

Міністерство освіти і науки України  
Запорізький національний університет

Заснований  
у 1997 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого  
засобу масової інформації  
Серія КВ № 15436-4008 ПР,  
22.06.2009 р.

Адреса редакції:  
Україна, 69600,  
м. Запоріжжя, МСП-41,  
вул. Жуковського, 66

# **В і с н и к**

## **Запорізького національного університету**

**Телефон**  
для довідок:  
(061) 289-12-52

**Факс:** (061) 764-45-46

- **Фізико-математичні науки**

**№ 1, 2017**

**Запоріжжя 2017**

Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2017. – 384 с.

Затверджено як наукове фахове видання України, у якому можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (Наказ Міністерства освіти і науки України № 528 від 12.05.15 р.)

Вісник індексується під назвою «Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences» у наступних наукометричних базах:

- INDEX COPERNICUS, ICV 2016: **65.80** (<https://journals.indexcopernicus.com/search/details?id=43958>);
- CiteFactor (<http://www.citefactor.org/>);
- ResearchBib (<http://paper.researchbib.com/>);
- Journal Factor (<http://www.journalfactor.org/>).

Рекомендовано до друку та поширення через мережу Інтернет (протокол засідання Вченої ради № 13 від «20» червня 2017 р.)

### РЕДАКЦІЙНА РАДА

Головний редактор	– Грищак В.З.,	доктор технічних наук, професор
Заступник головного редактора	– Гребенюк С.М.,	доктор технічних наук, доцент
Відповідальні редактори	– Гоменюк С.І., Приварников А.К., Клименко М.І., Чопоров С.В.,	доктор технічних наук, професор доктор фізико-математичних наук, професор кандидат фізико-математичних наук, доцент кандидат технічних наук, доцент

### РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Андріанов І.В.	– доктор фізико-математичних наук, професор (Рейнсько-Вестфальський технічний університет Аахена, Німеччина)
Ванько В.І.	– доктор технічних наук, професор (Московський державний технічний університет ім. Н.Е. Баумана, Росія)
Гіржон В.В.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Гоман О.Г.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Гудрамович В.С.	– доктор технічних наук, професор, член-кореспондент НАН України
Козін І.В.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Колаковські З.	– доктор технічних наук, професор (Лодзинський технічний університет, Польща)
Кондрат'єва Н.О.	– кандидат фізико-математичних наук, доцент
Кузьменко В.І.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Маневич Л.І.	– доктор технічних наук, професор (Московський інститут хімічної фізики ім. Н.Н. Семенова РАН, Росія)
Морачковський О.К.	– доктор технічних наук, професор
Ольшанецький В.Ю.	– доктор технічних наук, професор
Перепелиця В.О.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Пожуєв В.І.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Толок О.В.	– доктор технічних наук, професор (Московський державний технологічний університет «Станкин», Росія)
Швидка С.П.	– кандидат фізико-математичних наук, доцент

## ЗМІСТ

<b>АКУЛЕНКО Л. Д., ЛЕЩЕНКО Д. Д., КОЗАЧЕНКО Т. А., БАЗИЛЕВИЧ Ю. Н.</b> НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЭВОЛЮЦИИ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВОЗМУЩАЮЩИХ МОМЕНТОВ .....	6
<b>АЛЬ-АТАМНЕХ Б. Г. М.</b> ФОРМАЛИЗАЦИЯ ОПИСАНИЯ R-ФУНКЦИЙ С ПОДДЕРЖКОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ.....	15
<b>БАРАНЕНКО В. О., ВОЛЧОК Д. Л.</b> ВАГОВА ОПТИМІЗАЦІЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗІ СКЛОПЛАСТИКУ ЗА УМОВИ ОДНОГО ГРАНИЧНОГО СТАНУ І НЕВИЗНАЧЕНОЇ ІНФОРМАЦІЇ ЩОДО ВИХІДНИХ ДАНИХ.....	22
<b>БЕЗВЕРХИЙ О. І., КОРНІЄНКО В. Ф.</b> ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ КІЛЬЦЕВИХ ПЛАСТИН З УРАХУВАННЯМ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ВТРАТ.....	35
<b>БЛАШ О. В.</b> ПЛАСТИНА З ТРІЩИНОЮ ПІД ДВОВІСНИМ РОЗТЯГОМ ТА ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ СИЛАМИ З УРАХУВАННЯМ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН ТА ЗМІЦНЕННЯ МАТЕРІАЛУ В ЇЇ ВЕРШИНАХ.....	49
<b>ВОРОБЬЕВ Ю. С., БЕРЛИЗОВА Т. Ю., ОВЧАРОВА Н. Ю.</b> ВЛИЯНИЕ АЗИМУТАЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ ОСЕЙ НА ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ ОХЛАЖДАЕМОЙ ЛОПАТКИ...	57
<b>ГАЛИШИН А. З., СКЛЕПУС С. Н.</b> СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО И ОБОЛОЧЕЧНОГО РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ПОЛЗУЧЕСТИ И ПРОЧНОСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРОВ .....	64
<b>ГЛУХОВ А. Ю.</b> ВІСЕСИМЕТРИЧНІ ХВИЛІ В КОМПОЗИТНИХ НЕСТИСЛИВИХ МАТЕРІАЛАХ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ЗА УМОВИ НЕПОВНОГО КОНТАКТУ МІЖ ШАРАМИ.....	73
<b>HODES A. YU., LOBODA V. V.</b> AN ARC CRACK AT THE INTERFACE BETWEEN TWO ELECTROSTRICTIVE MATERIALS .....	81
<b>ГРИГОРЕНКО О. Я., БОРИСЕНКО М. Ю., БОЙЧУК О. В., ПРИГОДА О. П.</b> ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗРАХУНОК ЧАСТОТ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ НЕКРУГОВОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНИМИ ТОРЦЯМИ.....	94
<b>ГРИГОР'ЄВА Л. О.</b> НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ ПЛОСКОГО БАГАТОШАРОВОГО П'ЄЗОЕЛЕМЕНТА З УРАХУВАННЯМ ПРУЖНОГО ПІДКРІПЛЮЮЧОГО ШАРУ І АКУСТИЧНОГО СЕРЕДОВИЩА.....	103
<b>ГРИЩАК Д. Д.</b> МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ АЕРОКОСМІЧНИХ СИСТЕМ НА БАЗІ ГІБРИДНИХ АСИМПТОТИЧНИХ МЕТОДІВ.....	110
<b>ГРОМОВ В. А.</b> СХОДИМОСТЬ ИТЕРАТИВНОГО ОБОБЩЁННОГО МЕТОДА КАНТОРОВИЧА ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА .....	119
<b>ДЕМИДОВ О. В., ПОПОВ В. Г.</b> НЕСТАЦІОНАРНИЙ ЗАКРУТ СКИНЧЕННОГО ЦИЛІНДРУ З КРУГОВОЮ ТРІЩИНОЮ.....	131
<b>ДЕМ'ЯНЕНКО А. Г.</b> С. П. ТИМОШЕНКО ТА СУЧАСНА ІНЖЕНЕРНА ОСВІТА В УКРАЇНІ: ДЕЯКІ РЕАЛІЇ, ПРОБЛЕМИ, ТЕНДЕНЦІЇ ТА ПЕРСПЕКТИВИ.....	142
<b>ЄМЕЦЬ О. О., БАРБОЛІНА Т. М.</b> СТОХАСТИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ НА РОЗМІЩЕННЯХ: ВЛАСТИВОСТІ ЛІНІЙНИХ БЕЗУМОВНИХ ЗАДАЧ.....	147
<b>ЄМЕЦЬ О. О., ЄМЕЦЬ ОЛ-РА О., ВАНЖА С. В.</b> СИМПЛЕКСНА ФОРМА МНОГОГРАННИКА СПОЛУЧЕНЬ З НЕОБМЕЖЕНИМИ ПОВТОРЕННЯМИ .....	158

<b>КАГАДИЙ Т. С., БЕЛОВА О. В., ЩЕРБИНА И. В.</b> АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ О ПЕРЕДАЧЕ НАГРУЗКИ.....	168
<b>КВАШНІВСЬКА Н. М.</b> ЗМІНА ЕЛЕКТРОХІМІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ GaSe ЗА РАХУНОК МОДИФІКАЦІЇ ПОВЕРХНІ.....	175
<b>КЛИМЕНКО М. И., ГРЕБЕНЮК С. Н., БОГУСЛАВСКАЯ А. М.</b> ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА С ИЗОТРОПНОЙ МАТРИЦЕЙ И ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫМ ВОЛОКНОМ..	179
<b>КОНОНОВ Ю. Н., ЛИМАРЬ А. А.</b> КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, РАЗДЕЛЯЮЩЕЙ ИДЕАЛЬНЫЕ ЖИДКОСТИ РАЗНОЙ ПЛОТНОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ С УПРУГИМИ ОСНОВАНИЯМИ .....	190
<b>КОСТРОВА М. М., АХУНДОВ В. М.</b> ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЭЛАСТИЧНОГО ЦИЛИНДРА С КОЛЬЦЕВЫМИ ВОЛОКНАМИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВРАЩЕНИЯ ПРИ СВОБОДНОЙ ПОСАДКЕ.....	205
<b>КУЗЬ І. С., КУЗЬ О. Н., ПИЗ Н. Я.</b> МІЦНІСТЬ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИХ ПЛАСТИН З ДВОМА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИМИ РОЗРІЗАМИ (ТОНКИМИ ЖОРСТКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ) ЗА ВСЕБІЧНОГО РОЗТЯГУ .....	213
<b>КУРАПОВ С. В., ДАВИДОВСКИЙ М. В.</b> СПЕКТР РЕБЕРНЫХ РАЗРЕЗОВ ГРАФА И ЗАДАЧА ИЗОМОРФИЗМА.....	222
<b>КУРЕННОВ С. С.</b> НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ НАХЛЕСТОЧНОГО СОЕДИНЕНИЯ ПЛАСТИНОК РАЗНОЙ ШИРИНЫ. ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ.....	235
<b>ЛАТИФОВ Ф. С., ГУЛИЕВА З. М.</b> СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УСИЛЕННЫХ ПЕРЕКРЕСТНЫМИ СИСТЕМАМИ РЕБЕР И НАГРУЖЕННОЙ ОСЕВЫМИ СЖИМАЮЩИМИ СИЛАМИ ОРТОТРОПНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПРОТЕКАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ .....	244
<b>ЛЕВАДА В. С., ЛЕВИЦКАЯ Т. И., ПОЖУЕВА И. С., ХИЖНЯК В. К.</b> ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ОБОБЩЕННОЕ ПЛОСКОЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ .....	252
<b>ЛЕОНТЬЕВА В. В., КОНДРАТЬЕВА Н. А.</b> ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ОТДЕЛЬНОГО КЛАССА СЛОЖНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ. НЕПРЕРЫВНЫЙ СЛУЧАЙ.....	261
<b>МАКСИМЕНКО-ШЕЙКО К. В., ШЕЙКО Т. И.</b> R-ФУНКЦИИ, ТВЭЛ С ПОЛИЗОНАЛЬНЫМ ОРЕБРЕНИЕМ ОБОЛОЧКИ И ТЕПЛООБМЕН ПРИ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ.....	277
<b>ОБОДАН Н. И., АДЛУЦКИЙ В. Я., КОЗАКОВА Н. Л.</b> УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЯЮЩЕГО СЛОЯ В ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ .....	285
<b>ОПАНАСОВИЧ В. К., НИКОЛИШИН М. М., СЛОБОДЯН М. С., АЛЬФАВИЦЬКА С. О.</b> ДВОВІСНИЙ РОЗТЯГ ПЛАСТИНИ З ДВОМА РІВНИМИ КОЛІНЕАРНИМИ ТРІЩИНАМИ З УРАХУВАННЯМ ЗМІЦНЕННЯ МАТЕРІАЛУ ТА ЗЛИТИХ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН МІЖ НИМИ.....	296
<b>ОПАНАСОВИЧ В. К., СЛОБОДЯН М. С., ЯРЕМА Є. Б.</b> ПРО ПІДХІД ДО ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПЛАСТИНИ З ОТВОРАМИ ТА ПРЯМОЛІНІЙНОЮ НАСКРІЗНОЮ ТРІЩИНОЮ .....	303
<b>СМЕТАНКІНА Н. В.</b> ТЕРМОПРУЖНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ШАРУВАТИХ ОБОЛОНОК СКЛАДНОЇ ФОРМИ .....	312
<b>СУЛИМ Г. Т., ПІСКОЗУБ Й. З., ПІСКОЗУБ Л. Г.</b> АНТИПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ БІМАТЕРІАЛУ З ФІЗИЧНО НЕЛІНІЙНИМ МІЖФАЗНИМ ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ.....	319
<b>ХОМА Н. Г., ХОМА-МОГИЛЬСЬКА С. Г., ХОХЛОВА Л. Г.</b> ІНТЕГРО-ОПЕРАТОРНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ КРАЙОВИХ ПЕРІОДИЧНИХ ЗАДАЧ .....	328
<b>ХОМЧЕНКО А. Н., ЛИТВИНЕНКО Е. И., АСТИОНЕНКО И. А.</b> ГЕОМЕТРИЯ КОНОИДА И ФИЗИЧЕСКАЯ НЕАДЕКВАТНОСТЬ СТАНДАРТНЫХ СЕРЕНДИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ .....	337

<b>ШАЦЬКИЙ І. П., МАКОВІЙЧУК М. В., ЩЕРБІЙ А. Б.</b> ВЗАЄМОДІЯ КОЛІНЕАРНИХ ТРІЩИН У СФЕРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З ГНУЧКИМ ПОКРИТТЯМ.....	342
<b>ШВАЙКО В. Н., ГУРІДОВА В. О.</b> МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ЧАСТИНКИ ҐРУНТУ ЗМІННОЇ МАСИ ЗА ПРЯМОЛІНІЙНИМ ЛЕЗОМ РОБОЧОГО ОРГАНУ .....	351
<b>ШЕВЧЕНКО А. Г., ШНЕЙДЕР В. П.</b> ОБРАЗОВАНИЕ ШЕЙКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ПРИ ДВУХОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ ПЛАСТИНКИ...	358
<b>ШУЛЬЖЕНКО М. Г., ГОНТАРОВСЬКИЙ П. П., ГАРМАШ Н. Г., МЕЛЕЖИК І. І.</b> РОЗРАХУНКОВА ОЦІНКА РОЗВИТКУ ТРІЩИНИ З КОНТАКТУЮЧИМИ БЕРЕГАМИ В ПЛОСКИХ ЕЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦІЙ .....	365
<b>ЯРЕЦЬКА Н. О.</b> ТИСК ЖОРСТКОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА НА ПІВПРОСТІР З ПОЧАТКОВИМИ (ЗАЛИШКОВИМИ) НАПРУЖЕННЯМИ .....	374
<b>ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У «ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ» ЗА ФАХОМ «ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ».....</b>	381

УДК 531.381

## НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЭВОЛЮЦИИ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВОЗМУЩАЮЩИХ МОМЕНТОВ

<sup>1</sup>Акуленко Л. Д., д. ф.-м. н., профессор, <sup>2</sup>Лещенко Д. Д., д. ф.-м. н., профессор,  
<sup>2</sup>Козаченко Т. А., к. ф.-м. н., доцент

<sup>1</sup>*Институт проблем механики РАН,  
просп. Вернадского, 101, корп. 1, Москва, 119526, Россия*

<sup>2</sup>*Одесская государственная академия строительства и архитектуры,  
ул. Дидрихсона, 4, Одесса, 65029, Украина*

kumak@ipmnet.ru, leshchenko\_d@ukr.net, kushpil.ru@rambler.ru

Рассматриваются быстрые возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, под действием возмущений различной природы. Уравнения возмущенного движения приводятся к виду, допускающему применение метода усреднения. Проведена процедура усреднения уравнений для медленных переменных. Рассмотрены примеры.

*Ключевые слова: возмущенное движение, случай Лагранжа, метод усреднения, момент.*

## ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ЕВОЛЮЦІЇ РУХІВ ТВЕРДОГО ТІЛА ПІД ДІЄЮ ЗБУРЮЮЧИХ МОМЕНТІВ

<sup>1</sup>Акуленко Л. Д., д. ф.-м. н., професор, <sup>2</sup>Лещенко Д. Д., д. ф.-м. н., професор,  
<sup>2</sup>Козаченко Т. О., к. ф.-м. н., доцент

<sup>1</sup>*Інститут проблем механіки РАН,  
просп. Вернадського, 101, корп. 1, Москва, 119526, Росія*

<sup>2</sup>*Одеська державна академія будівництва та архітектури,  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, 65029, Україна*

Розглядаються швидкі збурені рухи твердого тіла, близькі до випадку Лагранжа, під дією збурень різної природи. Рівняння збуреного руху зводяться до вигляду, що допускає застосування методу усереднення. Проведена процедура усереднення рівнянь руху для повільних змінних. Розглянуто приклади.

*Ключові слова: збурений рух, випадок Лагранжа, метод усереднення, момент.*

## SOME PROBLEMS OF EVOLUTION OF MOTIONS OF A RIGID BODY UNDER THE ACTION OF PERTURBATION TORQUES

<sup>1</sup>Akulenko L. D., D.Sc. in Physics and Maths, Professor,  
<sup>2</sup>Leshchenko D. D., D.Sc. in Physics and Maths, Professor,  
<sup>3</sup>Kozachenko T. A., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor

<sup>1</sup>*Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,  
Vernadskogo prosp., 101, block 1, Moscow, 119526, Russia*

<sup>2</sup>*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture,  
Didrikhson str., 4, Odessa, 65029, Ukraine*

The problem of evolution of the rigid body rotations about a fixed point continues to attract the attention of researches. In the aspect of applications, the analysis of rotational motions of the bodies about a fixed point is important for solving the problems of astronautics, the problems of the entry of flying vehicles into the atmosphere, the motion of rotating projectile and gyroscopy. In many cases, the motion in the Lagrange case can be regarded as a generating motion of the rigid body. In this case the body is assumed to have a fixed point and to be in the gravitational field, with the center of mass of the body and the fixed point both lying on the dynamic symmetry axes of the body. A restoring torque, analogous to the moment of the gravity forces, is created by the aerodynamic forces acting on the body in the gas flow. Therefore, the motions, close to the Lagrange case, have been investigated in a number of works on the aircraft dynamics, where various perturbation torques were taken into account in addition to the restoring torque.

In our paper angular motions of a rigid body subjected to perturbation torques of different nature are considered by means of averaging method. Evolution of perturbed Lagrange motion under the influence of small torques is studied. We consider mechanical models of perturbations corresponding motion of the body in a medium with linear dissipation and a torque that is constant in the attached axes.

*Key words: perturbed motion, Lagrange top, averaging method, torque.*

## ВВЕДЕНИЕ

Объекты в природе и технике (летательные аппараты, космические и подводные корабли, небесные тела) с учетом действующих возмущений и их внутренней структуры могут быть смоделированы в виде одного твердого тела. При рассмотрении движения этих объектов возникает необходимость исследований вращательных движений твердых тел под действием внешних и внутренних моментов сил. Результаты исследования движения вокруг центра масс летательных аппаратов, входящих в атмосферу с гиперзвуковой скоростью [1], показывают, что эта задача может быть приведена к задаче, близкой к случаю Лагранжа. В работе [2] рассматривается движение неуправляемого тела около центра масс при полете в атмосфере. При исследовании вращательного движения в атмосфере осесимметричного тела с малой асимметрией опираются на аналогичный по форме записи уравнений движения случай Лагранжа движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Изучалось вращательное движение твердого тела в атмосфере под действием синусоидального или бигармонического восстанавливающего момента, зависящего от времени, и малых возмущающих моментов [3]. При движении осесимметричного намагниченного тела в постоянном поле, близком к регулярной прецессии, уравнения движения спутника с точностью до обозначений совпадают с уравнениями движения гироскопа Лагранжа. Известно, что динамически симметричный спутник с магнитным моментом, направленным по оси динамической симметрии, движется так же, как тяжелое твердое тело в случае Лагранжа.

