

Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет

Заснований
у 1997 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого
засобу масової інформації
Серія КВ № 15436-4008 ПР,
22.06.2009 р.

Адреса редакції:
Україна, 69600,
м. Запоріжжя, МСП-41,
вул. Жуковського, 66

В і с н и к

Запорізького національного університету

Телефон
для довідок:
(061) 289-12-52

Факс:
(061) 764-45-46

- **Фізико-математичні науки**

№ 2, 2018

Запоріжжя 2018

Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2018. – 156 с.

Затверджено як наукове фахове видання України, у якому можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (Наказ Міністерства освіти і науки України № 528 від 12.05.15 р.).

Вісник індексується під назвою «Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences» у таких наукометричних базах:

- INDEX COPERNICUS, ICV 2017: **80.00** (<https://journals.indexcopernicus.com/search/details?id=43958>);
- CiteFactor (<http://www.citefactor.org/>);
- ResearchBib (<http://paper.researchbib.com/>);
- Journal Factor (<http://www.journalfactor.org/>).

Рекомендовано до друку та поширення через мережу Інтернет (протокол засідання Вченої ради № 4 від 17 грудня 2018 р.)

РЕДАКЦІЙНА РАДА

- | | |
|--------------------------|--|
| <i>Грицак В. З.</i> | – доктор технічних наук, професор, головний редактор |
| <i>Гребенюк С. М.</i> | – доктор технічних наук, доцент, заступник головного редактора |
| <i>Гоменюк С. І.</i> | – доктор технічних наук, професор, відповідальний редактор |
| <i>Приварников А. К.</i> | – доктор фізико-математичних наук, професор, відповідальний редактор |
| <i>Клименко М. І.</i> | – кандидат фізико-математичних наук, доцент, відповідальний редактор |
| <i>Чопоров С. В.</i> | – кандидат технічних наук, доцент, відповідальний редактор |

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

- | | |
|----------------------------|--|
| <i>Андріанов І. В.</i> | – доктор фізико-математичних наук, професор (Рейнсько-Вестфальський технічний університет Аахена, Німеччина) |
| <i>Ванько В. І.</i> | – доктор технічних наук, професор (Московський державний технічний університет ім. Н.Е. Баумана, Росія) |
| <i>Гіржон В. В.</i> | – доктор фізико-математичних наук, професор |
| <i>Гоман О. Г.</i> | – доктор фізико-математичних наук, професор |
| <i>Гудрамович В. С.</i> | – доктор технічних наук, професор, член-кореспондент НАН України |
| <i>Козін І. В.</i> | – доктор фізико-математичних наук, професор |
| <i>Колаковські З.</i> | – доктор технічних наук, професор (Лодзинський технічний університет, Польща) |
| <i>Кондрат'єва Н. О.</i> | – кандидат фізико-математичних наук, доцент |
| <i>Кузьменко В. І.</i> | – доктор фізико-математичних наук, професор |
| <i>Маневич Л. І.</i> | – доктор технічних наук, професор (Московський інститут хімічної фізики ім. Н.Н. Семенова РАН, Росія) |
| <i>Морачковський О. К.</i> | – доктор технічних наук, професор |
| <i>Ольшанецький В. Ю.</i> | – доктор технічних наук, професор |
| <i>Перепелиця В. О.</i> | – доктор фізико-математичних наук, професор |
| <i>Пожусєв В. І.</i> | – доктор фізико-математичних наук, професор |
| <i>Толок О. В.</i> | – доктор технічних наук, професор (Московський державний технологічний університет «Станкин», Росія) |
| <i>Швидка С. П.</i> | – кандидат фізико-математичних наук, доцент |

ЗМІСТ

| | |
|---|-----|
| ГОЛОСКУБОВА Н. С., МИХЛИН Ю. В. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ СТОЯЧИХ ВОЛН В МОДЕЛИ ДНК ПЕЙРАРА–БИШОПА–ДОКСУА..... | 4 |
| ГРИЩАК Д. В., ГРИЩАК Д. Д., КАДЕТ Н. П. БІФУРКАЦІЙНИЙ СТАН ОБЕРТОВОГО МЯТНИКОВОГО ОСЦИЛЯТОРА З ПАРАМЕТРАМИ ДОВЖИНИ І МАСИ, ЗАЛЕЖНИМИ ВІД ЧАСУ | 11 |
| ГУРЕЄВА К. М., КУДІН О. В., ЛІСНЯК А. О. ОГЛЯД МЕТОДІВ МАШИННОГО НАВЧАННЯ В ЗАДАЧІ ПРОГНОЗУВАННЯ ФІНАНСОВИХ ЧАСОВИХ РЯДІВ | 18 |
| ДЬЯЧЕНКО Н. Н., МУХИН В. В., МИСТЮК В. Ю., ЮРЧЕНКО А. К. РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ И ШЕРОХОВАТОСТИ, ДЕФОРМИРУЮЩЕЙСЯ ПО НЕЛИНЕЙНЫМ ЗАКОНАМ..... | 29 |
| ЄМЕЦЬ О. О., БАРБОЛІНА Т. М. МЕТОД ГЛЛОК І МЕЖ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ ЛІНІЙНОЇ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ НА РОЗМІЩЕННЯХ З ІМОВІРНІСНОЮ НЕВИЗНАЧЕНІСТЮ..... | 43 |
| ИСКАНДЕРОВ Р. А., АЛИМАМЕДОВ Р. К. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПОПЕРЕЧНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ, АНИЗОТРОПНОЙ, ПОВРЕЖДЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ СТЕКЛОПЛАСТИКА, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ..... | 55 |
| КРИВОРУЧКО А. Г., ШЕВЕЛЁВА А. Е., ЛОБОДА В. В. АНТИПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО БИМАТЕРИАЛА С ВКЛЮЧЕНИЕМ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД | 64 |
| ЛУКЬЯНОВ П. В. ОСОБЕННОСТИ ГЕНЕРАЦИИ ВИ-ШУМА ПРИ САМОЛЁТНОЙ ПОСАДКЕ ВЕРТОЛЁТА | 73 |
| МИЛЬЦЕВ О. М., КОНДРАТ'ЄВА Н. О., ЛЕОНТЬЄВА В. В. ФУНКЦІОНАЛЬНА МОДЕЛЬ ОСНОВНИХ БІЗНЕС-ПРОЦЕСІВ СИСТЕМИ «РАНОК»..... | 88 |
| МИХАІЛ О. В., ЛОБОДА В. В. ПРО ОДИН СПОСІБ АНАЛІЗУ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ КОМПОЗИТИВ В ОКОЛІ КУТОВИХ ТОЧОК | 99 |
| НОВИЦЬКИЙ В. В., КОЛОМІЙЧУК О. П., СВЯТОВЕЦЬ І. Ф. МІНІМАКСНЕ КЕРУВАННЯ ГІРОСКОПІЧНИМИ СИСТЕМАМИ..... | 109 |
| ОЛЬШАНСЬКИЙ В. П., ОЛЬШАНСЬКИЙ С. В. ПРО РУХ НЕЛІНІЙНОГО ОСЦИЛЯТОРА ПРИ ДІЇ МИТТЄВО ПРИКЛАДЕНОЇ СИЛИ..... | 115 |
| SELEZOV IGOR SOME APPLICATIONS OF NUMERICAL INVERSION OF THE LAPLACE TRANSFORM IN PROBLEMS OF PROPAGATION OF WAVE OSCILLATIONS | 124 |
| СТОЛЯРОВА А. В., ГРЕБЕНЮК С. М., КЛИМЕНКО М. І. ПОЗДОВЖНІЙ МОДУЛЬ ПРУЖНОСТІ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА З ПЕРЕХІДНИМ ШАРОМ | 130 |
| СТРЕЛЯЄВ Ю. М., КЛИМЕНКО М. І., СТРЕЛЯЄВ О. Ю. КОНТАКТ ПЛОСКОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО ШТАМПА З ПРУЖНИМ ПІВПРОСТОРОМ ПРИ НЕМОНОТОННОМУ НАВАНТАЖУВАННІ З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ..... | 142 |
| ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У «ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ» ЗА ФАХОМ «ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ»..... | 152 |
| ПРОЦЕС РЕЦЕНЗУВАННЯ | 154 |
| PROCESS OF REVIEW | 155 |

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ СТОЯЧИХ ВОЛН В МОДЕЛИ ДНК ПЕЙРАРА–БИШОПА–ДОКСУА

Голоскубова Н. С., Михлин Ю. В.

*Национальный технический университет «ХПИ»,
ул. Курпичева, 2, г. Харьков, Украина*

nataligoloskubova1992@ukr.net, muv@kpi.kharkov.ua

Рассматривается модель Пейрара–Бишопа–Доксуа (модель ПБД), которая описывает динамику молекулы ДНК. Устойчивость локализованных стоячих волн исследована с использованием численно-аналитического критерия устойчивости для случая девяти узлов. Получены границы областей устойчивости/неустойчивости в пространстве параметров системы.

Ключевые слова: модель Пейрара–Бишопа–Доксуа, устойчивость локализованных стоячих волн.

СТІЙКІСТЬ ЛОКАЛІЗОВАНИХ СТОЯЧИХ ХВИЛЬ У МОДЕЛІ ДНК ПЕЙРАРА–БІШОПА–ДОКСУА

Голоскубова Н. С., Міхлін Ю. В.

*Національний технічний університет «ХПІ»,
вул. Курпичова, 2, м. Харків, Україна*

nataligoloskubova1992@ukr.net, muv@kpi.kharkov.ua

Розглядається модель Пейрара–Бішопа–Доксуа (модель ПБД), яка описує динаміку молекули ДНК. Стійкість локалізованих стоячих хвиль досліджена з використанням чисельно-аналітичного критерію стійкості для випадку дев'яти вузлів. Отримано границі областей стійкості/нестійкості в просторі параметрів системи.

Багато робіт останнім часом присвячено вивченню хвильових процесів у молекулі ДНК, що зумовлено як інтересом до важливих біологічних проблем, так і розвитком сучасних нанотехнологій.

Одна з найбільш удалих моделей динаміки молекули ДНК була запропонована Пейраром, Бішопом та Доксуа. Це так звана модель ПБД, що розглядається в цій роботі. У заданій моделі дві низки ДНК представлено двома зв'язаними ланцюгами твердих дисків, де взаємодія між дисками однієї основи описується потенціалом Морзе, а взаємодія між протилежними дисками описується ангармонічним потенціалом. У цієї моделі переміщення дуплекса ДНК у просторі, як цілого, не розглядається, але вивчається тільки розходження різних ланцюгів.

Стійкість локалізованих сталих хвиль у моделі ПБД досліджена з використанням чисельно-аналітичної процедури, що базується на відомому критерії стійкості за Ляпуновим. Локалізовані сталі хвилі збуджуються або початковим зміщенням, що описує розходження двох протилежних дисків двох ланцюгів, або відповідною початковою швидкістю. Далі ми використовуємо порівняння поточних значень кінетичних енергій близьких елементів з початковою кінетичною енергією збудженого елемента. Нестійкість локалізованих сталих хвиль фіксується, якщо десять процентів початкової кінетичної енергії переходять у сусідні диски. Обчислення реалізуються у вузлах деякої сітки у вибраній області параметрів системи. Ці обчислення зупиняються, якщо границі областей стійкості/нестійкості стабілізуються у цій сітці. Це є принциповим критерієм вибору часу обчислень.

У результаті ми отримали границі областей стійкості/нестійкості на деяких площинах параметрів системи для випадку двох зв'язаних ланцюгів, кожен з яких містить дев'ять дисків. Як ілюстрація, локалізовані сталі хвилі в таких дисках представлено для значень параметрів системи, що взяті як з області стійкості, так і з області нестійкості хвиль. Зокрема, ми бачимо, що зменшення параметру взаємодії між парами основ уздовж ланцюга призводить до підвищення стійкості локалізованих сталих хвиль.

Ключові слова: модель Пейрара–Бішопа–Доксуа, стійкість локалізованих стоячих хвиль.

STABILITY OF LOCALIZED STANDING WAVES IN THE PEYRARD–BISHOP–DOKSUA DNA MODEL

Goloskubova N. S., Mikhlin Yu. V.

National Technical University “KhPI”,
Kyrpychev str., 21, Kharkiv, Ukraine

nataligoloskubova1992@ukr.net, muv@kpi.kharkov.ua

Many recent works are devoted to study of wave processes in the DNA molecule, which are determined both by interest in the important biological problems, and the development of modern nanotechnologies.

One of the most successful models of the DNA molecule dynamics is the model developed by Peyrard, Bishop and Dauxois (the PBD model) which is considered in this paper. In the PBD model two strands of the DNA are represented by linked chains of hard disks, where the bonds within base pairs are described by the Morse potential and the interaction between opposite discs of different chains is represented by the anharmonic potential. In this model, the transfer of the DNA duplex in space as a whole is not considered, and only a divergence of different chains is studied.

The stability of localized standing waves in the PBD model is investigated here by using the numerical-analytical procedure which is based on the well-known Lyapunov stability criterion. Localized standing waves are excited by either the initial displacement describing the divergence of the chosen opposite discs of two chains, or the corresponding initial velocity. Then we use a comparison of the current values of the kinetic energies of neighboring elements with initial kinetic energy of the excited node. Instability of localized standing wave is fixed if more than ten percent of the initial kinetic energy is transferred to neighboring discs. Calculations are realized in nodes of some mesh in chosen domain of the system parameters. These calculations are stopped when boundaries of the stability/instability regions are stabilized in the chosen mesh. This is a principal criterion of the choice of the calculation time.

As a result, boundaries of stability/instability regions in some places of the system parameters are obtained for a case of two connected chains consisting of nine discs each. As an illustration, the calculations of the localized standing waves in such chains are given for the values of parameters taken in regions of the wave stability or instability. We can see, in particular, that a decrease of the parameter of interaction between pairs of bases along chain leads to increase of the localized standing wave stability.

Key words: Peyrard–Bishop–Dauxois model, stability of localized standing waves.

ВВЕДЕНИЕ

Исследованию волновых процессов в молекуле ДНК посвящены многие работы последнего времени, что определяется как интересом к важнейшим проблемам биологии, так и развитием современных нанотехнологий.

Детальный обзор моделей нелинейной динамики молекулы ДНК можно найти в книге [1] и обзорах [2, 3]. Среди различных моделей динамики молекулы ДНК одной из наиболее известных является модель, разработанная Пейраром и Бишопом [4] (модель ПБ). Две цепочки ДНК в данной модели представлены связанными цепочками твердых дисков, причем связи внутри пар оснований описываются потенциалом Морзе. При этом стэкинг-взаимодействия учтены посредством введения обычного гармонического потенциала. В связи с расхождениями с экспериментом в модель ПБ был феноменологически введён ангармонический потенциал, более адекватно описывающий стэкинг-взаимодействия. Таким образом, была получена модель Пейрара–Бишоп–Доксуа [5] (названная моделью ПБД). Волновые процессы в указанных моделях анализировались во многих работах, в частности, в публикациях [1-7]. В гораздо меньшей степени освещаются вопросы устойчивости нелинейных волн, как бегущих, так и стоячих.

В данной работе с использованием описанной далее численно-аналитической процедуры, которая базируется на хорошо известном критерии устойчивости Ляпунова, рассмотрена устойчивость локализованных стоячих волн в модели ПБД. Получены границы областей устойчивости/неустойчивости таких волн в пространстве параметров системы. В качестве иллюстрации приведены расчеты локализованных стоячих волн в цепочке, состоящей из

девяти узлов, при значениях параметров, взятых в областях устойчивости или неустойчивости.

МОДЕЛЬ ПЕЙРАРА–БИШОПА–ДОКСУА

Как было указано выше, стандартная модель ДНК в модели ПБД представляет собой две цепочки дисков, связанных между собой продольными и поперечными пружинами (рис. 1), так называемый «дуплекс ДНК». В данной модели не рассматривается перенос дуплекса в пространстве как целого, а изучается только расхождение его цепей [1-3]. Масса нуклеотидов принимается как $m = 1$. Взаимодействие между узлами разных цепочек моделируется так называемым потенциалом Морзе, $V = d(\exp(-a(u_n - v_n)) - 1)^2$, который имитирует водородные связи, соединяющие основания комплементарных пар. Вводя новые координаты в виде $z_n = \frac{u_n + v_n}{\sqrt{2}}$, $y_n = \frac{u_n - v_n}{\sqrt{2}}$, опишем так называемое стэкинг-взаимодействие между узлами одной цепочки с использованием ангармонического потенциала $W(y_n, y_{n+1}) = \frac{k}{a^2}(1 + \rho e^{-\gamma(y_{n+1} + y_n)}(y_{n+1} - y_n)^2)$. Здесь γ – коэффициент затухания для стэкинг-взаимодействий, ρ – параметр ангармонизма, характеризующий нелинейность в системе; d – энергия диссоциации полинуклеотидных цепочек, a – параметр, обратный длине, то есть пространственный масштаб потенциала; k – константа, характеризующая взаимодействие между парами оснований вдоль цепочки.

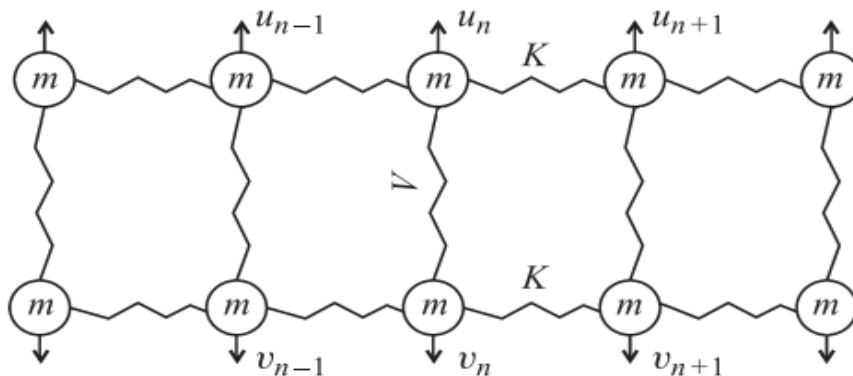


Рис. 1. Модель ДНК Пейрара–Бишопа–Доксуа

Поскольку для движения центра масс дуплекса не введены ограничения, будем рассматривать только динамику расхождения цепей, которая описывается переменными y_n .

Переходя к безразмерным времени, смещению и энергии, $\tau = t \sqrt{\frac{da^2}{m}}$, $H^* = \frac{H}{a}$, $u = ay_n$, и возвращаясь к первоначальным обозначениям переменных, $\tau \rightarrow t$, $u \rightarrow y$, $H^* \rightarrow H$, запишем систему уравнений, описывающих расхождение цепей в ПБД-модели в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_n}{dt^2} = & \frac{k}{a^2}(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + \frac{k}{a^2} \rho \left\{ e^{-\gamma(y_{n+1} + y_n)}(y_{n+1} - y_n) \left[\frac{1}{2} \gamma (y_{n+1} - y_n) + 1 \right] + \right. \\ & \left. + e^{-\gamma(y_n + y_{n+1})}(y_n - y_{n-1}) \left[\frac{1}{2} \gamma (y_n - y_{n-1}) - 1 \right] \right\} - 2\sqrt{2} D e^{-\sqrt{2} y_n} [1 - e^{-\sqrt{2} y_n}]. \end{aligned} \quad (1)$$

Таким образом, задача сводится к анализу волн в одной цепочке нелинейно связанных элементов, каждый из которых описывается переменной y_n .

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ СТОЯЧИХ ВОЛН

Локализованные стоячие волны возбуждаются или начальным смещением y_n , описывающим расхождение противоположных узлов цепочки, или начальной скоростью $\frac{dy_n}{dt}$. Устойчивость решения анализируется при помощи численно-аналитической процедуры, которая является

следствием известного определения Ляпунова об устойчивости. Эта процедура, которая представлена в статьях [8, 9], может быть кратко описана следующим образом.

Пусть задача устойчивости сведена к исследованию вариаций $w(t)$ рассматриваемого решения. Неустойчивость решения фиксируется, если

$$|w(t)| \geq \rho |w(0)| \quad (0 \leq t \leq T). \quad (2)$$

В условии (2), в отличие от классического определения устойчивости, введено ограниченное время расчета на устойчивость T . Обсудим теперь выбор до сих пор не определенных величин ρ и T . Здесь значение ρ^{-1} – это мера малости начальных вариаций по отношению к максимально допустимым вариациям для любых $t \geq 0$. Имеется существенный произвол в выборе величины ρ , и это не случайно, так как в области неустойчивости при возрастании t вариации выйдут за пределы заданной ε – окрестности исходного решения при любом выборе ρ . В инженерных науках принято говорить, что некоторая величина α «на порядок» больше, чем величина β , если $\alpha/\beta \approx 10$. Для конкретных расчетов можно выбрать, например, $\rho = 10$.

Обсудим теперь выбор величины T . Анализ устойчивости с использованием критерия (2) производится с использованием расчета на основе стандартной программы Рунге–Кутта. Расчет производится в узлах некоторой сетки в избранной области плоскости (или пространства) параметров системы. Вычисления продолжаются до тех пор, пока в выбранном масштабе сетки не стабилизируются границы областей устойчивости и неустойчивости. Это и есть принципиальный критерий для выбора времени вычислений T . Ясно, что если шаг сетки неограниченно убывает, то время расчета T стремится к бесконечности. В статье [8] обсуждается также связь величин ρ и T с константами Ляпунова, которые часто используются в задачах устойчивости.

В данной работе вместо сравнения начальных и текущих значений вариаций используется сравнение значений начальной кинетической энергии возбужденного узла u_n и текущих значений кинетических энергий соседних элементов цепочки. Неустойчивость фиксируется, если более чем 10 процентов от начальной кинетической энергии переходит в соседние узлы. Рассматривалась цепочка, состоящая из 9 узлов. Расчеты были проведены в точках некоторой сетки в выделенной области пространства (плоскости) параметров системы с шагом сетки $h = 0.1$. Как было указано выше, расчеты проводятся вплоть до стабилизации границ областей устойчивости/неустойчивости. Результаты расчетов для системы (1) представлены на рис. 2, где показаны границы областей устойчивости/неустойчивости в плоскостях некоторых выбранных параметров системы. В расчетах принято, что $\alpha = 0.65$, $\gamma = 0.577$. Кроме того, на рис. 2a энергия диссоциации полинуклеотидных цепочек $d = 0.9$ (eV); параметр взаимодействия между парами оснований вдоль цепи k (eV/Å²) изменяется в интервале [0; 0.025]; безразмерный параметр ангармонизма ρ – в интервале [0; 6]. Для рис. 2b параметр $d = 0.33$ (eV); k изменяется на интервале [0; 0.023]; параметр ρ – на интервале [0; 6]. Для рис. 2c параметр $\rho = 0.5$; k принадлежит интервалу [0.011; 0.051]; d – интервалу [1.25; 3.1]. Для рис. 2d параметр $\rho = 1$; k изменяется на интервале [0.01; 0.1]; d – на интервале [0.1; 1.75].

Везде области устойчивости расположены с левой стороны от полученных границ.

Для иллюстрации полученных результатов был проведен расчет динамики рассматриваемой цепочки (девять узлов) методом Рунге–Кутта четвертого порядка. Здесь $\alpha = 0.65$, $\gamma = 0.577$. Области неустойчивости соответствуют следующие параметры: $k = 0.9$ eV/Å²; $\rho = 1$ (рис. 3) и $k = 0.1$ eV/Å²; $\rho = 0.1$ (рис. 4) при $d = 0.9$ (eV) для двух рисунков. Области

устойчивости соответствуют следующие параметры: $k = 0.004 \text{ eV}/\text{Å}^2$; $\rho = 0.037$ (рис. 5) и $k = 0.001 \text{ eV}/\text{Å}^2$; $\rho = 0.01$ (рис. 6) при $d = 0.9 \text{ eV}$ для обоих рисунков.

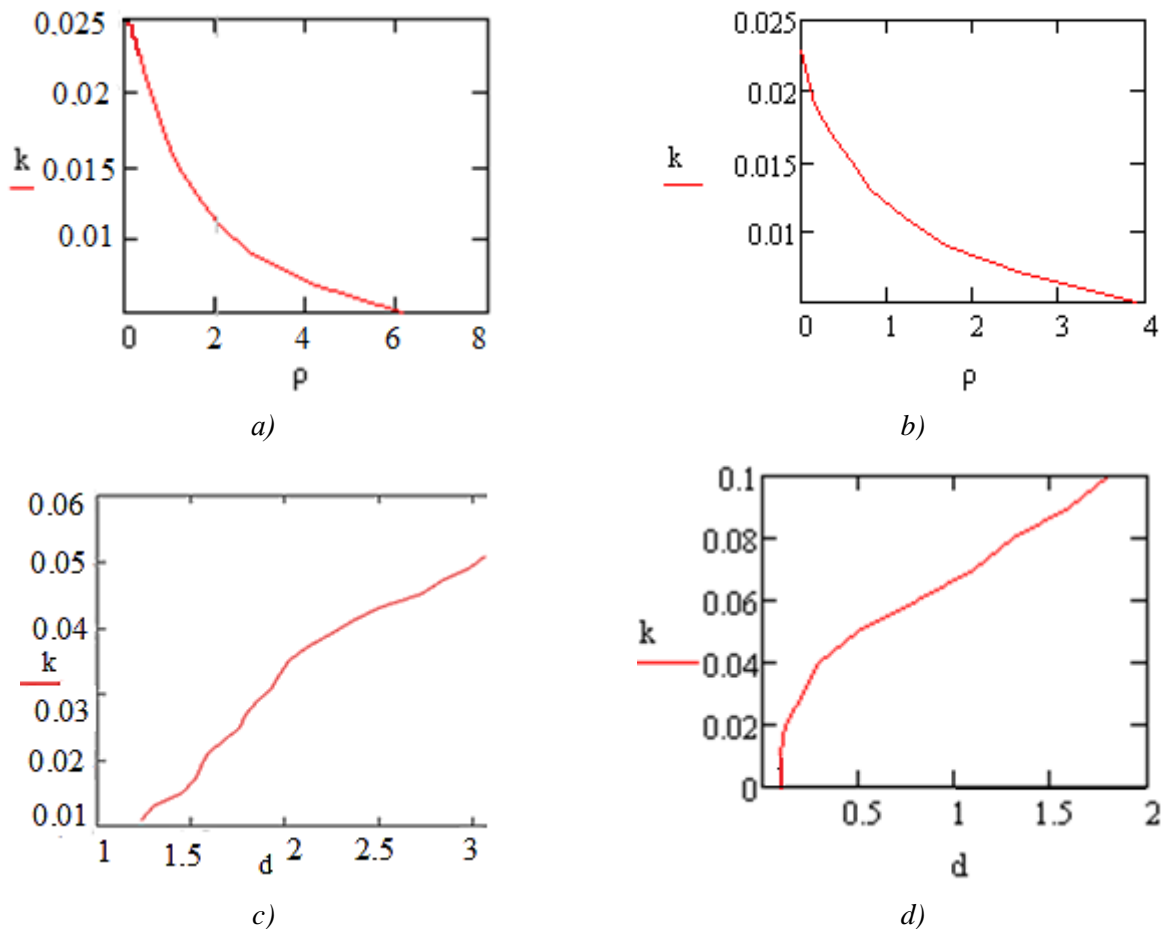


Рис. 2. Границы областей устойчивости/неустойчивости в пространстве параметров системы (1):
a, b – границы в плоскости (k, ρ) при $d = 0.9 \text{ eV}$ (*a*) и $d = 0.33 \text{ eV}$ (*b*);
c, d – границы в плоскости (k, d) при $\rho = 0.5$ (*c*) и $\rho = 1$ (*d*)

Использовались также следующие начальные условия:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt_1}(0) = \dots = \frac{dy}{dt_9}(0) = 0, \\ y_1(0) = \dots = y_4(0) = 0, \\ y_5(0) = 0.782, \\ y_6(0) = \dots = y_9(0) = 0. \end{cases}$$

Эти начальные условия соответствуют возбуждению только одной частицы в рассматриваемой модели, то есть возбуждению уединенной стоячей волны. На графике зависимости смещений каждого из девяти узлов двухмерной модели ДНК Пейрара–Бишопа–Доксуа от времени (рис. 3) представлено решение данной модели в виде устойчивых или неустойчивых стоячих волн.

Полученные зависимости дают представление о характере колебаний стоячих волн как в центральном, так и в близлежащих к нему узлах. Из графиков, показанных на рис. 3, 4, видно, что амплитуды колебаний соседних узлов сравнимы с амплитудами колебаний центрального возбужденного узла, что говорит о неустойчивости локализованного решения, хотя амплитуды колебаний узлов и уменьшаются по мере удаления от центрального узла. В то же время с уменьшением параметра взаимодействия между парами оснований вдоль цепи k колебания соседних узлов оказываются малы, что говорит об устойчивости уединенной стоячей волны. Так, на рис. 5, 6 при относительно малых значениях параметра k показаны

подобные устойчивые решения, когда амплитуды колебаний всех узлов, кроме возмущенного центрального узла, малы.

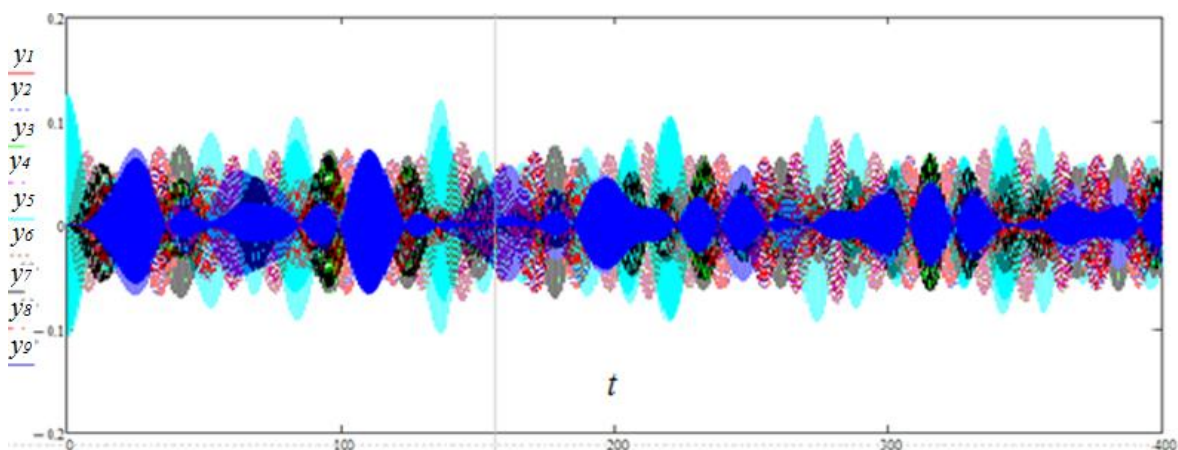


Рис. 3. Неустойчивость уединенной стоячей волны при $k = 0.9 \text{ eV}/\text{\AA}^2$; $\rho = 1$; $d = 0.9 \text{ eV}$

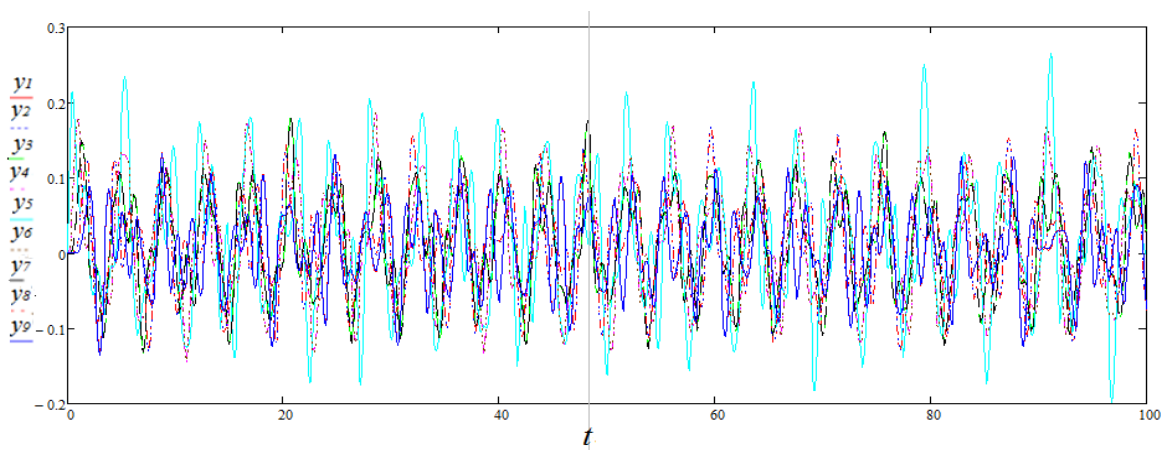


Рис. 4. Неустойчивость уединенной стоячей волны при $k = 0.1 \text{ eV}/\text{\AA}^2$; $\rho = 0.1$; $d = 0.9 \text{ eV}$

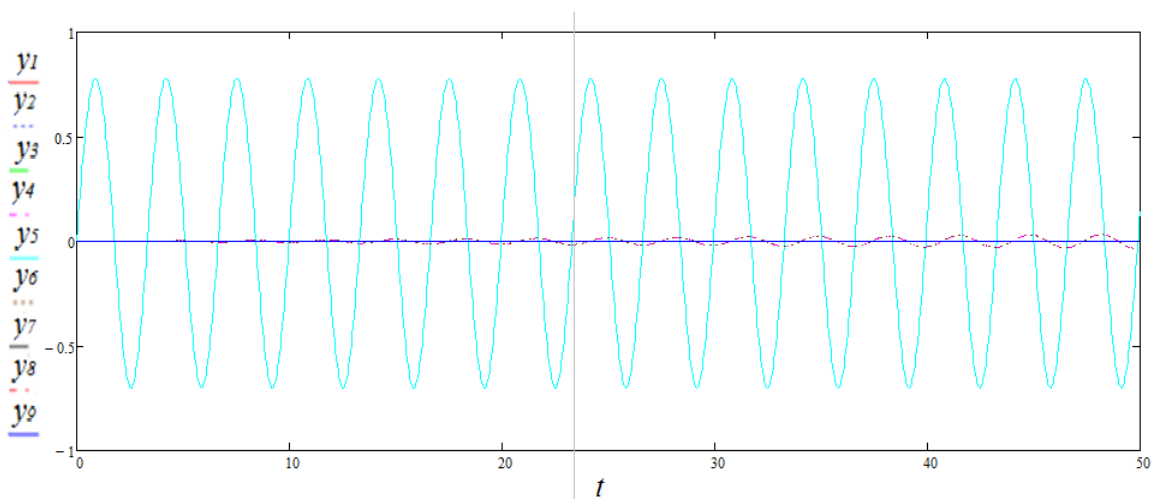


Рис. 5. Устойчивая уединенная стоячая волна при $k = 0.004 \text{ eV}/\text{\AA}^2$; $\rho = 0.037$; $d = 0.9 \text{ eV}$ и начальной амплитуде колебаний, равной 0.782

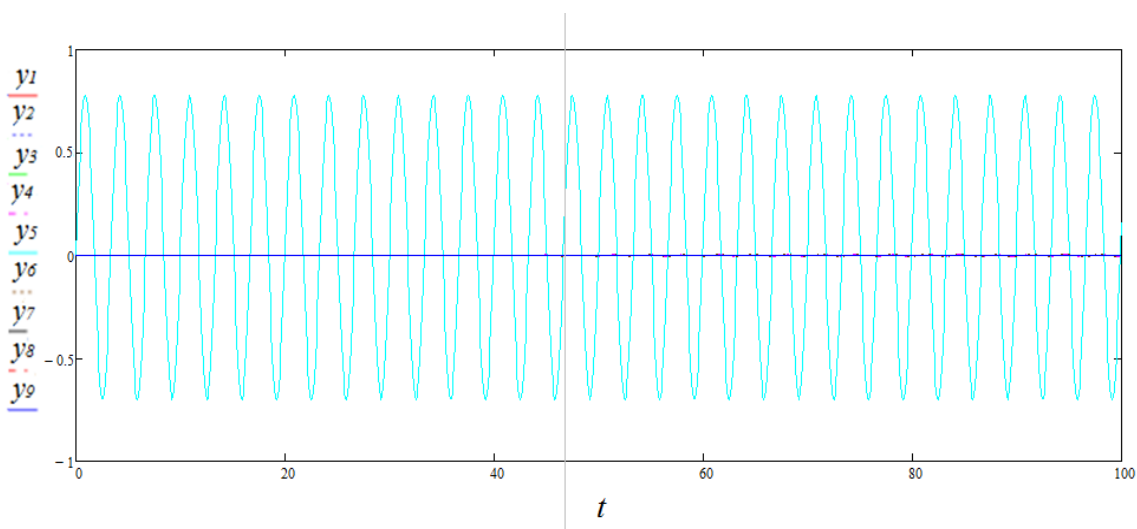


Рис. 6. Устойчивая уединенная стоячая волна при $k = 0.001 \text{ eV}/\text{\AA}^2$; $\rho = 0.01$; $d = 0.9 \text{ eV}$ и начальной амплитуде колебаний, равной 0,782

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе на основе эффективного численно-аналитического критерия было проведено исследование устойчивости стоячих волн в модели ДНК Пейрара–Бишопа–Доксуа. Основным результатом является получение границ областей устойчивости/неустойчивости таких волн в пространстве параметров системы. Приведены также численные расчеты подобных устойчивых или неустойчивых волн при значениях параметров, взятых из областей устойчивости/неустойчивости. Представляется, что подобная методика может быть использована и для исследования устойчивости стоячих волн в различных нелинейных цепочках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yakushevich L. V. *Nonlinear Physics of DNA*. New York: Wiley, 2nd ed., 2004. 207 p.
2. Peyrard M. Nonlinear dynamics and statistical physics of DNA. *Nonlinearity*. 2004. No 17. P. R1–R40.
3. Шигаев А. С., Пономарёв О. А., Лахно В. Д. Теоретические и экспериментальные исследования открытых состояний ДНК. *Математическая биология и биоинформатика*. 2013. Т. 8, № 2. С. 553–664.
4. Peyrard M., Bishop A. R. Statistical mechanics of a nonlinear model for DNA denaturation. *Physical Review Letters*. 1989. Vol. 62. P. 2755–2758.
5. Dauxois T., Peyrard M., Bishop A. R. Entropy-driven DNA denaturation. *Physical Review E*. 1993. Vol. 47. P. R44–R47.
6. Фахретдинов М. И., Закирьянов Ф. К. Дискретные бризеры в модели ДНК Пейрара–Бишопа. *Журнал технической физики*. 2013. Т. 83, Вып. 7. С. 1–5.
7. Фахретдинов М. И., Закирьянов Ф. К., Екомасов Е. Г. Дискретные бризеры и мультибризеры в модели ДНК Пейрара–Бишопа. *Нелинейная динамика*. 2015. Т. 11, № 1. С. 77–87.
8. Mikhlin Yu. V., Shmatko T. V., Manucharyan G. V. Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions. *Computer & Structures*. 2004. No 82. P. 2733–2742.
9. Mikhlin Yu. V., Manucharyan G. V. Determination of the chaos onset in mechanical systems with several equilibrium positions. *Meccanica*. 2006. № 41. P. 253–267.

REFERENCES

1. Yakushevich, L. V. (2004). *Nonlinear Physics of DNA*. New York: Wiley, 2nd Edition.
2. Peyrard, M. (2004). Nonlinear dynamics and statistical physics of DNA. *Nonlinearity*, No. 17, pp. R1–R40.

3. Shygayev, A. S., Ponomarev, O. A. & Lakhno, V. D. (2013). Theoretical and experimental researches of the open states of DNA. *Matematicheskaya biologiya i bioinformatika*. 2013. T. 8, No. 2, pp. 553–664.
4. Peyrard, M. & Bishop, A. R. (1989). Statistical mechanics of a nonlinear model for DNA denaturation. *Physical Review Letters*, Vol. 62, pp. 2755–2758.
5. Dauxois, T., Peyrard, M. & Bishop, A. R. (1993). Entropy-driven DNA denaturation. *Physical Review E*, Vol. 47, pp. R44–R47.
6. Fakhretdinov, M. I. & Zakirianov, F. K. (2013). Diskretniye brizeri v modeli DNK Peirara-Bishipa. *Zhurnal Tekhnicheskoi Phisiki*, Vol. 83, No. 7, pp. 1–5.
7. Fakhretdinov, M. I., Zakirianov, F. K. & Ekomasov, E. G. (2015). Diskretniye brizeri i multibrizeri v modeli DNK Peirara-Bishipa. *Nelineinaya Dynamika*, Vol. 11, No. 1, pp. 77–87.
8. Mikhlin, Yu. V., Shmatko, T. V. & Manucharyan, G. V. (2004). Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions. *Computer & Structures*, No. 82, pp. 2733–2742.
9. Mikhlin, Yu. V. & Manucharyan, G. V. (2006). Determination of the chaos onset in mechanical systems with several equilibrium positions. *Meccanica*, No. 41, pp. 253–267.

УДК 534

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-02

БІФУРКАЦІЙНИЙ СТАН ОБЕРТОВОГО МАЯТНИКОВОГО ОСЦИЛЯТОРА З ПАРАМЕТРАМИ ДОВЖИНИ І МАСИ, ЗАЛЕЖНИМИ ВІД ЧАСУ

¹Грищак Д. В., к. т. н., ²Грищак Д. Д., к. ф.-м., н., м. н. с., ³Кадет Н. П.

¹*Інститут служби зовнішньої розвідки України,
вул. Бульварно-Кудрявська, 11, м. Київ, 04053, Україна*

²*Центральний науково-дослідний інститут озброєння і військової техніки
Збройних Сил України,
Повітрофлотський просп., 28, м. Київ, 03049, Україна*

³*Національний авіаційний університет,
просп. Космонавта Комарова, 1, м. Київ, 03058, Україна*

gristchak@gmail.com

У роботі на основі дослідження динаміки маятничого осцилятора, що обертається із швидкістю, залежною від часу, дається аналіз процесу галуження або біфуркаційних станів складної динамічної «ієрархічної» системи за умови залежності її параметрів від часу. Показано, зокрема, що розташування точки біфуркації досліджуваної системи на діаграмі рівноважних станів істотно залежить від закону зміни швидкості обертання маятничого осцилятора від часу, і власна частота коливань досліджуваного лінійного маятника сповільнюється в системі відліку, що обертається, порівняно зі своїм значенням в інерціальній системі згідно із законом, обумовленим залежностями кутової швидкості обертання і довжини осцилятора від часу. Залежність довжини і маси осцилятора від часу, а також величина параметра управління впливають на характер демпфування динамічного процесу. Потенційна функція досліджуваної системи, як і системи з незалежними від часу параметрами, є періодичною функцією від кутової координати, а її залежність від часу відповідає функціям довжини і швидкості обертання за часом. Представлені залежності потенційної функції при різних значеннях параметра управління і функціях зміни довжини і швидкості обертання маятника від часу. Демпфування нелінійного динамічного процесу залежить від характеру зміни довжини і маси осцилятора від часу, величини і знака параметра управління, а також характеру зовнішнього навантаження, діючого на досліджувану систему.

Ключові слова: обертовий маятничий осцилятор, залежні від часу параметри, діаграма біфуркацій.

BIFURCATION AL STATE OF THE REVOLVED PENDULUM OSCILLATOR WITH PARAMETERS OF LENGTH AND MASS, DEPENDING FROM TIME

¹Gristchak D. V., ²Gristchak D. D., ³Kadet N. P.

¹*Institute Services of External Secret Service of Ukraine,
Bulvarno-Kudrjavsca str., 11, Kyiv, 04053, Ukraine*

²*Central Research institute of armament and military technique of the Armed Forces of Ukraine,
Povetroflotsky ave., 28, Kyiv, 03049, Ukraine*

³*National aviation university,
Cosmonaut Komarov ave., 1, Kyiv, 03058 Ukraine*

gristchak@gmail.com

In this paper on the basis of research of dynamics of pendulum oscillator, that is revolved with speed dependency upon time, the analysis of process of branching or bifurcational states of the difficult dynamic "hierarchical" system is given on condition of dependence of it parameters on time. It is shown, in particular, that the location of point of bifurcation of the investigated system on an equilibrium bubble diagram substantially depends on the law of change of speed of rotation of pendulum oscillator from time and the eigen frequency of swings of the investigated linear pendulum is slowed in the frame of reference that is revolved, in comparison with the value in the inertial system by law, conditioned by dependences of angular of rotation and length of oscillator on time. Dependence of length and mass of oscillator on time, and also size of management parameter influence on character of damping of dynamic process. A potential function of the investigated system, as well as systems, with not dependency upon time parameters is aperiodic function from an angular coordinate, and its dependence on time answers the functions of length and speed of rotation at times. Presented dependence of potential function on the values of management parameter and functions of change of length and speed of rotation of pendulum at times. Damping of nonlinear dynamic process depends on character of change of length and mass of oscillator from time, size and sign of management parameter, and also character of the external loading operating on investigated.

Key words: pendulum that rotate, parameters depending on the time, bifurcation diagram.

ВСТУП

Проблема теоретичного опису складно організованих систем, зокрема ієрархічного розшарування і нелінійної динаміки, привертає увагу дослідників з точки зору вивчення процесів управління, пов'язаних із здобуттям інформації, і «вироблення сигналів управління» [1]. Відомо [2-9], що дослідження нелінійних коливальних рухів сучасних машин і апаратів, таких, наприклад, як аерокосмічні системи з оболонками, що містять рідину, й інші конструкції нової техніки, базується переважно на вивченні коливальних маятникових осциляторів. Проте класична маятникова модель у ряді випадків не дозволяє адекватно моделювати досліджувані явища і процеси, що призводить до необхідності її уточнення і введення нових степенів свободи і залежності параметрів системи від часу. На прикладі теоретичного аналізу динамічної поведінки маятникового осцилятора, що обертається, із змінними у часі параметрами, як математичної моделі реальної складної динамічної системи, вивчається вплив таких параметрів управління, як залежність швидкості обертання, довжини і маси осцилятора від часу на її біфуркаційний стан. Ця робота певною мірою є продовженням публікацій [10, 11].

ОСНОВНЕ ВИРІШУЮЧЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ МАЯТНИКОВОГО ОСЦИЛЯТОРА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ, ЗІ ЗМІННИМИ У ЧАСІ ПАРАМЕТРАМИ

Розглядається маятник, що коливається, з масою m , залежною від часу, поміщеного усередині твердого двовимірного тора радіуса L , що є функцією часу. Шар може ковзати без тертя усередині тора, що обертається, з кутовою швидкістю Ω в загальному випадку, також залежною від часу (як показано на рис. 1).

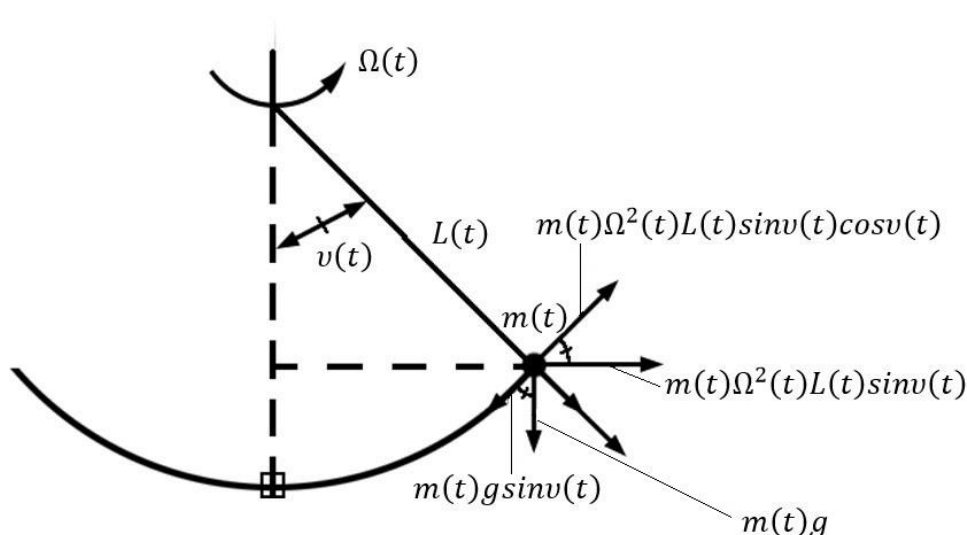


Рис. 1. Маятниковий осцилятор, що обертається, зі змінними у часі параметрами [11]

Основне вирішуюче рівняння вимушених коливань досліджуваної системи надано в роботі [10]:

$$\frac{d}{dt} \left[m(t)L(t) \frac{d\nu}{dt} \right] = -m(t)g \sin \nu + m(t)\Omega^2(t)L(t)\sin \nu \cos \nu + F(t), \quad (1)$$

де $F(t)$ – функція зовнішньої дії на центр маси.

Після перетворень початкове рівняння (1) приводиться до вигляду:

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} + D'(t) \frac{d\nu}{dt} = \omega_0^2 \left\{ \frac{\Omega_0^2}{2\omega_0^2} [1 + \eta(t)]^2 \sin 2\nu - \frac{\sin \nu}{[1 + \psi(t)]} \right\} + \tilde{F}(t), \quad (2)$$

де

$$L(t) = L_0(1 + \psi(t)), \quad D'(t) = \frac{m'(t)}{m(t)} + \frac{L'(t)}{L(t)}, \quad Q(t) = \Omega^2(t), \quad (3)$$

$$\tilde{F}(t) = \frac{F(t)}{m(t)L(t)}, \quad G(t) = \frac{g}{L(t)}.$$

Вводячи параметр $\mu = \frac{\Omega_0^2 L_0}{g}$ та позначивши $\omega_0^2 = \frac{g}{L_0}$, рівняння (2) переписується у формі:

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} = \omega_0^2 \sin \nu \left\{ \mu \cos \nu [1 + \eta(t)]^2 - 1 \right\} \frac{1}{1 + \psi(t)} + D'(t) \frac{d\nu}{dt} + \tilde{F}(t), \quad (4)$$

де

$$L(t) = L_0 [1 + \psi(t)], \quad \Omega(t) = \Omega_0 [1 + \eta(t)]. \quad (5)$$

У випадку, коли $|\nu| \ll 1$, рівняння (4) лінеаризується:

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} + \omega^2 \nu = D'(t) \frac{d\nu}{dt} + \tilde{F}(t), \quad (6)$$

де

$$\omega^2 = \omega_0^2 \frac{1}{1+\psi(t)} \left\{ 1 - \mu [1+\eta(t)]^2 \right\} \quad (7)$$

– власна частота коливань лінеаризованого осцилятора, що обертається, із врахуванням залежності довжини і швидкості обертання від часу.

Зі співвідношення (7) виходить, що власна частота досліджуваного лінійного маятника (дійсна за умови $\mu [1+\eta(t)]^2 < 1$) сповільнюється в системі відліку, що обертається, порівняно зі своїм значенням в інерціальній системі відліку згідно із законом, обумовленим залежностями кутової швидкості обертання і довжини осцилятора від часу. За умови

$$\mu [1+\eta(t)]^2 > 1 \quad \left(\Omega_0^2 > \frac{g}{L_0 [1+\eta(t)]} \right) \quad \text{чи} \quad \Omega_0^2 > \omega_0^2 \frac{1}{[1+\eta(t)]} \quad (8)$$

лінійний осцилятор у системі відліку, що обертається, не коливається, а здійснює затухаючі неперіодичні рухи за умови $D'(t) \neq 0$, $\tilde{F}(t) = 0$.

Дотримуючись роботи [1], розглядається стійкість вирішення рівняння (4) за умови відсутності зовнішньої дії. Стаціонарні стани ($\ddot{\nu} = \text{const}$) вимагають одночасного виконання рівностей $\nu = 0$ і $\dot{\nu} = 0$, тобто

$$\sin \nu \left\{ \mu \cos \nu [1+\eta(t)]^2 - 1 \right\} \frac{1}{1+\psi(t)} = 0. \quad (9)$$

Рівнянню (9) задовольняють або $\sin \nu = 0$, $\nu = \pm k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), або $\cos \nu = \frac{1}{\mu [1+\eta(t)]^2}$,

$\mu [1+\eta(t)]^2 \geq 1$. Перший розв'язок відповідає «класичним», стаціонарним станам $\nu = 0$ (стійкий стан), що не обертаються, і $\nu = \pm k\pi$ (нестійкий стан).

Розв'язок

$$\nu = \arccos \left\{ \frac{1}{\mu [1+\eta(t)]^2} \right\} \quad \text{або} \quad \nu = \arccos \left\{ \mu [1+\eta(t)]^2 \right\}^{-1} \quad (10)$$

при кожному $\mu [1+\eta(t)]^2 > 1$ породжує аналогічно для системи з постійними від часу параметрами дві симетричні гілки. При значенні $\mu [1+\eta(t)]^2 = 1$ з $\nu = 0$ виходять три рішення, як показано на рис. 2, де вирішення рівняння

$$\frac{d^2 \nu}{dt^2} = \omega_0^2 \sin \nu \left\{ \mu \cos \nu [1+\eta(t)]^2 - 1 \right\} \frac{1}{1+\psi(t)} \quad (11)$$

показані як функції параметра μ як параметра управління. При значеннях $\mu [1+\eta(t)]^2 \rightarrow \infty$

маємо $\frac{1}{\mu [1+\eta(t)]^2} \rightarrow 0$, $\nu \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Як впливає з приведеного аналізу, стійкий стаціонарний стан $\nu = 0$ стає нестійким, і нові нестійкі стаціонарні стани задаються співвідношенням (10) і є симетричними.

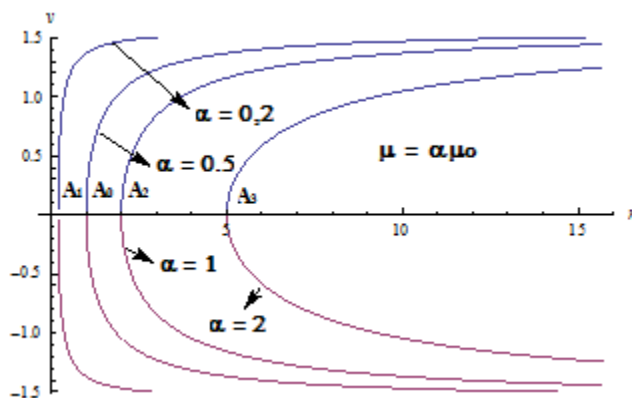


Рис. 2. Біфуркаційна діаграма нелінійного маятнікового осцилятора, що обертається, відповідно до залежності (10)

Приведені залежності побудовані для фіксованого моменту t і заданого закону зв'язку швидкості обертання і часу (тут n позначає параметр управління досліджуваної системи μ , μ_0 – параметр системи, властивості якої не залежать від часу, що управляє, величина параметра a визначає величину швидкості обертання $[1 + \eta(t)]^2$ для фіксованого моменту часу). Як випливає з рис. 7, положення точки біфуркації досліджуваної системи із змінними параметрами істотно залежить від закону зміни швидкості обертання маятнікового осцилятора від часу.

Що стосується потенціальної функції обертового маятнікового осцилятора із змінними у часі параметрами, то у гамільтоновій системі вона пов'язана з діючою системою сил

$$\tilde{F}(t) = \omega_0^2 \sin v \left\{ \mu \cos v [1 + \eta(t)]^2 - 1 \right\} \frac{1}{1 + \psi(t)}$$

залежністю [1] $F = \frac{\partial V(v)}{\partial v}$, з якої випливає, що

$$V(v, \mu, t) = \frac{\omega_0^2}{1 + \psi(t)} \left\{ \frac{\mu}{2} [1 + \eta(t)]^2 \cos v - 1 \right\} \cos v \tag{12}$$

є періодична функція кутової координати с періодом 2π і характером поведінки за часом, пов'язаним із залежностями від часу довжини і швидкості обертання.

Результати чисельного аналізу потенціальної функції.

Так, наприклад, для параметрів $\omega_0^2 = 100$, $\mu = 1$, $[1 + \eta(t)]^2 = (1 + t)^2$, $[1 + \psi(t)] = (1 + t)$ залежність (12) у діапазоні часу $0.5 < t < 5$ має вигляд:

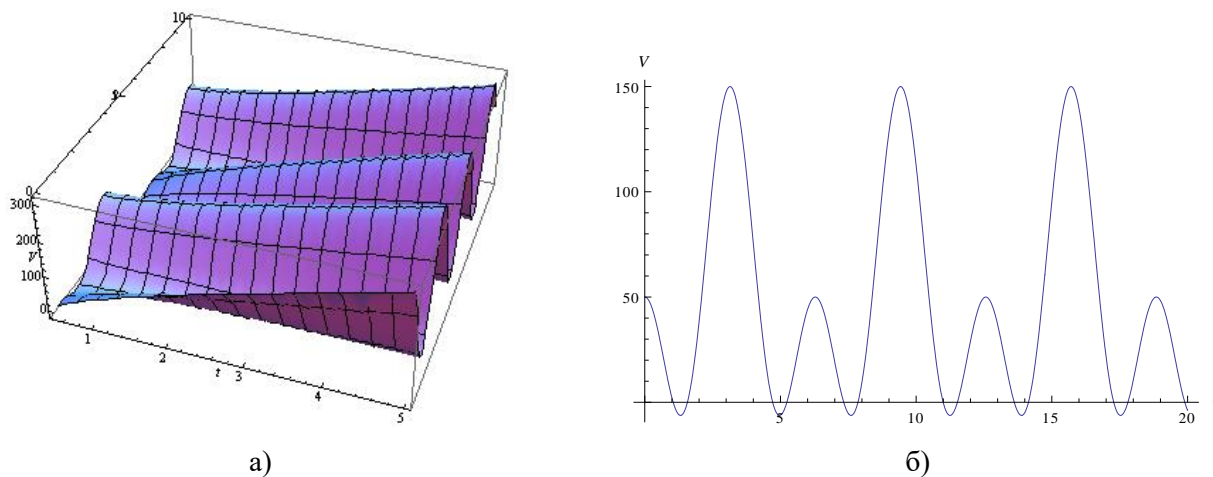


Рис. 3. Поведінка потенціальної функції: а) при заданому значенні параметра $\mu = 1$; б) при фіксованих параметрах $\mu = 1$ і $t = 1$

Для системи з параметрами, які не залежать від часу, відповідні графіки мають вигляд.

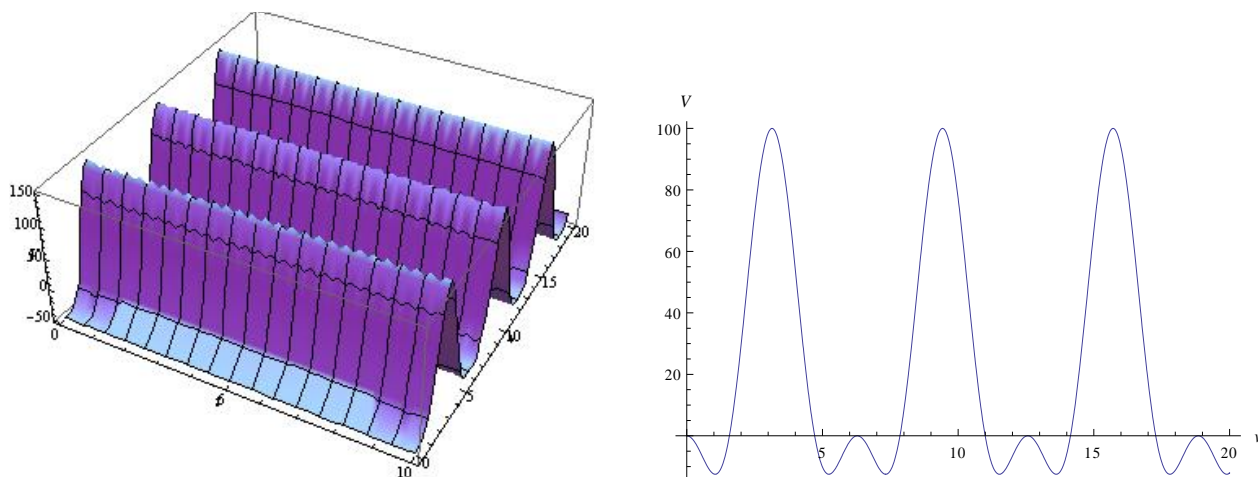


Рис. 4. Поведінка потенціальної функції системи з параметрами, не залежними від часу при заданому значенні параметра управління $\mu = 1$

Графіки залежності потенціальної функції при різних значеннях параметра управління μ і функціях зміни довжини і швидкості обертання маятника від часу представлені на рис. 5–7.

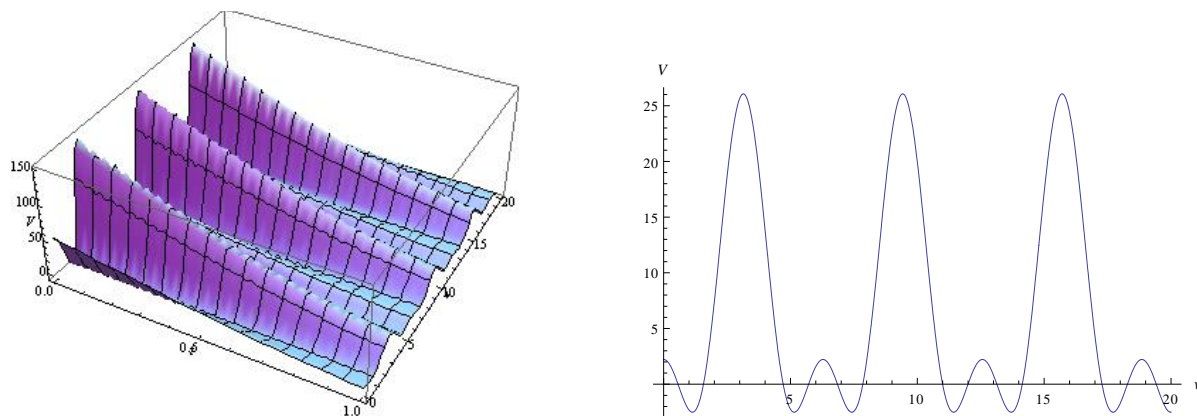


Рис. 5. Поведінка потенціальної функції системи з параметрами $\mu = 1$, $\psi(t) = \exp 2t$, $\eta(t) = \cos t$

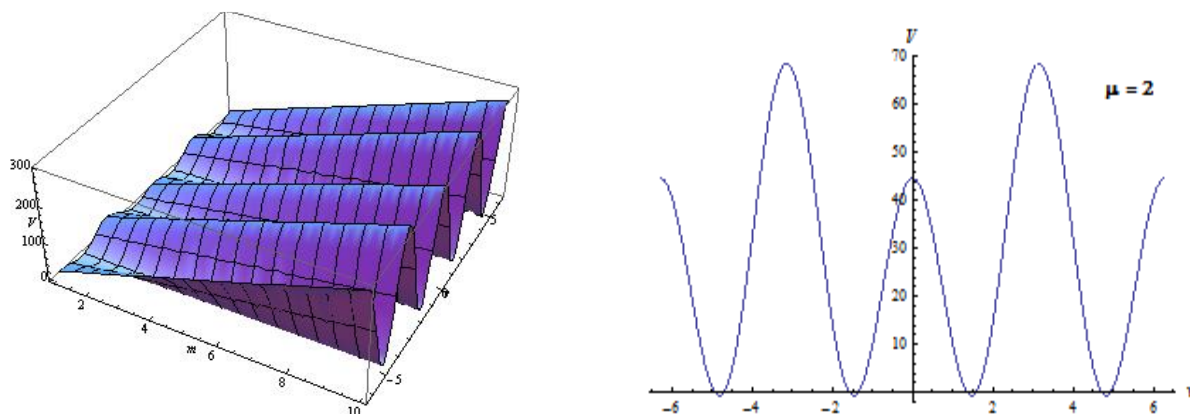


Рис. 6. Вплив параметра управління $\mu \geq 1$ при фіксованому значенні $t = 1$ на поведінку потенціальної функції $V(v, \mu, t)$ з характеристиками системи $\psi(t) = \exp 2t$, $\eta(t) = \cos t$

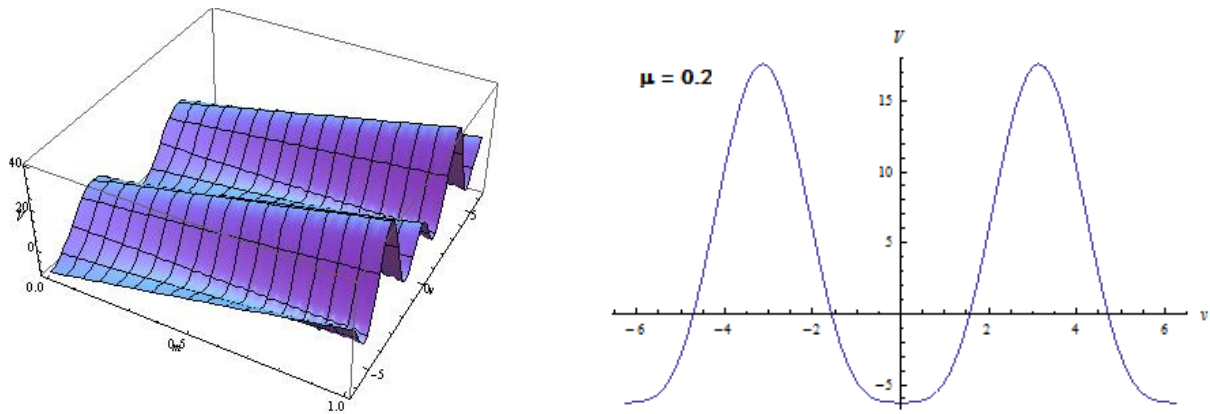


Рис. 7. Вплив параметра управління $\mu < 1$ при фіксованому значенні $t = 1$ на поведінку потенціальної функції $V(v, \mu, t)$ з характеристиками системи $\psi(t) = \exp 2t$, $\eta(t) = \cos t$

ВИСНОВКИ

З приведенного аналізу зроблено висновок, що розташування точки біфуркації досліджуваної системи на діаграмі рівноважних станів істотно залежить від закону зміни швидкості обертання маятникового осцилятора від часу. Залежність довжини і маси осцилятора від часу, а також величина параметра управління впливають на характер демпфування динамічного процесу. Цей аналіз може бути основою для подальшого дослідження резонансних явищ у складних динамічних системах з параметрами, залежними від часу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Николис Дж. Динамика иерархических систем. Эволюционное представление. Москва: Мир, 1989. 486 с.
2. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Нестационарные колебания осциллятора переменной массы с учетом вязкого трения. *Вібрації в техніці і технологіях*. 2014. № 3 (75). С. 18–27.
3. Безгласный С. П., Кутырева Н. И. Управление колебаниями маятника переменной длины. *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*. 2013. Т. 15, № 6 (3). С. 589–593.
4. Безгласный С. П., Кутырева Н. И. Стабилизация нестационарных движений маятника на вращающемся основании. *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*. 2014. Т. 16, № 4. С. 77–82.
5. Красильников П. С., Сторожкина Т. А. Исследование резонансных колебаний математического маятника переменной длины. *Электронный журнал «Труды МАИ»*. Вып. 46. С. 1–11.
6. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. Москва: Машиностроение, 1968. 532 с.
7. Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. Москва: Машиностроение, 1977. 208 с.
8. Kubenko V. D., Koval'chuk P. S. Modeling the Nonlinear Interaction of Standing and Traveling Bending Waves in Fluid-Filled Cylindrical Shells Subject to Internal Resonances. *International Applied Mechanics*. 2015. Vol. 50, No. 3. P. 353–364.
9. Limarchenko O. S. Peculiarities of application of perturbation techniques in problems of nonlinear oscillations of liquid with a free surface in cavities of non-cylindrical shape. *Український математичний журнал*. 2007. Vol. 59, № 1. P. 44–70.
10. Азарсков В. Н., Грищак Д. В., Грищак Д. Д. Приближенное аналитическое решение задачи динамики математического маятника переменной массы и длины. *Труды XI Междунар. науч.-техн. конф. «АВИА-2013»*, (Киев, 21–23 мая, 2013). Киев: НАУ. 2013. Т. 4. С. 22.1–22.4.
11. Грищак Д. Д. Управління вимушеними коливаннями обертового математичного маятника з довжиною і масою, залежними від часу. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2016. № 2. С. 69–81.

REFERENCES

1. Nocolis, J. (1989). Dynamics of the hierarchical systems. Evolutional presentation. Moscow: Mir.
2. Olshansky, V. P. & Olshansky, S. V. (2014). Non-stationary vibrations of oscillator of variable mass taking into account a viscid friction. *Vibratsiyi v tekhnitsi i tekhnolohiyakh*, No. 3(75), pp. 18–27.
3. Bezglasnyi, S. P. & Kutyreva, N. I. (2013). Control of oscillations of a pendulum of variable length. *Izvestiia samarskogo nauchnogo tcentra Rossiiskoi akademii nauk*, Vol. 15, No. 6(3), pp. 589–593.
4. Bezglasnyi, S. P. & Kutyreva, N. I. (2014). Stabilization of nonstationary pendulum movements on a rotating base. *Izvestiia samarskogo nauchnogo tcentra Rossiiskoi akademii nauk*, Vol. 16, No. 4, pp. 77–82.
5. Krasilnikov, P. S. & Storozhkina, T. A. Study of resonant oscillations of a mathematical pendulum of variable length. *Elektronnyi zhurnal «Trudy MAI»*, Issue 46, pp. 1–11.
6. Mikishev, G. N. & Rabinovich, B. I. (1968). Dynamics of a solid body with cavities partially filled with liquid. Moscow: Mashinostroenie.
7. Narimanov, G. S., Dokuchaev, L. V. & Lukovskii, I. A. (1977). Nonlinear dynamics of an aircraft with a liquid. Moscow: Mashinostroenie.
8. Kubenko, V. D. & Koval'chuk, P. S. (2015). Modeling the Nonlinear Interaction of Standing and Traveling Bending Waves in Fluid-Filled Cylindrical Shells Subject to Internal Resonances. *International Applied Mechanics*, Vol. 50, No. 3, pp. 353–364.
9. Limarchenko, O. S. (2007). Peculiarities of application of perturbation techniques in problems of nonlinear oscillations of liquid with a free surface in cavities of non-cylindrical shape. *Ukrayins'kyi matematychnyy zhurnal*, Vol. 59, No. 1, pp. 44–70.
10. Azarskov, V. N., Grishchak, D. V. & Grishchak, D. D. (2013). An approximate analytical solution of the problem of the dynamics of a mathematical pendulum of variable mass and length. Proceedings of the XI International Scientific and Technical Conference “AVIA-2013”, (pp. 22.1–22.4), Kiev (NAU).
11. Grishchak, D. D. (2016). Control for forced vibrations of rotating mathematical pendulum with dependent from time length and mass. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*, No. 2, pp. 69–81.

УДК 0048:681.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-03

**ОГЛЯД МЕТОДІВ МАШИННОГО НАВЧАННЯ В ЗАДАЧІ
ПРОГНОЗУВАННЯ ФІНАНСОВИХ ЧАСОВИХ РЯДІВ**

Гурєєва К. М., Кудін О. В., к. ф.-м. н., Лісняк А. О., к. ф.-м. н.

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

avk256@gmail.com

Часові ряди, які відображають динаміку деякого процесу, є досить складними за своєю структурою та можуть включати тренд, сезонну складову, випадковий шум. Такі часові ряди містять характеристики, що описують зміни стану системи протягом її еволюції. Наприклад, фінансові часові ряди відображають поточний економічний стан, і тому перспективними є дослідження в цій сфері для моделювання подальшого розвитку економіки. У літературі запропоновано велику кількість різноманітних моделей для вирішення проблем прогнозування, це класичні методи математичної статистики, а також методи машинного навчання. Актуальною є задача аналізу сучасних методів і моделей прогнозування фінансових часових рядів та класифікації досить великого обсягу існуючих публікацій за певними ознаками. Метою даної

роботи є огляд останніх публікацій з прогнозування фінансових часових рядів, що використовують машинне навчання, статистичні підходи та гібридні моделі. На основі аналізу підходів, що використовуються в різних публікаціях, можна їх класифікувати за двома категоріями. До першої категорії належать роботи, у яких прогнозування здійснюється на основі попередніх значень часових рядів. У публікаціях цього класу використовуються класичні статистичні підходи, такі як ARIMA, GARCH та інші варіанти цих алгоритмів. Також застосовуються прогностичні моделі на основі методів машинного навчання: методу опорних векторів, k -найближчих сусідів, дерев рішень, нейронних мереж різних типів. У багатьох статтях для обробки даних використовуються перетворення Фур'є або вейвлет-перетворення. До другої категорії належать публікації, в яких автори намагаються об'єднати інформацію про конкретні події (фінансові або політичні новини, пошукові запити користувачів) та історію попередніх значень часових рядів. Такі моделі більш складні за рахунок великої кількості параметрів. На підставі аналізу публікацій та методів, що використовуються в них, можна зробити висновок, що найбільш перспективним напрямком дослідження є розробка гібридних систем, що поєднують прогнозування майбутніх значень часових рядів на основі історичних даних і використання додаткових даних з новин, статистики пошукових систем і т.д. Одним з методів розробки таких гібридних систем може бути метод побудови ансамблю різних моделей машинного навчання, які використовували б різні дані для навчання. Перевагою такого підходу є його адаптивність з точки зору використання обчислювальних ресурсів.

