation:

$$c_r = (W_{r1} \times W_{r2} \times \dots \times W_{rn})^{1/n}, \quad (5)$$

where  $W_{ij}$  are the elements of the pairwise comparisons matrix of features,  $m$  is the number of features.

The normalized vector  $\{X_l\}$  for features of suppliers is calculated by the formula (6):

$$X_l = \frac{c_l}{\sum_{i=1}^n c_i}, \quad l=1,2,\dots,n. \quad (6)$$

The local priority vector  $\{Y_l\}$  is calculated by the formula (7):

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} & \dots & W_{1n} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} & \dots & W_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{m1} & W_{m2} & W_{m3} & \dots & W_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad (7)$$

where the matrix  $|W_{ij}|$  is pairwise comparisons matrix of features.

The global priority vector  $\{P_l\}$  is calculated by the formula (8):

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{21} & Z_{31} & \dots & Z_{m1} \\ Z_{12} & Z_{22} & Z_{32} & \dots & Z_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{1m} & Z_{2m} & Z_{3m} & \dots & Z_{mm} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_m \end{pmatrix}, \quad (8)$$

where  $\{Z_{ij}\}$  is the local priority matrix for the pairwise comparisons matrices of suppliers (j) for every feature (i).



Consider a simple example. Let the experts created the pairwise comparisons matrix of suppliers' features in this form (Table 5).

Table 5  
Example of pairwise comparisons matrix of features

	$k_1$	$k_2$	$k_3$
$k_1$	1	1/6	1/9
$k_2$	6	1	1/9
$k_3$	9	9	1

Then the normalized vector  $\{X_j\}$  for features of suppliers is calculated by the formula (6) as follows (9).

$$c_1 = (a_{11} \times a_{12} \times a_{13})^{1/3} = (1 \times 1/6 \times 1/9)^{1/3} = 0,265.$$

$$c_2 = (a_{21} \times a_{22} \times a_{23})^{1/3} = (6 \times 1 \times 1/9)^{1/3} = 0,874.$$

$$c_3 = (a_{31} \times a_{32} \times a_{33})^{1/3} = (9 \times 9 \times 1)^{1/3} = 4,327.$$

$$S = c_1 + c_2 + c_3 = 0,265 + 0,874 + 4,327 = 5,46. \quad (9)$$

$$X_1 = c_1/s = 0,265/5,46 = 0,05.$$

$$X_2 = c_2/s = 0,874/5,46 = 0,15.$$

$$X_3 = c_3/s = 4,327/5,46 = 0,8.$$

We obtain the local priority vector  $\{Y_j\}$  by the formula (7).

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 1/9 \\ 6 & 1 & 1/9 \\ 9 & 9 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,05 \\ 0,15 \\ 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,16 \\ 0,54 \\ 2,6 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Let the matrices of pairwise comparisons of suppliers for each feature created by the experts in this form (Table 6).

We obtain (11, 12, 13) performing calculations similar to the calculations of the features.

For feature  $k_1$ :

$$c_1 = (a_{11} \times a_{12})^{1/2} = (1 \times 1/2)^{1/2} = 0,71.$$

$$c_2 = (a_{21} \times a_{22})^{1/2} = (2 \times 1)^{1/2} = 1,41.$$

$$s = c_1 + c_2 = 0,71 + 1,41 = 2,12. \quad (11)$$

$$X_1 = c_1/s = 0,71/2,12 = 0,33.$$

$$X_2 = c_2/s = 1,41/2,12 = 0,67.$$

For feature  $k_2$ :

$$c_1 = (a_{11} \times a_{12})^{1/2} = (1 \times 1/1,5)^{1/2} = 0,82.$$

$$c_2 = (a_{21} \times a_{22})^{1/2} = (1,5 \times 1)^{1/2} = 1,22.$$

$$s = c_1 + c_2 = 0,82 + 1,22 = 2,04. \quad (12)$$

$$X_1 = c_1/s = 0,82/2,04 = 0,4.$$

$$X_2 = c_2/s = 1,22/2,04 = 0,6.$$

For feature  $k_3$ :

$$c_1 = (a_{11} \times a_{12})^{1/2} = (1 \times 8)^{1/2} = 3,0.$$

$$c_2 = (a_{21} \times a_{22})^{1/2} = (1/8 \times 1)^{1/2} = 0,35.$$

$$s = c_1 + c_2 = 3,0 + 0,35 = 3,35. \quad (13)$$

$$X_1 = c_1/s = 3,0/3,35 = 0,89.$$

$$X_2 = c_2/s = 0,35/3,35 = 0,11.$$

We calculate the local priority vectors  $\{Z_{ij}\}$  (14–16) of suppliers' matrices of pairwise comparisons for every feature  $k_1, k_2, k_3$ .