Гироскоп Лагранжа можно считать динамической моделью спутника с пассивной системой ориентации. Вращение динамически симметричного магнитно-стабилизированного спутника описывается волчком Лагранжа в поле тяжести, медленно меняющемся по величине и направлению.

Показана аналогия между возмущенной задачей о движении волчка Лагранжа в случае потенциальных возмущений и задачей о вращении спутника, центр масс которого движется по круговой орбите в экваториальной плоскости, с учетом влияния магнитного поля Земли.

В работе [4] изучается движение относительно центра масс искусственного спутника, несущего сильный магнит. При исследовании движения тяжелого неуравновешенного гиростата с произвольным моментом внутреннего взаимодействия первые интегралы уравнений движения совпадают с соответствующими первыми интегралами движения твердого тела в случае Лагранжа.

Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, исследованы в ряде работ, например, [4-16]. В [5] представлен обзор результатов, полученных до 1998 г., в задачах эволюции вращений твердого тела, близких к случаю Лагранжа.

В работах [6-8] приведены условия возможности усреднения уравнений движения по углу нутации, получена усредненная система уравнений. Рассмотрено движение тела в среде с линейной диссипацией. Исследованы возмущенные быстрые вращения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, при разных порядках малости проекций вектора кинетического момента.

Рассматривалось движение симметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки под действием сил трения, обусловленных внешней диссипативной средой [9]. Изучалось асимптотическое поведение движений гироскопа Лагранжа, близких к регулярным прецессиям, под действием малого возмущающего момента [4, 10, 11].

Рассматривались резонансные эффекты при движении тяжелого динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки в случаях, близких к случаю Лагранжа, под действием различных возмущений [12].

Исследовалось движение волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса [13] и влияние быстрых периодических и условно-периодических вибраций точки подвеса на устойчивость стационарных вращений волчка Лагранжа вокруг вертикали [14].

В работе [15] рассматривались устойчивость и стабилизация вращающегося волчка к спящему движению с помощью двух моментов силовых приводов. В [16] для решения уравнений движения симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки используются аналитические и численные методы.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРОЦЕДУРА УСРЕДНЕНИЯ

Рассматривается возмущенное движение относительно неподвижной точки динамически симметричного тяжелого твердого тела в случае возмущений произвольной природы. В нашей задаче момент силы тяжести не рассматривается как возмущающий момент, а относится к невозмущенному движению, которое представляет собой движение в случае Лагранжа. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= \mu \sin \theta \cos \varphi + \varepsilon M_1, \\ A\dot{q} + (A - C)pr &= -\mu \sin \theta \sin \varphi + \varepsilon M_2, \\ C\dot{r} &= \varepsilon M_3, \quad M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi), \quad i = 1, 2, 3, \\ \dot{\psi} &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, \\ \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Динамические уравнения составлены в проекциях на главные оси инерции тела. Здесь  $p, q, r$  – проекции вектора угловой скорости на эти оси,  $\varepsilon M_i, i = 1, 2, 3$  – проекции вектора возмущающих моментов на те же оси;  $\psi, \theta, \varphi$  – углы Эйлера;  $\varepsilon$  – малый параметр, характеризующий величину возмущений. В частности при  $\varepsilon = 0$  система (1.1) описывает движение в случае Лагранжа [7, 17]. В случае тяжелого волчка имеем  $\mu = mgl$ ,  $m$  – масса тела,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $l$  – расстояние от неподвижной точки  $O$  до центра тяжести тел;  $A$  – экваториальный,  $C$  – осевой момент инерции тела относительно точки  $O$ ,  $A \neq C$ .

Ставится задача исследования асимптотического поведения решений системы (1.1) при малом  $\varepsilon$ , которое будет проводиться методом усреднения [18] на интервале времени порядка  $\varepsilon^{-1}$ .

В случае невозмущенного движения, первыми интегралами уравнений для системы (1.1) при  $\varepsilon = 0$  являются величины [7, 17]

$$\begin{aligned} G_z &= A \sin \theta (p \sin \varphi + q \cos \varphi) + Cr \cos \theta = c_1, \\ H &= \frac{1}{2} [A(p^2 + q^2) + Cr^2] + \mu \cos \theta = c_2, \quad r = c_3. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $G_z$  – проекция вектора кинетического момента на вертикаль  $Oz$ ,  $H$  – полная энергия тела,  $r$  – проекция вектора угловой скорости на ось динамической симметрии,  $c_i, i = 1, 2, 3$  – произвольные постоянные  $c_2 \geq -\mu$ .

Известно в общем случае выражение для угла нутации  $\theta$  в невозмущенном движении как функции времени  $t$ , интегралов движения (1.2) и произвольной фазовой постоянной  $\beta$  [7, 17]:



$$u = \cos \theta = u_1 + (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2(\alpha t + \beta), \quad -1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1 \leq u_3 < +\infty, \quad (1.3)$$

$$\alpha = [\mu(u_3 - u_1)/(2A)]^{1/2}, \quad \operatorname{sn}(\alpha t + \beta) = \sin \operatorname{am}(\alpha t + \beta, k),$$

$$k^2 = (u_2 - u_1)(u_3 - u_1)^{-1}, \quad 0 \leq k^2 < 1. \quad (1.4)$$

Здесь  $u$  – периодическая функция  $\alpha t + \beta$  с периодом  $K(k)/\alpha$ ;  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{am}$  – эллиптический синус и амплитуда соответственно [19],  $k$  – модуль эллиптических функций, через  $u_1, u_2, u_3$  обозначены вещественные корни кубического многочлена

$$Q(u) = A^{-2} \left[ (2H - Cr^2 - 2\mu u)(1 - u^2)A - (G_z - Cru)^2 \right]. \quad (1.5)$$

Соотношения между корнями  $Q(u)$  и первыми интегралами (1.2) записываются, согласно теореме Виета, следующим образом:

$$u_1 + u_2 + u_3 = \frac{H}{\mu} - \frac{Cr^2}{2\mu} + \frac{C^2 r^2}{2A\mu} \equiv F_1,$$

$$u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3 = \frac{G_z Cr}{A\mu} - 1 \equiv F_2, \quad (1.6)$$

$$u_1 u_2 u_3 = -\frac{H}{\mu} + \frac{Cr^2}{2\mu} + \frac{G_z^2}{2A\mu} \equiv F_3.$$

Формулы (1.2), (1.3), (1.6) описывают решение системы (1.1) при  $\varepsilon = 0$  в случае Лагранжа.

Сделаем следующие исходные предположения:

$$p^2 + q^2 \ll r^2, \quad Cr^2 \gg \mu, \quad (1.7)$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии, угловая скорость  $r$  достаточно велика.

Если тело совершает быстрое вращение вокруг оси симметрии, то потенциальная энергия тела мала по сравнению с его кинетической энергией  $T$  и в первом приближении имеем

$$G_z \approx Cr, \quad H \approx T \approx \frac{1}{2} Cr^2. \quad (1.8)$$

Если твердое тело вращается быстро, то для квадрата модуля эллиптических функций можно записать

$$k^2 = (u_2 - u_1)(u_3 - u_1)^{-1} \ll 1. \quad (1.9)$$

При выполнении второго условия (1.7) имеем

$$u_1 \ll u_3, \quad u_2 \ll u_3, \quad u_1 + u_2 \ll u_3. \quad (1.10)$$

Тогда из соотношений (1.6) получим

$$u_3 = F_1, \quad u_1 u_2 = \frac{F_3}{F_1}. \quad (1.11)$$

После ряда преобразований с учетом (1.6) находим выражения для вещественных корней кубического многочлена (1.5)

$$u_1 = \frac{1}{2F_1} \left[ F_2 - \sqrt{F_2^2 - 4F_1 F_3} \right], \quad u_2 = \frac{1}{2F_1} \left[ F_2 + \sqrt{F_2^2 - 4F_1 F_3} \right], \quad u_3 = F_1. \quad (1.12)$$

Далее применяется подход к процедуре усреднения, разработанный в [6, 7]. Данный подход используется для усреднения системы (1.1) при возмущениях, допускающих усреднение по фазе угла нутации  $\theta$  вдоль траекторий изменения  $\theta(t)$ .

С помощью ряда преобразований первые три динамические уравнения (1.1) приведем к виду [6, 7]:

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= \varepsilon U_1(G_z, H, r, \theta), & U_1 &= (M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi) \sin \theta + M_3 \cos \theta, \\ \dot{H} &= \varepsilon U_2(G_z, H, r, \theta), & U_2 &= M_1 p + M_2 q + M_3 r, \\ \dot{r} &= \varepsilon U_3(G_z, H, r, \theta), & U_3 &= C^{-1} M_3. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь и в трёх последних кинематических уравнениях (1.1) подразумевается, что переменные  $p, q, r$  при помощи (1.2) выражены как функции  $G_z, H, r, \psi, \theta, \varphi$  и подставлены в (1.1), (1.13).

Для применения метода усреднения потребуем, чтобы правые части уравнений (1.13) были представлены как функции от медленных переменных  $G_z, H, r$  и быстрой переменной  $\theta$ , были периодическими по фазе угла  $\theta$  с периодом  $2\pi$ , и имели следующие структурные свойства возмущающего момента сил (см. (1.2))

$$\begin{aligned} M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi &= M_1^*(G_z, H, r, \theta), \\ M_1 p + M_2 q &= M_2^*(G_z, H, r, \theta), & M_3 &= M_3^*(G_z, H, r, \theta), \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$M_1 = pf, \quad M_2 = qf, \quad M_3 = M_3^*, \quad f = f(G_z, H, r, \theta). \quad (1.15)$$

Тогда, правые части уравнений (1.13)  $U_1, U_2, U_3$  будут  $2\pi$ -периодическими функциями фазы угла  $\theta$ .

Для быстро вращающегося твердого тела при  $k^2 \ll 1$  из выражения (1.3) для  $u$  получим приближенную формулу

$$u = \cos \theta \approx u_1 + (u_2 - u_1) \sin^2(\alpha t + \beta). \quad (1.16)$$

Подставим в правые части системы (1.13) быструю переменную  $\theta$  из выражения (1.16) для невозмущенного движения.

$$\theta \approx \arccos \left[ u_1 + (u_2 - u_1) \sin^2(\alpha t + \beta) \right].$$

Усредняя правые части полученной системы, получим с учетом (1.3), (1.6) усредненную систему первого приближения:

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= \varepsilon V_1(G_z, H, r), & \dot{H} &= \varepsilon V_2(G_z, H, r), \\ \dot{r} &= \varepsilon V_3(G_z, H, r), & i &= 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$V_i(G_z, H, r) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi/\alpha} U_i(G_z, H, r, \theta(t)) dt,$$

На интервале времени порядка  $\varepsilon^{-1}$  оценка близости решений систем (1.13), (1.17) состоит из суммы оценки аппроксимации порождающего решения и малого параметра  $\varepsilon$ , характеризующего величину возмущений [21].

После исследования и решения системы (1.17) для  $G_z, H, r$  медленные переменные  $u_i, i = 1, 2, 3$  определяются по формулам (1.12).

## 2. ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СУММЫ ПОСТОЯННОГО И ДИССИПАТИВНОГО МОМЕНТОВ

В качестве примера предложенной методики исследуем совместное влияние среды с линейной диссипацией и малого постоянного момента, приложенного вдоль оси симметрии, на движение твердого тела, близкое к случаю Лагранжа. Возмущающие моменты  $\varepsilon M_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  имеют вид [20, 22]:

$$M_1 = -ap, \quad M_2 = -aq, \quad M_3 = -br - \eta, \quad a, b > 0. \quad (2.1)$$

Здесь  $a, b$  – некоторые постоянные коэффициенты пропорциональности, зависящие от свойств среды и формы тела,  $\eta = \text{const}$ .

Моменты (2.1) удовлетворяют условиям (1.13), (1.15), что дает возможность усреднения по фазе угла нутации  $\theta$ . При данных возмущениях система (1.13) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= -\varepsilon [a(p \sin \varphi + q \cos \varphi) \sin \theta + br \cos \theta] - \varepsilon \eta \cos \theta, \\ \dot{H} &= -\varepsilon [a(p^2 + q^2) + br^2] - \varepsilon \eta r, \\ \dot{r} &= -\varepsilon C^{-1} br - \varepsilon \eta C^{-1}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Проинтегрировав третье уравнение (2.2), получим ( $r_0$  – произвольное начальное значение осевой скорости вращения,  $\tau = \varepsilon t$  – медленное время):

$$r = (r_0 + \eta b^{-1}) \exp(-bC^{-1}\tau) - \eta b^{-1}. \quad (2.3)$$

В первых двух уравнениях (2.2) выполним усреднение согласно (1.17), подставляя вместо  $r$  его выражение (2.3). Отметим, что с учетом (1.8), (1.11)

$$\frac{1}{2}(u_1 + u_2) = \frac{F_2}{2F_1} \sim 1. \quad (2.4)$$

После ряда преобразований усредненная система первого приближения принимает вид

$$\begin{aligned} G_z' + aA^{-1}G_z &= (aA^{-1}C - b)(r_0 + \eta b^{-1}) \exp(-bC^{-1}\tau) - \eta b^{-1}aA^{-1}C, \\ H' + 2aA^{-1}H &= (aA^{-1}C - b)(r_0 + \eta b^{-1})^2 \exp(-2bC^{-1}\tau) - \\ &- \eta(r_0 + \eta b^{-1})(2b^{-1}aA^{-1}C - 1) \exp(-bC^{-1}\tau) + \eta^2 b^{-2}aA^{-1}C + 2\mu aA^{-1}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Решение системы (2.5) записывается следующим образом

$$\begin{aligned} G_z &= (G_{z0} - Cr_0) \exp(-aA^{-1}\tau) + C(r_0 + \eta b^{-1}) \exp(-bC^{-1}\tau) - \eta Cb^{-1}, \\ H &= \left( H_0 - \frac{1}{2}Cr_0^2 - \mu \right) \exp(-2aA^{-1}\tau) + \frac{1}{2}C(r_0 + \eta b^{-1})^2 \exp(-2bC^{-1}\tau) - \\ &- \eta Cb^{-1}(r_0 + \eta b^{-1}) \exp(-bC^{-1}\tau) + \frac{1}{2}\eta^2 Cb^{-2} + \mu. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь  $G_{z0}, H_0$  – произвольные начальные значения проекции вектора кинетического момента тела на вертикаль  $Oz$  и полной энергии тела.

Отметим некоторые качественные особенности движения в данном случае. Модуль осевой скорости вращения  $r$  и проекция вектора кинетического момента на вертикаль  $Oz$

асимптотически приближаются к значениям  $r = -\eta b^{-1}$ ,  $G_z = -\eta C b^{-1}$ . Полная энергия  $H$  изменяется, асимптотически приближаясь к значению  $H = 0.5\eta^2 C b^{-2} + \mu$ .

### 3. ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДИССИПАТИВНЫХ МОМЕНТОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ МЕДЛЕННОГО ВРЕМЕНИ

Рассмотрим возмущенное движение, близкое к случаю Лагранжа под действием внешней среды. Возмущающие моменты  $M_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) являются линейно-диссипативными и медленно изменяются во времени:

$$M_1 = -a(\tau)p, \quad M_2 = -a(\tau)q, \quad M_3 = -b(\tau)r, \quad a(\tau) > 0, \quad b(\tau) > 0, \quad \tau = \varepsilon t. \quad (3.1)$$

Здесь  $a(\tau)$ ,  $b(\tau)$  – интегрируемые функции, зависящие от свойств среды и формы тела.

Первые три уравнения (1.13) с учетом (3.1) удовлетворяют условиям используемой методики усреднения и приводятся к виду:

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= -\varepsilon \left[ (a(\tau)p \sin \varphi + a(\tau)q \cos \varphi) \sin \theta + b(\tau)r \cos \theta \right], \\ \dot{H} &= -\varepsilon \left[ a(\tau)(p^2 + q^2) + b(\tau)r^2 \right], \\ \dot{r} &= -\varepsilon C^{-1} b(\tau)r. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Третье уравнение (3.2) может быть проинтегрировано:

$$r = r_0 \exp \left[ -\varepsilon C^{-1} \int_0^t b(\varepsilon t) dt \right]. \quad (3.3)$$

Рассмотрим случай, когда  $a(\tau)$ ,  $b(\tau)$  имеют вид:

$$a(\tau) = a_0 + a_1 \tau, \quad b(\tau) = b_0 + b_1 \tau, \quad a_0, a_1, b_0, b_1 - const. \quad (3.4)$$

Проинтегрировав уравнение (3.3), получим:

$$r = r_0 \exp \left[ -\varepsilon C^{-1} (b_0 t + 0.5 b_1 t^2) \right]. \quad (3.5)$$

Первые два уравнения системы (3.2) после ряда преобразований и усреднения примут вид

$$\begin{aligned} G'_z &= -A^{-1} G_z a(\tau) + [A^{-1} C a(\tau) - b(\tau)] r, \\ H' &= -2A^{-1} H a(\tau) + [A^{-1} C a(\tau) - b(\tau)] r^2 + 2A^{-1} \mu a(\tau). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Уравнения (3.6) решены в аналитическом виде с помощью математического пакета Maple при предположении, что в начальный момент времени тело получило угловую скорость вращения относительно оси динамической симметрии, равную  $r_0 = \sqrt{3}$ ; кроме того,

$$A = 1.5, \quad C = 1, \quad \mu = 0.5, \quad a_0 = b_0 = 1, \quad a_1 = b_1 = 0.1. \quad (3.7)$$

Выражения для  $G_z$ ,  $H$  имеют вид:

$$\begin{aligned} G_z &= 1.73 \exp(-\tau - 0.05\tau^2), \\ H &= 0.5 + 1.5 \exp(-2\tau - 0.1\tau^2) - 0.5 \exp(-1.33\tau - 0.067\tau^2). \end{aligned} \quad (3.8)$$

При предположениях (3.7) проекция вектора кинетического момента  $G_z$  и величина  $r$  монотонно убывают и стремятся к нулю. Полная энергия  $H$  монотонно убывает, приближаясь к значению  $H = 0.5$ .

## ВЫВОДЫ

Изложена новая оригинальная методика численно-аналитического решения существенно нелинейной проблемы-исследования динамики осесимметричного тела в случае Лагранжа под действием нестационарных возмущающих моментов. Выполнено тестирование методики в случае осевого и диссипативного моментов внешней среды.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№№17-01-00538 и 16-01-00412).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кузмак Г. Е. Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. М.: Наука, 1970. 348 с.
2. Ярошевский В. А. Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978. 167 с.
3. Асланов В. С. Пространственное движение тела при спуске в атмосфере. М.: Физматлит, 2004. 160 с.
4. Сидоренко В. В. Об одном классе движений спутника, несущего сильный магнит. *Космич. исслед.* 2002. Т. 40, № 2. С. 147–155.
5. Лещенко Д. Д. Эволюция вращений твердого тела, близких к случаю Лагранжа. *Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем: процессы, модели, эксперимент.* 1998. Вып. 2(6). С. 32–37.
6. Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа. *Прикладная математика и механика.* 1979. Т. 43, Вып. 5. С. 771–778.
7. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д. Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. М.-Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2015. 308 с.
8. Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии. *Известия АН СССР. Механика твердого тела.* 1986. № 5. С. 3–10.
9. Simpson H. C., Gunzburger M. D. A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction. *J. Appl. Math. and Phys.* 1986. Vol. 37, № 6. P. 867–894.
10. Сазонов В. В., Сидоренко В. В. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярным прецессиям Лагранжа. *Прикладная математика и механика.* 1990. Т. 54, Вып. 6. С. 951–957.
11. Sidorenko V. V. Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium. *J. Nonlinear Sci.* 1994. Vol. 4. P. 35–57.
12. Заболотнов Ю. М., Любимов В. В. Нелинейные резонансные эволюционные эффекты при движении твердого тела вокруг неподвижной точки. *Прикладная математика и механика.* 2002. Т. 66, Вып. 3. С. 410–417.
13. Холостова О. В. Задачи динамики твердых тел с вибрирующим подвесом. М.-Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2016. 308с.
14. Маркеев А. П. О движении тяжелого динамически симметричного твердого тела с вибрирующей точкой подвеса. *Известия РАН. Механика твердого тела.* 2012. № 4. С. 3–10.
15. Wan C. J., Tsiotras P., Coppola V. T., Bernstein D. S. Global asymptotic stabilization of a spinning top with torque actuators using stereographic projection. *Dynamics and Control.* 1997. Vol. 7. P. 215–233.
16. Provatidis C. G. Revisiting the spinning top. *Journal of Material and Mechanical Engineering.* 2012. Vol. 1. P. 71–88.
17. Суслов Г. К. Теоретическая механика. М.-Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
18. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
19. Градштейн И. М., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
20. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.
21. Мухин Н. П. Упрощенный алгоритм асимптотического интегрирования существенно нелинейных систем. *Известия АН СССР. Механика твердого тела.* 1985. № 6. С. 51–54.
22. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. М.: Наука, 1985. 288 с.