Ключові слова: фінансовий часовий ряд, машинне навчання, класифікація, прогнозування.

AN OVERVIEW OF MACHINE LEARNING METHODS FOR FINANCIAL TIME SERIES FORECASTING

Hurieieva K. M., Kudin O. V., Lisnyak A. O.

*Zaporizhzhya National University,
Zhykovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

avk256@gmail.com

Time series reflect the dynamic of natural or artificial process. Such time series contain parameters describing system's changes in different epochs of its evolution. For example, financial time series reflect current economic state and therefore researches in this sphere are demanded. A wide number of sophisticated models have been proposed in the literature to solve prediction problems, most popular are classic statistical methods and machine learning methods. Therefore, the necessity for overview modern methods and models for financial time series forecasting has arisen. The aim of our paper is to overview the recent publications which use machine learning, statistical approaches and hybrid models. There are two categories we determine from recent research papers survey. First category includes works in which the forecasting is performed on the basis of previous time series values. The methods used in these publications relate to classic statistical approaches, such as ARIMA, GARCH and other variants of these algorithms. Also, prognostic models are used based on methods of machine learning: the method reference vectors, k -nearest neighbors, decision trees, neural networks of different types. In many articles for data pre-processing Fourier transform or wavelet transform are used. The second category includes publications in which the authors try to combine the information about specific events (financial or political news, volume of user search queries) and the history of the previous values of the time series. Such models are more complex at the expense of a large number of parameters. Based on the analysis of publications and the methods used in them, we can conclude that the most promising direction of research is hybrid systems development that combine both the prediction of future values of the time series on the basis of historical data of a number of data, and the use of additional data from the news, search engine statistics, etc. One of the methods of developing such hybrid systems can be a method of constructing an ensemble of different models of machine learning, which would use different data for learning. The advantage of this approach is its adaptability in terms of demanding to computing resources.

Key words: financial time series, machine learning, classification, forecasting.

ВСТУП

Складні природні та технічні системи під час свого функціонування породжують часові ряди, які характеризують стан системи у певні проміжки часу. Можливість прогнозування таких часових рядів дозволяє дослідникам передбачати стан системи у майбутньому та застосовувати різні підходи для керування її станом. Згідно з деякими гіпотезами, зокрема гіпотезою ефективного ринку [1], стан ринку цінних паперів відображає не тільки актуальне положення економіки, але й політичні та соціальні події, які впливають на поведінку

учасників ринку. З іншої точки зору, сучасні ринки є адаптивними системами, які еволюціонують за певною внутрішньою логікою [2]. У будь-якому разі актуальною задачею є прогнозування фінансових часових рядів, які відображають зміну в часі макроекономічних показників, біржових індексів, вартості валютних пар тощо.

Метою даної роботи є огляд методів та моделей прогнозування фінансових часових рядів. Акцент робиться на роботах, які застосовують методи машинного навчання для дослідження впливу економічних, політичних новин на значення фінансових часових рядів, зокрема на курс криптовалют Bitcoin.

ОГЛЯД ПОПЕРЕДНІХ ПУБЛІКАЦІЙ

Стандартними задачами при аналізі часових рядів є прогнозування майбутніх значень ряду та класифікація рядів, наприклад для виявлення аномальних даних.

Прогнозуванню часових рядів присвячено досить багато публікацій, при цьому класичні підходи, які розглядаються в цих роботах, також застосовуються і в аналізі фінансових часових рядів. Такими підходами є сімейство методів на основі авторегресивної моделі (autoregressive moving-average model, ARMA) та авторегресивні умовно гетероскедастичні моделі (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity, ARCH), у яких моделюється залежність дисперсії від попередніх значень часового ряду. Основи цих методів викладено у монографіях, присвячених аналізу часових рядів [3, 4].

Застосування та розвинення класичних підходів у задачах прогнозування та аналізу фінансових часових рядів розглядається в роботах [5-9]. Статті [5, 8] присвячені особливостям використання сімейства методів ARCH. У [5] порівнюються 330 варіантів моделі ARCH для прогнозування значення коливань ціни (волатильності) фінансових часових рядів, зокрема в роботі [8] розглянуто модель порогової авторегресії (threshold autoregressive model). Автори на емпіричних прикладах демонструють високу ефективність моделі GARCH(1,1) порівняно з іншими варіантами.

При дослідженні часових рядів, як і в інших задачах, виникає потреба в попередній обробці даних з метою фільтрації або зміни способу представлення. Зазвичай у цих випадках використовуються варіанти перетворення Фур'є та, останніми роками, вейвлет перетворення.

У роботах [7, 9] розглядаються моделі фільтрації даних від шуму – випадкових значень часового ряду. Основна задача фільтрації даних у цьому випадку – відокремити детерміновані паттерни та цикли від випадкових значень ряду. Авторами використовуються декілька видів фільтрів – нелінійний прямий та зворотний фільтр (forward-backward filtering), фільтри на основі вейвлет та Фур'є перетворення. Для прогнозування значень часового ряду використовується модель авторегресії [7] та GARCH [9].

Одним з широко застосовуваних підходів є використання алгоритмів сімейства ARMA, ARCH у поєднанні з методами машинного навчання, які виконують функції налаштування параметрів класичних алгоритмів (наприклад, нейронні мережі, генетичні алгоритми тощо) [10-15]. Так, наприклад, у статтях [10-12] поєднується метод ARIMA з генетичним програмуванням [10], нейронними мережами [11, 12]. Прогнозування в таких випадках виконується в два етапи: спочатку моделюються лінійні залежності в даних за допомогою методу ARIMA, потім залишки прогнозуються за допомогою нелінійної моделі на базі одного з методів машинного навчання.

У роботі [13] перед застосуванням методу ARIMA виконується попереднє експоненційне згладжування даних. Пропонується метод декомпозиції часових рядів, який дозволяє виділити такі складові: тренд, сезонну компоненту, циклічну компоненту та випадковий шум.

Окрім нейронних мереж, широко застосовуються більш класичні детерміновані методи машинного навчання, наприклад, метод опорних векторів [14] або статистичне виведення за Бассом для оцінки параметрів методу GARCH в [15].

Останніми роками найбільша кількість публікацій присвячена саме використанню методів машинного навчання в задачах прогнозування часових рядів. Огляд статей з цього напрямку наведено в [16-19], а в [20-29] викладені деякі результати досліджень цього напрямку.

Одними з найбільш поширених інструментів прогнозування часових рядів серед методів машинного навчання є нейронні мережі, зокрема багатошаровий перцептрон. Так, у роботі [20] поєднуються багатошаровий перцептрон для прогнозування значень ряду та еволюційні алгоритми для параметризації нейронної мережі.

Також широко застосовуються різні варіанти рекурентних нейронних мереж (recurrent neural network, RNN). Особливість використання цієї архітектури полягає в тому, що результати обчислень рекурентних нейронів на попередніх ітераціях навчання впливають на всі наступні ітерації навчання, тобто у випадку з часовими рядами попередні значення ряду впливають на наступні, що і є природним. Наприклад, у роботі [22] для прогнозування часового ряду використовується варіант рекурентних нейронних мереж Елмана, який поєднує переваги використання багатошарового перцептрону та рекурентних нейронних мереж.

Порівняння ефективності нейронної мережі довгої короткочасної пам'яті (long short-term memory, LSTM), рекурентних нейронних мереж та згорткових нейронних мереж (convolutional neural network, CNN) для прогнозування фінансових часових рядів можна знайти в статті [23]. LSTM нейронні мережі також використовуються в роботах [25, 29].

У [26] будується гібридний підхід на основі обмеженої машини Больцмана та методу опорних векторів. Обмежена машина Больцмана використовується для зменшення розмірності вектора ознак часового ряду, а метод опорних векторів – для класифікації рядів на два класи: зростаючі та спадаючі часові ряди.

Не менш поширеними методами побудови регресійних моделей для прогнозування фінансових часових рядів є методи опорних векторів та k-найближчих сусідів [24, 27, 28].

З метою узагальнення результатів та отримання більш точної результуючої моделі в статтях [21, 25] розглядаються різні підходи до поєднання декількох моделей машинного навчання.

У задачах аналізу фінансових часових рядів є окремий напрям, який полягає у поєднанні класичних методів прогнозування та методів обробки додаткової, переважно текстової інформації [30-43]. Джерелами такої додаткової інформації зазвичай виступають поширені ресурси новин засобів масової інформації, блоги відомих фінансистів тощо. У статтях цього напрямку розв'язуються наступні основні задачі: вибір способу моделювання текстів, тобто перетворення тексту новин у деякий числовий вектор; визначення методу поєднання вектора характеристик новин та попередніх значень часового ряду; визначення проміжку часу між публікацією новин та потенційною реакцією ринку.

Серед основних методів моделювання текстів новин, які використовуються в останніх публікаціях, можна виділити наступні: статистика слів, які зустрічаються в документах (bag of words) [31, 37], статистика словосполучень (n-грами слів) [32, 37], статистика слів, що зустрічаються в документі стосовно статистики документів (term-frequency inverse-document-frequency) [30, 34, 37, 39]. Також у багатьох публікаціях використовуються бібліотеки Word2Vec, GloVe [43], OpenIE [40, 41], які є, фактично, стандартом у задачах обробки природної мови.

У деяких роботах [33, 42] аналізується не статистика певних слів або словосполучень у тексті, а емоційне забарвлення тексту в цілому з точки зору впливу на поведінку ринку. Зазвичай використовуються деякі заздалегідь натреновані словники та ресурси: Google-

Profile of Mood States, OpinionFinder [33], Loughran McDonald Master Dictionary [42]. Оскільки бібліотеки Word2Vec, GloVe, OpenIE описують семантичне представлення текстів, тобто відстань між векторами текстів зі схожим змістом буде незначна, вони також можуть використовуватись для визначення емоційного забарвлення текстів.

У роботі [35] аналізуються повідомлення у twitter-каналах, пов'язаних з певними фінансовими компаніями. Повідомлення у twitter моделюються за допомогою графу взаємодій, у якому вузлами є повідомлення, користувачі тощо, а ребрами – зв'язки. Після чого обчислюються характеристики графу, наприклад кількість пов'язаних компонентів. Показано високу кореляцію між зміною характеристик графу взаємодій та динамікою цін на ринку.

Інформація про статистику пошуків у Google, зокрема сервіс Google Trends та статистика переглядів Wikipedia, використовується в [38]. Показано кореляцію між підвищенням пошукових запитів, які стосуються певних валют та цінних паперів, та послідуочим падінням ринку.

У роботах [40, 41] розробляється метод структурного представлення новин засобами інструменту Open IE. Таке представлення дозволяє виділити об'єкт, дію, пов'язані об'єкти. Пропонується алгоритм на основі нейронних мереж представлення новин у вигляді $E = (O_1, P, O_2)$, де O_1, O_2 – об'єкти, які пов'язані дією P . Порівнюються два підходи до моделювання текстів – bag of words та структурне представлення [40]. Для класифікації новин використовуються метод опорних векторів, глибинна нейронна мережа прямого поширення [40] та згортова нейронна мережа [41].

При моделюванні впливу фінансових новин на динаміку цін на ринку часто розв'язується задача класифікації з метою визначити, до якого наслідку призводить та чи інша новина: зменшення, збільшення ціни або нейтральний стан. Серед алгоритмів машинного навчання, які при цьому застосовуються як найбільш популярні, можна виділити наступні: метод опорних векторів [31, 32, 37, 39, 40], нейронні мережі прямого поширення сигналу [40, 42], самоорганізаційні карти Кохонена [30], метод навчання з множинними ядерними функціями (multi-kernel learning) [34], метод k-найближчих сусідів [39], згортові нейронні мережі [41].

Останнім часом особливий інтерес представляє можливість прогнозування значень ціни криптовалют, наприклад Bitcoin, оскільки спосіб торгівлі, обсяг на ринку відрізняються від стандартних валют. Підходи до прогнозування значень ціни криптовалюти Bitcoin у доларах USD наведено в джерелах [44-51]. Можна зробити висновок, що основні підходи до прогнозування Bitcoin мало відрізняються від розглянутих вище. Так, у статтях [44, 45, 47, 48] для прогнозування значень часового ряду ціни Bitcoin використовуються наступні підходи: метод k-найближчих сусідів, метод опорних векторів [45], алгоритми ARIMA [47, 48] та GARCH [48], випадковий ліс [48], лінійна регресія [51], нейронні мережі [49-51].

Також у деяких роботах зустрічаються спроби аналізувати та прогнозувати вплив новин або активності у соціальних мережах на курс Bitcoin. Наприклад, у статті [46] для опису ступеня зацікавленості інвесторів у валюті використовується кількість повідомлень у Twitter. Для опису взаємної залежності двох часових рядів, відповідно, динаміки кількості нових у Twitter з ключовим словом «Bitcoin» та ціною валюти, використовується метод векторної авторегресії (vector autoregressive). Показано суттєвий вплив кількості повідомлень на волатильність валюти та на обсяг продаж.

У роботі [49] для прогнозування значень часового ряду використовується глибинна нейронна мережа прямого поширення сигналу з п'ятьма прихованими шарами, які містять по сто нейронів. Також використовуються рекурентні нейронні мережі. Для порівняння використовується чотири типи рекурентних нейронних мереж. Додатково аналізується інформація соціальних мереж, форумів, блогів фінансистів. Для обробки текстової

інформації використовується тематичне моделювання методом латентного аналізу Діріхле, яке застосовується для сентимент аналізу текстів.

Емоційне забарвлення тексту з точки зору фінансового впливу аналізується і в [51]. Для сентимент аналізу публікацій у Twitter застосовується алгоритм VADER [52]. Виконується порівняння декількох алгоритмів машинного навчання для прогнозування ціни Bitcoin, зокрема лінійна регресія, багатошаровий перцептрон та нейронна мережа типу LSTM.

ВИСНОВКИ

З аналізу літературних джерел можна зробити висновок, що задача прогнозування фінансових часових рядів, зокрема прогнозування цін криптовалют, є досить актуальною. Опубліковані на цей час наукові статті можна умовно розділити на дві великі категорії.

До першої відносять роботи, у яких виконується прогнозування на основі суто попередніх значень часового ряду. До методів, які застосовуються в цих публікаціях, відносяться класичні статистичні підходи, наприклад ARIMA, GARCH та інші варіанти цих алгоритмів. Також застосовуються прогностичні моделі на базі методів машинного навчання: методу опорних векторів, k-найближчих сусідів, дерев рішень, нейронних мереж різних типів. У багатьох статтях при попередній обробці даних використовується фільтрація за допомогою перетворення Фур'є або вейвлет-перетворення. Можливі також різні комбінації всіх згаданих підходів.

До другої категорії можна віднести публікації, у яких автори намагаються поєднати відомості про певні події (фінансові або політичні новини, кількість пошукових запитів користувачів) та історію попередніх значень часового ряду. Такі моделі є більш складними за рахунок великої кількості параметрів. Стандартними підходами тут є моделювання текстів за допомогою суто статистичних характеристик слів або застосування бібліотек, на кшталт Word2Vec та GloVe, які використовують заздалегідь навчені нейронні мережі для перетворення тексту в числовий вектор. Після цього числові вектори, що характеризують новини, поєднуються з історичними даними часових рядів цін валют або використовуються для навчання класифікатора, що визначає, як ціна впливає на курс.

На основі наведеного в роботі аналізу публікацій та методів, що в них застосовуються, можна зробити висновок, що найбільш перспективним напрямом досліджень є розробка гібридних систем, які поєднують у собі як прогнозування майбутніх значень часового ряду на основі історичних даних ряду даних, так і використання додаткових даних з новин, статистики пошукових запитів тощо. Одним з методів розробки таких гібридних систем може стати метод побудови ансамблю різних моделей машинного навчання, які б використовували для навчання різні дані.

Перевагою такого підходу може бути його адаптивність з точки зору вимогливості до обчислювальних ресурсів, оскільки, за необхідності, можна коректувати кількість класифікаторів, які беруть участь в аналізі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Fama E. F. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *The Journal of Finance*. 1970. Vol. 25, N. 2. P. 383–417
2. Lo A. W. Adaptive Markets. Princeton University Press, 2017. 483 p.
3. Brockwell P. J., Davis R. A. Introduction to Time Series and Forecasting. New York: Springer, 2016. 425 p.
4. De Gooijer J. G. Elements of Nonlinear Time Series Analysis and Forecasting. New York: Springer, 2017. 622 p.
5. Hansen P. R., Lunde A. A Forecast Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH(1,1)? *Journal of Applied Econometrics*. 2005. Vol. 20. P. 873–879

6. Chakraborti A., Patriarca M., Santhanam M. S. Financial time-series analysis: A brief overview. 2007. URL: <https://arxiv.org/abs/0704.1738>.
7. Leng J. Modelling and Analysis on Noisy Financial Time Series. *Journal of Computer and Communications*. 2014. Vol. 2. P. 64–69.
8. Truong Buu-Chau, Chen Cathy W. S., So Mike K. P. Model selection of a switching mechanism for financial time series. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*. 2016. P. 1-16.
9. Rostan P., Rostan A. The versatility of spectrum analysis for forecasting financial time series. *Journal of Forecasting*. 2017, Vol. 37. Issue 3. P. 327–339. DOI: <https://doi.org/10.1002/for.2504>.
10. Barbulescu A. Bautu E. A Hybrid Approach for Modeling Financial Time Series. *The International Arab Journal of Information Technology*. 2012, Vol. 9, N. 4, P. 327–335.
11. Kapila Tharanga Rathnayaka R. M., Seneiratna D. M. K. N, Arumawadu H. I. A New Financial Time Series Approach for Volatility Forecasting. *Symposium on Statistical & Computational Modelling with Applications*. 2016. P. 5–8.
12. Khashei M., Hajirahim Z. Performance evaluation of series and parallel strategies for financial time series forecasting. *Financial Innovation*. 2017. 3:24. DOI: <https://doi.org/10.1186/s40854-017-0074-9>.
13. Gautam A., Singh V. A Novel Approach for Decomposition of Financial Time Series. *Recent Innovations in Signal Processing and Embedded Systems (RISE-2017)*. 2017. DOI: 10.1109/RISE.2017.8378214.
14. Fabregues L., Arratia A., Belanche L.A. Forecasting Financial Time Series with Multiple Kernel Learning. *Advances in Computational Intelligence. IWANN 2017. Lecture Notes in Computer Science*. 2017. Vol 10306. P. 176-187. DOI: 10.1007/978-3-319-59147-6_16.
15. Zhu F., Quan W., Zheng Z., Wan S. A Bayesian Learning Method for Financial Time-Series Analysis. *IEEE Access*. 2018. Vol. 6. P. 38959–38966. DOI: 10.1109/ACCESS.2018.2853998.
16. Guilherme A. Barreto. Time Series Prediction with the Self-Organizing Map: Review. Perspectives of Neural-Symbolic Integration. *Studies in Computational Intelligence*. 2007. Vol 77. P. 135-158. DOI:https://doi.org/10.1007/978-3-540-73954-8_6.
17. Kavitha S., Raja Vadhana P., Nivi A. N. Big Data Analytics In Financial Market. *International Journal of Research in Engineering and Technology*. 2015. Vol. 04, Issue 02. P. 422-427.
18. Dingli A., Fournier K.S. Financial Time Series Forecasting – A Machine Learning Approach. *Machine Learning and Applications: An International Journal (MLAIJ)*. 2017. Vol. 4, No. 1/2/3.
19. Lorant Bodis. Financial Time Series Forecasting Using Artificial Neural Networks. Master Thesis. 2004.
20. Nayak S. C., Misra B. B., Behera H. S. Cooperative Optimization for Efficient Financial Time Series Forecasting. *2014 International Conference on Computing for Sustainable Global Development (INDIACom)*. 2014. P. 124-129.
21. Jin S., Su L., Ullah A. Robustify Financial Time Series Forecasting with Bagging. *Econometric Reviews*. 2014. Vol. 33(5–6). P. 575–605.
22. Wang J., Wang J., Fang W., Niu H. Financial Time Series Prediction Using Elman Recurrent Random Neural Networks. *Computational Intelligence and Neuroscience*. 2016. P. 1-14. DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2016/4742515>.
23. Sreelekshmy S., Vinayakumar R, Gopalakrishnan E.A, Vijay K.M., Soman K.P. Stock Price Prediction Using LSTM, RNN And CNN-Sliding Window Model. *2017 International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI)*. 2017. P. 1643-1647. DOI: 10.1109/ICACCI.2017.8126078.
24. Chowdhury U. N., Chakravarty S. K., Hossain Md. T. Short-Term Financial Time Series Forecasting Integrating Principal Component Analysis and Independent Component Analysis with Support Vector Regression. *Journal of Computer and Communications*. 2018. Vol. 6. P. 51-67

25. Sun S., Wei Y., Wang S. AdaBoost-LSTM Ensemble Learning for Financial Time Series Forecasting. *ICCS 2018: Computational Science – ICCS 2018*. 2018. P. 590-597. DOI: 10.1007/978-3-319-93713-7_55.
26. Assis C. A. S., Machado E. J., Pereira A. C. M., Carrano E. G. Hybrid deep learning approach for financial time series classification. *Revista Brasileira de Computação Aplicada*. 2018, Vol. 10, N. 2, P. 54–63.
27. Pang S., Sarrafzadeh A., Inoue D. Referential kNN Regression for Financial Time Series Forecasting. *ICONIP 2013*. 2013. Part I. P. 601–608.
28. Yujun Y., Yimei Y., Jianping L. Research on financial time series forecasting based on SVM. *13th International Computer Conference on Wavelet Active Media Technology and Information Processing (ICCWAMTIP)*. 2016. P. 346–349. DOI: 10.1109/ICCWAMTIP.2016.8079870.
29. Yan H., Ouyang H. Financial Time Series Prediction Based on Deep Learning. *Wireless Pers Commun*. 2018. Vol. 102, Issue 2. P. 683–700. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11277-017-5086-2>.
30. Stefano Di D., Pediroda V. A news-based financial time series discretization. *Proceedings of the 6th International Workshop on Self-Organizing Maps*. 2007. P. 1–8.
31. Schumaker R., Chen H. Textual Analysis of Stock Market Prediction Using Breaking Financial News: The AZFinText System. *ACM Transactions on Information Systems*. 2009. Vol. 27(2).
32. Kaya Yasef M. I., Karsligil M. E. Stock Price Prediction Using Financial News Articles. *2010 2nd IEEE International Conference on Information and Financial Engineering*. 2010. P. 478–482. DOI: 10.1109/ICIFE.2010.5609404.
33. Bollen J., Mao H., Zeng X.-J. Twitter mood predicts the stock market. 2010. Ref: <https://arxiv.org/pdf/1010.3003.pdf>.
34. Li X., Wang C., Dong J., Wang F., Deng X., Zhu S. Improving Stock Market Prediction by Integrating Both Market News and Stock Prices. *DEXA 2011, Part II, LNCS 6861*. 2011. P. 279–293.
35. Ruiz E. J., Hristidis V., Castillo C., Gionis A., Jaimes A. Correlating Financial Time Series with Micro-Blogging Activity. *WSDM '12 Proceedings of the fifth ACM international conference on Web search and data mining*. 2012. P. 513–522. DOI: 10.1145/2124295.2124358.
36. Abdullah S. S., Rahaman M. S., Rahman M. S. Analysis of Stock Market using Text Mining and Natural Language Processing. *International Conference on Informatics, Electronics and Vision (ICIEV)*. 2013. DOI: 10.1109/ICIEV.2013.6572673.
37. Hagenau M., Liebmann M., Neumann D. Automated news reading: Stock price prediction based on financial news using context-capturing features. *Decision Support Systems*. 2013. Vol. 55. P. 685–697.
38. Curme C., Preis T., Stanley H.E., Moat H.S. Quantifying the semantics of search behavior before stock market moves. *PNAS*. 2014. Vol. 111, N. 32. P. 11600–11605.
39. Seker S. E., Mert C., Al-Naami K., Ozalp N., Ayan U. Time Series Analysis On Stock Market For Text Mining Correlation Of Economy News. *International Journal Of Social Sciences And Humanity Studies*. 2014. Vol 6, No 1. ISSN: 1309-8063 (Online).
40. Ding X., Zhang Y., Liu T., Duan J. Using structured events to predict stock price movement: An empirical investigation. *Proceedings EMNLP*. 2014. P. 1415–1425.
41. Ding X., Zhang Y., Liu T., Duan J. Deep Learning for Event-Driven Stock Prediction. *Proceedings of the Twenty-Fourth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI 2015)*. 2015. P. 2327–2333.
42. Кононова К. Ю., Дек А. О. Прогнозування Фінансових Рядів: Семантичний Аналіз Економічних Новин. *Нейро-нечіткі технології моделювання в економіці*. 2016. № 5. С. 82–92.
43. Bruyn De M. From Word to Financial Time Series Embedding. 2018. Ref: <https://ssrn.com/abstract=3184513>.
44. Catania L., Grassi S. Modelling Crypto-Currencies Financial Time-Series. 2017. DOI: 10.2139/ssrn.3028486.

45. Raghava-Raju A. A Machine Learning Approach to Forecast Bitcoin Prices. *International Journal of Computer Applications* (0975 – 8887). 2018. Vol. 182, No. 24.
46. Shen D., Urquhart A., Wang P. Does twitter predict Bitcoin? *Economics Letters*. 2018. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.econlet.2018.11.007>.
47. Yenidogan I., Cayir A., Kozan O., Dag T., Arslan C. Bitcoin Forecasting Using ARIMA and PROPHET. *3rd International Conference on Computer Science and Engineering UBMK'18*. 2018. DOI: 10.1109/UBMK.2018.8566476.
48. Guo T., Antulov-Fantulin N. An experimental study of Bitcoin fluctuation using machine learning methods. 2018. URL: <https://arxiv.org/abs/1802.04065>.
49. Seo Y., Hwang C. Predicting Bitcoin Market Trend with Deep Learning Models. *Quantitative Bio-Science*. 2018. Vol. 37, No. 1. P. 65-71
50. Nakano M., Takahashi A., Takahashi S. Bitcoin technical trading with artificial neural network. *Physica A*. 2018. № 510. P. 587–609
51. Matas Navickas, Ignas Bagdonas, Vu Ngoc Viet Nguyen. Predicting Bitcoin Price using Machine Learning. 2018. Report.
52. Hutto C. J., Gilbert E. VADER: A Parsimonious Rule-based Model for Sentiment Analysis of Social Media Text. *8th international AAAI conference on weblogs and social media (ICWSM)*. 2014.

REFERENCES

1. Fama, E. F. (1970). Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *The Journal of Finance*, Vol. 25, No. 2, pp. 383-417.
2. Lo, A. W. (2017). *Adaptive Markets*. Princeton University Press.
3. Brockwell, P. J. & Davis, R. A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting*. New York: Springer.
4. De Gooijer, J. G. (2017). *Elements of Nonlinear Time Series Analysis and Forecasting*. New York: Springer.
5. Hansen, P. R., Lunde, A. (2005). A Forecast Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH(1,1)? *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 20, pp. 873-879.
6. Chakraborti, A., Patriarca, M. & Santhanam, M. S. (2007). Financial time-series analysis: A brief overview. URL: <https://arxiv.org/abs/0704.1738>.
7. Leng, J. (2014). Modelling and Analysis on Noisy Financial Time Series. *Journal of Computer and Communications*, Vol. 2, pp. 64-69.
8. Truong, Buu-Chau, Chen Cathy, W. S. & So Mike, K. P. (2016). Model selection of a switching mechanism for financial time series. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, pp. 1-16.
9. Rostan, P. & Rostan, A. (2017). The versatility of spectrum analysis for forecasting financial time series. *Journal of Forecasting*, Vol. 37, Issue 3, pp. 327-339. DOI: <https://doi.org/10.1002/for.2504>.
10. Barbulescu, A. & Bautu, E. (2012). A Hybrid Approach for Modeling Financial Time Series. *The International Arab Journal of Information Technology*, Vol. 9, No. 4, pp. 327-335.
11. Kapila Tharanga Rathnayaka, R. M., Seneiratna, D. M. K. N. & Arumawadu, H. I. (2016). A New Financial Time Series Approach for Volatility Forecasting. *Symposium on Statistical & Computational Modelling with Applications*, pp. 5-8.
12. Khashei, M. & Hajirahim, Z. (2017). Performance evaluation of series and parallel strategies for financial time series forecasting. *Financial Innovation*, Vol. 3:24. DOI: <https://doi.org/10.1186/s40854-017-0074-9>.
13. Gautam, A. & Singh, V. (2017). A Novel Approach for Decomposition of Financial Time Series. *Recent Innovations in Signal Processing and Embedded Systems (RISE-2017)*. DOI: 10.1109/RISE.2017.8378214.

14. Fabregues, L., Arratia, A. & Belanche, L. A. (2017). Forecasting Financial Time Series with Multiple Kernel Learning. *Advances in Computational Intelligence. IWANN 2017. Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 10306, pp. 176-187. DOI: 10.1007/978-3-319-59147-6_16.
15. Zhu, F., Quan, W., Zheng, Z. & Wan, S. (2018). A Bayesian Learning Method for Financial Time-Series Analysis. *IEEE Access*, Vol. 6, pp. 38959-38966. DOI: 10.1109/ACCESS.2018.2853998.
16. Guilherme, A. Barreto. (2007). Time Series Prediction with the Self-Organizing Map: Review. Perspectives of Neural-Symbolic Integration. *Studies in Computational Intelligence*, Vol. 77, pp. 135-158. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-73954-8_6.
17. Kavitha, S., Raja Vadhana, P. & Nivi, A. N. (2015). Big Data Analytics In Financial Market. *International Journal of Research in Engineering and Technology*, Vol. 04, Issue 02, pp. 422-427.
18. Dingli, A. & Fournier, K. S. (2017). Financial Time Series Forecasting – A Machine Learning Approach. *Machine Learning and Applications: An International Journal (MLAIJ)*, Vol. 4, No. 1/2/3.
19. Lorant, Bodis (2004). Financial Time Series Forecasting Using Artificial Neural Networks. Master Thesis.
20. Nayak, S. C., Misra, B. B. & Behera, H. S. (2014). Cooperative Optimization for Efficient Financial Time Series Forecasting. 2014 International Conference on Computing for Sustainable Global Development (INDIACom), pp. 124-129.
21. Jin, S., Su, L. & Ullah, A. (2014). Robustify Financial Time Series Forecasting with Bagging. *Econometric Reviews*, Vol. 33(5–6), pp. 575-605.
22. Wang J., Wang J., Fang W., Niu H. (2016). Financial Time Series Prediction Using Elman Recurrent Random Neural Networks. *Computational Intelligence and Neuroscience*, pp. 1-14. DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2016/4742515>.
23. Sreelekshmy, S., Vinayakumar, R., Gopalakrishnan, E. A., Vijay, K. M. & Soman, K. P. (2017). Stock Price Prediction Using LSTM, RNN And CNN-Sliding Window Model. 2017 International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI), pp. 1643-1647. DOI: 10.1109/ICACCI.2017.8126078.
24. Chowdhury, U. N., Chakravarty, S. K. & Hossain, Md. T. (2018). Short-Term Financial Time Series Forecasting Integrating Principal Component Analysis and Independent Component Analysis with Support Vector Regression. *Journal of Computer and Communications*, Vol. 6, pp. 51-67.
25. Sun, S., Wei, Y. & Wang, S. (2018). AdaBoost-LSTM Ensemble Learning for Financial Time Series Forecasting. ICCS 2018: Computational Science – ICCS 2018, pp. 590-597. DOI: 10.1007/978-3-319-93713-7_55.
26. Assis, C. A. S., Machado, E. J., Pereira, A. C. M. & Carrano, E. G. (2018). Hybrid deep learning approach for financial time series classification. *Revista Brasileira de Computação Aplicada*, Vol. 10, No. 2, pp. 54-63.
27. Pang, S., Sarrafzadeh, A. & Inoue, D. (2013). Referential kNN Regression for Financial Time Series Forecasting. *ICONIP 2013, Part I*, pp. 601-608.
28. Yujun, Y., Yimei, Y. & Jianping, L. (2016). Research on financial time series forecasting based on SVM. 13th International Computer Conference on Wavelet Active Media Technology and Information Processing (ICCWAMTIP), pp. 346-349. DOI: 10.1109/ICCWAMTIP.2016.8079870.
29. Yan, H. & Ouyang, H. (2018). Financial Time Series Prediction Based on Deep Learning. *Wireless Pers Commun*, Vol. 102, Issue 2, pp. 683-700. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11277-017-5086-2>.
30. Stefano, Di D. & Pediroda, V. (2007). A news-based financial time series discretization. *Proceedings of the 6th International Workshop on Self-Organizing Maps*, pp. 1-8.
31. Schumaker, R. & Chen, H. (2009). Textual Analysis of Stock Market Prediction Using Breaking Financial News: The AZFinText System. *ACM Transactions on Information Systems*, Vol. 27(2).
32. Kaya Yasef, M. I. & Karsligil, M. E. (2010). Stock Price Prediction Using Financial News Articles. 2010 2nd IEEE International Conference on Information and Financial Engineering, pp. 478-482. DOI: 10.1109/ICIFE.2010.5609404.

33. Bollen, J., Mao, H. & Zeng, X.-J. (2010). Twitter mood predicts the stock market. Ref: <https://arxiv.org/pdf/1010.3003.pdf>.
34. Li, X., Wang, C., Dong, J., Wang, F., Deng, X. & Zhu, S. (2011). Improving Stock Market Prediction by Integrating Both Market News and Stock Prices. DEXA 2011, Part II, LNCS 6861, pp. 279-293.
35. Ruiz, E. J., Hristidis, V., Castillo, C., Gionis, A. & Jaimes, A. (2012). Correlating Financial Time Series with Micro-Blogging Activity. WSDM '12 Proceedings of the fifth ACM international conference on Web search and data mining, pp. 513-522. DOI: 10.1145/2124295.2124358.
36. Abdullah, S. S., Rahaman, M. S. & Rahman, M. S. (2013). Analysis of Stock Market using Text Mining and Natural Language Processing. International Conference on Informatics, Electronics and Vision (ICIEV). DOI: 10.1109/ICIEV.2013.6572673.
37. Hagenau, M., Liebmann, M. & Neumann, D. (2013). Automated news reading: Stock price prediction based on financial news using context-capturing features. Decision Support Systems, Vol. 55, pp. 685-697.
38. Curme, C., Preis, T., Stanley, H. E. & Moat, H. S. (2014). Quantifying the semantics of search behavior before stock market moves. PNAS, Vol. 111, No. 32, pp. 11600-11605.
39. Seker, S. E., Mert, C., Al-Naami, K., Ozalp, N. & Ayan, U. (2014) Time Series Analysis On Stock Market For Text Mining Correlation Of Economy News. International Journal Of Social Sciences And Humanity Studies, Vol 6, No. 1. ISSN: 1309-8063 (Online).
40. Ding, X., Zhang, Y., Liu, T. & Duan, J. (2014). Using structured events to predict stock price movement: An empirical investigation. Proceedings EMNLP, pp. 1415-1425.
41. Ding, X., Zhang, Y., Liu, T. & Duan, J. (2015). Deep Learning for Event-Driven Stock Prediction. Proceedings of the Twenty-Fourth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI 2015), pp. 2327-2333.
42. Kononova, K. & Dek, A. (2016). Financial Time Series Forecasting: Semantic Analysis of Economic News. Neuro-Fuzzy Modeling Techniques in Economics, No. 5, pp. 82-92.
43. Bruyn, De M. (2018). From Word to Financial Time Series Embedding. Ref: <https://ssrn.com/abstract=3184513>.
44. Catania, L. & Grassi, S. (2017). Modelling Crypto-Currencies Financial Time-Series. DOI: 10.2139/ssrn.3028486.
45. Raghava-Raju, A. (2018). A Machine Learning Approach to Forecast Bitcoin Prices. International Journal of Computer Applications, Vol. 182, No. 24.
46. Shen, D., Urquhart, A. & Wang P. (2018). Does twitter predict Bitcoin? Economics Letters. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.econlet.2018.11.007>.
47. Yenidogan, I., Cayir, A., Kozan, O., Dag, T. & Arslan, C. (2018). Bitcoin Forecasting Using ARIMA and PROPHET. 3rd International Conference on Computer Science and Engineering UBMK'18. DOI: 10.1109/UBMK.2018.8566476.
48. Guo, T. & Antulov-Fantulin, N. (2018). An experimental study of Bitcoin fluctuation using machine learning methods. URL: <https://arxiv.org/abs/1802.04065>.
49. Seo, Y. & Hwang, C. (2018). Predicting Bitcoin Market Trend with Deep Learning Models. *Quantitative Bio-Science*, Vol. 37, No. 1, pp. 65-71.
50. Nakano, M., Takahashi, A. & Takahashi, S. (2018). Bitcoin technical trading with artificial neural network. *Physica A*, No. 510, pp. 587-609.
51. Matas Navickas, Ignas Bagdonas & Vu Ngoc Viet Nguyen. (2018). Predicting Bitcoin Price using Machine Learning. Report.
52. Hutto, C. J. & Gilbert, E. (2014). VADER: A Parsimonious Rule-based Model for Sentiment Analysis of Social Media Text. 8th international AAAI conference on weblogs and social media (ICWSM).

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-04

РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ И ШЕРОХОВАТОСТИ, ДЕФОРМИРУЮЩЕЙСЯ ПО НЕЛИНЕЙНЫМ ЗАКОНАМ

Дьяченко Н. Н., к. ф.-м. н., доцент, Мухин В. В., к. т. н., доцент, Мистюк В. Ю., магистр,
Юрченко А. К., магистр

*Запорожский национальный университет
ул. Жуковского 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

dyachenkonata69@gmail.com

Рассматривается плоская квазистатическая задача о скольжении без наклона штампа с плоским основанием по поверхности упругого шероховатого слоя (полосы) при нелинейных (степенном и экспоненциальном) законах деформирования шероховатости. Задача решена с учетом влияния трения на нормальные перемещения штампа. Для каждого закона, в двух случаях ограничения на коэффициенты шероховатости, найдены аналитические решения задачи. С помощью метода редукции и метода последовательных приближений найдены числовые результаты и проведен их анализ. Получены выводы относительно влияния коэффициентов шероховатости и трения на контактные характеристики.

Ключевые слова: плоская контактная задача, штамп с плоским основанием, шероховатость, линейный, степенной и экспоненциальный законы деформирования шероховатости, трение, метод последовательных приближений, метод редукции.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЛОСКОЇ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ І ШОРСТКОСТІ, ЩО ДЕФОРМУЄТЬСЯ ЗА НЕЛІНІЙНИМИ ЗАКОНАМИ

Д'яченко Н. М., к. ф.-м. н., доцент, Мухін В. В., к. т. н., доцент, Містюк В. Ю., магистр,
Юрченко А. К., магистр

*Запорізький національний університет
вул. Жуковського 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

dyachenkonata69@gmail.com

Розглянуто плоску квазістатичну задачу про ковзання без нахилу штампа з плоскою основою по поверхні пружного шорсткого шару (смуги) при нелінійних (степеневому та експоненціальному) законах деформування шорсткості. Задачу розв'язано з урахуванням тертя на нормальні переміщення штампа.

Інтегральне рівняння задачі зведено до інтегрального рівняння Гаммерштейна в операторному вигляді для кожного закону. Виділено два випадки обмежень на коефіцієнти шорсткості: коефіцієнти обмежені знизу (великі) та обмежені зверху (малі). Для кожного закону, у двох випадках обмежень на коефіцієнти шорсткості, доведено єдиність відповідного розв'язку та знайдено аналітичний розв'язок. У кожному випадку розв'язок подано степеневим рядом за всіма степенями незалежної змінної. Коефіцієнти таких рядів задовольняють нескінченним системам нелінійних алгебраїчних рівнянь. За допомогою методу редукції та методу послідовних наближень отримано наближені розв'язки задачі.

Числові результати візуалізовані. Проведено аналіз щодо впливу коефіцієнтів шорсткості та тертя на контактні характеристики. У граничних випадках одержано узгодження отриманих результатів з відомими. Зокрема, дійшли висновку, що при зменшенні коефіцієнта тертя, так само як і при зменшенні коефіцієнтів шорсткості степеневому та експоненціальному законів, що залежать від висоти мікрорівнів шорсткості, всі контактні характеристики наближаються до відповідних характеристик без урахування тертя або шорсткості відповідно. Найбільше значення контактної тиску досягається на межі площадки контакту, а найменше – у внутрішній точці цієї площадки. При збільшенні коефіцієнта тертя або коефіцієнтів шорсткості нелінійних законів, що залежать від висоти мікрорівнів, абсциса точки найменшого тиску зміщується від центру в напрямку дії дотичної сили; при цьому заглиблення штампа в пружну шорстку смугу збільшується.

Ключові слова: плоска контактна задача, штамп з плоскою основою, шорсткість, лінійний, степеневий та експоненціальний закони деформування шорсткості, тертя, метод послідовних наближень, метод редукції.

SOLVING OF THE PLANE CONTACT PROBLEM TAKING INTO ACCOUNT FRICTION AND ROUGHNESS, THAT IS DEFORMED BY NONLINEAR LAWS

Dyachenko N. M., Ph. D. in Physics and Math, associate professor, Mukhin V. V., Ph. D. in Engineering, associate professor, Mistiuk V. Yu, M.S. in Math, Yurchenko A. K., M.S. in Math

*Zaporizhzhya National University
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

dyachenkonata69@gmail.com

The quasi-static plane problem about sliding with a friction of punch with the flat foundation on a surface of an elastic rough layer (a strip) is considered at the nonlinear laws (the power law and the exponential law) of deformation of a roughness. It is supposed, that the punch inclination is absent. Plane contact problems taking into account a roughness are studied in works [3, 5, 9-10], taking into account a friction – in [3, 7], taking into account both factors – in [14,15]. However, in article [14] it is supposed, that tangential stress do not influence normal pressure. In article [15] this factor is taken into account in the linear law of roughness deformation.

Properties of the nonlinear integral operators of the given problem are studied for the power law and the exponential law of roughness deformation. On the basis of these properties the analytical solutions of problems is received in two cases of restriction on the roughness factors for each of these laws. For each of the laws, the integral equation of the problem is reduced to the Hammerstein integral equation. The solution of this equation is represented by a power series in all powers of the independent variable. The coefficients of this series and the deepening of the punch satisfy an infinite system of nonlinear algebraic equations. The reduction method and the method of successive approximations are used to obtain an approximate solution.

The analysis of numerical results concerning influence of a roughness and a friction on contact characteristics is carried out. In the limiting cases, the coordination of the obtained results with the known ones is obtained. In particular, it is obtained that with a decrease in the friction coefficient, as well as with a decrease in the roughness coefficients of the power and exponential law, that is depended on the height of the roughness micro-asperities, all contact characteristics approach the corresponding characteristics without considering the friction or the roughness, respectively. The greatest value of the contact pressure is reached at the boundary of the contact area, and the lowest one at the inner point of this area. As the friction coefficient or the roughness coefficients of the nonlinear laws increase, that is depended on the height of the micro-asperities, the abscissa of the lowest pressure point shifts from the center in the direction of the tangential force; at the same time the deepening of the punch in the elastic rough strip increases.

Key words: a plane contact problem, a punch with the flat foundation, a roughness, the linear, power and exponential laws of roughness deformation, a friction, a method of successive approximations, a reduction method.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность решения контактных задач связана с потребностями инженерной практики [1]. Реальные тела обладают шероховатой поверхностью, а фактический контакт сопровождается трением. Исследованиям микрорельефа поверхностей, в том числе шероховатости, а также влиянию такого микрорельефа на контактное взаимодействие посвящены работы [1-4]. Впервые контактная задача с учетом шероховатости была решена И. Я. Штаерманом [5]. Он предположил, что суммарное перемещение штампа, вдавливаемого в тело с шероховатой поверхностью, состоит из двух слагаемых: первое соответствует перемещению упругого тела, а второе – смятию микровыступов шероховатости. В результате теоретических и экспериментальных исследований получено, что смятие микровыступов может зависеть от давления по линейному, степенному или экспоненциальному законам [3, 6]. Степенной и линейный законы применяются для малых внешних сил, действующих на штамп, а экспоненциальный – для больших [8, 9].

В работах [3, 7-10] и др. решены контактные задачи в пространственной и плоской постановке с учетом шероховатости при различных законах ее деформирования. Такие задачи с дополнительным учетом трения изучены в пространственной постановке в [11-13], в плоской – в [14, 15]. Однако в статье [14] предполагается, что тангенциальные напряжения не влияют на нормальное давление. В статье [15] этот фактор учтен, однако в обеих работах

[14, 15] рассмотрен случай линейного закона деформирования шероховатости, в то время как в данной работе, – случаи нелинейных законов (степенного и экспоненциального).

Интегральное уравнение, моделирующее плоское контактное взаимодействие штампа с упругой полосой, учитывающее влияние шероховатости, приведено в [3], трения – в [7]. Уравнение, применяемое авторами, является суперпозицией таких уравнений.

Для получения аналитического решения поставленной задачи применяется подход, предложенный в работах [8, 9], с тем отличием, что аналитическое решение представляется степенным рядом, содержащим не только четные степени независимой переменной, но и нечетные. Такой выбор ряда диктуется результатами работы [15].

Цель работы. Построить аналитическое и приближенно аналитическое решение квазистатической задачи о напряженном состоянии, которое появляется в упругом слое (полосе) при скольжении по нему без наклона штампа с учетом трения и шероховатости поверхности слоя при степенном и при экспоненциальном законах деформирования шероховатости, обосновать единственность решения в каждом случае и возможность применения численных методов, провести анализ числовых результатов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим шероховатый слой $\{|x| < +\infty, 0 < y < h\}$, настолько толстый, что $\lambda = \frac{a}{h} \leq \frac{1}{2}$.

Возможны два случая закрепления полосы ($y = h$) [3]:

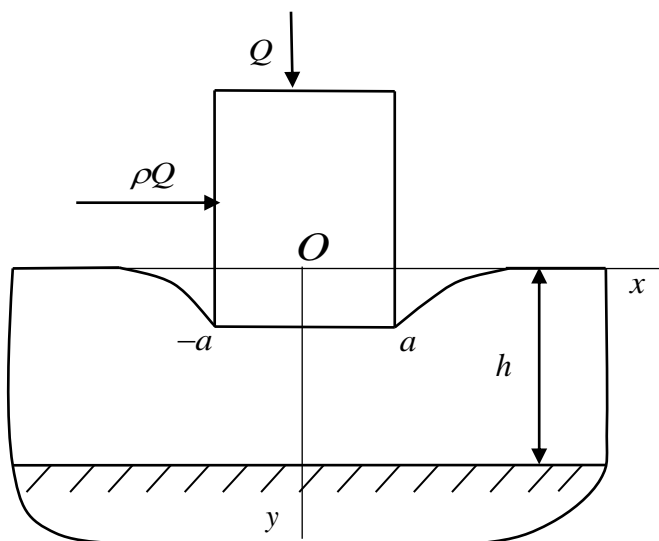


Рис. 1. Схема контакта штампа с упругим слоем

1. Полоса лежит на жестком основании без трения:

$$\tau_{xy}(x, h) = 0, v(x, h) = 0, |x| < +\infty.$$

2. Полоса жестко закреплена на основании:

$$u(x, h) = v(x, h) = 0.$$

Предположим, что штамп вдавливается в упругий шероховатый слой вертикальной силой Q (рис. 1). В направлении оси x действует сила, по модулю равная ρQ . Эта сила заставляет штамп скользить по поверхности слоя со скоростью настолько малой, что динамическими составляющими можно пренебречь. При этом также предположим, что штамп не совершает поворота под действием приложенных сил.

Граничные условия на поверхности $y = 0$ в обоих случаях задач 1 и 2 имеют вид [3, 7]:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, 0) = 0, \sigma_y(x, 0) = 0, a < |x| < +\infty, \\ \sigma_y(x, 0) = -p(x), \tau_{xy}(x, 0) = \rho p(x), |x| \leq a, \end{aligned}$$

где $p(x)$ – нормальное давление под штампом, δ – углубление штампа в упругий слой, ρ – коэффициент трения.

В поставленной задаче интегральное уравнение и условие равновесия имеют вид [3, 7]:

$$W[p^{(i)}](x) + \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \left[\int_{-a}^a \left[-\ln \left| \frac{x'-x}{h} \right| + a_0 \right] p^{(i)}(x') dx' + \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \pi \int_{-a}^x \rho p^{(i)}(x') dx' \right] = \delta^{(i)}, \quad i=1, 2, \quad (1)$$

$$\int_{-a}^a p^{(i)}(x') dx' = Q, \quad i=1 \text{ или } i=2, \quad (2)$$

где E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона, значение величины a_0 может быть $a_0 = -0,352$ для задачи 1 и $a_0 = -0,527$ – для задачи 2 при $\nu = 0,3$. В задаче неизвестными являются контактные характеристики: нормальное давление и углубление штампа.

Первое слагаемое $W^{(i)}(x)$ в правой части (1) определяется законом деформирования шероховатости [3, 6]. Для степенного закона [3] – $W[p^{(1)}](x) = B[p^{(1)}(x)]^\kappa$, для экспоненциального [6] – $W[p^{(2)}](x) = H \left(1 - \exp \left[-\frac{\beta}{E} p^{(2)}(x) \right] \right)$. Тут B , κ , H , β – коэффициенты шероховатости соответствующих законов.

Введем обозначения: $C = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}$, $W_1[f](x) = \frac{W[f](x)}{a}$, $p_1^{(i)}(x) = Cp(x)$, $t = \frac{x}{a}$,
 $p_2(t) = p_1(ta)$, $\delta_1^{(i)} = \frac{\delta^{(i)}}{a}$, $B_1 = \frac{B}{C^\kappa a}$, $H_1 = \frac{H}{a}$, $\alpha = \frac{\beta\pi}{2(1-\nu^2)}$, $C_0 = \ln \frac{a}{h} - a_0$, $C_2 = \frac{1-2\nu}{2-2\nu}$,

$C_1 = C_2\rho$, $Q_2 = CQ$, в соответствии с чем перепишем уравнения (1) и (2) в безразмерных величинах ($i=1$ или $i=2$):

$$W_1[p_2^{(i)}](t) + \int_{-1}^1 [-\ln|t'-t| - C_0] \cdot p_2^{(i)}(t') dt' + C_1 \int_{-1}^t p_2^{(i)}(t') dt' = \delta_1^{(i)}, \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 p_2^{(i)}(t') dt' = Q_2. \quad (4)$$

Введем оператор

$$[Lf](t) = \int_{-1}^1 [\ln|t'-t| + C_0] f(t') dt' - C_1 \int_{-1}^t f(t') dt' \quad (5)$$

и перепишем уравнения (3) в операторном виде ($i=1$ или $i=2$):

$$W_1[p_2^{(i)}](t) - [Lp_2^{(i)}](t) = \delta_2. \quad (6)$$

В работе [9] доказано, что норму линейного оператора $L: C[-1;1] \rightarrow C[-1;1]$ можно оценить как

$$\|L\| \leq 8 + 2C_1 = C^*. \quad (7)$$

Через C^{**} обозначим любое число, большее C^* .

Дальнейшие действия будем делать в соответствии с подходом, изложенным в работах [8, 9]. Так же, как в этих работах, рассмотрим два случая ограничений на коэффициенты шероховатости. Первый случай – коэффициенты ограничены снизу (большие коэффициенты), второй – ограничены сверху (малые).

Случай больших коэффициентов шероховатости B_1 и H_1 . Для степенного и экспоненциального законов соответственно введем замены $\psi^{(b,1)}(t) = B_1 [p_2^{(1)}(t)]^\kappa - \delta_1^{(1)}$, $\psi^{(b,2)}(t) = \frac{\delta_1^{(2)}}{H_1} - \left[1 - \exp(-\alpha p_2^{(2)}(t)) \right]$ и обозначения

$$\varphi_\eta^{(1)}(\psi)(t) = \left[\psi(t) + \frac{\delta_1^{(1)}}{\eta} \right]^\kappa, \quad \varphi_\eta^{(2)}(\psi)(t) = \ln \left[1 + \psi(t) - \frac{\delta_1^{(2)}}{\eta} \right],$$

после чего перепишем уравнения (6) в виде ($i=1, 2$):

$$\psi^{(b,i)}(t) = \left[G^{(b,i)} \psi^{(b,i)} \right](t); \tag{8}$$

$$\left[G^{(b,i)} \psi \right](t) = (-1)^{i-1} C^{(i)} D^{(i)} \cdot \left[L \varphi_{\eta^{(i)}}^{(i)}(\psi) \right](t);$$

$$C^{(1)} = [1/B_1]^{1/\kappa}, \quad D^{(1)} = \eta^{(1)} = 1; \quad C^{(2)} = 1/\alpha, \quad D^{(2)} = 1/H_1, \quad \eta^{(2)} = H_1.$$

Случай малых коэффициентов B_1 и H_1 . Введем малые параметры Боголюбова-Крылова

$$\mu^{(1)} = 1 - B_1/C^{**}, \quad \mu^{(2)} = 1 - H_1/C^{**}, \quad \text{и замены} \quad \psi^{(s,1)}(t) = \left[p_1^{(1)}(t) \right]^\kappa - \frac{\delta_1^{(1)}}{C^{**}},$$

$$\psi^{(s,2)}(t) = - \left[1 - \exp(-\alpha p_1^{(2)}(t)) \right] + \frac{\delta_1^{(2)}}{C^{**}}, \quad \text{тогда уравнения (6) приобретут вид (1=1,2):}$$

$$\psi^{(s,i)}(t) = \left[G^{(s,i)} \psi^{(s,i)} \right](t); \tag{9}$$

$$\left[G^{(s,i)} \psi \right](t) = \mu^{(i)} \left[\psi(t) + (-1)^{i+1} \frac{\delta_1^{(i)}}{C^{**}} \right] + \frac{1}{C^{**}} \cdot K^{(i)} \cdot \left[L \varphi_{C^{**}}^{(i)}(\psi) \right](t), \quad K^{(1)} = D^{(1)}, \quad K^{(2)} = C^{(2)}.$$

Уравнения (8) и (9) являются уравнениями Гаммерштейна.

2. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ В УРАВНЕНИЯХ

Разложение образа степенной функции $f(t) = t^N$ ($N = 0, 1, 2, 3, \dots$) при действии оператора $L: C[-1; 1] \rightarrow C[-1; 1]$ имеет вид [9]:

$$\left[Lf \right](t) = \sum_{r=0}^{\infty} \beta_{N,r} t^r, \tag{10}$$

где при $N = 2j, j = 1, 2, 3, \dots$

$$\beta_{2j,2k} = -\frac{2}{k(2j-2k+1)} \quad (k=1, 2, 3, \dots), \quad \beta_{2j,2k+1} = 0, \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad k \neq j,$$

$$\beta_{2j,0} = -\frac{2}{(2j+1)^2} + \frac{2C_0}{2j+1} - \frac{C_1}{2j+1}, \quad \beta_{2j,2j+1} = -\frac{C_1}{2j+1},$$

при $N = 0$

$$\beta_{0,2k+1} = 0, \quad \beta_{0,2k} = -\frac{1}{k(-2k+1)} \quad (k=1,2,3,\dots), \quad \beta_{0,1} = -C_1, \quad \beta_{0,0} = -2 + 2C_0 - C_1,$$

а при $N = 2j - 1, j = 1, 2, 3, \dots$

$$\beta_{2j-1,2k-1} = -\frac{2}{(2k-1)(2j-2k+1)} \quad (k=1,2,3,\dots), \quad \beta_{2j-1,2k} = 0 \quad (k=1,2,3,\dots, k \neq j),$$

$$\beta_{2j-1,2j} = -\frac{C_1}{2j}; \quad \beta_{2j-1,0} = -\frac{C_1}{2j}.$$

Рассмотрим нелинейные операторы. Аналогично [9] обосновывается, что образами непрерывных функций при действии нелинейных операторов $G^{(b,i)}$ и $G^{(s,i)}$, $i=1,2$ являются непрерывные функции. Дальнейшие исследования этих операторов будем проводить на множествах соответственно:

$$X^{(b,1)} = \left\{ \psi(t) \in C[-1;1]: -\delta_1^{(1)} + \varepsilon_b \leq \psi(t) \leq 0 \right\}, \quad 0 < \varepsilon_b < \delta_1^{(1)},$$

$$X^{(b,2)} = X^{(s,2)} = \left\{ \psi(t) \in C[-1;1]: \psi(t) \geq 0 \right\}.$$

$$X^{(s,1)} = \left\{ \psi(t) \in C[-1;1]: -\frac{\delta_1^{(2)}}{C^{**}} + \varepsilon_s \leq \psi(t) \leq 0 \right\}, \quad 0 < \varepsilon_s < \frac{\delta_1^{(2)}}{C^{**}}.$$

В силу формулы Лагранжа по функциональному аргументу на указанных множествах имеют место неравенства

$$\left\| \varphi^{(1)}(\psi_1) - \varphi^{(1)}(\psi_2) \right\| \leq \frac{1}{\kappa} \cdot \left[\frac{\delta_1^{(1)}}{\eta} \right]^{\kappa-1} \cdot \|\psi_1 - \psi_2\| \quad \text{для } \eta = 1 \text{ или } \eta = C^{**};$$

$$\left\| \varphi^{(2)}(\psi_1) - \varphi^{(2)}(\psi_2) \right\| \leq \frac{\eta}{\eta - \delta_1^{(2)}} \cdot \|\psi_1 - \psi_2\| \quad \text{для } \eta = H_1 \text{ или } \eta = C^{**}.$$

Используем эти неравенства и оценку (7) для нормы оператора L . Аналогично [9] получим, что для всех функций $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ из указанных множеств выполнены оценки ($i=1,2$):

$$\left\| G^{(b,i)}\psi_1 - G^{(b,i)}\psi_2 \right\| \leq \left| C^{(i)} D^{(i)} \right| \cdot \|L\| \cdot \left\| \varphi^{(i)}(\psi_1) - \varphi^{(i)}(\psi_2) \right\| \leq u^{(i)} \|\psi_1 - \psi_2\|,$$

$$u^{(1)} = \frac{C^*}{\kappa \delta_1^{(1)}} \left[\frac{\delta_1^{(1)}}{B_1} \right]^{1/\kappa}, \quad u^{(2)} = \frac{C^*}{\alpha(H_1 - \delta_1^{(2)})}; \quad (11)$$

$$\left\| G^{(s,i)}\psi_1 - G^{(s,i)}\psi_2 \right\| \leq \max \left\{ \mu^{(i)} \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|; \frac{1}{C^{**}} \cdot K^{(i)} \cdot \|L\| \cdot \left\| \varphi^{(i)}(\psi_1) - \varphi^{(i)}(\psi_2) \right\| \right\} \leq u^{(i+2)} \|\psi_1 - \psi_2\|,$$

$$u^{(3)} = \max \left\{ \mu^{(1)}; \frac{C^*}{\kappa \delta_1^{(1)}} \left[\frac{\delta_1^{(1)}}{C^{**}} \right]^{1/\kappa} \right\}, \quad u^{(4)} = \max \left\{ \mu^{(2)}; \frac{C^*}{\alpha(C^{**} - \delta_1^{(1)})} \right\}. \quad (12)$$

Из принципа сжимающих отображений (теоремы Банаха) [16] следует, что уравнения (8) и (9) имеют единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений, если

$$u^{(i)} < 1 \quad (i = \overline{1, 4}). \tag{13}$$

Решение неравенства (13) относительно B_1 и H_1 дает неравенства двух видов. Соотношения (11) и (13) задают ограниченность снизу этих коэффициентов:

$$B_1 > \delta_1^{(1)} \left[\frac{C^*}{\kappa \delta_1^{(1)}} \right]^\kappa, \quad H_1 > \delta_1^{(1)} + \frac{C^*}{\alpha}. \tag{14}$$

Эти ограничения соответствуют случаю больших коэффициентов шероховатости. Соотношения (12) и (13) дают ограниченность сверху B_1 и H_1 :

$$0 < B_1 < C^{**}, \quad 0 < H_1 < C^{**}, \tag{15}$$

что соответствует случаю малых коэффициентов шероховатости. Однако, следует заметить, что вторые компоненты под знаком максимумов в (12) гарантированно меньше 1, что объясняется физическим смыслом величин, из которых они состоят, а также правильным выбором значения величины C^{**} , например, $C^{**} = 12$. При этом следует учитывать, что согласно результатам исследований [2, 3, 6], значения параметров κ и α удовлетворяют неравенствам $0,1 \leq \kappa \leq 1$ и $1 \leq \alpha \leq 8$.

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

В соответствии с результатами работы [15], в случае линейного закона деформирования шероховатости, функция нормального давления представляется степенным рядом. Линейный закон является частным случаем степенного закона и предельным случаем экспоненциального (при малых внешних силах). Как показано в работах [3, 7-9], в контактных задачах с учетом шероховатости, деформирующейся по нелинейным законам, физические свойства функции давления аналогичны линейному. В связи с этим, функции $\psi^{(b,i)}$, $\psi^{(s,i)}$ ($i = 1, 2$) представляются степенными рядами того же типа, что и функции давлений. В контактных задачах с учетом шероховатости, но без трения (см. [8, 9]) эти функции представлялись рядами по четным степеням t . В задаче с трением и шероховатостью линейного закона степенной ряд функции давления содержит не только четные, но и нечетные степени. Можно предположить, что функции $\psi^{(b,i)}$, $\psi^{(s,i)}$ ($i = 1, 2$) представляются рядами такого же типа. Окончательный вывод о правильности такого предположения можно будет сделать после получения системы алгебраических уравнений, эквивалентной данной системе интегральных уравнений, в случае, если она получится корректной.

Введем обозначения для $\Delta = 0$ или $\Delta = 1$:

$$\xi_0^{(\Delta,1)} = \gamma_0^{(\Delta,1)} + \frac{\delta_1^{(1)}}{(C^{**})^\Delta}, \quad \xi_0^{(\Delta,2)} = \gamma_0^{(\Delta,2)} + 1 - \frac{\delta_1^{(2)}}{(C^{**})^\Delta (H_1)^{1-\Delta}},$$

$$\sigma_0^{(\Delta,1)} = \left[\xi_0^{(\Delta,1)} \right]^\omega, \quad \sigma_0^{(\Delta,2)} = \ln \xi_0^{(\Delta,2)};$$

$$\xi_k^{(\Delta,i)} = \frac{\gamma_k^{(\Delta,i)}}{\xi_0^{(\Delta,i)}}; \quad P_{m,k}^{(1)} = \prod_{r=1}^{k-m+1} \frac{\omega - r + 1}{r}, \quad P_k^{(1)} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}; \quad \omega = \frac{1}{\kappa}; \quad a_{k,k}^{(\Delta,i)} = \xi_k^{(\Delta,i)}$$

$$(m = 1, \dots, k, \quad k = 1, 2, 3, \dots);$$

$$a_{m,k}^{(\Delta,i)} = \sum_{r=1}^m a_{k-r,m-r+1}^{(\Delta,i)} P_s^{(\Delta,i)} \quad (m=1,\dots,k-1, k=2,3,\dots);$$

$$\sigma_k^{(\Delta,1)} = \sigma_0^{(\Delta,1)} \sum_{m=1}^k P_{m,k}^{(\Delta,1)} a_{k,m}^{(\Delta,1)}, \quad \sigma_k^{(\Delta,2)} = \sum_{m=1}^k p_{k-m+1}^{(\Delta,2)} a_{k,m}^{(\Delta,2)} \quad (k=1,2,3,\dots).$$

Случай больших коэффициентов шероховатости. Неизвестные функции в уравнении (8) представим в виде ($i=1,2$):

$$\psi^{(b,i)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^{(0,i)} t^k, \quad (16)$$

тогда

$$p_2^{(i)}(t) = (-1)^{i-1} C^{(i)} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^{(0,i)} t^j, \quad \Delta=0. \quad (17)$$

Подставляя разложения (10), (16), (17) в (8), получим пару бесконечных систем нелинейных алгебраических уравнений, выраженную через неизвестные коэффициенты соответствующих рядов (14) ($i=1,2$):

$$\gamma_k^{(0,i)} = C^{(i)} D^{(i)} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^{(0,i)} \beta_{j,k} \quad (k=0,1,2,\dots). \quad (18)$$

Уравнение (18) для каждого закона содержит еще неизвестную – углубление штампа. Условия равновесия (4) позволяет получить еще уравнения:

$$\delta_1^{(1)} = B_1 \left[\frac{1}{Q_2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2\sigma_j^{(0,1)}}{\sigma_0^{(0,1)} (2j+1)} \right]^{-\kappa} - \gamma_0^{(0,1)}, \quad (19)$$

$$\delta_1^{(2)} = H_1 \left\{ 1 + \gamma_0^{(0,2)} - \exp \left[-\frac{\alpha Q_2}{2} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j^{(0,2)}}{2j+1} \right] \right\}. \quad (20)$$

Таким образом, по-отдельности, при $i=1$ и при $i=2$ получаем две бесконечные системы нелинейных алгебраических уравнений (18), (19) или (18), (20), эквивалентные двум системам, состоящим из интегрального уравнения Гаммерштейна (8) и уравнения равновесия (4). Каждая из полученных алгебраических систем представляется корректно. Таким образом, предположение о возможности представления функций $\psi^{(b,i)}$ ($i=1$ или $i=2$) степенным рядом (16) – справедливо.

Кроме того, функция нормального давления, заданная рядом (17), углубление штампа вида (19) или (20) дают аналитическое решение соответствующей задачи (для степенного или экспоненциального закона) для случая, когда удовлетворяются указанные системы нелинейных алгебраических уравнений и выполняются ограничения (14).

Случай малых коэффициентов шероховатости. Аналогично предыдущему случаю, неизвестные функции в уравнении (9) представим в виде ($i=1,2$):

$$\psi^{(s,i)}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j^{(1,i)} t^j, \quad \Delta=1, \quad (21)$$

тогда

$$p_2^{(i)}(t) = (-1)^{i-1} K^{(i)} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^{(1,i)} t^j. \quad (22)$$

Затем, используя (10), (21), (22), получим пару бесконечных систем нелинейных алгебраических уравнений, эквивалентных (9), а именно ($i = 1, 2$):

$$\begin{cases} \gamma_0^{(s,i)} = (-1)^{i-1} \mu^{(i)} \frac{\delta_1^{(i)}}{C^{**}} + \mu^{(i)} \gamma_0^{(1,i)} + \frac{K^{(i)}}{C^{**}} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^{(1,i)} b_{j,0}, \\ \gamma_k^{(s,i)} = \mu^{(i)} \gamma_k^{(1,i)} + \frac{K^{(i)}}{C^{**}} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^{(1,i)} b_{j,k} \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (23)$$

а также пару уравнений, эквивалентных условиям равновесия (4):

$$\delta_1^{(1)} = C^{**} \left[\frac{1}{Q_1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma_j^{(1,1)}}{\sigma_0^{(1,1)}} \frac{1}{2j+1} \right]^{-\kappa} - C^{**} \gamma_0^{(1,1)}, \quad (24)$$

$$\delta_1^{(2)} = C^{**} \left\{ 1 + \gamma_0^{(1,2)} - \exp \left[-\frac{\alpha Q_2}{2} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j^{(1,2)}}{2j+1} \right] \right\}. \quad (25)$$

В этом случае, как и в предыдущем, получены корректные системы, поэтому представление функции $\psi^{(s,i)}$ ($i = 1$ или $i = 2$) степенным рядом (21) является обоснованным. Решение систем (23), (24) или (23), (25) позволяет получить контактные характеристики в аналитическом виде: функцию давления вида (22) и углубление штампа вида (24) или (25).

Для решения бесконечных систем (18), (19) или (18), (20), или (23), (24), или (23), (25) нелинейных алгебраических уравнений, удовлетворяющих условиям сжатия (13), необходимо заменить их конечными, то есть применить метод редукции. Обоснование возможности применения этого метода проводится на основе классических теорем, приведенных в [16] применительно к сжимающим отображениям так же, как это было сделано в работах [8, 9]. При этом решения приближенных редуцированных систем можно найти методом последовательных приближений [16].

4. АНАЛИЗ ЧИСЛОВЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для приближенных вычислений выберем $\nu = 0,3$, $C_0 = -3$ так же, как в монографии [3]. Путем численного эксперимента выбрано значение $N = 30$ числа членов ряда (16) или (21) для обеспечения точности до третьей значащей цифры.

В контактной задаче с учетом трения функция давления штампа на упругую гладкую полосу (без шероховатости) равна функции давления на упругую гладкую полуплоскость. Последняя функция получена в работе [7]:

$$p_2^*(t) = \frac{Q_2 \sin(\pi\theta)}{\pi \sqrt{1-t^2}} \cdot \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^{0,5-\theta}, \quad \theta = \frac{1}{\pi} \cdot \arctg \frac{2-2\nu}{\rho(1-2\nu)}. \quad (26)$$

Чтоб определить углубление штампа в упругую гладкую полосу δ_1^* , необходимо в уравнении (3) положить $W_1 [p_2^*](t) \equiv 0$, $t = 1$, а функцию $p_2^*(t)$ задать формулой (26):

$$\delta_1^* = - \int_{-1}^1 p_2^*(t') [\ln|t'-t| + C_0] dt' + C_2 \rho \int_{-1}^1 p_2^*(t') dt'. \quad (27)$$

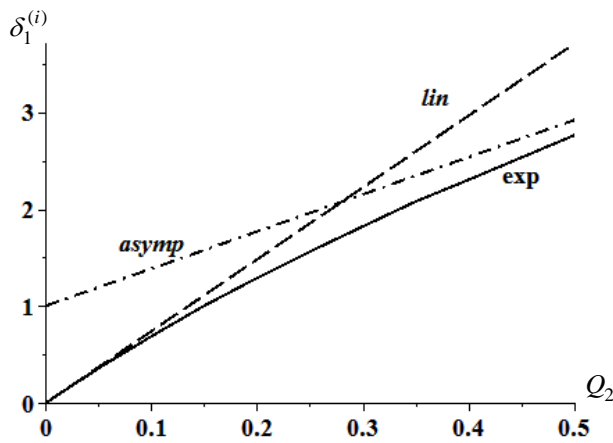


Рис. 2

На рис. 2 приведен график зависимости углублений штампа с плоским основанием в упругую полосу с шероховатостью от силы Q_2 . Коэффициент трения выбран равным $\rho = 0,3$. Углубления рассчитаны для экспоненциального закона при фиксированных $H_2 = 1$, $\alpha = 7$, а для степенного закона при $\kappa = 1$ и $B_1 = \alpha H_1 = 7$ (то же, что и для линейного закона). Соответствующие линии обозначены «exp» и «lin».

Значения углублений близки при малых Q_2 .

При больших Q_2 график, построенный для экспоненциального закона, приближается к асимпote (линия «asympt» на рис. 2), значения ординат которой имеют вид $H_1 + \delta_1^*$, где δ_1^* определяется по формуле (27). Соотношение для ординат асимпоты выбраны предельным переходом в уравнении (3) при $p_2^{(2)} \rightarrow \infty$. Для экспоненциального закона такой переход оказывается возможным, в отличие от линейного закона. Это связано с тем, что для экспоненциального закона первое слагаемое стремится к константе H_1 , а для степенного – к бесконечности. Вследствие чего происходит стабилизация углублений штампа при экспоненциальном законе, что соответствует стабилизации смятий микровыступов шероховатости, связанной с ограниченностью их высоты.

Таким образом, приходим к выводу, что линейный и степенной законы пригодны для расчетов при малых внешних силах Q_2 , а экспоненциальный – при больших.

Для безразмерной силы $Q_2 = 8,625 \cdot 10^{-3}$ на рис. 3, а, б построены графики зависимостей углублений штампа при степенном законе от показателей шероховатости κ (рис. 3, а) и от коэффициента трения ρ (рис. 3, б). На рис. 3, а значение $\rho = 0,3$ фиксировано, B_1 – различные (1 – $B_1 = 1$; 2 – $B_1 = 0,5$; 3 – $B_1 = 0,2$). На рис. 3, б линии 1 соответствуют $B_1 = 1$, $\kappa = 0,4$, линии 2 – $B_1 = 1$, $\kappa = 0,5$, линии 3 – $B_1 = 0,5$, $\kappa = 0,4$.