$$\begin{pmatrix} Z_{11} \\ Z_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,33 \\ 0,67 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,665 \\ 1,33 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} Z_{21} \\ Z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/1,5 \\ 1,5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 1,2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} Z_{31} \\ Z_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1/8 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,89 \\ 0,11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,77 \\ 0,22 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

The global priority vector  $\{P_j\}$  is calculated by the formula (8).

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,665 & 0,8 & 1,77 \\ 1,33 & 1,2 & 0,22 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,16 \\ 0,54 \\ 2,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,14 \\ 1,43 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

The obtained results show that the first supplier is more preferable in the Purchase Tender because his rating is 5,14.

Based on the described approach, an expert system was developed. The software implementation of the expert system is made in C++ language in the C++ Builder environment.

Table 6

Example the matrices of pairwise comparisons of suppliers

$k_1$	$D_1$	$D_2$
$D_1$	1	1/2
$D_2$	2	1

$k_2$	$D_1$	$D_2$
$D_1$	1	1/1,5
$D_2$	1,5	1

$k_3$	$D_1$	$D_2$
$D_1$	1	8
$D_2$	1/8	1

## 5. Conclusion

1. It is proposed modification of the analytic hierarchy process (T. Saaty [9]) for decision-making in a Purchase Tender.

This modification consists in next:

a) it is proposed the algorithm of estimation of pairwise comparisons of features and suppliers with the help of a group of experts;

b) it is proposed the algorithm of harmonization of suppliers and features matrices.

2. The algorithm presented in this paper allows us to effectively use a team of experts to evaluate

the suppliers. The presented algorithm improves the quality of work of the expert system requiring taking into account the level of trust in the competence of experts, as well as the speed of change of experts' trust by the decision-maker.

3. One of the areas of the system application is the analysis of decision-making problems in the field of public procurement to assess the companies-bidders for the construction of industrial facilities. However, the algorithm has universal character and we hope it can be used for decision making in other spheres of procurement tenders, different competition selections.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Belch G., Belch M. Advertising and Promotion. *An Integrated Marketing Communications Perspective*. 8<sup>th</sup> ed. Homewood, IL, Irwin, 2009. P. 325–370.
2. The Shopping Momentum Effect / R. Dhar et al. *Journal of Marketing Research*. 2007. Vol. 44. № 3. P. 370–378.
3. Stankevich A. Explaining the Consumer Decision Making Process: Critical Literature Review. *Journal of International Business Research and Marketing*. 2017. Vol. 2. № 6. P. 7–14.
4. Csaba C. Investigating the Decision-Making Practice of Public Procurement Procedures. *The Second International Public Procurement Conference, Italy, Rome, 21–23 September 2006*. Rome. P. 869–899.
5. A system for tender price evaluation of construction project based on big data / Y. Zhanga et al. *The Creative Construction Conference, Italy, Rome, Dec. 15–17, 2015*. Procedia Engineering 123. Rome. P. 606–614.
6. Research of the Supplier Evaluation System in Electronic Government Procurement Based on Multiple Amended Weight Coefficient / W. Haizi et al. *The International Forum on Computer Science-Technology and Applications, Italy, Rome, Dec. 25–27, 2009*. Vol. 2. Rome. P. 90–92.
7. Decision making framework for tender evaluation and contractor selection in public organizations with risk considerations / A. Cheaitou et al. *Socio-Economic Planning Sciences*. December 2019. Vol. 68. P. 34–39.
8. On Public Procurement : The Law of Ukraine. *Information of the Verkhovna Rada*. 2016. № 9. P. 89.
9. Saaty T.L. Axiomatic foundation of the analytic hierarchy process. *Management Science*. 1986. Vol. 32. № 7. P. 841–855.
10. Bondarenko V.E. Subjective-probability approach to design an expert system for assessment of states of complex systems in conditions of non-regular destructive influences. *Proceedings of the IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory, Ukraine, Kiev, 18.12.2019–20.12.2019*. Kiev. P. 183–186.