**REFERENCES**

1. Kuzmak, G. E. (1970). The Dynamics of the Uncontrolled Motion of a Vehicle during Atmospheric Re-Entry. Moscow: Nauka.
2. Yaroshevskii, V. A. (1978). Motion of an Uncontrolled Body in the Atmosphere. Moscow: Mashinostroyeniye.
3. Aslanov, V. S. (2004). Spatial Motion of a Body at Descent in the Atmosphere. Moscow: Fizmatlit.
4. Sidorenko, V. V. (2002). One class of motions for a satellite carrying a strong magnet. Cosmic Research. Vol. 40, no. 2, pp. 133-141.
5. Leshchenko, D. D. (1998). The evolution of the rigid body motions, close to Lagrange case. Topical problems of aviation and aerospace systems: processes, models, experiment. Iss. 2(6), pp. 32-37.
6. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. & Chernousko, F. L. (1979). Perturbed motions of a rigid body, close to the Lagrange case. J. Appl. Math. Mech.. Vol. 43, no. 5, pp. 829-837.
7. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D. & Leshchenko, D. D. (2015). Evolution of Motions of a Rigid body about its Center of Mass. Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Science.
8. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. & Chernousko, F. L. (1986). Perturbed motion of a rigid body, close to regular precession. Mechanics of Solids. Vol. 21, no. 5, pp. 1-8.
9. Simpson, H. C. & Gunzburger, M. D. (1986). A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction. J. Appl. Math. and Phys. Vol. 37, no. 6, pp. 867-894.
10. Sazonov, V. V. & Sidorenko, V. V. (1990). The perturbed motions of a solid close to regular Lagrangian precessions. J. Appl. Math. Mech. Vol. 54, no. 6, pp. 781-787.
11. Sidorenko, V. V. (1994). Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium. J. Nonlinear Sci. Vol. 4, pp. 35-57.
12. Zabolotnov, Yu. M. & Lyubimov, V. V. (2002). Non-linear resonance evolutionary effects in the motion of a rigid body about a fixed point. J. Appl. Math. Mech. Vol. 66, no. 3, pp. 401-408.
13. Kholostova, O. V. (2016). Problems of Dynamics of Rigid Bodies with a Vibrating Suspension. Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Science.
14. Markeev, A. P. (2012). On the motion of a heavy dynamically symmetric rigid body with vibrating suspension point. Mechanics of Solids. No. 4, pp. 373-379.
15. Wan, C. J., Tsiotras, P., Coppola, V. T. & Bernstein, D. S. (1997). Global asymptotic stabilization of a spinning top with torque actuators using stereographic projection. Dynamics and Control. Vol. 7, pp. 215-233.
16. Provatidis, C. G. (2012). Revisiting the spinning top. Journal of Material and Mechanical Engineering. Vol. 1, pp. 71-88.
17. Suslov, G. K. (1946). Theoretical mechanics. Moscow-Leningrad: Gostekhizdat.
18. Volosov, V. M. & Morgunov, B. I. (1971). Method of Averaging in the Theory of Non-linear Oscillatory Systems. Moscow: Izdatelstvo MGU.
19. Gradshtein, I. S. & Ryzhik, I. M. (2000). Tables of Integrals, Sums, Series and Products. Moscow: Nauka.
20. Magnus, K. (1971). Kreisel. Theorie und Anwendungen. Moskow: Mir.
21. Mukhin, N. P. (1985). Simplified algorithm of asymptotic integration substantially of the nonlinear systems. Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela. No. 6, pp. 51-54.
22. Koshlyakov, V. N. (1985). Problems in Rigid Body Dynamics and the Applied Theory of Gyroscopes: Analytical Methods. Moscow: Nauka.

УДК 519.688:519.6:514.752

## ФОРМАЛИЗАЦИЯ ОПИСАНИЯ R-ФУНКЦИЙ С ПОДДЕРЖКОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Аль-Атамнех Б. Г. М., аспирант

*Запорожский национальный университет,  
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

kmm@znu.edu.ua

Предложен предметно-ориентированный язык (DSL – domain-specific language), предназначенный для описания R-функций с учетом возможности их параллельных вычислений. Данный язык, получивший название RFL, позволяет описывать математические модели геометрических объектов произвольной формы. Приведены примеры описания с его помощью плоских и пространственных геометрических объектов.

*Ключевые слова: R-функция, DSL, RFL, параллельные вычисления, математическая модель, геометрическая область.*

## ФОРМАЛІЗАЦІЯ ОПИСУ R-ФУНКЦІЙ З ПІДТРИМКОЮ ПАРАЛЕЛЬНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

Аль-Атамнех Б. Г. М., аспірант

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

kmm@znu.edu.ua

Запропоновано предметно-орієнтовану мову (DSL – domain-specific language), призначену для опису R-функцій з урахуванням можливості їх паралельних обчислень. Ця мова, яка отримала назву RFL, дозволяє описувати математичні моделі геометричних об'єктів довільної форми. Наведені приклади опису з її застосуванням плоских і просторових геометричних об'єктів.

*Ключові слова: R-функція, DSL, RFL, паралельні обчислення, математична модель, геометрична область.*

## FORMALIZATION OF THE DESCRIPTION OF R-FUNCTIONS WITH THE SUPPORT OF PARALLEL COMPUTATIONS

Al-Atamneh B. G. M., postgraduate

*Zaporizhzhya National University,  
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

kmm@znu.edu.ua

Numerical analysis of boundary value problems assumes the construction of mathematical models of geometric regions of complex shape with their subsequent sampling to given types of grids. The application of the most widely used numerical methods for solving mathematical physics problems such as the finite element method requires the construction of a grid model of the initial geometric domain in the form of a finite set of non-intersecting geometric regions of simple form, called finite elements and filling the entire area (or volume) of the investigated Geometric area. Automatic generation by computer technology of discrete models of geometric regions is quite a challenging and challenging task. To solve it, first of all, it is necessary to create a formal way of describing the initial geometric domain, convenient for processing by a computer. One of the most universal and effective ways of describing geometric domains of arbitrary shape is to use the apparatus of R-functions proposed by V.L Rvachov. With the help of R-functions, the geometric domain can be represented functionally in the form of a relation of a real continuous function that takes a zero value on the boundary of a geometric domain, a positive value inside the region, and a negative value outside of it. To automate the description of mathematical models of geometric regions of complex shape using R-functions, it is necessary to develop specialized problem-oriented languages (DSL), which allow convenient and unambiguous description of R-functions of any complexity. Since the R-function is an implicit way of describing mathematical models of geometric domains, its calculation in solving an inverse problem of analytic geometry can have considerable computational complexity. Therefore, to improve the efficiency of calculating R-functions, it seems rational to use parallel computations. The purpose of this paper is to describe the proposed subject-oriented language RFL mathematical modeling of geometric regions using R-functions supporting parallel computational methods.

*Key words: R-function, DSL, RFL, parallel computing, mathematical model, geometric area.*

## ВВЕДЕНИЕ

Численный анализ различных классов краевых задач предполагает построение математических моделей геометрических областей сложной формы с последующей их дискретизацией на заданные типы сеточных моделей. Применение наиболее распространенных на практике численных методов решения краевых задач, таких, например, как метод конечных элементов, требует построения сеточной модели исходной геометрической области в виде конечной совокупности непересекающихся геометрических областей простой формы (конечных элементов), заполняющих всю площадь (или объем) исследуемой геометрической области.

Генерация с помощью вычислительной техники дискретных моделей геометрических областей является достаточно сложной задачей. Для ее решения, в первую очередь, необходимо создать формальный способ описания исходной геометрической области, удобный для автоматической обработки с помощью компьютера. Обзор основных существующих подходов, применяемых на практике для описания моделей геометрических областей сложной формы, приведен в работе [1]. Одним из наиболее универсальных и эффективных способов описания геометрических областей произвольной формы является использование аппарата R-функций, предложенного В. Л. Рвачовым [2]. С помощью R-функций геометрическая область может быть представлена функционально в виде соотношения  $\omega(x, y, z) \geq 0$ , где вещественная непрерывная функция  $\omega$  принимает нулевое значение на границе области, положительное значение внутри области и отрицательное значение за ее пределами.

Для описания произвольной геометрической области с помощью R-функции в общем виде необходимо решить обратную задачу аналитической геометрии – для существующего объекта построить его аналитическое описание [2-4]. Методика построения функции  $\omega$  основана на операциях с известными уравнениями геометрических примитивов:

$$\begin{cases} x \vee y \equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2}, \\ x \wedge y \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \bar{x} \equiv -x, \end{cases}$$

где  $x$  и  $y$  – функции, определяющие некоторые исходные геометрические примитивы, из которых строится нужная геометрическая область [2].

Для автоматизации описания математических моделей геометрических областей сложной формы с использованием R-функций необходима разработка специализированных проблемно-ориентированных языков (DSL – domain-specific language) [5], позволяющих удобно и однозначно описывать R-функции любой сложности. Поскольку R-функция является неявным способом описания математических моделей геометрических областей, то ее вычисление при решении обратной задачи аналитической геометрии может иметь значительную вычислительную трудоемкость [6]. Поэтому для повышения эффективности вычисления R-функций представляется рациональным использование параллельных вычислений.

Целью данной работы является описание предложенного предметно-ориентированного языка RFL, математическое моделирование геометрических областей с помощью R-функций, поддерживающего параллельные методы вычислений.

## СИМВОЛЫ ЯЗЫКА RFL

Описание предметно-ориентированного языка должно однозначно задавать его синтаксис и семантику. Синтаксисом языка называется множество правил, с помощью которых описывается его структура. Семантикой – принято называть правила интерпретации смысла его предложений. Формальную грамматику языка образует совокупность его синтаксических правил.



Для описания синтаксиса DSL на практике используют расширенную Бэкуса-Наура форму (РБНФ), с помощью которой можно одни синтаксические категории последовательно представить через другие [7]. Формальное описание основных символов RFL с помощью РБНФ можно представить следующим образом.

буква = «A» | «B» | «C» | «D» | «E» | «F» | «G» | «H» | «I» | «J» | «K» | «L» | «M» | «N» | «O» | «P» | «Q» | «R» | «S» | «T» | «U» | «V» | «W» | «X» | «Y» | «Z» | «a» | «b» | «c» | «d» | «e» | «f» | «g» | «h» | «i» | «j» | «k» | «l» | «m» | «n» | «o» | «p» | «q» | «r» | «s» | «t» | «u» | «v» | «w» | «x» | «y» | «z» | «\_»

цифра = «0» | «1» | «2» | «3» | «4» | «5» | «6» | «7» | «8» | «9»

знак = «-» | «+»

разделитель = «+» | «-» | «\*» | «/» | «^» | «(» | «)» | «,» | «=»

зарезервированное-слово = «abs» | «acos» | «and» | «asin» | «atan» | «atan2» | «begin» | «cos» | «cosh» | «domain» | «end» | «exp» | «not» | «or» | «return» | «sin» | «sinh» | «tan» | «tanh»

идентификатор = буква { буква | цифра }

число-без-знака = целое-без-знака | вещественное-без-знака

число-со-знаком = [знак] число-без-знака

целое-без-знака = число

число = цифра {цифра}

вещественное-без-знака = целое-без-знака «.» дробная-часть [«E» | «e» порядок] | целое-без-знака [«E» | «e» порядок]

дробная-часть = число

порядок = целое-со-знаком

целое-со-знаком = [знак] целое-без-знака

комментарий = «#» [ASCII-последовательность]

ASCII-последовательность = пусто | ASCII-символ | ASCII-последовательность ASCII-символ

пусто =

ASCII-символ = символ-таблицы-ASCII

EOL = конец-строки

Термин «идентификатор» обозначает имя, которым задается имя области или подобласти (domain), переменная или функция. Идентификаторы могут быть произвольными. Исключением является совпадение идентификатора с зарезервированными словами языка RFL.

### ТИПЫ ДАННЫХ В RFL

В языке RFL все переменные являются целыми или вещественными числами. Разрядность хранения чисел в RFL определяется его реализацией. Согласно РБНФ, тип данных можно определить следующим образом.

тип-данных = числовой-тип-данных

числовой-тип-данных = число-без-знака | число-со-знаком

Преобразование типов в языке RFL осуществляется в соответствии со следующим правилом: в арифметических выражениях разнотиповые переменные преобразуются к вещественному типу. Переменные в FORTU-F задаются следующим образом.

декларация-переменной = оператор-присваивания

оператор-присваивания = идентификатор «=» выражение EOL

Таким образом, переменная в RFL декларируется при присваивании ей некоторого значения, являющегося числовой константой или выражением (которое формально будет описано ниже).

Например, выражение вида  $PI\_2 = 3.14159 * 0.5$  декларирует вещественную переменную  $PI\_2$  и присваивает ей первоначальное значение, равное 1,570795.

### ВЫРАЖЕНИЯ В ЯЗЫКЕ RFL

Формально выражение в RFL можно описать следующим образом.

выражение = логическое-выражение

логическое-выражение = арифметическое-выражение логическая-операция арифметическое-выражение

арифметическое-выражение = константа | переменная | функция | арифметическое-выражение арифметическая-операция арифметическое-выражение

константа = число-со-знаком

переменная = идентификатор

функция = идентификатор «(» [список-параметров] «)»

список-параметров = параметр {«,» параметр}

параметр = арифметическое-выражение | идентификатор

арифметическая-операция = «+» | «-» | «\*» | «/» | «^»

логическая-операция = «and» | «or» | «not»

Выражения предназначены для описания формул, являющихся R-функциями или их частями. Для удобства описания сложных геометрических областей в языке RFL имеется набор встроенных элементарных математических функций. Их синтаксис и семантика приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Встроенные элементарные математические функции

№	Функция	Описание
1	abs(x)	Абсолютное значение аргумента x
2	acos(x)	Арккосинус
3	asin(x)	Арсинус
4	atan(x)	Арктангенс
5	atan2(x, y)	Арктангенс y/x, выраженный в радианах
6	cos(x)	Косинус
7	cosh(x)	Косинус гиперболический
8	exp(x)	Экспонента
9	sin(x)	Синус
10	sinh(x)	Синус гиперболический
11	tan(x)	Тангенс
12	tanh(x)	Тангенс гиперболический

## СТРУКТУРА ОПИСАНИЯ R-ФУНКЦИИ НА ЯЗЫКЕ RFL

Структуру описания R-функции с помощью DSL RFL можно в нотациях РБНФ описать следующим образом.

RFL-описание = блок { блок }

Блок = «domain» идентификатор «(» список-аргументов «)» EOL начало-блока [декларация-переменной { декларация-переменной } ] результат конец-блока

начало-блока = «begin» EOL

конец-блока = «end» EOL

список-аргументов = идентификатор «,» идентификатор [ «,» идентификатор ]

инструкции = оператор-присваивания

результат = «return» выражение EOL

Из приведенного описания следует, что геометрическая область описывается с помощью R-функции в виде непустого множества секций «domain». Каждая секция в общем виде предназначена для описания некоторого геометрического примитива или их логической комбинации. Секция «domain» может состоять из трех частей:

- 1) заголовка;
- 2) описания переменных;
- 3) итоговой формулы, задающей результирующее выражение R-функции или ее части.

Заголовок секции определяет ее имя и координатные аргументы (два – в случае плоской области и три – трехмерной). Блок описания переменных является необязательным и содержит задание вспомогательных переменных. Блок, задающий итоговую формулу, является обязательным. Он содержит ключевое слово «return», после которого идет выражение, в общем виде задающее R-функцию.

Такая структура описания R-функции на языке RFL поддерживает ее вычисление с использованием параллельных вычислительных систем [8]. Использование распределенных вычислений для расчета каждой секции описания сложной R-функции на языке RFL существенно повысит общую скорость вычисления итоговой R-функции.

## ПРИМЕРЫ ОПИСАНИЯ R-ФУНКЦИЙ НА ЯЗЫКЕ RFL

Описание плоской геометрической области «лерка» (рис. 1), заданной с помощью R-функции вида:

$$\omega(x, y) = (r_1^2 - x^2 - y^2) \wedge (r_2^2 - x^2 - y^2) \wedge \overline{\Lambda(r_3^2 - (x - a_1)^2 - (y - b_1)^2) \wedge (r_3^2 - (x - a_2)^2 - (y - b_2)^2) \wedge \Lambda(r_3^2 - (x - a_3)^2 - (y - b_3)^2) \wedge (r_3^2 - (x - a_4)^2 - (y - b_4)^2)},$$

где  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 0,5$ ,  $r_3 = 0,25$ ,  $a_1 = -a_2 = b_3 = -b_4 = 0,4$ ,  $a_3 = a_4 = b_1 = b_2 = 0$  на языке RFL может иметь следующий вид.