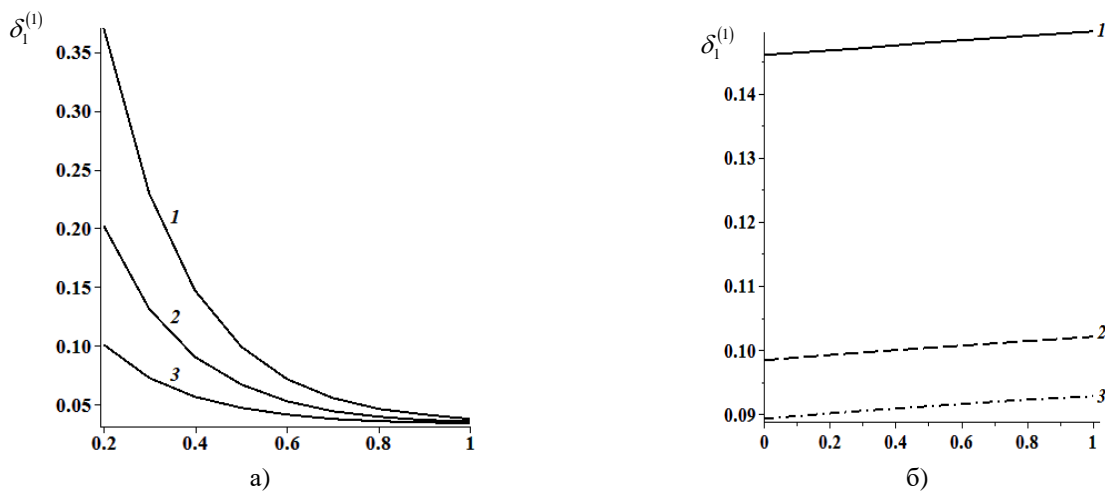


Рис. 3

Для $Q_2 = 5 \cdot 10^{-2}$ на рис. 4, а, б изображены графики зависимостей углублений штампа при экспоненциальном законе от показателей шероховатости H_1 (рис 4, а) и от коэффициента трения ρ (рис. 4, б). На рис. 4, а значение $\rho = 0,3$ фиксировано α – различные (1 – $\alpha = 7$; 2 – $\alpha = 4$; 3 – $\alpha = 2$; 4 – $\alpha = 1$). На рис. 4, б линии 1 соответствуют $H_1 = 1, \alpha = 8$, линии 2 – $H_1 = 1, \alpha = 7$, линии 3 – $H_1 = 0,5, \alpha = 7$.

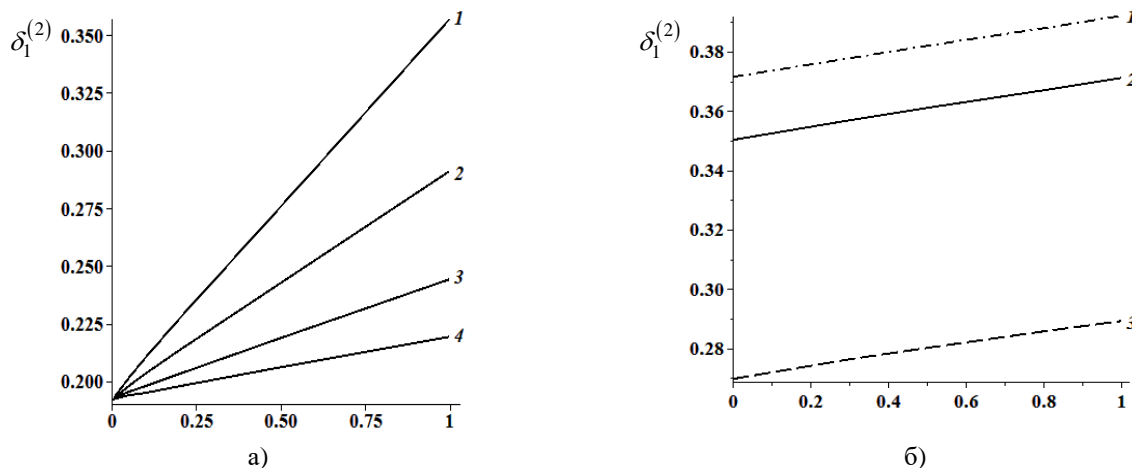


Рис. 4

Анализируя зависимости на рис. 3 и 4, приходим к следующим выводам. С уменьшением как B_1 , так и H_1 (при фиксированном ρ) углубление штампа уменьшается, приближаясь к числовому значению δ_1^* , отвечающему гладкой полосе с учетом трения с коэффициентом $\rho = 0,3$, рассчитанному по формуле (27). При уменьшении κ углубление увеличивается, а при уменьшении α – уменьшается. При фиксированных коэффициентах шероховатости увеличение коэффициента трения ρ ведет к увеличению углубления.

Положив $Q_2 = 8,625 \cdot 10^{-3}$, на рис. 5 а, б, в построены графики распределения нормального давления под штампом при степенном законе деформирования шероховатости. На рис 5, а – для фиксированных $\rho = 0,3, \kappa = 0,4$ и различных B_1 (1 – $B_1 = 0$; 2 – $B_1 = 0,01$; 3 – $B_1 = 0,1$; 4 – $B_1 = 1$). На рис. 5, б – для фиксированных $\rho = 0,3, B_1 = 1$ и различных κ (1 – $\kappa = 1$; 2 – $\kappa = 0,9$; 3 – $\kappa = 0,8$; 4 – $\kappa = 0,6$; 5 – $\kappa = 0,2$). На рис. 5, в – для фиксированных $\kappa = 0,4, B_1 = 1$ и различных ρ (1 – $\rho = 0,0001$; 2 – $\rho = 0,8$; 3 – $\rho = 0,5$; 4 – $\rho = 0,3$; 5 – $\rho = 1$).

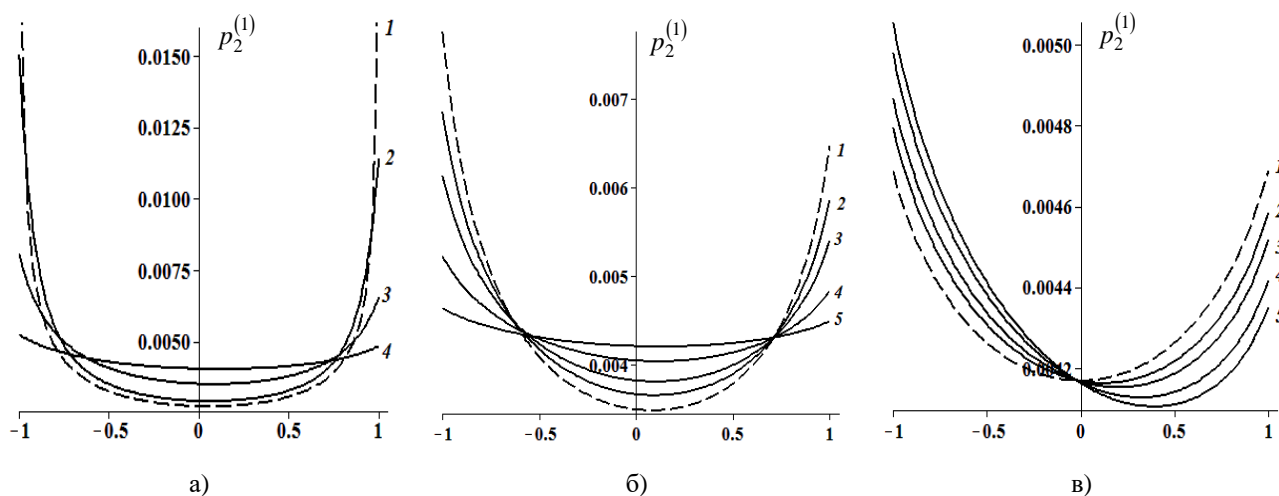


Рис. 5

На рис. 6 а, б, в построены графики распределения нормального давления под штампом при экспоненциальном законе деформирования шероховатости, где $Q_2 = 5 \cdot 10^{-2}$. Рис 6, а соответствует $\rho = 0,3$, $\alpha = 4$ и различные H_1 (1 – $H_1 = 0$; 2 – $H_1 = 0,01$; 3 – $H_1 = 0,1$; 4 – $H_1 = 1$). Рис. 6, б – $\rho = 0,3$, $H_1 = 1$ и различные α (1 – $\alpha = 1$; 2 – $\alpha = 2$; 3 – $\alpha = 7$). Рис. 6, в – $\alpha = 7$, $H_1 = 1$ и различные ρ (1 – $\rho = 0,0001$; 2 – $\rho = 0,8$; 3 – $\rho = 0,5$; 4 – $\rho = 0,3$; 5 – $\rho = 1$).

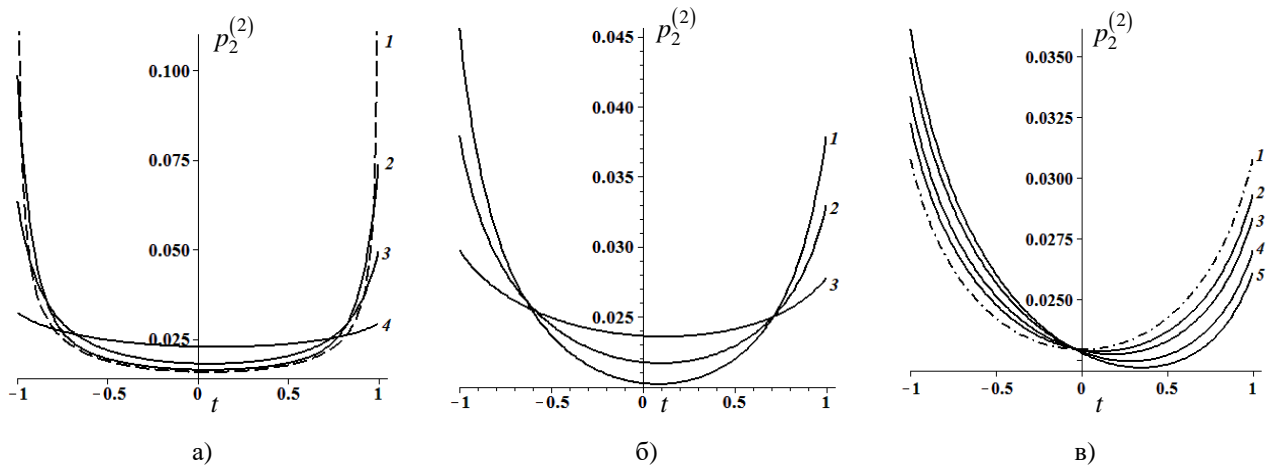


Рис. 6

На рис. 5, а и рис 6, а штриховыми линиями изображены графики одной и той же функции давлений ($B_1 = H_1 = 0$), рассчитанной по формуле (26). Из графиков на этих рисунках следует, что при $B_1 \rightarrow 0$ и $H_1 \rightarrow 0$ для всех $t \in (-1; 1)$ значения функций давлений на шероховатую полосу приближаются к значениям функции давлений на гладкую полосу ($B_1 = H_1 = 0$). На рис. 5, б штриховой линии соответствует график функции давлений для линейного закона, которая полностью совпадает с функцией, построенной в работе [15]. Штриховой линией на рис. 5, в и рис. 6, в показаны функции давлений для $\rho = 0,0001$. Их значения отличаются менее, чем на 1% от значений, рассчитанных в работе [9], при $\rho = 0$ и тех же коэффициентах шероховатости степенного и экспоненциального законов соответственно. Указанные факты свидетельствуют о достоверности результатов.

В диапазоне, где значения коэффициентов шероховатости B_1 или H_1 удовлетворяют одновременно двум соответствующим ограничениям (14) и (15) (то есть коэффициент B_1 или H_1 является и большим, и малым), расчеты проведены по двум алгоритмам. Отклонение между результатами составило менее 1%.

Для малых значений силы Q_2 величины рассчитанные по алгоритму линейного, степенного ($\kappa = 1$) и экспоненциального законов для коэффициентов, связанных равенством $B_1 = \alpha H_1$. Результаты имели хорошее согласование.

Для задачи без трения в работе [9] получено согласование с результатами работ [3, 7]. При этом, как показано выше, значения контактных характеристик задачи без трения являются предельным случаем задачи с трением. Это очередное подтверждение достоверности результатов.

Шероховатость поверхности полосы влияет на контактное давление так, что ее наличие делает эту функцию непрерывной во всех точках площадки контакта, в том числе и на границе, в отличие от задачи без учета шероховатости. Трение влияет на функцию давлений так, что она становится несимметричной. Из анализа рис. 5 и рис. 6 следует, что наибольшее значение нормального давления достигается на границе площадки контакта при $t = -1$, а

наименьшее – в некоторой внутренней точке площадки контакта. Увеличение коэффициента шероховатости приводит к смещению этой точки в сторону правой границы площадки контакта. Такой же эффект наблюдается с ростом коэффициентов шероховатости B_1 и H_1 , отвечающих за высоту микровыступов шероховатости. Однако, с ростом коэффициентов κ (от 0,1 до 1) и α (от 1 до 8) абсцисса точки минимума функции контактного давления смещается в сторону к $t = 0$.

ВЫВОДЫ

В работе изучена плоская квазистатическая контактная задача о скольжении с трением штампа с плоским основанием по границе упругого шероховатого слоя (полосы) при нелинейных (степенном и экспоненциальном) законах деформирования шероховатости. Предполагается, что штамп не совершает наклона. Найдено аналитическое решение данной задачи в двух случаях ограничения на коэффициент шероховатости с обоснованием его единственности.

Проведен анализ числовых результатов и получены следующие выводы. При уменьшении коэффициентов шероховатости степенного и экспоненциального законов, зависящих от высоты микровыступов шероховатости, также, как и при уменьшении коэффициента трения, все контактные характеристики приближаются к соответствующим характеристикам без учета шероховатости или трения соответственно. Наибольшее значение контактного давления достигается на границе площадки контакта, а наименьшее – во внутренней точке этой площадки. При увеличении коэффициента трения или коэффициентов шероховатости нелинейных законов, зависящих от высоты микровыступов, абсцисса точки наименьшего давления смещается от центра в направлении действия касательной силы; при этом углубление штампа в упругую шероховатую полосу увеличивается.

Представляют интерес плоские задачи контакта с трением для шероховатой полосы и штампа, совершающего поворот или имеющего неплоское основание. Кроме того, для дальнейшего исследования может быть предложена задача, в которой шероховатость поверхности полосы деформируется по экспоненциально-степенному закону, как это было исследовано в работе [17] без учета трения. Для решения некоторых из этих задач может быть применен подход, изложенный в данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ткачук Н. Н., Скрипченко Н. Б., Ткачук Н. А., Грабовский А. В. Контактное взаимодействие сложнопрофильных деталей машиностроительных конструкций с учетом локальной податливости поверхностного слоя. Харьков: ФОП Панов А.Н., 2017. 148 с.
2. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчётов на трение и износ. Москва: Машиностроение, 1977. 576 с.
3. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. Москва: Наука, 2001. 478 с.
4. Козачок О. П., Мартиняк Р. М., Слободян Б. С. Взаємодія тіл з регулярним рельєфом за наявності міжконтактного середовища. Львів: Растр-7, 2018. 200 с.
5. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Москва; Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1949. 270 с.
6. Бартенев Г. М., Лаврентьев В. В. Трение и износ полимеров. Москва: Химия, 1972. 240 с.
7. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. Москва: Наука, 1980. 302 с.
8. Гоман О. Г., Шишканова С. Ф., Д'яченко Н. М. Задачі про штампи при різних законах деформування шорсткості. Вісник Херсонського державного технічного університету. 2003. № 3(19). С.98–101.
9. Тітова О. О., Гриценко О. М., Д'яченко Т. А., Стасюк О. В. Плоска контактна задача про вдавнення штампа з плоскою основою в пружну шорстку смугу при різних законах

деформування шорсткості. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2012. № 2. С. 105–113.

10. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. Москва: Наука, 1983. 488 с.
11. Грабко Е. В. Численное решение статической задачи о контакте упругих шероховатых тел при наличии кулонова трения. *Проблеми обчислювальної математики і міцності конструкцій*. 2012. Вип. 18. С. 39–47.
12. Шишканова А. А. О решении контактной задачи с учетом трения и шероховатости для штампа в форме двусвязного квадрата в плане. *Вісник Донецького університету. Сер. А. Природничі науки*. 2004. Вип. 1. С. 95–102.
13. Шашкова Є. В., Д'яченко Н. М. Ковзання з тертям квадратного у плані штампа по межі пружного шорсткого півпростору. *Проблеми корозійно-механічного руйнування, інженерія поверхні, діагностичні системи: Матеріали відкритої науково-технічної конференції молодих науковців і спеціалістів Фізико-механічного інституту ім. Г. В. Карпенка НАН України КНМ*. Львів, 2005. С. 294-297.
14. Pauk V., Zastrau B. W. Plane Contact Problems with Partial Slip for Rough Elastic Half-Space. *J. Theor. Appl. Mech.* 2004. Vol. 42, No. 1. P. 107–124.
15. Дьяченко Н. Н., Синченко Е. С., Качан А. И. Аналитическое и приближенно аналитическое решение плоской контактной задачи с учетом трения и шероховатости. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 79–91.
16. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. Москва: Наука, 1984. 752 с.
17. Д'яченко Н. М., Столярчук І, А., Резвіна Д. Г., Смолянкова Т. М. Експоненціально-степеневий закон деформування шорсткості в плоскій задачі про вдавнення штампа. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичних науки*. 2014. № 2. С. 42–55.

REFERENCES

1. Tkachuk, M. M., Skripchenko, N. B., Tkachuk, N. A., Lvov, G. I. & Grabovskiy, A. V. (2017). Contact interaction of complex parts engineering constructions taking into account the local compliance of the surface layer. Kharkiv: FOP Panov A. N.
2. Kragelsky, I. V., Dobychin, M. N. & Komalov, V. S. (1977). Fundamentals calculations on a friction and wear. Moscow: Mashinostroenie.
3. Goryacheva, I. G. (2001). Mechanics of friction interaction. Moscow: Nauka.
4. Kozachok, O. P., Martynyak, R. M. & Slobodian, B. S. (2018). Interaction between bodies with regular relief in the presence of an interstitial medium. Lviv: Rastr-7.
5. Shtaerman, I. Ya. (1949). Contact problems of the theory of elasticity. Moscow–Leningrad: Gostekhtheoretizdat.
6. Bartenev, G. M. & Lavrentev, V. V. (1972). Friction and wear of polymers. Moscow: Himiya.
7. Galin, L. A. (1980). Contact problems in the theory of elasticity and viscoelasticity. Moscow: Nauka.
8. Goman, O. G., Shishkanova, S. F. & Dyachenko, N. M. (2003). Problems of punch in various laws of roughness deformation. *Visnyk Khersonskogo dergavnogo universitetu*, No. 3(19), pp. 98-101.
9. Titova, O. O., Gritsenko, O. M., Dyachenko, T. A. & Stasyuk, O. V. (2012). The plane contact problem on pressing of punch with the flat fundament in the elastic strip at the different laws of deformation of the roughness. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Fyzyko-matematychni nauky*, No. 2, pp. 105-113.
10. Alexandrov, V. M. & Mhitaryan, S. M. (1983). Contact problems for bodies with thin coatings and layers. Moscow: Nauka.
11. Grabko, E. V. (2012). Numerical solution of the static contact problem of elastic rough bodies with coulomb friction. *Problemy obchysliuvalnoi matematyky i mitsnosti konstruksii*, Issue 18, pp. 39-47.
12. Shishkanova, A. A. (2004). About the solution of a contact problem taking into account a friction and a roughness for a punch in the form of a doubly-connected square in the plan. *Visnik Donezskogo universitetu. Pripodnichі nauki*, Issue 1, pp. 95-102.

13. Shashkova, Ye. V. & Dyachenko, N. M. (2006). The decision of the problem about sliding of a punch with friction on border rough half-space by the linear law of deformation of a roughness. Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Fizyko-matematychni nauky, No. 1, pp. 25-33.
14. Pauk, V. & Zastrau, B. W. (2004). Plane Contact Problems with Partial Slip for Rough Elastic Half-Space. J. Theor. Appl. Mech, Vol. 42, No. 1, pp. 107-124.
15. Dyachenko, N. N., Sinchenko, E. S. & Kachan, A. I. (2016). Analytical and approximately analytical solution of the plane contact problem taking into account the friction and the roughness. Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Fizyko-matematychni nauky, No. 1, pp. 79-91.
16. Kantorovich, L. V. & Akilov, G. P. (1984). Functional Analysis. Moskow: Nauka.
17. Dyachenko, N. N., Rezvina, D. G. & Smolyankova, T. N. (2014). Exponential-power the law of deformation of the roughness in the flat problem about indentation of a punch. Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Fizyko-matematychni nauky, No. 2, pp. 42-55.

УДК 519.85

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-05

МЕТОД ГІЛОК І МЕЖ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ ЛІНІЙНОЇ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ НА РОЗМІЩЕННЯХ З ІМОВІРНІСНОЮ НЕВИЗНАЧЕНІСТЮ

¹Ємець О. О., ²Барболіна Т. М.

¹Полтавський університет економіки і торгівлі,
вул. Ковалю, 3, м. Полтава, Україна

²Полтавський національний педагогічний університет імені В. Г. Короленка,
вул. Остроградського, 2, м. Полтава, Україна

yemetsli@ukr.net, tm-b@ukr.net

Актуальним напрямом сучасної теорії оптимізації є дослідження задач комбінаторної природи за різних видів невизначеності. Один із підходів до формулювання оптимізаційних задач з імовірнісною невизначеністю ґрунтується на введенні відношення порядку на фактор-множині, що утворюється при розбитті заданої множини незалежних випадкових величин на основі порівняння їх числових характеристик. Ця стаття присвячена обґрунтуванню методу гілок і меж для розв'язування оптимізаційних задач на розміщеннях, постановка яких здійснена на основі такого підходу.

Зокрема, обґрунтовано алгоритм методу гілок і меж для розв'язування задач оптимізації на розміщеннях з лінійною цільовою функцією, у якій коефіцієнти є детермінованими величинами, тоді як елементи мультимножини є класами еквівалентності за згаданою еквівалентністю (H -задач). Пропонується проводити галуження загальної множини розміщень, надаючи певні можливі значення частині змінних. Коли отримується одноелементна множина, здійснюється перевірка, чи належить одержане розміщення множині, що визначена додатковими (некомбінаторними) обмеженнями. Запропоновано й обґрунтовано спосіб оцінювання підмножин, у якому використовуються властивості екстремалі в лінійній безумовній задачі стохастичної комбінаторної оптимізації на розміщеннях, сформульовано алгоритм методу гілок і меж. Роботу алгоритму проілюстровано прикладом.

Для лінійної безумовної задачі оптимізації на розміщеннях, у якій коефіцієнти цільової функції є класами еквівалентності, а елементи мультимножини – детермінованими величинами (H_d -задач), встановлено зв'язок із H -задачами. Спираючись на цей взаємозв'язок та властивості розв'язку H -задачі, встановлено властивості мінімалі у розв'язку H_d -задачі. Розглянуто особливості застосування методу гілок і меж для розв'язування H_d -задач: як і для H -задачі пропонується використовувати галуження «вглиб», також обґрунтовано спосіб оцінювання підмножин.

Ключові слова: евклідова задача комбінаторної оптимізації, задача оптимізації на розміщеннях, стохастична комбінаторна оптимізація, метод гілок і меж.

BRANCH AND BOUND METHOD FOR SOLVING PROBLEMS OF OPTIMIZATION OF LINEAR OBJECTIVE FUNCTION ON ARRANGEMENTS UNDER PROBABILISTIC UNCERTAINTY

¹Iemets O. O., ²Barbolina T. M.

¹*Poltava university of economics and trade,
Koval str., 3, Poltava, Ukraine*

²*Poltava V.G. Korolenko National Pedagogical University,
Ostrogradsky str.,2, Poltava, Ukraine*

yemetsli@ukr.net, tm-b@ukr.net

Actual trend of the modern theory of optimization is to study the problems of combinatorial nature under different types of uncertainty. One approach for stochastic optimization problems formalization is based on the introduction of the order relation on the quotient set, which is generated by partition a given set of independent random variables based on the comparison of their numerical characteristics. This paper is devoted to the substantiation of branch and bound method for solving of optimization problems on arrangements, whose statement is made according to such approach.

Let us consider optimization problem on arrangements with linear objective function whose coefficients are determinate values whereas elements of multiset are equivalence classes by the mentioned equivalence (H -problems). The algorithm of branch and bound method for solving such problems is substantiated. We propose to branch the common set of arrangements assigning certain possible values for some of the variables. When a singleton is obtained it is checked whether the resulting arrangement belong to the set defined by additional (non-combinatorial) constraints. The way of bound computing is proposed and substantiated. This way uses properties of extremal of linear unconstrained problem of stochastic combinatorial optimization on arrangements. Algorithm of branch and bound method is formulated. Algorithm is illustrated by an example.

We also consider linear unconstrained problems on arrangements when coefficients of objective function are equivalence classes and elements of multiset are determinate values (H_d -problems). The interrelation of H_d -problems and H -problems is shown. Based on this interrelation and properties of solution of H -problem properties of minimal in a solution of H_d -problem is obtained. Specific of application of branch and bound method for solving H_d -problems is considered. As for H -problems we propose depth-first branch. The way of evaluation of subsets is also substantiated.

Key words: Euclidean combinatorial optimization problem, optimization problem on arrangements, stochastic combinatorial optimization, branch and bound method.

ВСТУП

Серед актуальних напрямів сучасної теорії оптимізації можна зазначити дослідження задач комбінаторної природи за різних видів невизначеності: досліджуються загальні питання формалізації оптимізаційних задач з різними видами невизначеності [1, 2], задачі оптимізації на графах з інтервальними параметрами [3], інтервальні моделі задач геометричного проектування, їх відображень в евклідові простори ([4-5] та ін.), евклідові задачі комбінаторної оптимізації на нечітких множинах [6], багатокритеріальні задачі на нечітко заданій комбінаторній множині альтернатив [7].

Один із підходів до формулювання оптимізаційних задач з різними видами невизначеності ґрунтується на введенні відношення порядку на множині відповідних величин: для задач з інтервальною невизначеністю такий підхід розглянуто в [8], для нечітких задач – у [6], для стохастичних задач – у [9].

Для задач з імовірнісною невизначеністю запропоновано два способи упорядкування випадкових величин: перший ґрунтується на порівнянні математичних сподівань, дисперсій та можливих значень і відповідних імовірностей дискретних випадкових величин, другий передбачає порівняння певних числових характеристик випадкових величин. У роботах [9-13] та ін. досліджено властивості зазначених відношень порядку, представлено постановки відповідних оптимізаційних задач, у тому числі з обмеженнями комбінаторного характеру, обґрунтовано властивості і методи розв'язування деяких класів оптимізаційних задач. Зокрема, для розв'язування задач стохастичної комбінаторної оптимізації на

розміщеннях, де порядок встановлюється за першим із зазначених вище підходів, обґрунтовано метод гілок і меж [12]. Ця стаття присвячена обґрунтуванню методу гілок і меж для розв’язування оптимізаційних задач на розміщеннях, постановка яких здійснюється з використанням порядку на основі порівняння числових характеристик випадкових величин.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Позначатимемо дискретні випадкові величини великими латинськими літерами (A, B, \dots). Нехай Ω – деяка скінченна множина незалежних випадкових величин.

Визначимо для випадкової величини A характеристичний вектор як вектор $H(A) = (h_1(A), h_2(A), \dots, h_s(A))$, де $h_i(A)$, $i \in J_s$ (тут і далі J_n позначає множину n перших натуральних чисел) – деякі числові характеристики випадкової величини A . Вважатимемо, що характеристичний вектор задовольняє умову

$$h_i(\alpha A + \beta B) = \alpha^{\lambda_i} h_i(A) + \beta^{\lambda_i} h_i(B) \quad \forall i \in J_s, \quad (1)$$

де A, B – незалежні випадкові величин, $\alpha, \beta \in R^1$ – дійсні числа, $\lambda_i \in Z$ – цілі додатні константи.

Зокрема, числовими характеристиками в умові (1) можуть бути математичне сподівання або дисперсія.

Означення 1 [10]. Будемо називати дві випадкові величини $X, Y \in \Omega$ H -еквівалентними тоді і лише тоді, коли $H(X) = H(Y)$.

Відношення, введене означенням 1, є відношенням еквівалентності, клас еквівалентності з представником X називатимемо H -класом і позначатимемо $[X]_H$. Позначатимемо також $H([X]_H)$ характеристичний вектор деякої випадкової величини $X \in [X]_k$ (згідно з означенням 1 ці вектори рівні для всіх представників класу $[X]_H$). Нехай також $<_l$ позначає лексикографічне упорядкування в s -вимірному евклідовому просторі, тобто для будь-яких $u, u' \in R^s$ за означенням вважається $u <_l u'$, якщо перша ненульова компонента різниці $u - u'$ від’ємна. Записуватимемо $u \leq_l u'$, якщо $u <_l u'$ або $u = u'$.

Означення 2 [10]. Називатимемо класи $[X]_H, [Y]_H$ упорядкованими за зростанням (позначати $[X]_H < [Y]_H$), якщо $H([X]_H) <_l H([Y]_H)$.

Якщо $H([X]_H) \leq_l H([Y]_H)$, то класи $[X]_H, [Y]_H$ називатимемо упорядкованими за неспаданням і позначатимемо цей факт $[X]_k \preceq [Y]_k$.

З властивостей відношення лексикографічного порядку випливає, що відношення $<$ є відношенням строгого порядку, а відношення \preceq – лінійного порядку.

Використовуючи введений лінійний порядок, упорядкуємо елементи ω фактор-множини за H -еквівалентністю: $[X_1]_H \preceq [X_2]_H \preceq \dots \preceq [X_m]_H$. Максимумом є клас $[X_m]_H$, а мінімумом – клас $[X_1]_H$. Означення мінімуму й максимуму дає можливість ставити задачі оптимізації для знаходження екстремальних елементів за заданих умов. Називатимемо такі задачі H -задачами стохастичної оптимізації.

Нехай $[X]_H = ([X_1]_H, [X_2]_H, \dots, [X_k]_H)$. Розглянемо лінійну функцію $\Phi([X]_H) = \sum_{j=1}^k c_j [X_j]_H$, де $c_j \in R^1$, $[X_j]_H \in \omega \quad \forall j \in J_k$, операції додавання класів та множення класу на число

визначені в [9]. Лінійна H -задача стохастичної оптимізації у деякій області $\Xi \subset \omega^k$ полягає у знаходженні екстремуму й екстремалі функції $\Phi([X]_H)$ за умови $[X]_H \in \Xi$.

Зокрема, область Ξ може бути евклідовою комбінаторною множиною, наприклад загальною множиною розміщень, в означенні якої слідуємо [14]. Під мультимножиною розуміємо сукупність елементів, серед яких можуть бути й однакові. Будь-яку мультимножину $G = \{g_1, g_2, \dots, g_\eta\}$ можна задати основою $S(G)$, тобто кортежем усіх її різних елементів і кратністю – числом повторень кожного елемента основи цієї мультимножини. Кратність елемента $g \in S(G)$ позначають $k_G(g)$. Мультимножина B з основою $S(B)$ називається підмультимножиною мультимножини A з основою $S(A)$ (позначається $B \subset A$), якщо $S(B) \subset S(A)$ і для кожного елемента $a \in S(B)$ виконується нерівність $k_B(a) \leq k_A(a)$. Якщо $B \subset A$, то різниця $A - B$ мультимножин A і B містить елементи мультимножини A , причому $\forall a \in S(A) \quad k_{A-B}(a) = k_A(a) - k_B(a)$ ($k_{A-B}(a) \geq 0$).

Загальною множиною розміщень $E_\eta^k(G)$ називають множину всіх упорядкованих k -вибірок з мультимножини $G = \{g_1, g_2, \dots, g_\eta\}$ вигляду $(g_{i_1}, \dots, g_{i_k})$, де $g_{i_j} \in G$, $i_j \neq i_t \forall i_j, i_t \in J_\eta$, $\forall j, t \in J_k$. Якщо $k = \eta$, то множина $E_\eta^k(G)$ є загальною множиною перестановок $E_k(G)$.

МЕТОД ГІЛОК І МЕЖ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ H -ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ НА РОЗМІЩЕННЯХ

Нехай мультимножина $\Gamma = \{[G_1]_H, [G_2]_H, \dots, [G_\eta]_H\}$, де G_1, G_2, \dots, G_η – незалежні випадкові величини, причому $h_1(G_i) \geq 0 \quad \forall i \in J_\eta$; коефіцієнти лінійної функції $\Phi([X]_H) = \sum_{j=1}^k c_j [X_j]_H$ є додатними дійсними числами: $c_j \in R^1$, $c_j > 0 \quad \forall j \in J_k$.

Розглянемо особливості застосування методу гілок і меж (МГМ) для розв'язування такої H -задачі стохастичної оптимізації на розміщеннях: знайти пару $\langle \Phi([X^*]_H), [X^*]_H \rangle$ таку, що

$$\Phi([X^*]_H) = \min_{[X]_H \in E_\eta^k(\Gamma)} \sum_{j=1}^k c_j [X_j]_H, \quad [X^*]_H = \arg \min_{[X]_H \in E_\eta^k(\Gamma)} \sum_{j=1}^k c_j [X_j]_H, \quad (2)$$

за умови

$$[X]_H = ([X_1]_H, [X_2]_H, \dots, [X_k]_H) \in \Xi, \quad (3)$$

де $E_\eta^k(\Gamma)$ – загальна множина розміщень з елементів мультимножини $\Gamma = \{[G_1]_H, [G_2]_H, \dots, [G_\eta]_H\}$, Ξ – деяка підмножина множини ω^k . Унаслідок скінченності мультимножини Γ множина значень функції $\Phi([X]_H)$ також є скінченною і на ній може бути визначений мінімум у розглянутому вище розумінні. Оскільки далі мова йтиме лише про H -класи, а не окремі випадкові величини, то позначення класу еквівалентності опускаємо.

Будемо проводити галуження не допустимої множини $\Xi \cap E_\eta^k(\Gamma)$, а загальної множини розміщень $E_\eta^k(\Gamma)$ з наступною перевіркою, чи належить знайдене розміщення множині Ξ . Галуження проводитимемо покомпонентно (тобто «вглиб»), надаючи певне можливе

значення змінним X_j . Це означає, що множина $\Theta' \subset E_\eta^k(\Gamma)$, що одержується на деякому рівні галуження в МГМ, визначається такими умовами:

$$X_j = G_{r_j}, \quad j \in I, \quad (4)$$

де I – деяка множина індексів $I \subset J_k$, $|I| = t$. Говоритимемо при цьому, що у множині Θ' зафіксовані значення змінних X_j , $j \in I$. Змінні, що залишилися невизначеними, позначимо $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_\tau$ ($\tau = k - t$). Позначимо також $\zeta_B = \{c_j | j \in I\}$ – мультимножину коефіцієнтів цільової функції, значення змінних у цільовій функції при яких зафіксовані, $\tilde{\zeta} = \{c_j | j \notin I\}$ – мультимножину коефіцієнтів, значення змінних при яких ще не визначені. Нумерацію змінних \tilde{X}_i ($i \in J_\tau$) зробимо у такий спосіб, щоб елементи мультимножини $\tilde{\zeta} = \{\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_\tau\}$ були упорядковані за незростанням: $\tilde{c}_1 \geq \tilde{c}_2 \geq \dots \geq \tilde{c}_\tau$. Нехай також $\Gamma_B = \{G_{r_j} | j \in I\}$, $\tilde{\Gamma} = \Gamma - \Gamma_B$. Елементи мультимножини $\tilde{\Gamma}$ позначатимемо \tilde{G}_i ($i \in J_p$, $p = |\tilde{\Gamma}| = \eta - t$) і вважатимемо впорядкованими у неспадному порядку: $\tilde{G}_1 \leq \tilde{G}_2 \leq \dots \leq \tilde{G}_p$. Розглянемо величину

$$\xi(\Theta') = \sum_{j \in I} c_j G_{r_j} + \sum_{i=1}^{\tau} \tilde{c}_i \tilde{G}_i. \quad (5)$$

Теорема 1. Оцінкою функції $\Phi(X)$ на множині $\Theta' \subset E_\eta^k(\Gamma)$, визначеній згідно з (4), у методі гілок і меж може бути $\xi(\Theta')$ згідно з (5).

Доведення. Як відомо [15], оцінка $\xi(\Theta')$ в методі гілок і меж повинна задовольняти таким умовам:

- 1) $\xi(\Theta') \leq \Phi(X)$ для всіх $X \in \Theta'$;
- 2) $\xi(\Theta') = \Phi(X)$, якщо $\Theta' = \{X\}$;
- 3) $\xi(\Theta') = \infty$, якщо $\Theta' = \emptyset$.

Для способу упорядкування, що розглядається у цій статті, під записом $\xi(\Theta') = \infty$ розуміємо, що для будь-якого H -класу $A \in \omega$ умова $A \prec \xi(\Theta')$ є істинною.

Оскільки із способу галуження випливає, що одноелементна множина утворюється, коли значення всіх змінних зафіксоване, тобто $I = J_k$, то величина (5) набуває вигляду

$$\xi(\Theta') = \sum_{j=1}^k c_j G_{r_j} = \Phi(X). \text{ Отже, умова 2) виконується.}$$

Перевіримо виконання умови 1). Очевидно, що для будь-якого $X \in \Theta'$ значення змінних $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_\tau$ утворюють τ -вибірку з мультимножини $\tilde{\Gamma}$, тобто $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_\tau) \in E_p^\tau(\tilde{\Gamma})$.

Нехай $\tilde{\Phi}(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^{\tau} \tilde{c}_i \tilde{X}_i$. Оскільки елементи мультимножини $\tilde{\Gamma}$ упорядковані у неспадаючому порядку, то $H(\tilde{G}_1) \leq_l H(\tilde{G}_2) \leq_l \dots \leq_l H(\tilde{G}_p)$. Враховуючи також упорядкування в незростаючому порядку коефіцієнтів цільової функції, згідно з теоремою 4 [11] маємо, що

розміщення \tilde{X}^* , яке задовольняє співвідношенню $\tilde{X}_i^* = \tilde{G}_i \quad \forall i \in J_\tau$, є мінімаллю функції $\tilde{\Phi}(\tilde{X})$ на множині $E_p^\tau(\tilde{\Gamma})$. Отже, $\tilde{\Phi}(\tilde{X}^*) \leq \tilde{\Phi}(\tilde{X}) \quad \forall \tilde{X} \in E_p^\tau(\tilde{\Gamma})$.

Оскільки характеристичний вектор задовольняє умову (1), то для будь-якого $X \in \Theta'$ виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} H(\Phi(X)) &= H\left(\sum_{j \in I} c_j X_j + \sum_{i=1}^{\tau} \tilde{c}_i \tilde{X}_i\right) = H\left(\sum_{j \in I} c_j X_j\right) + H\left(\sum_{i=1}^{\tau} \tilde{c}_i \tilde{X}_i\right) = H\left(\sum_{j \in I} c_j G_{r_j}\right) + \\ &+ H(\tilde{\Phi}(\tilde{X})) \geq H\left(\sum_{j \in I} c_j G_{r_j}\right) + H(\tilde{\Phi}(\tilde{X}^*)) = H\left(\sum_{j \in I} c_j G_{r_j}\right) + H\left(\sum_{i=1}^{\tau} \tilde{c}_i \tilde{G}_i\right) = \xi(Q'). \end{aligned}$$

Отже, $\xi(\Theta') \leq \Phi(X)$ для всіх $X \in \Theta'$. Теорему доведено.

Використовуючи теорему 1, сформулюємо алгоритм методу гілок і меж для розв'язування задачі (2)-(3). Як і в багатьох алгоритмах методу гілок і меж, при виборі множини для галуження слідуватимемо правилу найменшої оцінки, хоча такий вибір не гарантує скорочення перебору. Позначатимемо $\Theta_{r_1 r_2 \dots r_t}$ множини, у якій зафіксовані значення t змінних X_1, X_2, \dots, X_t , причому r_1, r_2, \dots, r_t – індекси відповідних елементів з мультимножини Γ .

1. Покладаємо $h = 0$, $\Phi^0 = \infty$, $t = 1$.
2. Розбиваємо множини $E_\eta^k(\Gamma)$ на підмножини Θ_{r_t} , що визначені умовою (4), де $I = \{1\}$, G_{r_t} – різні елементи мультимножини Γ . Для кожної із множин Θ_{r_t} знаходимо оцінку (5).
3. Для подальшого галуження обираємо негалужену множини, для якої оцінка передре усім іншим у порядку \leq (нехай це множини $\Theta_{s_1 \dots s_t}$).
4. Розгалужуємо $\Theta_{s_1 \dots s_t}$ на підмножини $\Theta_{s_1 \dots s_t r_{t+1}}$ ($G_{r_{t+1}}$ – різні елементи мультимножини $\Gamma - \{G_{s_1}, G_{s_2}, \dots, G_{s_t}\}$), для кожної з яких знаходимо оцінку згідно з (5).
5. Збільшуємо значення t на одиницю. Якщо $t = k$ (у множині $\Theta_{s_1 \dots s_{k-1} r_k}$ зафіксовано значення всіх змінних, тобто множини є одноелементною), то переходимо до кроку 6, інакше (при $t < k$) – до кроку 8.
6. Для всіх r_k порівнюємо оцінку множини $\Theta_{s_1 \dots s_{k-1} r_k}$ з Φ^h : якщо $\xi(\Theta_{s_1 \dots s_{k-1} r_k}) < \Phi^h$ і при цьому $(G_{s_1}, G_{s_2}, \dots, G_{s_{k-1}}, G_{r_k}) \in \Xi$, то збільшивши значення h на одиницю, покладаємо $\Phi^h = \xi(\Theta_{s_1 \dots s_{k-1} r_k})$, $X^h = (G_{s_1}, G_{s_2}, \dots, G_{s_{k-1}}, G_{r_k})$.
7. Зменшуємо значення t на одиницю.
8. Якщо залишилися негалужені множини $\Theta_{s_1 \dots s_{t-1} r_t}$ такі, що $\xi(\Theta_{s_1 \dots s_{t-1} r_t}) < \Phi^h$, то повертаємося до кроку 3, інакше переходимо до кроку 9.
9. Якщо $t > 1$, то переходимо до кроку 8, інакше розв'язування задачі завершено: якщо $\Phi^h = \infty$, то задача розв'язку не має, інакше $\langle \Phi^h, X^h \rangle$ – розв'язок.

ІЛЮСТРАТИВНИЙ ПРИКЛАД

Нехай елементи мультимножини $\Gamma = \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ є H -класами незалежних дискретних випадкових величин зі скінченним числом значень. Нехай також характеристичний вектор $H(A) = (h_1(A); h_2(A); h_3(A))$, де $h_1(A)$ – математичне сподівання, $h_2(A)$ – дисперсія випадкової величини A , $h_3(A)$ – її найменше можливе значення. З властивостей математичного сподівання і дисперсії [16] випливає, що $h_1(\alpha A + \beta B) = \alpha h_1(A) + \beta h_1(B)$, $h_2(\alpha A + \beta B) = \alpha^2 h_2(A) + \beta^2 h_2(B)$. Також неважко перекоонатися, що $h_3(A)$ задовольняє умову (1), де $\lambda_3 = 1$.

Розглянемо розв’язування за допомогою методу гілок і меж задачі (2), де $\Phi(X) = X_1 + 3X_2 + 2X_3$, характеристичні вектори елементів мультимножини мають вигляд $H(G_1) = (6; 5; 2)$, $H(G_2) = H(G_3) = (7; 5; 1)$, $H(G_4) = (8; 2; 3)$, область Ξ визначається умовою $-2X_1 + X_2 + 4X_3 \leq B$, $H(B) = (24; 102; 8)$.

Покладаємо $h = 0$, $\Phi^0 = \infty$, $t = 1$, $I = \{1\}$. Розгалужуємо множину $E_4^3(\Gamma)$ згідно з умовою (4): $\Theta_1 = \{X_1 = G_1\}$, $\Theta_2 = \{X_1 = G_2\}$, $\Theta_4 = \{X_1 = G_4\}$ (оскільки $G_2 = G_3$, то множину $\Theta_3 = \{X_1 = G_3\}$ не розглядаємо). Також $\zeta_B = \{1\}$, $\tilde{\zeta} = \{3, 2\}$.

Для $\Theta_1 = \{X_1 = G_1\}$ маємо: $\Gamma_B = \{G_1\}$, $\tilde{\Gamma} = \{G_2, G_3, G_4\}$. У величині (5): перший доданок $\sum_{j \in I} c_j G_{r_j} = c_1 G_1 = G_1$, другий $-\sum_{i=1}^{\tau} \tilde{c}_i \tilde{G}_i = 3G_2 + 2G_3$, тобто $\xi_1 = \xi(\Theta_1) = G_1 + 3G_2 + 2G_3$; $h_1(\xi_1) = h_1(G_1) + 3h_1(G_2) + 2h_1(G_3) = 6 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 7 = 41$, $h_2(\xi_1) = h_2(G_1) + 9h_2(G_2) + 4h_2(G_3) = 70$, $h_3(\xi_1) = h_3(G_1) + 3h_3(G_2) + 2h_3(G_3) = 7$, тобто $H(\xi_1) = (41; 70; 7)$. Для $\Theta_2 = \{X_1 = G_2\}$ маємо, що $\Gamma_B = \{G_2\}$, $\tilde{\Gamma} = \{G_1, G_3, G_4\}$, доданки у величині (5): $\sum_{j \in I} c_j G_{r_j} = G_2$,

$\sum_{i=1}^{\tau} \tilde{c}_i \tilde{G}_i = 3G_1 + 2G_3$. Тоді $\xi(\Theta_2) = G_2 + 3G_1 + 2G_3$. $H(\xi(\Theta_2)) = (39; 70; 9)$. Нарешті $\xi(\Theta_4) = G_4 + 3G_1 + 2G_2$, $H(\xi(\Theta_4)) = (40; 67; 11)$. Оскільки $H(\xi(\Theta_2)) <_l H(\xi(\Theta_4)) <_l H(\xi(\Theta_1))$, тобто $\xi(\Theta_2) < \xi(\Theta_4) < \xi(\Theta_1)$, то обираємо для галуження підмножину Θ_2 .

Розгалужуючи Θ_2 , отримаємо підмножини $\Theta_{21} = \{X_1 = G_2, X_2 = G_1\}$, $\Theta_{23} = \{X_1 = G_2, X_2 = G_3\}$, $\Theta_{24} = \{X_1 = G_2, X_2 = G_4\}$. Знаходимо оцінки. Для Θ_{21} маємо $I = \{1, 2\}$, $\zeta_B = \{1, 3\}$, $\tilde{\zeta} = \{2\}$, $\Gamma_B = \{G_1, G_2\}$, $\tilde{\Gamma} = \{G_3, G_4\}$, доданки у величині (5): $\sum_{j \in I} c_j G_{r_j} = G_2 + 3G_1$, $\sum_{i=1}^{\tau} \tilde{c}_i \tilde{G}_i = 2G_3$. Отже, $\xi(\Theta_{21}) = G_2 + 3G_1 + 2G_3$, $H(\xi(\Theta_{21})) = (39; 70; 9)$. Аналогічно $\xi(\Theta_{23}) = (G_2 + 3G_3) + 2G_1$, $H(\xi(\Theta_{23})) = (40; 70; 8)$, $\xi(\Theta_{24}) = (G_2 + 3G_4) + 2G_1$, $H(\xi(\Theta_{24})) = (43; 43; 14)$.

Покладаємо $t = 2$ і враховуючи, що $t < k$, то переходимо до кроку 8. Унаслідок $\Phi^h = \infty$ переходимо до вибору підмножини для галуження (крок 3). Оскільки $\xi(\Theta_{21}) < \xi(\Theta_{23}) < \xi(\Theta_{24})$, то виберемо для галуження підмножину $\Theta_{21} = \{X_1 = G_2, X_2 = G_1\}$. Отримаємо множини:

- $\Theta_{213} = \{X_1 = G_2, X_2 = G_1, X_3 = G_3\}$, $\xi(\Theta_{213}) = G_2 + 3G_1 + 2G_3 = \xi_1$,
- $\Theta_{214} = \{X_1 = G_2, X_2 = G_2, X_3 = G_4\}$, $\xi(\Theta_{214}) = G_2 + 3G_1 + 2G_4$, $H(\xi(\Theta_{214})) = (41; 58; 13)$.

Оскільки t набуває значення 3 ($t = k$), то переходимо до кроку 6 алгоритму. Оцінка множини Θ_{213} задовольняє співвідношення $\xi(\Theta_{213}) \prec \Phi^0 = \infty$, але $(G_2, G_1, G_3) \notin \Xi$, оскільки $H(-2G_2 + G_1 + 4G_3) = (20; 105; 4)$, $H(B) \prec_l (20; 105; 4)$. Так само для множини Θ_{214} маємо $\xi(\Theta_{214}) \prec \Phi^0 = \infty$, $(G_2, G_1, G_4) \notin \Xi$ ($H(B) \prec_l H(-2G_2 + G_1 + 4G_3) = (24; 57; 12)$).

Зменшуємо значення t на одиницю ($t = 2$). Для негалужених множин Θ_{23} і Θ_{24} маємо $\xi(\Theta_{23}) \prec \Phi^h$, $\xi(\Theta_{24}) \prec \Phi^h$, тому переходимо до кроку 3. Для галуження обираємо множину Θ_{23} ($\xi(\Theta_{23}) \prec \xi(\Theta_{24})$). Одержимо:

- $\Theta_{231} = \{X_1 = G_2, X_2 = G_3, X_3 = G_1\}$, $\xi(\Theta_{231}) = G_2 + 3G_3 + 2G_1$, $H(\xi(\Theta_{231})) = (40; 70; 8)$,
- $\Theta_{234} = \{X_1 = G_2, X_2 = G_3, X_3 = G_4\}$, $\xi(\Theta_{234}) = G_2 + 3G_3 + 2G_4$, $H(\xi(\Theta_{234})) = (44; 58; 10)$.

Значення всіх змінних зафіксовані, тому переходимо до кроку 6: оскільки $H(B) \prec_l H(-2G_2 + G_3 + 4G_1) = (17; 105; 7)$ і $H(B) \prec_l H(-2G_2 + G_3 + 4G_4) = (5; 57; 11)$, то елементи множин Θ_{231} і Θ_{234} не є допустимими розв'язками задачі.

Розгалуження підмножини $\Theta_{24} = \{X_1 = G_2, X_2 = G_4\}$ дає такі результати:

- $\Theta_{241} = \{X_1 = G_2, X_2 = G_4, X_3 = G_1\}$, тоді $H(\xi(\Theta_{241})) = (43; 43; 14)$,
- $\Theta_{243} = \{X_1 = G_2, X_2 = G_4, X_3 = G_3\}$, тоді $H(\xi(\Theta_{243})) = (45; 43; 12)$.

При цьому $(G_2, G_4, G_1) \notin \Xi$, а для множини Θ_{243} маємо: $\xi(\Theta_{243}) \prec \Phi^0$, $H(-2G_2 + G_4 + 4G_3) \prec_l H(B)$. Отже, $h = 1$, $\Phi^1 = \xi(\Theta_{243})$, $X^1 = (G_2, G_4, G_3)$.

При $t = 2$ всі множини розгалужені, тому покладаємо $t = 1$. При $t = 1$ негалуженими є множини Θ_1 і Θ_4 , при цьому $\xi(\Theta_4) \prec \xi(\Theta_1) \prec \Phi^1$. Тому розгалужуємо множину Θ_4 . Отримаємо:

- $\Theta_{41} = \{X_1 = G_4, X_2 = G_1\}$, $\xi(\Theta_{41}) = G_4 + 3G_1 + 2G_2$, $H(\xi(\Theta_{41})) = (40; 67; 11)$,
- $\Theta_{42} = \{X_1 = G_4, X_2 = G_2\}$, $\xi(\Theta_{42}) = G_4 + 3G_2 + 2G_1$, $H(\xi(\Theta_{42})) = (41; 67; 10)$.

Оскільки $t = 2 < k$ і $\xi(\Theta_{41}) \prec \xi(\Theta_{42}) \prec \Phi^1$, то знову обираємо множину для галуження. Для множини Θ_{41} отримаємо множину $\Theta_{412} = \{X_1 = G_4, X_2 = G_1, X_3 = G_2\}$, у якій значення всіх змінних зафіксовані. Оскільки $H(\xi(\Theta_{412})) = (40; 67; 11) \prec_l H(\Phi^1)$ і при цьому $H(-2G_4 + G_1 + 4G_2) = (18; 93; 0) \prec_l H(B)$, то покладаємо $h = 2$, $\Phi^2 = \xi(\Theta_{412})$, $X^2 = (G_4, G_1, G_2)$. Оскільки $\Phi^2 \prec \xi(\Theta_{43})$, то при $t = 2$ не залишилося підмножин множини Θ_4 , які потребують галуження. При $t = 1$ для єдиної негалуженої підмножини Θ_1 виконується співвідношення $\Phi^2 \prec \xi(\Theta_1)$, тому розв'язування задачі завершено: розв'язком є пара $\langle \Phi^2, X^2 \rangle$.

ВЛАСТИВОСТІ Й РОЗВ'ЯЗУВАННЯ H_d -ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ НА РОЗМІЩЕННЯХ

Разом із задачею (2) розглянемо задачу пошуку пари $\langle \Phi_1(x^*), x^* \rangle$ такої, що

$$\Phi_1(x^*) = \min_{x \in E_\eta^k(G)} \sum_{j=1}^k C_j x_j, \quad x^* = \arg \min_{x \in E_\eta^k(G)} \sum_{j=1}^k C_j x_j, \quad (6)$$

де, на відміну від задачі (2), коефіцієнти $C_j \quad \forall j \in J_k$ цільової функції $\Phi_1(x) = \sum_{j=1}^k C_j x_j \in H$ -класами. Тут $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in R^k$, а елементи мультимножини $\Gamma = \{g_1, g_2, \dots, g_\eta\}$ – детерміновані. Задачі такого вигляду називатимемо H_d -задачами стохастичної комбінаторної оптимізації.

Покажемо, що коли $h_1(C_j) > 0 \quad \forall j \in J_k$, а елементи мультимножини Γ є додатними числами, розв'язування задачі (6) можна звести до розв'язування H -задачі вигляду (2) з детермінованими коефіцієнтами цільової функції й елементами мультимножини, що є H -класами. Вважатимемо, що елементи мультимножини G упорядковані за неспаданням:

$$0 < g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq g_\eta. \quad (7)$$

Розглянемо детерміновану задачу пошуку пари $\langle \bar{\Phi}_1(x^*), x^* \rangle$ такої, що

$$\bar{\Phi}_1(x^*) = \min_{x \in E_\eta^k(\Gamma)} \sum_{j=1}^k \bar{c}_j x_j, \quad x^* = \arg \min_{x \in E_\eta^k(\Gamma)} \sum_{j=1}^k \bar{c}_j x_j, \quad (8)$$

де $\bar{\Phi}_1(x) = \sum_{j=1}^k \bar{c}_j x_j$, $\bar{c}_j = h_1(C_j) \quad \forall j \in J_k$.

Як випливає з леми 1 [17], мінімаль функції $\bar{\Phi}_1(x)$ на множині $E_\eta^k(\Gamma)$ є перестановкою елементів мультимножини $\Gamma' = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$. Це означає, що для будь-якої точки x , яка не є елементом загальної множини перестановок $E_k(\Gamma')$, виконується нерівність $\bar{\Phi}_1(x^*) < \bar{\Phi}_1(x)$. Оскільки

$$\bar{\Phi}_1(x) = \sum_{j=1}^k \bar{c}_j x_j = \sum_{j=1}^k h_1(C_j) x_j = h_1\left(\sum_{j=1}^k C_j x_j\right) = h_1(\Phi_1(x)),$$

то з означення 1 отримуємо, що також $\Phi_1(x^*) < \Phi_1(x) \quad \forall x \notin E_k(\Gamma')$.

Отже, мінімаль у розв'язку задачі (6) також є перестановкою елементів мультимножини Γ' , тобто мінімум цільової функції $\Phi_1^* = \sum_{j=1}^k C_j g_{i_j}$, де $g_{i_j} \in \Gamma'$, $i_j \neq i_t \quad \forall i_j, i_t \in J_k, \quad \forall j, t \in J_k$. Тоді задачу (6) можна розглядати як задачу пошуку пари $\langle \varphi(Y^*), Y^* \rangle$ такої, що

$$\varphi(Y^*) = \min_{Y \in E_k(\Psi)} \sum_{j=1}^k g_j Y_j, \quad Y^* = \arg \min_{Y \in E_k(\Psi)} \sum_{j=1}^k g_j Y_j, \quad (9)$$

де $\varphi(Y) = \sum_{j=1}^k g_j Y_j$, мультимножина $\Psi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$. Вважатимемо, що елементи мультимножини Ψ пронумеровані так, що задовольняють умову

$$H(C_1) \geq_l H(C_2) \geq_l \dots \geq_l H(C_k). \quad (10)$$

Упорядкування елементів множин Γ' і Ψ можна записати у вигляді $g_{p_1} \geq g_{p_2} \geq \dots \geq g_{p_k}$ і $H(C_{p_1}) \leq_l H(C_{p_2}) \leq_l \dots \leq_l H(C_{p_k})$, де $p_j = k - j + 1 \quad \forall j \in J_k$. Тоді згідно з теоремою 4 [13] розміщення, яке задовольняє умови $Y_{p_j}^* = C_{p_j} \quad \forall j \in J_k$ (або, що те саме, $Y_j^* = C_j \quad \forall j \in J_k$), є мінімаллю в розв'язку задачі (9).

Таким чином, $\sum_{j=1}^k g_j Y_j \preceq \sum_{j=1}^k g_j C_j$ для будь-якої перестановки елементів мультимножини $\Psi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$. А тоді також $\sum_{j=1}^k C_j x_j \preceq \sum_{j=1}^k g_j C_j$ для будь-якої перестановки елементів мультимножини $\Gamma' = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$, тобто $x^* = (g_1, g_2, \dots, g_k)$ є мінімаллю в розв'язку задачі (6). Отже, доведено таку теорему.

Теорема 2. Якщо для коефіцієнтів цільової функції та елементів мультимножини в задачі (6) виконуються умови (7) і (10) відповідно, то точка x^* , яка задовольняє умови $x_j^* = g_j \quad \forall j \in J_k$, є мінімаллю у розв'язку задачі (6).

Розглянемо особливості застосування МГМ для розв'язування такої H_d -задачі стохастичної комбінаторної оптимізації на розміщеннях: знайти пару (6) таку, що

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \Xi \subset R^k. \quad (11)$$

Як і для H -задач оптимізації, використовуватимемо покомпонентний спосіб галуження: множина $\Theta' \in E_\eta^k(\Gamma)$ визначається умовами

$$x_j = g_{r_j}, \quad j \in I. \quad (12)$$

Розглянемо величину

$$\xi(\Theta') = \sum_{j \in I} C_j g_{r_j} + \sum_{i=1}^{\tau} \tilde{C}_i \tilde{g}_i, \quad (13)$$

де позначення аналогічні до тих, що використовувалися в МГМ розв'язування H -задачі. Враховуючи спосіб упорядкування елементів мультимножин $\tilde{\zeta}$ і $\tilde{\Gamma}$, на основі теореми 2 отримуємо, що точка x^* , яка задовольняє умовам $x_j^* = g_j \quad \forall j \in J_k$, є мінімаллю функції

$\tilde{\Phi}_1(x) = \sum_{i=1}^{\tau} \tilde{C}_i x_i$ на множині $E_p^{\tau}(\tilde{\Gamma})$. Тому $\tilde{\Phi}_1(x^*) \preceq \tilde{\Phi}_1(\tilde{x}) \quad \forall \tilde{x} \in E_p^{\tau}(\tilde{\Gamma})$. Далі аналогічно до

доведення теореми 1 одержуємо, що $\xi(\Theta') \preceq \Phi_1(x)$. Отже, доведено таку теорему.

Теорема 3. Оцінкою функції $\Phi_1(x)$ на множині $\Theta' \subset E_\eta^k(\Gamma)$, визначеній згідно з (12), у методі гілок і меж може бути $\xi(\Theta')$ згідно з (13).

Для розв'язування H_d -задач (6), (11), де $h_1(C_j) > 0 \quad \forall j \in J_k$, а елементи мультимножини Γ є додатними числами, може використовуватися запропонований вище алгоритм методу гілок і меж.

ВИСНОВКИ

У статті досліджуються задачі стохастичної комбінаторної оптимізації на розміщеннях. Постановка задач здійснена на основі введення відношення порядку на фактор-множині, що утворюється при розбитті заданої множини незалежних випадкових величин на основі порівняння їх числових характеристик. Обґрунтовано спосіб обчислення оцінки в методі гілок і меж, якщо цільова функція є лінійною, причому коефіцієнти цільової функції або невідомі (але не те й інше одночасно) або є відповідними класами еквівалентності. Запропоновано алгоритм методу гілок і меж для розв'язування таких задач. Як перспективний напрямок подальших досліджень вбачається удосконалення процедури оцінювання множин й обґрунтування інших правил їх відсікання в рамках розв'язування методом гілок і меж таких задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гуляницький Л. Ф., Рясна І. І. До формалізації задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах. *Теорія оптимальних рішень: зб. наук. праць*. 2016. С. 17–25.
2. Емец О. А., Роскладка А. А. О комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. № 5. С.35–44.
3. Перепелица В. А., Тебуева Ф. Б. Дискретная оптимизация и моделирование в условиях неопределенности данных. Москва: Академия Естествознания, 2007. 151 с.
4. Стоян Ю. Г., Романова Т. Е., Сысоева Ю. А. Оптимизационная задача размещения правильных интервальных многоугольников. *Доклады НАН Украины*. 1998. № 9. С. 114–120.
5. Гребенник И. В., Романова Т. Е., Шеховцов С. Б. Интервальное оценивание альтернатив при принятии решений в геометрическом проектировании. *Бионика интеллекта. Информация. Язык. Интеллект: научно-технический журнал*. 2008. № 2(69). С. 56–60.
6. Ємець О. О., Ємець Ол-ра О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах. Полтава: ПУЕТ, 2011. 239 с. URL: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352>.
7. Семенова Н. В., Колечкина Л. Н., Нагорная А. Н. Векторные задачи оптимизации с линейными критериями на нечетко заданном комбинаторном множестве альтернатив. *Кибернетика и системный анализ*. 2011. № 2. С. 88–99.
8. Сергиенко И. В., Емец О. А., Емец А. О. Задачи оптимизации с интервальной неопределенностью: метод ветвей и границ. *Кибернетика и системный анализ*. 2013. № 5. С. 38–50.
9. Емец О. А., Барболина Т. Н. Об оптимизационных задачах с вероятностной неопределенностью. *Доповіди НАН України*. 2014. № 11. С. 40–45.
10. Барболина Т. Н. О подходе к оптимизации с вероятностной неопределенностью с использованием упорядочивания случайных величин. *Вісник Запорізького національного університету: зб. наук. статей. Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 11–20.
11. Емец О. А., Барболина Т. Н. О свойствах линейной безусловной задачи комбинаторной оптимизации на размещениях с вероятностной неопределенностью. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. № 2. С. 127–139.
12. Ємець О. О., Барболіна Т. Н. Лінійні оптимізаційні задачі на розміщеннях з імовірнісною невизначеністю: властивості і розв'язання. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2016. №1. С. 107–119.
13. Емец О. А., Барболина Т. Н. Решение линейных безусловных задач комбинаторной оптимизации на размещениях со стохастической неопределенностью. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. Т. 52, № 3. С. 141–153.
14. Стоян Ю. Г., Ємець О. О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. Київ: Інститут системних досліджень освіти, 1993. 188 с. URL: <http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/487>.
15. Сергиенко И. В., Каспшицкая М. Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. Киев: Наук. думка, 1981. 288 с.

16. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей: учебник. 8-е изд., испр. и доп. Москва: Едиториал УРСС, 2005. 448 с.
17. Емец О. А., Барболина Т. Н. Свойства комбинаторных оптимизационных безусловных задач на размещениях с линейной и дробно-линейной целевыми функциями. *Проблемы управления и информатики*. 2017. № 1. С. 66–76.

REFERENCE

1. Hulianytskyi, L. F. & Riasna, I. I. (2016). On formalization of combinatorial optimization problems on fuzzy sets. *Teoriia optymalnykh rishen*, pp. 17-25.
2. Yemets, O. A. & Roskladka, A. A. (2008). Combinatorial optimization under uncertainty. *Cybernetics and Systems Analysis*, Vol. 44, Iss. 5, pp. 655-663.
3. Perepelitsa, V. A. & Tebueva, F. B. (2007). *Discrete optimization and modeling under uncertainty of data*. Moscow: Akademiia Yestestvoznaniia.
4. Stoyan, Yu. G., Romanova, T. Ye. & Sysoeva, Yu. A. (1998). Optimization problem of placement of regular interval polygons. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, Iss. 9, pp. 114-120.
5. Grebennik, I. V., Romanova, T. E & Shekhovtsov, S. B. (2008). Interval estimation of alternatives in decision making in geometric design. *Bionica Intellecta. Informatciia. Yazyk. Intellect: scientific and technical journal*, Iss. 2, pp. 56-60.
6. Iemets, O. O. & Yemets, O. O. (2011). *Solving combinatorial optimization problems on fuzzy sets*. Poltava: PUET.
7. Semenova, N. V., Kolechkina, L. N. & Nagirna, A. M. (2011). Vector optimization problems with linear criteria over a fuzzy combinatorial set of alternatives. *Cybernetics and Systems Analysis*, Vol. 47, Iss. 2, pp. 250-259.
8. Sergienko, I. V., Iemets, O. O. & Yemets, O. O. (2013). Optimization problems with interval uncertainty: Branch and bound method. *Cybernetics and Systems Analysis*, Vol. 49, Iss. 5, pp. 673-683.
9. Iemets, O. O. & Barbolina, T. M. (2014). About optimization problems with probabilistic uncertainty. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, Iss. 11, pp. 40-45.
10. Barbolina, T. M. (2016). About approach to optimization with probabilistic uncertainty using ordering of random variables. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences*, No. 1, pp. 11-20.
11. Iemets, O. O. & Barbolina, T. M. (2016). Properties of the linear unconditional problem of combinatorial optimization on arrangements under probabilistic uncertainty. *Cybernetics and Systems Analysis*, Vol. 52, Iss. 2, pp. 285-295.
12. Iemets, O. O. & Barbolina, T. M. (2016). Linear optimization problems on permutations under probabilistic uncertainty: properties and solution. *System research and information technologies*, Iss. 1, pp. 107-119.
13. Iemets, O. O. & Barbolina, T. M. (2016). Solving Linear Unconstrained Problems of Combinatorial Optimization on Arrangements Under Stochastic Uncertainty. *Cybernetics and Systems Analysis*, Vol. 52, Iss. 3, pp. 457-466.
14. Stoyan, Yu. G. & Iemets, O. O. (1993). *Theory and methods of euclidian combinatorial optimization*. Kyiv: Instytut systemnykh doslidzhen osvity.
15. Sergienko, I. V. & Kaspshitskaya, M. F. (1981). *Models and methods of solving combinatorial optimization problems by computers*. Kyiv: Naukova dumka.
16. Gnedenko, B. V. (2005). *Course in probability theory*. Moscow: Editorial URSS.
17. Iemets, O. A. & Barbolina, T. M. (2017). Properties of Combinatorial Optimization Unconstrained Problems on Arrangements with Linear and Linear–Fractional Objective Functions. *Journal of Automation and Information Sciences*, Vol. 49, Iss. 1, pp. 41-52.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-06

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПОПЕРЕЧНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ, АНИЗОТРОПНОЙ, ПОВРЕЖДЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ СТЕКЛОПЛАСТИКА, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Искандеров Р. А., Алимамедов Р. К.

*Азербайджанский архитектурно-строительный университет,
ул. А. Султановой, 5, г. Баку, Аз 1073/1, Азербайджан*

r.iskanderov@gmail.com, resadali1976@gmail.com

В предлагаемой статье с помощью вариационного принципа решена задача о параметрическом колебании поперечно подкрепленной, анизотропной поврежденной цилиндрической оболочки из стеклопластика с вязкой жидкостью под действием внешнего периодического давления. Торцы оболочки предполагались шарнирно закрепленными. Деформирование цилиндрической оболочки определяется в рамках линейной теории упругих оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява, а для ребер используется теория криволинейных стержней Кирхгофа–Клебиса. Для описания процессов повреждения оболочки применяется наследственная теория повреждаемости в интегральной форме, где используется функция залечивания дефектов, зависящая от объема повреждаемости за цикл нагружения и принимающая значения от 0 до 1. Для решения поставленной задачи применяется вариационный принцип Остроградского–Гамильтона. Поверхностные нагрузки, действующие со стороны вязкой жидкости на поперечно подкрепленную оболочку, определяются из решений линеаризованного уравнения Навье–Стокса. Неизвестные компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности оболочки представляются в виде комбинации тригонометрических функций координат точки оболочки и тригонометрических функций времени с неизвестными постоянными коэффициентами. Эти неизвестные постоянные находятся из системы линейных алгебраических уравнений, полученной в результате совместного интегрирования полной энергии системы и уравнений движения жидкости с учетом контактных условий на поверхностях их взаимодействия. При малых значениях отношения радиуса оболочки к ее длине собственные частоты колебаний системы слабо зависят от угла намотки. С увеличением этого отношения зависимость собственных частот колебаний системы от угла намотки носит сложный характер.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, вязкая жидкость, частота колебаний, вариационный принцип, повреждаемость, статическая и динамическая сила, подкрепление.

ПАРАМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ПОПЕРЕЧНО ПІДКРІПЛЕНОЇ, АНІЗОТРОПНОЇ, ПОШКОДЖЕНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОЧКИ ЗІ СКЛОПЛАСТИКА, ЗАПОВНЕНОЇ В'ЯЗКОЮ РІДИНОЮ

Искандеров Р. А., Алімамедов Р. К.

*Азербайджанський архітектурно-будівельний університет,
вул. А. Султанової, 5, м. Баку, Аз 1073/1, Азербайджан*

r.iskanderov@gmail.com, resadali1976@gmail.com

У пропонованій статті за допомогою варіаційного принципу вирішена задача про параметричне коливання поперечно підкріпленої, анізотропної пошкодженої циліндричної оболонки зі склопластику із в'язкою рідиною під дією зовнішнього періодичного тиску. Торці оболонки передбачалися шарнірно закріпленими. Деформування циліндричної оболонки визначається в рамках лінійної теорії пружних оболонок, заснованої на гіпотезах Кірхгофа–Лява, а для ребер використовується теорія криволінійних стрижнів Кірхгофа–Клебіса. Для опису процесів пошкодження оболонки застосовується спадкова теорія пошкоджуваності в інтегральній формі, де використовується функція заліковування дефектів, що залежить від обсягу пошкоджуваності за цикл навантаження і приймає значення від 0 до 1. Для вирішення поставленого завдання застосовується варіаційний принцип Остроградського–Гамільтона. Поверхневі навантаження, що діють з боку в'язкої рідини на поперечно підкріплену оболонку, визначаються з рішень лінеаризованого рівняння Нав'є–Стокса. Невідомі компоненти вектора переміщень точок срединної поверхні оболонки представляються у вигляді комбінації тригонометричних функцій

координат точки оболонки і тригонометричних функцій часу з невідомими постійними коефіцієнтами. Ці невідомі постійні знаходяться з системи лінійних алгебраїчних рівнянь, отриманої в результаті спільного інтегрування повної енергії системи і рівнянь руху рідини з урахуванням контактних умов на поверхнях їх взаємодії. При малих значеннях відношення радіуса оболонки до її довжини власні частоти коливань системи слабо залежать від кута намотування. Зі збільшенням цього відношення залежність власних частот коливань системи від кута намотування носить складний характер.

Ключові слова: циліндрична оболонка, в'язка рідина, частота коливань, варіаційний принцип, пошкоджуваність, статична і динамічна сила, підкріплення.

PARAMETRIC VIBRATIONS OF IATERALLY STRENGTHENED, ANISOTROPIC, DAMAGED, VISCOUS FLUID-FILLED CYLINDRICAL SHELL MADE OF GLASS-REINFORCED PLASTIC

Iskanderov R. A., Alimamedov R. K.

*Azerbaijan Architectural and Construction University,
A. Sultanova str., 5, Baku, Az 1073/1, Azerbaijan*

r.iskanderov@gmil.com, resadali1976@gmail.com

The problem of cylindrical shell parametric oscillations under external periodic pressure is considered in this paper. It is supposed that shell is transversely reinforced and additionally anisotropic damaged. Shell is made from fiberglass with viscous fluid inside. The bounadary conditions considered simply-supported edge. Ostrogradsky–Gauss variation principle is used for solving the problem. It is assumed the linear theory of elastic shells, based on Kirchhoff–Love hypothesis and Kirchhoff–Klebis theory for curvilinear roads. The hereditary theory in an integral form of damage is used for describing the shell damage process. The function of healing defects depending on the amount of damage during the loading cycle taking values in the range 0, 1. The surface loads acting on the transversely supported shell from the viscous fluid side. This loads are determined from the solutions of the linearized Navier–Stokes equation. The unknown components of the displacement vector points of the middle surface of the shell are represented as a combination of trigonometric functions by both the coordinates of the shell and the time with unknown coefficients. The coefficients are found from a system of linear algebraic equations, obtained as a result of the integration of the total energy and the fluid motion equations. The contact conditions on the surface are taking into the account. For shall ratios of the shell radius to its length, the natural frequencies of the system weakly depend on the winding angle. With the increase of this ratio, the dependence of the natural frequencies of the system of the winding angle is complex.