## REFERENCES

1. Belch G., Belch M. (2009). Advertising and Promotion. An Integrated Marketing Communications Perspective, 8<sup>th</sup> ed. Homewood, IL, Irwin, pp. 325–370.
2. Dhar R., Huber J., Khan U. (2007). The Shopping Momentum Effect. *Journal of Marketing Research*. Vol. 44, № 3, pp. 370–378.
3. Stankevich A. (2017). Explaining the Consumer Decision Making Process: Critical Literature Review. *Journal of International Business Research and Marketing*, vol. 2, № 6, pp. 7–14.
4. Csaba C. (2006). Investigating the Decision Making Practice of Public Procurement Procedures. Proceedings of the *Second International Public Procurement Conference* (Italy, Rome, 21–23 September 2006), Rome. Pp. 869–899.
5. Zhanga Y., Luoa H., Hea Y. (2015). A system for tender price evaluation of construction project based on big data. Proceedings of the *Creative Construction Conference* (Italy, Rome, Dec. 15–17, 2015), Procedia Engineering 123, Rome. Pp. 606–614.
6. Haizi W., Li Z., Juan L., Tongtao Z. (2009). Research of the Supplier Evaluation System in Electronic Government Procurement Based on Multiple Amended Weight Coefficient. Proceedings of the *International Forum on Computer Science-Technology and Applications* (Italy, Rome, Dec. 25–27, 2009), vol. 2, Rome. Pp. 90–92.
7. Cheaitou A, Larbi R., Al Housani B. (2019). Decision making framework for tender evaluation and contractor selection in public organizations with risk considerations. *Socio-Economic Planning Sciences*, vol. 68, December 2019. Pp. 34–39.

8. The Law of Ukraine “On Public Procurement”. Information of the Verkhovna Rada, № 9, 2016, 89 p.
9. Saaty T.L. (1986). Axiomatic foundation of the analytic hierarchy process. *Management Science*, vol. 32, № 7, pp. 841–855.
10. Bondarenko V.E. (2019). Subjective-probability approach to design an expert system for assessment of states of complex systems in conditions of non-regular destructive influences. Proceedings of the IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory (Ukraine, Kiev, 18.12.2019–20.12.2019). Kiev. Pp. 183–186.

## ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У ЖУРНАЛІ «COMPUTER SCIENCE AND APPLIED MATHEMATICS»

### Вимоги до оформлення статей:

До друку приймаються статті, що мають наукову і практичну цінність. Автор має право представити тільки одну наукову статтю в один номер, яка раніше не публікувалася. Автор несе відповідальність за оригінальність тексту статті, точність наведених фактів, цитат, статистичних даних, власних назв, географічних назв та інших відомостей, а також за те, що в матеріалах не містяться дані, що не підлягають відкритій публікації. Редакція не несе відповідальності за викладену в статті інформацію. Остаточне рішення про публікацію ухвалюється редакцією, яка також залишає за собою право на додаткове рецензування, редагування і відхилення статей.

### Технічні вимоги:

- до друку приймаються статті українською, російською та англійською мовами;
- електронний варіант статті у форматі \*.doc, \*.docx або \*.rtf, підготовлений у текстовому редакторі Microsoft Word;
- формат А4 через 1,5 інтервал;
- шрифт Times New Roman, розмір 14;
- поля: ліве – 3 см, праве – 1,5 см, верхнє, нижнє – 2 см.

### Структура статті:

- рядок 1** – УДК (вирівнювання по лівому краю);
- рядок 2** – назва тематичного розділу (вирівнювання по лівому краю);
- рядок 3** – назва статті (вирівнювання по центру, напівжирний шрифт, великі літери);
- рядок 4** – прізвище та ініціали автора статті; науковий ступінь, вчене звання, посада із зазначенням кафедри (вирівнювання по центру);
- рядок 5** – місце роботи (навчання), адреса роботи (навчання), orcid-код, електронна адреса автора (вирівнювання по центру).

Якщо автор не має orcid-коду, його можна отримати за посиланням <https://orcid.org/>

**абзац 1** – розширена анотація (1800 знаків без пробілів) та ключові слова (мінімум 5 слів), написані мовою, як і уся стаття;

**абзац 2** – назва статті (напівжирний шрифт, усі літери великі), прізвище, ініціали автора, науковий ступінь, вчене звання, посада із зазначенням кафедри, місце роботи (навчання), адреса роботи (навчання), orcid-код, електронна адреса автора, **розширена** анотація (1800 знаків без пробілів) та ключові слова (мінімум 5 слів), написані **англійською мовою**. Переклад англійською мовою повинен бути достовірним (не машинним).