#####

# Лерка

#####

**domain** circle1(x, y)

**begin**

R = 1

```
    return R^2 - x^2 - y^2
```

```
end
```

```
domain circle2(x, y)
```

```
begin
```

```
    R = 0.4
```

```
    return R^2 - x^2 - y^2
```

```
end
```

```
domain circle3(x, y)
```

```
begin
```

```
    R = 0.25
```

```
    a = 0.4
```

```
    b = 0
```

```
    return R^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2
```

```
end
```

```
domain circle4(x, y)
```

```
begin
```

```
    R = 0.25
```

```
    a = -0.4
```

```
    b = 0
```

```
    return R^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2
```

```
end
```

```
domain circle5(x, y)
```

```
begin
```

```
    R = 0.25
```

```
    a = 0
```

```
    b = 0.4
```

```
    return R^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2
```

```
end
```

```
domain circle6(x, y)
```

```
begin
```

```
    R = 0.25
```

```
    a = 0
```

```
    b = -0.4
```

```
    return R^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2
```

```
end
```

```
domain ring(x,y)
```

```
begin
```

**return circle1(x, y) and not circle2(x, y) and not circle3(x, y) and not circle4(x, y) and not circle5(x, y) and not circle6(x, y)**  
**end**

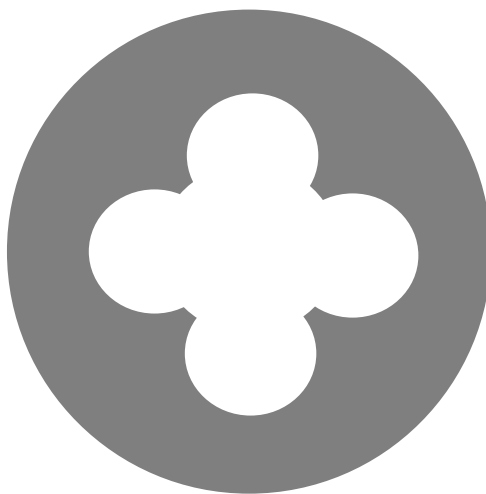


Рис. 1. Геометрическая область «лерка»

### ВЫВОДЫ

Расчет и визуализация R-функций, заданных неявным образом, является весьма трудоемким и длительным процессом, что, в первую очередь, объясняется вычислительной трудоемкостью нахождения опорных точек на границе исходной геометрической области. Предложенный в данной работе подход к формальному описанию R-функций в форме, удобной для последующей компьютерной обработки, поддерживает возможность использования параллельных вычислений для повышения быстродействия расчета и визуализации неявных функций.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Чопоров С. В., Гребенюк С. Н., Гоменюк С. И., Грищак Д. Д., Аль-Омари М. А. В., Алатамнех Х. Х. Функциональный подход к геометрическому моделированию технических систем. Запорожье: ЗНУ, 2016. 177 с.
2. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 552 с.
3. Максименко-Шейко К. В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. 306 с.
4. Максименко-Шейко К. В., Шейко Т. И. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов в 3D по информации в 2D. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2010. № 1. С. 98–104.
5. Caçado P. Domain-Specific Languages (Unfinished Draft). URL: [http://philcalcado.com/content/research\\_on\\_domain\\_specific\\_languages.html#toc-internal](http://philcalcado.com/content/research_on_domain_specific_languages.html#toc-internal).
6. Толок А. В., Мыльцев А. М., Корогод В. Л. Применение аппарата R-функций для решения оптимизационных задач математического программирования в системе «РАНОК». *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2008. № 1. С. 180–187.
7. Feynman R. EBNF: A Notation to Describe Syntax. URL: <http://www.ics.uci.edu/~pattis/misc/ebnf2.pdf>.
8. Таненбаум Э., Ван Стеен М. Распределенные системы. Принципы и парадигмы. Санкт-Петербург: Питер, 2003. 877 с.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Choporov, S. V., Grebenyuk, S. N., Gomenyuk, S. I., Grischak, D. D., Al-Omari, M. A. V. & Alatomneh, H. H. (2016). Functional approach to geometric modeling of technical systems. Zaporozhe: ZNU.
2. Rvachev, V. L. (1982). Theory of R-functions and some of its applications. Kiev: Nauk. dumka.
3. Maksimenko-Sheyko, K. V. (2009). R-functions in mathematical modeling of geometric objects and physical fields. Harkov: IPMash NAN Ukrainyi.

4. Maksimenko-Sheyko, K. V. & Sheyko, T. I. (2010). R-functions in mathematical modeling of geometrical objects in 3D under the information in 2D. *Visnyk Zaporiz'koho natsional'noho universytetu. Fyzyko-matematychni nauky*, No. 1, pp. 98-104.
5. Caçado, P. Domain-Specific Languages (Unfinished Draft). Retrieved from [http://philcalçado.com/content/research\\_on\\_domain\\_specific\\_languages.html#toc-internal](http://philcalçado.com/content/research_on_domain_specific_languages.html#toc-internal).
6. Tolok, A. V., Myiltsev, A. M. & Korogod, V. L. (2008). Application of the apparatus of R-functions for solving optimization problems of mathematical programming in the RANOK system. *Visnyk Zaporiz'koho natsional'noho universytetu. Fyzyko-matematychni nauky*, No. 1, pp. 180-187.
7. Feynman, R. EBNF: A Notation to Describe Syntax. Retrieved from <http://www.ics.uci.edu/~pattis/misc/ebnf2.pdf>.
8. Tanenbaum, E. & Van Steen, M. (2003). Distributed systems. Principles and paradigms. Sankt-Peterburg: Piter.

УДК 539.3

## **ВАГОВА ОПТИМІЗАЦІЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗІ СКЛОПЛАСТИКУ ЗА УМОВИ ОДНОГО ГРАНИЧНОГО СТАНУ І НЕВИЗНАЧЕНОЇ ІНФОРМАЦІЇ ЩОДО ВИХІДНИХ ДАНИХ**

Бараненко В. О., д. т. н., професор, Волчок Д. Л., к. т. н., доцент

*Придніпровська державна академія будівництва та архітектури,  
вул. Чернишевського, 24а, м. Дніпро, 49600, Україна*

bva0984387404@gmail.com, VolchokDL@yandex.ru

Представлена модель проектування циліндричної кругової оболонки мінімальної ваги зі склопластику. Оболонка знаходиться під дією осевої стискаючої сили, зовнішнього тиску і крутного моменту. Інформація про їх значення задана невизначеним чином. У сформульованій моделі враховано тільки один граничний стан – місцева втрата стійкості. У роботі розглянута невизначеність випадкового і нечіткого характеру. До реалізації моделі застосовано математичний апарат м'яких обчислень, що базується на методі Монте-Карло. Виконано ряд числових експериментів, що ілюструють застосування теорії ймовірності та теорії нечітких множин до задач невизначеної оптимізації оболонок.

*Ключові слова: оптимальне проектування конструкції, оболонка, випадкові, нечіткі величини, метод Монте-Карло, м'які обчислення.*

## **ВЕСОВАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ СТЕКЛОПЛАСТИКА ПРИ УСЛОВИИ ОДНОГО ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ИНФОРМАЦИИ ОБ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ**

Бараненко В. А., д. т. н., профессор, Волчок Д. Л., к. т. н., доцент

*Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры,  
ул. Чернышевского, 24а, г. Днепр, 49600, Украина*

bva0984387404@gmail.com, VolchokDL@yandex.ru

Представлена модель проектирования цилиндрической круговой оболочки минимального веса из стеклопластика. Оболочка находится под действием осевой сжимающей силы, внешнего давления и крутящего момента. Информация об их значениях задана неопределённым образом. В сформулированной модели учтено только одно предельное состояние – местная потеря устойчивости. В работе рассмотрена неопределённость случайного и нечёткого характера. К реализации модели привлечён математический аппарат мягких вычислений, основанный на методе Монте-Карло. Выполнен ряд числовых экспериментов, иллюстрирующих применение теории вероятности и теории нечётких множеств к задачам неопределённой весовой оптимизации оболочек.

*Ключевые слова: оптимальное проектирование конструкции, оболочка, случайные, нечёткие величины, метод Монте-Карло, мягкие вычисления.*

## WEIGHT OPTIMIZATION OF A CYLINDRICAL SHELL MADE OF FIBERGLASS UNDER CONDITIONS OF ONE LIMIT STATES AND UNCERTAIN INFORMATION IN INITIAL DATA

Baranenko V. A., D. of Technical Science, Professor,  
Volchok D. L. associate professor, Ph. D. in Technical Sciences

*Prydniprov's'ka State Academy of Civil Engineering and Architecture,  
Chernychevskiy str., 24a, Dnipro, 49600, Ukraine*

bva0984387404@gmail.com, VolchokDL@yandex.ru

A model for design of cylindrical circular shell of minimum weight made of fiberglass is presented. The shell is under the influence of axial compressive force, external pressure and torque. Information about their values is given in an indefinite manner. In the formulated model only one limiting state is taken into account: the local loss of stability. The paper considers the uncertainty of a random and fuzzy character. The mathematical model of soft computing, based on the Monte Carlo method, is used to implement the model. Numerical experiments illustrate the application of the theory of probability and the theory of fuzzy sets to the problems of uncertain optimization of shells.

*Key words: optimal design of construction, shell, random and fuzzy values, Monte Carlo method, soft calculations.*

### ВСТУП

Розвиток сучасної теорії оптимального проектування конструкцій (ОПК) пов'язаний як з розробкою формулювань задач, так і з розробками методів їх реалізації. Зазвичай, у формулюванні оптимізаційних задач в будівельній механіці конструкцій як цільова функція виступає обсяг, вага, вартість матеріалу, надійність та інше. Функціями обмежень – умови несучої здатності. Змінними параметрами оптимізації є геометричні і механічні характеристики елементів конструкції.

В оптимальному проектуванні конструкцій можливі два принципово різних підходи до формулювань задач оптимізації. Один з них, найбільше поширений, полягає у відповідному завданні детермінованих вихідних даних проекту. Тому такі задачі називають детермінованими задачами ОПК.

Але є випадки, коли властивості матеріалу, геометричні характеристики, величини навантажень та їх прикладення, умови закріплення та інше, мають невизначений характер, що призводить до проектної ситуації, коли не має достатньої коректної вірогідності щодо даних.

Невизначеність прикладення навантажень, їх величини можуть бути описані випадковим чи нечітким чином, або їх сумісною комбінацією. Неякість технологічних процесів виготовлення виробів, неточність інструментальних вимірювань, потенційна неможливість створення матеріалів з ідеальними властивостями призводить до випадкових, нечітких і неточних їх характеристик.

З позиції оптимального проектування важливим є те, що реальні відхилення від точних, або середніх значень характеристик описуються деякими функціями: у теорії ймовірностей – це функція розподілу випадкової величини [1], а в теорії нечітких множин – це функція належності [2] з відомими характеристиками. Така інформаційна ситуація дозволяє побудувати математичні моделі невизначеної оптимізації.

Метою нашого дослідження є адаптація методів «м'яких обчислень» і розробка обчислювальних процедур до задачі вагової оптимізації циліндричної ортотропної оболонки за умови дії зовнішнього тиску, стискаючої сили, крутного моменту і врахуванні одного граничного стану – місцевої втрати стійкості. Тут використано методи статистичного та нечіткого імітаційного моделювання. Проведено дослідження впливу невизначеності в завданні вихідних даних на результати проектування.

### 1. ОСНОВНА ЧАСТИНА

**1.1. Об'єкт оптимізації.** Розглядається циліндрична кругова оболонка, довжиною  $L$ , радіусом  $R$  і товщиною  $h$ , яка знаходиться під дією осьової стискаючої сили  $F^*$ , зовнішнього тиску  $q^*$  і крутного моменту  $M^*$ . Матеріал оболонки склопластик, який

армований у двох взаємно перпендикулярних напрямках, що збігається з осьовим та коловим напрямками.

Припускається, що коефіцієнт об'ємного армування  $\nu$  є величиною сталою і змінюється тільки  $\theta$  – відносний зміст волокон, що армують в обох напрямках.

У межах лінійної теорії армування враховуючи, що  $E_a \gg E_c$ , вважаємо, що [6]

$$E_1 = E\theta; \quad E_2 = E(1-\theta),$$

де  $E$  визначається модулем пружності  $E_a$  армованих волокон і коефіцієнтом армування  $\nu$ ;  $E_c$  – модуль пружності зв'язувального матеріалу.

Зважаючи також, що умова загальної стійкості оболонки заздалегідь виконується, будемо враховувати тільки один граничний стан – місцеву втрату стійкості оболонки. У цьому випадку маємо таке фізичне обмеження:

$$\frac{F^*}{F_{кр}} + \frac{q^*}{q_{кр}} + \frac{M^*}{M_{кр}} \leq 1, \quad (1)$$

де  $F_{кр}$ ,  $q_{кр}$ ,  $M_{кр}$  – критичні сили оболонки, які визначаються в межах лінійної теорії [7]

$$F_{кр} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} h^2 \sqrt{E_1 E_2}; \quad q_{кр} = \frac{\pi\sqrt{6}}{9} E_1^{1/4} E_2^{3/4} \frac{R}{L} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2}; \quad M_{кр} = 1,48\pi h^2 \frac{R}{L} \sqrt{h R E_1^{3/8} E_2^{5/8}}. \quad (2)$$

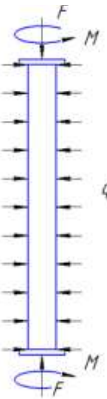


Рис. 1. Циліндрична оболонка під дією осьової стискаючої сили  $F^*$ , зовнішнього тиску  $q^*$  і крутного моменту  $M^*$

**1.2. Постановка и формулювання оптимального проектування.** Треба знайти такі значення змінних параметрів  $h$  і  $\theta$ , щоб за умови збереження стійкості оболонка мала найменший обсяг матеріалу  $W$  (або найменшу вагу, вартість). Уведемо до розгляду позначення компонент векторів  $u = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ ,  $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ . Величини  $\{u_i\}$ ;  $i=1,2,\dots,6$  задаються:  $u_1 = L$ ;  $u_2 = R$ ;  $u_3 = E$ ;  $u_4 = F^*$ ;  $u_5 = q^*$ ;  $u_6 = M^*$ , а параметри  $\{x_i\}$ ;  $i=1,2,3$  є шуканими:  $x_1 = h$ ;  $x_2 = 1-\theta$ ;  $x_3 = \theta$ . У цих термінах задача, сформульована вище, запишеться з урахуванням (1)-(2) у вигляді такої математичної моделі:

$$x^{opt} = \arg \left\{ \min_x W(x, u) \mid g(x, u) \leq 0 \right\}, \quad (3)$$

де:

$$W(x, u) = Ax_1; \quad (4)$$

$$g(x) = \frac{F^*}{Bx_1^2 \sqrt{x_2 x_3}} + \frac{q^*}{C \sqrt{x_1^5 \sqrt[4]{x_2^3 x_3}}} + \frac{(M^*/D)^2}{x_1^5 \sqrt[4]{x_2^5 x_3^3}} - 1; \quad (5)$$



$$A = 2\pi u_1 u_2; \quad B = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} E; \quad C = \frac{\pi\sqrt{6}E}{9u_1\sqrt{u_2^3}}; \quad D = \frac{1,48\pi E}{u_1\sqrt{u_2^3}}; \quad x_i \geq 0. \quad (6)$$

Співвідношення (1)-(2), (4)-(6) визначають пряму задачу проектування оболонки. А задача (3) з урахуванням (1)-(2) у нашій роботі буде прототипом задач оптимального проектування, коли вихідні параметри як  $F^*$ ,  $q^*$ ,  $M^*$  є випадкової або нечіткої природи. Позначимо такий фактор через вектор  $\xi$ . Якщо компоненти вектора  $\xi$  є випадковою величиною із заданим законом розподілу  $f(x)$ , то задача (3) має вигляд:

$$x^{opt} = \arg \left\{ \min_x W(x, u) \mid \Pr \text{ob}(g(x, \xi) \leq 0) \geq \alpha \right\}, \quad \alpha \in [0, 1], \quad (7)$$

де вираз  $S^r = g(x, u, \xi) \leq 0$  означає подію, ймовірність якої обмежується знизу наперед заданою величиною рівня надійності  $\alpha$ . Якщо  $\xi$  є нечіткою величиною, із заданою функцією належності  $\mu(x)$  [5], то задачу (3) запишемо у вигляді

$$x^{opt} = \arg \left\{ \min_x W(x, u) \mid \text{Pos}(g(x, u, \xi) \leq 0) \geq \beta \right\}, \quad (8)$$

де Pos є позначення можливості виконання події  $S^r = g(x, u, \xi) \leq 0$ , а  $0 \leq \beta \leq 1$ . Величина  $\beta$  є заданий нижній рівень можливості цієї події.

**1.3. Реалізація детермінованої моделі.** Математична модель (1) є багатовимірною екстремальною задачею з істотно нелінійними функціями в обмеженнях (5). Для її розв'язання залучено широко відомий чисельний метод статистичних випробувань, або метод Монте-Карло [4]. Для отримання наближеного розв'язку використовують виборку, яка формується шляхом чисельного моделювання статистичного експерименту. До недоліків методу відносять потребу виконання обчислень великого обсягу виборки та повільну збіжність шуканого результату.

Якщо вимоги до точності не зовсім жорсткі (м'які обчислення), то цей метод виявляється конкурентноспроможним методом іншої природи. На користь цього методу свідчить і така обставина, коли збіжність та обсяг обчислень мало залежить від вимірності задачі, яка розв'язується, тоді як трудомісткість застосування інших обчислювальних методів дуже швидко збільшується зі збільшенням вимірності («прокляття» вимірності). Крім того, ця процедура є чисельним методом нульового порядку, який не потребує уведення похідних функцій, що входять, наприклад, до оптимізаційної задачі.

Другий важливий напрямок застосування методу Монте-Карло – так зване імітаційне моделювання – є дослідження обчислювальних процесів, явищ і систем випадкової, нечіткої та неточної природи. Виконання чисельних експериментів за допомогою імітаційних моделей значно дешевше, ніж проведення натурних випробувань.

Суть використання імітаційного моделювання в розв'язанні задачі (3) полягає в генеруванні змінних проектування в заданих інтервалах  $x_i \in [x_i^-, x_i^+]$ ;  $i = 1, 2, 3$ . Виконується  $N$  випробувань, у яких, очевидно, є  $N^* \leq N$  випробувань, де має місце обмеження  $g(x, u, \xi) \leq 0$ . Із отриманих тут векторів  $x$  вибирається такий вектор, який мінімізує значення величини  $W(x)$ .

**1.4. Стохастичне моделювання.** Основною операцією у стохастичній моделі (7) є обчислення ймовірності події  $S^r$ ;  $j = 1, 2, 3$  для випадкових величин  $\xi_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, r$  за заданими законами розподілу. Реалізація оптимізаційної задачі (7) виконана на основі

імітаційного моделювання. Сутність процесу моделювання полягає в такому. Нехай  $N$  є число всіх виконаних випробувань в експерименті. У кожному випробуванні формується випадковий вектор  $\zeta_k = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N\}$ ;  $\zeta_i = random$ . Серед векторів  $\xi(\zeta_i)$ , очевидно, є такі, які задовольняють подію  $S^r$ . Нехай їх число буде  $N^*$ , причому  $N^* \leq N$ . Уведемо в розгляд таку функцію

$$f(\zeta_i) = \begin{cases} 1, & \text{для } g(x, u, \zeta_i) \leq 0, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (9)$$

Величина  $\sum_{i=1}^N f(\zeta_i)$  є в точності число  $N^*$  випадкових векторів, що задовольняють події  $S^r$ .

Співвідношення  $N^*/N$  визначає відносну частоту появи події  $S^r$ . Відповідно до посиленого закону великих чисел (теорема Бореля) зі збільшенням числа  $N$  незалежних випробувань відносна частота  $N^*/N$  прагне до істинної ймовірності події  $S_j$ , а саме:

$$\Pr = \frac{N^*}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\zeta_i) \rightarrow \text{prob}(S_j), \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (10)$$

**1.5. Нечітке моделювання.** Реалізація рівняння (8) здійснюється на основі процедури нечіткого імітаційного моделювання. Основною операцією в цій процедурі є обчислення можливості виконання події  $S^f$ , тобто  $\text{Pos}(g(x, u, \xi) \leq 0)$ . Виходячи із заданої оцінки  $\beta$  знизу і заданої функції належності  $\mu(x)$ , формуються  $\beta$ -рівневі [3] множини  $Q_i$  для величини  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , компоненти якої подаються у вигляді нечітких інтервалів  $Q_i = [a_i, b_i]$ , де  $a_i = \mu^{-1}(x)$ ;  $a_i \leq x \leq m_i$ ;  $b_i = \mu^{-1}(x)$ ;  $m_i \leq x \leq b_i$ . Тут  $\mu^{-1}(x)$  – обернена функція заданої  $\mu(x)$ ;  $m_i$  – модальне значення функції належності. Так, наприклад, для гаусової функції  $\mu(x) = ke^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$  маємо

$$a = m - \Delta(\alpha); \quad b = m + \Delta(\alpha); \quad \Delta(\alpha) = \sigma \sqrt{-2 \ln \frac{\alpha}{k}}; \quad 0 < k \leq 1.$$

З множин  $Q_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) формується декартів добуток нечіткої множини  $Q$ , яка визначається як

$$\begin{cases} Q = Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_n, \\ \mu_Q = \mu_{Q_1}(x_1) \wedge \mu_{Q_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_{Q_n}(x_n) = \min(\mu_{Q_1}(x_1), \mu_{Q_2}(x_2), \dots, \mu_{Q_n}(x_n)) \end{cases} \quad (11)$$

для кожного  $x_i \in Q_i$ ;  $i=1, 2, \dots, n$ .