Key words: cylindrical shell, viscous liquid, vibration frequency, variation principle, damageability, static and dynamic force, reinforcement.

ВВЕДЕНИЕ

Надежный расчет цилиндрической оболочки, контактирующей со средой на длительную прочность, предполагает учет образующихся и накапливающихся дефектов и влияния внешней среды и сил. При периодичности напряжения этот учет носит усложненный характер, связанный с так называемым процессом залеживания дефектов. Поэтому разработка математических моделей для исследования поведений подкрепленных, поврежденных оболочек, наиболее полно учитывающих их работу при динамических нагрузках, и проведение на их основе исследований устойчивости и параметрических колебаний, а также выбор рациональных параметров конструкций, контактирующих с вязкой жидкостью, являются актуальными задачами.

Отметим, что в работе [1] представлены результаты нахождения частот свободных колебаний цилиндрической конструктивно анизотропной оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье. Постоянные упругости оболочки зависят от угла намотки стекловолокна. Расчет частот свободных колебаний выполнен на основании метода Рэлея–Ритца. Результаты вычислений представлены в виде зависимостей частот свободных колебаний от угла намотки стекловолокна для оболочки из тканевого стеклопластика при различных значениях параметров волнообразования и различных отношениях между параметрами, характеризующими геометрические размеры оболочки. Работа [2] посвящена исследованию свободных колебаний, усиленной продольными системами ребер и

нагруженной осевыми сжимающими силами анизотропной цилиндрической оболочки из стеклопластика с протекающей жидкостью. В работах [3, 4] представлены результаты нахождения частот свободных колебаний подкрепленной различными ребрами цилиндрической конструктивно анизотропной оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье, с протекающей жидкостью. Предполагается, что кольцевые ребра укреплены на внешней поверхности обшивки, размещены на равных расстояниях и имеют одинаковые геометрические и механические характеристики. Результаты вычислений собственных частот колебаний представлены в виде зависимостей от угла намотки стекловолокна для оболочки из тканевого стеклопластика и от скорости протекающей жидкости при различных значениях параметров волнообразования и различных отношениях между параметрами, характеризующими геометрические размеры оболочки.

В работах [5, 6] с помощью вариационного принципа решена задача о параметрическом колебании поперечно подкрепленной, поврежденной ортотропной цилиндрической оболочки с вязкой жидкостью под действием внешнего давления $q = q_0 + q_1 \sin \omega_* t$ (где q_0 – средняя или основная нагрузка, q_1 – амплитуда изменения нагрузки, ω_* – частота ее изменения). На основе вариационного принципа Остроградского–Гамильтона построена система дифференциальных уравнений относительно амплитуды перемещений поперечно подкрепленной, поврежденной ортотропной цилиндрической оболочки, заполненной вязкой жидкостью и реализовано численно. Действующие поверхностные нагрузки со стороны жидкости на поперечно подкрепленную цилиндрическую оболочку определяются из решений линеаризованного уравнения Навье–Стокса. Предполагается, что ось упругой симметрии материала оболочки совпадает с координатными осями.

Работа [7] посвящена исследованию собственных частот колебаний шарнирно-опертой по краям круговой замкнутой цилиндрической оболочки, усиленной регулярной системой продольных и поперечных ребер со сплошным заполнителем. Оболочка моделируется как конструктивно-ортотропная, а ее движение описывается системой уравнений в перемещениях.

Одной из экспериментально подтвержденных теорий повреждаемости является наследственная теория повреждаемости, разработанная для сложнапряженного состояния в [8, 9]. Согласно этой теории определяющее уравнение для однородного тела (\bar{x} -вектор-координата точки тела) записывается в виде:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + M^* \cdot \sigma_{ij},$$

где M^* – интегральные операторы наследственного типа, описывающие процессы повреждаемости, и для которых имеют место представления:

$$M^* \cdot \sigma_{ij} = \sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot \sigma_{ij}(\tau) d\tau + \int_{t_{n-1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot \sigma_{ij}(\tau) d\tau. \quad (1)$$

Здесь $M(\bar{x}, t - \tau)$ – ядро повреждаемости; (t_k^-, t_k^+) – интервалы периодов активного напряжения, способствующего росту повреждаемости; $f(t_k^+)$ – функция залечивания дефектов, зависящая от объема повреждаемости, накопленной за данный цикл. Например, значение $f(t_k^+) = 0$ соответствует полному залечиванию дефектов, образовавшихся за данный цикл, а значения $f(t_k^+) = 1$ – отсутствию самого эффекта залечивания дефектов. Все промежуточные значения от нуля до единицы соответствуют эффекту частичному залечиванию дефектов. Для определения интервалов (t_k^-, t_k^+) необходимо задавать специальные условия. Их удобно формулировать для конкретной задачи с учетом специфики конструкции, условий ее работы и видов нагружения. В данной статье поступаем аналогичным образом, и подобные условия будут сформулированы ниже.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим поперечно подкрепленную цилиндрическую оболочку кругового сечения радиуса R , толщиной $2h$, длиной l , заполненную вязкоупругой жидкостью. Предполагается, что торцы оболочки шарнирно закреплены, т.е. при $x = 0; l$ имеет место:

$$N_{xx} = 0; M_{xx} = 0; w = 0; v = 0,$$

где N_{xx} – осевое усилие, M_{xx} – изгибающий момент, w, v – компоненты вектора перемещений точки оболочки – прогиба и радиального перемещения соответственно.

Для решения поставленной задачи применяется вариационный принцип Остроградского–Гамильтона. Согласно этому принципу истинные траектории отличаются от других возможных траекторий тем, что для первых должно выполняться условие

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (K - \Pi) dt = 0. \quad (2)$$

Здесь под K понимается кинетическая энергия системы, под Π – потенциальная энергия системы, $[t_0, t_1]$ – отрезок времени, в котором происходит процесс движения.

Принимается, что напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки можно полностью определить в рамках линейной теории упругих тонких оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява, а для расчета ребер применима теория криволинейных стержней Кирхгофа–Клебша. Система координат выбрана так, что координатные линии совпадают с линиями главных кривизны срединной поверхности оболочки. При этом предполагается, что ребра размещены вдоль координатных линий, а их края, как и края панели, лежат в одной координатной плоскости.

Для описания деформированного состояния ребер, кроме трех составляющих перемещений центров тяжести их поперечных сечений (u_j, v_j, w_j для j -го поперечного стержня), необходимо определить также углы закручивания φ_{kpj} . Учитывая, что согласно принятым гипотезам имеют место постоянство радиальных прогибов по высоте сечений, а также вытекающие из условий жесткого соединения ребер с оболочкой равенства соответствующих углов закручивания, записываем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u_j(y) &= u(x_j, y) + h_j \varphi_1(x_j, y); & v_j(x) &= v(x_j, y) + h_j \varphi_2(x_j, y); \\ w_j(x) &= w(x_j, y); & \varphi_j &= \varphi_2(x_j, y); & \varphi_{kpj}(x) &= \varphi_1(x_j, y). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $h_j = 0,5h + H_j^1$, h – толщина оболочки, H_j^1 – расстояния от осей j -го поперечного стержня до поверхности оболочки, φ_j, φ_{kpj} – углы поворота и закручивания поперечных сечений кольцевых ребер.

Полная энергия упругой деформации ортотропной, продольно подкрепленной, повреждающейся цилиндрической оболочки имеет вид:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} R^2 \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left\{ N_{11} \varepsilon_{11} + N_{22} \varepsilon_{22} + N_{12} \varepsilon_{12} - M_{11} \chi_{11} - M_{22} \chi_{22} - M_{12} \chi_{12} + \right. \\ &\left. + N_{22} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot N_{22} d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot N_{22} d\tau \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +N_{12} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot N_{12} d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot N_{12} d\tau \right) - \\
 & -M_{11} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot M_{11} d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot M_{11} d\tau \right) - \\
 & -M_{22} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot M_{22} d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot M_{22} d\tau \right) - \\
 & -M_{12} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot M_{12} d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot M_{12} d\tau \right) \Big\} dx dy + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\tilde{E}_j F_j \left(\frac{\partial v_j}{\partial y} - \frac{w_j}{R} \right)^2 + \tilde{E}_j J_{xj} \left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{w_j}{R^2} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + \tilde{E}_j J_{zj} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} - \frac{\varphi_{kpj}}{R} \right)^2 + \tilde{G}_j J_{kpj} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_j}{\partial y} \right)^2 \right] dy + \\
 & + \rho_j F_j \sum_{j=1}^{k_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_j}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpj}}{F_j} \left(\frac{\partial \varphi_{kpj}}{\partial t} \right)^2 \right] dy + \\
 & + \rho_0 h \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} (q_x u + q_y v + (q_z + q) w) dx dy, \quad (4)
 \end{aligned}$$

где R – радиус срединной поверхности оболочки, h – толщина оболочки, u, v, w – составляющие перемещения точек срединной поверхности оболочки, x_1, x_2 – координаты криволинейных краев оболочки; $F_j, J_{zj}, J_{xj}, J_{kpj}$ – площадь и моменты инерции поперечного сечения j -го поперечного стержня относительно оси Oz , и оси параллельной оси Oy и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении; \tilde{E}_j, \tilde{G}_j – модули упругости и сдвига материала j -го продольного стержня, t – временная координата, $t_1 = \omega_0 t$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{E_1}{(1-\nu^2)\rho_0 R^2}}$, ρ_0, ρ_i – плотности материалов, из которых изготовлены оболочки, i -й продольный стержень, соответственно, q_x, q_y, q_z – компоненты вектора давлений, действующей со стороны вязкой жидкости, k_2 – количество поперечных ребер.

Выражения для внутренних сил и моментов представим следующим образом:

$$N_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{ij} + z w_{ij}) dz; \quad M_{ij} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{ij} + z w_{ij}) z dz; \quad (5)$$

$$w_{11} = B_{11}\chi_{11} + B_{12}\chi_{22}; \quad w_{22} = B_{12}\chi_{11} + B_{22}\chi_{22}; \quad w_{21} = w_{12} = B_{66}\chi_{12}.$$

Постоянные упругости зависят от угла φ намотки стекловолокна и определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
B_{11} &= b_{11} \cos^4 \varphi + b_{22} \sin^4 \varphi + (b_{66} + 0,5b_{12}) \sin^2 2\varphi; \\
B_{22} &= b_{11} \sin^4 \varphi + b_{22} \cos^4 \varphi + (b_{66} + 0,5b_{12}) \sin^2 2\varphi; \\
B_{12} &= (b_{11} + b_{22} - 4b_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + b_{12} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi); \\
B_{66} &= -(b_{11} + b_{22} - 2b_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + b_{66} \cos^2 2\varphi; \\
B_{26} &= 1/2 (b_{22} \cos^2 \varphi - b_{11} \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi - 1/6 (b_{12} + 2b_{66}) \sin 4\varphi; \\
B_{16} &= 1/2 (b_{22} \sin^2 \varphi - b_{11} \cos^2 \varphi) \sin 2\varphi - 1/6 (b_{12} + 2b_{66}) \sin 4\varphi,
\end{aligned}$$

где b_{11} , b_{22} , b_{12} , b_{66} – основные модули упругости ортотропного материала, φ – угол, образуемый направлением стекловолокон с окружным направлением.

Напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} в срединной поверхности в соотношениях (5) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= B_{11}\varepsilon_{11} + B_{12}\varepsilon_{22}, \quad \sigma_{22} = B_{12}\varepsilon_{11} + B_{22}\varepsilon_{22} + B_{66}\varepsilon_{12}, \\
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} + w; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \chi_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi_{12} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
\end{aligned} \quad (6)$$

Поверхностные нагрузки q_x , q_y и q_z , действующие со стороны вязкой жидкости на продольно подкрепленную оболочку, определяются из решения линеаризованного уравнения Навье–Стокса:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad } p - \frac{\bar{\mu}}{3\rho_0 a^2} q \text{grad} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) + \bar{\mu} \nabla^2 \vec{v}, \quad (7)$$

где $\bar{\mu}$ – динамический коэффициент вязкости, p – давление в некоторой точке жидкости, ρ_0 – плотность жидкости, a – скорость звука в жидкости, ∇^2 – оператор Лапласа, $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ – вектор скорости произвольной точки жидкости.

На контактной поверхности оболочка – вязкая жидкость ($r = R$) выполняются:

$$v_x = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad v_r = \frac{\partial w}{\partial t}; \quad (8)$$

$$q_x = -\sigma_{rx}, \quad q_\theta = -\sigma_{r\theta}, \quad q_z = -p, \quad (9)$$

где силы вязкости определяются равенствами

$$\sigma_{rx} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right), \quad \sigma_{r\theta} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right). \quad (10)$$

Уравнение (9) с помощью уравнения неразрывности и уравнения состояния переходит к уравнению относительно p :

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla^2 p + \frac{4}{3} \frac{\bar{\mu}}{\rho_0 a^2} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (11)$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности оболочки ищем в виде

$$u = A(t) \cos n\theta \cos \frac{m\pi}{\xi_1} \xi, \quad v = B(t) \sin n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi, \quad w = C(t) \cos n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi, \quad (12)$$

где A , B , C – неизвестные функции. Эти функции для частот, лежащих вблизи $\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{1}{2}$, примем в виде

$$A(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t, \quad B(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t, \\ C(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \tag{13}$$

Решение уравнения (11) после разделения переменных имеет вид:

$$p = p_0 J(\lambda r) \cos n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi \sin \omega t. \tag{14}$$

Дополняя контактными условиями (8), (9) полную энергию системы (4) уравнений движения жидкости (7), приходим к контактной задаче о параметрических колебаниях ортотропной оболочки, подкрепленной поперечными системами ребер и заполненной вязкой жидкостью. Другими словами, задача о параметрических колебаниях подкрепленной поперечными системами ребер ортотропной оболочки с вязкой жидкостью сводится к совместному интегрированию полной энергией системы и уравнений движения жидкости при выполнении указанных условий на поверхности их контакта.

Используя (4)–(6), (16) и (12)–(14) и (2), задача сводится к однородной системе линейных алгебраических уравнений шестого порядка

$$a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + a_{i3}B_1 + a_{i4}B_2 + a_{i5}C_1 + a_{i6}C_2 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \tag{15}$$

Элементы $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{i6}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) имеют громоздкий вид, поэтому в данной статье не приводятся. Нетривиальное решение системы линейных алгебраических уравнений (15) шестого порядка возможно лишь в случае, когда ω_1 – корень ее определителя. Определение ω_1 сводится к трансцендентному уравнению, так как ω_1 входит в аргументы функции Бесселя J_n :

$$\det \|a_{ij}\| = 0. \tag{16}$$

Отметим, что при $\bar{\mu} = 0$ уравнение (16) переходит к частотному уравнению параметрических колебаний поперечно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки, заполненной идеальной жидкостью.

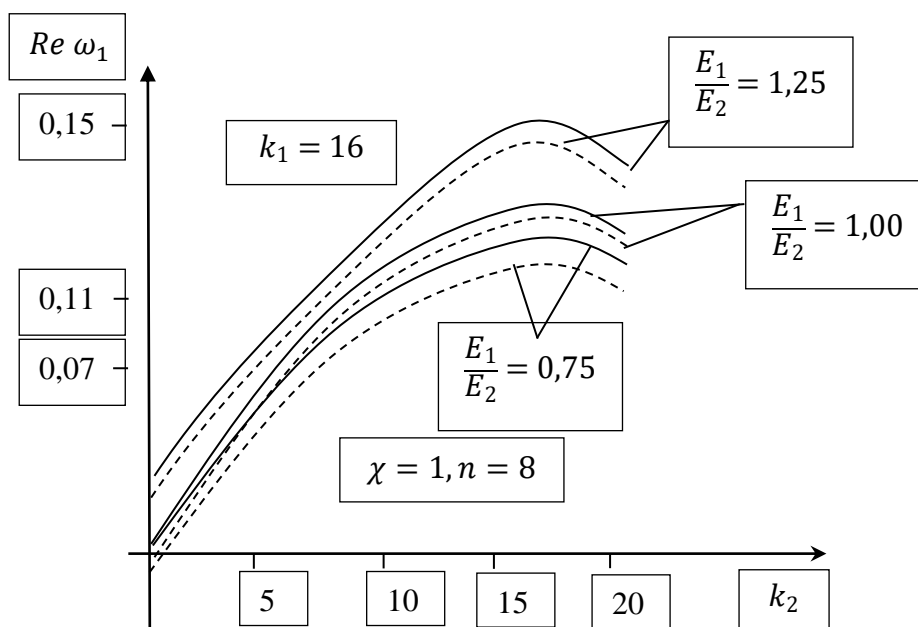


Рис. 1. Зависимость параметра частоты колебаний от числа поперечных стержней

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Рассмотрим некоторые результаты вычислений, выполненных исходя из приведенных выше зависимостей. Для геометрических и физических параметров, характеризующих материалы оболочки, жидкости и продольных стержней, были приняты [2]:

$$R = 0,16 \text{ м}; \quad h = 0,00045 \text{ м}; \quad \nu_2 = 0,19; \quad \nu_1 = 0,11; \quad l = 0,8 \text{ м}; \quad \rho/\rho_0 = 0,105;$$

$$\xi_1 = 1; \quad \tilde{E}_j = 6,67 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2; \quad \nu = 0,3; \quad h_j = 1,39 \text{ мм}; \quad F_j = 5,75 \text{ мм}^2; \quad J_{xj} = 19,9 \text{ мм}^4;$$

$$J_{kp,j} = 0,48 \text{ мм}^4; \quad a_* = 1350 \text{ м/с}; \quad \bar{\mu} = 10,02 \text{ кг/с} \cdot \text{м}.$$

Результаты счета представлены на рис. 1 и на рис. 2. В них приведены зависимость параметра частоты от числа поперечных стержней k_2 для различных отношений модулей упругости материала оболочки и от угла намотки φ для различных отношений $\frac{R}{L}$. В обоих рисунках штриховым линиям соответствует поврежденная оболочка, сплошным линиям – оболочка без повреждений. Рис. 1 и рис. 2 показывают, что учет повреждаемости материала оболочки приводит к снижению частот собственных колебаний системы по сравнению с тем случаем, когда оболочка рассматривается неповрежденной. Кроме того, с увеличением отношений $\frac{E_1}{E_2}$ частоты собственных колебаний системы увеличиваются. С увеличением количества поперечных ребер частоты собственных колебаний системы сначала увеличиваются, а затем при определенных значениях k_1 инерционных действий стержней на процесс колебаний системы становятся существенными.

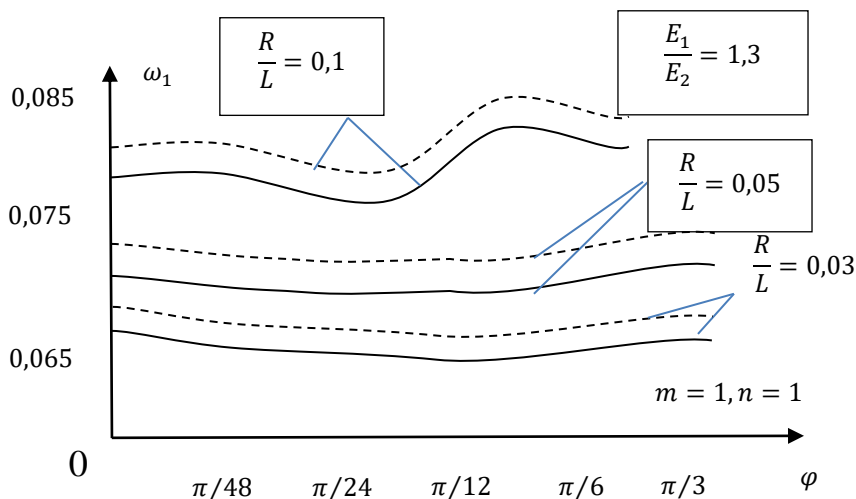


Рис. 2. Зависимость параметра частоты колебаний от угла намотки φ

Рис. 2 показывает, что при малых значениях отношений R/L собственные частоты колебаний системы слабо зависят от угла намотки φ . С увеличением отношений R/L зависимости собственных частот колебаний системы от угла намотки φ носят сложный характер.

ВЫВОДЫ

С помощью вариационного принципа решена задача о параметрическом колебании поперечно подкрепленной, анизотропной поврежденной цилиндрической оболочки из стеклопластика с вязкой жидкостью под действием внешнего давления. Построены кривые зависимости параметра частоты колебаний от числа поперечных стержней и от угла намотки. А также уточнено влияние повреждаемости на частоту колебаний систем. Учет повреждаемости материала оболочки приводит к снижению частот собственных колебаний системы по сравнению с тем случаем, когда оболочка рассматривается неповрежденной. С увеличением отношений модулей упругости материала оболочки частоты собственных колебаний системы увеличиваются. С увеличением количества поперечных ребер частоты собственных колебаний системы сначала увеличиваются, а затем после достижения количеством определенного значения начинают уменьшаться. При малых значениях отношений радиуса оболочки к ее длине собственные частоты колебаний системы слабо зависят от угла намотки. С увеличением этого отношения зависимость собственных частот колебаний системы от угла намотки носит сложный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Босьяков С. М., Чживэй В. Анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье. *Механика машин, механизмов и материалов*. 2011. № 3(16). С. 24–27.
2. Алыев Ш. Ш. Свободные колебания усиленных продольными системами ребер анизотропной цилиндрической оболочки из стеклопластика, с протекающей жидкостью. *Теоретическая и прикладная механика*. 2014. № 1-2. С. 136–142.
3. Латифов Ф. С., Искандеров Р. А., Алыев Ш. Ш. Свободные колебания усиленных поперечными системами ребер анизотропной цилиндрической оболочки из стеклопластика, с протекающей жидкостью. *Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций*. 2015. Вып. 24. С. 123–130.
4. Latifov F. S., Iskanderov R. A., Alyev Sh. Sh. Free oscillations of flowing liquid-filled anisotropic cylindrical shell strengthened with crossed systems of ribs. *International Journal on "Technical and Physical Problems of Engineering"*. 2015. Issue 24, Vol. 7, No. 3. P. 63–67.
5. Latifov F. S., Seifullaev F. A., Alyev Sh. Sh. Free vibrations of an anisotropic cylindrical fiberglass shell reinforced by annular ribs and containing fluid flow. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016. Vol. 57, No. 4. P. 709–713.
6. Latifov F. S., Iskanderov R. A., Alimamedov R. K. Parametric oscillations of a laterally strengthened, orthotropic, damaged, viscous fluid-filled shell. *International Journal on "Technical and Physical Problems of Engineering"*. 2015. Vol 7, No. 4. P. 70–74.
7. Latifov F. S., Cafarova I. T. Asymptotic investigations of eigen vibrations of medium-filled cylindrical shells strengthened by annular ribs. *Sciences of Azerbaijan Transactions of Academy. Series of physical-technical and mathematical sciences*. 2005. X. No. 4. P. 135–140.
8. Ахундов М. Б., Гулиев Р. С. Распространение ударной волны в повреждающемся наследственно упругом цилиндрическом теле. *Труды ИММ АН Азербайджан*. 1997. Т. IV(XIV). С. 208–212.
9. Ахундов М. Б., Суворова Ю. В., Садыхов Ф. М. Распространение волн деформаций и напряжений в кусочно однородном вязкоупругом стержне конечной длины с учетом повреждаемости материала. *Известия РАН, МТТ*. 1994. № 5. С. 113–120.
10. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Москва: Наука, 1979. 320 с.

REFERENCES

1. Bosyakov, S. M. & Chziway, V. (2011). Analysis of free oscillations of a cylindrical shell made of glass-reinforced plastic at boundary conditions. *Mekhanika mashin mekhanizmov i materialov*, No. 3(16), pp. 24–27.
2. Alyev, Sh. Sh. (2014). Free vibrations of a flowing-fluid-filled anisotropic cylindrical shell made of glass-reinforced plastic strengthened with longitudinal systems of ribs. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*, No. 1-2, pp. 136-142.
3. Latifov, F. S., Iskanderov, R. A. & Alyev, Sh. Sh. (2015). Free vibrations of a flowing-fluid-filled anisotropic cylindrical shell made of glass-reinforced plastic strengthened with lateral systems of ribs. *Problemy vichisliternoï mekhaniki i prochnosti konstruksiy*, issue 24, pp. 123-130.
4. Latifov, F. S., Iskanderov, R. A. & Alyev, Sh. Sh. (2015). Free oscillations of flowing liquid-filled anisotropic cylindrical shell strengthened with crossed systems of ribs. *International Journal on "Technical and Physical Problems of Engineering"*, Issue 24, Vol. 7, No. 3, pp. 63-67.
5. Latifov, F. S., Seifullaev, F. A. & Alyev, Sh. Sh. (2016). Free vibrations of an anisotropic cylindrical fiberglass shell reinforced by annular ribs and containing fluid flow/ F.S.Latifov. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, Vol. 57, No. 4, pp. 709-713.
6. Latifov, F. S., Iskanderov, R. A. & Alimamedov, R. K. (2015). Parametric oscillations of a laterally strengthened, orthotropic, damaged, viscous fluid-filled shell. *International Journal on "Technical and Physical Problems of Engineering"*, Vol. 7, No. 4, pp. 70-74.

7. Latifov, F. S. & Cafarova, I. T. (2005). Asymptotic investigations of eigen vibrations of medium-filled cylindrical shells sellaaityb by annular ribs. Sciences of Azerbaijan Transactions of Academy. Series of physical-technical and mathematical sciences, X, No. 4, pp. 135-140.
8. Akhundov, M. B. & Guliyev, R. S. (1997). Propagation of impact wave in damaged hereditary elastic cylindrical body. Trudy IMM AN Azerbaijan, Vol. IV(XIV), pp. 208-212.
9. Akhundov, M. B., Suvorova, Yu. V. & Sadykhov, F. M. (1994). Propagation of stress and strain waves in piecewise homogeneous bar of finite length with regard to material damageability. Izvestiya RAN, MTT, No. 5, pp. 113-120.
10. Volmir, A. S. (1979). Shells in fluid and gas flow. Moscow: Nauka.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-07

АНТИПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО БИМАТЕРИАЛА С ВКЛЮЧЕНИЕМ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД

Криворучко А. Г., аспирант, Шевелёва А. Е., д. ф.-м. н., доцент,
Лобода В. В., д. ф.-м. н., профессор

*Днепро́вский национальный университет имени Олеса Гончара,
просп. Гагарина, 72, г. Днепр, 49000, Украина*

93anna.kr@gmail.com

Рассмотрена антиплоская задача для включения (электрода) на границе раздела пьезоэлектромагнитных материалов. Получены формулы для нахождения скачка компонент тензора напряжений и векторов электрической и магнитной индукции. Найдены аналитические выражения для определения значений компонент на верхнем и нижнем берегах электрода. Для различных значений электрического и магнитного потоков, направленных параллельно включению, проиллюстрировано поведение электромагнитно-механических факторов по длине электрода.

Ключевые слова: пьезоэлектромагнитный материал, включение, антиплоская задача.

АНТИПЛОСКА ЗАДАЧА ДЛЯ П'ЄЗОЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО БІМАТЕРІАЛУ З ВКЛЮЧЕННЯМ НА МЕЖІ ПОДІЛУ СЕРЕДОВИЩ

Криворучко А. Г., аспірант, Шевельова А. Є., д. ф.-м. н., доцент,
Лобода В. В., д. ф.-м. н., професор

*Дніпро́вський національний університет імені Олеса Гончара,
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49000, Україна*

93anna.kr@gmail.com

Розглянуто антиплоску задачу для включення (электрода) на межі поділу п'єзоелектромагнітних матеріалів. Вважається, що електрод є абсолютно жорстким і до того ж електричний і магнітний потенціали на ньому дорівнюють нулю. Припускається також, що на віддаленні від електрода задані зсувна деформація і електричне та магнітне поля, які паралельні до поверхні електрода. З використанням методу комплексних потенціалів отримані представлення механічних, електричних та магнітних факторів через кусково-аналітичні вектор-функції, з використанням яких сформульовано векторну задачу лінійного спряження з відповідними умовами на нескінченості. Точний розв'язок цієї задачі представлено в аналітичному вигляді. На його основі отримано формули для знаходження стрибка компонент тензора напружень і векторів електричної та магнітної індукції при переході через електрод. Знайдені також аналітичні вирази для знаходження значень вказаних компонент на верхньому та нижньому берегах електрода. Показано, що дотичне напруження і компоненти векторів електричної та магнітної індукції мають кореневу особливість при підході до кінців електрода. Проведена чисельна ілюстрація

отриманого розв'язку. Використана конкретна пара п'єзоелектромагнітних матеріалів, а також вибрані різні значення віддалених електричного та магнітного потоків, направлених паралельно включенню. Отримані графіки зміни дотичного напруження і магнітної індукції вздовж електрода, а також розподіл магнітного поля на продовженні електрода.

Ключові слова: п'єзоелектромагнітний матеріал, включення, антиплоска задача.

AN ANTIPLANE PROBLEM FOR PIEZOELECTROMAGNETIC BIMATERIAL WITH INCLUSION AT THE INTERFACE

Kryvoruchko A. G., Sheveleva A. E., Loboda V. V.

*Oles Honchar Dnipro National University,
Gagarin ave., 72, Dnipro, 49000, Ukraine*

93anna.kr@gmail.com

The antiplane problem for inclusion (electrode) on the interface between piezoelectromagnetic materials is considered. It is assumed that the electrode is absolutely rigid and in addition, the electric and magnetic potentials on its faces are zero. It is also assumed that the shear deformation and electric and magnetic fields that are parallel to the surface of the electrode are prescribed at the far distance from the electrode. Using the method of complex potentials, we obtain presentations of mechanical, electrical and magnetic factors through the piecewise-analytic vector functions. Due to these presentations the vector problem of linear relationship with the corresponding conditions on infinity is formulated. The exact solution of this problem is presented in an analytical form. On its basis, we obtain the formulas for finding the jump of the shear stress tensor component and also the vectors of electrical and magnetic induction when passing through the electrode. Also the analytical expressions for the values of these components on the upper and lower faces of the electrode are found. It is shown that the shear stress and components of the vectors of electrical and magnetic induction have a root singularity when approaching the ends of the electrode. Numerical illustration of the obtained solution is carried out. A specific pair of piezoelectromagnetic materials was used, and various values of remote electric and magnetic fluxes parallel to the inclusion were selected. The graphs of the variation of the shear stress and magnetic induction along the electrode and also the distribution of the magnetic field on the continuation of the electrode are obtained.

Key words: piezoelectromagnetic material, inclusion, antiplane problem.

ВВЕДЕНИЕ

В современной микроэлектронике широко используются материалы класса пьезоэлектромангнетиков. Нередко они встречаются и в комбинации с другими материалами, образуя композиты. Проблема изучения включений в изотропных и анизотропных материалах, в том числе на границе раздела сред, детально освещена в фундаментальной монографии [1]. Анализу внутренних и межфазных включений в электрически активных материалах посвящены работы [2-8]. Что же касается пьезоэлектромагнитных материалов, то проблема изучения включений, в том числе электродов, на границе раздела таких материалов является важной, но недостаточно изученной из-за ее сложности.

В ряде случаев характер напряженно-деформированного состояния, которое возникает в пьезоэлектромагнитном композите, соответствует антиплоскому НДС. В таких случаях общие уравнения существенно упрощаются и зачастую удается получить аналитические решения поставленных задач. Для трещины между двумя материалами такая задача исследована в [9]. Случай же абсолютно жесткого электрода на границе раздела пьезоэлектромагнитных материалов в сочетании с различными типами граничных условий на берегах электрода ранее не изучался, и он как раз и исследуется в данной работе.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПЭММ (ПЬЕЗОЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО МАТЕРИАЛА) В АНТИПЛОСКОМ СЛУЧАЕ

В случае ПЭММ взаимосвязь между основными электромеханическими характеристиками задается соотношениями [10]

$$\sigma_{ij} = c_{ijks} \varepsilon_{ks} - e_{sij} E_s - h_{sij} H_s, \quad D_i = e_{iks} \varepsilon_{ks} + \alpha_{is} E_s + d_{is} H_s, \quad B_i = h_{iks} \varepsilon_{ks} + d_{is} E_s + \gamma_{is} H_s,$$

где σ_{ij} , ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций; D_i , B_i – компоненты векторов электрической и магнитной индукций; E_i , H_i – напряженности электрического и магнитного полей, c_{ijks} – упругие константы, e_{iks} – пьезоэлектрические, h_{iks} – пьезомагнитные, d_{is} – электромагнитные, α_{is}, γ_{is} – диэлектрические и магнитные проницаемости.

Уравнения равновесия в отсутствии массовых сил и свободных зарядов таковы:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad D_{i,i} = 0, \quad B_{i,i} = 0.$$

Выражения для деформаций, напряженностей электрического и магнитного полей имеют вид:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_i = -\varphi_{,i}, \quad H_i = -\psi_{,i},$$

где u_i – компоненты вектора перемещения, φ , ψ – электрический и магнитный потенциалы.

В антиплоском случае считаем

$$u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = u_3(x_1, x_2), \quad \varphi = \varphi(x_1, x_2), \quad \psi = \psi(x_1, x_2).$$

Тогда определяющие соотношения принимают вид:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{3i} \\ D_i \\ B_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{44} & -e_{15} & -h_{15} \\ e_{15} & \alpha_{11} & d_{11} \\ h_{15} & d_{11} & \gamma_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{3,i} \\ -\varphi_{,i} \\ -\psi_{,i} \end{Bmatrix},$$

где $i = 1, 2$. Это соотношение можно записать так:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{3i} \\ D_i \\ B_i \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} u_{3,i} \\ \varphi_{,i} \\ \psi_{,i} \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_{44} & e_{15} & h_{15} \\ e_{15} & -\alpha_{11} & -d_{11} \\ h_{15} & -d_{11} & -\gamma_{11} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Вводя обозначения

$$\mathbf{u} = [u_3, \varphi, \psi]^T, \quad \mathbf{t} = [\sigma_{32}, D_2, B_2]^T, \quad \mathbf{S} = [\sigma_{31}, D_1, B_1]^T, \quad (3)$$

уравнение (1) можем записать в виде

$$\mathbf{t} = \mathbf{R}\mathbf{u}_{,2}. \quad (4)$$

Функции u_3 , φ и ψ удовлетворяют уравнениям $\Delta u_3 = 0$, $\Delta \varphi = 0$, $\Delta \psi = 0$, т. е. они гармонические. Поэтому представим их как действительные части некоторых аналитических функций

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Phi}(z) + \bar{\mathbf{\Phi}}(\bar{z}), \quad (5)$$

где $\Phi(z) = [\Phi_1(z), \Phi_2(z), \Phi_3(z)]^T$ – произвольная аналитическая вектор-функция комплексной переменной $z = x_1 + ix_2$.

Подставляя (5) в (4), получаем:

$$t = iR\Phi'(z) + \overline{iR\Phi'(z)}. \quad (6)$$

Обозначая $B = iR$, получаем:

$$t = B\Phi'(z) + \overline{B\Phi'(z)} = B\Phi'(z) + \bar{B}\bar{\Phi}'(\bar{z}). \quad (7)$$

БИМАТЕРИАЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ

Предположим, что плоскость (x_1, x_2) составлена из двух полуплоскостей $x_2 > 0$ и $x_2 < 0$. На оси x_1 могут быть участки сцепления, проскальзывания, полного расслоения и т.д. Тогда для областей $x_2 > 0$ и $x_2 < 0$ будут справедливы представления (5), (7), которые в данном случае примут вид

$$u^{(m)} = \Phi^{(m)}(z) + \bar{\Phi}^{(m)}(\bar{z}), \quad t^{(m)} = B^{(m)}\Phi^{(m)}(z) + \bar{B}^{(m)}\bar{\Phi}^{(m)}(\bar{z}), \quad (8)$$

где $m=1$ для области 1 и $m=2$ для области 2; $B^{(m)}$ – матрицы B для областей 1 и 2 соответственно; $\Phi^{(m)}(z)$ – произвольные вектор-функции, аналитичные в областях 1 и 2 соответственно.

Потребуем, чтобы равенство $u^{(1)} = u^{(2)}$ выполнялось по всей оси x_1 . Тогда получаем:

$$\Phi^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0) = \Phi^{(2)}(x_1 - i0) + \bar{\Phi}^{(2)}(x_1 + i0). \quad (9)$$

Уравнение (9) перепишем в виде:

$$\Phi^{(1)}(x_1 + i0) - \bar{\Phi}^{(2)}(x_1 + i0) = \Phi^{(2)}(x_1 - i0) - \bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0).$$

Левую и правую части последнего уравнения можно рассматривать как граничные значения функций

$$\Phi^{(1)}(z) - \bar{\Phi}^{(2)}(z) \quad \text{и} \quad \Phi^{(2)}(z) - \bar{\Phi}^{(1)}(z), \quad (10)$$

которые аналитичны в верхней и нижней полуплоскостях соответственно. Но тогда существует функция $M(z)$, которая равна указанным функциям в каждой полуплоскости и аналитична во всей плоскости.

Предполагая, что $M(z)|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, на основании теоремы Лиувилля получаем, что каждая из функций (10) равна 0 для любого z из соответствующей полуплоскости. Отсюда получаем:

$$\bar{\Phi}^{(2)}(z) = \Phi^{(1)}(z) \quad \text{для} \quad x_2 > 0, \quad (11)$$

$$\bar{\Phi}^{(1)}(z) = \Phi^{(2)}(z) \quad \text{для} \quad x_2 < 0. \quad (12)$$

Найдем теперь скачек вектор-функции:

$$\langle t(x_1) \rangle = t^{(1)}(x_1 + i0) - t^{(2)}(x_1 - i0) \quad (13)$$

при переходе через интерфейс. Находя из второй формулы (8):

$$t^{(m)}(z) = B^{(m)}\Phi^{(m)}(z) + \bar{B}^{(m)}\bar{\Phi}^{(m)}(\bar{z}) \quad (14)$$

или

$$t^{(m)}(x_1 \pm i0) = \mathbf{B}^{(m)} \Phi^{(m)}(x_1 \pm i0) + \overline{\mathbf{B}}^{(m)} \overline{\Phi}^{(m)}(x_1 \mp i0),$$

и подставляя в (13), получаем:

$$\langle t(x_1) \rangle = \mathbf{B}^{(1)} \Phi^{(1)}(x_1 + i0) + \overline{\mathbf{B}}^{(1)} \overline{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0) - \mathbf{B}^{(2)} \Phi^{(2)}(x_1 - i0) - \overline{\mathbf{B}}^{(2)} \overline{\Phi}^{(2)}(x_1 + i0).$$

Подставляя (11) и (12) при $y \rightarrow +0$ в последнюю формулу, получаем:

$$\langle t(x_1) \rangle = \mathbf{B}^{(1)} \overline{\Phi}^{(2)}(x_1 + i0) + \overline{\mathbf{B}}^{(1)} \overline{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0) - \mathbf{B}^{(2)} \overline{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0) - \overline{\mathbf{B}}^{(2)} \overline{\Phi}^{(2)}(x_1 + i0)$$

или

$$\langle t(x_1) \rangle = (\mathbf{B}^{(1)} - \overline{\mathbf{B}}^{(2)}) \cdot \Phi^{(1)}(x_1 + i0) + (\overline{\mathbf{B}}^{(1)} - \mathbf{B}^{(2)}) \overline{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0).$$

Введем новую функцию

$$\mathbf{W}(z) = \begin{cases} \mathbf{D} \Phi^{(1)}(z), & x_2 > 0 \\ -\overline{\mathbf{D}} \overline{\Phi}^{(1)}(z), & x_2 < 0 \end{cases}, \quad (15)$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{B}^{(1)} - \overline{\mathbf{B}}^{(2)}$.

Тогда

$$\langle t(x_1, 0) \rangle = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \quad (16)$$

$$\mathbf{u}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{G} \mathbf{W}^+(x_1) - \overline{\mathbf{G}} \mathbf{W}^-(x_1), \quad (17)$$

где $\mathbf{G} = \mathbf{D}^{-1}$.

АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИЙ НЕПОДВИЖНЫЙ ЭЛЕКТРОД НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ПЬЕЗОЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Предположим, что на границе раздела пьезоэлектромагнитных материалов на участке $(-a, a)$ есть абсолютно жесткий неподвижный электрод, на котором электрическое и магнитное поля равны нулю (рис. 1). Т.е. на нем вектор $\mathbf{u}^{(1)}(x_1, 0) = 0$. Считаем также, что на бесконечности заданы компоненты вектора $\mathbf{u} = [u_3, \varphi, \psi]^T$.

Таким образом, граничные условия на интерфейсе имеют вид:

$$u_3^\pm = 0; \quad \varphi^\pm = 0; \quad \psi^\pm = 0 \quad \text{при } |x_1| < a, \quad (18)$$

$$\langle \sigma_{32} \rangle = 0, \quad \langle D_2 \rangle = 0, \quad \langle B_2 \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon_{31} \rangle = 0, \quad \langle E_1 \rangle = 0, \quad \langle H_1 \rangle = 0 \quad \text{для } x_1 > a, \quad (19)$$

где $\langle \cdot \rangle$ – скачек функций при переходе через ось x_1 .

Для $x_1 \notin (-a, a)$ имеем $\langle t(x_1, 0) \rangle = 0$, поэтому вектор-функция $\mathbf{W}(z)$ из выражений (16), (17) аналитична во всей плоскости, кроме отрезка интерфейса $(-a, a)$.

Поскольку $\overline{\mathbf{G}} = -\mathbf{G}$, то

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{G} \{ \mathbf{W}^+(x_1) + \mathbf{W}^-(x_1) \}. \quad (20)$$

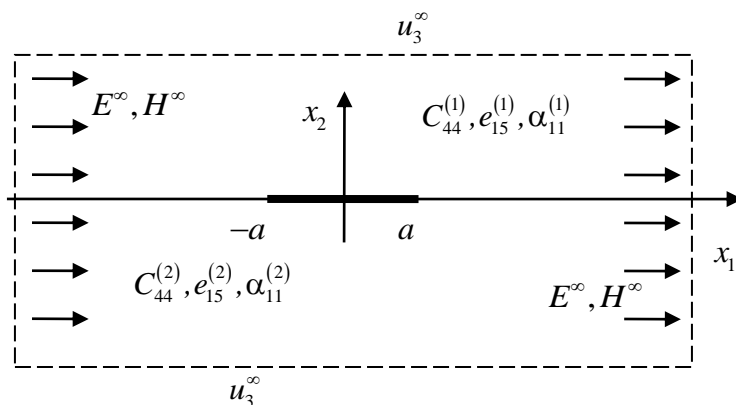


Рис. 1. Абсолютно жесткий электрод между двумя пьезоэлектромагнитными материалами

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Из удовлетворения условиям (18) с помощью соотношения (20) получаем:

$$\mathbf{W}^+ + \mathbf{W}^- = 0 \text{ на } (-a, a). \tag{21}$$

Учитывая, что для $x_1 \notin (-a, a)$ имеем $\mathbf{W}^+(x_1) = \mathbf{W}^-(x_1) = \mathbf{W}(x_1)$, а $\mathbf{W}(x_1)|_{x_1 \rightarrow \infty} = \mathbf{W}(z)|_{z \rightarrow \infty}$, из (20) получаем следующие соотношения для определения поведения вектор-функции $\mathbf{W}(z)$ на бесконечности:

$$\mathbf{W}(z)|_{z \rightarrow \infty} = \frac{1}{2} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{u}'^\infty, \text{ где } \mathbf{u}'^\infty = [u_3'^\infty, -E_1^\infty, -H_1^\infty], \tag{22}$$

где E_1^∞, H_1^∞ – электрический и магнитный потоки, которые пронизывают всю область параллельно включению. $u_3'^\infty = \alpha = const$ означает поворот биматериала вокруг оси x_2 на угол α . Такая деформация равноценна повороту жесткого электрода в неподвижном биматериальном пространстве вокруг оси x_2 на угол $-\alpha$.

Решение задачи (21) при условии на бесконечности (22) имеет вид [11]:

$$\mathbf{W}(z) = \frac{1}{2} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{u}'^\infty \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}}. \tag{23}$$

При этом очевидно, что $\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{D}$.

Подставляя (23) в (20), получаем:

$$\mathbf{u}'^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{u}'^\infty \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} \text{ для } x_1 \notin (-a, a).$$

Учитывая, что $\mathbf{W}^-(x_1) = -\mathbf{W}^+(x_1)$, для $x_1 \in [-a, a]$, из соотношений (16), (22) получаем:

$$\langle \mathbf{t}(x_1) \rangle = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{u}'^\infty \frac{x_1}{i\sqrt{a^2 - x_1^2}} \text{ для } x_1 \in [-a, a]. \tag{24}$$

Поскольку $\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{D}$, а матрица \mathbf{D} чисто мнимая, то последнюю формулу можно записать так:

$$\langle \mathbf{t}(x_1) \rangle = \mathbf{R} \frac{x_1}{\sqrt{a^2 - x_1^2}} \text{ для } x_1 \in [-a, a], \mathbf{R} = \text{Im}(\mathbf{D}) \mathbf{u}'^\infty. \tag{25}$$

Представляет интерес нахождение не только скачка $\langle t(x_1) \rangle$, но и значений этой функции на верхнем и нижнем берегах электрода. Для этого воспользуемся формулой (14), которую для $m=1$ и $z=x_1+i0$ можно записать так:

$$t^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{B}^{(1)} \Phi^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0). \quad (26)$$

Но из (15) имеем:

$$\Phi^{(1)}(x_1 + i0) = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{W}(x_1 + i0),$$

$$\bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0) = -\bar{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{W}(x_1 - i0).$$

Подставляя последние соотношения в (26), получаем:

$$t^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{W}(x_1 + i0) - \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \bar{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{W}(x_1 - i0). \quad (27)$$

Очевидно, что $t^{(2)}(x_1, 0)$ находится по формуле

$$t^{(2)}(x_1, 0) = t^{(1)}(x_1, 0) - \langle t(x_1) \rangle.$$

Следует также отметить, что на основании (23):

$$\mathbf{W}(x_1 \pm i0) = \pm 0.5 \mathbf{G}^{-1} \mathbf{u}^{\infty} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}}.$$

Сравнивая с формулой (24), видим, что $\mathbf{W}(x_1 \pm i0) = \pm 0.5 \langle t(x_1) \rangle$.

Подставляя в формулу (27) и учитывая, что $\mathbf{G} = \mathbf{D}^{-1}$, получаем:

$$t^{(1)}(x_1, 0) = 0.5 (\mathbf{B}^{(1)} \mathbf{D}^{-1} + \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \bar{\mathbf{D}}^{-1}) \langle t(x_1) \rangle = 0.5 (\mathbf{B}^{(1)} \mathbf{G} + \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \bar{\mathbf{G}}) \langle t(x_1) \rangle$$

или

$$t^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{K} \langle t(x_1) \rangle,$$

где $\mathbf{K} = 0.5 (\mathbf{B}^{(1)} \mathbf{G} + \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \bar{\mathbf{G}})$.

С учетом (25) формулу для $t^{(1)}(x_1, 0)$ можно записать так:

$$t^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{Q} \frac{x_1}{\sqrt{a^2 - x_1^2}}, \quad (28)$$

где $\mathbf{Q} = \mathbf{K} \mathbf{R}$, а векторы $\langle t(x_1) \rangle$ и $t^{(2)}(x_1, 0)$ выражаются формулами

$$\langle t(x_1) \rangle = \mathbf{K}^{-1} t^{(1)}(x_1, 0), \quad t_2(x_1, 0) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1}) t^{(1)}(x_1, 0), \quad (29)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ И ИХ АНАЛИЗ

Для численной реализации полученных результатов выбирались материалы со следующими характеристиками:

$$c_{44}^{(1)} = 35,3 \text{ ГПа}, e_{15}^{(1)} = 17,0 \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}, \alpha_{11}^{(1)} = 15,1 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{м}}, d_{11}^{(1)} = 0, h_{15}^{(1)} = 165 \frac{\text{В}}{\text{а м}},$$

$$\gamma_{11}^{(1)} = 180,5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{В} \cdot \text{с}^2}{\text{Кл}^2}, c_{44}^{(2)} = 42,47 \text{ ГПа}, e_{15}^{(2)} = -0,48 \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}, \alpha_{11}^{(2)} = 0,0757 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{м}}, d_{11}^{(2)} = 0,$$

$$h_{15}^{(2)} = 385 \frac{\text{В}}{\text{а м}}, \gamma_{11}^{(2)} = 414,5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{В} \cdot \text{с}^2}{\text{Кл}^2}.$$

Результаты расчетов компонент вектора $t^{(1)}(x_1, 0)$, проведенных при $a = 10 \text{ мм}$, представлены на рис. 2 и 3. Результаты расчета третьей компоненты вектора $u^{(1)}(x_1, 0)$ при этом же значении a приведены на рис. 4. Значения заданных на бесконечности электрического и магнитного полей E_1^∞ и H_1^∞ задавались равными $0,1 \cdot 10^7 \frac{\text{В}}{\text{м}}$ и $1,0 \cdot 10^2 \frac{\text{А}}{\text{м}}$ – кривые 1, $0,2 \cdot 10^7 \frac{\text{В}}{\text{м}}$ и $2,0 \cdot 10^2 \frac{\text{А}}{\text{м}}$ – кривые 2, $0,3 \cdot 10^7 \frac{\text{В}}{\text{м}}$ и $3,0 \cdot 10^2 \frac{\text{А}}{\text{м}}$ – кривые 3. Значения же u_3^∞ задавались равными нулю для всех трех кривых, так как основной целью было исследование влияния электрических и магнитных факторов на характеристики полей вблизи включения.

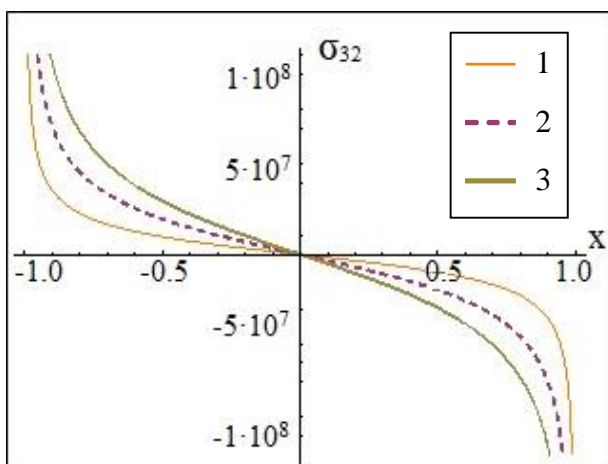


Рис. 2. Изменение касательного напряжения на верхнем берегу электрода

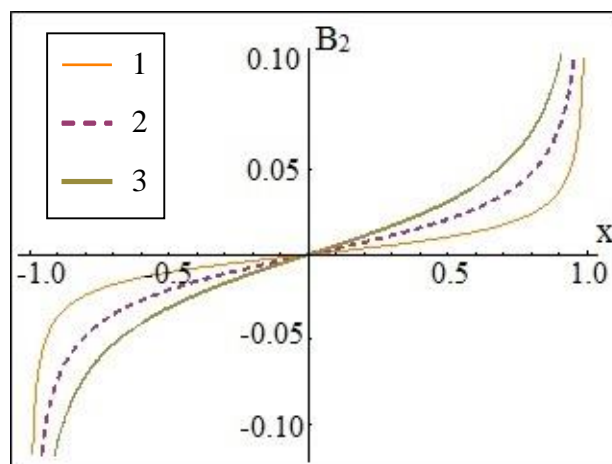


Рис. 3. Изменение нормальной компоненты вектора магнитной индукции на верхнем берегу электрода

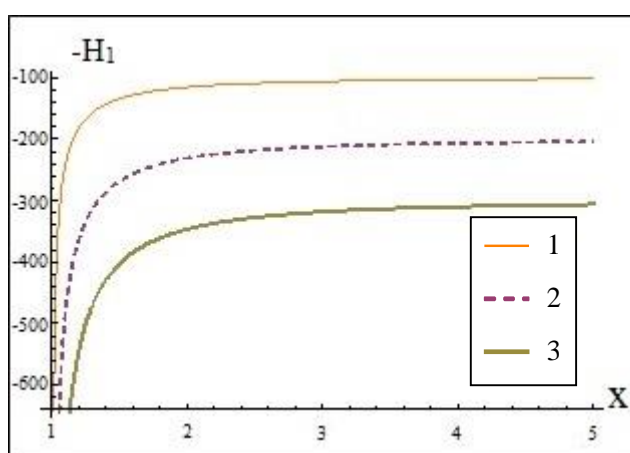


Рис. 4. Изменение $-H_1$ справа от электрода на границе раздела материалов

Графики изменения компонент скачков $\langle t(x_1) \rangle$ и значений исследуемых величин на нижнем берегу включения $t^{(2)}(x_1, 0)$ здесь не приводятся, т. к. они могут быть легко найдены по формулам (29), а их поведение качественно является близким к изменению соответствующих факторов на рис. 2 и 3.

Из рис. 2 и 3 очевидно существенное влияние интенсивности электрического и магнитного полей на напряжение и магнитную индукцию вдоль области включения, а из рис. 4 очевидно их влияние на $-H_1$ справа от включения на границе раздела материалов.

ВЫВОДЫ

Рассмотрена антиплоская задача для пьезоэлектромагнитного материала с абсолютно жестким неподвижным электродом в области раздела материалов. Сформулированы представления (14), (18) для механических, электрических и магнитных факторов через одну вектор-функцию, которая аналитична в каждой полуплоскости и на участках интерфейса. С помощью этих представлений формулируется задача линейного сопряжения для абсолютно жесткого неподвижного электрода на линии раздела материалов, на котором электрическое и магнитное поля равны нулю. Построено точное решение этой задачи.

Для конкретной пары материалов построены графики зависимостей напряжений, магнитной индукции и $-H_1$ от интенсивности внешних электрического и магнитного полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями: монографія. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. 715 с.
2. Liang J., Han J. C., Du S. Y. Rigid line inclusions and cracks in anisotropic piezoelectric solids. *Mech Res Commu.* 1995. Vol. 22, Issue 1. P. 43–49.
3. Chen S. W. Rigid line inclusions under antiplane deformation and inplane electric field in piezoelectric materials. *Engng Fract Mech.* 1997. Vol. 56, Issue 2. P. 265–274.
4. Deng W., Meguid S. A. Analysis of Conducting Rigid Inclusion at the Interface of Two Dissimilar Piezoelectric Materials. *J. Appl. Mech.* 1998. Vol. 65(1). P. 76–84.
5. Gao C., Fan W. An Interface Inclusion between Two Dissimilar Piezoelectric Materials. *Applied Mathematics and Mechanics.* 2001. Vol. 22, Issue 1. P. 96–104.
6. Wang X., Shen Y. Exact solution for mixed boundary value problems at anisotropic piezoelectric bimaterial interface and unification of various interface defects. *International Journal of Solids and Structures.* 2002. Vol. 39, Issue 6. P. 1591–1619.
7. Eskandari M., Moeini-Ardakani S. S., Shodja H. M. Axisymmetric contact of a rigid inclusion embedded at the interface of a piezoelectric biomaterial. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics.* 2009. Vol. 62, Issue 3. P. 281–295.
8. Wang X., Schiavone P. Debonded arc-shaped interface conducting rigid line inclusions in piezoelectric composites. *Comptes Rendus Mecanique.* 2017. Vol. 345, Issue 10. P. 724–731.
9. Loboda V., Kryvoruchko A., Lapusta Y. Antiplane problem for an interface crack in a piezoelectromagnetic biomaterial. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка».* 2015. Вип. 19, Т. 2. С. 106–117.
10. Sih G. C., Song Z. F. Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in BaTiO₃–CoFe₂O₄ composite. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics.* 2003. 39. P. 209–227.
11. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 707 с.

REFERENCES

1. Sulym, G. T. (2007). Bases of mathematical theory of thermoelastic equilibrium of deformable solids with thin inclusions. Lviv: Research and Publishing Center of NTSh.
2. Liang, J., Han, J. C. & Du, S. Y. (1995) Rigid line inclusions and cracks in anisotropic piezoelectric solids. *Mech Res Commu*, Vol. 22, Issue 1, pp. 43–49.
3. Chen, S. W. (1997). Rigid line inclusions under antiplane deformation and inplane electric field in piezoelectric materials. *Engng Fract Mech.*, Vol. 56, Issue 2, pp. 265–274.
4. Deng, W. & Meguid, S. A. (1998). Analysis of Conducting Rigid Inclusion at the Interface of Two Dissimilar Piezoelectric Materials. *J. Appl. Mech.*, Vol. 65(1), pp. 76–84.

5. Gao, C. & Fan, W. (2001). An Interface Inclusion between Two Dissimilar Piezoelectric Materials. Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 22, Issue 1, pp. 96–104.
6. Wang, X. & Shen, Y. (2002). Exact solution for mixed boundary value problems at anisotropic piezoelectric bimaterial interface and unification of various interface defects. International Journal of Solids and Structures, Vol. 39, Issue 6, pp. 1591–1619.
7. Eskandari, M., Moeini-Ardakani, S. S. & Shodja, H. M. (2009). Axisymmetric contact of a rigid inclusion embedded at the interface of a piezoelectric biomaterial. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 62, Issue 3, pp. 281–295.
8. Wang, X. & Schiavone, P. (2017). Debonded arc-shaped interface conducting rigid line inclusions in piezoelectric composites. Comptes Rendus Mecanique, Vol. 345, Issue 10, pp. 724–731.
9. Loboda, V., Kryvoruchko, A. & Lapusta, Y. (2015). Antiplane problem for an interface crack in a piezoelectromagnetic biomaterial. Visnyk Dnipropetrovskogo universitetu. Seriya «Mechanica», Issue 19, T. 2, pp. 106–117.
10. Sih, G. C. & Song, Z. F. (2003). Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in BaTiO₃-CoFe₂O₄ composite. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 39, pp. 209–227.
11. Muskhelishvili, N. I. (1966). Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity. Moscow: Nauka.

УДК 533.63,534.23

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-08

ОСОБЕННОСТИ ГЕНЕРАЦИИ ВVI-ШУМА ПРИ САМОЛЁТНОЙ ПОСАДКЕ ВЕРТОЛЁТА

Лукьянов П. В., ст. науч. сотрудник

*Национальная академия наук Украины, Институт гидромеханики,
ул. Желябова, 8/4, г. Киев, 03680, Украина*

petr_lukianov@bigmir.net

В данной работе в рамках модели аэроакустики поставлена и численно решена задача генерации ВVI-шума *sin-sin* лопастью «Blue-edge» в режиме самолётной посадки. Рассмотренный диапазон чисел Маха $0,05 < M < 0,1$ показал повышенный по сравнению с диапазоном $0,2 < M < 0,4$ уровень генерируемого шума. В частности, были замечены локальные зоны концентрации акустического шума, трансформируемые в вибрации, при этом происходит концентрация энергии колебаний на отдельных участках лопасти: в них амплитуды в 10–20 раз превышают амплитуды остального фонового шума лопасти. Решение задачи в рамках модели аэроакустики позволило для малых чисел Маха обнаружить области зарождения вибраций. Появление вибраций в полёте на пониженных скоростях приводит к крайне неблагоприятному явлению – флаттеру лопасти.

Ключевые слова: генерация ВVI-шума, вибрации, самолётная посадка, флаттер лопасти.

ОСОБЛИВОСТІ ГЕНЕРАЦІЇ ВVI-ШУМУ ПРИ ПОСАДЦІ ГЕЛІКОПТЕРА ПОДІБНО ЛІТАКУ

Лук'янов П. В., ст. наук. співробітник

*Національна академія наук України, Інститут гідромеханіки,
вул. Желябова, 8/4, м. Київ, 03680, Україна*

petr_lukianov@bigmir.net

Наведений у даній роботі аналіз наявних на сьогодні досліджень з активного контролю лопатей гелікоптера свідчить про те, що проблема зниження шуму гелікоптера залишається актуальною. Причина полягає у тому, що активний контроль лопаті дозволяє знизити вібрації, але при цьому

BVI- шум дещо зростає, оскільки вони взаємопов'язані. Одним із шляхів зниження шуму лопаті є модифікація форми лопаті ротора гелікоптера вздовж за розмахом. В даній роботі поставлено та чисельно розв'язано задачу генерації BVI-шуму sin-sin лопаттю «Blue-edge» типу для режиму посадки гелікоптера подібно літаку. Загальна задача розділяється на дві частини: 1) розрахунок аеродинамічних параметрів течії навколо лопаті ротора гелікоптера; 2) розв'язання задачі аероакустики з використанням наявних даних аеродинамічних параметрів течії. Аеродинамічна задача складається з відомого рівняння руху у формі Ейлера та рівняння нерозривності течії. Акустична задача містить у собі виведену раніше автором систему рівнянь аероакустики для загального випадку. Виконано розрахунок характеристик ближнього та дальнього звукових полів на підставі розробленого автором чисельно-аналітичного підходу. Розглянутий діапазон чисел Маху $0,05 < M < 0,1$ показав підвищений у порівнянні з діапазоном $0,2 < M < 0,4$ рівень шуму, що генерується. Зокрема, були підмічені локальні зони концентрації акустичного шуму, що трансформуються у вібрації, при цьому відбувається концентрація енергії у локальних зонах лопаті: у них амплітуди у 10–20 разів перебільшують амплітуди решти фонового шуму лопаті. У роботі вказано на причини такої трансформації: енергія потоку, що набігає на лопать, при взаємодії з лопаттю може генерувати або шум аеродинамічного походження, або трансформуватись у вібрації. Чисельний розрахунок частотного спектру виявив активацію ряду гармонік при малих кутах атаки та малих згинах лопаті. Розв'язання задачі в межах моделі аероакустики для малих чисел Маху дозволило виявити локальні зони зародження вібрацій. Поява вібрацій у польоті на понижених швидкостях, наприклад під час посадки гелікоптера по типу літака, призводить до вкрай небажаного явища – флатера лопаті, якого треба уникати.

Ключові слова: генерація BVI- шуму, вібрації, посадка по типу літака, флатер лопаті.

THE PECULARITIES OF BVI-NOISE GENERATION AT HELICOPTER AIRPLANE LANDING

Lukianov P. V., senior researcher

*National Academy of Science of Ukraine, Institute of Hydromechanics,
Zhelyabova str., 8/4, Kiev, 03680, Ukraine*

petr_lukianov@bigmir.net

An analysis of active blade control, that has been carried out in this work, shows that the problem of noise reduction being actual for today. The reason is that active blade control gives vibrations reductions but BVI-noise some increases in the same time because BVI-noise and vibrations are connected each other. So it is impossible suppress vibrations and aerodynamical noise simultaneously. One of the ways reducing BVI-noise is modification of rotor's blade along the swing. In this paper the problem of BVI-noise generation of "Blue-edge"-type sin-sin blade has been solved for helicopter airplane regime of landing. Overall problem consists of two parts: 1) calculation of aerodynamical parameters of the flow around blade of the helicopter's rotor, 2) solution of the aeroacoustical problem with using aerodynamical parameters of the flow. Aerodynamical problem consists of Euler's equation and continuity equations. Acoustical problem is based on earlier deduced by author a system of equations of aeroacoustics for general case. The sound near- and far field's parameters were calculated with use of worked out by author numerically-analytical approach. The examined range of Mach number $0,05 < M < 0,1$ detected increased level of generated noise in comparison with range of $0,2 < M < 0,4$. It was detected, in particular, the local areas of acoustical noise concentration which transformed into vibrations. The amplitudes of the noise level within the areas 10-20 times exceed the rest background blade noise. In the paper showed the reasons of such transformation: the energy of incoming flux may or generates BVI-noise or transforms into vibrations to satisfy energy conservation law. The numerical calculations of generated spectrum detected activation of series of harmonics at small angle of attack and low blade bending. Such situation was not observed for the regime of direct fly of helicopter. Solving of this problem within aeroacoustical model allowed detect origination of vibrations areas at small Mach numbers. In this situation the model can be treated as transitional one because vibrations that arise in local areas on the blade are not usually modeled with acoustical approach. At airplane landing regime the appearance of vibrations, at helicopter fly for small velocities, brings to annoying noise with slaps. It is dangerous because the situation like this may produce very unwanted effect – blade flutter which needs to escape.

Key words: BVI-noise generation, blade vibrations, airplane landing, blade flutter.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема снижения шума вертолѐта, несмотря на значительные успехи в данном направлении, остаѐтся актуальной и в наши дни. В результате ряда экспериментальных

исследований стало известно, что при обтекании твёрдых тел со скоростями, превышающими несколько десятков метров в секунду, может возникнуть звук аэродинамического происхождения. В случае же вращающегося ротора вертолѐта концевые окружные линейные скорости вращения лопасти достигают порядка 200 м/с, что обуславливает появление аэродинамического шума. Сегодня уже известны основные источники шума вертолѐта, проведена их классификация, а главные усилия учёных направлены на поиск путей его снижения.

Ряд исследований показал, что уровень генерируемого шума можно значительно снизить [1–3], используя два подхода: 1) различный изгиб лопасти вдоль размаха; 2) активное гашение вибраций с помощью встроенных в лопасти пластин. Так, в работе [1] предложено использовать активные пьезокерамические пластины, размещѐнные равномерно вдоль поверхности лопасти с некоторым интервалом под углом 45° . Такая технология позволила снизить BVI-шум (blade-vortex interaction noise) на 2-4 Дб. В работах [2, 3] используются полимеры из микроволокон с целью снижения вибраций, возникающих на поверхности лопасти. Однако, как показали эксперименты, с уменьшением BVI-шума на 2,5-2,7 Дб одновременно возрастают низкочастотные колебания, вибрации. В работе указывается, что эти два источника шума взаимосвязаны друг с другом, и полностью избавиться от них одновременно не представляется возможным.

В работе [4] представлен обзор имеющихся на то время активных технологий для преодоления вибраций и BVI-шума. В частности, отмечается, что использование активных пьезокерамических компонентов лопасти может существенно снизить вибрации. В работе [5] изучен шум при посадке вертолѐта, лопасти которого снабжены активными гибкими пластинками. Исследования показали, что при одновременном сокращении вибраций, при горизонтальном снижении вертолѐта (самолѐтная посадка), на местности фиксируется общее повышение BVI-шума на 1-3 Дб. Для преодоления этой проблемы предлагается использовать процедуру обратного контроля [6]. Она позволяет выбрать оптимальное сокращение шума на 4 Дб, в то время как вибрации снижаются лишь на 50%, то есть от шума и вибраций одновременно избавиться не удалось. В работе [7] предложено использовать пьезокерамические активаторы с резонансной частотой 450 Гц, которые позволяют при различных манѐврах вертолѐта (вертикальный подъѐм, снижение) достичь сокращения вибраций на 45–90%.

Несмотря на то, что исследования на протяжении первого десятилетия нынешнего столетия позволили в определённой степени продвинуться в направлении активного контроля лопасти, снижения шума и вибраций, проблема всё же остаѐтся не до конца решѐнной. Об этом говорится в [8, 9]: современные вертолѐты ещё далеки от совершенства в вопросе шумности. Представленный в [8] обзор мотивирует учёных на дальнейший поиск путей снижения вибраций и шума вертолѐта в целом, более детальное изучение переходных процессов трансформации звука в вибрации.

В последние годы исследования в области снижения шума [10–17] акцентируют внимание на более детальном изучении течения вокруг лопасти ротора и использовании множества электрических датчиков, способных сообщать необходимую информацию на различных режимах полѐта. Сигналы с датчиков снимаются по 3-5 раз за время одного вращения лопасти. Так становится более ясной картина шумности лопасти. Лопасть также разделяют на отдельные части, каждая из которых изготавливается из различных материалов [10–12]. Так, в [10] акцентируют внимание на аэродинамической компоновке вертолѐта, используются активные гибкие пластины, которые способны влиять на течение непосредственно или через аэроупругий отклик лопасти. Это позволяет снизить BVI-шум на 5-7 Дб, а вибрации на 20-100%. В работе [11] предложена модель SMART ротора, лопасти которого на задней кромке и на концах имеют пьезокерамические пластины. Этим достигается снижение вибраций до 80%, а BVI-шума на 5-6 Дб в режиме снижения при больших скоростях. В

работе [12] представлена концептуальная модель современной лопасти ротора. Лопасть состоит из нескольких различных частей: передние лонжероны, внутренние составные изогнутые пластины, биморфные актуаторы, нейлоновое покрытие задней части лопасти. В работах [13–14] выполнен обзор использования активных технологий для снижения шума.

Активный контроль с использованием пьезокерамических компонентов лопасти устраняет только вибрации, а для снижения BVI-шума нужна более совершенная геометрии лопасти. Сравнительно недавно стали появляться комплексные интегрированные модели для контроля процессов генерации звука, вибраций [15], а также использование теории и методов обработки сигналов с целью активного контроля шума лопасти [16, 17]. Продолжается также поиск более точных теоретических моделей описания шума аэродинамического происхождения [18, 19].

Итак, можно подытожить анализ указанных выше двух способов уменьшения шума лопасти. В первом из способов теоретической моделью является модель звука аэродинамического происхождения в одной из существующих сегодня формулировок, например [15, 18, 19]. Научный поиск здесь сосредоточен в направлении снижения BVI-шума. Второй подход, основанный на описанном выше активном контроле [1–10], изучает проблему возникающих вибраций лопасти вертолѐта и пути их снижения. Теоретической базой этого подхода являются упрощѐнные модели вибраций, как правило, разложение вынужденных колебаний в ряды. Однако, как уже упоминалось выше, экспериментальные исследования показали, что генерируемый шум и вибрации, как два различных типа колебаний, существуют одновременно. При определённых режимах работы вертолѐта, то есть при определённом соотношении параметров течения и геометрии лопасти, они могут переходить друг в друга. Физическая модель генерации звука, её математическое описание, существенным образом отличается от описания вибраций, являющихся причиной вынужденных колебания тела, его части. Поэтому одним математическим уравнением или системой уравнений их одновременно описать нельзя: сегодня нет модели, которая могла бы описать одновременно эти два вида колебаний. Определение соотношений параметров, при которых генерируемый шум аэродинамического происхождения может трансформироваться в интенсивные колебания, вибрации, является очень важным вопросом как с теоретической точки зрения, так и практической. Действительно, возникновение на поверхности лопасти зон интенсивных вибраций, локализация энергии колебаний лопасти на практике приводит к вертолѐтному флаттеру – одному из самых неблагоприятных режимов работы ротора вертолѐта. Следовательно, необходимо дальнейшее изучение переходных режимов генерация звука-вибрации.

В данной работе поставлена и решена задача генерации BVI-шума при самолѐтном снижении вертолѐта для чисел Маха $M \leq 1$ с использованием модели генерации звука [18, 19]. Численный расчѐт, выполненный для лопасти с двойным *sin-sin* изгибом «Blue-edge» типа показал, что в данном скоростном диапазоне возникают локальные зоны вибраций вместо обычной генерации звука, то есть выявлены переходные режимы звукообразования. Таким образом, обнаружено, что при самолѐтном снижении вертолѐта возможно резкое ухудшение акустических характеристик лопасти, возникновение вибраций, приводящих к флаттеру лопасти.

Цель данной работы состоит в дальнейшем развитии разработанной ранее автором математической модели описания генерации BVI-шума лопасти «Blue-edge» типа для режима самолетной посадки вертолѐта. При этом изучить возникающие переходные процессы «генерация звука – механические вибрации» лопасти, возможное возникновение флаттера.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве тестовой лопасти возьмѐм лопасть с двойным *sin-sin* изгибом. Эта лопасть показала способность существенного снижения BVI-шума при умеренных числах Маха

($0,2 < M < 0,4$). Выясним особенности генерируемого шума в режиме самолётной посадки вертолѐта, то есть для чисел Маха $M < 0,1$ (рис. 1).