У випадку, якщо стаття не українською мовою, обов'язково подаються назва статті (напівжирний шрифт, усі літери великі), прізвище, ініціали автора, науковий ступінь, вчене звання, посада із зазначенням кафедри, місце роботи (навчання), адреса роботи (навчання), orcid-код, електронна адреса автора, розширена анотація (1800 знаків без пробілів) та ключові слова (мінімум 5 слів), написані українською мовою.

Основний текст статті повинен відповідати структурі IMRAD (Introduction, Methods, Results, and Discussion) + Literature Review:

Вступ – короткий вступ (1-2 сторінки), який повинен дати відповіді на запитання «чому проведено дослідження?», «які об'єкт, мета й основні гіпотези дослідження?»; Огляд літератури - розділ, що містить аналіз останніх публікацій за темою дослідження (переважна більшість публікацій повинна бути за останні 5 років, самоцитування не більше 30% від кількості літературних джерел), з огляду літератури читачі повинні мати змогу оцінити стан проблеми у світі, аналіз літературних джерел повинен мати критичний характер;

Методи – розділ, який може включати 2-3 рівнозначних за обсягом параграфи, що висвітлюють основні методи, підходи, алгоритми дослідження;

Результати – розділ, який містить аналіз основних результатів дослідження (графіки, таблиці з чисельними даними, загалом, результати обчислювальних експериментів); Дискусія – розділ (до 1 сторінки), який також можна назвати Висновок або Висновки, що містить порівняння отриманих результатів з результатами інших досліджень (як власних так інших авторів), а також дає відповідь на запитання «які перспективи дослідження?», формулює наукову новизну результатів.

Література розміщується після статті у порядку згадування; друкується через 1,5 інтервал, 14 розміром, шрифтом Times New Roman і оформляється у відповідності вимог міждержавного стандарту ДСТУ 8302:2015.

Посилання на літературу в тексті слід давати в квадратних дужках, наприклад, [2, с. 25; 5, с. 33], в яких перша цифра вказує порядковий номер джерела в списку літератури, а друга – відповідну сторінку в цьому джерелі; одне джерело (без сторінок) відокремлюється від іншого крапкою з комою [3; 4; 6; 8; 12; 15].

Наприкінці статті розміщується транслітерована і перекладена англійською версія літератури (References), оформлена згідно з вимогами APA (American Psychological Association).

**Порядок подання матеріалів:**

Для публікації статті у фаховому науковому виданні необхідно надіслати на електронну адресу редакції [editor@physmath.journalsofznu.zp.ua](mailto:editor@physmath.journalsofznu.zp.ua) наступні матеріали:

**добре вчитану наукову статтю**, обов'язково оформлену відповідно до вказаних вимог;  
**інформаційну довідку про автора**;  
відскановане **підтвердження сплати коштів** (реквізити для сплати надаються автору після вдалого проходження рецензування).

*Зразок оформлення назви електронних файлів:* Іванов\_І.І.\_стаття, Іванов\_І.І.\_оплата.

**Адреса та контактні дані:**

Редакція журналу «Computer Science and Applied Mathematics»  
вул. Жуковського 66, корп. 1, ауд. 216, м. Запоріжжя, Україна, 69060  
**Телефон:** +38 (066) 53 57 687  
**Електронна пошта:** [editor@physmath.journalsofznu.zp.ua](mailto:editor@physmath.journalsofznu.zp.ua)  
**Офіційний сайт:** [www.journalsofznu.zp.ua/index.php/comp-science](http://www.journalsofznu.zp.ua/index.php/comp-science)

Науковий журнал

**Computer Science and Applied Mathematics**

№ 1, 2022

Комп'ютерна верстка – Н.С. Кузнєцова  
Коректура – В.В. Ізак

Підписано до друку: 28.09.2022.  
Формат 60x84/8. Гарнітура Times New Roman.  
Папір офсет. Цифровий друк. Ум. друк. арк. 11,86.  
Замов. № 1122/467. Наклад 100 прим.

Видавництво і друкарня – Видавничий дім «Гельветика»  
65101, м. Одеса, вул. Інглєзі, 6/1  
Телефони: +38 (095) 934 48 28, +38 (097) 723 06 08  
E-mail: mailbox@helvetica.ua  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
ДК № 7623 від 22.06.2022 р.