Нехай для компонентів вектора  $\xi$  у множині  $Q$  випадковим чином формуються елементи  $v_j$  вектора  $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ . Якщо для них одночасно виконується умова (11)  $\psi \leq \mu_Q = \min(\mu_{Q_1}(v_1), \mu_{Q_2}(v_2), \dots, \mu_{Q_m}(v_m))$  і  $g(x, u, v) \leq 0$ , то слід вважати, що  $\psi = \mu_Q$ . Початкове значення  $\psi$  прийнято рівним заданому рівню  $\beta$ . Якщо повторити  $N$  разів ці операції, то отримується значення можливості  $\psi_j = \text{Pos}(g(x, u, \xi) \leq 0)$ ;  $j=1, 2, \dots, T$ ;  $T$  – задане число рівнів;  $\psi \leq \beta \leq 1$ . Якщо вставити цю процедуру в будь-який пошуковий

алгоритм мінімізації, у результаті цього отримується шукане значення  $x^*(\beta)$  та  $\psi^k$ . З них треба сформувати такі нечіткі множини шуканих значень  $W^*(x^*)$  та  $x^*$  [5]

$$x^* = \sum_{j=1}^T \left\{ \frac{\psi_j^*}{x^*(\beta_j)} \right\}; \quad W^* = \sum_{j=1}^T \left\{ \frac{\psi_j^*}{W^*(\beta_j)} \right\}. \quad (12)$$

У роботі для отримання шуканих оптимальних  $W^*(x^*)$  та  $x^*$  використано також метод Монте-Карло. Наступна дія – дефаззіфікація нечітких множин (12) за допомогою моделі EVM (expected value model [3]), як

$$x^{df} = \sum w_i x^*(\beta_j); \quad W^{df} = \sum_{i=1}^T w_i W^*(\beta_j); \quad i = 1, 2, \dots, T.$$

Вагові коефіцієнти  $w_i$  визначаються, наприклад, за правилом «середній центр» [5]

$$w_j = \psi_j^* / \sum_{j=1}^T \psi_j^*.$$

Отже, результатом нечіткого підходу є дефаззіфіковані значення цільової функції  $W^{df}$  та змінних проекту  $h^{df}$  і  $\theta^{df}$ .

## 2. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

**2.1. Детермінована задача оптимізації.** Для  $F^* = 12 \text{ кН}$ ;  $E = 35 \text{ ГПа}$ ;  $q^* = 5 \text{ кН/м}$ ;  $M^* = 0.2 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $h^- = 0,05 \text{ см}$ ;  $h^+ = 1 \text{ см}$ ;  $\theta^- = 0,2$ ;  $\theta^+ = 0,9$ ;  $R = 10 \text{ см}$ ;  $L = 100 \text{ см}$ .

За описаною вище процедурою імітаційного моделювання реалізовано модель (3). Результати реалізації є такими  $W^{opt} = 2447,6 \text{ см}^3$ ;  $h^{opt} = 0,39 \text{ см}$ ;  $\theta^{opt} = 0,253$ .

Графік збіжності обчислювальної процедури для числа статистичних випробувань наведено на рис. 2. При  $N \geq 10^5$  гарантовано отримання детермінованого оптимального проекту. На рис. 3-4 наведено графіки залежності величин оптимального проекту  $W^{opt}$ ,  $h^{opt}$ ,  $\theta$  від зміни параметра  $R$ .

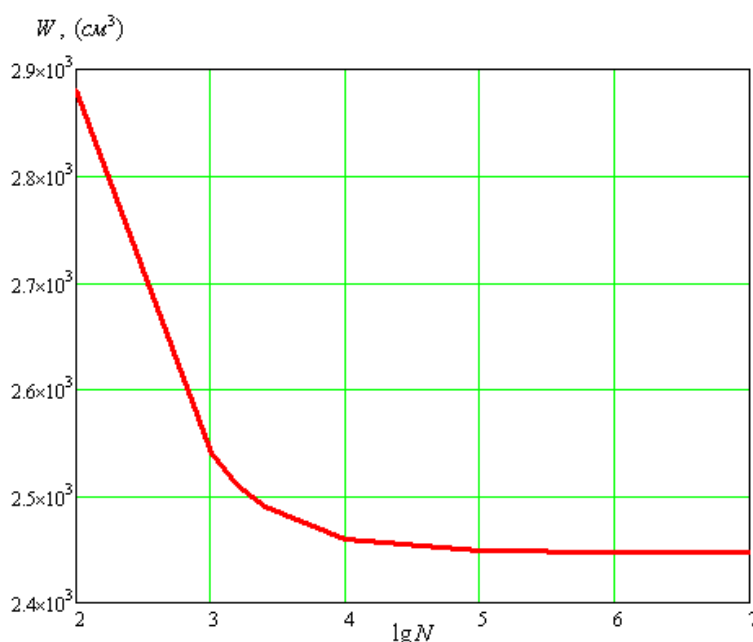


Рис. 2. Збіжність обчислювального процесу до оптимального розв'язку (за критерієм обсягу матеріалу)

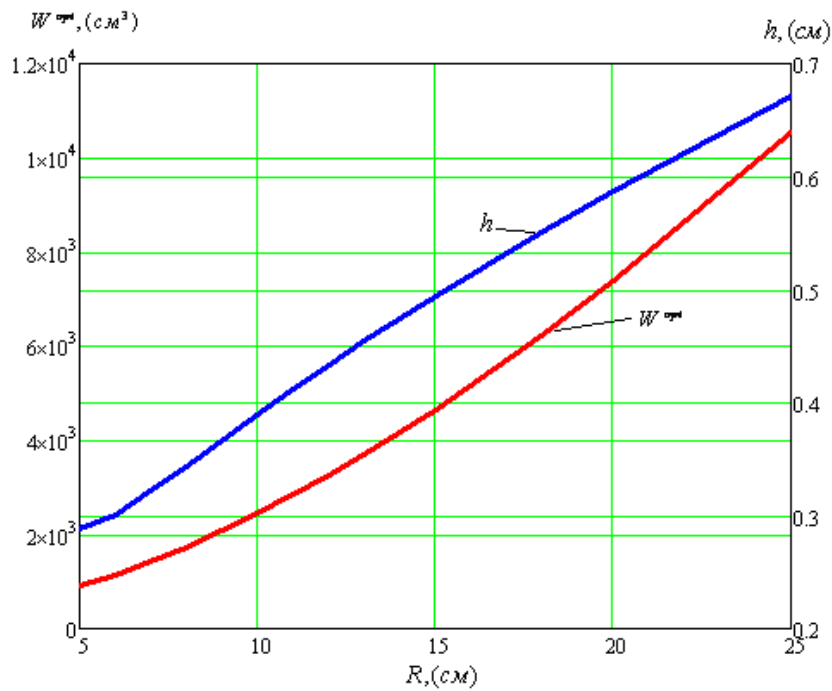


Рис. 3. Залежність оптимального обсягу і товщини оболонки від зміни радіусу

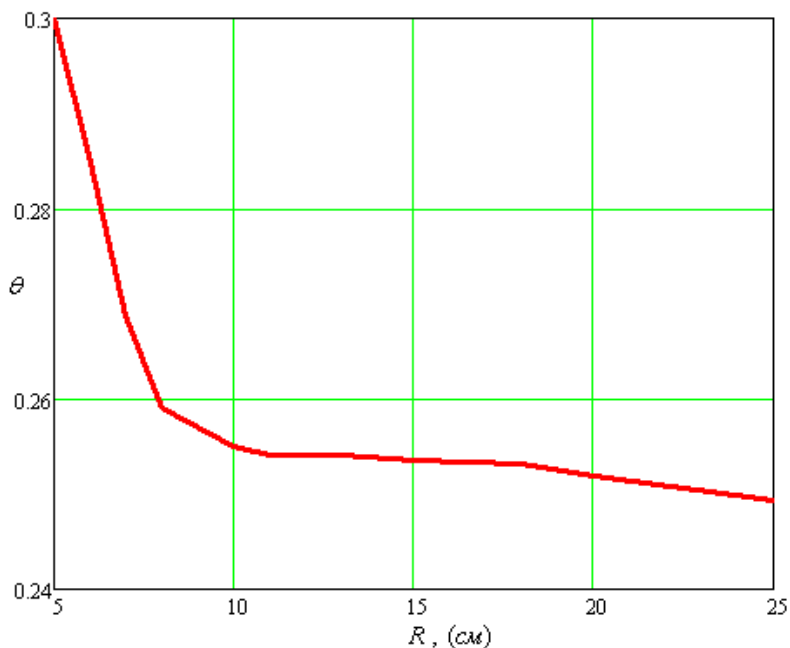


Рис. 4. Залежність відносного змісту армуючих волокон від зміни радіусу

Отже, із графіків видно, що при збільшенні радіусу  $R$  оптимальні значення обсягу і товщини збільшуються, а вміст армуючих волокон оболонки зменшується.

**2.2. Стохастична задача оптимізації.** При сталих значеннях характеристик  $E = 35 \text{ ГПа}$ ;  $L = 100 \text{ см}$  і  $R = 10 \text{ см}$  проведено за розробленою процедурою числові експерименти розв'язання стохастичної задачі (7). Тут вважається, що величини  $F^*$ ,  $q^*$  і  $M^*$  є випадковими із гаусовою функцією щільності, для якої задаються модальні значення  $m_{F^*}$ ,  $m_{q^*}$ ,  $m_{M^*}$  і дисперсії  $\sigma_{F^*}^2$ ,  $\sigma_{q^*}^2$ ,  $\sigma_{M^*}^2$ . У таблиці 1 наведено їх середні квадратичні відхилення  $\sigma_{F^*}$ ,  $\sigma_{q^*}$ ,  $\sigma_{M^*}$ .

Таблиця 1 – Характеристики випадкових величин

№ экс-ту	$\sigma_{F^*}, \text{кН}$	$\sigma_{q^*}, \text{кН} / \text{м}$	$\sigma_{M^*}, \text{кН} \cdot \text{м}$
1	1	1,5	0,02
2	0,5	1	0,01
3	0,10	0,5	0,002
4	2	1	0,03

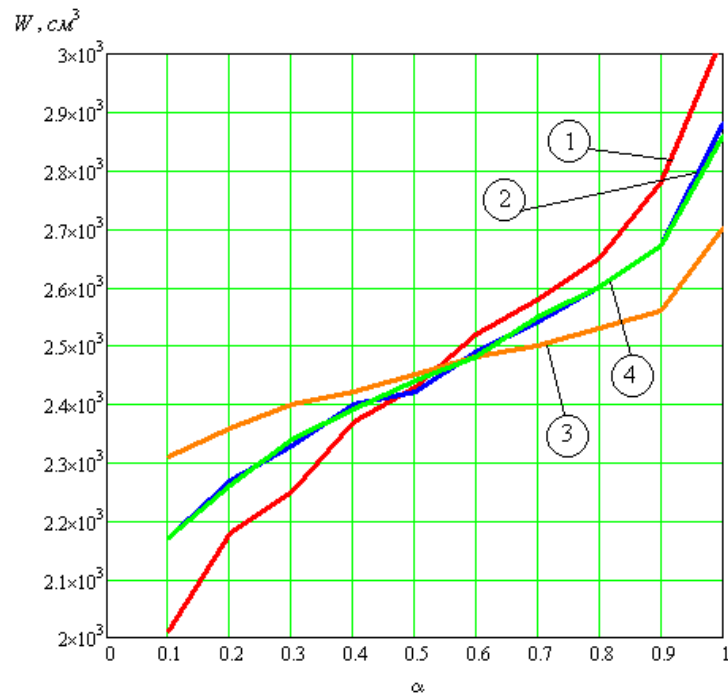
Результати числових експериментів наведено в таблиці 2.

Таблиця 2 – Результати числових розрахунків

№ экс-ту	$\alpha$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	$W, \text{см}^3$	2009	2178	2247	2370	2425	2519	2579	2654	2776	3025
	$h, \text{см}$	0,3197	0,3467	0,3577	0,3773	0,386	0,4	0,4105	0,4224	0,4419	0,4815
	$\theta$	0,3261	0,2697	0,3552	0,2552	0,265	0,3	0,2722	0,2641	0,2430	0,2211
	$pr$	0,112	0,202	0,308	0,42	0,504	0,614	0,714	0,8	0,91	1
2	$W, \text{см}^3$	2171	2265	2332	2402	2422	2488	2538	2600	2671	2880
	$h, \text{см}$	0,3455	0,3604	0,3712	0,3822	0,3855	0,3960	0,4039	0,4137	0,4251	0,4584
	$\theta$	0,2915	0,2519	0,2908	0,3201	0,2756	0,2643	0,2563	0,2663	0,2882	0,3206
	$pr$	0,1	0,202	0,3	0,414	0,518	0,614	0,7	0,818	0,91	1
3	$W, \text{см}^3$	2312	2356	2398	2419	2452	2475	2497	2531	2564	2697
	$h, \text{см}$	0,3679	0,3750	0,3817	0,3851	0,3902	0,3939	0,3974	0,4029	0,4080	0,4292
	$\theta$	0,2332	0,2420	0,2240	0,2398	0,3131	0,2890	0,2710	0,2828	0,2314	0,3733
	$pr$	0,1020	0,2060	0,3180	0,4	0,5140	0,6020	0,72	0,8140	0,9220	1
4	$W, \text{см}^3$	2172	2259	2335	2387	2437,6	2475	2548	2598	2673	2857
	$h, \text{см}$	0,3457	0,3595	0,3727	0,38	0,388	0,394	0,405	0,4135	0,4254	0,4547
	$\theta$	0,3245	0,212	0,229	0,25	0,289	0,278	0,245	0,221	0,238	0,231
	$pr$	0,1	0,212	0,31	0,408	0,502	0,606	0,708	0,806	0,902	1

Тут  $N = 5 \cdot 10^8$  – число статистичних випробувань;  $pr$  – величина обчислювальної ймовірності, за якої виконується умова в (7).

За отриманими даними для кожного експерименту побудовано графіки (рис. 5) змінювання значення оптимального обсягу  $W$  залежно від рівня надійності  $\alpha$ .

Рис. 5. Залежність оптимального обсягу  $W$  від рівня надійності  $\alpha$ 

Із графіків видно, що:

1) зменшення середньо-квадратичних відхилень  $\sigma_{F^*}$ ,  $\sigma_{q^*}$ ,  $\sigma_{M^*}$  величин випадкових силових факторів (збільшується ймовірне значення навантаження відносно модальних значень) і збільшення рівня надійності ( $\alpha > 0.5$ ) призводить до збільшення обсягу матеріалу в оптимальному проекті. Навпаки, при збільшенні середньо-квадратичних відхилень  $\sigma_{F^*}$ ,  $\sigma_{q^*}$ ,  $\sigma_{M^*}$  (зменшуються величини імовірного навантаження відносно модальних значень  $m_{F^*}$ ,  $m_{q^*}$ ,  $m_{M^*}$ ) і зменшення рівня надійності ( $\alpha < 0.5$ ) призводить до зменшення обсягу матеріалу в оптимальному проекті;

2) точка перетину всіх кривих експериментів дорівнює близько 0,5 і відповідає детермінованому розв'язку  $W^{opt}$ .

**2.3. Нечітка задача оптимізації.** Нехай сталими характеристиками експерименту будуть:

$L = 100 \text{ см}$ ;  $E = 35 \text{ ГПа}$ ;  $m_F = 12 \text{ кН}$ ;  $m_q = 5 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ ;  $m_M = 0.2 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $R_z = 10 \text{ см}$ .  $0,05 \leq h \leq 1 \text{ см}$ ;

$0,2 \leq \theta \leq 0,9$ . Нечіткими даними будуть величини навантаження  $F^*$ ,  $q^*$ ,  $M^*$ , які описуються через лінгвістичну змінну виду «приблизно». Фаззифікацією цієї інформаційної ситуації моделюємо функцію належності трикутного виду

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x - a_i}{m_i - a_i}, & a \leq x \leq m, \\ \frac{b_i - x}{b_i - m_i}, & m < x \leq b, \\ 0, & \text{для інших } x. \end{cases}$$

У цьому випадку кожна компонента  $\xi_1 = F^*$ ,  $\xi_2 = q^*$ ,  $\xi_3 = M^*$  запишеться як нечітке трикутне число  $\xi_i(a_i, m_i, b_i)_\Delta$ , де  $a_i$ ,  $m_i$ ,  $b$  задаються в кожному експерименті.

У табл. 3 наведено характеристики нечітких даних чисельних експериментах, а в табл. 4 – результати експериментів.

Таблиця 3 – Характеристики нечітких даних  $F^*$ ,  $q^*$ ,  $M^*$

№ экс-ту	$\xi(a, m, b)_\Delta$	$a$	$m$	$b$	$\Delta$
1	$F^*$ , кН	11,76	12,00	12,24	0,24
	$q^*$ , кН / м	4,9	5	5,1	0,1
	$M^*$ , кН·м	0,1960	0,2000	0,2040	0,0040
2	$F^*$ , кН	11,40	12,00	12,60	0,60
	$q^*$ , кН / м	4,75	5	5,25	0,25
	$M^*$ , кН·м	0,1900	0,2000	0,2100	0,0100
3	$F^*$ , кН	11,04	12,00	12,96	0,96
	$q^*$ , кН / м	4,6	5	5,4	0,4
	$M^*$ , кН·м	0,1840	0,2000	0,2160	0,0160
4	$F^*$ , кН	10,20	12,00	13,80	1,80
	$q^*$ , кН / м	4,25	5	5,75	0,75
	$M^*$ , кН·м	0,1700	0,2000	0,2300	0,0300
5	$F^*$ , кН	9,60	12,00	14,40	2,40
	$q^*$ , кН / м	4	5	6	1
	$M^*$ , кН·м	0,1600	0,2000	0,2400	0,0400
6	$F^*$ , кН	8,70	12,00	15,30	3,30
	$q^*$ , кН / м	3,75	5	6,15	1,25
	$M^*$ , кН·м	0,1500	0,2000	0,2500	0,0500

Таблиця 4 – Результати чисельних експериментів 1-6

№ экс-ту	$\beta$	$W^*$ , см <sup>3</sup>	$h^*$ , см	$\theta^*$	$pos$
1	0	2429.9	0.3867	0.278	0.001
	0.1	2432.5	0.3872	0.260	0.211
	0.2	2434.6	0.3875	0.243	0.261
	0.3	2437.8	0.3875	0.258	0.321
	0.4	2437.1	0.3879	0.263	0.423
	0.5	2439.2	0.3882	0.242	0.533
	0.6	2440	0.3884	0.252	0.607
	0.7	2443	0.3889	0.275	0.715
	0.8	2444	0.3890	0.249	0.817
	0.9	2446	0.3893	0.253	0.93
	1	2447.7	0.3896	0.253	1.0

Продовження табл. 4

2	0	2399,042	0,3818	0,253	0,007
	0.1	2405,410	0,3828	0,244	0,116
	0.2	2410,2	0,3836	0,270	0,226
	0.3	2413,665	0,3841	0,254	0,308
	0.4	2419,827	0,3851	0,271	0,405
	0.5	2423,64	0,3857	0,260	0,503
	0.6	2429,344	0,3866	0,249	0,625
	0.7	2434,221	0,3874	0,247	0,710
	0.8	2438,771	0,3881	0,270	0,802
	0.9	2443,392	0,3889	0,260	0,910
	1	2447,672	0,3896	0,253	1,0
3	0	2370,21	0,3772	0,251	0,001
	0.1	2380,196	0,3788	0,239	0,111
	0.2	2385,565	0,3797	0,247	0,209
	0.3	2393,877	0,3810	0,242	0,311
	0.4	2401,637	0,3822	0,241	0,406
	0.5	2409,768	0,3835	0,241	0,504
	0.6	2417,61	0,3848	0,274	0,601
	0.7	2426,168	0,3861	0,253	0,723
	0.8	2433,803	0,3874	0,241	0,809
	0.9	2440,963	0,3885	0,269	0,904
	1	2447,652	0,3896	0,257	1,0
4	0	2296.801	0.3655	0.25	0.008
	0.1	2313.713	0.3682	0.251	0.104
	0.2	2333.019	0.3713	0.268	0.226
	0.3	2344.959	0.3732	0.258	0.310
	0.4	2361.154	0.3758	0.245	0.405
	0.5	2374.731	0.3780	0.253	0.503
	0.6	2390.076	0.3804	0.256	0.602
	0.7	2405.232	0.3828	0.267	0.700
	0.8	2421.414	0.3854	0.234	0.807
	0.9	2434.564	0.3875	0.278	0.900
	1	2447.642	0.3896	0.253	1.0
5	0	2244.046	0.3572	0.243	0.002
	0.1	2262.922	0.3602	0.264	0.102
	0.2	2286.345	0.3639	0.250	0.203
	0.3	2309.671	0.3676	0.225	0.311
	0.4	2329.23	0.3707	0.249	0.402
	0.5	2349.376	0.3739	0.256	0.507
	0.6	2368.597	0.3770	0.263	0.6
	0.7	2389.872	0.3804	0.24	0.703
	0.8	2409.458	0.3835	0.24	0.803
	0.9	2429.915	0.3867	0.273	0.902
	1	2447.679	0.3896	0.254	1.0

Продвження табл. 4



6	0	2188,6	0,3483	0,291	0,008
	0.1	2216,6	0,3528	0,301	0,1
	0.2	2244,4	0,357	0,221	0,208
	0.3	2272,5	0,3617	0,281	0,306
	0.4	2296,9	0,3656	0,247	0,407
	0.5	2324,4	0,3699	0,252	0,501
	0.6	2351,3	0,3742	0,226	0,601
	0.7	2377,9	0,3785	0,264	0,711
	0.8	2398,8	0,3818	0,254	0,802
	0.9	2425,7	0,3861	0,232	0,901
	1	2447,6	0,3896	0,257	1,0

Відхилення розв’язання  $W^{df}$  від  $W^{det}$ , отриманого при детермінованих даних, знаходиться за такою формулою:  $\eta = \frac{W^{det} - W^{df}}{W^{det}} 100\%$ .