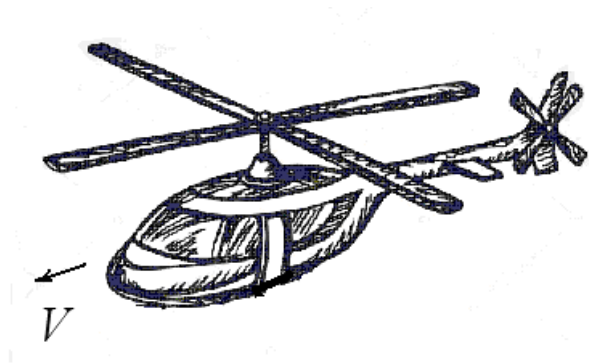


Рис. 1. Самолѐтная посадка вертолѐта

Физическая модель нагрузки на ротор вертолѐта следующая: набегающие на лопасть вихри при незначительных числах Маха моделируются в виде вихрей Тейлора как вдоль, так и поперѐк лопасти (рис. 2). Данная модель отличается от ранее используемой модели [20, 21] тем, что при малых горизонтальных скоростях полѐта вихревое течение вокруг лопасти ротора формируется более компактно. Это происходит потому, что при небольших скоростях полѐта снижается количественное влияние набегающих на переднюю кромку лопасти вихрей на процесс формирования вихревого течения в целом, а индуктивные вихри вдоль размаха лопасти – наоборот принимают на себя основную роль в формировании вихревой картины. При таком режиме полѐта происходит зарождение вибраций, то есть переходных процессов, но режим вихревого кольца полностью ещё не сформировался.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Система уравнений, описывающая идеальное сжимаемое течение вокруг лопасти [20–22], состоит из уравнения Эйлера и уравнения неразрывности:

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = -\nabla p, \quad \text{div}(\rho \bar{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

а граничным условием на поверхности лопасти является условие непротекания:

$$\bar{v}_n = \bar{0}. \quad (2)$$

Вдали от лопасти течение считается невозмущѐнным с параметрами ρ_∞, V_∞ . Уравнения (1)–(2) с учётом распределений вихрей Тейлора представляют собой аэродинамическую граничную задачу. При численных расчѐтах использовалась обезразмеренные переменные. В качестве нормировочных были взяты величины ρ_∞, V_∞ .

Для моделирования акустической задачи воспользуемся системой уравнений [18, 19]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - a^2 \Delta \rho' = \text{div} \left[\rho (\nabla (\bar{v} \nabla \varphi)) + \rho' \left(\nabla \left(\frac{\bar{v}^2}{2} \right) + \bar{v} \nabla \varphi \right) + \rho \cdot (\nabla \times \bar{v}) \times \nabla \varphi + \rho' \cdot (\nabla \times \bar{v}) \times \bar{v} \right] + \\ + \text{div} \left[\bar{v} \cdot \text{div} (\rho \nabla \varphi + \rho' \bar{v}) \right] + \text{div} \left[\nabla \varphi \text{div} \rho \bar{v} \right] + \nabla a^2 \cdot \nabla \rho', \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho \nabla^2 \varphi + \nabla \varphi \cdot \nabla \rho + \rho' \text{div} \bar{v} + \bar{v} \cdot \nabla \rho' = 0. \quad (4)$$

В уравнениях (3)–(4) ρ', φ – малые возмущения плотности и звуковой потенциал соответственно. Граничное условие по акустическим скоростям содержится в (2). На большом удалении от лопасти выполняется условие излучения Зоммерфельда, которое

учтено в интегральном представлении дальнего поля. В начальный момент времени $\rho', \varphi|_{t=0} = 0$.

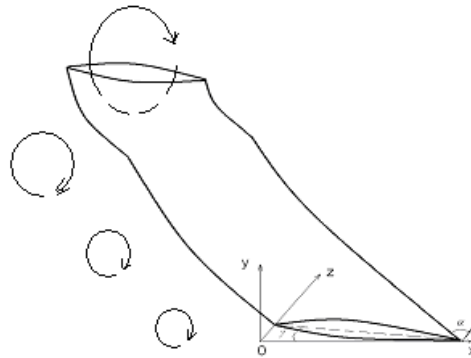


Рис. 2. Обтекание лопасти потоком

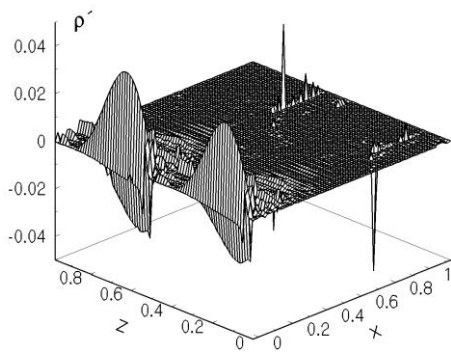
Поставленная задача решалась в прямоугольной декартовой системе координат с помощью предложенного ранее автором численно-аналитического подхода [23]. Расчётная сетка была такой же, как и в задаче [22], позволив соблюдать нужную сходимость.

БЛИЖНЕЕ ПОЛЕ

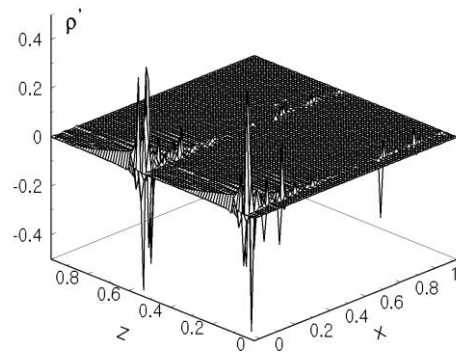
Данные расчёта ближнего поля выполнены для лопасти с двойным *sin-sin* изгибом для двух значений степени изгиба $\delta = 0,1; 0,2$. Углы атаки задавались $\gamma = 10^\circ; 5^\circ$, а угол постановки лопасти в плоскости вращения $\alpha = 60^\circ, 90^\circ$. Поперечное сечение лопасти имеет параболическую форму. Относительная степень изгиба лопасти δ одинакова для каждого из двух *sin*-изгибов лопасти. В качестве расчётной характеристики ближнего поля выбиралась безразмерная плотность ρ' . Ниже приводится анализ полученных расчётных данных в сравнении с режимом прямолинейного полёта с числами Маха $0,2 < M < 0,4$.

Данные расчёта для чисел Маха $M < 0,1$ показали интересные закономерности. На поверхностях ρ' чётко выраженные волновые фронты в передней части лопасти наблюдаются лишь для $M = 0,1$, $\alpha = 10^\circ$, $\delta = 0,2$ (рис. 3) при угле постановки лопасти $\alpha = 90^\circ$ к потоку. В случае же $\alpha = 60^\circ$ эти волновые фронты исчезают, а вместо них появляются две отчётливые зоны всплесков ρ' с существенно возросшей амплитудой. В тоже время для значений чисел Маха $0,2 < M < 0,4$, изученных в работе [22], для обоих значений угла постановки лопасти к потоку наблюдались выраженные волновые фронты синусоидальной формы. Объяснить это можно тем, что происходит трансформация энергии продольных колебаний волн (вдоль лопасти) в локализованные в виде двух серий поперечные колебания (рис. 4, 5). И эта ситуация наблюдается практически для всех приведенных в работе расчётных случаев. Для лопасти с меньшим изгибом (рис. 6) ($\alpha = 10^\circ$, $\delta = 0,1$, $M = 0,08 - 0,09$) синусоидальные волновые фронты лишь частично сохраняются, а за ними наблюдаются возмущения, которые напоминают возмущения в случае $0,2 < M < 0,4$. В ряде расчётных случаев ρ' появляются зоны, где амплитуды стремятся выйти из диапазона малых возмущений, при этом наблюдается резкая концентрация в виде пиков ρ' . И это с точки зрения физики объясняется так: продольные волновые фронты ВVI-шума уже не доминируют повсеместно на поверхности лопасти, а вместо них возникают зоны резкого возрастания амплитуды ρ' . Таким образом наблюдается *переходной процесс перерождения, трансформации звуковых колебаний в вибрации*, сопровождающийся резонансными явлениями. По мере уменьшения чисел Маха на поверхности лопасти увеличивается

количество областей вибрационной природы, амплитуда колебаний которых ρ' в 10–20 раз превышает максимальные значения амплитуд BVI-шума.

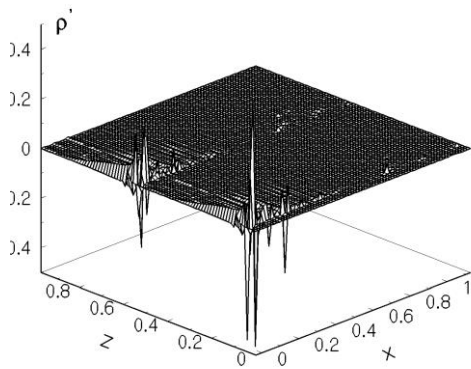


а)

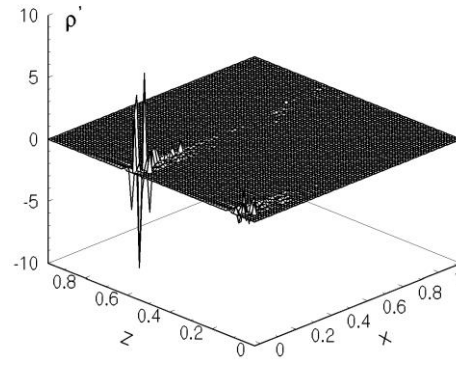


б)

Рис. 3. $\alpha = 10^\circ$, $\delta = 0,2$, $M = 0,1$: а) $\gamma = 90^\circ$; б) $\gamma = 60^\circ$

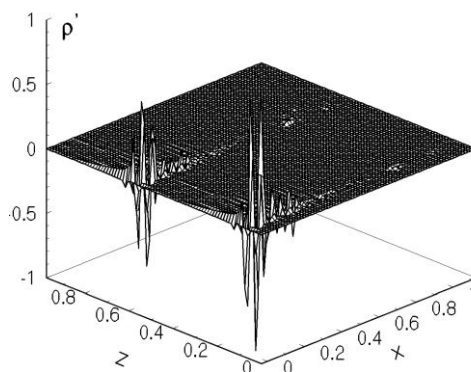


а)

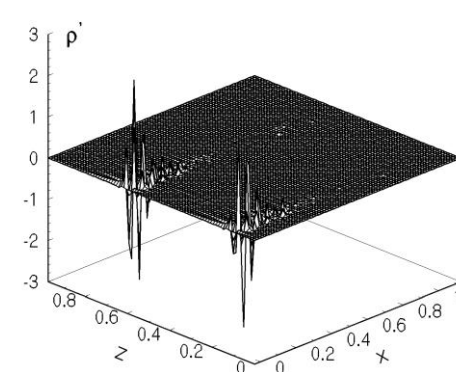


б)

Рис. 4. $\alpha = 10^\circ$, $\delta = 0,2$, $M = 0,09$: а) $\gamma = 90^\circ$; б) $\gamma = 60^\circ$

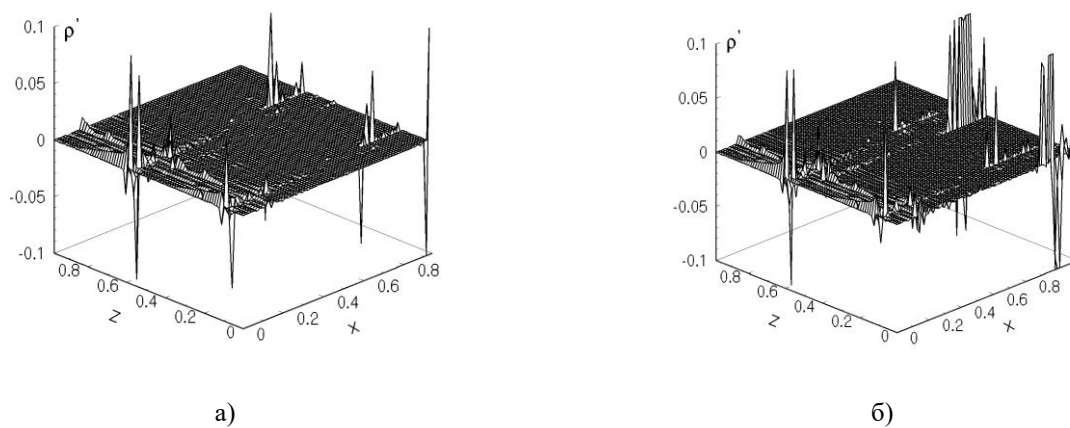
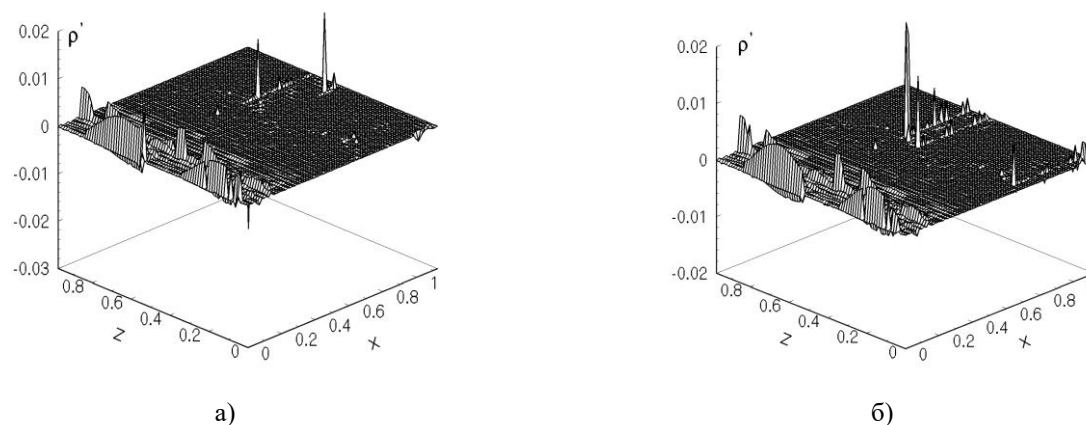


а)



б)

Рис. 5. $\alpha = 10^\circ$, $\delta = 0,2$, $M = 0,08$: а) $\gamma = 90^\circ$; б) $\gamma = 60^\circ$

Рис. 6. $\alpha = 10^\circ$, $\delta = 0,1$, $M = 0,05$: а) $\gamma = 90^\circ$; б) $\gamma = 60^\circ$ Рис. 7. $\alpha = 10^\circ$, $\delta = 0,1$, $\gamma = 90^\circ$: а) $M = 0,08$; б) $M = 0,09$

Стоит обратить внимание на тот факт, что математическая модель вибраций, если речь идёт о вибрации всего тела, описывается не системой уравнений (3)–(4), а, как уже упоминалось выше во введении, упрощёнными моделями механических колебаний. Причём требование малости амплитуды вибраций, в отличие от акустической постановки задачи, здесь отсутствует. Это различие и есть причиной того, что одним уравнением или системой уравнений ВVI-шум и вибрации вместе не удаётся описать. В тоже время используемая в данной работе акустическая модель показывает, что для малых значений чисел Маха мы локально в некоторых зонах захватываем область вибраций. Но в этой локальной области, на самом деле, акустической моделью уже пользоваться нельзя, так как нарушается требование малости возмущений акустических переменных. И приведенные в работе расчётные данные можно рассматривать как некую переходную модель, с указанными ограничениями, позволяющую обнаружить резонансные зоны на поверхности лопасти при определённых параметрах течения и конфигурации лопасти. Однако вибрации лопасти в целом поставленная выше акустическая задача не может описать: мы лишь к ним приблизились, обнаружили их. Этим и интересны представленные расчётные данные: выполнен поиск границ использования физической модели генерации ВVI-шума, объяснён процесс резкого ухудшения шумности вертолёта при самолётном снижении, которое соответствует рассмотренным в данной работе числам Маха.

В случае $\alpha = 10^\circ$, $\delta = 0,2$ локальные зоны всплесков ρ' наблюдаются в определённой части лопасти: по центру лопасти и на её крае. За ними видны всплески поперечных возмущений. Для $\alpha = 10^\circ$, $\delta = 0,1$ похожая ситуация наблюдается и в области задней кромки лопасти, где видна вторая серия продольных волновых фронтов сравнительно малой амплитуды. Следовательно, в данном расчётном случае происходит формирование и продольных, и поперечных фронтов возмущений ρ' . Это как раз и есть переходной процесс трансформации

звука в вибрации: здесь нет отчётливого разделения на вибрации или генерацию звука. На общем фоне генерации звука наблюдаются зарождение локальных зон вибраций с резким возрастанием амплитуды ρ' .

При малых значениях чисел Маха $M = 0,05$, $\delta = 0,1$, $\alpha = 90^\circ$ (рис. 6–8) наблюдаются отчётливые резонансные зоны: один-два пика существенно доминируют по амплитуде над остальными возмущениями, наблюдаемыми на поверхности лопасти. Для угла $\alpha = 60^\circ$ уже видны четыре поперечных волновых фронта. Следовательно, с уменьшением скорости набегающего потока, при самолётной посадке вертолѐта, происходит частичная трансформация продольных волновых фронтов в поперечные вибрации с появлением четко выраженных отдельных резонансных зон. Такое явление на практике может привести к резкому ухудшению устойчивости вертолѐта – флаттеру лопастей, который необходимо избегать. Для $M = 0,09$ (рис. 9) активность вибраций существенно снижается, то есть вибрации, как видно, активны в основном при малых скоростях набегающего потока.

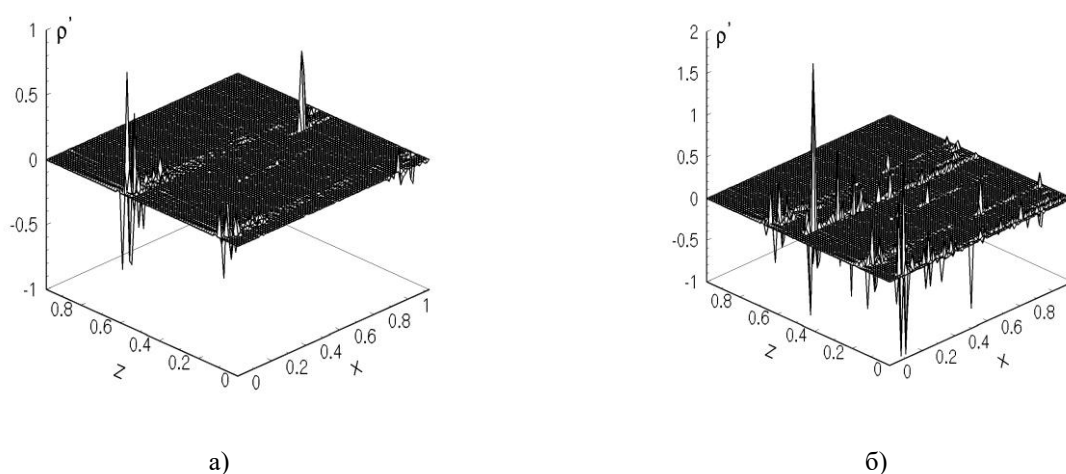


Рис. 8. $\alpha = 5^\circ$, $\delta = 0,1$, $M = 0,05$: а) $\gamma = 90^\circ$; б) $\gamma = 60^\circ$

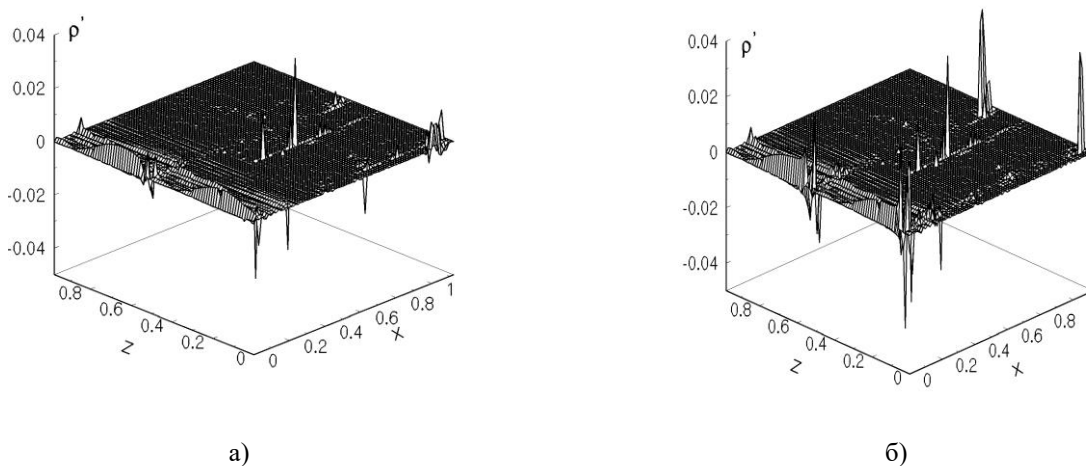


Рис. 9. $\alpha = 5^\circ$, $\delta = 0,1$, $M = 0,09$: а) $\gamma = 90^\circ$; б) $\gamma = 60^\circ$

ДАЛЬНЕЕ ПОЛЕ

Для исследования дальнего поля использовалось интегральное представление, приведенное в [22]:

$$-M_1^2 \int_S \left[\frac{F}{R} \right]_{t_1} dS_x + \int_S \left[\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{1}{Ra_\infty} \frac{\partial R}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial(1/R)}{\partial n} \right]_{t_1} dS = 4\pi\varphi(x, t_1), \quad (5)$$

где

$$F = \rho [(\nabla \varphi \cdot \nabla) \bar{v} + (\bar{v} \cdot \nabla) \cdot \nabla \varphi] + \rho' (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} + \bar{v} \cdot \text{div}(\rho \nabla \varphi + \rho' \bar{v}) + \nabla \varphi \text{div}(\rho \bar{v}).$$

В выражении (5) в подынтегральном выражении содержатся величины звукового потенциала φ и акустической плотности ρ' , их производные, которые вычислены выше в ближнем поле. В качестве расчётных характеристик взят уровень звукового давления L , а также его частотное наполнение – спектр.

Переходные процессы трансформации энергии продольных колебаний в поперечные колебания сказались также и на уровне генерируемого шума (рис. 10–15). Часто чередующиеся осцилляции L (чаще, чем в случае $0,2 < M < 0,4$ [22]) свидетельствуют о том, что течение характеризуется существенной неустойчивостью. Характерной особенностью здесь является повышенный уровень шума L , который также наблюдался в результатах, приведенных в работах [5–7]. Это значит, что возникающие вибрации делают неблагоприятной общую картину шумности. Результаты расчётов показали, что общий уровень шума при этом также становится выше. Наблюдатель в таком случае на местности слышит вместо обычного шума неприятный, увеличенный по уровню, надоедающий шум – смесь BVI-шума и вибраций [9, 10].

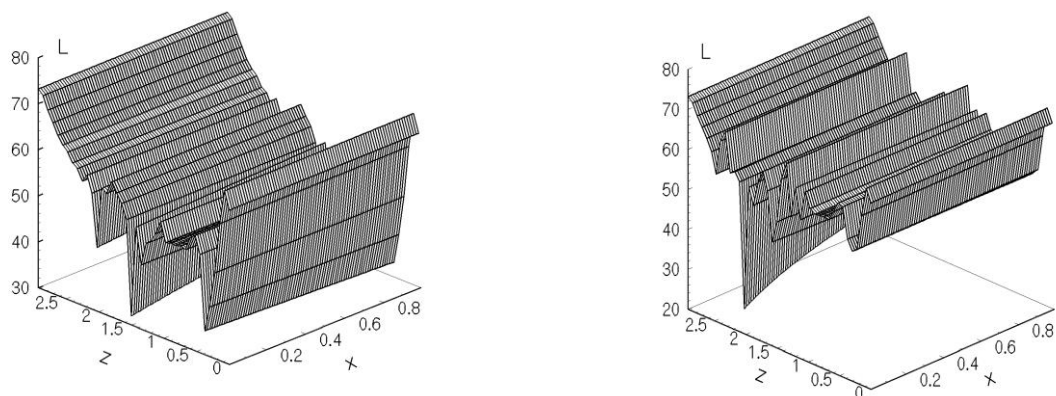


Рис. 10. $\alpha = 10^\circ$, $\delta = 0,2$, $M = 0,1$: а) $\gamma = 90^\circ$; б) $\gamma = 60^\circ$

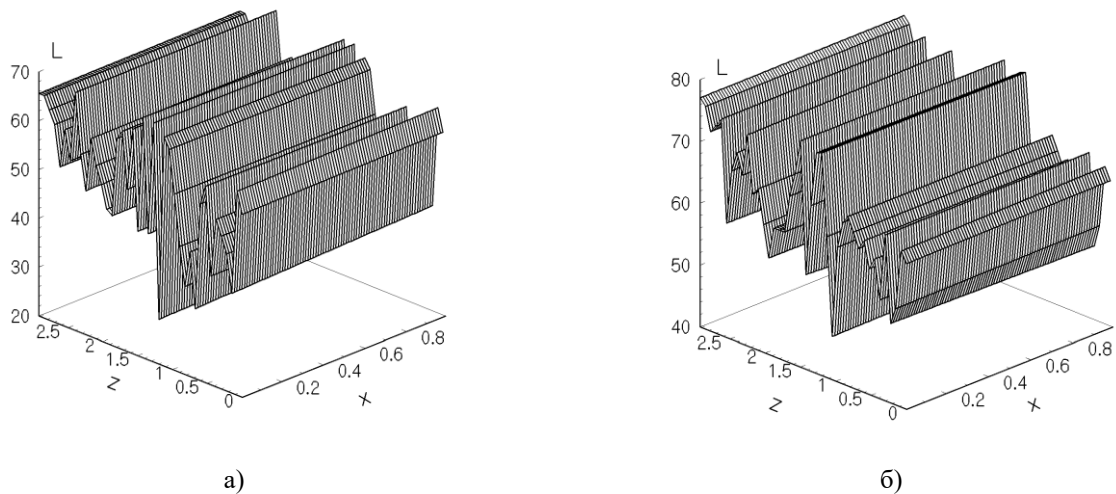


Рис. 11. $\alpha = 10^\circ$, $\delta = 0,2$, $M = 0,08$: а) $\gamma = 90^\circ$; б) $\gamma = 60^\circ$

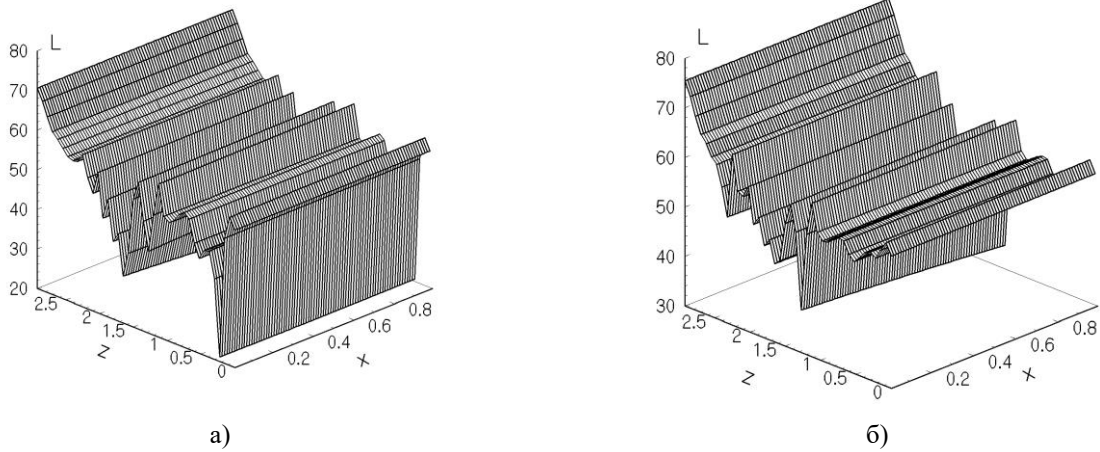


Рис. 12. $\alpha = 10^\circ$, $\delta = 0,1$, $M = 0,05$: а) $\gamma = 90^\circ$; б) $\gamma = 60^\circ$

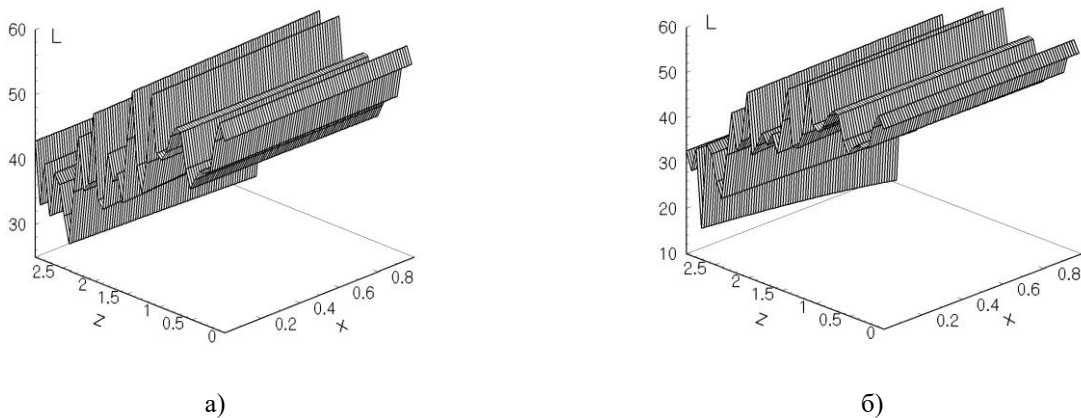
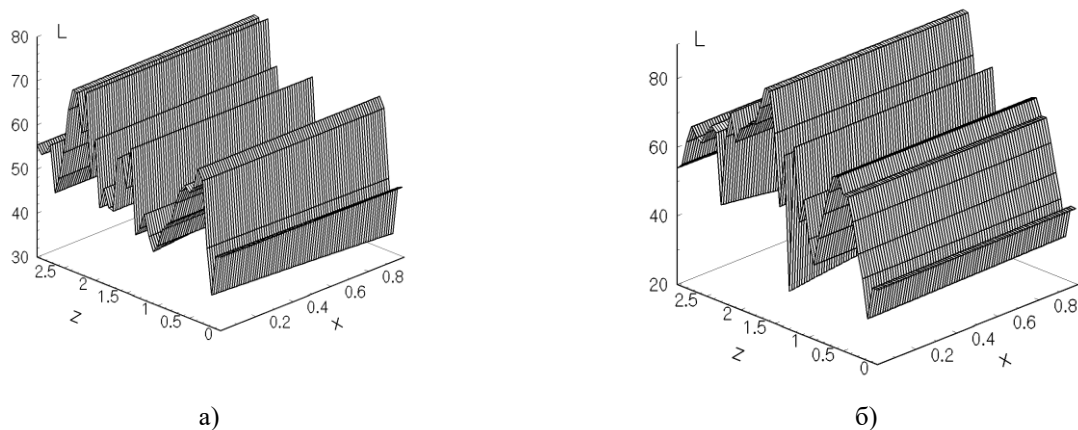
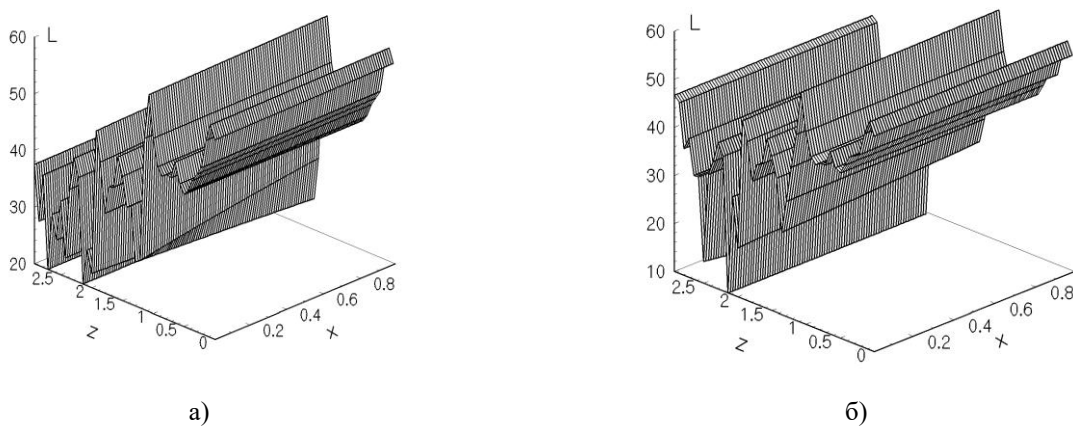


Рис. 13. $\alpha = 10^\circ$, $\delta = 0,1$, $\gamma = 90^\circ$: а) $M = 0,08$; б) $M = 0,09$

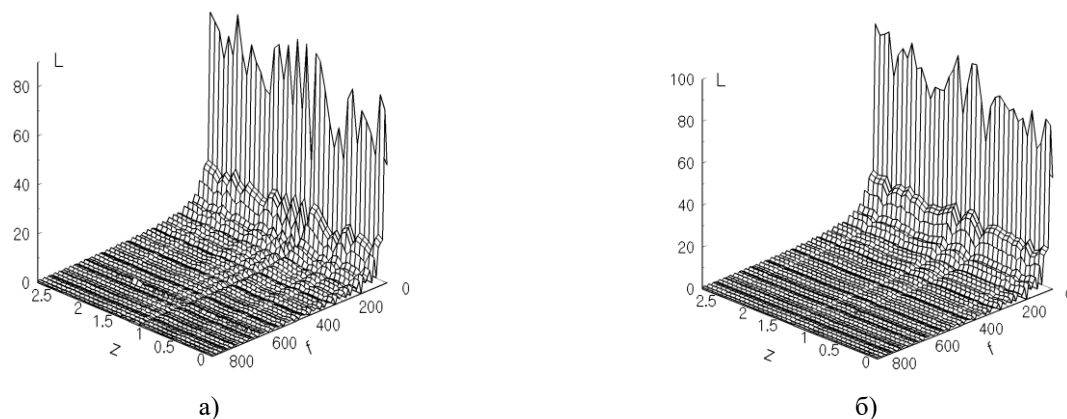
Более высокий уровень L наблюдается в случае большего изгиба лопасти и угла ($\alpha = 10^\circ$, $\delta = 0,2$) (рис. 10, 11). Для угла атаки и амплитуды изгиба $\alpha = 10^\circ$, $\delta = 0,1$ заметно возрастание уровня шума на конце лопасти для чисел Маха $M = 0,05$ (рис. 12). В случае $\alpha = 10^\circ$, $\delta = 0,1$, $M = 0,08; 0,09$ (рис. 13) уровень шума на конце лопасти, наоборот, заметно снизился. Подобная ситуация является типичной [22] для чисел Маха $0,2 < M < 0,4$. Для меньших углов атаки $\alpha = 5^\circ$, $\delta = 0,1$ (рис. 14-15) эта тенденция сохраняется.

Чтобы избежать появления вибраций, используют описанный выше активный контроль лопасти. Однако попытка снижения вибраций приводит к увеличению BVI-шума, т.к. энергия течения вокруг лопасти остаётся прежней. Использование разнообразных материалов с целью гашения вибраций никуда не отводит энергию, если она накапливается внутри них, то это может привести к тому, что они станут вторичными источниками звука. Пластины из пьезокерамических материалов используются для борьбы с вибрациями, гасят её, поглощая энергию вибраций.

Пьезокерамические материалы также используются для изготовления акустических излучателей звука. Следовательно, поглощая энергию вибраций, то есть вынужденных колебаний, пьезокерамическая пластина становится источником вторичных звуковых волн, поэтому попытка снизить активным контролем вибрации приводит в результате к повышению акустического шума в целом на 1-3 Дб.

Рис. 14. $\alpha = 5^\circ$, $\delta = 0,1$, $M = 0,05$: а) $\gamma = 90^\circ$; б) $\gamma = 60^\circ$ Рис. 15. $\alpha = 5^\circ$, $\delta = 0,1$, $M = 0,1$: а) $\gamma = 90^\circ$; б) $\gamma = 60^\circ$

Частотный спектр (рис. 16-18) показывает существенную активизацию уже не только первых пяти гармоник, как это наблюдалось в работе [22], а практически всех частот в спектре. Это свидетельствует о том, что вихревая составляющая течения играет основную роль. Не шум вращения теперь доминирующий, а вихревой шум – шум, содержащий весь частотный спектр. Если в случае $\alpha = 10^\circ$, $\delta = 0,2$ уровень гармоник постепенно понижался с ростом частоты, то уже в случае $\alpha = 10^\circ$, $\delta = 0,1$ заметна активизация гармоники в районе 650 Гц. В случае же $\alpha = 5^\circ$, $\delta = 0,1$ мы наблюдаем повсеместную активизацию значительного количества гармоник во всей частотной области.

Рис. 16. $\alpha = 10^\circ$, $\delta = 0,2$, $M = 0,08$: а) $\gamma = 90^\circ$; б) $\gamma = 60^\circ$

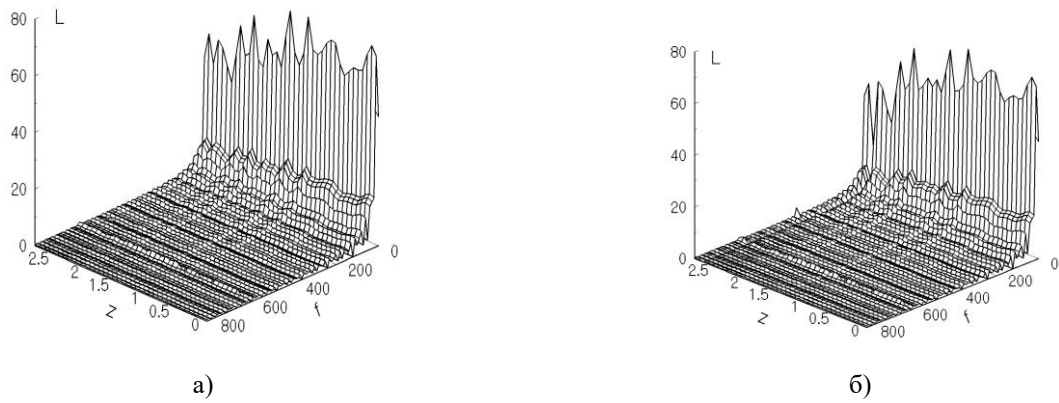


Рис. 17. $\alpha = 10^\circ$, $\delta = 0,1$, $\gamma = 90^\circ$: а) $M = 0,08$; б) $M = 0,09$

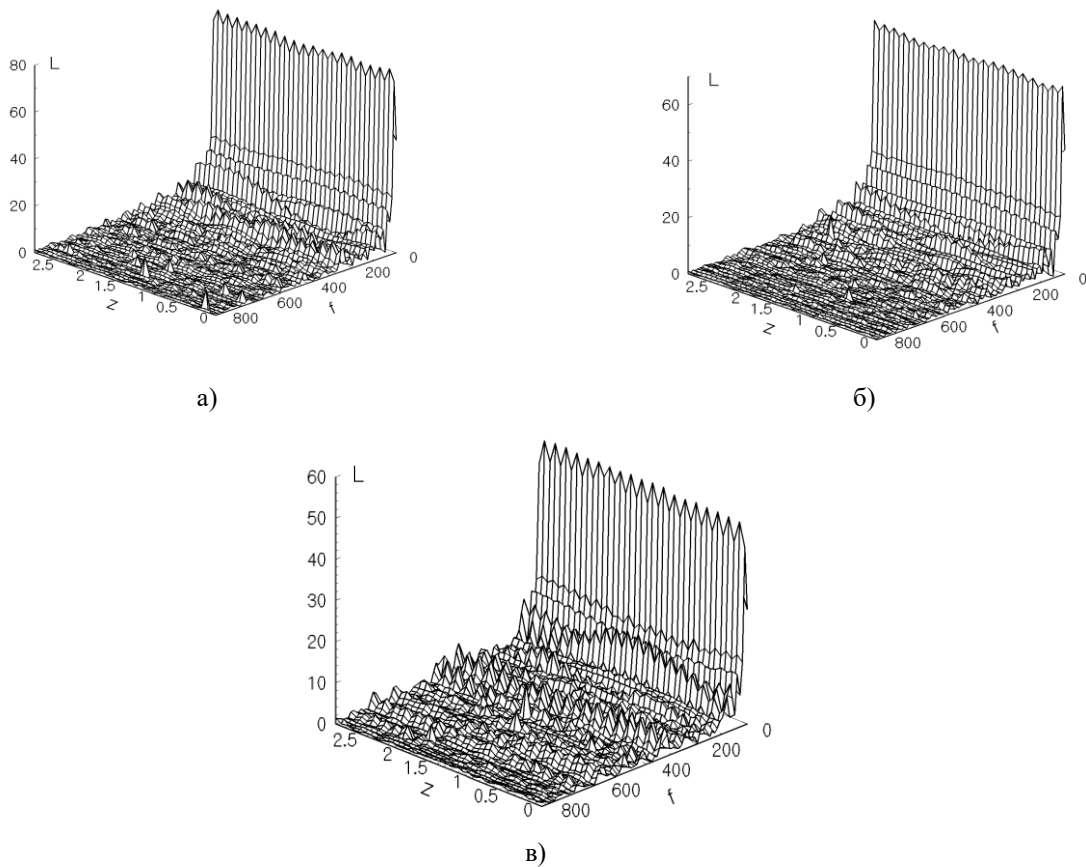


Рис. 18. $\alpha = 5^\circ$, $\delta = 0,1$: а) $M = 0,05$, $\gamma = 60^\circ$; б) $M = 0,05$, $\gamma = 90^\circ$; в) $M = 0,09$, $\gamma = 90^\circ$

ВЫВОДЫ

1. Поставлена и решена задача генерации шума *sin-sin* лопастью в режиме самолётной посадки вертолёта, при малых числах Маха.
2. Численный расчёт показал реализацию переходного режима течения, то есть течения, в котором присутствуют как BVI-шум, так и области вибраций. В этом течении в отдельных локальных областях происходит частичная трансформация энергии генерации звука в энергию вибраций, которая может стать причиной флаттера лопасти. Приводится объяснение того, почему активный контроль вместе со снижением вибраций приносит дополнительное повышение уровня BVI-шума.
3. Данные расчёта показали, что общий уровень генерируемого шума в режиме самолётной посадки выше, чем для основного режима прямолинейного полёта. При этом заметна

активизация большого количества гармоник в спектре для малых углов атаки и степени изгиба лопасти, чего не наблюдалось для режима прямолинейного полёта вертолётa.

4. Дальнейшие исследования в данном направлении могут быть направлены на поиск оптимальных параметров лопасти с целью оптимизации баланса шум – вибрации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chen Peter C., Barder James D., Evens Robert A. D., Niemczuk John. Blade-vortex interaction noise reduction with active twist smart rotor technology. *Smart Materials and Structures*. 2001. Vol. 10, N 1. P. 77–85.
2. Booth Earl R., Wilbur Jr. Matthew L. Acoustic Aspects of Active-twist Rotor control. *American Helicopter Society 58-th Annual Forum*, Montreal, Canada, June 11–14, 2002. Montreal, 2002. P. 15.
3. Booth E. R., Wilbur M. L. Acoustics Aspects of Active-Twist Rotor Control. *Journal of American Helicopter Society*. 2004. Vol. 49, N 1. P. 3–10.
4. Thankkar Dipali, Garguli Ranjan. Active twist control of smart helicopter Rotor – a survey. *Journal of aerospace science and technologies*. 2005. Vol. 57, N 4. P. 20.
5. Patt Df., Liu L., Friedmann P. P. Rotocraft Vibration Reduction and Noise Prediction Using a Unified Aeroalastic Response Simulation. *Journal of the American Helicopter Society*. 2005. P. 95–106.
6. Patt Daniel, Liu Li, Friedmann Peterz P.. Helicopter Noise reduction by actively Controlled Flaps. *11-th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Monterey, California, May 23–25, 2005.
7. Hofinger M., Leconte P. Development of an active flap rotor model. *6-th ONERA-DLR aerospace Symposium*. Berlin, June 22–23, 2004. P. 14.
8. Kessler Ch. Paper 045-I. Active Rotor Control for Helicopters: Motivation and Survey on Higher Harmonic Control. *CEAS Aeronautical Journal*. 2011. Vol. 1, N 1–4. P. 3–22.
9. Kessler Ch. Paper 045-II. Active Rotor Control for Helicopters: individual blade control and swashplateless rotocraft designs. *CEAS Aeronautical Journal*. 2011. Vol. 1, N 1–4. P. 23–54.
10. Le Pape A., Lienard G., Bally J. Active Flow Control for Helicopters. *Journal Aerospace Lab*. 2013. Issue 6. P. 12.
11. Straub Fr., Anand V. R., Birchette Terry. SMART Rotor Development and Win-Tunnel Test. *50th European Rotocraft Forum*, Hamburg, Germany, Sept. 22–23, 2009. Hamburg, 2009. P. 56.
12. Thornburgh Robert P., Kreshock Andrew R., Wilbu Mattew L., Sekula Martin K., Shen Jinwei. Continuous Trailin-Edge Flaps for Primary Flight Control of a Helicopter Main Rotor. *AHS 70-th Annual Forum*. Montreal, Quebec, Canada, May 20–22, 2014. Montreal, Quebec, 2014. P. 13.
13. Marques Pascual. A Review of Active Blade Twist Technology: Part I – Actuation Concepts. *International Journal of Unmanned Systems Engineering*. 2014. Vol. 2, N 2. P. 16–25.
14. NASA, DLR, ONERA, JAXA. Status Report. Helicopter Noise Reduction Technology. 2015. 56 p.
15. Saetti Umberto, Horn Joseph F., Brentner Kenneth, Vilafana Willca, Wachspress Dan. Rotocraft Simulations with Coupled Flight Dyanamics, Free Wake and Acoustics. *AHS Journal*. 2016. P. 1–12.
16. Zhao Yanyu, Shi Yongjie, Xu Guohua. Helicopter Blade-Vortex Interaction Airload and Noise Prediction Using Coupling CFD/VWM Method. *Applied Sciences*. 2017. 7, 381. 20 p.
17. Yang Lu, Jianbo Fong. A time-Domain Active Vibration Control Algorithm For Helicopter Based on Prior Error Channel Identification Strategy. *Hindawi Shock and Vibration*. 2018. Vol. 2018. doi: <http://doi.org/10.1155/2018/2870896>.
18. Лукьянов П. В. Об одной модели аэроакустики вязкого сжимаемого газа. Часть I. Анализ существующих моделей, вывод разрешающей системы уравнений. *Акустичний вісник*. 2013–2014. Т. 16, № 2. С. 18–30. URI: <http://dSPACE.nbuv.gov.ua/handle/123456789/116200>.
19. Лукьянов П. В. Об одной модели аэроакустики вязкого сжимаемого газа. Часть II. Шум близкого взаимодействия вихря и лопасти вертолётa. *Акустичний вісник*. 2013–2014. Т. 16, № 3. С. 31–40. URI: <http://dSPACE.nbuv.gov.ua/handle/123456789/116219>.
20. Лукьянов П. В. Моделирование BVI-шума двулопастного ротора вертолётa. *Акустичний вісник*. 2015. Т. 17, № 1. С. 48–60. URI: <http://dSPACE.nbuv.gov.ua/handle/123456789/116236>.

21. Лукьянов П. В. Влияние закругления конца лопасти на шум взаимодействия вихрь-лопасть. *Акустичний вісник*. 2015. Т. 17, № 2. С. 23–37. URI: <http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/116240>.
22. Лукьянов П. В. Снижение ВVI-шума ротора вертолёта с помощью лопасти с двойным изгибом. *Вісник Черкаського університету. Серія: Прикладна математика. Інформатика*. 2017. № 1–2. С. 50–64.
23. Лукьянов П. В. Об одном численно-аналитическом подходе к решению задачи генерации звука тонким крылом. Часть II. Схема применения для нестационарных задач. *Акустичний вісник*. 2012. Т. 15, № 3. С. 45–52. URI: <http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/116180>.

REFERENCES

1. Chen, Peter C., Barder, James D., Evens, Robert A. D. & Niemczuk, John (2001). Blade-vortex interaction noise reduction with active twist smart rotor technology. *Smart Materials and Structures*, Vol. 10, no. 1, pp. 77-85.
2. Booth, Earl R. & Wilbur, Jr. Matthew L. (2002, June). Acoustic Aspects of Active-twist Rotor control. American Helicopter Society 58-th Annual Forum, (p. 15), Montreal, Canada.
3. Booth, E. R. & Wilbur, M. L. (2004). Acoustics Aspects of Active-Twist Rotor Control. *Journal of American Helicopter Society*, Vol. 49, no. 1, pp. 3-10.
4. Thankkar, Dipali & Garguli, Ranjan (2005). Active twist control of smart helicopter Rotor – a survey. *Journal of aerospace science and technologies*, Vol. 57, no. 4, p. 20.
5. Patt, Df., Liu, L. & Friedmann, P. P. (2005). Rotocraft Vibration Reduction and Noise Prediction Using a Unified Aeroelastic Response Simulation. *Journal of the American Helicopter Society*, pp. 95-106.
6. Patt, Daniel; Li, Liu & Friedmann, Peterz P. (2005, May). Helicopter Noise reduction by actively Controlled Flaps. 11-th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Monterey, California.
7. Hofinger, M. & Leconte, P. (2004, June). Development of an active flap rotor model. 6-th ONERA-DLR aerospace Symposium, (p. 14), Berlin.
8. Kessler, Ch. (2011). Paper 045-I. Active Rotor Control for Helicopters: Motivation and Survey on Higher Harmonic Control. *CEAS Aeronautical Journal*, Vol. 1, no. 1-4, pp. 3-22.
9. Kessler, Ch. (2011). Paper 045-II. Active Rotor Control for Helicopters: individual blade control and swashplateless rotocraft designs. *CEAS Aeronautical Journal*, Vol. 1, no. 1-4, pp. 23-54.
10. Le Pape, A., Lienard, G. & Bally, J. (2013). Active Flow Control for Helicopters. *Journal Aerospace Lab*, Issue 6, p. 12.
11. Straub, Fr., Anand, V. R. & Birchette, Terry (2009, Sertember). SMART Rotor Development and Win-Tunnel Test. 50th European Rotocraft Forum, (p. 56), Hamburg, Germany.
12. Thornburgh, Robert P., Kreshock, Andrew R., Wilbu, Mattew L., Sekula, Martin K. & Shen, Jinwei (2014, May). Continuous Trailin-Edge Flaps for Primary Flight Control of a Helicopter Main Rotor. *AHS 70-th Annual Forum*, (p. 13), Montreal, Quebec, Canada.
13. Marques, Pascual (2014). A Review of Active Blade Twist Technology: Part I – Actuation Concepts. *International Journal of Unmanned Systems Engineering*, Vol. 2, no. 2, pp. 16-25.
14. (2015). NASA, DLR, ONERA, JAXA. Status Report. Helicopter Noise Reduction Technology.
15. Saetti, Umberto; Horn, Joseph F.; Brentner, Kenneth; Vilafana, Willca & Wachspress, Dan (2016). Rotocraft Simulations with Coupled Flight Dyanamics, Free Wake and Acoustics. *AHS Journal*, pp. 1-12.
16. Yanyu Zhao, Yongjie Shi, Guohua Xu. Helicopter Blade-Vortex Interaction Airload and Noise Prediction Using Coupling CFD/VWM Method. *Applied Sciences*. 2017. 7, 381. 20 p.
17. Lu, Yang & Fong, Jianbo (2018). A time-Domain Active Vibration Control Algorithm For Helicopter Based on Prior Error Channel Identification Strategy. *Hindawi Shock and Vibration*, Vol. 2018. doi: <http://doi.org/10.1155/2018/2870896>.

18. Lukianov, P. V. (2013-2014). On one model for aeroacoustics of viscous compressible gas. Part I. Analysis of existing models, deducing of resolving system of equations. Akustychnyi visnyk, Vol. 16, no. 2, pp. 18-30. Retrieved from: <http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/116200>.
19. Lukianov, P. V. (2013-2014). On one model for aeroacoustics of viscous compressible gas. Part II. Noise of the near helicopter blade-vortex interaction. Akustychnyi visnyk, Vol. 16, no. 3, pp. 31-40. Retrieved from: <http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/116219>.
20. Lukianov, P. V. (2015). Modeling the BVI-noise of the two-blade helicopter rotor. Akustychnyi visnyk, Vol. 17, no. 1, pp. 48-60. Retrieved from: <http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/116236>.
21. Lukianov, P. V. (2015). The effect of blade tip truncation type on the BVI-noise level. Akustychnyi visnyk, Vol. 17, no. 2, pp. 23-37. Retrieved from: <http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/116240>.
22. Lukianov, P. V. (2017). Decline of BVI-noise of rotor of helicopter by means of blade with a double bend. Сниження BVI-шума ротора вертольота с помощью лопасти с двойным изгибом, Visnyk Cherkaskoho universytetu. Serii: Prykladna matematyka. Informatyka, No. 1-2, pp. 50-64.
23. Lukianov, P. V. (2012). On one numerical-analytical approach to solving of a problem on sound generation by a thin wing. Part II. A schematic of application to non-stationary problems. Akustychnyi visnyk, Vol. 15, no. 3, pp. 45-52. Retrieved from: <http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/116180>.

УДК 681.3:771.537.442

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-09

ФУНКЦІОНАЛЬНА МОДЕЛЬ ОСНОВНИХ БІЗНЕС-ПРОЦЕСІВ СИСТЕМИ «РАНОК»

Мильцев О. М., Кондрат'єва Н. О., Леонт'єва В. В.

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

alexmyltsev@gmail.com

У статті розглядається функціональна модель основних бізнес-процесів системи рекурсивного аналізу на образних компонентах – РАНОК. Система представлена сімома підсистемами, яким відповідають сім основних бізнес-процесів.

Опис функції трьох змінних на мові FORTU виконується підсистемою аналітичного опису моделі. Далі задана на мові FORTU функція використовується у попередній візуалізації досліджуваного об'єкта, що виконується підсистемою попередньої візуалізації і формує зображення досліджуваного об'єкта, та у формуванні тривимірного воксельного масиву даних і формує тривимірний воксельний масив компонентів нормалей. На базі цього масиву компонентів нормалей формуються набори тривимірних воксельних графічних образів-моделей підсистемою побудови графічних образів-моделей функції, які використовуються у підсистемі візуалізації графічних образів-моделей функції для отримання зображення графічних образів-моделей у растровому форматі. Також набір базових М-образів може бути використаний у підсистемі уточнення воксельних структур даних, а набір диференційних М-образів – у підсистемі градієнтного аналізу з подальшою візуалізацією результатів аналізу. Додаткова підсистема компілятора формульної мови FORTU використовується разом з підсистемами аналітичного опису моделі, попередній візуалізації досліджуваного об'єкта та побудови воксельних структур даних, для забезпечення компіляції досліджуваної функції трьох змінних. Всі інші підсистеми працюють тільки з воксельними структурами даних.

Всі моделі бізнес-процесів виконані у нотаціях IDEF0 та IDEF3.

Ключові слова: моделювання, R-функція, аналіз функцій, диференційні характеристики функцій, рух просторового градієнту, воксельний масив даних, образ-модель, графічний М-образ, РАНОК.

FUNCTIONAL MODEL OF THE BASIC BUSINESS PROCESSES OF THE “RANOK” SYSTEM

Myltsev O. M., Kondratieva N. O., Leontieva V. V.

Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine

alexmyltsev@gmail.com

In this work it is proposed to consider the automated system of recursive analysis on figurative components (RANOK) in terms of its functional organization based on the main business processes of the system.

The RANOK system is based on the algorithm of recursive refinement of the area of the investigated object, given by analytical or piecewise-analytical method (R-function).

It allows you to organize the interface between the user and the computer using a special object-oriented formula FORTU, to make appropriate adjustments in the process of describing the information task presented in the form of an analytical expression.

Based on the received images that are different, but remotely reminiscent of a realistic representation, to make the most optimal solution. The specificity of such images is that they contain only graphically presented information about some local geometric characteristics of the surface of the function level for each examined point in the investigated area. Since the realistic image is a reflection of the set of differential characteristics organized in a single dependence, the proposed images are allotted to the constituent parts of a realistic image, remotely reminiscent of it.

Such images are allocated to a separate class of image-models (since they reflect some geometric property) or M-images.

This method allows us to combine a study of a surface with the ability to display its properties, which are detected only by means of differentiation. Thus, it can be noted that the ability of the end user to make the optimal solution can be greatly improved by using graphical representation of information in the form of M-images.

The article discusses the functional model of the main business processes of the recursive analysis system on the image components - RANOK. The system is represented by seven subsystems, which correspond to the seven main business processes. Business process models are made in IDEF0 and IDEF3 notation.

The presented system of constructing graphic information allows to carry out visual analysis of the surface of functions of three variables, increasing the efficiency of the analysis of various computing and information programs based on the analytical description.

Key words: modeling, R-function, analysis of functions, differential characteristics of a function, spatial gradient motion, voxel dataset, image-model, graphic M-image, RANOK.

ВСТУП

У процесі розвитку інформаційних технологій у різних аспектах господарської та наукової діяльності все активніше робляться спроби вдосконалити використання графічної інформації в автоматизації поставлених завдань. А саме, розглядаючи зображення як інформаційний потік графічних даних, який можна застосовувати для алгоритмізації прийняття рішень.

Останнім часом сучасна комп'ютерна техніка настільки зробила крок уперед, що інформаційні обсяги та алгоритми, що ще нещодавно виглядали нереально, знаходять нову платформу для застосування.

Математичне моделювання та можливості комп'ютерної графіки широко впроваджуються в усі аспекти наукової діяльності. Важко уявити напрямок науки, де б не використовувалася комп'ютерна графіка, що базується на принципах геометричного моделювання в аналітичному поданні.

Не випадково в області конструювання спостерігається підвищений інтерес до аналітичних принципів моделювання. Це насамперед пов'язано не тільки зі зростанням технічного рівня комп'ютерних технологій і розвитком образотворчих засобів на їх основі. Аналітична основа затребувана зростанням рівня промислових технологій, що автоматизують процес виготовлення деталей складної геометричної форми.

Нарівні з розвитком програм, що дозволяють будувати реалістичні зображення на основі піксельних структур на плоских проєкціях, активний розвиток отримали воксельні підходи, які формують об'єм у графічних даних. Лідуючі позиції в цьому напрямку поки утримує медицина, де у воксельному поданні моделюються внутрішні органи людини. Це пояснюється найперше тим, що медицина сьогодні найбільш оснащена пристроями просторового сканування на базі ультразвукових принципів, що дозволяють отримувати по зрізах просторову графічну інформацію досліджуваних частин тіла людини.

Воксельний підхід дозволяє розглядати графічну модель як віртуальне тіло в просторі, що моделюється, що відкриває безліч додаткових можливостей у його застосуванні.

Аналітичне просторове моделювання за проблемою схоже з медичним моделюванням на комп'ютері. В обох випадках потрібен допоміжний апарат, що працює на принципі просторового сканування, для визначення і формування тіла на базі воксельної 3D-моделі. Для аналітичного подання таким апаратом може служити обраний програмний принцип сканування досліджуваної області визначення функції (ітераційний, рекурсивний), а сам аналітичний об'єкт описаний на деякій проблемно-орієнтованій мові. Отже, потрібно створення інструментальної системи, що дозволяє ввести та дослідити функціональну залежність.

СИСТЕМА РЕКУРСИВНОГО АНАЛІЗУ НА ОБРАЗНИХ КОМПОНЕНТАХ

Вирішенню деяких аспектів цієї проблеми і присвячена дана робота, у якій пропонується розглянути автоматизовану систему рекурсивного аналізу на образних компонентах (РАНОК) з точки зору її функціональної організації на базі основних бізнес-процесів системи [1, 2].

Система РАНОК базується на алгоритмі рекурсивного уточнення області досліджуваного об'єкта [3], заданого аналітичним або кусково-аналітичним способом (R-функції) [4], дозволяє організувати інтерфейс між користувачем і комп'ютером за допомогою спеціальної об'єктно-орієнтованої формульної мови FORTU [5], внести відповідні коригування в процесі опису інформаційної задачі, представлені у вигляді аналітичного виразу. На основі отриманих образів, що відрізняються, але віддалено нагадують реалістичне представлення, прийняти найбільш оптимальне рішення. Специфіка таких зображень полягає в тому, що вони містять лише графічно представлену інформацію про деяку локальну геометричну характеристику поверхні рівня функції для кожної розглянутої точки досліджуваної області. Оскільки реалістичний образ являє собою відображення безлічі диференціальних характеристик, організованих в єдину залежність, то і запропоновані зображення є виділеними складовими частинами реалістичного образу, віддалено нагадуючи його. Дослідженню таких образів присвячені роботи О. В. Голока [6-8], де вони виділяються в окремий клас образів-моделей (оскільки відображають деяку геометричну властивість) або М-образів. Даний спосіб дозволяє поєднувати в собі дослідження поверхні з можливістю відображення таких її властивостей, які виявляються лише за допомогою диференціювання. Отже, можна зазначити, що здатність кінцевого користувача приймати оптимальне рішення може бути значно поліпшена за допомогою використання графічного подання інформації у вигляді М-образів.

ФУНКЦІОНАЛЬНА МОДЕЛЬ СИСТЕМИ РАНОК

На рис. 1 зображена контекстна діаграма А0 основного бізнес-процесу «Система Рекурсивного Аналізу На Образних Компонентах» у нотації IDEF0, що відображає всі вхідні, вихідні дані, управління та механізми системи.

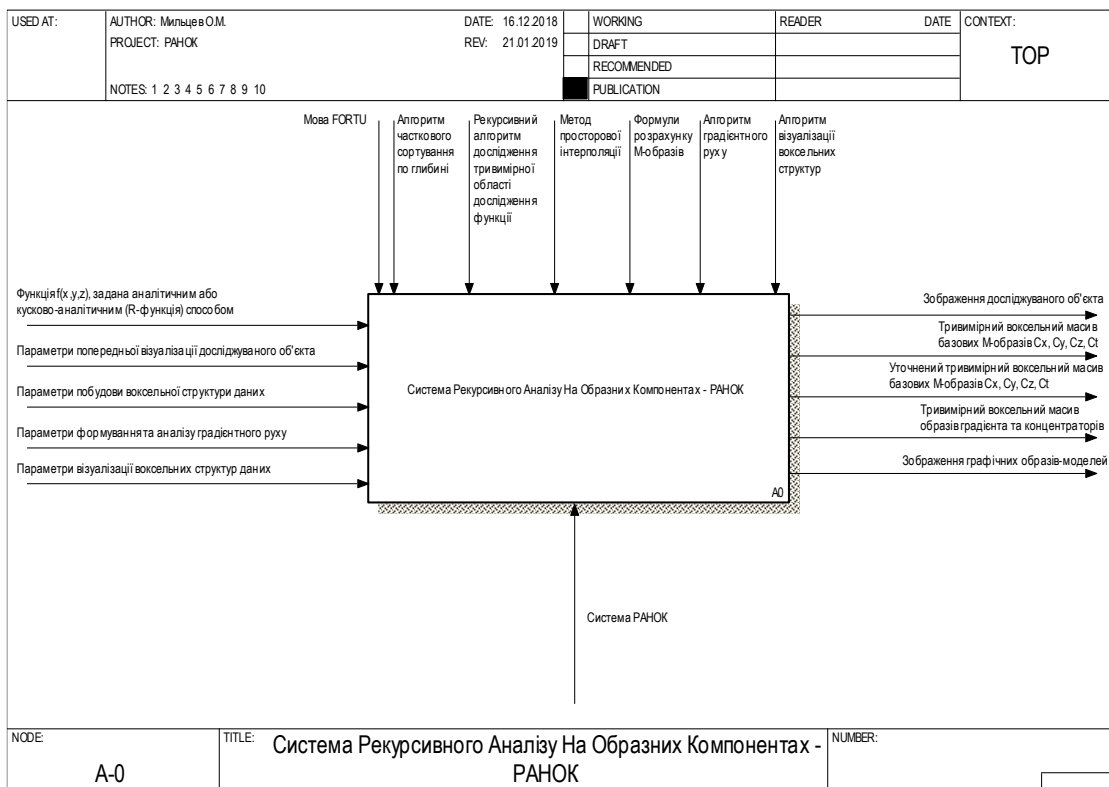


Рис. 1. Контекстна діаграма A0 бізнес-процесу «Система Рекурсивного Аналізу На Образних Компонентах»

З моделі видно, що основними зовнішніми даними, що є необхідними для функціонування системи, є:

1. Функція трьох змінних $f(x, y, z)$, задана аналітичним або кусково-аналітичним (R-функція) способом – це функція, що досліджуватиметься системою.
2. Параметри попередньої візуалізації досліджуваного об'єкта – параметри, що використовуються при формуванні зображення досліджуваної функції «на льоту» без застосування воксельних структур даних, а саме:
 - параметри області дослідження функції – габарити та центр сцени;
 - кількість ітерацій рекурсивного алгоритму;
 - тип відображуваних значень функції (позитивні, негативні або нульові);
 - вектор освітлення;
 - параметри обертання сцени;
 - параметри результуючого зображення.
3. Параметри побудови воксельної структури даних – параметри, що використовуються при формуванні тривимірного воксельного масиву даних функції, а саме:
 - параметри області дослідження функції – габарити та центр сцени;
 - кількість ітерацій рекурсивного алгоритму.
4. Параметри формування та аналізу градієнтного руху – параметри, що використовуються при формуванні та аналізу градієнтного руху на основі воксельних структур графічних образів-моделей, а саме:
 - параметри області дослідження градієнта;

- шаг градієнта;
 - метод аналізу градієнта;
 - тип концентраторів (максимум чи мінімум).
5. Параметри візуалізації воксельних структур даних – параметри, що використовуються при формуванні зображення досліджуваного об'єкта та воксельних графічних образів-моделей, а саме:
- параметри досліджуваної сцени – габарити та центр сцени;
 - тип відображуваних значень функції (позитивні, негативні або нульові);
 - вектор освітлення;
 - параметри обертання сцени;
 - параметри прозорості;
 - параметри градації кольору;
 - параметри перетинів;
 - вид М-образу, який треба використовувати при візуалізації (один із сімнадцяти М-образів або оригінальний об'єкт);
 - параметри візуалізації образів градієнта та концентраторів;
 - параметри результуючого зображення.

Даними на виході із основного бізнес-процесу можуть бути:

- 1) зображення досліджуваного об'єкта – отримане зображення оригінального об'єкта у растровому форматі;
- 2) тривимірний воксельний масив базових М-образів C_x , C_y , C_z , C_t – воксельна структура, яку отримуємо при формуванні тривимірних воксельних графічних образів-моделей та зберігаємо у зовнішньому файлі;
- 3) уточнений тривимірний воксельний масив базових М-образів C_x , C_y , C_z , C_t – нова воксельна структура, що отримуємо у результаті уточнення існуючого масиву методом просторової інтерполяції (без застосування аналітичної функції) та зберігаємо у зовнішньому файлі;
- 4) тривимірний воксельний масив образів градієнта та концентраторів – воксельна структура, яку отримуємо при формуванні та аналізі градієнтного руху на основі воксельних структур графічних образів-моделей та зберігаємо у зовнішньому файлі;
- 5) зображення графічних образів-моделей – отримане зображення графічних образів-моделей у растровому форматі.

У якості управління для основного бізнес-процесу виступають:

- 1) мова FORTU;
- 2) алгоритм часткового сортування по глибині;
- 3) рекурсивний алгоритм дослідження тривимірної області дослідження функції;
- 4) формули розрахунку М-образів;
- 5) алгоритм градієнтного руху;

- 6) метод просторової інтерполяції;
 7) алгоритм візуалізації воксельних структур.

Декомпозиція контекстної діаграми A0 бізнес-процесу «Система Рекурсивного Аналізу На Образних Компонентах» приведена на рис. 2, з якого можна бачити, що за функціональним призначенням система РАНОК складається з наступних семи підсистем:

- 1) *підсистема аналітичного опису моделі* – призначена для опису вихідної функції трьох змінних $f(x, y, z) \geq 0$, що задана аналітичним або кусково-аналітичним (R-функції) способом на деякій замкнутій прямокутній області, за допомогою спеціальної об'єктно-орієнтованої формульної мови FORTU для подальшого її використання *підсистемами попередньої візуалізації та побудови воксельних структур даних*;
- 2) *підсистема попередньої візуалізації* – формує зображення об'єкта «на льоту» (без формування та зберігання воксельних структур даних), використовуючи алгоритми рекурсивного уточнення та часткового сортування по глибині області дослідження функції, опис вихідної функції на мові FORTU та параметри попередньої візуалізації об'єкта;
- 3) *підсистема побудови воксельних структур даних* – формує тривимірний воксельний масив даних функції, використовуючи опис вихідної функції на мові FORTU, параметри побудови воксельної структури даних та рекурсивний алгоритм дослідження тривимірної області дослідження функції методом половинного ділення трьома взаємоперпендикулярними площинами на вісім подібних підобластей. Для кожної з отриманих підобластей застосовується та ж сама процедура, доки не буде досягнута задана глибина рекурсії. У результаті отримуємо воксельну організацію тривимірної області дослідження функції, де для кожного вокселя визначено знак та базовий набір диференційних характеристик функції у вигляді компонентів вектора нормалі N_x, N_y, N_z, N_t ;
- 4) *підсистема побудови графічних образів-моделей функції* – формує чотири набори тривимірних воксельних масивів графічних M-образів на базі отриманих диференційних характеристик функції:
 - набір базових M-образів C_x, C_y, C_z, C_t – зберігається у зовнішньому файлі;
 - набір M-образів $C_{tx}, C_{ty}, C_{tz}, C_{tt}$, що характеризують просторове положення горизонту спостерігача до об'єкта – формується на основі базових M-образів;
 - набір M-образів часткових похідних $C_{dx} = \partial f / \partial x, C_{dy} = \partial f / \partial y, C_{dz} = \partial f / \partial z$ – формується на основі базових M-образів;
 - набір диференційних M-образів $C_{xy} = \partial x / \partial y, C_{xz} = \partial x / \partial z, C_{yx} = \partial y / \partial x, C_{yz} = \partial y / \partial z, C_{zx} = \partial z / \partial x, C_{zy} = \partial z / \partial y$ – формується на основі базових M-образів.

Усі отримані набори M-образів можуть бути використані у *підсистемі візуалізації графічних образів-моделей функції*. Також набір базових M-образів може бути використаний у *підсистемі уточнення воксельних структур даних*, а набір диференційних M-образів – у *підсистемі градієнтного аналізу*;

- 5) *підсистема уточнення воксельних структур даних* – уточнює тривимірний воксельний масив базових M-образів методом просторової інтерполяції, підвищуючи деталізацію

вихідного об'єкта. Уточнений тривимірний воксельний масив базових М-образів зберігається у зовнішньому файлі і може бути використаний надалі;

- б) підсистема градієнтного аналізу – вирішує завдання визначення просторового руху по градієнту на основі воксельних структур М-образів, формуючи образи градієнта та концентраторів. Тривимірний воксельний масив образів градієнта та концентраторів зберігається у зовнішньому файлі та може бути використаний у підсистемі візуалізації графічних образів-моделей функції;
- 7) підсистема візуалізації графічних образів-моделей функції – формує зображення досліджуваного об'єкта та воксельних графічних образів-моделей, використовуючи алгоритм візуалізації воксельних структур даних та параметри візуалізації.

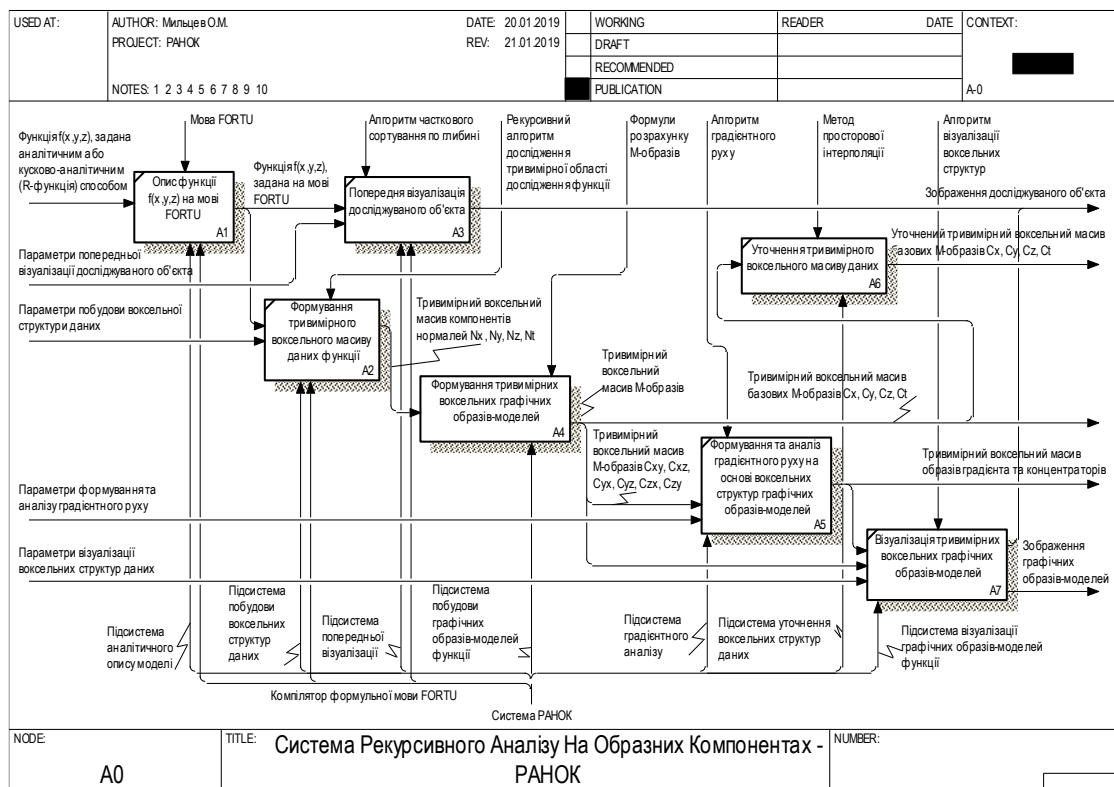


Рис. 2. Декомпозиція контекстної діаграми A0 бізнес-процесу «Система Рекурсивного Аналізу На Образних Компонентах»

Діаграма бізнес-процесу «Формування тривимірних воксельного масиву даних функції» у нотації IDEF0 зображена на рис. 3.