У таблиці 5 позначено  $\Delta^{data}$ , % – відхилення вихідних нечітких даних ( $F^*$ ,  $q^*$ ,  $M^*$ ) від їх модальних значень ( $m_{F^*}$ ,  $m_{q^*}$ ,  $m_{M^*}$ ).  $\eta = \Delta W$ , % – відхилення результату  $W^{df}$  від значення  $W_{det} = 2448 \text{ см}^3$  при детермінованих (модальних) даних  $m_{F^*}$ ,  $m_{q^*}$ ,  $m_{M^*}$ .

За даними таблиці 5 побудовано графіки залежності змінних  $W^f$  і  $\eta$  – дефаззіфікованого значення оптимального обсягу і відхилення його від детермінованого розв’язку  $W_{det} = 2448 \text{ см}^3$  (рис. 6).

Таблиця 5 – Результати числових експериментів

№ экс-ту	$\Delta^{data}$ , %	$W^{df}$ , $\text{см}^3$	$\eta = \Delta W$ , %	$h^{df}$	$\theta^{df}$
1	2	2442,2	0,25	0,3887	0,255
2	5	2433,5	0,60	0,3873	0,258
3	8	2425,1	0,94	0,3860	0,254
4	15	2404,2	1,80	0,3826	0,257
5	20	2388,6	2,40	0,3802	0,253
6	25	2373,6	3,0	0,3778	0,250

Із графіків видно, що 1) зі збільшенням ( $\beta \rightarrow 1$ ) рівня можливості виконання обмеження задачі ОПК, оптимальний обсяг  $W^{df}$  збільшується до розв’язку при детермінованих даних ( $\beta = 1$ ); 2) реакція оптимального проекту  $\eta$  ( $\Delta^{data}$ ) до «грубих» даних лінійна і не призводить до різкого збільшення обсягу матеріалу оболонки.

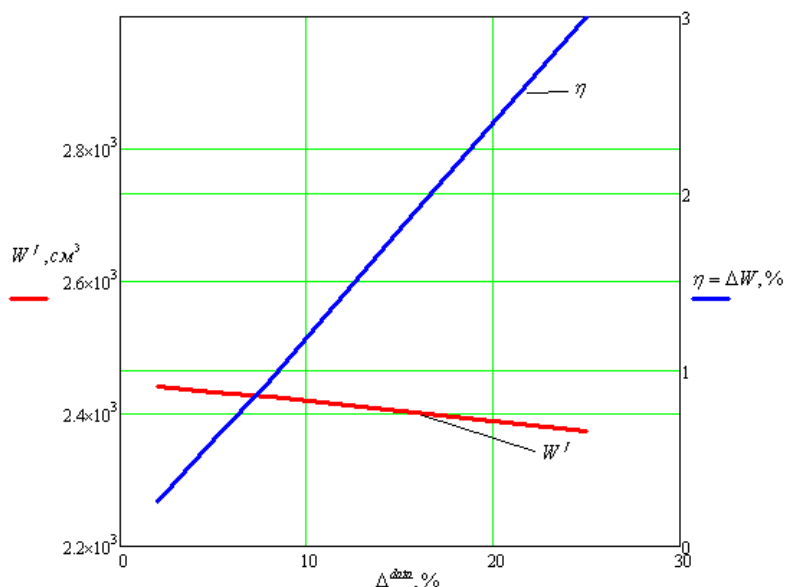


Рис. 6. Графік зміни оптимального дефаззіфікованого обсягу  $W^f$  оболонки і відхилення його від розв'язку  $W^{\text{det}}$  при детермінованих даних

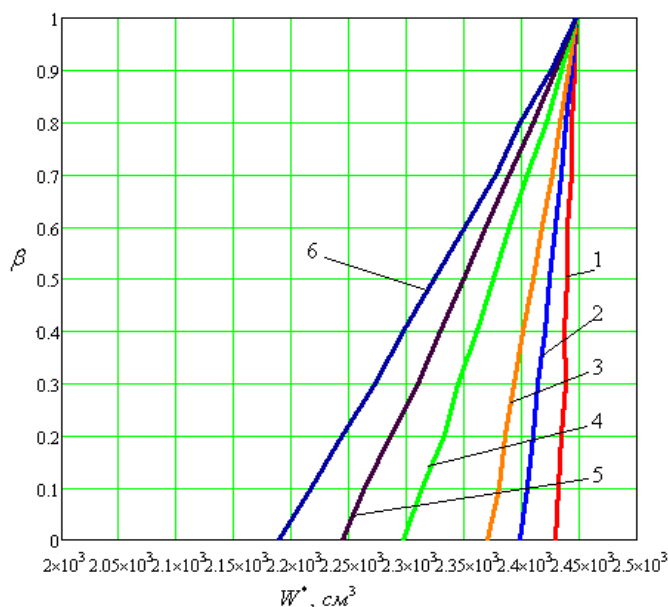


Рис. 7. Функція належності нечіткої величини  $W^*$  для проведених експериментів

## ВИСНОВКИ

1. На прикладі задачі оптимального проектування кругової циліндричної ортотропної оболонки зі склопластику, що знаходиться в умовах стохастичної та нечіткої невизначеності, показано застосування теорії ймовірності і нечітких множин – методів м'яких обчислень.
2. Змінними проектування виступають товщина оболонки і відносний вміст армуючих волокон в осьовому напрямі. Як фізичну умову взято один граничний стан – місцеву втрату стійкості, а критерієм якості виступає обсяг матеріалу, що підлягає мінімізації.
3. Проводиться порівняння з розв'язанням при детермінованих даних. Аналізується вплив розкиду «грубих» даних на результат оптимізації.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. Москва: Наука, 1969. 478 с.
2. Кофман А. Введение в теорию нечётких множеств. Москва: Радио и связь, 1982. 432 с.
3. Liu B. Theory and practice of uncertain programming. Physica-Verlag Heidelberg, 2002. 416 p.

4. Соболев И. М. Численные методы Монте-Карло. Москва: Наука, 1973. 308 с.
5. Рутковский Д., Пилиневский М., Рутковская Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. Москва: Горячая линия – Телеком, 2008. 383 с.
6. Рикардс Р. Б., Тетерс Г. А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига: Зинанте, 1974. 312 с.
7. Рикардс Р. Б. Двойственная задача оптимизации ортотропной оболочки. *Механика полимеров*. 1973. № 5. С. 865–871.

### REFERENCES

1. Venttsel, E. S. (1969). Probability Theory. Moscow: Nauka.
2. Kofman, A. (1982). Introduction to the theory of fuzzy sets. Moscow: Radio i svyaz.
3. Liu, B. (1002). Theory and practice of uncertain programming. Physica-Verlag Heidelberg.
4. Sobol, I. M. (1973). Numerical Monte Carlo methods. Moscow: Nauka.
5. Rutkovskiy, D., Pilinevskiy, M. & Rutkovskaya, L. (2008). Neural networks, genetic algorithms and fuzzy systems. Moscow: Goryachaya liniya – Telekom.
6. Rikards, R. B. & Teters, G. A. (1974). Stability of shells of composite materials. Riga: Zinante.
7. Rikards, R. B. (1973). The dual problem of optimizing the orthotropic shell. *Mehanika polimerov*, No. 5, pp. 865-871.

УДК 534-21:537.226.86

## ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ КІЛЬЦЕВИХ ПЛАСТИН З УРАХУВАННЯМ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ВТРАТ

Безверхий О. І., д. ф.-м. н., професор, Корнієнко В. Ф., к. т. н.

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,  
вул. П. Нестерова, 3, м. Київ, 03057, Україна*

o\_bezver@ukr.net, vf\_kornienko@ukr.net

У статті подано постановку задачі про вимушені коливання п'єзокерамічних кільцевих пластин з урахуванням електромеханічних втрат на резонансних режимах роботи. Електромеханічні втрати враховані шляхом введення комплексних сталих у матеріальні співвідношення. Проведені розрахунки вимушених коливань п'єзокерамічних кільцевих пластин при різних умовах закріплення країв. Проаналізовані напруження, переміщення і провідності з урахуванням механічних, діелектричних і п'єзоелектричних втрат у широкому діапазоні частот, що виникають у кільцевій пластині. Одержано ряд фізичних залежностей для амплітудних значень переміщень, напружень і провідностей.

*Ключові слова: п'єзокерамічна кільцева пластина, резонансні коливання, електромеханічні втрати.*

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ

Безверхий А. И., д. ф.-м. н., профессор, Корниенко В. Ф., к. т. н.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины,  
ул. П. Нестерова, 3, г. Киев, 03057, Украина*

o\_bezver@ukr.net, vf\_kornienko@ukr.net

В работе дана постановка задачи о вынужденных колебаниях пьезокерамических кольцевых пластин с учетом электромеханических потерь на резонансных режимах работы. Электромеханические потери учтены путем введения комплексных постоянных в материальные соотношения. Проведены расчеты вынужденных колебаний пьезокерамических кольцевых

пластин при различных условиях закрепления краев. Проанализированы напряжения, перемещения и проводимости с учетом механических, диэлектрических и пьезоэлектрических потерь в широком диапазоне частот, возникающих в кольцевой пластине. Получен ряд физических зависимостей для амплитудных значений перемещений, напряжений и проводимостей.

*Ключевые слова:* пьезокерамическая кольцевая пластина, резонансные колебания, электромеханические потери.

## FORCED OSCILLATIONS OF PIEZOCERAMIC ANNULAR PLATES TAKING INTO ACCOUNT ELECTROMECHANICAL LOSSES

Bezverkhyi O., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Korniienko V., Ph.D.

*S.P. Tymoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine,*

*3, P. Nesterov, Kyiv, 03057, Ukraine*

*o\_bezver@ukr.net, vf\_kornienko@ukr.net*

In this paper, this formulation of the problem of vibration piezoceramic annular plates based electromechanical losses resonant modes. In axisymmetric vibration plate with thickness polarizations use constitutive equation in the form [2, 4, 5]. In electrodeposited facial planes thin circular plate is between equipotential surfaces and electric field it can be considered independent of planar coordinates. When harmonic oscillations with cyclic frequency solution of (4) with respect to the amplitude of the movement is using cylindrical Bessel functions of the first and the second kind of the first order. Under the linear model of energy loss at harmonic vibrations electromechanical losses can be accounted for by the introduction of integrated sustainable constitutive equation. Numerical simulations were conducted to circular plates made of a piezoceramic CTS-19, with such physical and mechanical parameters [5]. In this work the ring forced vibrations of piezoceramic plates in different conditions and analyzed consolidation stress, displacement and conduction with regard to mechanical, piezoelectric and dielectric losses in a wide range of frequencies that occur in the ring with piezoceramic plate CTS-19. Obtained a number of physical dependence to amplitude values of displacement, stress and conductivity are consistent with experimental results.

At free edges, the amplitude values of the displacements at the first resonance decrease with increasing inner radius on the inner surface, and at the second resonance there is an internal radius (approximately  $R/3$ ), where there is a maximum value of the amplitude. As the frequency increases, the amplitude values drop. On the external surface, on the contrary: the values of the amplitude displacements increase with increasing internal radius at the first resonance, and at the second resonance there is an internal radius (approximately  $R/3$ ), at which the maximum value of the displacement amplitude is reached. The amplitude values of the dimensionless conductivity decrease with increasing internal radius at the first resonance, but grow on the second resonance. With increasing frequency, the amplitude values at the resonant frequencies become larger and smaller, that is, we have strong and weak resonances. The conductivity is the same as the radius of the ring.

With an internal free and external rigid fixation on the inner surface of the ring with an increase in the internal radius, there is an internal radius (approximately  $R/2$ ) at the first resonance of the amplitude values of displacements, where the maximum value of the amplitude exists, and at the second resonance we have the maximum value of the amplitude with an internal radius of about  $R/3$ . As the frequency increases, the amplitude values of displacements drop.

With internal rigid and external free fixation, the amplitude values of the conductivity decrease with increasing internal radius at the resonance. The amplitudeless dimensionless stresses on the inner surface of a clamped inner ring with increasing internal radius decrease with increasing frequency at resonance. The amplitude dimensionless values of the displacement on the outer surface of the clamped ring from the middle with increasing internal radius at resonance fall.

At both rigidly fixed edges of the ring, forced oscillations are not excited by the electric potential.

*Key words:* piezoceramic annular plate, resonant vibrations, electromechanical loss.

### ВСТУП

П'єзоелектричні тонкостінні конструктивні елементи круглої форми використовуються в ультразвукових пристроях різного функціонального призначення. Найбільш характерним режимом роботи п'єзокерамічних перетворювачів є резонансний режим. Тому для розрахунку їх напружено-деформованого стану на резонансних режимах роботи необхідно враховувати втрати енергії в матеріалі.

Осесиметричні радіальні коливання тонких п'єзокерамічних дисків і кільцевих пластин з товщиною поляризацією, починаючи зі статті [6], вивчалися в багатьох роботах [1-6 та ін.]. Проте, дослідження впливу умов закріплення країв пластини на вимушені коливання на резонансних режимах з урахуванням втрат енергії в літературі відсутні. Цьому питанню й присвячена наша стаття.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

Тонку п'єзокерамічну кільцеву пластину товщиною  $h$  віднесемо до циліндричної системи координат  $or\theta z$ , координатна площина  $z=0$  якої збігається з серединною площиною пластини. При осесиметричних коливаннях пластини з товщиною поляризацією скористаємося [2, 4, 5] матеріальними співвідношеннями у формі:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= s_{11}^E \sigma_r + s_{12}^E \sigma_\theta + s_{13}^E \sigma_z + d_{13} E_z, \\ \varepsilon_\theta &= s_{21}^E \sigma_r + s_{11}^E \sigma_\theta + s_{13}^E \sigma_z + d_{13} E_z, \\ \varepsilon_z &= s_{31}^E (\sigma_r + \sigma_\theta) + s_{33}^E \sigma_z + d_{33} E_z, \\ D_z &= d_{31} (\sigma_r + \sigma_\theta) + d_{33} \sigma_z + \varepsilon_{33}^T E_z. \end{aligned} \quad (1)$$

Якщо тонка п'єзокерамічна пластинка з електродованими лицьовими площинами  $z = \pm h/2$  перебуває в умовах плоского напруженого стану, то, приймаючи [2, 4, 5] гіпотези  $u_r = u_r(r, t)$ ,  $u_\theta = 0$ ,  $\sigma_z = 0$ ,  $E_z = E_z(r, t)$ , для компонент напружень зі співвідношень (1) одержимо:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu_E^2)} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E \frac{u_r}{r} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu_E^2)} \left( \nu_E \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z \right), \quad \nu_E = -s_{12}^E / s_{11}^E. \end{aligned} \quad (2)$$

З трьох рівнянь коливань у циліндричних координатах в осесиметричній плоскій задачі використовується [2] тільки одне

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}. \quad (3)$$

При електродованих лицьових площинах тонка кільцева пластинка перебуває між екіпотенціальними поверхнями, і електричне поле в ній можна вважати незалежним від планарних координат  $r, \theta$ . У такому випадку підставимо (2) в (3) і одержимо рівняння коливань відносно переміщення  $u_r(r, t)$

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = (1 - \nu_E^2) s_{11}^E \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}. \quad (4)$$

### РАДІАЛЬНІ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ КІЛЬЦЕВОЇ ПЛАСТИНИ

Розглянемо поляризовану по товщині тонку кільцеву п'єзокерамічну пластинку з внутрішнім радіусом  $r_0$  і зовнішнім радіусом  $r_1$ , вкриту на лицьових площинах тонкими електродми. При гармонічних коливаннях  $u_r(r, t) = \text{Re} u_r^a(r) \exp i \omega t$  з циклічною частотою  $\omega$  розв'язок рівняння (4) відносно амплітуди переміщення  $u_r^a(r)$  знаходиться за допомогою циліндричних функцій Бесселя першого і другого роду першого порядку

$$u_r^a(r) = ARJ_1(k_E r) + BR Y_1(k_E r), \quad (5)$$

де  $k_E^2 = (1 - \nu_E^2) s_{11}^E \rho \omega^2$ .

Будемо виходити з того, що в рамках лінійної моделі втрат енергії при гармонічних коливаннях електромеханічні втрати можна врахувати [3, 5] шляхом введення комплексних сталих у матеріальні співвідношення (1). Введемо втрати енергії через комплексні модулі таким чином

$$s_{ij}^E = s_{ij0} (1 - i s_{ijb}), \quad d_{ij} = d_{ij0} (1 - i d_{ijb}), \quad \varepsilon_{ij}^T = \varepsilon_{ij0} (1 - i \varepsilon_{ijb}),$$

де  $s_{ijb}$ ,  $d_{ijb}$ ,  $\varepsilon_{ijb}$  – тангенси механічних, діелектричних і п'єзоелектричних втрат.