Діаграма бізнес-процесу «Формування тривимірних воксельних графічних образів-моделей» у нотації IDEF0 зображена на рис. 4.

Документування функціональних блоків A4.1, A4.2 та A4.3 зображені на рис. 5-7 у нотації IDEF3. Бізнес-процес A4.4 проходить аналогічно A4.3 (рис. 4, рис.7).

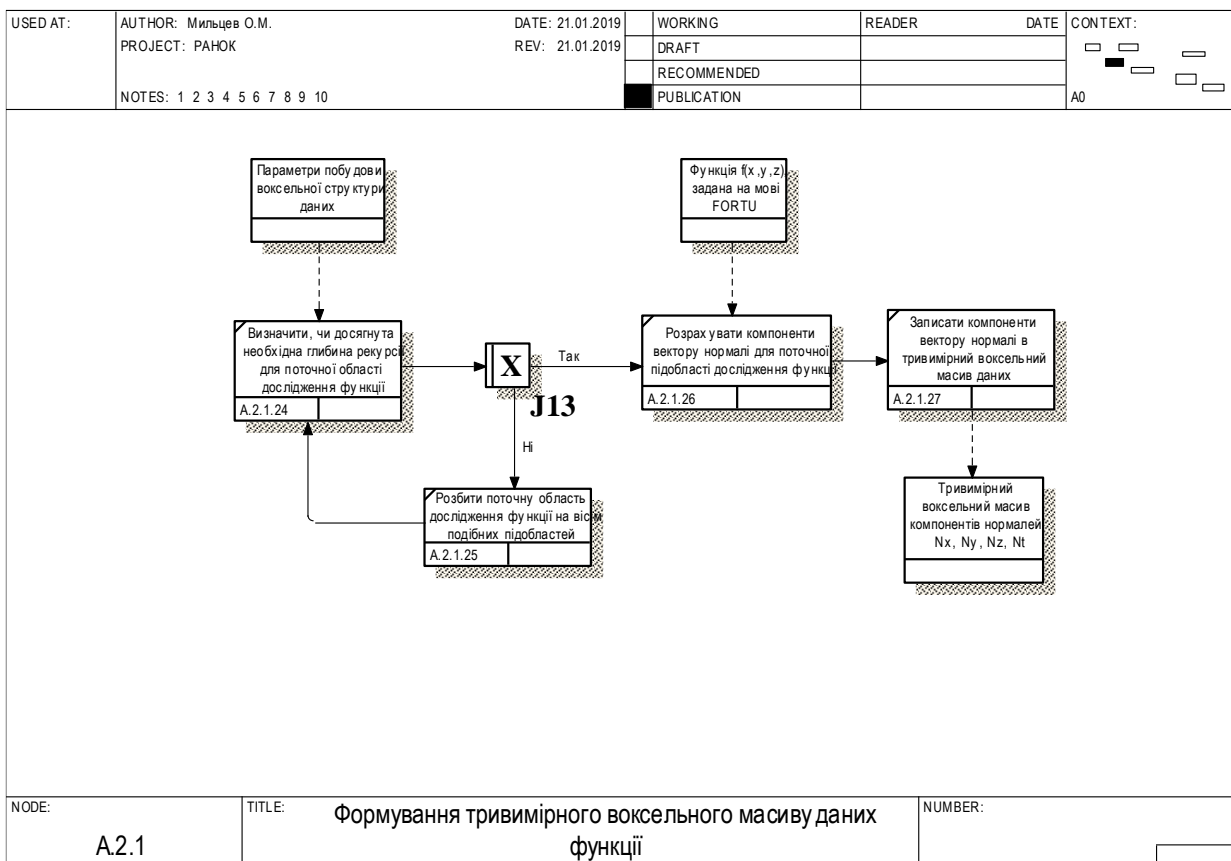


Рис. 3. Діаграма бізнес-процесу «Формування тривимірних воксельного масиву даних функції»

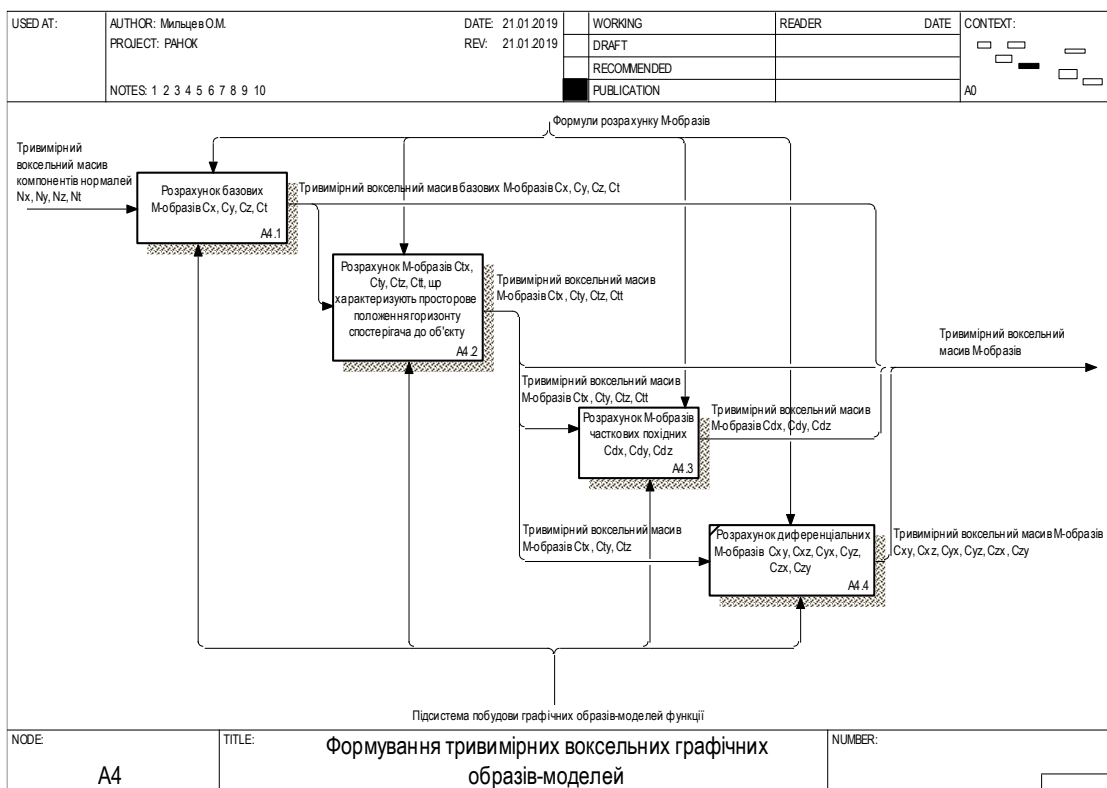


Рис. 4. Діаграма бізнес-процесу «Формування тривимірних воксельних графічних образів-моделей»

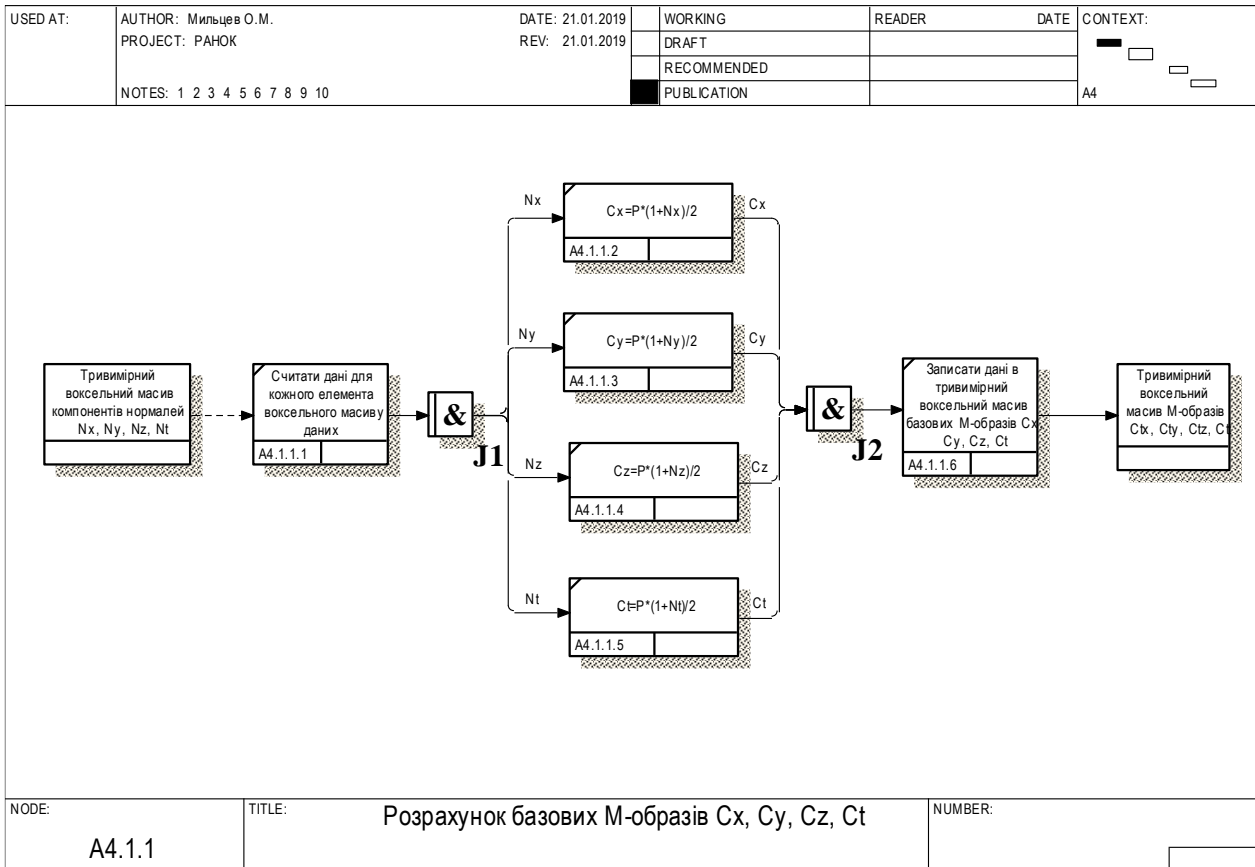


Рис. 5. Діаграма бізнес-процесу «Розрахунок базових М-образів Cx, Cy, Cz, Ct»

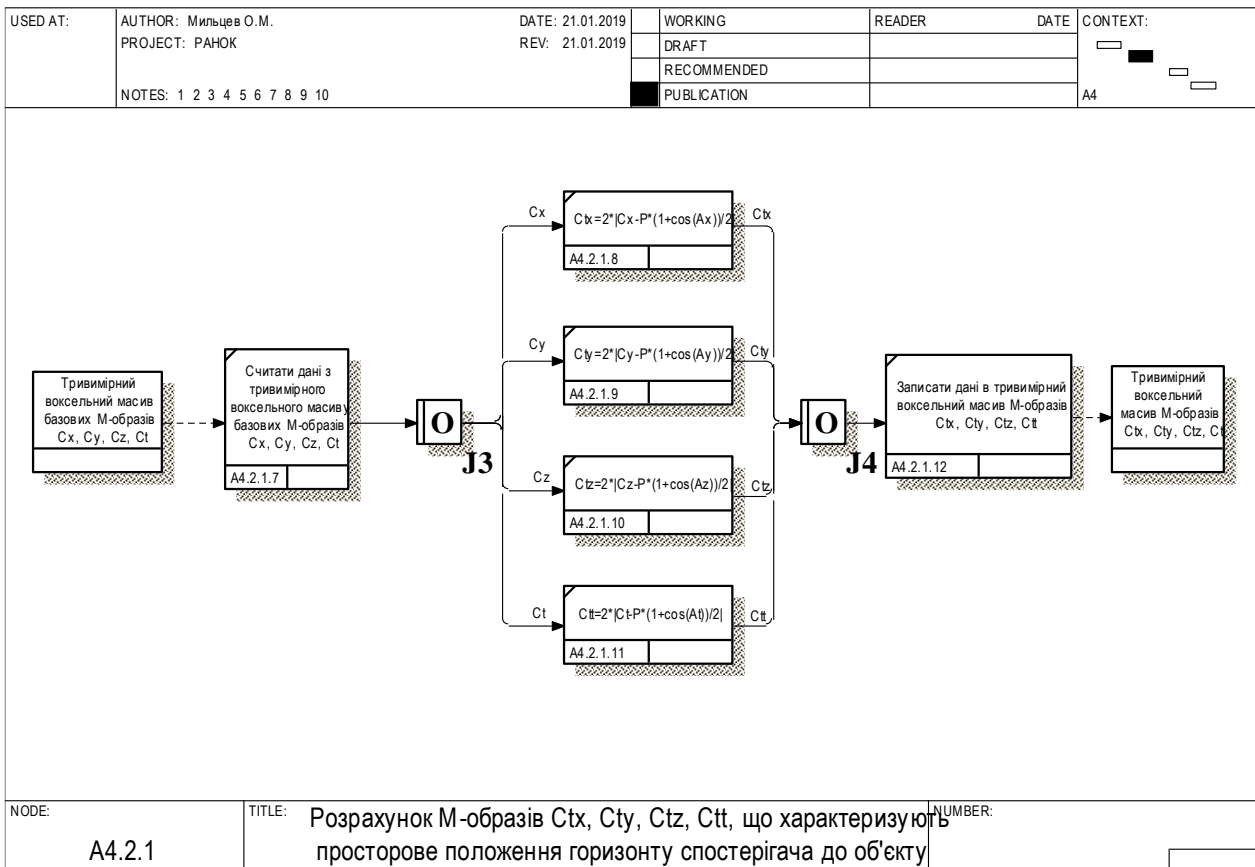


Рис. 6. Діаграма бізнес-процесу «Розрахунок М-образів Ctx, Cty, Ctz, Ctt, що характеризує просторове положення горизонту спостерігача до об'єкта»

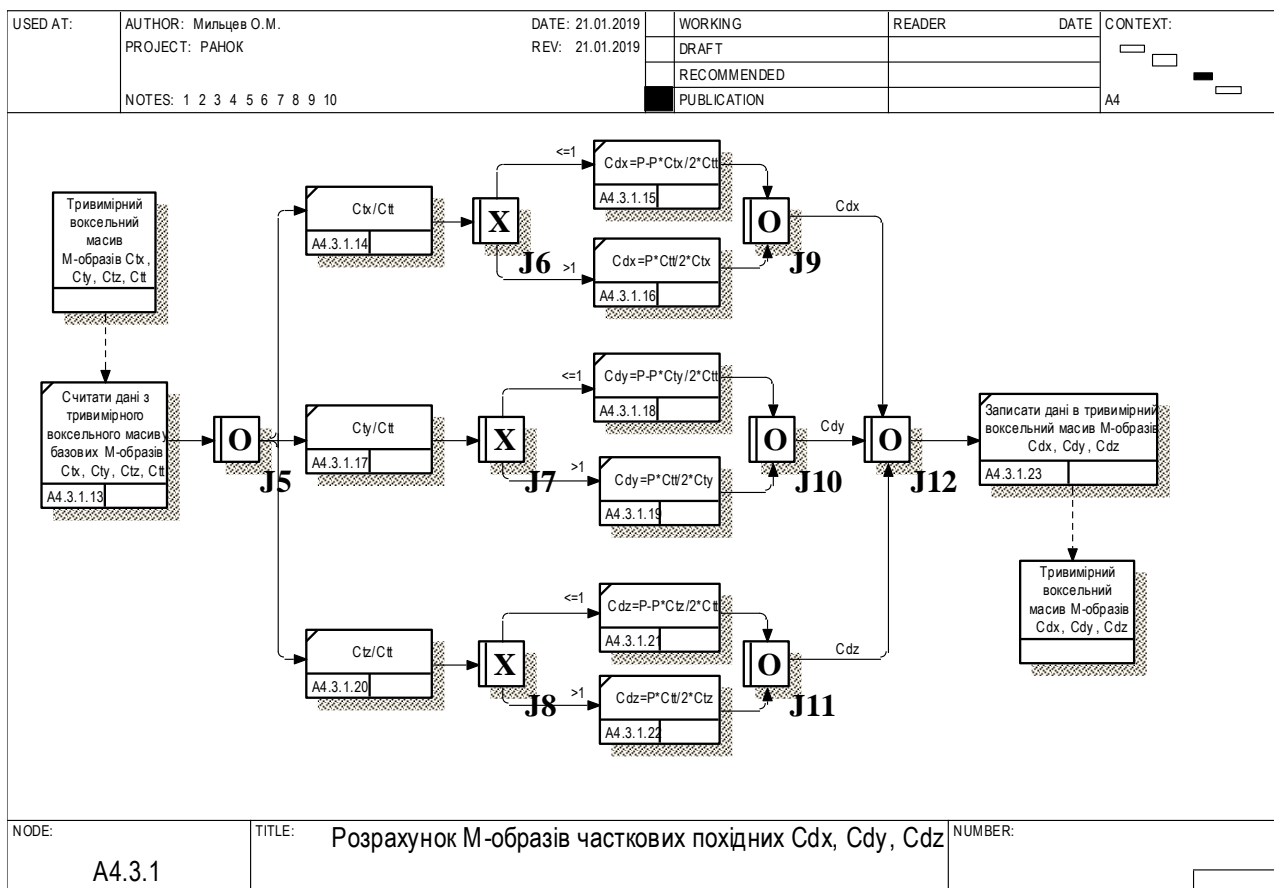


Рис. 7. Діаграма бізнес-процесу «Розрахунок М-образів часткових похідних Cdx, Cdy, Cdz»

Діаграма дерева вузлів перших двох рівнів основного бізнес-процесу «Система Рекурсивного Аналізу На Образних Компонентах» зображена на рис. 8.

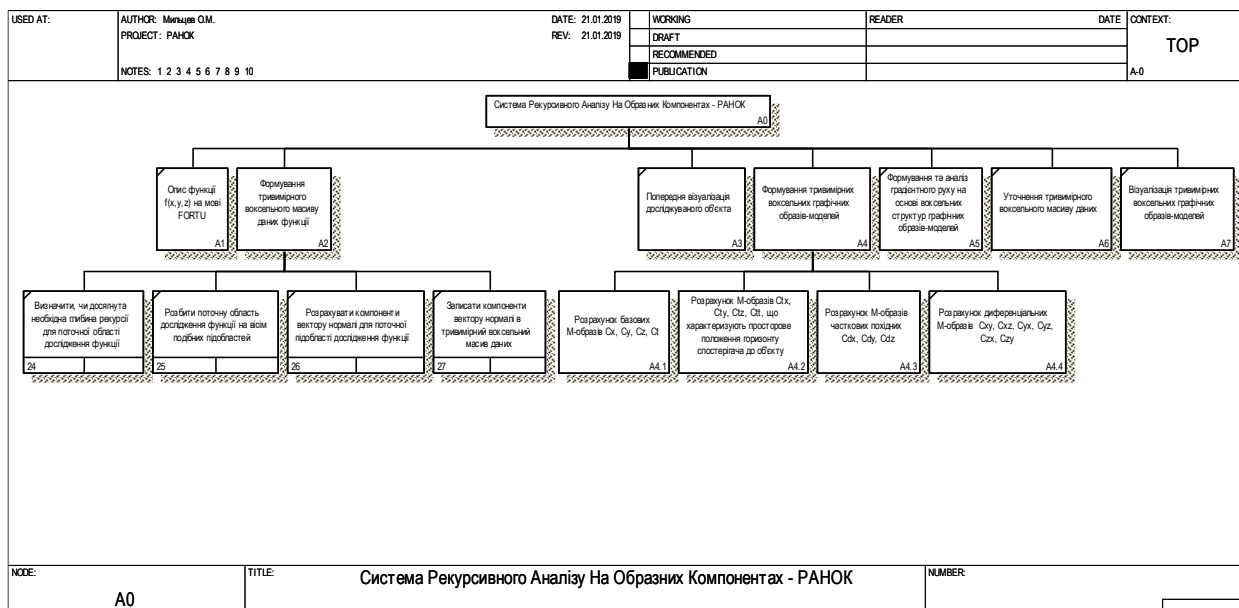


Рис. 8. Діаграма дерева вузлів перших двох рівнів бізнес-процесу «Система Рекурсивного Аналізу На Образних Компонентах»

ВИСНОВКИ

Представлена система побудови графічної інформації дозволяє проводити візуальний аналіз поверхні функції трьох змінних, підвищуючи ефективність аналізу різних обчислювальних та інформаційних програм, заснованих на аналітичному описі.

Загалом отримана воксельна образна модель функції, що складається із 17 М-образів, дозволяє виконувати основні процедури математичного аналізу, такі як:

- визначення часткових похідних за обраними осями;
- зростання або спадання функції на обраному напрямку;
- визначення критичних точок, ліній та областей, локальних екстремумів;
- визначення областей позитивних та негативних значень;
- аналіз просторового градієнта.

ЛІТЕРАТУРА

1. Толлок А. В. Синтез компьютерных образов геометрических характеристик для оценки рельефа поверхности функции двух переменных. *Збірник доповідей НАН України. Математика, природознавство, технічні науки*. 2004. № 4. С. 63–69.
2. Гоменюк С. И., Толлок А. В. Моделирование образной оценки градиента на рельефе поверхности. *Научно-теоретический журнал «Искусственный Интеллект»*. 2004. № 1. С. 113–119.
3. Мыльцев А. М., Толлок А. В. Математическая модель визуализации динамического массива данных при построении трехмерных сцен. *Вісник Запорізького державного університету: зб. наук. статей. Фізико-математичні науки. Біологічні науки*. 2002. № 3. С. 76–82.
4. Рвачев В. Л., Толлок А. В., Уваров Р. А., Шейко Т. И. Новые подходы к построению уравнений трехмерных локусов с помощью R-функций. *Вісник Запорізького державного університету: зб. наук. статей. Фізико-математичні науки*. 2000. № 2. С. 119–131.
5. Толлок А. В., Толлок В. А., Гоменюк С. И. Язык описания схем решения задач теории упругости и пластичности. *Новые информационные технологии в науке, образовании и бизнесе: XXVI Междунар. конф. и дискус. науч. клуб IT+SE'99*. Ялта; Гурзуф, 1999. С. 43–46.
6. Толлок А. В., Мыльцев А. М., Корогод В. Л. Аналитическое моделирование на основе графических преобразований в системе «РАНОК». *Вісник Запорізького національного університету: зб. наук. статей. Фізико-математичні науки*. 2006. № 1. С. 124–133.
7. Корогод В. Л., Мыльцев А. М., Толлок А. В. Математическая модель уточнения трехмерного массива данных методом пространственной интерполяции. *Вісник Запорізького державного університету: зб. наук. статей. Фізико-математичні науки. Біологічні науки*. 2003. № 1. С. 42–48.
8. Морозов Д. Н., Гнездовский А. В., Мыльцев А. М., Толлок А. В. Когнитивная компьютерная графика в процессе решения оптимизационных задач математического моделирования. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2010. Вип. 86. С. 112–117.

REFERENCES

1. Tolok, A. V. (2004). Synthesis of computer images of geometric characteristics for the evaluation of the surface relief of a function of two variables. *Zbirnyk dopovidey NAN Ukrayiny. Matematyka, pryrodoznavstvo, tekhnichni nauky*, No. 4, pp. 63-69.
2. Gomenyuk, S. I. & Tolok, A. V. (2004). Modeling of a figurative gradient estimation on the surface relief. *Nauchno-teoreticheskiy zhurnal «Iskusstvennyy Intellekt»*, No. 1, pp. 113-119.
3. Myl'tsev, A. M. & Tolok, A. V. (2002). Mathematical model of visualization of a dynamic data array when constructing three-dimensional scenes. *Visnyk Zaporiz'koho derzhavnoho universytetu: Zbirnyk naukovykh statey. Fyzyko-matematychni nauky. Biolohichni nauky*, No. 3, pp. 76-82.

4. Rvachev, V. L., Tolok, A. V., Uvarov, R. A. & Sheyko, T. Y. (2000). New approaches to the construction of equations of three-dimensional loci using R-functions. Visnyk Zaporiz'koho Derzhavnoho universytetu: Zbirnyk naukovykh statey. Fyzyko-matematychni nauky, No. 2, pp. 119-131.
5. Tolok, A. V., Tolok, V. A. & Gomenyuk, S. I. (1999). A language for describing schemes for solving problems in the theory of elasticity and plasticity. Proceedings off the XXVI Mezhdunarodnaya konferentsiya i diskussionnyy nauchnyy klub IT+SE'99 "Novyye informatsionnyye tekhnologii v nauke, obrazovanii i biznese", (pp. 43-46). Yalta-Gurzuf.
6. Tolok, A. V., Myl'tsev, A. M. & Korohod, V. L. (2006). Analytical modeling based on graphic transformations in the RANOK system. Visnyk Zaporiz'koho natsional'noho universytetu: Zbirnyk naukovykh statey. Fyzyko-matematychni nauky, No.1, pp. 124-133.
7. Korohod, V. L., Myl'tsev, A. M. & Tolok, A. V. (2003). Mathematical model for refining a three-dimensional data array using spatial interpolation. Visnyk Zaporiz'koho derzhavnoho universytetu: Zbirnyk naukovykh statey. Fyzyko-matematychni nauky. Biolohichni nauky, No. 1, pp. 42-48.
8. Morozov, D. N., Gnezdovskiy, A. V., Myl'tsev, A. M., & Tolok, A. V. (2010). Cognitive computer graphics in the process of solving optimization problems of mathematical modeling. Prikladna geometriya ta inzhenerna grafika, Issue 86, pp. 112-117.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-10

ПРО ОДИН СПОСІБ АНАЛІЗУ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ КОМПОЗИТІВ В ОКОЛІ КУТОВИХ ТОЧОК

Михаїл О. В., Лобода В. В., д. ф.-м. н., професор

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49000, Україна*

loboda@dnu.dp.ua

Запропонована методика визначення степені особливості напружень в околі кутових точок біматеріальних тіл, яка оснований на методі скінченних елементів. Для конкретної області, яка являє собою два спаяні різнорідні прямокутники різної ширини, побудована скінченно-елементна сітка, що має суттєве згущення при підході до кутової точки. Реалізація методу скінченних елементів на такій сітці показує значний ріст напружень в околі кутової точки. Використовуючи відому формулу, що визначає поведінку напружень у вказаній області, а також результати скінченно-елементного аналізу, визначено ступінь особливості напружень, а також коефіцієнт при цій особливості, що може розглядатись як узагальнення коефіцієнту інтенсивності напружень на випадок особливості, відмінної від кореневої. Реалізація методики проведена на прикладах однорідної області та для випадку, коли модулі пружності матеріалів підобластей відрізняються у дев'ять разів. Продемонстровано поведінку нормального та дотичного контактних напружень для обох випадків та проведено їх порівняння.

Розглянута також близька по суті задача, яка виходить, коли нижній прямокутник замінити нескінченною половою, а верхній півполовою. У цьому випадку для розв'язку використано аналітичний метод, що базується на застосуванні інтегральних перетворень Фур'є. У результаті їх використання проблема зводиться до системи сингулярних інтегральних рівнянь на проміжку, що співпадає із зоною контакту, яка включає рухомі та нерухомі особливості в ядрі. Методом механічних квадратур, що базується на використанні многочленів Якобі, побудовано наближений розв'язок цієї системи і на його основі визначено контактні напруження та їх ступінь особливості при підході до кутових точок. Проведено порівняння результатів, отриманих методом скінченних елементів та шляхом аналітичного аналізу і встановлено їх хорошу узгодженість.

Ключові слова: біматеріал, кутова точка, плоска задача, метод скінченних елементів.

ON THE METHOD OF ANALYSIS OF STRESS STATE OF COMPOSITES IN THE VICINITY OF THE CORNER POINTS

Mykhail O. V., Loboda V. V.

*Oles Honchar Dnipro National University,
Gagarin ave., 72, Dnipro, 49000, Ukraine*

loboda@dnu.dp.ua

The methodology of the stresses power singularity determination at the vicinity of angular points of bimaterial bodies, which is based on the finite element approach is proposed. For a specific region, which is composed of two welded heterogeneous rectangle of different widths, a finite-element mesh is constructed that has a significant condensation when approaching an angle point. The implementation of the finite element method on such a grid shows a significant increase in the stresses at the vicinity of the angular point. Using the well-known formula that determines the behavior of stresses in the specified region, as well as the results of finite element analysis, the power of singularity of stresses is determined, as well as the coefficient before this singularity, which can be considered as a generalization of the stress intensity factor for the case of a singularity other than the root one. The implementation of the methodology is carried out on the examples of a homogeneous region, and for the case of the elastic modulus of the sub-areas materials differ nine times. The behavior of normal and tactical contact stresses for both cases is demonstrated and their comparison is demonstrated.

The similar problem that occurs when the lower rectangle is replaced by an infinite strip and the upper one by the half-strip is also considered. In this case, an analytical method based on the application of Fourier integral transformations is used for the solution. As a result of their use, the problem is reduced to a system of singular integral equations over an interval that coincides with the contact area, which includes moving and motionless singularities in the kernel of the equations. With use of the method of mechanical quadratures, which is based on the use of the Jacobi polynomials, an approximate solution of this system is constructed, and on the basis of it the contact stresses and their power of singularities at the corner points are determined. Comparison of the results obtained by the finite element method and by analytical analysis is made and their good agreement is revealed.

Key words: bimaterial, angular point, plane problem, finite element method.

ВСТУП

Дослідження біматеріальних тіл, у зоні стику яких присутні кутові точки, є дуже важливим для практики, тому що кутові точки, зазвичай, є головною причиною руйнування конструкцій. Дослідженню пружно-деформівного стану в околі кутових точок присвячена велика кількість робіт, але піонерською в цьому напрямі є робота [1], у якій досліджено характер сингулярності напружень в околі біматеріального кута. Дуже розповсюдженими є кутові точки, які утворюються на стику двох прямокутників різної ширини або прямокутника чи півполоси з половою. Такі задачі досліджувались чисельно-аналітичним методом у роботах [2, 3, 5]. У цих роботах, як правило, одна із підобластей є нескінченною по одній з координат або напівнескінченною. Якщо ж обидві підобласті, що контактують, є скінченними, то аналітичний аналіз провести практично неможливо і треба використовувати чисельні підходи.

У даній роботі пропонується методика, основана на методі скінченних елементів, за допомогою якої є можливість визначити не тільки польові характеристики напружень, деформацій та переміщень, а і степені особливості напружень та похідних від переміщень в околі кутових точок на стику однакових або різних матеріалів.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Розглядається плоска задача для біматеріального тіла, яке утворене в результаті зчеплення ізотропних прямокутника $|x_1| \leq h$, $0 < x_2 < c$ (верхній) з механічними характеристиками E_1 , ν_1 і прямокутника $|x_1| < d$, $-b < x_2 < 0$ (нижній) з механічними характеристиками E_2 , ν_2 (рис. 1). Сторона $x_2 = -b$ нижнього прямокутника жорстко закріплена, а на сторону $x_2 = c$ верхнього діє рівномірно розподілене розтягувальне напруження інтенсивності P .

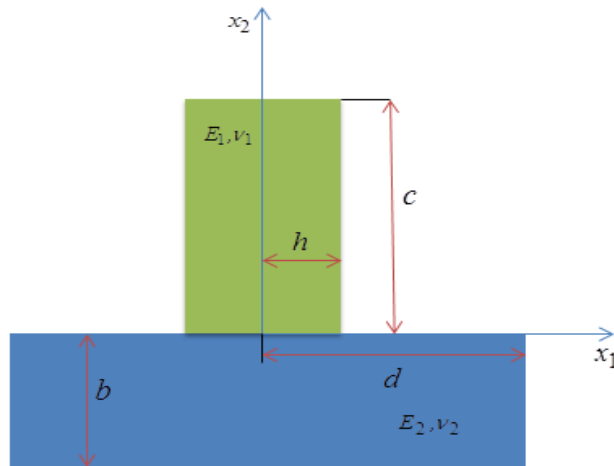


Рис. 1

Розв’язок задачі будувався методом скінченних елементів. Вибирались наступні геометричні характеристики областей: $h = 15$ мм, $c = 20$ мм, $d = 30$ мм, $b = 20$ мм. З урахуванням симетрії відносно осі x_2 , розбиття правої частини біматеріального тіла на скінченні елементи показано на рис. 2.

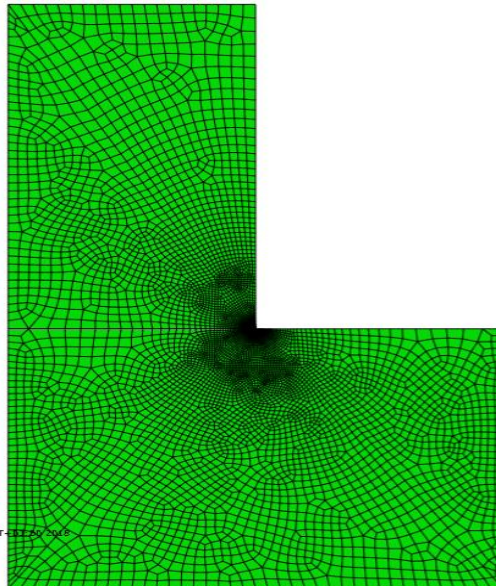


Рис. 2

Багатократне згущення сітки мало місце біля кутової точки, де напруження мають степеневу особливість [1]. Локальні фрагменти сітки в околі кутової точки наведені на рисунках 3 і 4.

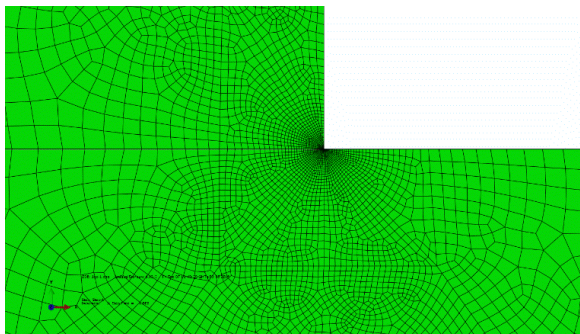


Рис. 3. Перший рівень згущення сітки

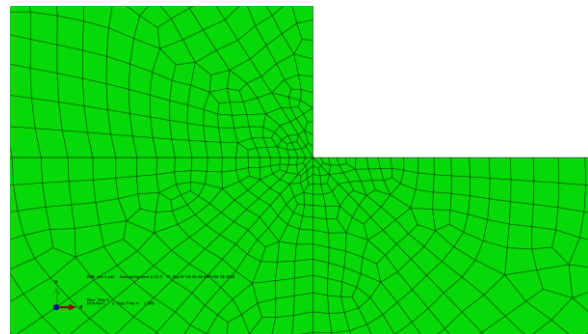


Рис. 4. Безпосередній окіл кутової точки

Для досягнення мети даної роботи характерний розмір скінченного елемента, що прилягає до кутової точки, складав $8,133 \times 10^{-5}$ від максимального розміру області.

Деякі результати розрахунків показані на наступних рисунках. Зокрема, на рисунку 5 показаний розподіл нормального напруження $\sigma_{22}(x_1, 0)$ вздовж правої половини області контакту, а на рисунку 6 – розподіл $\sigma_{12}(x_1, 0)$ вздовж цієї ж частини області контакту (криві I). Ці рисунки побудовані для випадку однакових матеріалів верхнього і нижнього прямокутників з $E_1 = E_2 = 1 \times 10^5$ МПа і $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ при $P = 1000$ Па.

З рисунків 5 і 6 видно, що напруження різко зростають при наближенні до кутової точки. Це не дивно, тому що в даній точці напруження мають степеневу особливість, тобто ведуть себе як

$$\sigma_{11}(0, x_2) \Big|_{x_2 \rightarrow h} \rightarrow \frac{K_1}{(h - x_2)^\alpha}, \quad (1)$$

де K_1 і α – коефіцієнт при особливості та степінь особливості відповідно.

У даній роботі пропонується спосіб визначення степеня цієї особливості і коефіцієнта при ній, який можна розглядати як узагальнення поняття коефіцієнта інтенсивності напружень, який є характерним для сингулярних точок зі степенем особливості 0,5. Для визначення цих величин побудовано графік зміни нормального напруження $\sigma_{22}(x_1, 0)$ в безпосередній близькості до кутової точки, а саме на проміжку (14,557 мм, 14,9952 мм). Цей графік наведено на рис. 7 (крива I). Для порівняння на цьому ж рисунку наведено аналогічний графік для випадку наступних механічних характеристик прямокутників: $E_1 = 1 \times 10^5$ МПа, $E_2 = 9 \times 10^5$ МПа і $\nu_1 = 0,2$, $\nu_2 = 0,3$ (крива II). Навіть із простого порівняння графіків видно, що степінь особливості у випадку однакових матеріалів вища, ніж для випадку більш жорсткого нижнього матеріалу.

$\sigma_{22}(x_1, 0)$

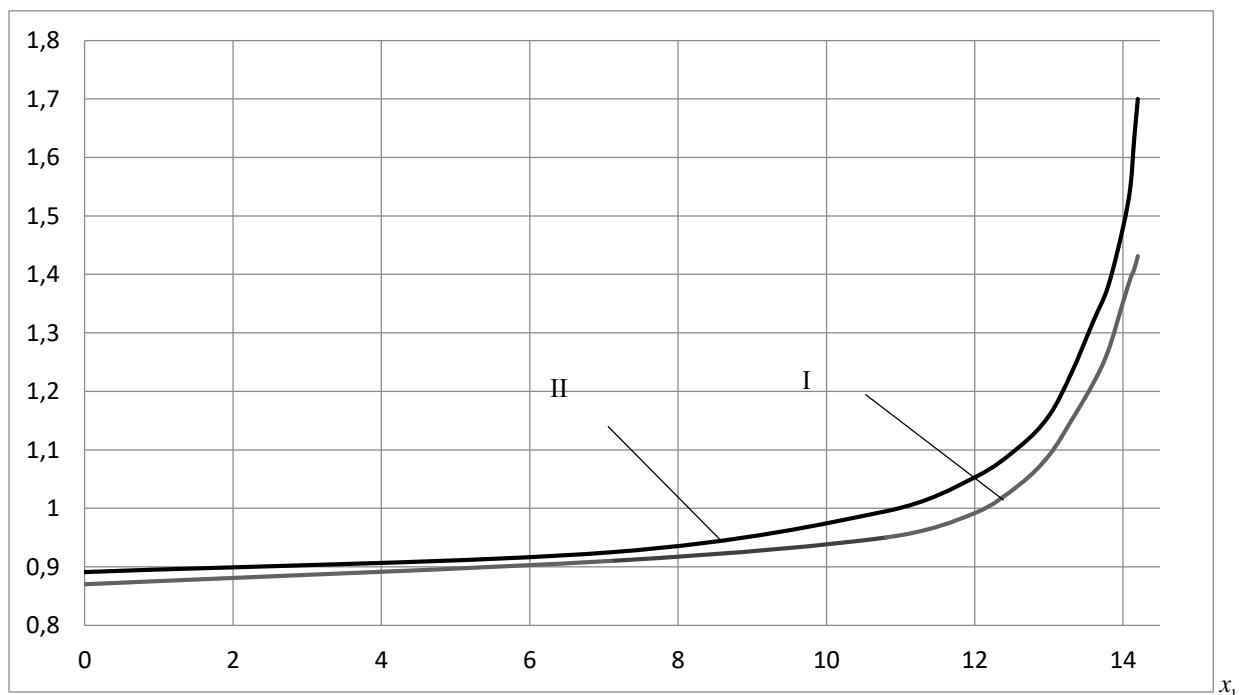


Рис. 5

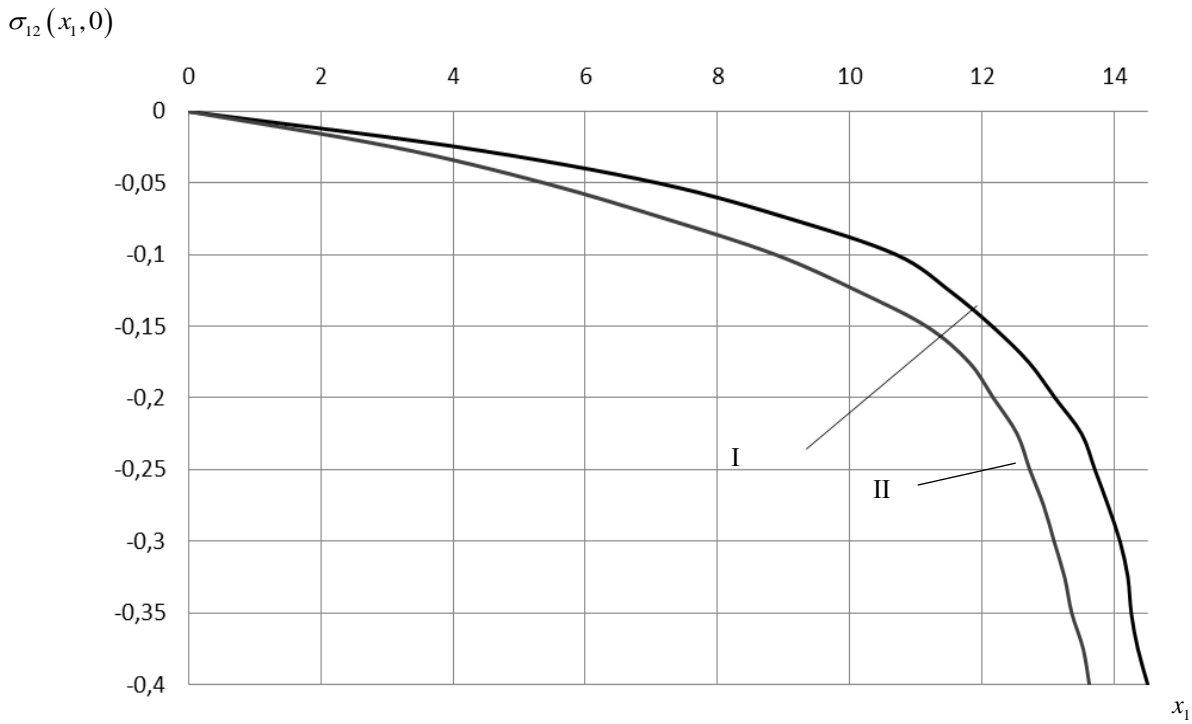


Рис. 6

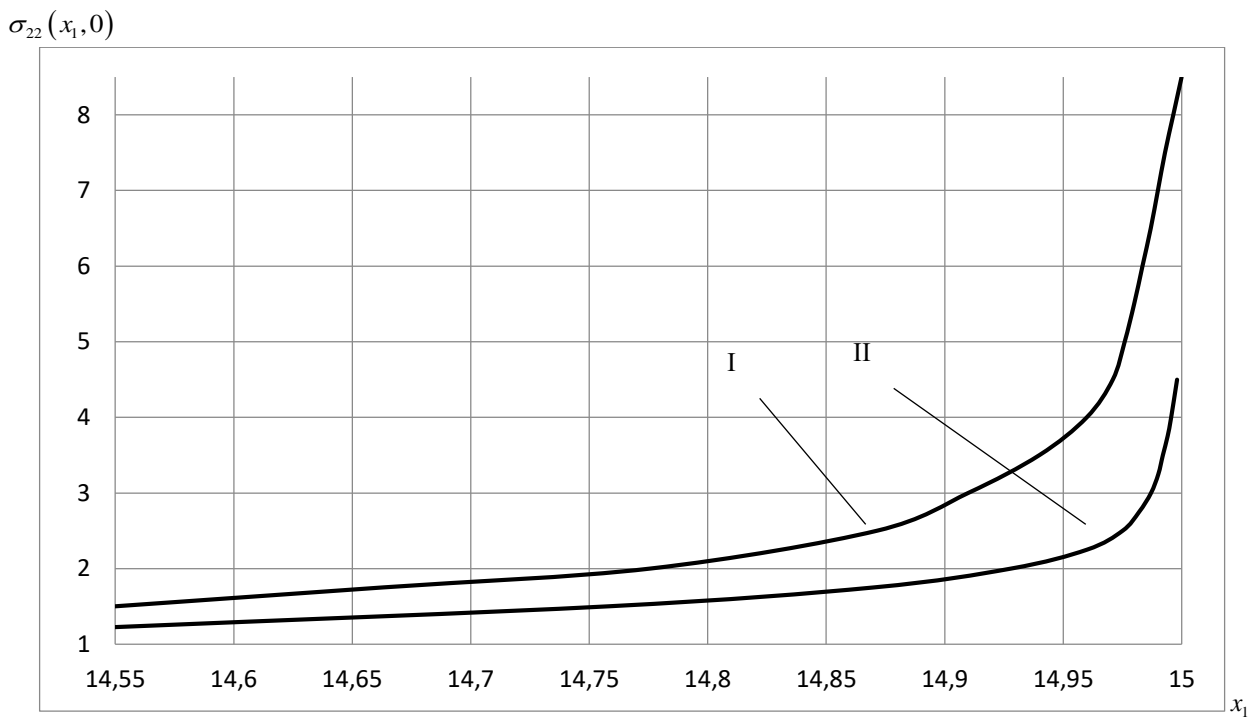


Рис. 7

ЗНАХОДЖЕННЯ СТЕПЕНІ ОСОБЛИВОСТІ НАПРУЖЕНЬ В ОКОЛІ КУТОВИХ ТОЧОК

Конкретно спосіб визначення степені особливості напружень біля кутової точки полягає у наступному. Вибираються дві точки $x_2^{(1)}$ та $x_2^{(2)}$ на деякому віддаленні від кутової точки і обчислюється

$$\sigma_{11}(0, x_2^{(1)}) = S_1, \quad \sigma_{11}(0, x_2^{(2)}) = S_2.$$

Тоді, позначаючи $x_2^{(1)} = r_1$, $x_2^{(2)} = r_2$, із формули (1) маємо

$$S_1 = \frac{K_1}{(h-r_1)^\alpha}, \quad S_2 = \frac{K_1}{(h-r_2)^\alpha}.$$

Або

$$K_1 = S_1 (h-r_1)^\alpha, \quad K_1 = S_2 (h-r_2)^\alpha. \quad (2)$$

Прирівнюючи праві частини останніх рівностей, одержуємо $S_1 (h-r_1)^\alpha = S_2 (h-r_2)^\alpha$. Це співвідношення запишемо у вигляді

$$\left(\frac{h-r_1}{h-r_2} \right)^\alpha = \frac{S_1}{S_2},$$

що після логарифмування дає

$$\alpha \ln \left(\frac{h-r_1}{h-r_2} \right) = \ln \left(\frac{S_1}{S_2} \right).$$

З останнього рівняння одержуємо наступну формулу для визначення степені особливості

$$\alpha = \ln \left(\frac{S_1}{S_2} \right) / \ln \left(\frac{h-r_1}{h-r_2} \right). \quad (3)$$

Коефіцієнт при особливості (коефіцієнт інтенсивності) напружень може бути визначено по одній із формул (2).

Далі наведено деякі результати розрахунку степені особливості та КІН. Зокрема, для вищезгаданого однорідного матеріалу вибирались точки $r_1 = 14,5557$ та $r_2 = 14,5557$ і обчислювались $S_1 = 1599,93$ та $S_2 = 6928,97$. Підставляючи ці значення у формули (3) та (2), отримуємо $\alpha = 0,4487$, $K_1 = 1008,23 \text{ Н/м}^{3/2}$. Аналогічним чином, вибираючи для неоднорідного матеріалу $r_1 = 14,5458$ та $r_2 = 14,9831$ і обчислюючи $S_1 = 1401,87$ та $S_2 = 3701,59$, одержуємо $\alpha = 0,3516$, $K_1 = 1110,69 \text{ Н/м}^{3/2}$.

АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОБЛЕМИ ТА ПОРІВНЯННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ

Розглянемо тепер близьку задачу аналітичним методом.

Використаємо рівняння рівноваги плоскої задачі теорії пружності в переміщеннях

$$\left(\lambda^{(i)} + \mu^{(i)} \right) \frac{\partial \theta^{(i)}}{\partial x_j} + \mu^{(i)} \Delta u_j^{(i)} = 0 \quad (j=1,2), \quad (4)$$

де

$$\theta^{(i)} = \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial x_2}, \quad \lambda^{(i)} = \frac{(1-\nu_i)E_i}{2(1-2\nu_i)(1+\nu_i)}, \quad \mu^{(i)} = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}.$$

Введемо невідомі функції

$$q_1(x_1) = \sigma_{12}^{(1)}(0, x_1) = \sigma_{12}^{(2)}(0, x_1), \quad q_2(0, x_1) = \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1}(0, x_1) = \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1}(0, x_1) \quad (|x_1| \leq h). \quad (5)$$

Застосовуючи метод інтегральних перетворень і вводячи, крім цих невідомих функцій, також функцію

$$q_3(x_1) = \sigma_{22}^{(1)}(0, x_1) = \sigma_{22}^{(2)}(0, x_1) \quad (|x_1| \leq h),$$

знайдемо окремо розв'язки задач для смуги і півсмуги.

Розв'язок рівнянь (5) для смуги ($i = 2$) при граничних умовах (1) та умовах

$$\sigma_{2i}^{(2)}(0, x_1) = \begin{cases} q_{2i-1}(x_1), & |x_1| \leq h; \\ 0, & |x_1| > h \end{cases} \quad (6)$$

отримано шляхом застосування комплексного перетворення Фур'є по координаті x_2 . Необхідні надалі похідні від переміщень мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1}(0, x_1) &= \pi \chi_{21}^0 q_3(x_1) + \chi_{22}^0 \int_{-h}^h \frac{q_1(y)}{y-x_1} dy + \sum_{j=1-h}^2 \int_{-h}^h q_{5-2j}(y) \psi_{2j}^0(x_1, y) dy, \\ \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1}(0, x_1) &= \chi_{11}^0 \int_{-h}^h \frac{q_3(y)}{y-x_1} dy - \pi \chi_{12}^0 q_1(x_1) + \sum_{j=1-h}^2 \int_{-h}^h q_{5-2j}(y) \psi_{1j}^0(x_2, y) dy, \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$\chi_{ii}^0 = \chi_i, \quad \chi_{ij}^0 = \chi_j \quad (j \neq i),$$

$$\chi_1 = 2\chi_3(1-\nu^{(2)}), \quad \chi_2 = \chi_3(1-2\nu^{(2)}), \quad \chi_3 = \frac{1+\nu^{(2)}}{\pi E^{(2)}},$$

$$\psi_{ii}^0(x_2, y) = \chi_i \int_0^\infty (p\gamma_{1p} - 1) \sin p(y-x_2) dp,$$

$$\psi_{21}^0(x_2, y) = -\psi_{12}^0(x_2, y) = \chi_2 \int_0^\infty (p\gamma_{2p} - 1) \cos p(y-x_2) dp,$$

$$\gamma_{1p} = \frac{(2\chi' sh 2p_1 - 4p_1)}{pD_p}, \quad \gamma_{2p} = \frac{\left[\frac{2\chi' ch 2p_1 - 4p_1^2}{(1-2\nu^{(2)})} - 2\chi' \right]}{pD_p},$$

$$D_p = 2\chi' ch 2p_1 + 4p_1^2 + \chi'^2 + 1, \quad \chi' = 3 - 4\nu^{(2)}, \quad p_1 = pb_0.$$

При отриманні співвідношень (7) враховані формули

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h q_{2i-1}(y) dy \int_0^\infty \sin p(y-x_1) dp &= \int_{-h}^h \frac{q_{2i-1}(y)}{y-x_1} dy, \\ \int_{-h}^h q_{2i-1}(y) dy \int_0^\infty \cos p(y-x_1) dp &= \pi q_{2i-1}(x_1), \end{aligned}$$

які витікають з характеристик інтегральних перетворень Фур'є.

Для розв'язання задачі для півсмуги проводиться заміна $\sigma_{22}^{(i)}(0, x_1) = \tilde{\sigma}_{22}^{(i)}(0, x_1) + \sigma_0$. Тоді для додаткового напруженого стану маємо однорідні граничні умови на нескінченності. Застосовуючи для знаходження цього стану інтегральні перетворення Фур'є і методику роботи [2] та повертаючись до основних невідомих, одержуємо вирази для $u_1^{(i)'}(0, x_1)$, $\sigma_{22}^{(i)}(0, x_1)$ у вигляді:

$$u_1^{(i)'}(0, x_1) = \Gamma_1^0(x_1), \quad \sigma_{22}^{(i)}(0, x_1) = -2\mu^{(i)}\Gamma_2^0(x_1), \quad (8)$$

$$2\pi\Gamma_i^0(x_1) = \sum_{j=1}^2 \eta_{ij}^0 \int_{-h}^h \frac{q_j(y)}{x_1 - y} dy + \Omega_i^0(x_1), \quad (9)$$

а η_{ij}^0 і $\Omega_i^0(x_1)$ визначаються формулами

$$\eta_{11}^0 = -\chi e_3, \quad \eta_{12}^0 = -e_2 e_4, \quad \eta_{21}^0 = -e_2 e_3, \quad \eta_{11}^0 = e_4,$$

$$e_1 = 1 - \nu^{(1)}, \quad e_2 = 1 - 2\nu^{(1)}, \quad \chi = 3 - 4\nu^{(1)}, \quad e_3 = -(2\mu^{(1)} e_1)^{-1}, \quad e_4 = \frac{1}{e_1},$$

$$\Omega_i^0(x_1) = \int_{-h}^h [\tilde{M}_1(x_1, y, \beta_i) q_1(y) + \tilde{M}_2(x_1, y, \beta_i) q_2(y)] dy + \tilde{Q}_i. \quad (10)$$

Ядра $\tilde{M}_j(x_1, y, \beta_i)$ ($\beta_1 = \nu^{(1)}$, $\beta_2 = 1$) в даному випадку мають наступний вигляд:

$$\tilde{M}_i(x_1, y, \beta_i) = e_{i+2} \int_0^\infty \Delta_i^{-1} M_i^*(x_1, y, t, \beta) dt,$$

$$M_i^*(x_1, y, t, \beta) = [f_{i1}(y, t, \beta) \chi_3(tx_1) + f_{i2}(y, t, \beta) tx_1 \chi_4(tx_1)] \exp[-(h-y)t]; \quad (11)$$

$$f_{11}(y, t, \beta) = [2e_1 + (h-y)t] [th\chi_3(th) + \chi_4(th)] + [e_2 + (h-y)t] th\chi_4(th) -$$

$$-2\beta \{ [2e_1 + (h-y)t] \chi_4(th) + [e_2 + (h-y)t] \chi_3(th) \},$$

$$f_{12}(y, t, \beta) = -[2(1-\nu^{(1)}) + (h-y)t] \chi_4(th) - [e_2 + (h-y)t] \chi_3(th),$$

$$f_{21}(y, t, \beta) = [th\chi_3(th) + (1-2\beta)\chi_4(th)] t(h-y) - [th\chi_4(th) 2\beta\chi_3(th)] [1-t(h-y)] \chi_3(th),$$

$$f_{22}(y, t, \beta) = [1-t(h-y)] \chi_3(th) - t(h-y) \chi_4(th), \quad (12)$$

$$\Delta_i = 0,5sh(2th) + rth,$$

а $\tilde{Q}_1 = 0$, $\tilde{Q}_2 = \sigma_0$.

Функції $\Delta_i^{-1} M_i^*(x_2, y, t, \beta)$ і $\Delta_i^{-1} Q^*(x_2, t, \beta)$ при $t \rightarrow 0$ мають особливості, характер яких описаний у роботі [3]. Тому застосовуючи для усунення цієї особливості методику роботи [3], отримуємо

$$\Omega_i^0(x_2) = \int_{-h}^h [M_1(x_2, y, \beta_i) q_1(y) + M_2(x_2, y, \beta_i) q_2(y)] dy + \tilde{Q}_i, \quad (13)$$

де

$$M_i(x_1, y, \beta_i) = e_{i+2} \left[\int_0^\infty \Delta_i^{-1} M_i^*(x_1, y, t, \beta) - M_i^{**}(x_1, y, t, \beta) \right] dt, \quad (14)$$

$$M_1^{**}(x_1, y, t, \beta) = \left\{ \begin{array}{l} e_2 \\ \left[2(2\beta\nu^{(1)} - \beta - \nu^{(1)})(1+ty) + ty \right] tx_1 \end{array} \right\}, \quad (15)$$

$$M_1^{**}(x_1, y, t, \beta) = \left\{ \begin{array}{l} 2\beta \\ 2x_1 y \beta t^2 \end{array} \right\}.$$

Із (3), (4) витікає, що у зоні контакту повинні виконуватися умови

$$u_2^{(1)}(0, x_1) = u_2^{(2)}(0, x_1), \quad \sigma_{22}^{(1)}(0, x_1) = q_3(x_1), \quad \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_2}(0, x_1) = q_2(x_1) \quad \text{при } (|x_2| \leq h). \quad (16)$$

Підставляючи співвідношення (7)-(9) у (18), отримуємо наступну систему:

$$\sum_{n=1}^3 \left\{ \int_{-h}^h \left[\frac{a_{mn}}{x_1 - y} + D_{mn}(x_1, y) \right] q_n(y) dy + \pi \theta_{mn}^0 q_n(x_1) \right\} = B_m, \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} |x_1| \leq h, \quad a_{ij} &= \eta_{ij}^0 + 2\pi \delta_i^1 \delta_j^1 \chi_1, \quad a_{33} = 1, \quad a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0, \\ D_{ij}(x_1, y) &= M_j(x_1, y, \beta_i) - 2\pi \delta_i^1 \delta_j^1 \psi_{22}^0(x_1, y), \quad D_{13}(x_1, y) = -2\pi \psi_{21}^0(x_1, y), \quad D_{23}(x_1, y) = 0, \\ D_{31}(x_1, y) &= -\frac{\psi_{12}^0(x_1, y)}{\chi_1}, \quad D_{32}(x_1, y) = 0, \quad D_{33}(x_2, y) = -\frac{\psi_{11}^0(x_1, y)}{\chi_1}, \\ \theta_{13}^0 &= -2\pi \chi_2, \quad \theta_{23}^0 = \frac{1}{\mu^{(1)}}, \quad \theta_{31}^0 = \frac{\chi_2}{\chi_1}, \quad \theta_{32}^0 = \frac{1}{\chi_1}, \quad \theta_{11}^0 = \theta_{12}^0 = \theta_{21}^0 = \theta_{22}^0 = \theta_{33}^0 = 0, \\ B_i &= -\tilde{Q}_i, \quad B_3 = 0, \quad m = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Розв'язок системи (17) розшукується у вигляді

$$q_m(y) = \frac{q_m^*(y)}{(h^2 - y^2)^\alpha}, \quad (18)$$

де $0 \leq \text{Re}(\alpha) < 1$, $q_m^*(\pm h) \neq 0$.

Додаткові умови для цієї системи впливають з характеристик симетрії невідомих функцій, а також умов рівноваги півсмуги і мають вигляд

$$\int_{-h}^h q_m(y) dy = T_m, \quad (19)$$

де $T_1 = T_2 = 0$, $T_3 = 2hP$.

Степінь особливості α знаходиться за методикою [4] і зводиться до розв'язання наступного трансцендентного рівняння [5].

$$\Delta(\alpha_1) \equiv \det[\psi_{pq}(\alpha_1)]_1^3 = 0, \quad (20)$$

де

$$\begin{aligned} \psi_{1i}(\alpha) &= a_{1i} \cos \pi \alpha + d_{1i} \varepsilon_i(\nu^{(1)}), \quad \psi_{2i}(\alpha) = a_{2i} \cos \pi \alpha + d_{2i} \varepsilon_i, \\ \varepsilon_i(\beta) &= \ell_{i1}(\beta) + \alpha \ell_{i2}(\beta) - \alpha(\alpha + 1), \quad \psi_{i3}(\alpha) = \theta_{i3}^0 \sin \pi \alpha, \\ \psi_{3i}(\alpha) &= \theta_{3i}^0 \sin \pi \alpha, \quad \psi_{33}(\alpha) = a_{33} \cos \pi \alpha. \end{aligned}$$

Із цього рівняння, зокрема, витікає, що для $E_1 = E_2 = 1 \times 10^5$ МПа і $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ степінь особливості $\alpha \approx 0,455$, а для $E_1 = 1 \times 10^5$ МПа, $E_2 = 9 \times 10^5$ МПа і $\nu_1 = 0,2$, $\nu_2 = 0,3$ маємо $\alpha \approx 0,366$. Видно, що узгодженість результатів, знайдених за допомогою МКЕ, із вказаними є досить прийнятною.

Розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь (18) при додаткових умовах (19) виконано за допомогою методу механічних квадратур, описаного в [6]. При цьому враховувалась степінь особливості розв'язку α , і в якості точок колокації використовувались нулі відповідних многочленів Якобі. У результаті для того ж однорідного матеріалу і навантаження, що і раніше, отримані розподіли нормального та дотичного напружень вздовж області контакту, які наведені лініями II на рисунках 5 і 6 відповідно. Знайдені також коефіцієнти при особливостях нормального напруження для розглянутих вище однорідного та неоднорідного матеріалів. Вони вийшли рівними $1014,02 \text{ Н/м}^{3/2}$ та $1016,45 \text{ Н/м}^{3/2}$ відповідно. Порівнюючи отримані результати аналітичного та чисельного аналізу, видно їх досить хорошу узгодженість, що підкреслює коректність як аналітичного, так і чисельного підходів, використаних у даній роботі.

ВИСНОВКИ

У даній роботі запропонована методика визначення степені особливості напружень в околі кутових точок на стику однакових або різнорідних матеріалів. Вона основана на використанні методу скінченних елементів і може бути застосована до біматеріальних тіл скінченних розмірів і будь-якої геометричної форми. Особливості методики продемонстровані на прикладі задачі про контакт ізотопних прямокутників різної ширини, один з яких навантажений рівномірно розподіленим напруженням на торці. З використанням методу скінченних елементів знайдено розподіли напружень у зоні контакту і за рахунок суттєвого згущення сітки біля кутової точки знайдено степінь особливості напружень у цій точці. Вважаючи, що прямокутники досить вузькі, і замінюючи їх півполосою і половою, одержано біматеріал, для якого побудовано чисельно-аналітичний розв'язок. Порівняння цього розв'язку з чисельним показало їх хорошу узгодженість, що підтверджує ефективність методик, що застосовуються.

ЛІТЕРАТУРА

1. Bogy D. B. Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions. *Trans. ASME. Ser. E. J Appl. Mech.* 1971. Vol. 38, No. 2. P. 277–386.
2. Loboda V. V., Tauchert T. R. The elastic contact problem for dissimilar orthotropic semi-infinite and infinite strips. *Int. J. Eng. Sci.* 1985. Vol. 23, No. 12. P.1337–1349.
3. Лобода В. В. Об особенностях напряженного состояния ортотропной полуполосы. *ПММ.* 1986. Т. 50, Вып. 2. С. 363–370.
4. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Москва: Наука, 1968. 512 с.
5. Лобода В. В. Решение плоской задачи упругого контакта полосы и полуполосы. *Изв. АН СССР, МТТ.* 1987. № 1. С. 65–74.
6. Лобода В. В. О методах решения СИУ с неподвижными особенностями. *Методы решения граничных задач и обработки данных.* 1989. С. 35–42.

REFERENCES

1. Bogy, D. B. (1971). Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions. *Trans. ASME. Ser. E. J Appl. Mech.*, Vol. 38, No. 2, pp. 277-386.
2. Loboda, V. V. & Tauchert, T. R. (1985). The elastic contact problem for dissimilar orthotropic semi-infinite and infinite strips. *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 23, No. 12, pp. 1337-1349.
3. Loboda, V. V. (1986). On the peculiarities of the stressed state of an orthotropic half-strip. *PMM*, Vol. 50, Issue 2, pp. 363-370.
4. Muskhelishvili, N. I. (1968). *Singular Integral Equations.* Moscow: Nauka.
5. Loboda, V. V. (1987). Solution of the plane problem of elastic contact of a strip and a half-strip. *News of AN USSR, MTT*, No. 1, pp. 65-74.
6. Loboda, V. V. (1989). About methods of solving of SIE with fixed singularities. *Methods for solving boundary problems and data processing*, pp. 35-42.

УДК 531:383-62:50

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-11

МІНІМАКСНЕ КЕРУВАННЯ ГІРОСКОПІЧНИМИ СИСТЕМАМИ

¹Новицький В. В., д. ф.-м. н., професор, ¹Коломійчук О. П., к. ф.-м. н.,
²Святовець І. Ф., к. ф.-м. н.

¹Інститут математики НАН України,
 вул. Терещенківська, Київ-4, 301601, Україна

²Запорізька державна інженерна академія,
 пр. Соборний, 226, м. Запоріжжя, 69006, Україна

novyc@imath.kiev.ua, kolomithyk@rambler.ru, sv.irina0702@gmail.com

При вирішенні практичних задач механіки, гіроскопії і навігації традиційно застосовуються моделі майже консервативних систем, зокрема керованих, характеристики яких можна суттєво поліпшити за допомогою методів оптимального керування. Використовуючи специфіку матриці коефіцієнтів у рівняннях майже консервативних систем і наявність малого параметра при матриці збурень, процес вирішення задач оптимального керування можна значно спростити.

У статті досліджується задача мінімаксного керування для лінійної стаціонарної динамічної майже консервативної системи (консервативної системи зі слабо збуреною матрицею коефіцієнтів), на яку діє невідоме збурення з обмеженою енергією.

Формулюється необхідна умова існування розв'язку рівняння Ріккати відповідного вигляду, та знаходиться умова для оцінки параметра, що входить у рівняння Ріккати.

Використовується один з ефективних підходів до знаходження розв'язку рівняння Ріккати для майже консервативних систем. А саме: матриця-розв'язок рівняння Ріккати представляється у вигляді розкладу в ряд за малим параметром, і невідомі складові цієї матриці визначаються з нескінченної системи матричних рівнянь.

Наводиться приклад застосування запропонованих алгоритмів до моделі двох зв'язаних керованих осциляторів.

У прикладному плані представлені в статті дослідження є ефективними для розробки стійких до збурень гіроскопічних і навігаційних систем.

Ключові слова: майже консервативна система, мінімаксне керування, рівняння Ріккати.

MINIMAX CONTROL OF GYROSCOPIC SYSTEMS

¹Novitsky V. V., ¹Kolomiychuk O. P., ²Svyatovets I. F.

¹Institute of Mathematics of NAS of Ukraine,
 Tereschenkivska str., Kiev-4, 301601, Ukraine

²Zaporizhzhya State Engineering Academy,
 Soborny ave., 226, Zaporizhzhya, 69006, Ukraine

novyc@imath.kiev.ua, kolomithyk@rambler.ru, sv.irina0702@gmail.com

In solving practical problems of mechanics, gyroscopy and navigation, models of almost conservative systems, in particular, controlled, whose characteristics can be substantially improved by means of optimal control, are traditionally used. Using the specificity of the matrix of coefficients in the equations of almost conservative systems and the presence of a small parameter in the perturbation matrix, the process of solving optimal control problems can be greatly simplified.

The article deals with the problem of the minimax control for a linear stationary dynamic almost conservative system (a conservative system with a weakly perturbed matrix of coefficients), on which there is an unknown perturbation with limited energy.

The necessary condition for the existence of a solution of the Riccati equation of the corresponding form is formulated, and a condition for evaluating the parameter included in the Riccati equation is found.

One of the effective approaches to finding a solution to the Riccati equation for almost conservative systems is used. Namely, the matrix-solution of the Riccati equation is represented in the form of a decomposition in series for a small parameter, and the unknown components of this matrix are determined from an infinite system of matrix equations.

An example of the application of the proposed algorithms to the model of two connected controlled oscillators is presented.

In terms of application the research papers presented in this article are effective for the development of gyroscopic and navigational systems resistant to perturbation.

Key words: almost conservative system, minimax control, Riccati equation.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА УМОВА ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ

Нехай на керовану лінійну стаціонарну майже консервативну систему [1, 2] діє невідоме збурення $f(t)$ з обмеженою енергією. Модель матиме вигляд

$$\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x + \varepsilon B u + \varepsilon \Psi f, \quad (1)$$

де $x = [x_1, \dots, x_{2n}]^T$ $2n$ -вимірний вектор стану, $u = [u_1, \dots, u_m]^T$ – m -вимірний вектор керувань, ε – малий параметр; $A_0, A_1 \in \mathfrak{R}_{2n \times 2n}$, причому $A_0 = -A_0^T$ и $\det(A_0) \neq 0$, $B \in \mathfrak{R}_{2n \times m}$ – матриця при керуванні, $\Psi \in \mathfrak{R}_{2n \times k}$ – матриця при збуренні.

Проблема мінімакного керування [3–5] полягає в тому, щоб знайти керування $u(t)$, яке мінімізує функціонал

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T u - \gamma^2 f^T f) dt \quad (2)$$

і збурення $f(t)$, що його максимізує.

У функціоналі (2) γ – задане число, $Q > 0$ – додатно визначена матриця.

Бажане оптимальне керування шукатимемо у вигляді

$$u = -\varepsilon B^T S x, \quad (3)$$

а найгірше збурення

$$f = K_f x, \quad K_f = \varepsilon \gamma^{-2} \Psi^T S. \quad (4)$$

Тут S – додатно визначена матриця-розв'язок матричного рівняння Ріккати наступного вигляду

$$S(A_0 + \varepsilon A_1) + (A_0 + \varepsilon A_1)^T S - \varepsilon^2 S B B^T + \gamma^{-2} \varepsilon^2 S \Psi \Psi^T S + Q = 0. \quad (5)$$

Якщо покласти

$$P = \varepsilon S, \quad (6)$$

матричне рівняння (5) перепишеться у такий спосіб

$$P(A_0 + \varepsilon A_1) + (A_0 + \varepsilon A_1)^T P - \varepsilon P B B^T P + \gamma^{-2} \varepsilon P \Psi \Psi^T P + \varepsilon Q = 0. \quad (7)$$

Відзначимо, що не для всіх значень γ існує додатно визначена матриця P , яка є розв'язком рівняння Ріккати (7). Відомо [3], що існує мінімальне значення $\gamma = \gamma_{\min}$ таке, що для всіх значень $\gamma \in [\gamma_{\min}, \infty)$ матриця P додатно визначена, а при $\gamma < \gamma_{\min}$ матриця P знакозмінна.

Перепишемо рівняння (7) у зручному для подальшого дослідження вигляді

$$P(A_0 + \varepsilon A_1) + (A_0 + \varepsilon A_1)^T P - \varepsilon P (B B^T - \gamma^{-2} \Psi \Psi^T) P + \varepsilon Q = 0. \quad (8)$$

Виходячи з формулювання задачі мінімакного керування, зрозуміло, що керування $u(t)$ повинно діяти на систему по тих же $m \leq n$ каналах, що і збурення $f(t)$. Інакше кажучи, ненульові елементи матриці $\Psi \in \mathfrak{R}_{2n \times k}$ можуть розташовуватися тільки в тих рядках, у яких знаходяться ненульові елементи матриці $B \in \mathfrak{R}_{2n \times m}$, яка має максимальний ранг m . З цього, очевидно, випливає така умова

$$2n \geq m = \text{rang}(B) \geq \text{rang}(\Psi). \quad (9)$$

Відомо [8–11], що $\text{rang}(AA^T) = \text{rang}(A)$. Тоді умова (9) може бути записана у вигляді

$$2n \geq m = \text{rang}(BB^T) \geq \text{rang}(\Psi\Psi^T). \quad (10)$$

Оцінимо параметр γ . Припустимо, що

$$BB^T - \gamma^{-2}\Psi\Psi^T \quad (11)$$

з (8) є невід'ємно визначеною матрицею рангу m .

Знайдемо конструктивні умови для оцінки параметра γ , що входить у рівняння Ріккати (8).

З викладеного вище випливає, що

$$N = BB^T - \gamma^{-2}\Psi\Psi^T = B(I_m - \gamma^{-2}HH^T)B^T. \quad (12)$$

Матриця N матиме максимальний ранг m тоді та тільки тоді, коли буде невинродженою матриця

$$M = I_m - \gamma^{-2}HH^T. \quad (13)$$

Для існування додатно визначеного розв'язку $P > 0$ рівняння Ріккати (8) M повинна бути теж додатно визначеною, що буде тоді і тільки тоді, коли виконано умову [9]

$$|\gamma| \geq \sqrt{\lambda_{\max}(HH^T)}. \quad (14)$$

ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ РІККАТІ ДЛЯ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ

Для розв'язання рівняння (8) застосуємо викладений у роботі [6–7] підхід, який був запропонований для розв'язання задачі оптимального керування майже консервативними системами з малим параметром. А саме, шукатимемо матрицю-розв'язок P у вигляді розкладу за малим параметром

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_i. \quad (15)$$

У такому ж вигляді представимо і матрицю Q

$$Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_i. \quad (16)$$

Підставивши (15) і (16) в (8), одержуємо

$$\begin{aligned} & (P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots) \cdot (A_0 + \varepsilon A_1) + (A_0 + \varepsilon A_1)^T \cdot (P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots) - \\ & - \varepsilon \cdot (P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots) \cdot (BB^T - \gamma^{-2}\Psi\Psi^T) \cdot (P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots) + \\ & + \varepsilon \cdot (Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \dots) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε , отримаємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь типу Ріккати

$$A_0 P_0 - P_0 A_0 = 0, \quad (18)$$

$$A_0 P_i - P_i A_0 = P_{i-1} A_1 + A_1^T P_{i-1} - \sum_{k=0}^{i-1} P_k \cdot (BB^T - \gamma^{-2}\Psi\Psi^T) \cdot P_{i-1-k} + Q_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Для знаходження бажаного наближення матриці-розв'язку P потрібно послідовно розв'язати відповідну кількість рівнянь даної системи.

ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ НАВЕДЕНОГО ВИЩЕ ПІДХОДУ

Розглянемо систему четвертого порядку, яка відповідає моделі двох зв'язаних керованих осциляторів з матрицями

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = 0,$$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} q_{01} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{02} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{03} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{04} \end{bmatrix}, \quad Q_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

$\omega_1, \omega_2 > 0$, $\omega_1 \neq \omega_2$, $q_{01}, q_{02}, q_{03}, q_{04} > 0$. Оберемо матрицю Ψ при збуренні у вигляді, що задовольняє умовам існування розв'язку рівняння. Нехай

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Оцінімо параметр γ . Для цього обчислимо матрицю (11)

$$BB^T - \gamma^{-2}\Psi\Psi^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{\gamma^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Для невід'ємної визначеності цієї матриці необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова $\gamma^2 \geq 1$. Але, враховуючи умову рівності рангів матриць BB^T і $BB^T - \gamma^{-2}\Psi\Psi^T$, остаточно отримаємо $\gamma^2 > 1$, або $|\gamma| > 1$. Будемо шукати матрицю – розв'язок P з точністю до першого порядку мализни за ε , тобто у вигляді $P = P_0 + \varepsilon P_1$.

Після розв'язання рівняння (18) отримаємо загальний вигляд матриці P_0 , а саме –

$$P_0 = \begin{bmatrix} p_{11}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{22}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{11}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{22}^0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

При розв'язанні першого рівняння із системи (19) знайдемо значення

$$p_{11}^0 = \sqrt{\frac{\gamma^2(q_{01} + q_{03})}{\gamma^2 - 1}}, \quad p_{22}^0 = \sqrt{q_{02} + q_{04}} \quad (24)$$

та загальний вигляд матриці P_1 , а саме –

$$P_1 = \begin{bmatrix} p_{11}^1 & 0 & \frac{q_{01}}{2\omega_1} & 0 \\ 0 & p_{22}^1 & 0 & \frac{q_{02}}{2\omega_2} \\ \frac{q_{01}}{2\omega_1} & 0 & p_{11}^1 & 0 \\ 0 & \frac{q_{02}}{2\omega_2} & 0 & p_{22}^1 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

З другого рівняння (19) знайдемо значення

$$p_{11}^1 = 0, \quad p_{22}^1 = 0. \quad (26)$$

Остаточно, з точністю до першого наближення, матриця-розв'язок P матиме наступний вигляд

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\gamma^2(q_{01} + q_{03})}{\gamma^2 - 1}} & 0 & \varepsilon \frac{q_{01}}{2\omega_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{q_{02} + q_{04}} & 0 & \varepsilon \frac{q_{02}}{2\omega_2} \\ \varepsilon \frac{q_{01}}{2\omega_1} & 0 & \sqrt{\frac{\gamma^2(q_{01} + q_{03})}{\gamma^2 - 1}} & 0 \\ 0 & \varepsilon \frac{q_{02}}{2\omega_2} & 0 & \sqrt{q_{02} + q_{04}} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Тоді

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\gamma^2(q_{01} + q_{03})}{\gamma^2 - 1}} & 0 & \frac{q_{01}}{2\omega_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{q_{02} + q_{04}} & 0 & \frac{q_{02}}{2\omega_2} \\ \frac{q_{01}}{2\omega_1} & 0 & \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\gamma^2(q_{01} + q_{03})}{\gamma^2 - 1}} & 0 \\ 0 & \frac{q_{02}}{2\omega_2} & 0 & \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{q_{02} + q_{04}} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Шукане керування матиме вигляд

$$u = \begin{bmatrix} -\varepsilon \frac{q_{01}}{2\omega_1} x_1 - \sqrt{\frac{\gamma^2(q_{01} + q_{03})}{\gamma^2 - 1}} x_3 \\ -\varepsilon \frac{q_{02}}{2\omega_2} x_2 - \sqrt{q_{02} + q_{04}} x_4 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

а найгірше збурення

$$f = \left[\frac{\varepsilon q_{01}}{2\gamma^2 \omega_1} x_1 + \sqrt{\frac{q_{01} + q_{03}}{\gamma^2(\gamma^2 - 1)}} x_3 \right]. \quad (30)$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Новицький В. В. Керування гіроскопічними системами та інші задачі аналітичної механіки. *Математика та її застосування: праці Інституту математики НАН України*. 2008. Т. 78. 124 с.
2. Новицький В. В. Рівняння Ляпунова для майже консервативних систем. Київ: Інститут математики НАН України, 2004. 33 с. (Препринт / НАН України, Ін-т математики; 2004-7).
3. Александров А. Г. Методы построения систем автоматического управления. Москва: Физматлит, 2008. 232 с.
4. Бiryukov P. S. Минимаксное управление линейным объектом при внешнем возмущении и неопределенных начальных условиях на конечном временном интервале. *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского*. 2013. № 3(1). С. 206–211.
5. Игнащенко Е. Ю., Панков А. Р., Семенихин К. В. Минимакс-статистический подход к оптимизации линейных моделей в условиях априорной неопределенности. *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2010, № 5. С. 32–40.
6. Новицкий В. В., Хуан Чень Оптимальное управление почти консервативными системами. *Сучасні проблеми аналітичної механіки: зб. праць Ін-ту математики НАН України*. 2004. Т. 1, № 2. С. 152–157.
7. Зінчук М. О., Новицький В. В. Оптимальне керування неперервними майже консервативними системами. *Проблеми аналітичної механіки: зб. праць Ін-ту математики НАН України*. 2006. Т. 3, № 1. С. 75–89.
8. Стренг Г. Линейная алгебра и её применения. Москва: Мир, 1980. 456 с.
9. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. Москва: Мир, 1989. 656 с.
10. Ланкастер П. Теория матриц. Москва: Наука, 1978. 280 с.
11. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Москва: Наука, 1988. 552 с.

REFERENCES

1. Novitskiy, V. V. (2008). Control of gyroscopic systems and other analytical mechanics problems. *Matematika ta yiyi zastosuvannya: pratsi Institutu matematyky NAN Ukrainy*, Vol. 78, 124 p.
2. Novitskiy, V. V. (2004). Lyapunov equation for almost conservative systems. Kiev: Institut matematyky, 33 p. (Preprint. NAN Ukrainy, Institut matematyky; 2004.7).
3. Aleksandrov, A. G. (2008). Methods of construction of automatic control systems. Moscow: Fizmatlit.
4. Biryukov, R. S. (2013). Minimax control of linear object in the external disturbance and undefined initial conditions on a finite time interval. *Matematicheskoe modelirovanie. Optimalnoe upravlenie. Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I.Lobachevskogo*, Vol. 3, No. 1, pp. 206-211.
5. Ignashshenko, E. YU., Pankov, A. R. & Semenixin, K. V. (2010). Minimax-statistical approach to optimizing linear models under the conditions of a priori uncertainty. *Izvestiya RAN. Teoriya I sistemy upravleniya*, Vol. 5, pp. 32-40.
6. Novitskiy, V. V. & Khuan Chen (2004). Optimal control almost conservative systems. *Suchasni problemy analitychnoyi mekhaniky: zbirnyk prats Institutu matematyky NAN Ukrainy*, Vol. 1, No. 2, pp. 152-157.
7. Zinchuk, M. O. & Novitskiy, V. V. (2006). Optimal control of continuous almost conservative systems. *Problemy analitychnoyi mekhaniky: zbirnyk prats Institutu matematyky NAN Ukrainy*, Vol. 3, No. 1, pp. 75-89.
8. Streng, G. (1980). Linear algebra and its application. Moscow: Mir.
9. Khorn, R. & Dzhonson, Ch. (1989). Matrix Analysis. Moscow: Mir.
10. Lankaster, P. (1978). Matrix theory. Moscow: Nauka.
11. Gantmaxer, F. R. (1988). Matrix theory. Moscow: Nauka.

УДК 534.1:539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-12

ПРО РУХ НЕЛІНІЙНОГО ОСЦИЛЯТОРА ПРИ ДІЇ МИТТЄВО ПРІКЛАДЕНОЇ СИЛИ

Ольшанський В. П., д. ф.-м. н., професор, Ольшанський С. В., к. ф.-м. н.

*Харківський національний технічний університет сільського господарства
імені Петра Василенка,
вул. Артема, 44, м. Харків, 61000, Україна*

stasolsh@gmail.com

Розглянуто три варіанти нелінійних коливань осцилятора, спричинених миттєво прикладеною до нього сталою силою. Вони відповідають різним значенням коефіцієнтів у виразі силової характеристики. Побудовано в елементарних функціях точні аналітичні розв'язки нелінійної задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку. Встановлено гарну відповідність результатів, до яких призводять ці розв'язки, з результатами числового інтегрування рівняння руху на комп'ютері. Виведено формули для обчислення періодів коливань при різних варіантах руху. Показано, що з одержаних формул, як окремі випадки, впливають відомі аналітичні розв'язки лінійної задачі. Одержано вирази коефіцієнта динамічності і встановлено, що він не дорівнює двом, а його значення залежить не лише від характеристик жорсткості осцилятора, а й від величини прикладеної сили.

Ключові слова: нелінійний осцилятор, миттєво прикладена сила, період коливань, коефіцієнт динамічності.

ON THE MOVEMENT OF A NON-LINEAR OSCILLATOR UNDER THE ACTION OF THE MOMENTALLY APPLIED FORCE

Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V.

*Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture,
Artyoma str., 44, Kharkiv, 61002, Ukraine*

stasolsh@gmail.com

Three variants of nonlinear oscillations of the oscillator caused by a constant force applied to it at once are considered. They correspond to different values of the coefficients in the expression of the power characteristic. In the elementary functions, exact analytic solutions of the nonlinear Cauchy problem for a second-order differential equation are constructed. A good correspondence of the results, to which these solutions lead with the results of numerical integration of the equation of motion on a computer, is established. Formulas are derived for calculating the periods of oscillations for different variants of motion. It is shown that, as special cases, the known formulas give rise to well-known analytic solutions of the linear problem. The expression for the dynamic coefficient is obtained and it is established that it is not equal to two, and its values depend not only on the stiffness characteristics of the oscillator, but on the magnitude of the applied force.

Key words: nonlinear oscillator, instantaneous applied force, oscillation period, dynamic coefficient.

ВСТУП

Вивченню закономірностей нелінійних механічних коливань приділялась і продовжує приділятися значна увага. Не виділяючи окремих наукових статей, відзначимо лише монографічні видання останніх років [1-4], у яких є огляди відповідних літературних джерел. Історія розвитку теорії нелінійних механічних коливань висвітлена в [5]. Підкреслимо, що серед відомих публікацій порівняно мало робіт присвячено динаміці нелінійних коливальних систем при дії силових імпульсних навантажень. Із робіт цього напрямку вкажемо на [6, 7], де аналітичні розв'язки нелінійних задач одержано в Атеб та періодичних еліптичних функціях Якобі. На відміну від них тут розглядаємо окремий особливий варіант нелінійної силової характеристики системи, для якої вдається побудувати точні аналітичні розв'язки в елементарних функціях, що спрощує їх аналіз. Саме такі розв'язки дають можливість досить

просто дослідити особливості руху нелінійної коливальної системи в умовах силового імпульсивного навантаження.

Метою роботи є виведення та апробація розрахунками нових формул для обчислення переміщень нелінійного осцилятора та періодів його коливань у русі, спричиненому миттєво прикладеною силою. Визначенню також підлягають коефіцієнти динамічності, які залежать не тільки від власних параметрів осцилятора, а також і від величини прикладеної сили.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ЇЇ РОЗВ'ЯЗКИ

Переміщення $x(t)$ системи з одним ступенем вільності описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + c_1x + c_2\sqrt{|x|}\text{sign}(x) = P_1H(t), \quad (1)$$

у якому m – маса осцилятора; c_1 , c_2 – характеристики його жорсткості; P_1 – величина миттєво прикладеної сили; $H(t)$ – одинична функція Хевісайда; t – час; крапка означає похідну по t .

Рівняння (1) доповнюємо нульовими початковими умовами:

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

Увівши позначення $\alpha = c_1/m$; $\beta = c_2/m$; $P = P_1/m$, рівнянню (1), при $t > 0$, $x > 0$, надаємо вигляд:

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = P - \alpha - \beta\sqrt{x}. \quad (3)$$

Проінтегрувавши (3), з урахуванням (2), отримуємо:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{2} \sqrt{Px - \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{2\beta}{3}x^{3/2}}. \quad (4)$$

Далі будемо розрізняти три варіанти силової характеристики.

1. Розглянемо спочатку перший із них, коли $\alpha > 0$ і $\beta > 0$. У цьому випадку інтегрування рівняння (4), з урахуванням (2), дає співвідношення:

$$\int_0^x \frac{du}{\sqrt{Pu - \frac{\alpha}{2}u^2 - \frac{2\beta}{3}u^{3/2}}} = \sqrt{2}t. \quad (5)$$

Переходом до нової змінної інтегрування $u = y^2$ виразові (5) надаємо форму:

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2P}{\alpha} + \frac{4}{9}\frac{\beta^2}{\alpha^2} - \left(y + \frac{2\beta}{3\alpha}\right)^2}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{2}t,$$

звідки випливає, що:

$$x(t) = \left[A \sin\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t + B\right) - \frac{2\beta}{3\alpha} \right]^2, \quad (6)$$

причому $A = \sqrt{\frac{2P}{\alpha} + \frac{4\beta^2}{9\alpha^2}}$; $B = \arcsin \frac{2\beta/(3\alpha)}{A}$.

Отже, нелінійне рівняння (1) має аналітичний розв’язок (6) в елементарних функціях.

Згідно з (6) максимальне динамічне відхилення системи x_g від положення статичної рівноваги $x = 0$ становить:

$$x_g = \left(A - \frac{2\beta}{3\alpha} \right)^2.$$

Воно досягається при $t = t_* = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\pi}{2} - B \right)$.

Коливання проходять з періодом:

$$T = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} (\pi - 2B) = 2t_*,$$

який залежить не лише від власних параметрів осцилятора, а також і від величини миттєво прикладеної сили, що властиво нелінійним системам.

Статичне відхилення x_c осцилятора від положення $x = 0$ під дією сили P задовольняє рівнянню:

$$\alpha x_c + \beta \sqrt{x_c} = P,$$

що має корінь:

$$x_c = \left(\sqrt{\frac{P}{\alpha} + \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2} - \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2.$$

Для обчислень коефіцієнта динамічності системи K_g одержуємо формулу:

$$K_g = \frac{x_g}{x_c} = 2 \left(\frac{\sqrt{\frac{P}{\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2}} + \frac{\beta}{2\alpha}}{\sqrt{\frac{P}{\alpha} + \frac{2\beta^2}{9\alpha^2}} + \frac{\sqrt{2}\beta}{3\alpha}} \right)^2. \tag{7}$$

При $\beta = 0$, $K_g = 2$, що відповідає лінійній системі. Якщо $\beta > 0$, то $K_g > 2$, бо в (7):

$$\sqrt{\frac{P}{\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2}} + \frac{\beta}{2\alpha} > \sqrt{\frac{P}{\alpha} + \frac{2\beta^2}{9\alpha^2}} + \frac{\sqrt{2}\beta}{3\alpha}.$$

Із (6) при $\beta = 0$, $A = \sqrt{\frac{2P}{\alpha}}$, $B = 0$ впливає відома формула переміщень лінійного осцилятора, миттєво навантаженого силою P , а саме:

$$x(t) = \frac{2P}{\alpha} \sin^2 \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2} t \right) = \frac{P_1}{c_1} \left(1 - \cos \left(\sqrt{\frac{c_1}{m}} t \right) \right). \tag{8}$$

Тут період коливань не залежить від сили P .

Графіки переміщень, до яких призводить формула (6), зображено на рис. 1. Розрахунки проведемо при $\alpha = 1 \text{ с}^{-1}$; $\beta = 0,2 \text{ м}^{1/2}\text{с}^{-2}$ для трьох значень P . Зі збільшенням P зростають не тільки амплітуди, а й період коливань. Залежність амплітуд від P нелінійна.

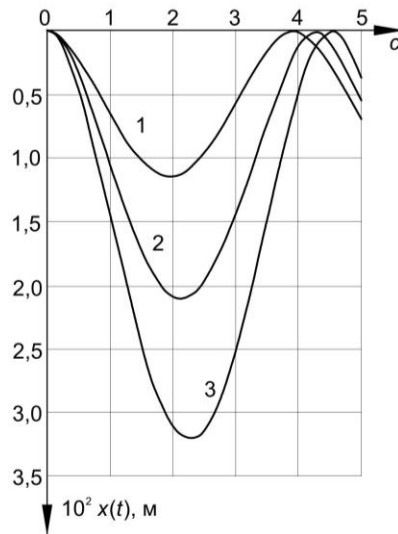


Рис. 1. Графіки $x(t)$ при $\alpha > 0$, $\beta > 0$:
1 – $P = 0,02 \text{ м/с}^2$; 2 – $P = 0,03 \text{ м/с}^2$; 3 – $P = 0,04 \text{ м/с}^2$

2. Другий варіант руху осцилятора при $x > 0$ описується диференціальним рівнянням:

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = P - \alpha x + |\beta| \sqrt{x},$$

у якому $\alpha > 0$.

Його інтегрування, з урахуванням початкових умов (2), дає:

$$x(t) = \left[A \sin \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2} t - B_1 \right) - \frac{2|\beta|}{3\alpha} \right]^2. \quad (9)$$

Тут $B_1 = \arcsin \left(\frac{2|\beta|/3\alpha}{A} \right)$.

Тепер $x = 0$ не є положенням стійкої рівноваги. Його маємо при $x = x_1 = \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2$.

Згідно з (9) максимальне динамічне відхилення x_g від $x = 0$ становить:

$$x_g = \left(A + \frac{2|\beta|}{3\alpha} \right)^2. \quad (10)$$

Воно досягається при $t = t_* = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\pi}{2} + B_1 \right)$.

Колівання проходять з періодом:

$$T = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} (\pi + 2B_1) = 2t_*, \quad (11)$$

який теж залежить від значення прикладеної сили P .

Обчислення статичного відхилення x_c від положення $x=0$ зводиться до використання формули:

$$x_c = \left(\sqrt{\frac{P}{\alpha} + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2} + \frac{|\beta|}{2\alpha} \right)^2$$

при $P \rightarrow 0$ $x_c \rightarrow x_1$.

Коефіцієнт динамічності системи подається виразом:

$$K_g = 2 \frac{\left(\sqrt{\frac{P}{\alpha} + \frac{2\beta^2}{9\alpha^2} + \frac{\sqrt{2}|\beta|}{3\alpha}} \right)^2}{\left(\sqrt{\frac{P}{\alpha} + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2} + \frac{|\beta|}{2\alpha} \right)^2}. \quad (12)$$

Він менший двох, бо в (12), при $|\beta| > 0$:

$$\sqrt{\frac{P}{\alpha} + \frac{2\beta^2}{9\alpha^2} + \frac{\sqrt{2}|\beta|}{3\alpha}} < \sqrt{\frac{P}{\alpha} + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2} + \frac{1}{2} \frac{|\beta|}{\alpha}.$$

Коли $\beta = 0$, розв'язок (9) переходить в (8), а $K_g = 2$.

На рис. 2 показано графіки коливань осцилятора, одержані числовим інтегруванням рівняння (1) на комп'ютері при $\alpha = 1 \text{ с}^{-2}$; $\beta = -0,1 \text{ м}^{1/2}\text{с}^{-2}$ і двох значеннях P . Тут збільшення P призводить до зростання амплітуд коливань і зменшення їх періоду, що властиво нелінійній системі з жорсткою характеристикою. Обчислені за формулами (10) і (11) амплітуди і періоди коливань дорівнюють відповідно $x_g = 0,0349 \text{ м}$, $T = 8,6352 \text{ с}$ при $P = 0,005 \text{ м/с}^2$ і $x_g = 0,0497 \text{ м}$, $T = 8,0452 \text{ с}$ при $P = 0,01 \text{ м/с}^2$. В обох випадках маємо гарне узгодження одержаних x_g і T із результатами числового розв'язання задачі Коші, поданого на рис. 2.

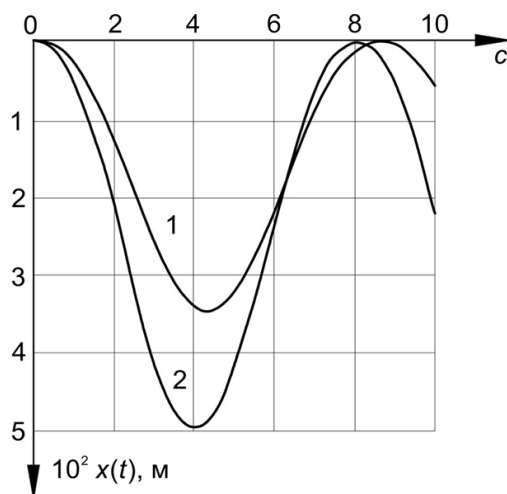


Рис. 2. Графіки $x(t)$ при $\alpha > 0$, $\beta < 0$:

1 – $P = 0,005 \text{ м/с}^2$; 2 – $P = 0,01 \text{ м/с}^2$

Інформація про вплив P на коефіцієнт динамічності системи K_g , у якій $\alpha = 1 \text{ с}^{-2}$; $\beta = -0,1 \text{ м}^{1/2}\text{с}^{-2}$, надана в табл. 1.

Таблиця 1 – Значення K_g при $\alpha > 0$, $\beta < 0$ і різних P

| P , м/с ² | 0,001 | 0,005 | 0,010 | 0,015 | 0,020 |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| K_g | 1,812 | 1,871 | 1,900 | 1,915 | 1,925 |

Збільшення навантаження P , згідно з (12), супроводжується збільшенням K_g , але коефіцієнт динамічності залишається меншим двох.

3. Третій варіант коливального руху осцилятора маємо при $\alpha < 0$, $\beta > 0$. Такий рух можливий лише при малому зовнішньому навантаженні, тобто за умови, що:

$$P \leq \frac{2\beta^2}{9|\alpha|}. \quad (13)$$

Інтегрування виразу (4) у цьому випадку дає:

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{2\beta}{3|\alpha|} - y\right)^2 - \left(\frac{4\beta^2}{9\alpha^2} - \frac{2P}{|\alpha|}\right)}} = \frac{\sqrt{|\alpha|}}{2} t. \quad (14)$$

Ліва частина в (14) виражається через обернені гіперболічні функції. Тому після інтегрування її отримуємо:

$$\text{Arch} \frac{2\beta/3|\alpha|}{A_*} - \text{Arch} \frac{2\beta/(3|\alpha|) - \sqrt{x}}{A_*} = \frac{\sqrt{|\alpha|}}{2} t, \quad (15)$$

де $A_* = \sqrt{\frac{4\beta^2}{9\alpha^2} - \frac{2P}{|\alpha|}}$.

Із (15) випливає, що:

$$x(t) = \left[\frac{2\beta}{3|\alpha|} - A_* \text{ch} \left(\text{Arch} \frac{2\beta/(3|\alpha|)}{A_*} - \frac{\sqrt{|\alpha|} t}{2} \right) \right]^2. \quad (16)$$

Максимальне відхилення x_g від положення $x = 0$ становить:

$$x_g = \left(\frac{2\beta}{3|\alpha|} - A_* \right)^2. \quad (17)$$

Воно досягається при:

$$t = t_* = \frac{2}{\sqrt{|\alpha|}} \text{Arch} \frac{2\beta/(3|\alpha|)}{A_*}.$$

Період коливань дорівнює:

$$T = 2t_*. \quad (18)$$

Вираз (16) описує переміщення системи на першому циклі коливань $t \in [0; T]$, що потім легко поширити і на інші цикли, тобто більші значення t .

Статичне відхилення x_c визначимо з рівняння:

$$|\alpha|x_c - \beta\sqrt{x_c} + P = 0.$$

Воно дорівнює:

$$x_c = \left(\frac{\beta}{2|\alpha|} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{P}{|\alpha|}} \right)^2$$

за умови, що: $P < \frac{\beta^2}{4|\alpha|}$.

Отже, при виконанні нерівності (13) коефіцієнт динамічності системи K_g становить:

$$K_g = 2 \left(\frac{\frac{\beta}{2|\alpha|} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{P}{|\alpha|}}}{\frac{\sqrt{2}\beta}{3|\alpha|} + \sqrt{\frac{2\beta^2}{9\alpha^2} - \frac{P}{|\alpha|}}} \right)^2. \tag{19}$$

Він більший двох, бо в (19):

$$\frac{\sqrt{2}\beta}{3|\alpha|} + \sqrt{\frac{2\beta^2}{9\alpha^2} - \frac{P}{|\alpha|}} < \frac{\beta}{2|\alpha|} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{P}{|\alpha|}}.$$

Результати обчислень $x(t)$ при $\alpha = -0,5 \text{ с}^{-2}$; $\beta = 1 \text{ м}^{1/2}\text{с}^{-2}$ і двох значеннях P зображено на рис. 3. Графіки одержано числовим інтегруванням рівняння (1) на комп'ютері. Для порівняння, за формулами (17) і (18) було обчислено x_g і T . При $P = 0,1 \text{ м/с}^2$ вони становлять: $x_g = 0,0255 \text{ м}$, $T = 2,9117 \text{ с}$, а при $P = 0,15 \text{ м/с}^2$ значно більші, а саме: $x_g = 0,06154 \text{ м}$, $T = 3,7556 \text{ с}$. Спостерігаємо гарну відповідність результатів, одержаних різними способами.

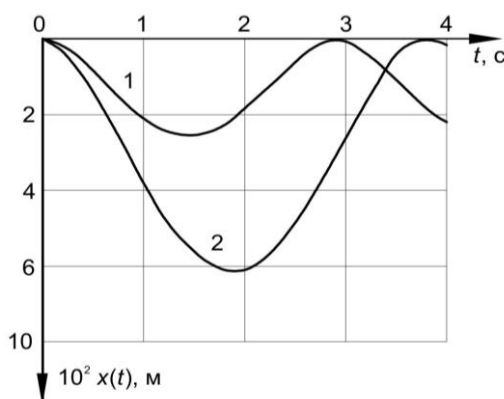


Рис. 3. Графіки $x(t)$ при $\alpha < 0$, $\beta > 0$:

1 – $P = 0,1 \text{ м/с}^2$; 2 – $P = 0,15 \text{ м/с}^2$

У табл. 2 записано значення K_g , обчислені за формулою (19), при $\alpha = -0,5 \text{ с}^{-2}$; $\beta = 1 \text{ м}^{1/2}\text{с}^{-2}$ і різних P .

Таблиця 2 – Значення K_g при $\alpha < 0$, $\beta > 0$ і різних P

| | | | | | |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $P, \text{ м/с}^2$ | 0,01 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 |
| K_g | 2,253 | 2,265 | 2,284 | 2,307 | 2,336 |

Тут $K_g > 2$, причому він збільшується зі збільшенням P .

4. Четвертий варіант руху аперіодичний. Він має місце при $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $P \geq \frac{2}{9} \frac{\beta^2}{|\alpha|}$.

У випадку, коли $P = \frac{2}{9} \frac{\beta^2}{|\alpha|}$, переміщення описуються виразом:

$$x(t) = \frac{4\beta^2}{9\alpha^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{|\alpha|}}{2} t\right) \right]^2. \quad (20)$$

Результати обчислень $x(t)$ за формулою (20) при $\alpha = -0,5 \text{ с}^{-2}$; $\beta = 1 \text{ м}^{1/2}\text{с}^{-2}$, $P = \frac{4}{9} \text{ м/с}^2$ і різних t записано в табл. 3. Для порівняння, там також вказано $x_r(t)$, одержані числовим інтегруванням рівняння руху.

Таблиця 3 – Значення переміщень, одержані різними способами

| $t, \text{с}$ | 1 | 5 | 10 | 20 | 30 |
|--------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $x(t), \text{м}$ | 0,15767 | 1,22261 | 1,67567 | 1,77476 | 1,77769 |
| $x_r(t), \text{м}$ | 0,15767 | 1,22261 | 1,67567 | 1,77473 | 1,77675 |

Як видно з (20) і табл. 3, із ростом t переміщення асимптотично прямують до значення $4\beta^2/(9\alpha^2)$.

При $P > \frac{2}{9} \frac{\beta^2}{|\alpha|}$ із ростом t переміщення осцилятора прямують до нескінченності, бо розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$x(t) = \left[\frac{2\beta}{3|\alpha|} + B_* \operatorname{sh} \left(\frac{\sqrt{|\alpha|}}{2} t - \operatorname{Arch} \frac{2\beta/(3|\alpha|)}{B_*} \right) \right]^2. \quad (21)$$

Тут $B_* = \sqrt{\frac{2P}{|\alpha|} - \frac{4\beta^2}{9\alpha^2}}$.

Вірогідність формули (21) підтверджується результатами обчислень $x(t)$ при $\alpha = -0,5 \text{ с}^{-2}$; $\beta = 1 \text{ м}^{1/2}\text{с}^{-2}$, $P = 0,5 \text{ м/с}^2$, що записані в табл. 4. Там, для порівняння, наведено $x_r(t)$, одержані числовим інтегруванням рівняння руху осцилятора.

Таблиця 4 – Значення $x(t)$ при $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $P = 0,5 \text{ м/с}^2$

| $t, \text{с}$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 10 |
|--------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $x(t), \text{м}$ | 0,18171 | 0,94965 | 1,78410 | 2,88367 | 7,18741 |
| $x_r(t), \text{м}$ | 0,18171 | 0,94965 | 1,78409 | 2,88366 | 7,18739 |

ВИСНОВКИ

Дослідженням показано, що вибраний нелінійний осцилятор може здійснювати коливання або виконувати аперіодичний рух під дією миттєво прикладеної сили. При всіх режимах руху існують аналітичні розв'язки нелінійної задачі Коші в елементарних функціях, що дозволяє з високою точністю обчислювати переміщення і періоди коливань системи. Коефіцієнти динамічності осцилятора залежать не тільки від його власних параметрів, а також і від величини прикладної сили, що не спостерігається у лінійних системах.

ЛІТЕРАТУРА

1. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем. Модели, методы, явления: в 2 т. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015. Т. 1. 716 с. Т. 2. 700 с.
2. Митропольский Ю. А. Избранные труды: в 2 т. Киев: Наукова думка, 2012. 504 с.
3. Пукач П. Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем. Львів: Львівська політехніка, 2014. 288 с.
4. Шатохин В. М. Анализ и параметрический синтез нелинейных силовых передач машин. Харьков: НТУ «ХПИ», 2008. 456 с.
5. Ларин А. А. Очерки истории развития теории механических колебаний. Севастополь: Вебер, 2013. 403 с.
6. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Коливання квадратично нелінійного осцилятора, спричинені імпульсним навантаженням. *Вісник НТУ «ХПИ». Серія: Динаміка і міцність машин.* 2017. № 39 (1261). С. 62–67.
7. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Коливання кубічно нелінійного осцилятора, спричинені імпульсним навантаженням. *Вісник НТУ «ХПИ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях.* 2017. № 6 (1228). С. 86–94.

REFERENCES

1. Avramov K. V. & Mikhlin, YU. V. (2015). Nonlinear dynamics of elastic systems. Models, methods, phenomena: in 2 volumes. Moscow-Izhevsk: Institute for Computer Research.
2. Mitropolsky, Yu. A. (2012). Selected Works: in 2 volumes. Kiev: Naukova Dumka.
3. Pukach, P. Ya. (2014). Qualitative methods of research of nonlinear oscillatory systems. Lviv: Lviv Polytechnic.
4. Shatokhin, V. M. (2008). Analysis and parametric synthesis of nonlinear power transmission of machines. Kharkov: NTU "KhPI".
5. Larin, A. A. (2013). Essays on the history of the development of the theory of mechanical oscillations. Sevastopol: Weber.
6. Olshansky, V. P. & Olshanskii, S. V. (2017). Fluctuations of a quadratically nonlinear oscillator caused by impulse loading. *Visnyk NTU «KHPI». Seriya: Dynamika i mitsnist' mashyn,* No. 39(1261), pp. 62–67.
7. Olshansky, V. P. & Olshanskii, S. V. (2017). Oscillations of a cubically nonlinear oscillator caused by impulse loading. *Visnyk NTU «KHPI». Seriya: Matematychnе modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh,* No. 6(1228), pp. 86–94.

SOME APPLICATIONS OF NUMERICAL INVERSION OF THE LAPLACE TRANSFORM IN PROBLEMS OF PROPAGATION OF WAVE OSCILLATIONS

Selezov Igor, Dr. Prof. Department of Wave Processes

*Institute of Hydromechanics NASU,
Sheliabov str., 8/4, Kiev, 03680, Ukraine*

igor.selezov@gmail.com

Three algorithms for the numerical inversion of the Laplace transform are considered, for solving specific applied problems of wave dynamics. Comparing the algorithm based on the shifted Legendre polynomials with the standart solutions shows that there exists an optimal number of terms in expansions. It is also established from the consideration of various algorithms, including modern ones, that the accuracy of all algorithms of numerical inversion decreases with increasing time t (with decreasing in the transformation parameter p in the complex plane). These two conclusions are a consequence of the incorrectness of the inversion Laplace transform problem. The application of the expansion method in the sine arcs to the solution of the initial-boundary value problem (IBV problem) of the study of the propagation of pulse pressure waves in blood vessels is presented. It is based on the equations of the cylindrical shell and blood pressure, and includes the matching conditions at the junction of the vessels, excitation of the pulse pressure wave, its propagation to the junction, reflected and transmitted waves. Application of the same method is presented for the problem of evolution of the free surface of water waves due to local bottom excitation sources that are repeated in time.

Key words: Laplace transform, numerical inversion, IBV problem, algorithm, wave, dynamics, pulse pressure.

ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЕЛЬНОГО ОБЕРНЕННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА В ЗАДАЧАХ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬОВИХ КОЛИВАНЬ

Селезов Ігор, д. ф.-м. н., професор

*Інститут гідромеханіки НАН України,
вул. Желябова, 8/4, Київ, 03680, Україна*

igor.selezov@gmail.com

Розглянуто три алгоритми чисельного обернення перетворення Лапласа для розв'язання конкретних прикладних задач динаміки хвиль. Порівняння алгоритму, заснованого на зміщених поліномах Лагера, зі стандартними розв'язками показує, що існує оптимальне число членів у розкладах. З розгляду різних алгоритмів, у тому числі сучасних, встановлено, що точність всіх алгоритмів чисельної інверсії зменшується зі збільшенням часу t (зі зменшенням параметра перетворення p в комплексній площині). Ці два висновки є наслідком некоректності проблеми перетворення Лапласа. Наведено застосування методу розкладання по дугах синусів до розв'язування початково-крайової задачі (IBV problem) дослідження поширення хвиль пульсового тиску в кровоносних судинах. Вона заснована на рівняннях циліндричної оболонки і кров'яного тиску і включає умови спряження на стику судин, збудження хвилі імпульсного тиску, її поширення до стику, відбиті і прохідні хвилі. Представлено застосування такого ж методу для задачі еволюції вільної поверхні хвиль на воді, обумовленої локальними донними джерелами збудження, які повторюються в часі.

Ключові слова: перетворення Лапласа, чисельне обернення, IBV (початково-крайова задача), алгоритм, хвилі, динаміка, пульсовий тиск.

1. INTRODUCTION

The efficiency of solving problems in mechanics and physics on the basis of the Laplace transform is well known [1–3]. The Laplace transform of a function $f(t)$ is defined by the operator [4, 5]

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (1)$$

for a complex parameter $p = \sigma + i\tau$ under the assumption that $F(p)$ is the analytic function in a domain $\text{Re } p > \sigma_c$, that $F(p)$ converges uniformly in this domain $F(p) \rightarrow 0$ relative to $\arg p$ for $p \rightarrow \infty$ and that in the case of absolute convergence (1) along the straight line at $\forall \text{Re } p > \sigma_c$ there exists an inversion operator (the Riemann-Mellin integral)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_c - i\infty}^{\sigma_c + i\infty} F(p)e^{pt} dp. \tag{2}$$

The inverse problem consists in finding the solution $f(t)$ of the integral equation of the first kind (1), where $F(p)$ is a known function of the complex argument p . The kernel e^{-pt} is a smooth function of t and p , the averaging operation f with weight e^{-pt} can substantially smooth out the singularities of the function. The problem of restoring all local irregularities of $f(t)$ requires the involvement of approaches sensitive even to insignificant behavioral features.

The function $f(t)$ is unstable with respect to small variations of $F(p)$. Consequently, the problem of inversion, as the problem of finding the solution $f(t)$ of the integral equation of the first kind (1), belongs to the number of ill-posed problems: solutions are possible not for all quantities of numerical or functional parameters, and weak variations of these parameters can lead to large variations of the solution. This is the main reason that limits the capabilities of all known algorithms of inversion (2).

This paper shows the verification of the expansion method for shifted Legendre polynomials. An application of the method of expansion in even sine arcs to the solution of the IBV problem are given for propagation of pulse pressure waves in blood vessels and water wave generation by local bottom sources of excitation. In addition, some new algorithms are also described.

2. THE METHOD OF EXPANSION IN ORTHOGONAL SHIFTED LEGENDRE POLYNOMIALS [6]

The introduction of the transformation $e^{-t} = \zeta$ takes the interval $(0, \infty)$ of a variable t into an interval $(0, 1)$ of a variable ζ . After this expression (1) takes the form

$$F(p) = \int_0^1 f(\zeta)\zeta^{p-1} d\zeta, \tag{3}$$

and the function $f(\zeta)$ (2) is represented in the form of a convergent series in polynomials orthogonal on a segment $[0, 1]$ which are given by the shifted Legendre polynomials $P_n^*(\zeta)$

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)a_n P_n^*(\zeta), \quad a_n = \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} F(k+1), \tag{4}$$

where

$$P_n^*(\zeta) = (-1)^n \sum_{k=0}^n \alpha_k^{(n)} \zeta^k, \quad \alpha_k^{(n)} = (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n+k)!}{n!k!}.$$

The function $F(k+1)$ in (4) with integer argument corresponds to the function $F(p)$ of (1).

The coefficients a_n on the basis of (3) and (4) are calculated in a finite number of equidistant points k along the real axis of the transformation parameter p (Fig. 1). Calculations were carried out for the number of terms of the series 5, 6, ..., 10, and the number 10 was found to be optimal for

approximation with the number of significant digits equal to 9. In all cases, the accuracy increases at n up to 10.

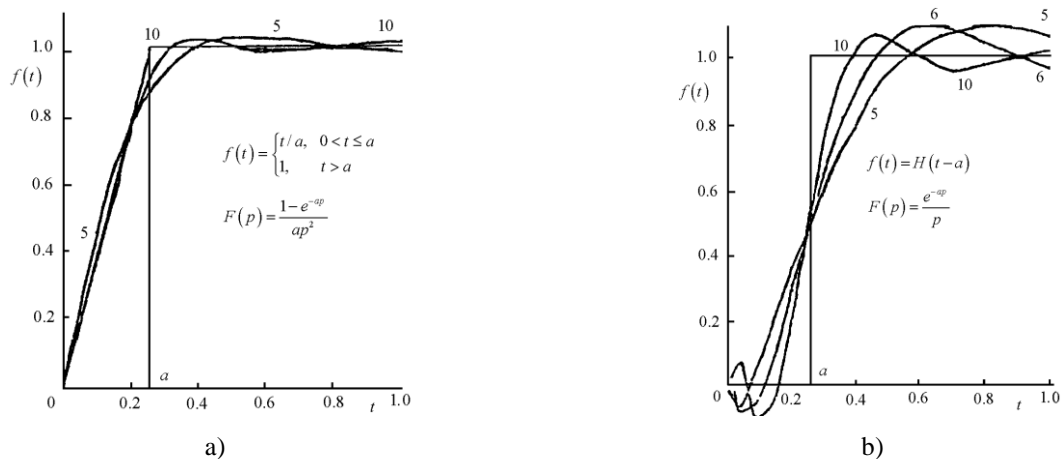


Fig. 1. The results of numerical inversion by the shifted Legendre polynomials:
a) for a function linearly increasing, and then constant; b) for the Heaviside function

Similar results were obtained for table functions linearly or instantaneously increasing, and then decaying exponentially.

On the basis of this algorithm, a number of IBV problems were solved in the theory of wave propagation and diffraction including for a water hammer, the effect of a pulse on an elastic shell, the generation of tsunami waves and others.

3. THE METHOD OF EXPANSION IN THE SINE ARCS

This method was proposed in [7] and is described in [2]. In this case, the solution is represented in the form of a series

$$\Phi(\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu} \sin(2\nu+1)\theta \quad (5)$$

under the condition that $e^{-\sigma t} = \cos \theta$, $f(t) = f\left(-\frac{1}{\sigma} \ln \cos \theta\right) = \Phi(\theta)$, $p = (2n+1)\sigma$, $\sigma > 0$, $n = 0, 1, \dots$. As a result, we obtain the linear system of equations to determine the coefficients

$$C_{\nu} : C_0 = \frac{4}{\pi} \sigma f^L(\sigma), C_0 + C_1 = \frac{4^2}{\pi} \sigma f^L(3\sigma), 2C_0 + 3C_1 + C_2 = \frac{4^3}{\pi} \sigma f^L(5\sigma), \dots$$

It should be noted that the implementation of this algorithm essentially depends on the value of the parameter σ in (5), the optimal choice of which requires conducting numerical experiments.

Let us consider the problem of propagation of pulse pressure waves in blood vessels [8]. In this case, a function that approximates the cardiac pulse is given in the form $f(t) = te^{-\alpha t}$.

The corresponding hydroelasticity problem is formulated as the IBV problem for differential equations in three regions, including the matching conditions in two sections $x = -x_1$ and $x = 0$, the conditions at infinity for $x \rightarrow -\infty$ and $x \rightarrow \infty$ and also the initial conditions for $t = 0$.

We consider two semi-infinite elastic cylindrical shells of constant, but different thickness, filled with a inviscid incompressible fluid, ideally conjugated in a section $x = 0$. The left shell occupies the region $\Omega_h^f(-\infty < x < 0)$, the right shell – the region $\Omega_d(0 \leq x < \infty)$. The left region $\Omega_h(0 \leq x < \infty)$ is divided into two subregions $\Omega_h'(-\infty < x < x_1)$ and $\Omega_h(-x_1 \leq x < 0)$ by a cross section $x = -x_1$, in which a pressure pulse $f(t)$ propagating to the left and to the right at a time

$t = 0$ is specified. The pulse, reaching the junction of the shells $x = 0$, generates the reflected wave to the left and the passing wave through the junction to the right. The stress concentration in the interface junction is of primary interest in the passage of the pulse, and here it is investigated on the basis of the Laplace transform and the algorithm for numerical inversion. It is assumed that the motion of the shells is described by the theory of Kirchhoff shells, and the motion of the liquid inside the shells by a quasi-one-dimensional model.

The heart pressure pulse with a doubled amplitude is applied on the left on some distance from the junction of the vessels. One half of this pulse spreads to the left. Another part that also very accurately approximates the heart pulse $f(t)$ runs to the right. After reaching the junction of the vessels this pulse partially reflected from the junction and partially transmitted through to the right.

For each of the three regions, a system of differential equations for radial displacement w and for pressure p as functions of time t and axial coordinate x is written.

The motion of the shell is described by a differential equation [9]

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{Eh}{a^2} w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \hat{p}, \tag{6}$$

and fluid motion by the system of equations [10]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{r_i}{2} \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2}, \quad p_i = \hat{p} - \frac{r_i^2}{8} \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}. \tag{7}$$

The matching conditions are of the form:

on the interface $x = -x_1$ (impulse application)

$$\hat{p}'_h - \hat{p}_h = f(t), \quad u'_h - u_h = 0, \quad w'_h - w_h = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial w'_h}{\partial x} - \frac{\partial w_h}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 w'_h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_h}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w'_h}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 w_h}{\partial x^3} = 0; \tag{9}$$

at the interface $x = 0$ (vessel junction)

$$\hat{p}_h - \hat{p}_d = 0, \quad u_h - u_d = 0, \quad w_h - w_d = a_d - a_h, \tag{10}$$

$$\frac{\partial w_h}{\partial x} - \frac{\partial w_d}{\partial x} = 0, \quad D_h \frac{\partial^2 w_h}{\partial x^2} - D_d \frac{\partial^2 w_d}{\partial x^2} = 0, \quad D_h \frac{\partial^3 w_h}{\partial x^3} - D_d \frac{\partial^3 w_d}{\partial x^3} = 0. \tag{11}$$

The results calculations for real vessel parameters are presented on Fig.2

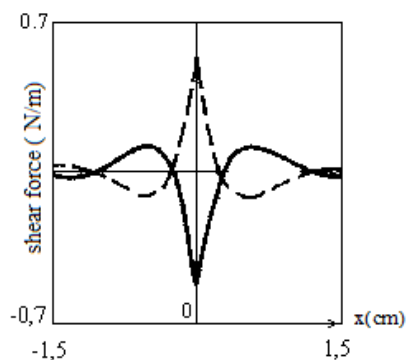


Fig. 2. Concentration of shear force at $x = 0$

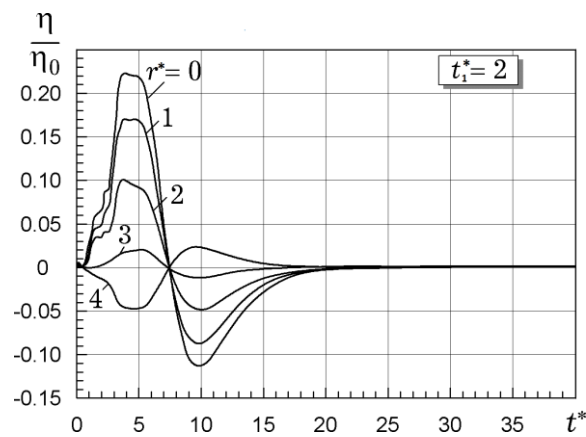


Fig. 3. Free water surface at different distances $r^* = r/r_0$ from epicenter $\eta = 0$ in the case of repeated excitation time $t_1^* = 2$ (r_0 is the radius of convex axially symmetric bottom lift, $t^* = t\sqrt{gH_0}/r_0$, H_0 is the water height)

The method was used in investigations of a free surface evolution at local bottom repeated in time excitations for analysis of tsunami waves [11]. The results of calculations are presented in Fig. 3.

4. OTHER APPROACHES AND SOME RECENT ONES

We note the simplest approximation - the expansion in exponential functions [12], the Fourier-Bessel expansion method [13], based on the representation of the solution in the form of Fourier-Bessel expansions and the regularization of an ill-posed problem [14]. The coefficients of such an expansion are presented in the form of well-convergent series, which makes it possible to calculate the values of the smooth original function with high accuracy.

The function $f(t)$ is represented as a series $f_A(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{-t/t_i}$ where the values A_i are undetermined coefficients, and the quantities t_i are given positive constants, so that $f_A(t)$ is an approximate representation of the function $f(t)$. The total quadratic error, determined by the difference between $f(t)$ and $f_A(t)$ is written in the form $E^2 = \int_0^{\infty} [f(t) - f_A(t)]^2 dt$. The coefficients A_i are determined from the condition of the minimum of the total root-mean-square error $\int_0^{\infty} [f(t) - f_A(t)]^2 e^{-t/t_i} dt = 0$. These relations form a system N of linear algebraic equations for the determination of N of unknown coefficients A_j . It is established from the calculations that acceptable accuracy can be achieved in a small interval of variation t .

Numerous papers have been devoted to the investigation of the numerical inversion of the Laplace transform. In [6] an application of the Chebyshev, Laguer and Jacobi polynomials was considered, which were subsequently applied in [15, 16]. We note some asymptotic methods, the numerical inversion with the use of Laguer polynomials was considered in [16], Jacobi polynomials in [15], in problems of mechanics and physics in [16-18].

A characteristic feature of all methods of numerical inversion is that they are well realized for large parameters of the Laplace transform $|p| < \infty$, $|p| \gg 1$, that is, near an infinitely distant point in the complex plane $p = \text{Re } p + i \text{Im } p$. As the value $|p|$ decreases, all methods of numerical conversion deteriorate.

An alternative approach to the numerical inversion of the Laplace transform based on Fourier expansions [19] was used to solve the IBV problem of thermoelasticity for a hyperbolic system of

equations involving a higher-order hyperbolic operator (fourth) than the hyperbolic heat transfer operator (the second) taking into account relaxation time [20].

We note the method of numerical inversion presented in [21]. This method has been used in [22] to solve a new IBV problem on a finite interval for a hyperbolic equation with relaxation parameter (parabolic operator). The original is determined by the formula

$$T(x, t) = \frac{10^{M/3}}{t} \sum_{k=0}^{2M} \eta_k \operatorname{Re} \left(T^L \left(x, \frac{\beta_k}{t} \right) \right),$$

where $\beta_k = \frac{M \ln(10)}{3} + \pi i k$, $\eta_k = (-1)^k \xi_k$, $\xi_0 = \frac{1}{2}$, $\xi_k = 1$, $1 \leq k \leq M$, $\xi_{2M} = \frac{1}{2^M}$,
 $\xi_{2M-k} = \xi_{2M-k+1} + 2^{-M} C_M^k$, $0 < k < M$.

The value of the parameter M in (15) was assumed to be 16, which, according to [23], gives accuracy in nine significant digits. The superscript L notes the Laplace transform.

5. CONCLUSIONS

Some methods of numerical inversion of the Laplace transform and their applications to the solution of IBV problems have been considered. Algorithms, some comparisons with exact solutions, estimates of accuracy are given. The results of the study of the propagation of pressure pulse waves in blood vessels and the generation of waves on water by underwater earthquakes are presented. Some recent approaches have been noted.

Acknowledgments

The author thanks S. A. Savchenko for preparing the manuscript and article.

REFERENCES

1. Carslaw H. S., Jaeger J. C. Operational methods in applied mathematics. Oxford: The Clarendon Press, 1941.
2. Doetsch T. Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation. Muenchen: R. Oldenbourg, 1956.
3. Lurie A. I. Operational calculus and its applications to problems of mechanics (in Russian). Moscow; Leningrad: Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit., 1960. 208 p.
4. Gnoenski L. S., Kamenski L. E., Elsgolz L. E. Mathematical foundation of the theory of controlled systems (in Russian). Moscow: Nauka, 1969. 512 p.
5. Krylov V. I., Skoblya N. S. Methods of approximate Fourier transform and inverting Laplace transform. Moscow: Nauka, 1974. 224 p.
6. Lanczos C. Applied analysis. New Jersey: Prentice Hall, 1956.
7. Papoulis A. A new method of inversion of the Laplace transform. *Quart. Appl. Math.* 1957. N 14. P. 405-414.
8. Selezov I., Fratamico G. Pulse waves in arteries with a vessel joint. *Ed. M. Mela and G. Pallotti, Int. Summer School in Biophysics.* (Italy, Bellaria Igea Marina, 9–16 September 1996). Italy, Bellaria Igea Marina, 1996. P. 89–94.
9. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells. *McGraw-Hill Book Company, INC* 1959.
10. Moodie E. B., Barday D. W., Tait R. T. A boundary value problem for fluid-filled viscoelastic tubes. *Mathematical Model.* 1983. N 4. P. 195–207.
11. Selezov I. T., Kuznetsov V. V., Chernikov D. O. Generation of surface gravity waves by bottom time-repetitive pulses. *J. Math. Sci.* 2010. **171**, N 5. P. 596–602.

12. Schapery R. A. Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analysis. *Proc. 4th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.* 1962. P. 1075–1085.
13. Selezov I. T., Korsunski S. V. Numerical inverting Laplace transform based on Fourier-Bessel expansions (in Russian). *Dokl. Acad. Nauk UkrSSR, Ser. A.* 1988. N 11. P. 25–28.
14. Tikhonov A. N., Arsenin V. J. Methods of solution of ill-posed problems (in Russian). Moscow: Nauka, 1986. 288 p.
15. Miller M. K., Guy W. T. Numerical inversion of the Laplace transform by use of Jacobi polynomials. *SIAM J. Numer. Analysis.* 1966. 3. P. 624–635.
16. Weeks W. T. Numerical inversion of Laplace transforms using Laguerre functions. *J. Assoc. Comput. Math.* 1966. 13. P. 419–426.
17. Vilge J. I., Zakharov E. V. To calculation of nonstationary acoustic field in slit by the method of numerical inverting Laplace transform (in Russian). *Collection chisl. Metody in geophys.* 1978. N 1. P. 102–107.
18. Bellman R., Lockett R. E., Kalaba J. A. Numerical inversion of the Laplace transform: applications to biology, economics and physics. Amsterdam, Elsevier 1966.
19. Honig G., Hirdes U. A method for the numerical inversion of Laplace transform. *J. Comp. App. Math.* 1984. 10, N 1. P. 113–132.
20. Sherief H. H., Youssef H. M. Short time solution for a problem in magnetothermoelasticity with thermal relaxation. *J. Thermal stresses.* 2004. 27 (6). P. 537–559.
21. Abate J., Whitt, W. A unified framework for numerically inverting Laplace transforms. *INFORMS J. on Computing.* 2006. 18, N 4. P. 408–421.
22. Selezov I. T., Kryvonos Ju. G. Modeling medicine propagation in tissue: generalized statement. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2017. 53, № 4. P. 535–542. DOI: 10.1007/s10559-017-9955-1.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-14

ПОЗДОВЖНИЙ МОДУЛЬ ПРУЖНОСТІ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА З ПЕРЕХІДНИМ ШАРОМ

Столярова А. В., аспірант, Гребенюк С. М., д. т. н., доцент, Клименко М. І., к. ф.-м. н., доцент

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

st_av991@ukr.net, gsm1212@ukr.net, m1655291@gmail.com

При розв'язанні задач механіки композитів зручно використовувати модель композита у вигляді суцільного однорідного середовища з ефективними сталими, що адекватно відображають його найбільш суттєві характеристики. Задачі визначення напружено-деформованого стану композита базуються на припущенні, що з'єднання матриці з волокном має чітку границю розподілу, що обмежує компоненти композита. Однак важливу роль у механіці композитів відіграє ефект неідеального контакту між компонентами, одним із яких є наявність перехідного шару. Отримано формулу залежності поздовжнього модуля пружності для трансропного матеріалу, що моделює композит, від пружних характеристик матриці, волокна, перехідного шару, що утворюється між матрицею та волокном, та об'ємної долі кожного з них у композиті. Для цього розв'язано дві крайові задачі: про поздовжнє розтягування нескінченного складеного ізотропного тришарового циліндра та поздовжнє розтягування нескінченного трансропного суцільного циліндра. Для розв'язування системи рівнянь рівноваги в переміщеннях у циліндричній системі координат у роботі використані наступні припущення: матеріали матриці, перехідного шару і волокна є ізотропними, площини ізотропії співпадають та перпендикулярні осі волокна; задача

вісесиметрична; зв'язок між напруженнями та деформаціями описується законом Гука; розглядається гексагональна укладка волокон в односпрямованому композиті. Проаналізовано вплив наявності перехідного шару на величину ефективного поздовжнього модуля пружності. Залежність поздовжнього модуля пружності від об'ємної частки перехідного шару відповідно має зростаючий характер, що узгоджується з фізичним змістом цих показників.

Ключові слова: композиційний матеріал, матриця, волокно, поздовжнє розтягнення, перехідний шар, ефективні пружні сталі.

THE LONGITUDINAL ELASTIC MODULUS OF THE FIBROUS COMPOSITE WITH THE TRANSITION LAYER

Stoliarova A. V., Grebenyuk S. M., Klymenko M. I.

*Zaporizhzhya National University,
Zhykovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

st_av991@ukr.net, gsm1212@ukr.net, m1655291@gmail.com

In our time, structural elements of composite materials are widely used in engineering, modern research of which is based on the idea of homogenization. This method is based on solving special problems of the theory of elasticity on the periodicity cell of the composite. The tasks of determining the stress-strain state of composite materials in the classical formulation are based on the assumption that the matrix-fiber connection has a clear boundary of distribution for the components of the composite. Consider the case when a transition layer is formed between the basic components. To solve the system of equilibrium equations in displacements in a cylindrical coordinate system, the following assumptions are used in the paper: the problem is axisymmetric; the cylinder in question is infinite; after deformation, the sections remain flat. In this way two boundary problems on the longitudinal extension of an infinite composite isotropic three-layer cylinder and the longitudinal extension of an infinite transonic solid cylinder are solved. On the basis of the solution of the problems, the formula for the dependence of the longitudinal modulus of elasticity for the transtropic material that models the composite is obtained from the elastic characteristics of the matrix, the fiber, the transition layer that is formed between the matrix and the fiber as a result of the interaction of the components, and the volume fraction of each of them in the composite. Varying by the volume fractions of the fiber, the transition layer and the matrix in the composite, some cases of their dependence are considered. Based on the numerical calculations, the graphs of the longitudinal modulus of elasticity of the composite material are plotted against the volume fraction of the transition layer. The effect of the formation of the transition layer due to deformation on the stress-strain state of the composite cylinder is analyzed. It should be noted that with increasing volume fraction of the transition layer in the composite material, the value of the longitudinal modulus of elasticity of the composite growing.

Key words: composite material, matrix, fiber, transition layer, longitudinal stretching.

ВСТУП

Визначення напружено-деформованого стану композиційних матеріалів має важливе прикладне значення при створенні різного роду композиційних матеріалів, які використовуються в авіації для високонавантажених деталей літаків, автомобілебудуванні, гірській промисловості, цивільному будівництві та в інших областях народного господарства.

Задачі визначення напружено-деформованого стану композита в класичній постановці базуються на припущенні, що з'єднання матриці з волокном має чітку границю розподілу, що обмежує компоненти композиту, зокрема статті [1-5]. У [6] запропоновані співвідношення для визначення поздовжнього модуля пружності та коефіцієнта Пуассона двофазного волокнистого композита з транструпними складовими. Задача про поздовжнє розтягування у випадку двошарового циліндра (без урахування перехідного шару) наведена в роботі [7]. Там же містяться і деякі чисельні розв'язки цієї задачі для двошарового композита.

Однак важливу роль у механіці композитів відіграє ефект неідеального контакту між компонентами. Властивості перехідного шару, що утворюється при різного роду взаємодіях матеріалів матриці з включеннями, більшою мірою визначають експлуатаційні характеристики композита та їх стабільність у часі. При механічному навантаженні

композита напруження досягають максимальних значень саме на границях розділу компонентів. Головна функція перехідного шару полягає в тому, щоб знизити локальні напруження і забезпечити рівномірну передачу навантаження на границі розподілу.

Зазвичай складність процесів взаємодії матриці та волокна призводить до складних математичних постановок задач, розв'язати які аналітичними методами не видається можливим. Тому використовують чисельні методи, такі як метод скінченних елементів, метод кінцевих різниць та інші. Робота [8] присвячена застосуванню методу гомогенізації до розробки математичної моделі трифазного (включення, матриця та міжфазний шар) композиційного матеріалу. Отримані чисельні результати для ефективних характеристик композиційного матеріалу з випадково розподіленими сферичними включеннями та композиційного матеріалу з випадково розподіленими односпрямованими волокнами. Асимптотичний метод гомогенізації застосовується до комірки у вигляді паралелограма для обчислення ефективних пружних коефіцієнтів композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропними складовими та неідеальним контактом на межі поділу між матрицею й волокнами [9]. У статті [10] із використанням методу гомогенізації знайдено поперечний модуль пружності для трифазного композита з випадково розташованими односпрямованими круглими волокнами з урахуванням взаємодії між волокнами. На основі експериментальних методів проаналізовано міжфазну взаємодію на границі полімерної матриці й волокна [11]. Різні механічні параметри міжфазної взаємодії матриці та волокна чисельно досліджені за допомогою методу скінченних елементів. Вивчено ефективні пружні характеристики композита з ромбічним вкладанням волокон та з урахуванням особливостей міжфазного контакту на межі матриця-волокно за допомогою методу гомогенізації та методу скінченних елементів [12].

Досліджені міжфазові явища в композитах епоксіполімер/скловолокно методами релаксаційної спектроскопії [13]. У [14, 15] врахована можливість утворення перехідного шару між волокном та матрицею при отриманні розрахункових формул для ефективних коефіцієнтів теплопровідності в напрямку укладки волокон і в площині, перпендикулярній цьому напрямку. Знайдені поля напружень та деформацій в односпрямованому склопластику без міжфазного шару й з міжфазним шаром з використанням методу скінченних елементів в програмному комплексі ANSYS [16]. Проаналізовано вплив міжфазного шару.

Досліджено вплив неоднорідного перехідного шару, що утворюється між матрицею та волокном, на напружено-деформований стан односпрямованих волокнистих композитів [17]. При цьому коефіцієнт Пуассона і коефіцієнт теплового розширення міжфазі вважалися постійними, а поздовжній модуль пружності таким, що змінюється за лінійним та степеневим законами. У роботі [18] запропоновано формулу розрахунку модуля пружності міжфазової зони, що включає модулі пружності вуглепластику, волокна та полімерної матриці та об'ємних часток компонентів композита в поперечному розрізі зразка вуглепластику. Формули для визначення товщини міжфазового шару отримані в [19].

З аналізу літературних джерел можна зробити висновок, що задачі визначення напружено-деформованого стану композиційних матеріалів, між компонентами яких має місце утворення перехідного шару, є досить актуальними. За даним науковим напрямом наукові статті можна умовно розділити на дві категорії. До першої можна віднести статті, у яких досліджуються компоненти напружено-деформованого стану композиційного матеріалу. До другої – автори яких досліджують характеристики саме перехідного шару.

Метою роботи є отримання аналітичного співвідношення для ефективного поздовжнього модуля пружності композита з ізотропними матрицею, перехідним шаром та волокном шляхом узгодження компонентів переміщень однорідного композита та його складових.

ВИЗНАЧЕННЯ ПОЗДОВЖНЬОГО МОДУЛЯ ПРУЖНОСТІ КОМПОЗИТА ЗА НАЯВНОСТІ ПЕРЕХІДНОГО ШАРУ МІЖ ЙОГО КОМПОНЕНТАМИ

Ефективний поздовжній модуль пружності композиційного матеріалу знаходиться з розв'язання двох крайових задач: для сумісного деформування складеного циліндра (ізотропні матриця, перехідний шар, волокно) та однорідного трансверсально-ізотропного циліндра, що моделює композит.

Основні припущення:

- матеріали матриці, перехідного шару і волокна є ізотропними, площини ізотропії співпадають та перпендикулярні осі волокна;
- композитний матеріал вважатимемо однорідним та трансотропним з площиною ізотропії, перпендикулярній осі волокна;
- зв'язок між напруженнями та деформаціями описується законом Гука;
- розглядається гексагональна укладка волокон в односпрямованому композиті.

Апроксимуємо об'єм елементарної гексагональної комірки об'ємом циліндра. Радіус у цьому випадку приймемо таким, щоб об'ємний вміст волокна в гексагональній комірці і об'ємний вміст волокна в циліндричній комірці були б однаковими (рис. 1).

Тоді представницький елемент волокнистого односпрямованого композиційного матеріалу, що має трансотропні властивості, представимо у вигляді комбінації трьох ізотропних циліндрів нескінченної довжини, що моделюють матрицю, перехідний шар та волокно відповідно.

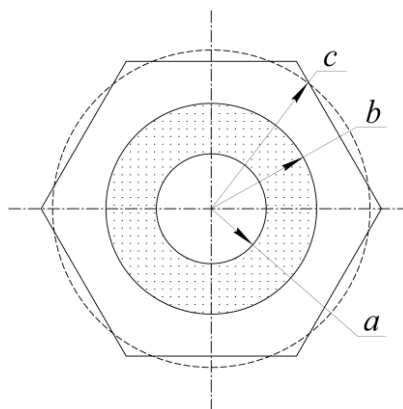


Рис. 1. Гексагональна комірка: a – радіус волокна; b – радіус перехідного шару; c – радіус матриці

Нехай f та l – відповідно об'ємний вміст волокна та перехідного шару у матеріалі композита. Враховуючи, що область, яку займає матриця в елементарній комірці, і область, яку в ній займає волокно, мають однакову висоту, отримуємо наступні співвідношення:

$$f = \frac{a^2}{c^2}, \quad l = \frac{b^2 - a^2}{c^2}. \quad (1)$$

Розглянемо сумісне поздовжнє розтягнення (рис. 2, a) суцільного циліндра ($0 < r \leq a$), що моделює волокно, порожнистого циліндра ($a \leq r \leq b$), що моделює перехідний шар, та порожнистого циліндра ($b \leq r \leq c$), що моделює матрицю. Перейдемо до циліндричної системи координат $Ozr\theta$. Тоді індекс 1 відповідатиме напрямку осі z , напрямком 2 – r , напрямком 3 – θ .

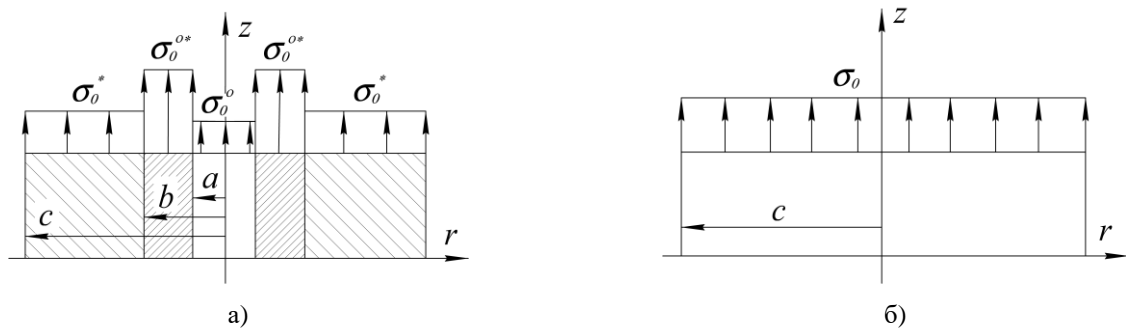


Рис. 2. Поздовжнє розтягнення: a – сумісне деформування матриці, перехідного шуру та волокна; b – деформування композита

Враховуючи вищезгадані припущення для вісесиметричної задачі, поле напружень визначатиметься наступними співвідношеннями:

$$\sigma_{zz} = \sigma_0, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(r), \quad \sigma_{zr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = 0. \quad (2)$$

Припускається, що характеристики перехідного шару величини сталі й відомі. Граничні умови для представницького елемента підберемо з урахуванням реальної поведінки неперервного односпрямованого композита. На границях розділу шарів відсутній стрибок за радіальним напруженням та радіальним переміщенням:

$$\sigma_{rr}^{\circ}(a) = \sigma_{rr}^{\circ*}(a), \quad \sigma_{rr}^{\circ*}(b) = \sigma_{rr}^*(b), \quad u_r^{\circ}(a) = u_r^{\circ*}(a), \quad u_r^{\circ*}(b) = u_r^*(b). \quad (3)$$

Тут і далі символ \circ позначає величини, що відносяться до волокна, символ $\circ*$ позначає величини, що відносяться до перехідного шару, а символ $*$ – величини, що відносяться до матриці.

Крім цього, відсутнє радіальне напруження на зовнішній поверхні композита (матриці):

$$\sigma_{rr}^*(c) = 0. \quad (4)$$

Радіальні переміщення описуються співвідношенням:

$$u_r(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad (5)$$

де C_1 і C_2 – сталі, що визначаються з крайових умов, $u_r(r)$ – розв'язок рівняння:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 0, \quad (6)$$

яке отримуємо з рівняння рівноваги для вісесиметричного напружено-деформованого стану.

Осьові переміщення описуються співвідношенням [20]:

$$u_z(z) = \left(\frac{\sigma_0(1-\nu-2\nu^2)}{E(1-\nu)} - \frac{2C_1\nu}{1-\nu} \right) z. \quad (7)$$

Для волокна при $r = 0$ переміщення $u_r^{\circ}(0) = 0$, тоді маємо, що $C_2 = 0$. Тепер співвідношення (5) запишеться у вигляді (перепозначимо C_1 на A):

$$u_r^{\circ}(r) = Ar. \quad (8)$$

Тоді напружено-деформований стан ізотропного волокна описуватиметься, окрім (8), наступними співвідношеннями:

$$\sigma_{\theta\theta}^{\circ} = \sigma_{rr}^{\circ} = \frac{\sigma_0^{\circ} \nu^{\circ} + AE^{\circ}}{1 - \nu^{\circ}}, \quad (9)$$

$$u_z^{\circ}(z) = \left(\frac{\sigma_0^{\circ} (1 - \nu^{\circ} - 2(\nu^{\circ})^2)}{E^{\circ} (1 - \nu^{\circ})} - \frac{2A\nu^{\circ}}{1 - \nu^{\circ}} \right) z. \quad (10)$$

Аналогічно запишемо співвідношення, що описують напружено-деформований стан перехідного шару (перепозначимо C_1 на C , а C_2 на D):

$$u_r^{*\circ}(r) = Cr + \frac{D}{r}, \quad (11)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{*\circ}(r) = E^{*\circ} \left(\frac{\sigma_0^{*\circ} \nu^{*\circ}}{E^{*\circ} (1 - \nu^{*\circ})} + \frac{C}{1 - \nu^{*\circ}} + \frac{D}{r^2 (1 + \nu^{*\circ})} \right), \quad (12)$$

$$\sigma_{rr}^{*\circ}(r) = E^{*\circ} \left(\frac{\sigma_0^{*\circ} \nu^{*\circ}}{E^{*\circ} (1 - \nu^{*\circ})} + \frac{C}{1 - \nu^{*\circ}} - \frac{D}{r^2 (1 + \nu^{*\circ})} \right), \quad (13)$$

$$u_z^{*\circ}(z) = \left(\frac{\sigma_0^{*\circ} (1 - \nu^{*\circ} - 2(\nu^{*\circ})^2)}{E^{*\circ} (1 - \nu^{*\circ})} - \frac{2C\nu^{*\circ}}{1 - \nu^{*\circ}} \right) z. \quad (14)$$

Співвідношення, які описують напружено-деформований стан ізотропної матриці (перепозначимо C_1 на K , а C_2 на H):

$$u_r^*(r) = Kr + \frac{H}{r}, \quad (15)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^*(r) = E^* \left(\frac{\sigma_0^* \nu^*}{E^* (1 - \nu^*)} + \frac{K}{1 - \nu^*} + \frac{H}{r^2 (1 + \nu^*)} \right), \quad (16)$$

$$\sigma_{rr}^*(r) = E^* \left(\frac{\sigma_0^* \nu^*}{E^* (1 - \nu^*)} + \frac{K}{1 - \nu^*} - \frac{H}{r^2 (1 + \nu^*)} \right), \quad (17)$$

$$u_z^*(z) = \left(\frac{\sigma_0^* (1 - \nu^* - 2(\nu^*)^2)}{E^* (1 - \nu^*)} - \frac{2K\nu^*}{1 - \nu^*} \right) z. \quad (18)$$

Невідомі постійні A , C , D , K , H знаходимо з системи рівнянь, складеної з умов (3) та (4):

$$A = -2 \frac{\sigma_0^{\circ}}{k_8} E^{\circ*} \nu^* (1 - \nu^{\circ}) (f + l) (1 - f - l) - \frac{\sigma_0^{\circ*}}{k_8} l \nu^{*\circ} (1 - \nu^{\circ}) (k_6 + (f + l) k_7) - \frac{\sigma_0^{\circ}}{k_8} \nu^{\circ} \left(2f E^{\circ*} (1 + \nu^*) + l (1 + \nu^{*\circ}) k_5 + (f + l) \left(2f E^{\circ*} (1 - \nu^*) + l (1 + \nu^{*\circ}) k_4 \right) \right), \quad (19)$$

$$C = -\frac{\sigma_0^{\circ*}}{k_8} \nu^* (1 - \nu^{*\circ}) (f + l) (1 - f - l) k_3 - \frac{\sigma_0^{\circ}}{k_8} f \nu^{\circ} (1 - \nu^{*\circ}) (k_6 + (f + l) k_7) -$$

$$-\frac{\sigma_0^{\circ*}}{k_8} \nu^{\circ*} \left(f \frac{k_2}{E^{\circ*}} (1+\nu^{\circ*}) + l(1+\nu^{\circ*})k_3 + (f+l) \left(f \frac{k_1}{E^{\circ*}} (1+\nu^{\circ*}) + l(1-\nu^{\circ*})k_3 \right) \right), \quad (20)$$

$$D = f(f+l)(1+\nu^{\circ*}) \frac{c^2}{k_8} \left(\sigma_0^{\circ*} \nu^{\circ*} (1f-l)(2E^{\circ} - k_3) - \right. \\ \left. - \sigma_0^{\circ} \nu^{\circ} (k_5 + (f+l)k_4) + \sigma_0^{\circ*} \frac{\nu^{\circ*}}{E^{\circ*}} (k_2 + (f+l)k_1) \right), \quad (21)$$

$$K = \frac{\sigma_0^{\circ*}}{k_8} \frac{\nu^{\circ*}}{E^{\circ*}} \left(-2fk_2 - lk_3k_5 + E^{\circ*} (f+l) (2fE^{\circ*} (1-\nu^{\circ}) + l(1-\nu^{\circ*})k_3) \right) - \\ - 2 \frac{\sigma_0^{\circ}}{k_8} \nu^{\circ} E^{\circ*} f (f+l) (1-\nu^{\circ*}) - \frac{\sigma_0^{\circ*}}{k_8} \nu^{\circ*} l (f+l) (1-\nu^{\circ}) k_3, \quad (22)$$

$$H = -(f+l)(1+\nu^{\circ*}) \frac{c^2}{k_8} \left(\sigma_0^{\circ*} \frac{\nu^{\circ*}}{E^{\circ*}} E^{\circ*} (-2fE^{\circ} - lk_3) + 2\sigma_0^{\circ} \nu^{\circ} fE^{\circ*} + \sigma_0^{\circ*} \nu^{\circ*} lk_3 \right), \quad (23)$$

де $k_1 = E^{\circ*} (E^{\circ} (1-\nu^{\circ}) - E^{\circ*} (1-\nu^{\circ*}))$, $k_2 = E^{\circ*} (E^{\circ} (1+\nu^{\circ}) + E^{\circ*} (1-\nu^{\circ}))$, $k_3 = E^{\circ*} (1-\nu^{\circ}) + E^{\circ} (1+\nu^{\circ*})$,
 $k_4 = E^{\circ*} (1-\nu^{\circ*}) - E^{\circ} (1-\nu^{\circ})$, $k_5 = E^{\circ*} (1+\nu^{\circ}) + E^{\circ} (1-\nu^{\circ*})$, $k_6 = E^{\circ*} (1+\nu^{\circ}) - E^{\circ} (1+\nu^{\circ*})$,
 $k_7 = E^{\circ*} (1-\nu^{\circ}) + E^{\circ} (1+\nu^{\circ*})$, $k_8 = (f+l)(2fk_1 + lk_3k_4) + 2fk_2 + lk_3k_5$.