Якщо у (5) покласти

$$A = \tilde{A} (1 + \nu_E) d_{13} E_z^a, \quad B = \tilde{B} (1 + \nu_E) d_{13} E_z^a$$

$$\kappa = k_E R = \bar{\omega} \sqrt{(1 - \nu_E^2) \frac{s_{11}^E}{s_{110}}}, \quad r = R \bar{r}, \quad \bar{\omega} = \omega R \sqrt{\rho s_{110}},$$

де  $E_z^a = -U/h$  – амплітуда напруженості електричного поля  $E_z = \text{Re } E_z^a \exp i \omega t$ ,  $U$  – різниця потенціалів на електродах,  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  – комплексні коефіцієнти,  $R = r_1$ , то з урахуванням (2), одержимо відповідні вирази для напружень та переміщення

$$\sigma_r = \text{Re} \frac{d_{13} E_z^a}{s_{11}^E (1 - \nu_E)} (\tilde{A} a_1(\kappa \bar{r}) + \tilde{B} b_1(\kappa \bar{r}) - 1) e^{i \omega t},$$

$$\sigma_\theta = \text{Re} \frac{d_{13} E_z^a}{s_{11}^E (1 - \nu_E)} (\tilde{A} a_2(\kappa \bar{r}) + \tilde{B} b_2(\kappa \bar{r}) - 1) e^{i \omega t},$$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \text{Re} \frac{d_{13} E_z^a}{s_{11}^E (1 - \nu_E)} (\tilde{A} \kappa J_0(\kappa \bar{r}) + \tilde{B} \kappa Y_0(\kappa \bar{r}) - 2) e^{i \omega t},$$

$$u_r = \text{Re} (1 + \nu_E) d_{13} E_z^a R (\tilde{A} J_1(\kappa \bar{r}) + \tilde{B} Y_1(\kappa \bar{r})) e^{i \omega t}, \quad (6)$$

де

$$a_1(z \bar{r}) = \kappa J_0(\kappa \bar{r}) - (1 - \nu_E) \frac{1}{r} J_1(\kappa \bar{r}), \quad b_1(z \bar{r}) = \kappa Y_0(\kappa \bar{r}) - (1 - \nu_E) \frac{1}{r} Y_1(\kappa \bar{r}),$$

$$a_2(z \bar{r}) = \nu_E \kappa J_0(\kappa \bar{r}) + (1 - \nu_E) \frac{1}{r} J_1(\kappa \bar{r}), \quad b_2(z \bar{r}) = \nu_E \kappa Y_0(\kappa \bar{r}) + (1 - \nu_E) \frac{1}{r} Y_1(\kappa \bar{r}). \quad (7)$$

Запишемо представлення для амплітудних значень переміщення та напружень у вигляді:

$$u_r^a = (1 + \nu_E) d_{13} E_z^a R (\tilde{A} J_1(\kappa \bar{r}) + \tilde{B} Y_1(\kappa \bar{r})),$$

$$\sigma_r^a = \frac{d_{13} E_z^a}{s_{11}^E (1 - \nu_E)} (\tilde{A} a_1(\kappa \bar{r}) + \tilde{B} b_1(\kappa \bar{r}) - 1),$$

$$\sigma_\theta^a = \frac{d_{13} E_z^a}{s_{11}^E (1 - \nu_E)} (\tilde{A} a_2(\kappa \bar{r}) + \tilde{B} b_2(\kappa \bar{r}) - 1).$$

Відповідно для безрозмірних амплітудних значень маємо:

$$\begin{aligned} \bar{u}_r^a &= \frac{u_r^a}{RE_z^a d_{130}} = (1 + \nu_E) \frac{d_{13}}{d_{130}} \left( \tilde{A}J_1(\kappa\bar{r}) + \tilde{B}Y_1(\kappa\bar{r}) \right), \\ \bar{\sigma}_r^a &= \frac{\sigma_r^a s_{110}}{E_z^a d_{130}} = \frac{d_{13} s_{110}}{d_{130} s_{11}^E (1 - \nu_E)} \left( \tilde{A}a_1(\kappa\bar{r}) + \tilde{B}b_1(\kappa\bar{r}) - 1 \right), \\ \bar{\sigma}_\theta^a &= \frac{\sigma_\theta^a s_{110}}{E_z^a d_{130}} = \frac{d_{13} s_{110}}{d_{130} s_{11}^E (1 - \nu_E)} \left( \tilde{A}a_2(\kappa\bar{r}) + \tilde{B}b_2(\kappa\bar{r}) - 1 \right), \\ \bar{\sigma}_r^a + \bar{\sigma}_\theta^a &= \frac{d_{13} s_{110}}{d_{130} s_{11}^E (1 - \nu_E)} \left( \tilde{A}\kappa J_0(\kappa\bar{r}) + \tilde{B}\kappa Y_0(\kappa\bar{r}) - 2 \right). \end{aligned}$$

Повна безрозмірна провідність [5] буде

$$\bar{Y} = \frac{Y}{\omega C} = -i \left\{ 1 - k_p^2 + \frac{(1 + \nu_E) k_p^2}{\bar{r}_1^2 - \bar{r}_0^2} \left[ \tilde{A}(\bar{r}_1 J_1(\kappa\bar{r}_1) - \bar{r}_0 J_1(\kappa\bar{r}_0)) + \tilde{B}(\bar{r}_1 Y_1(\kappa\bar{r}_1) - \bar{r}_0 Y_1(\kappa\bar{r}_0)) \right] \right\},$$

де  $C = \pi(r_1^2 - r_0^2)h^{-1}\epsilon_{33}^T$  – статична електрична ємність пластини,  $k_p$  – планарний коефіцієнт електромеханічного зв’язку ( $k_p^2 = \frac{2d_{13}^2}{(1 - \nu_E)s_{11}^E \epsilon_{33}^T}$ ).

Розглянемо можливі варіанти граничних умов при  $r = r_0$  та  $r = r_1$ .

### ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ГРАНИЧНИХ УМОВ НА ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНИ З УРАХУВАННЯМ ВТРАТ ЕНЕРГІЇ

При вільних краях кільцевої пластини граничні умови будуть

$$\sigma_r(r_0, t) = 0, \quad \sigma_r(r_1, t) = 0. \tag{8}$$

Використовуючи формули (2), (5), для напружень одержимо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{A}a_1(\kappa\bar{r}_0) + \tilde{B}b_1(\kappa\bar{r}_0) &= 1, \\ \tilde{A}a_1(\kappa r_1) + \tilde{B}b_1(\kappa r_1) &= 1. \end{aligned} \tag{9}$$

Звідси знаходимо постійні інтегрування

$$\tilde{A} = (b_1(\kappa\bar{r}_1) - b_1(\kappa\bar{r}_0))\Delta_{\sigma\sigma}^{-1}, \quad \tilde{B} = (a_1(\kappa\bar{r}_0) - a_1(\kappa\bar{r}_1))\Delta_{\sigma\sigma}^{-1}, \tag{10}$$

де визначник

$$\Delta_{\sigma\sigma} = a_1(\kappa\bar{r}_0)b_1(\kappa\bar{r}_1) - a_1(\kappa\bar{r}_1)b_1(\kappa\bar{r}_0). \tag{11}$$

Резонансні частоти визначаються з частотного рівняння  $\Delta_{\sigma\sigma} = 0$ .

Чисельні розрахунки проводились для кільцевих пластин  $r_0 < \bar{r} < r_1 = R$ , виготовлених з п’езокераміки ЦТС-19, при таких фізико-механічних параметрах [2, 4, 5]:

$$\begin{aligned} \rho &= 7740 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}, \quad s_{110} = 15,2 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 \text{Н}^{-1}, \quad s_{120} = -5,8 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 \text{Н}^{-1}, \quad d_{130} = -125 \cdot 10^{-12} \text{ Кл} \cdot \text{Н}^{-1}, \\ s_{11b} &= 0,084, \quad s_{12b} = 0,05, \quad s_{13b} = 0,0094, \quad s_{33b} = 0,012, \quad \epsilon_{11}^T = 1490\epsilon_0, \quad \epsilon_{33}^T = 1360\epsilon_0, \\ \epsilon_0 &= 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} \cdot \text{м}^{-1}. \end{aligned}$$

На рис. 1, 2 представлені залежності амплітудних безрозмірних значень переміщення  $\bar{u}_r^a$  кільцевої пластини відповідно на внутрішній поверхні та на зовнішній поверхні від частоти  $\bar{\omega}$  при різних значеннях безрозмірного радіуса  $\bar{r}_0$ .

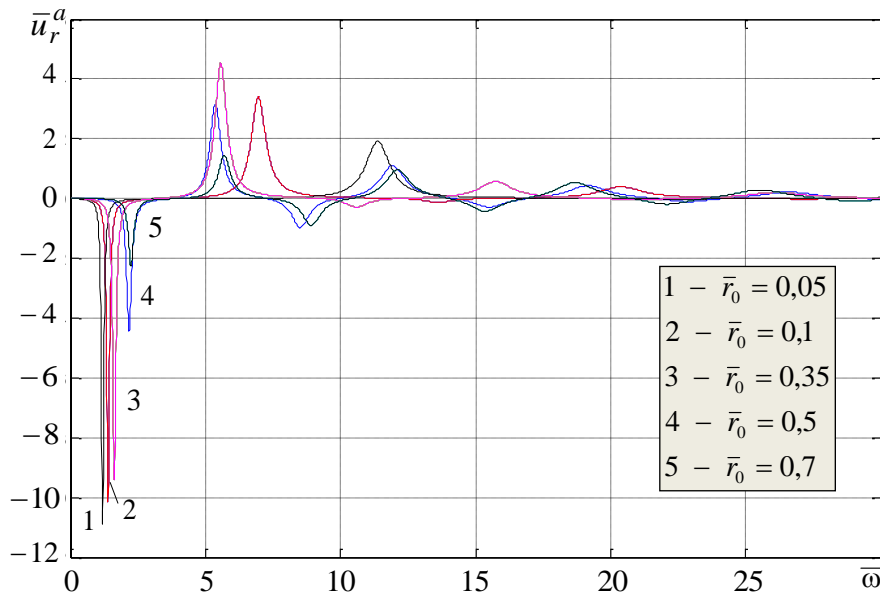


Рис. 1. Залежності амплітудних значень переміщення  $\bar{u}_r^a$  кільцевої пластини на внутрішній поверхні вільного кільця від частоти  $\bar{\omega}$  при різних значеннях безрозмірного радіуса  $\bar{r}_0$

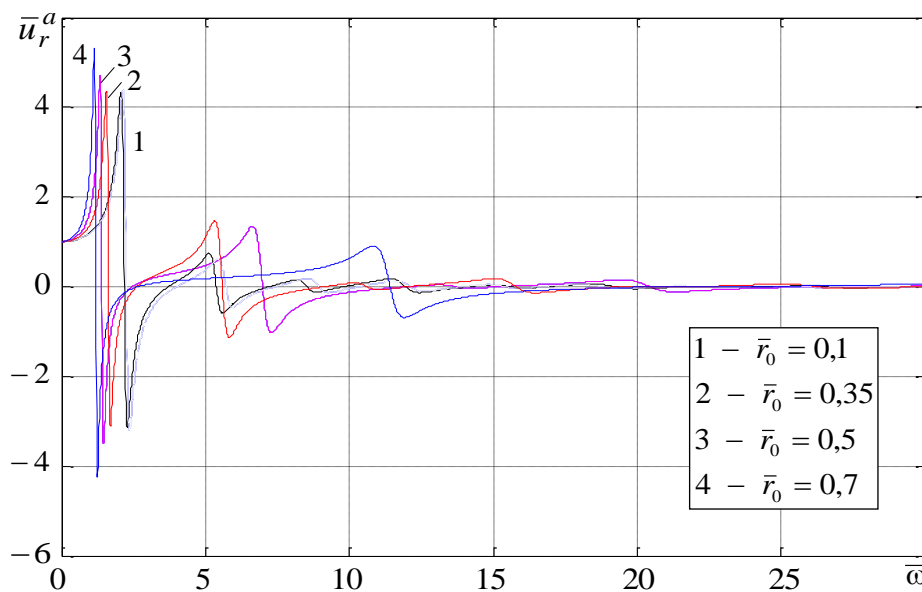


Рис. 2. Залежності амплітудних значень переміщення  $\bar{u}_r^a$  кільцевої пластини на зовнішній поверхні вільного кільця від частоти  $\bar{\omega}$  при різних значеннях безрозмірного радіуса  $\bar{r}_0$

Бачимо, що амплітудні значення переміщень  $\bar{u}_r^a$  на першому резонансі зі збільшенням внутрішнього радіуса  $\bar{r}_0$  на внутрішній поверхні (рис. 1) падають, а на другому резонансі існує внутрішній радіус (приблизно  $R/3$ ), де маємо максимальне значення амплітуди. Зі зростанням частоти амплітудні значення падають. На зовнішній поверхні (рис. 2) – навпаки, значення  $\bar{u}_r^a$  зі збільшенням  $\bar{r}_0$  на першому резонансі зростають, а на другому резонансі існує внутрішній радіус (приблизно  $R/3$ ), при якому досягається максимальне значення амплітуди  $\bar{u}_r^a$ .



Амплітудно-частотні залежності (АЧХ) безрозмірної провідності  $\bar{Y}$  представлені на рис. 3. Видно, що амплітудні значення зі збільшенням внутрішнього радіуса на першому резонансі падають, а на другому резонансі навпаки зростають. Зі зростанням частоти амплітудні значення на резонансних частотах стають то більшими, то меншими, тобто маємо сильні і слабкі резонанси. Провідність однакова по радіусу кільця.

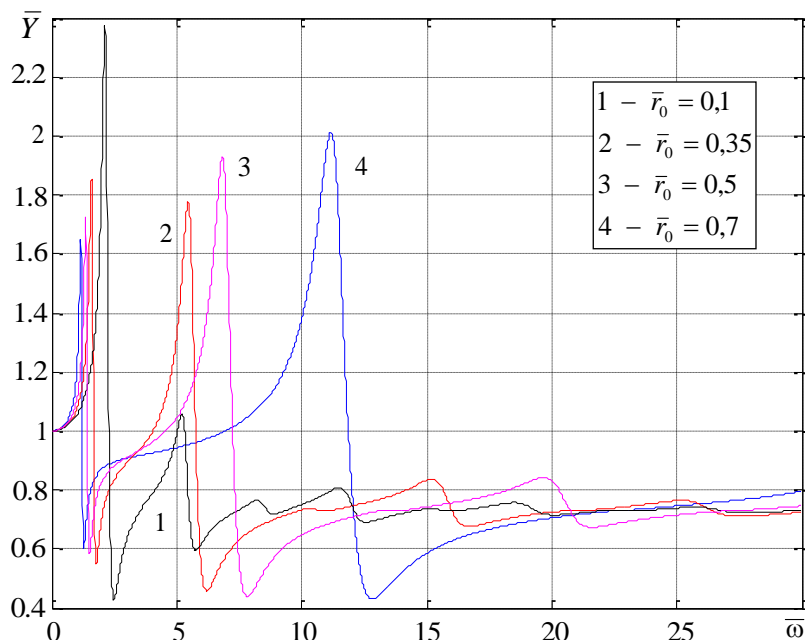


Рис. 3. АЧХ безрозмірної провідності  $\bar{Y}$  на зовнішній поверхні вільного кільця при різних значеннях безрозмірного радіуса  $\bar{r}_0$

На рис. 4 представлені залежності амплітудних безрозмірних значень переміщень кільця  $\bar{u}_r^a$  на внутрішній (крива 1) та на зовнішній (крива 2) поверхні від частоти  $\bar{\omega}$  при значеннях безрозмірного радіуса  $\bar{r}_0 = 0,35$ .

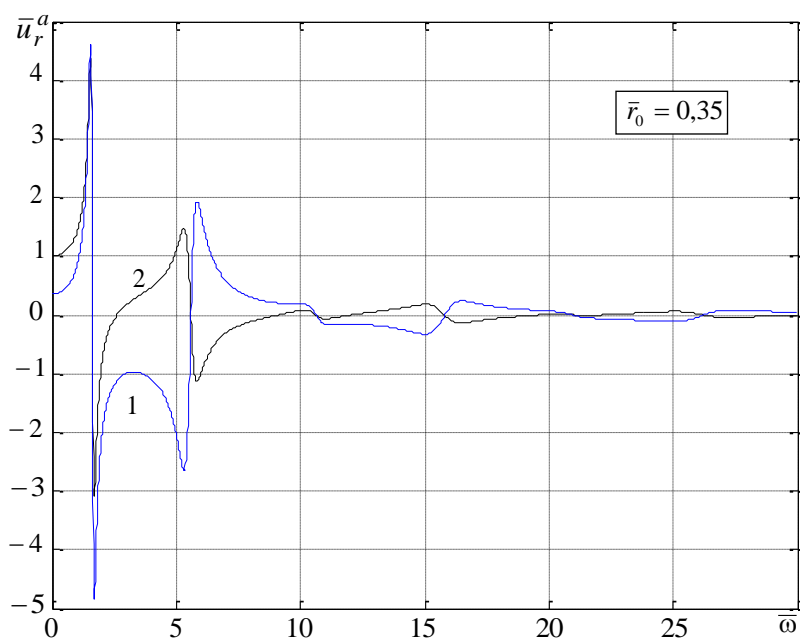


Рис. 4. Залежності амплітудних значень переміщення  $\bar{u}_r^a$  кільцевої пластини на зовнішній (крива 1) та внутрішній (крива 2) поверхнях вільного кільця від частоти  $\bar{\omega}$  при  $\bar{r}_0 = 0,35$

Бачимо, що на першому, третьому, п'ятому і т.д. резонансах маємо синфазні переміщення, тоді як на парних резонансах (другому, четвертому і т.д.) будуть протифазні переміщення.

На рис. 5 представлені залежності амплітудних безрозмірних значень напружень кільця  $\bar{\sigma}_\theta$  на внутрішній (крива 1) та на зовнішній (крива 2) поверхнях від частоти  $\bar{\omega}$  при значеннях безрозмірного радіуса  $\bar{r}_0 = 0,35$ . Видно, що на першому, третьому, п'ятому і т.д. резонансах маємо синфазні напруження, тоді як на парних резонансах (другому, четвертому і т.д.) будуть протифазні напруження. Причому величини амплітудних безрозмірних значень напружень кільця  $\bar{\sigma}_\theta$  на резонансах на внутрішній поверхні порівняно з напруженнями на зовнішній поверхні більші, ніж у три рази.