Розглянемо тепер аналогічну задачу для однорідного транстропного матеріалу, що моделює поведінку композита (рис. 2, б). У цьому випадку поле напружень визначатиметься такими співвідношеннями:

$$\sigma_{zz} = \sigma_0, \quad \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = 0. \quad (24)$$

Умови узгодження в переміщеннях для представницького елемента до та після гомогенізації запишемо як

$$u_z^{\circ}(h) = u_z^{\circ*}(h), \quad u_z^{\circ*}(h) = u_z^*(h), \quad u_z^*(h) = u_z(h). \quad (25)$$

З перших двох умов (25), враховуючи (19), (20) та (22), матимемо

$$\sigma_0^* = \sigma_0^{\circ*} m, \quad (26)$$

$$\sigma_0^{\circ} = \sigma_0^{\circ*} \frac{g_1 + g_2 m}{g_3}, \quad (27)$$

де

$$m = \frac{g_1 g_4 + g_3 g_5}{g_3 g_6 - g_2 g_4}, \quad g_1 = \frac{1}{E^{\circ*}} - \frac{2(\nu^{\circ*})^2}{1-\nu^{\circ*}} \left(\frac{1}{E^{\circ*}} - \frac{x_2}{k_8} \right) - (k_6 + (f+l)k_7) \frac{2l\nu^{\circ}\nu^{\circ*}}{k_8},$$

$$g_2 = (f+l)(1-f-l) \frac{2\nu^{\circ*}}{k_8} (\nu^{\circ*} k_3 - 2E^{\circ*} \nu^{\circ}),$$

$$g_3 = \frac{1}{E^{\circ}} - \frac{2(\nu^{\circ})^2}{1-\nu^{\circ}} \left(\frac{1}{E^{\circ}} - \frac{x_1}{k_8} \right) - (k_6 + (f+l)k_7) \frac{2f\nu^{\circ}\nu^{\circ*}}{k_8},$$

$$g_4 = \frac{2\nu^{\circ} f}{k_8} (2\nu^{\circ*} E^{\circ*} (f+l) - \nu^{\circ*} (k_6 + (f+l)k_7)),$$

$$g_5 = -\frac{1}{E^{\circ*}} + \frac{2(v^{\circ*})^2}{1-v^{\circ*}} \left(\frac{1}{E^{\circ*}} - \frac{x_2}{k_8} \right) + (f+l)k_3 \frac{2lv^*v^{\circ*}}{k_8},$$

$$g_6 = -\frac{1}{E^*} \left(1 - \frac{2(v^*)^2}{1-v^*} \left(1 + \frac{x_3}{k_8} \right) \right) + (f+l)(1-f-l) \frac{2v^*v^{\circ*}}{k_8} k_3,$$

$$x_1 = 2fE^{\circ*}(1+v^*) + lk_5(1+v^{\circ*}) + (f+l)(2fE^{\circ*}(1-v^*) + lk_4(1+v^{\circ*})),$$

$$x_2 = (f+l) \left(\frac{fk_1}{E^{\circ*}}(1+v^{\circ*}) + lk_3(1-v^*) \right) + \frac{fk_2}{E^*}(1+v^*) + lk_3(1+v^*),$$

$$x_3 = -2fk_2 - lk_3k_5 + E^*(f+l)(2fE^{\circ*}(1-v^{\circ}) + lk_3(1-v^{\circ*})).$$

Для того, щоб збіглися умови рівноваги для обох задач, необхідно, щоб виконувалася умова:

$$\pi a^2 \sigma_0^{\circ} + \pi(b^2 - a^2) \sigma_0^{*\circ} + \pi(c^2 - b^2) \sigma_0^{*\circ} = \pi c^2 \sigma_0. \quad (28)$$

Перейшовши до об'ємних часток складових композита, отримуємо:

$$\sigma_0^{\circ} f + \sigma_0^{*\circ} l + \sigma_0^{*\circ} (1-f-l) = \sigma_0. \quad (29)$$

Підставивши (26) та (27) в (29), маємо:

$$\sigma_0^{*\circ} = \frac{\sigma_0}{l + f \frac{g_1 + g_2 m}{g_3} + m(1-f-l)}. \quad (30)$$

Тоді (26) та (27) запишеться у вигляді:

$$\sigma_0^{*\circ} = \frac{\sigma_0}{l + f \frac{g_1 + g_2 m}{g_3} + m(1-f-l)} m, \quad (31)$$

$$\sigma_0^{\circ} = \frac{\sigma_0}{l + f \frac{g_1 + g_2 m}{g_3} + m(1-f-l)} \cdot \frac{g_1 + g_2 m}{g_3}. \quad (32)$$

Переміщення визначаємо за формулою:

$$u_z(z) = \frac{1}{E_1} \sigma_0 z + C_1. \quad (33)$$

З урахуванням того, що для цієї задачі виконується умова $u_z(0) = 0$, стала $C_1 = 0$, тому вираз для переміщення набуває вигляду:

$$u_z(z) = \frac{1}{E_1} \sigma_0 z. \quad (34)$$

Тоді третє зі співвідношень (25) з урахуванням (18) та (34) запишеться у вигляді:

$$\frac{\sigma_0^*(1-v^* - 2(v^*)^2)}{E^*(1-v^*)} - \frac{2Kv^*}{(1-v^*)} = \frac{1}{E_1} \sigma_0. \quad (35)$$

З урахуванням (22), (30)–(32), після перетворень отримуємо формулу для визначення ефективного поздовжнього модуля пружності композиційного матеріалу з ізотропними складовими за наявності перехідного шару між ними:

$$E_1 = \frac{l + f \frac{g_1 + g_2 m}{g_3} + m(1 - f - l)}{\frac{g_1 + g_2 m}{g_3(1 - \nu^\circ)} \left(\frac{1 - \nu^\circ - 2\nu^{\circ 2}}{E^\circ} + \frac{2\nu^{\circ 2} x_1}{k_8} \right) + 2 \frac{\nu^\circ}{k_8} (2mE^{\circ*} \nu^* (f + l)(1 - f - l) + l\nu^{\circ*} (k_6 + (f + l)k_7))}. \quad (36)$$

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗРАХУНОК ПОЗДОВЖНЬОГО МОДУЛЯ ПРУЖНОСТІ КОМПОЗИТИВ

Проведемо розрахунок поздовжнього модуля пружності E_1 , отриманого за формулою (36), варіюючи об'ємним вмістом перехідного шару. Розглянемо односпрямований волокнистий композит (склопластик) з гексагональною укладкою циліндричних скляних волокон в епоксидній матриці. Волокна, матриця та перехідний шар є ізотропними з наступними пружними характеристиками: скловолокно – $E^\circ = 70$ ГПа, $\nu^\circ = 0,2$, епоксидна матриця – $E^* = 2,91$ ГПа, $\nu^* = 0,356$, перехідний шар – $E^{\circ*} = 5,4$ ГПа, $\nu^{\circ*} = 0,34$ [16].

Зафіксуємо об'ємну частку волокна $f = 0,1$, а об'ємну частку перехідного шару візьмемо в діапазоні $[0,1; \dots; 0,4]$ з кроком 0,05. Результати обчислень зведені в табл. 1 та проілюстровані на рис. 3.

Таблиця 1

| l | 0,1 | 0,15 | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,35 | 0,4 |
|-------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| E_1 | 9,8801 | 10,0052 | 10,1301 | 10,2549 | 10,3795 | 10,5041 | 10,6287 |

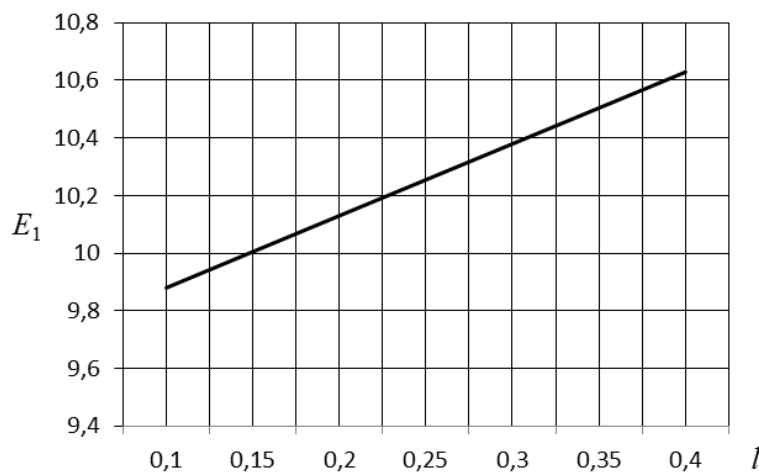


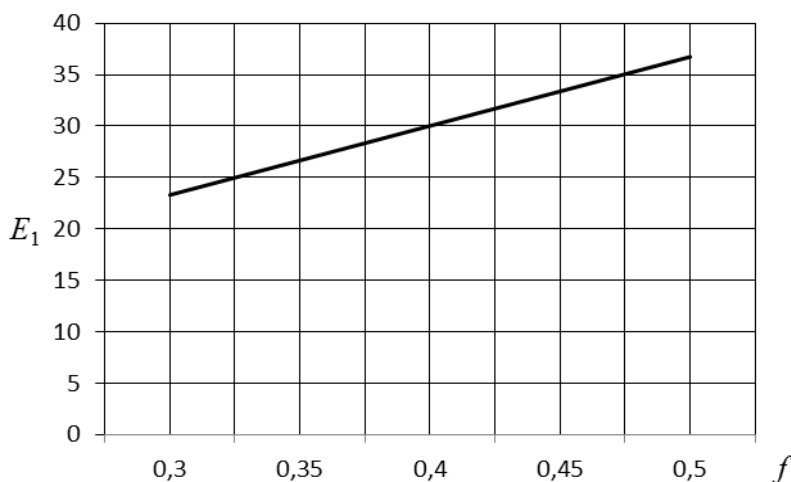
Рис. 3. Значення E_1 при $f = 0,1$ та $l \in [0,1; 0,4]$

Як видно з рис. 3, залежність поздовжнього модуля пружності E_1 від об'ємної частки перехідного шару l має зростаючий характер, що узгоджується з фізичним змістом цих показників.

Зафіксуємо тепер об'ємну частку перехідного шару $l = 0,1$, а об'ємну частку волокна візьмемо в діапазоні $[0,3; \dots; 0,5]$ з кроком 0,05. Результати обчислень зведені в табл. 2 та проілюстровані на рис. 4.

Таблиця 2

| f | 0,3 | 0,35 | 0,4 | 0,45 | 0,5 |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|
| E_1 | 23,3099 | 26,6658 | 30,0212 | 33,3761 | 36,7306 |

Рис. 4. Значення E_1 при $l = 0,1$ та $f \in [0,3; 0,5]$

Залежність поздовжнього модуля пружності від об'ємної частки волокна при фіксованому значенні l має також яскраво виражений зростаючий характер, близький до лінійного (рис. 4).

ВИСНОВКИ

У результаті виконаного дослідження отримано аналітичне співвідношення для ефективного поздовжнього модуля пружності E_1 для композита з ізотропними компонентами за наявності перехідного шару між ними. Воно відображає залежність від пружних характеристик матриці, перехідного шару, волокна та об'ємних часток волокна та перехідного шару в матеріалі композита.

Проведено розрахунок значень поздовжнього модуля пружності для композита, варіюючи об'ємним вмістом перехідного шару. Відзначимо, що і при фіксованій об'ємній частці як волокна, так і перехідного шару залежність поздовжнього модуля пружності E_1 від об'ємної частки перехідного шару і волокна відповідно має зростаючий характер, що узгоджується з фізичним змістом цих показників.

Варто відзначити, що запропонована формула включає, зокрема, і пружні характеристики перехідного шару, що ускладнює її широке використання. Це пов'язано з тим, що пружні характеристики міжфазових шарів для конкретних пар матриць та наповнювачів визначені для дуже вузького кола композитів. Надалі доцільним буде виведення формули, що включає лише пружні характеристики матриці та волокна.

ЛІТЕРАТУРА

1. Tang T., Yu W. A variational asymptotic micromechanics model for predicting conductivities of composite materials. *Journal of mechanics of materials and structures*. 2007. Vol. 2, Issue 9. P. 1813–1830.
2. Большаков В. И., Андрианов И. В., Данишевский В. В. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры: монография / отв. за вып. Р. О. Лазарева. Днепропетровск: Пороги, 2008. 196 с.
3. Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Сборщиков С. В. Конечно-элементное моделирование эффективных вязкоупругих свойств однонаправленных композиционных материалов. *Математическое моделирование и численные методы*. 2014. № 2. С. 28–48.

4. Srivastava V. K., Gabbert U., Berger H., Singh S. Analysis of particles loaded fiber composites for the evaluation of effective material properties with the variation of shape and size. *International Journal of Engineering, Science and Technology*. 2011. Vol. 3, Issue 1. P. 52–68.
5. Klusemann B., Svendsen B. Homogenization methods for multi-phase elastic composites: Comparisons and benchmarks. *Technische mechanik*. 2010. Vol. 30 (4). P. 374–386.
6. Класторны М., Кондерла П., Пиекарский Р. Точная теория жесткости однонаправленных волокнисто-армированных композитов. *Механика композитных материалов*. 2009. Т. 45, № 1. С. 109–144.
7. Гребенюк С. М. Визначення пружних сталих композита з транстропними матрицею та волокном на основі кінематичної умови узгодження. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2012. № 1. С. 62–76.
8. Kari S., Berger H., Gabbert U. Evaluation of influence of interphase material parameters on effective material properties of three phase composites. *Composites Science and Technology*. 2007. Vol. 68, Issues 3-4. P. 684–691.
9. Lopez-Realpozo J. C., Rodríguez-Ramos R., Guinovart-Díaz R. Effective elastic shear stiffness of a periodic fibrous composite with non-uniform imperfect contact between the matrix and the fibers. *International Journal of Solids and Structures*. 2014. Vol. 51, Issue 6. P. 1253–1262.
10. Ko Y.-F., Ju J. W. New higher-order bounds on effective transverse elastic moduli of three-phase fiber-reinforced composites with randomly located and interacting aligned circular fibers. *Acta Mechanica*. 2012. Vol. 223 (11). P. 2437–2458.
11. Sockalingam S., Nilakantan G. Fiber-matrix interface characterization through the microbond test. *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*. 2012. Vol. 13(3). P. 282–295.
12. Würkner M., Berger H., Gabbert U. Numerical study of effective elastic properties of fiber reinforced composites with rhombic cell arrangements and imperfect interface. *International Journal of Engineering Science*. 2013. Vol. 63. P. 1–9.
13. Магомедов Г. М., Яхьяева Х. Ш., Козлов Г. В. Молекулярная подвижность и межфазные явления в композитах эпоксиполимер/стекловолокно. *Известия ДГПУ: Естественные и точные науки*. 2013. № 4. С. 16–19.
14. Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н., Савельева И. Ю. Оценки эффективного коэффициента теплопроводности композита при наличии промежуточного слоя между волокном и матрицей. *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. «Машиностроение»*. 2014. № 1. С. 58–67.
15. Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н., Савельева И. Ю. Оценка теплопроводности волокнистого композита при непрерывном изменении теплопроводности промежуточного слоя между волокном и матрицей. *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. «Машиностроение»*. 2013. № 4. С. 3–15.
16. Ашихмин В. А., Мерзлякова Н. А., Шапаев И. В. Влияние межфазного слоя на упругие характеристики волокнистого материала с гексагональной структурой. *Научно-практический электронный журнал Аллея Науки*. 2018. № 4 (20).
17. Yao Y., Chen S., Chen P. The effect of a graded interphase on the mechanism of stress transfer in a fiber-reinforced composite. *Mechanics of Materials*. 2013. Vol. 58. P. 35–54.
18. Ерасов В. С., Макарычева А. И. Определение модуля упругости межфазной зоны в слоистом полимерном композиционном материале. *Авиационные материалы и технологии*. 2014. № 2. С. 53–55.
19. Нелюб В. А. Характеристики межфазных слоев полимерных композиционных материалов. *Клеи. Герметики. Технологии*. 2013. № 6. С. 23–25.
20. Гребенюк С. Н. Упругие характеристики композиционного материала с транстропной матрицей и волокном. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб. наук. праць*. 2011. Вип. 12. С. 62–68.

REFERENCES

1. Tang, T. & Yu, W. (2007). A variational asymptotic micromechanics model for predicting conductivities of composite materials. *Journal of mechanics of materials and structures*, Vol. 2 (9), pp. 1813–1830. doi: 10.2140/jomms.2007.2.1813.
2. Bol'shakov, V. I., Andrianov, I. V. & Danishevskij, V. V. (2008). Asymptotic methods for calculating composite materials with allowance for internal structure. Dnepropetrovsk: «Porogy» (In Ukraine).
3. Dimitrienko, Yu. I., Gubareva, E. A. & Sborshnikov, S. V. (2014). Finite-element modeling of effective viscoelastic properties of unidirectional composite materials. *Mathematical Modeling and Numerical Methods*, Vol. 2, pp. 28–48. Available at: <http://www.mathnet.ru/links/4986a9de2f7714798765784534f1cd23/mmcm12.pdf>.
4. Srivastava, V. K., Gabbert, U., Berger, H. & Singh, S. (2011). Analysis of particles loaded fiber composites for the evaluation of effective material properties with the variation of shape and size. *International Journal of Engineering. Science and Technology*, Vol. 3 (1), pp. 52–68. doi: 10.4314/ijest.v3i1.67638.
5. Klusemann, B. & Svendsen, B. (2010). Homogenization methods for multi-phase elastic composites: Comparisons and benchmarks. *Technische mechanik*, Vol. 30 (4), pp. 374–386. Available at: http://www.ovgu.de/ifme/zeitschrift_tm/2010_Heft4/07_Klusemann.pdf.
6. Klastorny, M., Konderla, P. & Piekarskij, R. (2009). The exact stiffness theory of unidirectional fibrous-reinforced composites. *Mechanics of composite materials*, Vol. 45 (1), pp. 109–144.
7. Grebenyuk, S. M. (2012). Determination of elastic stable composite with transistor matrix and fiber based on the kinematic condition of harmonization. *Visnik of the Zaporizhzhya National University*, No. 1, pp. 62–76.
8. Kari, S., Berger H. & Gabbert, U. (2007). Evaluation of influence of interphase material parameters on effective material properties of three phase composites. *Composites Science and Technology*, Vol. 68 (3-4), pp. 684–691. doi: 10.1016/j.compscitech.2007.09.009.
9. Lopez-Realpozo, J. C., Rodriguez-Ramos, R. & Guinovart-Diaz, R. (2014). Effective elastic shear stiffness of a periodic fibrous composite with non-uniform imperfect contact between the matrix and the fibers. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 51 (6), pp. 1253–1262. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2013.12.015.
10. Ko, Y.-F. & Ju, J. W. (2012). New higher-order bounds on effective transverse elastic moduli of three-phase fiber-reinforced composites with randomly located and interacting aligned circular fibers. *Acta Mechanica*, Vol. 223 (11), pp. 2437–2458.
11. Sockalingam, S. & Nilakantan, G. (2012). Fiber-matrix interface characterization through the microbond test. *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 13 (3), pp. 282–295. doi: 10.5139/IJASS.2012.13.3.282.
12. Würkner, M., Berger, H. & Gabbert, U. (2013). Numerical study of effective elastic properties of fiber reinforced composites with rhombic cell arrangements and imperfect interface. *International Journal of Engineering Science*, Vol. 63, pp. 1–9. doi: 10.1016/j.ijengsci.2012.10.002.
13. Magomedov, G. M., Yah`yaeva, H. Sh. & Kozlov, G. V. (2013). Molecular mobility and interfacial phenomena in epoxy polymer / fiberglass composites. *Izvestiya DGPU: Natural and exact sciences*, No. 4, pp. 16–19.
14. Zarubin, V. S., Kuvyrkin, G. N. & Savel`eva, I. Yu. (2014). Estimates of the effective conductivity of the composite with the presence of the intermediate layer between fiber and matrix. *Vestnik MGTU im. N. E. Bauman. Series «Engineering»*, No. 1, pp. 58–67.
15. Zarubin, V. S., Kuvyrkin, G. N. & Savel`eva, I. Yu. (2013). Evaluation of the thermal conductivity of the fiber composite with a continuous change in the thermal conductivity of the intermediate layer between the fiber and the matrix. *Vestnik MGTU im. N. E. Bauman. Series «Engineering»*, No. 4, pp. 3–15.

16. Ashihmin, V. A., Merzlyakova, N. A. & Shapaev, I. V. (2018). Effect of interphase layers on the elastic characteristics of the fibrous material with a hexagonal structure. Scientific and practical electronic journal of Science Alley, No. 4 (20). Available at: https://alley-science.ru/sovremennaya_nauka_i_ee_razvitiye__4_20___2018/.
17. Yao, Y., Chen, S. & Chen, P. (2013). The effect of a graded interphase on the mechanism of stress transfer in a fiber-reinforced composite. Mechanics of Materials, Vol. 58, pp. 35–54. doi: 10.1016/j.mechmat.2012.11.008.
18. Erasov, V. S. & Makarycheva, A. I. (2014). Determination of the elastic modulus of the interphase zone in a layered polymer composite material. Aviation materials and technologies, No. 2., pp. 53–55. doi: 10.18577/2071-9140-2014-0-2-53-55.
19. Nelyub V. A. (2013). Characteristics of interfacial layers of polymer composite materials. Adhesives. Sealants. Technology, No. 6, pp. 23–25.
20. Grebenyuk, S. N. (2011). Elastic characteristics of a composite material with a transversely isotropic matrix and fiber. Methods of solving applied problems of mechanics of a deformable solid: a collection of scientific works, No. 12, pp. 62–68.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-15

КОНТАКТ ПЛОСКОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО ШТАМПА З ПРУЖНИМ ПІВПРОСТОРОМ ПРИ НЕМОНОТОННОМУ НАВАНТАЖУВАННІ З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ

Стреляєв Ю. М., к. ф.-м. н, Клименко М. І., к. ф.-м. н., доцент, Стреляєв О. Ю., аспірант

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

strelkiny@gmail.com

Отримано чисельний розв'язок квазістатичної контактної задачі про взаємодію жорсткого циліндричного штампа з плоскою підшоною і пружного півпростору при наявності тертя Кулона між ними. Навантаження штампа здійснювалося в два етапи. На початку, за рахунок монотонно зростаючого нормального зміщення, штамп вдавлювався в півпростір на фіксовану величину заглиблення. Потім, за рахунок монотонного зменшення нормального зміщення, відбувався другий етап неповного розвантаження. У постановці задачі використовувалася гіпотеза про можливість малого збурення умов процесу навантаження взаємодіючих тіл у квазістатичних контактних задачах теорії пружності з урахуванням тертя Кулона. На основі цієї гіпотези крайові умови контактної взаємодії тіл на кожному кроці дискретного процесу навантаження виражені у вигляді рівностей і нерівностей. Отримані крайові умови є модифікацією крайових умов квазістатичної контактної задачі в класичній постановці. Механічний сенс цієї модифікації полягає у введенні малого запізнювання дії нормальних контактних напружень відносно дотичних контактних напружень на кожному кроці навантаження. Квазістатична контактна задача в модифікованій постановці зведена до послідовного розв'язування на кожному кроці навантаження системи нелінійних крайових інтегральних рівнянь. Чисельний алгоритм розв'язання отриманих систем полягав у їх дискретизації і використанні ітераційного процесу для розв'язання дискретного аналога системи на кожному кроці навантаження. Виконано порівняння отриманих чисельних результатів з відомим чисельним розв'язком задачі, а також з розв'язком квазістатичної задачі в немодифікованій постановці. Аналіз результатів показав, що прийнята модифікація квазістатичної постановки контактної задачі є коректною і запропонований підхід дозволяє отримати розв'язок цієї задачі, достатньо близький до її відомого чисельного розв'язку.

Ключові слова: контактна задача, пружність, тертя Кулона, плоский штамп, розвантаження, інтегральне рівняння, ітераційний метод.

CONTACT WITH FRICTION OF A FLAT CYLINDRICAL PUNCH WITH AN ELASTIC HALF-SPACE UNDER NONMONOTONIC LOADING

Streliaiev Yu. M., Klymenko M. I., Streliaiev O. Yu.

*Zaporizhzhya National University,
Zhykovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

strelkiny@gmail.com

A numerical solution to the quasistatic contact problem of the interaction of a rigid flat cylindrical punch with an elastic half-space taking into account Coulomb friction is obtained. The process of loading the stamp was carried out in two stages. At the first stage, the punch was pressed into the half-space to the fixed value of indentation depth due to the monotonically increasing normal displacement. Then, due to the monotonous decrease in the normal displacement of the stamp, the second stage of incomplete unloading was realized. The statement of the problem is based on the original hypothesis of the possibility of a small perturbation of the loading conditions in quasistatic frictional contact problems of elasticity. New modification of boundary conditions of the quasistatic contact problem is obtained using this hypothesis. The boundary conditions for contact interaction of bodies at each step of discrete loading process are expressed as a system of equalities and inequalities. Mechanical meaning of this modification is an introduction of a small delay in action of normal contact stresses with respect to tangential contact stresses at each step of loading process. The quasistatic contact problem in the modified formulation is reduced to a series of similar systems of the non-linear boundary integral equations. Each of the obtained systems describes the conditions of contact interaction at each step of loading. Numerical algorithm for solving these systems consisted of discretizing the obtained integral equations and using the iterative process to solve the discrete analog of the system at each loading step. The obtained numerical results are compared with the well-known numerical solution of the problem, as well as with the solution of a quasistatic problem in an unmodified statement. The analysis of the results showed that the accepted hypothesis about the modification of the quasistatic statement is correct for this contact problem and the proposed approach allows us to obtain a solution which is close enough to known numerical solution of this problem.

Key words: contact problem, elasticity, Coulomb friction, flat punch, unloading, integral equation, iterative method.

ВСТУП

Одним із суттєвих факторів, що впливають на міцність і знос взаємодіючих елементів різних механічних систем, є тертя, що виникає на контактуючих поверхнях елементів цих систем. Основна трудність урахування тертя в контактних задачах полягає в тому, що на поверхні контакту виникають зони часткового зчеплення і проковзування, які заздалегідь невідомі. Ця обставина призводить до появи геометричних і фізичних нелінійностей у таких задачах, що істотно ускладнює їх розв'язання. Уперше аналітичний розв'язок задачі про контакт ідентичних пружних куль з частковим проковзуванням було отримано в роботах С. Cattaneo [1] і R. D. Mindlin [2]. Плоска контактна задача про вдавлювання прямокутного штампа в пружну півплощину при невідомій межі областей зчеплення і проковзування вперше розв'язана Л. О. Галінім [3]. Розв'язок осесиметричної задачі для тіл з різними пружними властивостями знайдено в роботах [4, 5]. Узагальнений метод Вінера–Хопфа для розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь деяких плоских і осесиметричних контактних задач використовувався в роботах [6, 7]. Особливий інтерес, обумовлений часто спостережуваними на практиці ушкодженнями поверхонь деталей при немонотонних навантаженнях, представляє дослідження розподілу контактних зусиль, що розвиваються в результаті тертя на контактній поверхні, при зменшенні зовнішнього навантаження, а також під дією коливальних сил. Перші спроби таких досліджень зроблені в роботах [8-11]. Досліджуючи випадок розвантаження для плоского кругового штампа, J. R. Turner встановив [8], що на початковій стадії розвантаження зона проковзування зміщується до центру й одночасно на межі ділянки контакту утворюється вузька кільцева зона зчеплення. R. D. Mindlin і H. Deresiewicz у роботі [9] дослідили розподіли поверхневих зусиль при контакті двох сферичних тіл під дією різних комбінацій нормального і дотичного навантажень. У роботах

[10, 11] виконані експериментальні дослідження контактної взаємодії сферичних тіл за наявності коливальних навантажень. Водночас слід зазначити, що чисельні методи розв'язання контактних задач такого типу в літературі досліджені недостатньо. Такі методи, як правило, ґрунтуються на варіаційній постановці задачі [12] або на її зведенні до операторних рівнянь [13-15]. У багатьох випадках при використанні нелінійних крайових інтегральних рівнянь автори обмежуються розглядом контактних задач без урахування тертя [13] або задач, у яких тертя враховується за умови повного проковзування тіл [14]. Перевага методу нелінійних крайових інтегральних рівнянь, запропонованого в роботі [15], полягає в тому, що він дозволяє враховувати часткове зчеплення і проковзування на поверхні контакту, а також історію зовнішнього навантаження в процесі взаємодії контактуючих тіл.

Метою даної статті є розв'язання контактних задач про фрикційну взаємодію пружних тіл при комбінованих немонотонних навантаженнях, а також визначення впливу малого збурення умов процесу навантаження взаємодіючих тіл на точність отриманих розв'язків.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо просторову контактну задачу про взаємодію плоского циліндричного штампа радіуса R та пружного півпростору. Вважатимемо, що для взаємодіючих тіл виконано наступні умови: штамп є абсолютно жорстким тілом; півпростір є лінійно-пружним і ізотропним; пружні переміщення точок півпростору малі порівняно з розмірами поверхні контакту. Нехай у ненавантаженому стані підшва штампа дотикається до площини, що обмежує півпростір. Введемо у просторі пов'язану зі штампом прямокутну декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ (рис. 1). Нехай під дією невідомого заздалегідь зовнішнього навантаження, що змінюється у часі, штамп здійснює задане залежне від часу t переміщення γ . Припустимо, що взаємодія тіл супроводжується поверхневим тертям, що описується законом Кулона [16]. Потрібно знайти розподіл питомого контактного навантаження, що діє на підшву штампа з боку пружного півпростору.

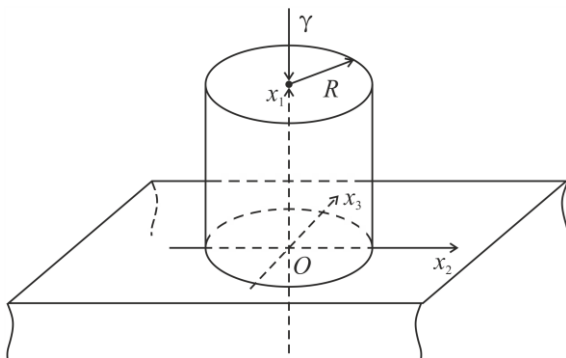


Рис. 1. Схема контактної взаємодії

Вважаючи, що вектор $\gamma(t)$ повільно змінюється при зміні часу t від 0 до фіксованого значення T , будемо нехтувати інерційними і хвильовими ефектами. Виконаємо дискретизацію процесу контактної взаємодії тіл, розглядаючи його як скінченне число l послідовних станів рівноваги (кроків навантажування) в моменти часу $t = t_i$, де $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_l = T$. Введемо для вектора $\gamma(t)$ і його компонентів на i -ому кроці навантажування наступні позначення:

$\gamma_i = (\Delta_{1i}, \Delta_{2i}, \Delta_{3i}) \equiv \gamma(t_i)$. На основі гіпотези про можливість малого збурення умов навантажування шляхом введення запізнювання контактних тисків відносно дотичних контактних напружень [15] контактна задача заводиться до відшукування на кожному i -му кроці навантажування невідомих функцій $p_{1i}(s)$, $p_{2i}(s)$, $p_{3i}(s)$, що задають нормальну і дотичні складові питомого контактного навантаження в обмеженій області Ω площини Ox_2x_3 (яка містить у собі ділянку контакту) і задовольняють в кожній точці $s = (x_2, x_3) \in \Omega$ наступним співвідношенням:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{li}(s) \geq 0; F_1(p_i, \Delta_{li})_s \geq 0; p_{li}(s) \cdot F_1(p_i, \Delta_{li})_s = 0; \\ \sqrt{p_{2i}^2(s) + p_{3i}^2(s)} \leq \mu \cdot p_{li-1}(s); \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{2i}(s) + \mu \cdot p_{li-1}(s) \cdot F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s = 0; \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{3i}(s) + \mu \cdot p_{li-1}(s) \cdot F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s = 0; \\ i = \overline{1, l}, \end{array} \right. \quad (1)$$

де $\mu > 0$ – коефіцієнт тертя, а функції $F_1(p_i, \Delta_{li})$, $F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})$, $F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})$ задаються співвідношеннями

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(p_i, \Delta_{li})_s = \sum_{j=1}^3 A_{1j}(p_{ji})_s + \Delta_{li}; \\ F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s = \sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{2i}(s); \\ F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s = \sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{3i}(s), \end{array} \right. \quad (2)$$

в яких $\tilde{\Delta}_{2i}(s) = \Delta_{2i} - \sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_{ji-1})_s - \Delta_{2i-1}$, $\tilde{\Delta}_{3i}(s) = \Delta_{3i} - \sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_{ji-1})_s - \Delta_{3i-1}$.

Інтегральні оператори впливу поверхневих напружень на поверхневі пружні переміщення, що входять у співвідношення (2), мають вигляд

$$A_{kj}(x)_s = \int_{\Omega} K_{kj}(s, s') \cdot x(s') ds', \quad (k, j = \overline{1, 3}).$$

Ядра $K_{kj}(s, s')$ цих операторів визначаються відповідно до розв'язків Буссінеска та Черруті [17] з наступних співвідношень:

$$K_{11}(s, s') = \frac{c_1}{r}; K_{12}(s, s') = -K_{21}(s, s') = \frac{c_2(x_2 - x'_2)}{r^2}; K_{13}(s, s') = -K_{31}(s, s') = \frac{c_2(x_3 - x'_3)}{r^2};$$

$$K_{22}(s, s') = \frac{c_1}{r} + \frac{c_3(x_2 - x'_2)^2}{r^3}; K_{23}(s, s') = -K_{32}(s, s') = \frac{c_3(x_2 - x'_2)(x_3 - x'_3)}{r^3};$$

$$K_{33}(s, s') = \frac{c_1}{r} + \frac{c_3(x_3 - x'_3)^2}{r^3};$$

$$c_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2}; c_2 = \frac{(1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2)}{2\pi E_2} - \frac{(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)}{2\pi E_1}; c_3 = \frac{\nu_1(1 + \nu_1)}{\pi E_1} + \frac{\nu_2(1 + \nu_2)}{\pi E_2};$$

$$r = |s - s'| = \sqrt{(x_2 - x'_2)^2 - (x_3 - x'_3)^2}. \quad (3)$$

У співвідношеннях (3) E_1 , E_2 і ν_1 , ν_2 – модулі Юнга і коефіцієнти Пуассона першого та другого тіла відповідно, а x_2 , x'_2 та x_3 , x'_3 – абсциси та ординати точок s і s' області Ω відповідно. Штамп вважатимемо умовно пружним тілом з нескінченним модулем Юнга, тобто приймемо $\frac{1}{E_1} = 0$ у співвідношеннях (3).

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ТА АЛГОРИТМ ЇХ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Використовуючи допоміжні дійсні функції вигляду [18]:

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } x < 0, \end{cases} \quad q(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{якщо } \sqrt{x^2 + y^2} \leq z, \\ \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{якщо } \sqrt{x^2 + y^2} > z, \end{cases}$$

систему (1) при фіксованому i можна звести до наступної системи нелінійних інтегральних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{1i}(s) = h \left(p_{1i}(s) - E \cdot \left(\sum_{j=1}^3 A_{1j}(p_{ji})_s + \Delta_{1i} \right) \right); \\ p_{2i}(s) = q \left(p_{2i}(s) - E \cdot \left(\sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{2i}(s) \right), p_{3i}(s) - E \cdot \left(\sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{3i}(s) \right), \mu \cdot p_{1i-1}(s) \right); \\ p_{3i}(s) = q \left(p_{3i}(s) - E \cdot \left(\sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{3i}(s) \right), p_{2i}(s) - E \cdot \left(\sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{2i}(s) \right), \mu \cdot p_{1i-1}(s) \right); \\ s \in \Omega; \quad i = \overline{1, l}, \end{array} \right. \quad (4)$$

де E – довільне додатне число. Отже, розглянута контактна задача зводиться до послідовного розв'язання на кожному i -му кроці системи нелінійних інтегральних рівнянь (4) відносно невідомих функцій $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s)$.

Нехай область Ω – це відкритий квадрат, обмежений паралельними осям x_2, x_3 відрізками прямих, с центром у початку координат. Для отримання чисельного розв'язку системи (4) розіб'ємо Ω на n^2 однакових неперетинних квадратів $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n^2}$, орієнтованих подібно Ω . Вважаючи, що при кожному фіксованому i невідомі функції $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s)$ приймають на кожному граничному елементі ω_k сталі значення $y_{3k-2i}, y_{3k-1i}, y_{3ki}$, отримаємо для визначення цих значень наступну серію l систем, кожна з яких містить $3n^2$ скалярних нелінійних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{3k-2i} = h \left(y_{3k-2i} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-2j} \cdot y_{ji} - b_{3k-2i} \right) \right); \\ y_{3k-1i} = q \left(y_{3k-1i} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-1j} \cdot y_{ji} - b_{3k-1i} \right), y_{3ki} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3kj} \cdot y_{ji} - b_{3ki} \right), \mu \cdot y_{3k-2i-1} \right); \\ y_{3ki} = q \left(y_{3ki} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3kj} \cdot y_{ji} - b_{3ki} \right), y_{3k-1i} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-1j} \cdot y_{ji} - b_{3k-1i} \right), \mu \cdot y_{3k-2i-1} \right); \\ k = \overline{1, n^2}, \quad i = \overline{1, l}. \end{array} \right. \quad (5)$$

У системі (5) числові параметри a_{kj} є елементами матриці податливості взаємодіючих тіл, а b_{ki} визначають умови навантаження взаємодіючих тіл на i -му кроці навантажування [15].

Наближений розв'язок системи (5) при кожному фіксованому i шукатимемо за допомогою методу простої ітерації, використовуючи наступний ітераційний процес:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(y_{1i}^{(0)}, y_{2i}^{(0)}, \dots, y_{3n^2 i}^{(0)} \right) \in R^{3n^2}; \quad k = \overline{1, n^2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ & y_{3k-2i}^{(m+1)} = h \left(y_{3k-2i}^{(m)} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-2j} y_{ji}^{(m)} - b_{3k-2i} \right) \right); \\ & y_{3k-1i}^{(m+1)} = q \left(y_{3k-1i}^{(m)} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-1j} y_{ji}^{(m)} - b_{3k-1i} \right), y_{3ki}^{(m)} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3kj} y_{ji}^{(m)} - b_{3ki} \right), \mu \cdot y_{3k-2i-1} \right); \\ & y_{3ki}^{(m+1)} = q \left(y_{3ki}^{(m)} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3kj} y_{ji}^{(m)} - b_{3ki} \right), y_{3k-1i}^{(m)} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-1j} y_{ji}^{(m)} - b_{3k-1i} \right), \mu \cdot y_{3k-2i-1} \right). \end{aligned} \right. \quad (6)$$

У роботі [19] доведено, що збіжність ітераційного процесу (6) на кожному i -му кроці навантажування при будь-якому виборі початкового наближення $\left(y_{1i}^{(0)}, y_{2i}^{(0)}, \dots, y_{3n^2 i}^{(0)} \right) \in R^{3n^2}$ можна забезпечити належним вибором довільної додатної константи E . При послідовному розв'язанні серії систем (5) за допомогою ітераційного процесу (6) природно обирати наближений розв'язок системи (5), отриманий на $(i-1)$ -му кроці навантажування, за початкове наближення на i -му кроці. При $i=1$ вважатимемо вектор початкового наближення нульовим.

РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНИХ РОЗРАХУНКІВ

Для чисельних розрахунків використовувались наступні вихідні дані. Радіус штампа $R=0,02$ м. Модуль Юнга E_2 і коефіцієнт Пуассона ν_2 півпростору були прийняті рівними $3,5 \cdot 10^4$ МПа і $0,44$ відповідно. Коефіцієнт тертя $\mu=0,07$. Відношення $\mu/\gamma=0,665$, де $\gamma=(1-2\nu_2)/(2-2\nu_2)$. Використовувалась поверхнева сітка, яка складалась з $41 \times 41=1681$ рівних квадратних граничних елементів з довжиною сторони $0,001$ м. Процес навантажування складався з двох етапів: початкового етапу вдавлювання штампа в півпростір і наступного етапу «розвантаження» за рахунок зворотного переміщення штампа до певного значення величини заглиблення штампа в півпростір. Початковий етап навантажування здійснювався за l кроків згідно з наступним характером зміни нормального зміщення Δ_{li} штампа, вираженого у метрах:

$$\Delta_{li} = -\frac{|\Delta_1|}{l} \cdot i, \quad i = \overline{1, l}. \quad (7)$$

Етап «розвантаження» здійснювався також за l кроків відповідно до співвідношення:

$$\Delta_{li} = -|\Delta_1| + \frac{|\Delta_1| \cdot (1-W)}{l} \cdot i, \quad i = \overline{1, l}, \quad (8)$$

де $W=0,818$ [8]. Величина $|\Delta_1|$ максимального заглиблення штампа в півпростір, що входить у співвідношення (7), (8), обиралась рівною 10^{-4} м. Дотичні зміщення штампа Δ_{2i} і Δ_{3i} вздовж осей Ox_2 і Ox_3 вважались рівними нулю на всіх кроках навантажування. Чисельний розв'язок, отриманий на першому етапі навантажування при $l=80$ у співвідношеннях (7), зіставлявся з відомим розв'язком цієї задачі [8] та з чисельним

розв'язком квазістатичної задачі в немодифікованій постановці [20] при 40 кроках навантажування, а також з чисельним розв'язком відповідної статичної задачі, отриманим згідно з [20] при одному кроці навантажування. На рис. 2 показано залежність безрозмірної величини $q/\mu p$ від безрозмірної координати x/a , де q і p є відповідно дотичною і нормальною складовими питомого контактного навантаження у вузлових точках сітки, розташованих на осі Ox_2 ; a – радіус ділянки контакту (в розглянутому випадку $a = R$).

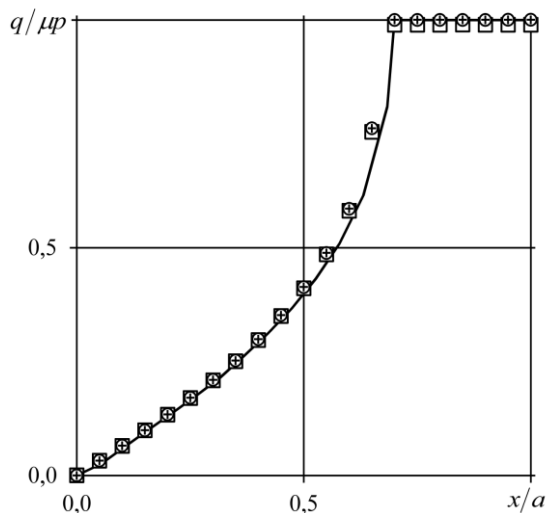


Рис. 2. Розв'язок контактної задачі (монотонне навантажування)

Тут суцільна лінія відповідає розв'язку [8], квадрати – отриманому чисельному розв'язку, круги – чисельному розв'язку квазістатичної задачі в немодифікованій постановці [20], символи «+» – чисельному розв'язку статичної задачі, отриманому згідно з [20]. Результати, наведені на рис. 2, свідчать про те, що отриманий чисельний розв'язок квазістатичної контактної задачі при 80 кроках навантажування відрізняється від розв'язку цієї задачі в немодифікованій постановці при 40 кроках навантажування несуттєво (відносна похибка не перевищує 2% відносно найбільшого значення величини $q/\mu p$). Максимальне відхилення отриманого розв'язку від розв'язку [8] складає приблизно 5%, а в переважній більшості вузлових точок не перевищує 2%. Похибка в 5% досягається в точці, розташованій поблизу межі зони зчеплення, де функція $q/\mu p$ має високий градієнт (див. рис. 2). Представлені на рис. 2 результати також свідчать про те, що отриманий запропонованим методом чисельний розв'язок квазістатичної контактної задачі (при $l = 80$) і отриманий згідно з [20] чисельний розв'язок відповідної статичної задачі (при $l = 1$) практично співпадають. Цей факт доводить, що квазістатичну контактну задачу при монотонному вдавлюванні плоского циліндричного штампa в пружний півпростір можна розглядати в статичній постановці.

На рис. 3 представлені результати, отримані при двохетапному навантаженні, що здійснювалося згідно зі співвідношеннями (7) і (8) при $l = 60$. Тут квадрати відповідають отриманому чисельному розв'язку, круги – чисельному розв'язку квазістатичної задачі в немодифікованій постановці [20], суцільна лінія – відомому чисельному розв'язку [8].

Результати, наведені на рис. 3, свідчать, що в переважній більшості вузлових точок центральної зони зчеплення і в зоні проковзування відхилення отриманого розв'язку від розв'язку [8] не перевищує 3% відносно максимального значення величини $q/\mu p$. Лише в окремих точках, розташованих біля межі зони проковзування, відносне відхилення порівнюваних розв'язків сягає 8%. Максимальне значення цього відхилення, що дорівнює приблизно 26%, досягається в точці на межі підшви штампa. Таке збільшення відхилення можна пояснити тим, що біля межі області контакту крива розв'язку [8] (суцільна лінія на рис. 3) має дуже високий градієнт. Порівняння отриманого чисельного розв'язку (квадрати

на рис. 3) з чисельним розв'язком цієї задачі в немодифікованій постановці (круги на рис. 3) свідчить про добру близькість порівнюваних величин. Максимальне відхилення порівнюваних розв'язків тут склало приблизно 3%.

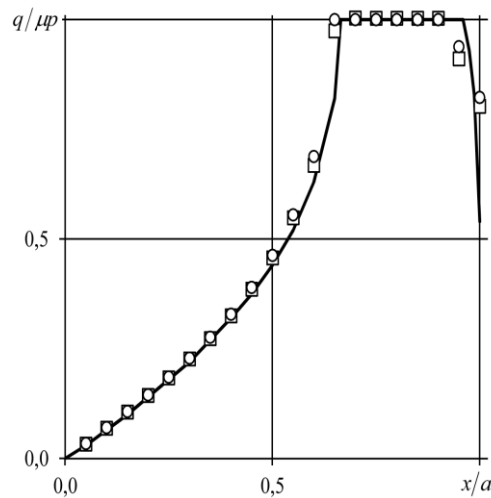


Рис. 3. Розв'язок контактної задачі (немонотонне навантажування з розвантаженням)

ВИСНОВКИ

Отримано чисельний розв'язок контактної задачі про фрикційну взаємодію плоского циліндричного штампа та пружного півпростору при немонотонному законі нормального навантажування штампа. Задача розглядалася в модифікованій квазістатичній постановці. Процес навантажування складався з початкового етапу монотонного вдавлювання штампа в півпростір і наступного етапу неповного розвантажування. Порівняння отриманих чисельних результатів з відомим розв'язком задачі [8], а також з чисельним розв'язком квазістатичної задачі в класичній постановці [20] показало, що прийнята в роботі [15] гіпотеза про можливість малого збурення умов навантажування тіл шляхом введення запізнювання контактних тисків відносно дотичних контактних напружень у співвідношеннях закону тертя Кулона є правомірною в розглянутій контактній задачі і розроблений на основі цієї гіпотези метод дозволяє отримати розв'язок задачі, близький до її відомого чисельного розв'язку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Cattaneo C. Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli stozzi. *Rend. Dell'Accademia nazionale dei Lincei*. 1938. Vol. 27, Ser. 6. P. 342–348, 434–436, 474–478.
2. Mindlin R. D. Compliance of elastic bodies in contact. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1949. Vol. 16, №3. P. 259–268.
3. Галин Л. А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления. *Прикладная математика и механика*. 1945. Т. 9, вып. 5. С. 413–424.
4. Spence D. The Hertz contact problem with finite friction. *Journal of elasticity*. 1975. Vol. 5 (3). P. 297–319.
5. Моссаковский В. И. Сжатие упругих тел в условиях сцепления (осесимметричный случай). *Прикладная математика и механика*. 1963. Т. 27, вып. 3. С. 418–427.
6. Ostryk V. I., Ulitko A. F. Axially symmetric contact of two elastic bodies with friction and adhesion. *Materials Science*. 2013. Vol. 48. №. 4. С. 444–455.
7. Острик В. И. Осесимметричный контакт штампа полиномиального профиля с упругим полупространством при наличии трения и сцепления. *Прикладная математика и механика*. 2013. Т. 77. № 4. С. 605–619.
8. Turner J. R. The frictional unloading problem on linear elastic half-space. *J. Inst. Math. and its Appl.* 1979. Vol. 24. P. 439–469.

9. Mindlin R. D., Deresiewicz H. Elastic spheres in contact under varying oblique forces. *J. Applied Mech.* 1953. 20, 327-344.
10. Johnson K. L. Energy dissipation at spherical surfaces in contact transmitting oscillating forces. *Journal of Mechanical Engineering Science.* 1961. 3(4), 362-368.
11. Tyler J. C., Burton R. A., Ku P. A. Contact fatigue under oscillatory normal load. *ASLE TRANSACTIONS.* 1963. 6(4), 255-269.
12. Кравчук А. С. Вариационный метод в контактных задачах. Состояние проблемы, направления развития. *Прикладная математика и механика.* 2009. Вып. 73, № 3. С. 492–502.
13. Галанов Б. А. Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта. *Прикладная математика и механика.* 1985. Т. 49, вып. 5. С. 827–835.
14. Александров В. М., Пожарский Д. А. Трёхмерные контактные задачи при учёте трения и нелинейной шероховатости. *Прикладная математика и механика.* 2004. Т. 68, вып. 3. С. 516–527.
15. Стреляев Ю. М. Метод нелинейных граничных интегральных уравнений для решения квазистатической контактной задачи о взаимодействии упругих тел при наличии кулонова трения. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки.* 2016. Т. 20, № 2. С. 306–327.
16. Kalker J. J. A survey of the mechanics of contact between solid bodies. *ZAMM.* 1977. В. 57, Н. 5. Р. Т3–Т17.
17. Джонсон К. Л. Механика контактного взаимодействия. Москва: Мир, 1989. 510 с.
18. Александров А. И. Метод решения пространственной контактной задачи о взаимодействии двух упругих тел при наличии трения между ними. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2013. Т. 56, № 3. С. 29–42.
19. Стреляев Ю. М. Решение квазистатической контактной задачи теории упругости с учетом трения. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2014. № 2. С.161–172.
20. Александров А. И., Стреляев Ю.М. Метод нелинейных граничных интегральных уравнений для контактных задач теории упругости. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий.* 2014. №. 3 (7). С. 36–40.

REFERENCES

1. Cattaneo, C. (1938). Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli stozzi. *Rend. Dell'Accademia nazionale dei Lincei*, Vol. 27, Ser. 6, pp. 342-348, 434-436, 474-478.
2. Mindlin, R. D. (1949). Compliance of elastic bodies in contact. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 16, No. 3, pp. 259-268.
3. Galin, L. A. (1945). The indentation of a punch in the presence of friction and adhesion. *Prikl. Mat. Mekh.*, Vol. 9, Issue 5, pp. 413-424.
4. Spence, D. A. (1975). The Hertz contact problem with finite friction. *J. of Elasticity*, Vol. 5(3), pp. 297-319.
5. Mossakovskii, V. I. (1963). Compression of elastic bodies under conditions of adhesion (axisymmetric case). *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 27, Issue 3, pp. 630-643.
6. Ostryk, V. I. & Ulitko, F. (2013). Axially symmetric contact of two elastic bodies with friction and adhesion. *Materials Science*, Vol. 48, No. 4, pp. 444-455.
7. Ostryk, V. I. (2013). Axisymmetric contact of a punch of polynomial profile with an elastic half-space when there is friction and adhesion. *J. Appl. Math. Mech.*, Vol. 77, No. 4, pp. 433-444.
8. Turner, J. R. (1979). The frictional unloading problem on linear elastic half-space. *J. Inst. Math. and ist Appl.*, Vol. 24, pp. 439-469.

9. Mindlin, R. D. & Deresiewicz, H. (1953). Elastic spheres in contact under varying oblique forces. *J. Applied Mech.*, 20, pp. 327-344.
10. Johnson, K. L. (1961). Energy dissipation at spherical surfaces in contact transmitting oscillating forces. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 3(4), pp. 362-368.
11. Tyler, J. C., Burton, R. A. & Ku, P. A. (1963). Contact fatigue under oscillatory normal load. *ASLE TRANSACTIONS*, 6(4), pp. 255-269.
12. Kravchuk, A. S. (2009). The variational method in contact problems. The present state of the problem and trends in its development. *J. Appl. Math. Mech.*, Issue 73, No. 3, pp. 351-357.
13. Galanov, B. A. (1985). The method of boundary equations of the Hammerstein-type for contact problems of the theory of elasticity when the regions of contact are not known. *J. Appl. Math. Mech.*, Vol. 49, Issue 5, pp. 634-640.
14. Aleksandrov, V. M. & Pozharskii, D. A. (2004). Three-dimensional contact problems taking friction and non-linear roughness into account. *Journal of applied mathematics and mechanics*, Vol. 68, Issue 3, pp. 463-472.
15. Streliaiev, Yu. M. (2016). A nonlinear boundary integral equations method for the solving of quasistatic elastic contact problem with Coulomb friction. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, Vol. 20, No. 2, pp. 306-327.
16. Kalker, J. J. (1977). A survey of the mechanics of contact between solid bodies. *ZAMM*, B. 57, H. 5, pp. T3-T17.
17. Johnson, K. L. (1989). *Contact Mechanics*. Moscow: Mir.
18. Aleksandrov, A. I. (2015). A Method for the Solution of a Three-Dimensional Contact Problem of Interaction of Two Elastic Bodies in the Presence of Friction. *Matematychni metody ta fizyko-mexanichni polya*, No. 3, pp. 29-42.
19. Streliaiev, Y. M. (2014). Solution of the quasistatic contact problem of elasticity with friction. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences*, No. 2, pp. 161-172.
20. Alexandrov, A. I. & Streliaiev, Y. M. (2014). Nonlinear boundary integral equation's method for elastic contact problems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, No. 3(7), pp. 36-40.

УДК

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У «ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ» ЗА ФАХОМ «ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ»

Іванов І. І., д. ф.-м. н., професор

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

ivan@mail.ru

До друку будуть прийматися лише наукові статті, де присутні такі необхідні елементи

(п. 3 Постанови президії ВАК України № 7 – 05 / 1 від 15 січня 2003 р.):

- **Постановка проблеми** у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями.
- **Аналіз останніх досліджень і публікацій**, в яких започатковано порушення даної проблеми і на які спирається автор.
- **Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми**, яким присвячується стаття.
- **Формулювання цілей статті** (постановка завдання).
- **Виклад основного матеріалу дослідження** з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів.
- **Висновки з даного дослідження і перспективи** подальших розвідок у даному напрямку.

1. МАКЕТ СТОРІНКИ

Для оригінал-макета використовується формат А4 з такими полями:

з усіх боків – 2 см.

Шрифт набору – Times New Roman.

У разі необхідності для шрифтових виділень у таблицях і рисунках дозволяється застосовувати шрифт Courier New (наприклад, для ілюстрації текстів програм для ЕОМ). Для стилістичного виділення фрагментів тексту слід вживати начертання *курсив*, **напівжирний**, *напівжирний курсив* зі збереженням гарнітури, розміру шрифту та інтервалу абзацу.

Гарнітури, розміри шрифтів та начертання:

- a) для УДК: Times New Roman, – 14 пт, усі літери прописні;
- b) для заголовку статті: Times New Roman, – 14 пт, напівжирний, усі літери прописні;
- c) для підзаголовків: Times New Roman, – 12 пт, напівжирний, усі літери прописні;
- d) для прізвищ, ініціалів авторів, адреси електронної пошти: Times New Roman – 12 пт, усі строчні;
- e) для назв і адрес організацій: Times New Roman – 12 пт, курсив, усі строчні;
- f) для анотацій, виносков, посилань, підписів до рисунків та надписів над таблицями: Times New Roman – 10 пт;
- g) для ключових слів: Times New Roman – 10 пт, курсив;
- h) для основного тексту: Times New Roman – 12 пт, як у реченні.

Інтервал між абзацами – 6 пт, міжрядковий інтервал – одинарний.

2. ТИПОГРАФСЬКІ ПОГОДЖЕННЯ ТА СТИЛІ

УДК вказується в першому рядку сторінки і вирівнюється за лівим краєм. Заголовок статті набирається в наступному за УДК рядку і вирівнюється по центру. У третьому рядку з вирівнюванням по центру зазначаються прізвища, ініціали авторів. У наступному рядку розміщується інформація про назву та адресу організації, де працює (навчається) автор, яка також вирівнюється по центру. Четвертий рядок містить адресу електронної пошти авторів, розміщену по центру. Далі розташовується анотація (3-5 речень) і ключові слова мовою оригіналу та анотація українською або російською мовами (залежно від мови оригіналу). З наступного абзацу послідовно набираються і вирівнюються по центру заголовки статті англійською мовою, транслітеровані прізвища, ініціали авторів, назви і адреси організацій, які повинні бути подані англійською мовою, із зазначенням міста і країни, без назви вулиці, яка подається транслітерацією. З наступного рядка розміщується розширена (обсягом не менше 3,5 тис. знаків) анотація із ключовими словами англійською мовою. Після анотацій з абзацу викладається основний текст статті.

Заголовки наукових статей повинні бути інформативними та містити тільки загальноприйняті скорочення. У перекладі заголовків статей англійською мовою не повинно бути жодних транслітерацій, окрім неперекладних назв власних імен, приладів та інших об'єктів, що мають власні назви; також не використовується неперекладний сленг. Це стосується також анотацій і ключових слів.

Початок абзацу основного тексту виділяється збільшеним інтервалом між абзацами і **не виділяється відступом або пустим рядком.**

Ілюстрації мають бути оригінальними рисунками або фотографіями. Фотографії скануються у 256 градаціях сірого. Ілюстрації розміщуються у відповідних місцях тексту статті (по можливості вгорі сторінки) і повинні бути підписані та послідовно пронумеровані арабськими цифрами: Рис. 1, Рис. 2. Номер рисунка та підпис розміщуються безпосередньо під рисунком. Кожен рисунок та підписи до нього включаються до тексту публікації. Створення графічних об'єктів може здійснюватися будь-яким графічним редактором у форматі BMP файлів. Виконання рисунків засобами Microsoft Word здійснюється через використання команд панелі «Рисование». Підписи здійснюються командою «Надпись». Усі графічні компоненти рисунка і підписи об'єднуються командою «Группировать» (меню «Действия» на панелі «Рисование») і подаються у вигляді одного графічного об'єкта, прив'язаного до тексту з об'єктом «В тексте». Ілюстрації готують та масштабують так, щоб розміри букв тексту на ілюстраціях не перевищували розмір літер основного тексту статті більше, ніж на 50%.

Ілюстрації, так само як і підписи до них, вирівнюються на середину рядка (за виключенням невеликих рисунків – не більш 7 см, які можуть розташовуватися по декілька в ряд).

Таблиці розміщуються у відповідних місцях тексту статті (по можливості вгорі сторінки) і повинні містити назву та бути послідовно пронумерованими арабськими цифрами: Таблица 1, Таблица 2. Номер та назва таблиці розміщують над таблицями.

Посилання на літературні джерела послідовно нумеруються арабськими цифрами в порядку появи в тексті статті і зазначаються у квадратних дужках, де вказуються порядковий номер джерела та через кому конкретна сторінка [8, с.16]. Перелік літературних джерел мовою оригіналу подається в порядку їх нумерації після основного тексту статті з підзаголовком «ЛІТЕРАТУРА», який вирівнюється по центру. Список літератури оформлюється відповідно до ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 «Система стандартів з інформації, бібліотечної та видавничої справи. Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання».

З наступного абзацу подається перелік літературних джерел латиницею з підзаголовком «REFERENCES», який вирівнюється по центру.

3. СТИЛІСТИЧНІ ПОГОДЖЕННЯ

- Не допускається закінчення сторінки одним або декількома пустими рядками, за винятком випадків, спричинених необхідністю дотримання попереднього пункту (висячі підзаголовки і початок абзацу) та кінця статті.
- Не допускається починати сторінку незакінченим рядком (переноси в останньому рядковій заборонені).
- Не дозволяється підкреслювання в заголовках, підписах і надписах.
- Слід дотримуватися правила про мінімальні зміни в шрифтовому та стильовому оформленні сторінки для того, щоб максимально уникнути різноманітності макета і зберегти єдиний стиль збірника.
- Не допускається часте використання виносок (виноска повинна розглядатися як виняток і вживатися тільки у випадку дійсної необхідності).
- Ілюстрації мають бути підготовані та масштабовані таким чином, щоб розміри букв тексту на ілюстраціях не перевищували розмір букв основного тексту статті більш ніж на 50%.
- Сторінки тексту статті слід пронумерувати.
- Диск треба підписати, вказавши прізвище, ініціали автора, імена файлів.
- На диску повинно бути **два файли**:
 - ✓ **перший** – із текстом статті та анотацій з ключовими словами,
 - ✓ **другий** – із відомостями про авторів (прізвище, ім'я, по батькові; посада; вчений ступінь; учене звання; місце роботи або навчання; адреса електронної пошти; домашня адреса; номери контактних телефонів).

4. ДЛЯ ОПУБЛІКУВАННЯ СТАТТІ АВТОРУ НЕОБХІДНО ПОДАТИ ДО РЕДАКЦІЇ ЗБІРНИКА:

1. Роздрукований текст статті з анотаціями та ключовими словами.
2. Відомості про авторів.
3. Витяг з протоколу засідання кафедри або факультету.
4. Зовнішню рецензію.
5. Диск із текстом статті, анотацій, ключовими словами та відомостями про авторів.

Адреса редакції: Україна, 69600, м. Запоріжжя, МСП-41, вул. Жуковського, 66

Довідки за телефонами:

(061) 289-12-52 – відповідальний за випуск (технічний редактор)

(061) 228-75-21 – редакційно-видавничий відділ (IV корпус, кімн. 323)

Адреса електронної пошти:

kpmf.mf@znu.edu.ua

ПРОЦЕС РЕЦЕНЗУВАННЯ

До публікації у журналі всі рукописи спочатку розглядаються редакторами на предмет оцінки їх відповідності тематиці і вимогам журналу. Після рішення редакторів представлені рукописи спрямовуються експертам, працюючим у відповідній області. **Рукопис проходить одностороннє сліпе рецензування:** автори не знають рецензента; рецензенти знають авторів.

Рецензування існує для того, щоб журнали публікували високоякісні наукові дослідження. Зміни та покращення статті є частиною процесу публікації. **Рецензування є позитивним процесом і** невід'ємною частиною наукової публікації, що підтверджує високу якість наукових статей. Рецензенти, які вкладають свій час для поліпшення Вашої статті, є експертами з тематики наукового дослідження, викладеного у статті.

У процесі рецензування матеріал статті має стати більш достовірним. Рецензенти можуть вказати на недоліки у роботі, які вимагають більш докладного пояснення або додаткових досліджень і експериментів. Матеріал статті повинен стати більш доступним для сприйняття. Якщо якісь моменти у роботі є важкими для сприйняття читачами, рецензенти можуть попросити їх виправити. Рецензенти розглядають дослідження на предмет важливості в рамках своєї предметної області. Інший аспект наявності політики рецензування у журналі: редакція має бути впевненою, що публікує тільки якісні матеріали у своєму виданні.

Поширені причини для відмови публікації

Відмова в публікації статті, можлива, якщо:

- стаття неправильно структурована;
- стаття недостатньо кваліфіковано деталізована для розуміння постановки задачі та аналізу, запропонованих авторами;
- у статті недостатньо сформульована наукова новизна;
- відсутність достатньої кількості актуальних посилань на літературні джерела;
- стаття містить теорії, концепції або висновки, які не повністю підкріплені даними аналізу, аргументами, наданою інформацією;
- стаття не забезпечує досить докладний опис методів і матеріалів, які б дозволили іншим ученим повторити теоретичне дослідження та експеримент;
- у статті відсутні чіткі описи чи пояснення гіпотез, що перевірялись, описи експериментів, прикладів статистичних або експериментальних вибірок;
- у статті недостатньо описано методику проведення експериментів;
- зауваження до якості мови написання.

Повторний розгляд статті та відповідь на зауваження рецензента

За повторного перегляду статті та відповіді на зауваження рецензентів необхідно:

- звернути увагу на всі зауваження, які надані редактором і рецензентом;
- описати всі зміни в статті у зворотному листі;
- виконати додаткові експерименти або аналізи, які рекомендує рецензент, або дати докладне обґрунтування, чому цього не потрібно робити;
- у зворотному листі описати окремо всі моменти, в яких Ви згодні з рецензентом і в яких не згодні;
- забезпечити ввічливе і наукове обґрунтування моментів, з якими Ви не згодні;
- чітко зазначити всі зміни у статті, які Ви внесли;
- повернути переглянутий рукопис і зворотний лист в строк, встановлений редактором.

Пам'ятайте, що рецензент є експертом у Вашій предметній області. Якщо пропозиції, які вносить рецензент не вірні, то це, ймовірно, тому що рецензент не вірно зрозумів Вашу роботу. Це значить, що Ваша робота написана важко для сприйняття, а значить і читач не зможе належним чином розібратися у Вашому дослідженні. Таким чином, Вам слід зробити текст статті більш чітким і зрозумілим для читача.

Редакція не надає персональних даних рецензента, усе спілкування відбувається через редколегію журналу.

Важливо бути наполегливим при спробі опублікувати статтю. Якщо вчасно, коректно і науково обґрунтовано відповідати на зауваження редакторів та рецензентів, можна в подальшому домогтися публікації статті.

Краще не обирати інший журнал, доки не сталася одна з наступних подій:

- редактор дав відповідь, що тематика Вашої роботи в корені не відповідає тематиці журналу;
- редактор дає відмову Вашому рукопису без права його повторного надання;
- Вашому рукопису дали відмову навіть після того, як Ви відповіли на всі виправлення і коментарі рецензента;
- Ви отримали відмову від рецензента.

Публікація є складним процесом, тому Ви повинні бути готовим працювати над своєю статтею, відповідаючи на коментарі як редакторів, так і рецензентів, і вносити необхідні виправлення у Вашу роботу.

PROCESS OF REVIEW

Before publication in the journal, all manuscripts are initially considered by the editors to evaluate their compliance with the topics and requirements of the journal. After the editors' decision, the submitted manuscripts are sent to experts working in the relevant field. The manuscript passes a one-sided blind review: the authors do not know the reviewer; reviewers know the authors.

There is a review to ensure that journals publish high-quality research. Changes and improvements to the article are part of the publishing process. Reviewing is a positive process and an integral part of scientific publication, which confirms the high quality of scientific articles. Reviewers who invest time to improve your article are experts on the subject of scientific research outlined in the article.

In the review process, the material of the article should become more reliable. Reviewers may indicate disadvantages in the work that require more detailed explanation or additional research and experiments. The material of the article should become more accessible for perception. If any moments in the work are difficult for readers to perceive, reviewers may ask to correct them. Reviewers consider research on relevance within their subject area. Another aspect of the existence of a review policy in magazines: the editorial should be sure that publishes only qualitative materials in their publication.

Common Reasons to Discard Publication

Refusal to publish an article is possible in the following situations:

- the article is incorrectly structured;
- the article is insufficiently qualified in detail to understand the problem statement and analysis proposed by the authors;
- scientific novelty in the article is not sufficiently formulated;
- lack of sufficient number of actual references to literary sources;
- the article contains theories, concepts or conclusions that are not fully supported by the analysis data, the arguments provided by the information;
- the article does not provide a sufficiently detailed description of the methods and materials that would allow other scientists to repeat the theoretical study and experiment;
- the article does not contain clear descriptions or explanations of the hypotheses that were tested, description of experiments, examples of statistical or experimental samples;
- the article does not describe enough the technique of conducting experiments;
- remarks on the quality of the writing language.

Repeated review of the article and the response to the reviewer's remarks

For reconsideration of the article and responses to comments by reviewers, you must:

- pay attention to all comments provided by the editor and reviewers;
- describe all changes in the article in the reverse letter;
- perform additional experiments or analyzes that the reviewer recommends, or provide a detailed justification why this does not need to be done;
- in a return letter describe separately all the points in which you agree with the reviewer and which do not agree;
- provide a polite and scientific justification of the moments you disagree with;
- clearly state all changes in the article you have made;
- return the revised manuscript and the letter back in time set by the editor.

Remember that the reviewer is an expert in your subject area. If the suggestions made by the reviewer are not correct, then this is probably because the reviewer did not understand your work correctly. This means that your work is written hard to perceive, and therefore the reader will not be able to properly understand your research. Thus, you should make the text of the article more clear and understandable to the reader.

The editorial staff does not provide personal data to the reviewer, all communication takes place through the editorial board of the journal.

It's important to be persistent when you try to publish an article. If timely, correctly and scientifically substantiated to respond to the comments of editors and reviewers, you can further achieve the publication of the article.

It's better not to choose another journal until one of the following events has occurred:

- the editor replied that the topics of your work are fundamentally not relevant to the topic of the magazine, the editor refuses your manuscript without the right to re-submit it;
- Your manuscript was refused even after you answered all the corrections and comments by the reviewer;
- You have received a refusal from the reviewer.

Publication is a complex process, so you should be ready to work on your article, responding to comments from both editors and reviewers, and make the necessary corrections to your work.

Збірник наукових праць

Вісник Запорізького національного університету
Фізико-математичні науки
№ 2, 2018

Технічний редактор – *Н. В. Непритворна*

Верстка, дизайн-проробка, оригінал-макет і друк виконані
в редакційно-видавничому відділі
Запорізького національного університету
тел. (061) 289-12-98

Підписано до друку 08.04.2019. Формат 60 × 90/8.

Папір Data Copy. Гарнітура «Таймс».

Умовн.-друк. арк. 21,5

Замовлення № 62. Наклад 100 прим.

Запорізький національний університет
69600, м. Запоріжжя, МСП-41
вул. Жуковського, 66

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 5229 від 11.10.2016