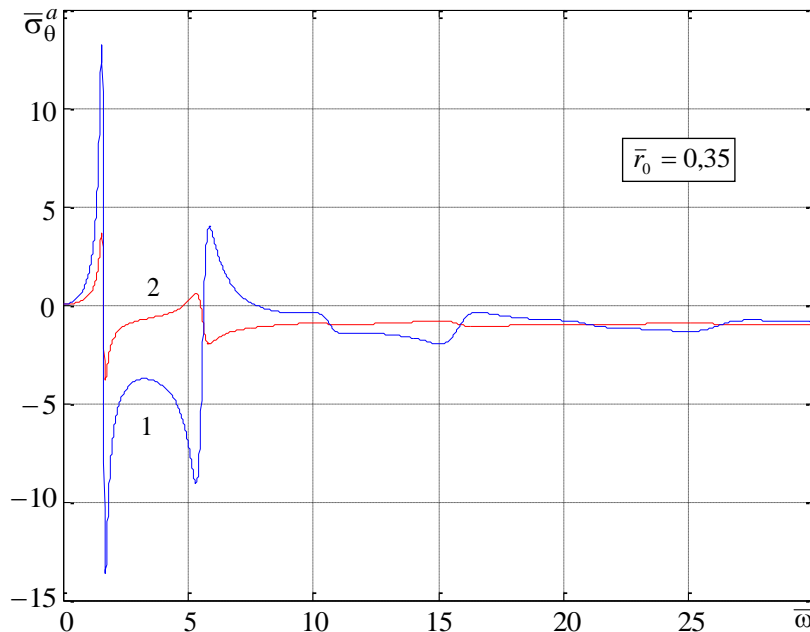


Рис. 5. Залежності амплітудних значень напружень  $\bar{\sigma}_\theta^a$  на внутрішній (крива 1) та на зовнішній (крива 2) поверхнях вільного кільця від частоти  $\bar{\omega}$  при  $\bar{r}_0 = 0,35$

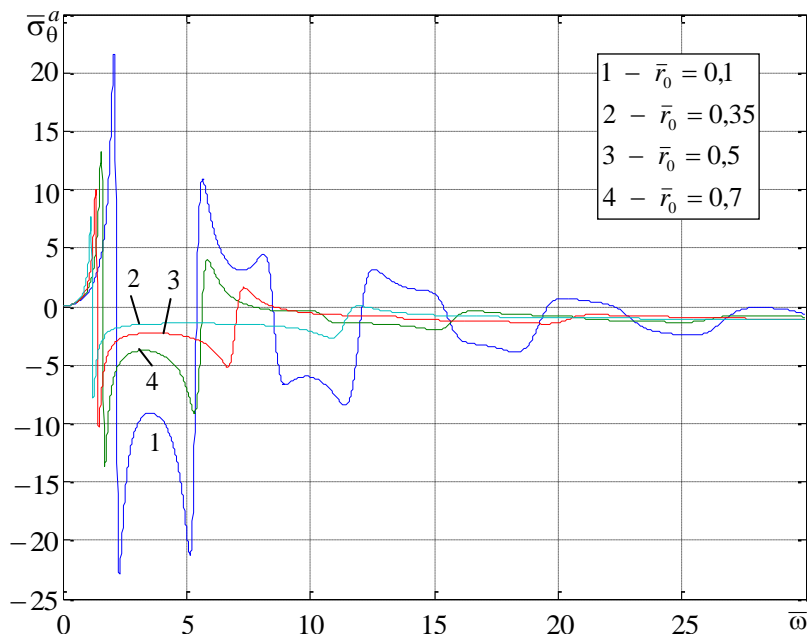


Рис. 6. Залежності амплітудних значень напружень  $\bar{\sigma}_\theta^a$  на внутрішній поверхні вільного кільця від частоти  $\bar{\omega}$  при різних значеннях безрозмірного радіуса  $\bar{r}_0$

На рис. 6, 7 представлені залежності амплітудних безрозмірних значень напружень кільця  $\bar{\sigma}_\theta^a$  на внутрішній (рис. 6) та на зовнішній (рис. 7) поверхнях від частоти  $\bar{\omega}$  при різних значеннях безрозмірного радіуса  $\bar{r}_0$ . Причому для амплітудних безрозмірних значень напружень кільця  $\bar{\sigma}_\theta^a$  на резонансах на внутрішній поверхні існує внутрішній радіус (приблизно  $R/3$ ), де маємо мінімальне значення амплітуди, а на зовнішній поверхні – навпаки маємо максимальне значення амплітуди за тих же умов.

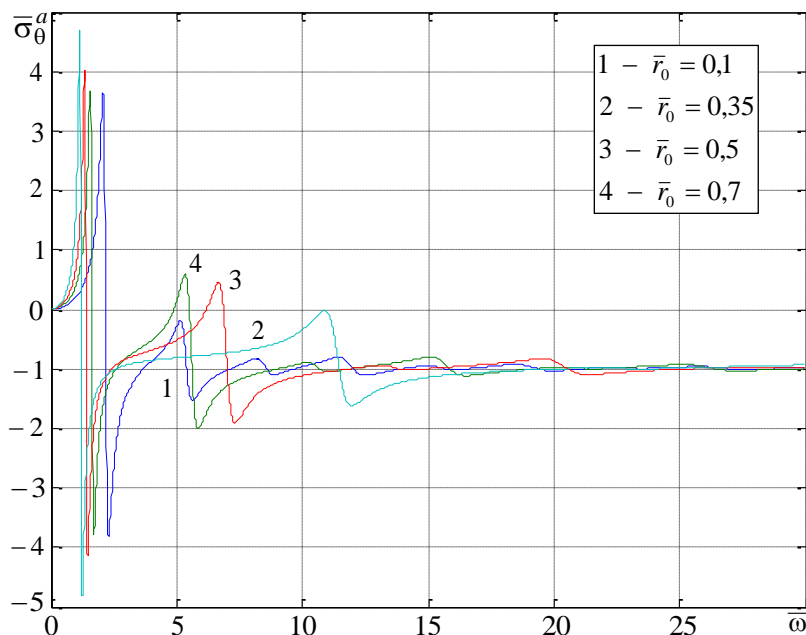


Рис. 7. Залежності амплітудних значень напружень  $\bar{\sigma}_\theta^a$  на зовнішній поверхні вільного кільця від частоти  $\bar{\omega}$  при різних значеннях безрозмірного радіуса  $\bar{r}_0$

На рис. 8 наведені залежності амплітудних безрозмірних значень переміщення кільця  $\bar{u}_r^a$  у внутрішніх точках кільця від частоти  $\bar{\omega}$  при  $\bar{r}_0 = 0,35$ . Бачимо, що на першому резонансі в усіх точках кільця переміщення синфазні, а вже на другому резонансі маємо в різних точках кільця як синфазні коливання, так протифазні.

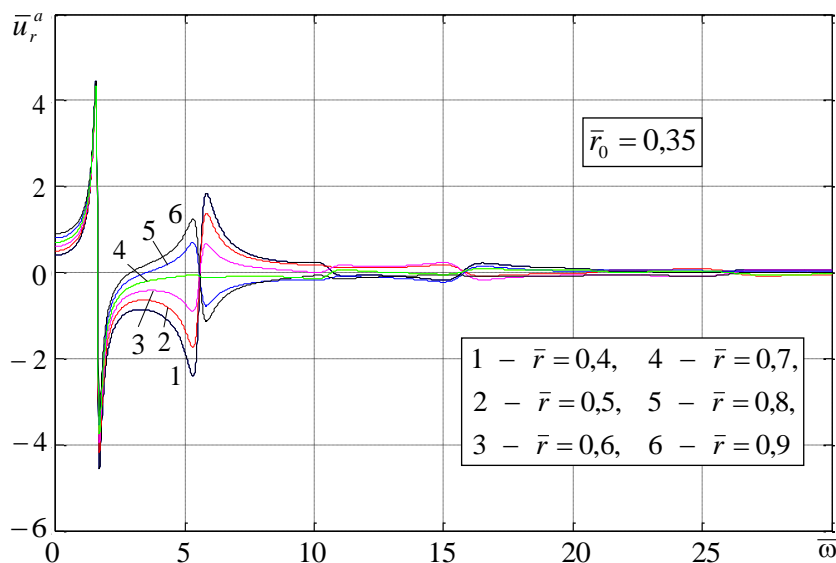


Рис. 8. Залежності амплітудних безрозмірних значень переміщення кільця  $\bar{u}_r^a$  у вказаних внутрішніх точках вільного кільця від частоти  $\bar{\omega}$  при  $\bar{r}_0 = 0,35$

При внутрішньому жорсткому і зовнішньому вільному закріпленні

$$u_r(r_0, t) = 0, \quad \sigma_r(r_1, t) = 0, \quad \sigma_r(r_1, t) = 0 \quad (12)$$

з системи алгебраїчних рівнянь

$$\tilde{A}J_1(\kappa\bar{r}_0) = 0, \quad \tilde{A}a_1(\kappa\bar{r}_1) + \tilde{B}b_1(\kappa\bar{r}_1) = 1, \quad (13)$$

знаходимо постійні інтегрування

$$\tilde{A} = -Y_1(\kappa\bar{r}_0)\Delta_{u\sigma}^{-1}, \quad \tilde{B} = J_1(\kappa\bar{r}_0)\Delta_{u\sigma}^{-1}, \quad (14)$$

де визначник

$$\Delta_{u\sigma} = J_1(\kappa\bar{r}_0)b_1(\kappa\bar{r}_1) - Y_1(\kappa\bar{r}_0)a_1(\kappa\bar{r}_1). \quad (15)$$

Резонансні частоти визначаються з частотного рівняння  $\Delta_{u\sigma} = 0$ .

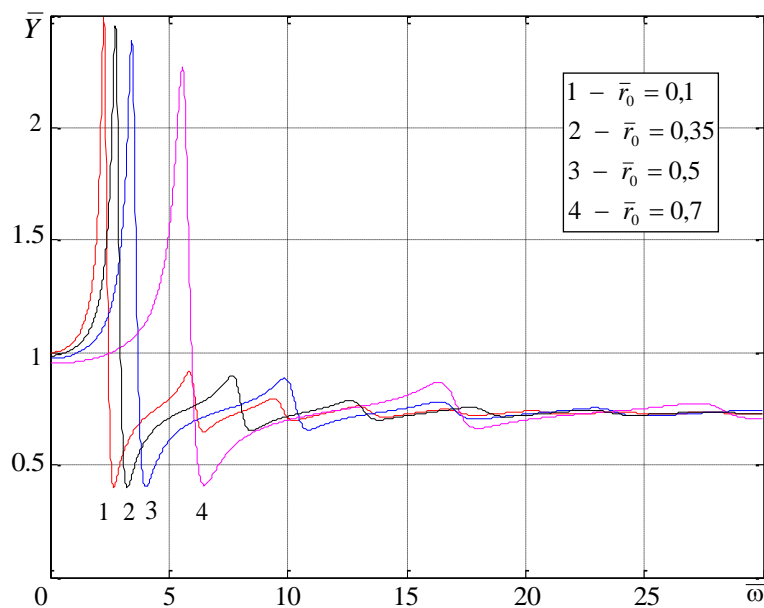


Рис. 9. АЧХ безрозмірної провідності  $\bar{Y}$  затиснутого з середини кільця

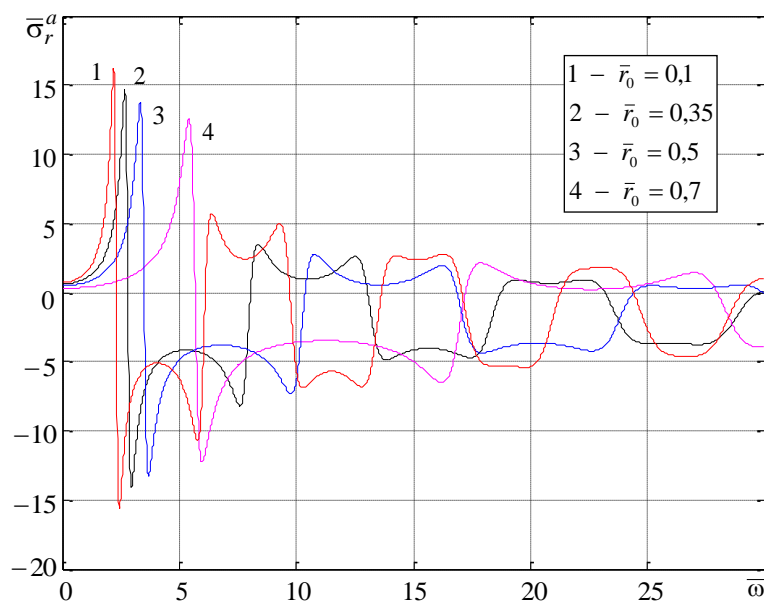


Рис. 10. Залежності амплітудних значень напружень  $\bar{\sigma}_r^a$  на зовнішній поверхні затиснутого з середини кільця від частоти  $\bar{\omega}$

АЧХ безрозмірної провідності  $\bar{Y}$  на зовнішній поверхні затиснутого з середини кільця при різних значеннях безрозмірного радіуса  $\bar{r}_0$  представлені на рис. 9. Видно, що амплітудні значення провідності зі збільшенням внутрішнього радіуса на резонансі падають.

Амплітудні безрозмірні напруження  $\bar{\sigma}_r^a$  на внутрішній поверхні затиснутого з середини кільця (рис. 10) зі збільшенням внутрішнього радіуса і зростанням частоти  $\bar{\omega}$  на резонансі падають.

Амплітудні безрозмірні значення переміщення на зовнішній поверхні затиснутого з середини кільця зі збільшенням внутрішнього радіуса на резонансі падають (рис. 11).

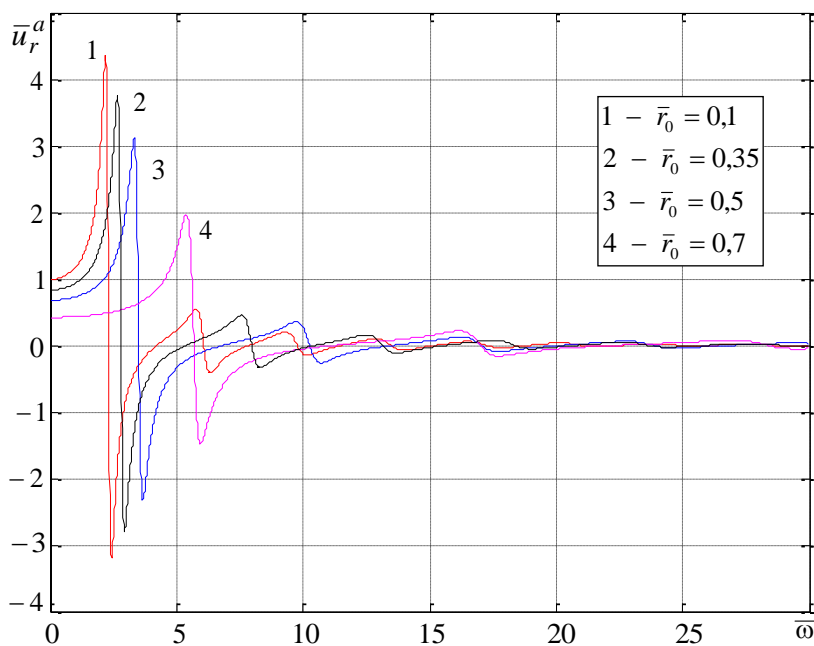


Рис. 11. АЧХ переміщень  $\bar{u}_r^a$  на зовнішній поверхні затиснутого з середини кільця

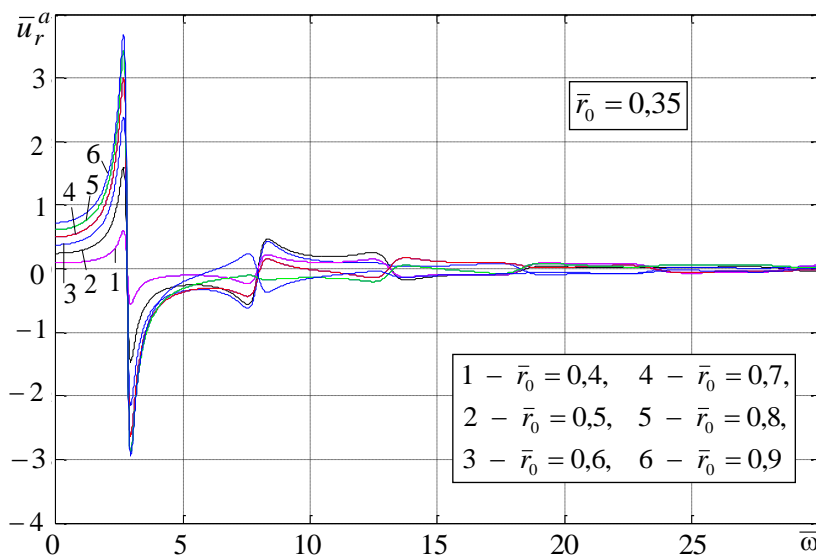


Рис. 12. Залежності амплітудних значень переміщення кільця  $\bar{u}_r^a$  на внутрішній поверхні затиснутого з середини кільця від частоти  $\bar{\omega}$

На рис. 12 представлені амплітудні безрозмірні значення переміщення у внутрішніх точках кільця від частоти  $\bar{\omega}$  при значеннях  $\bar{r}_0 = 0,35$ . Бачимо, що на першому резонансі в усіх точках кільця переміщення синфазні, а вже на другому резонансі маємо як синфазні, так і протифазні коливання в різних точках кільця.

При внутрішньому вільному і зовнішньому жорсткому закріпленні

$$\sigma_r(r_0, t) = 0, \quad u_r(r_1, t) = 0 \quad (16)$$

з системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{A}a_1(\kappa\bar{r}_0) + \tilde{B}b_1(\kappa\bar{r}_0) &= 1, \\ \tilde{A}J_1(\kappa\bar{r}_1) + \tilde{B}Y_1(\kappa\bar{r}_1) &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

одержимо постійні інтегрування

$$\tilde{A} = Y_1(\kappa\bar{r}_1)\Delta_{\sigma u}^{-1}, \quad \tilde{B} = -J_1(\kappa\bar{r}_1)\Delta_{\sigma u}^{-1}, \quad (18)$$

де визначник

$$\Delta_{\sigma u} = a_1(\kappa\bar{r}_0)Y_1(\iota\bar{r}_1) - b_1(\kappa\bar{r}_0)J_1(\kappa\bar{r}_1). \quad (19)$$

Резонансні частоти визначаються з частотного рівняння  $\Delta_{\sigma u} = 0$ .

АЧХ безрозмірних переміщень кільця  $\bar{u}_r^a$  на внутрішній поверхні наведені на рис. 13. Зі збільшенням внутрішнього радіуса на першому резонансі існує внутрішній радіус (приблизно  $R/2$ ), де маємо максимальне значення амплітуди, а на другому резонансі маємо максимальне значення амплітуди при внутрішньому радіусі приблизно  $R/3$ . Зі зростанням частоти амплітудні значення падають.

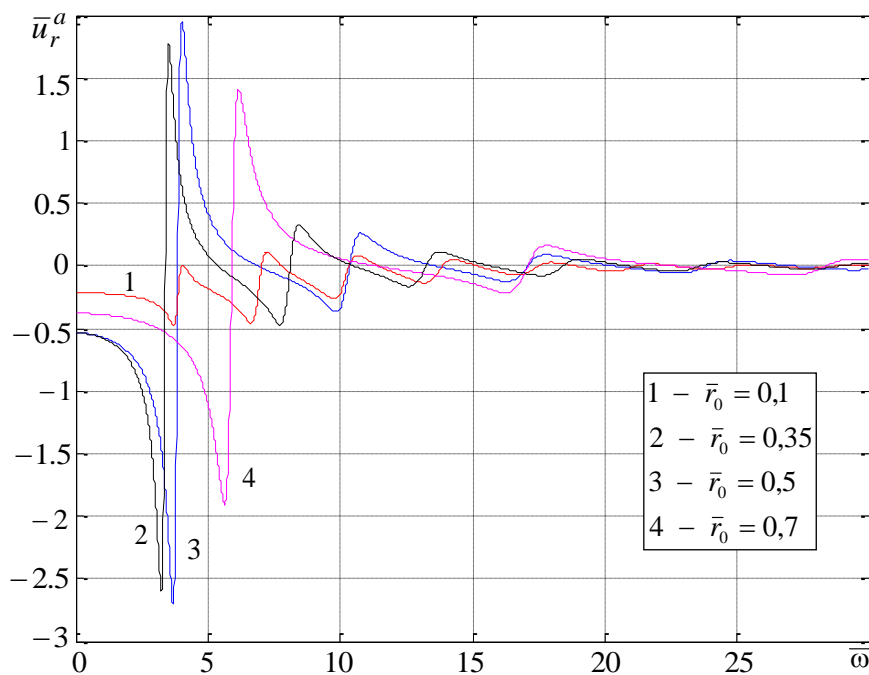


Рис. 13. АЧХ переміщень  $\bar{u}_r^a$  затиснутого зовні кільця на внутрішній поверхні

На рис. 14 наведені максимальні безрозмірні переміщення на внутрішній поверхні затиснутого зовні кільця на першій резонансній частоті  $\bar{\omega}$  при зміні радіуса  $\bar{r}_0$  від 0,05 до 0,7. Безрозмірне переміщення досягає максимуму при  $\bar{r}_0 = 0,45$ .

Амплітуди безрозмірної провідності затиснутого зовні кільця зі збільшенням внутрішнього радіуса на резонансі зростають і падають з ростом частоти (рис. 15).

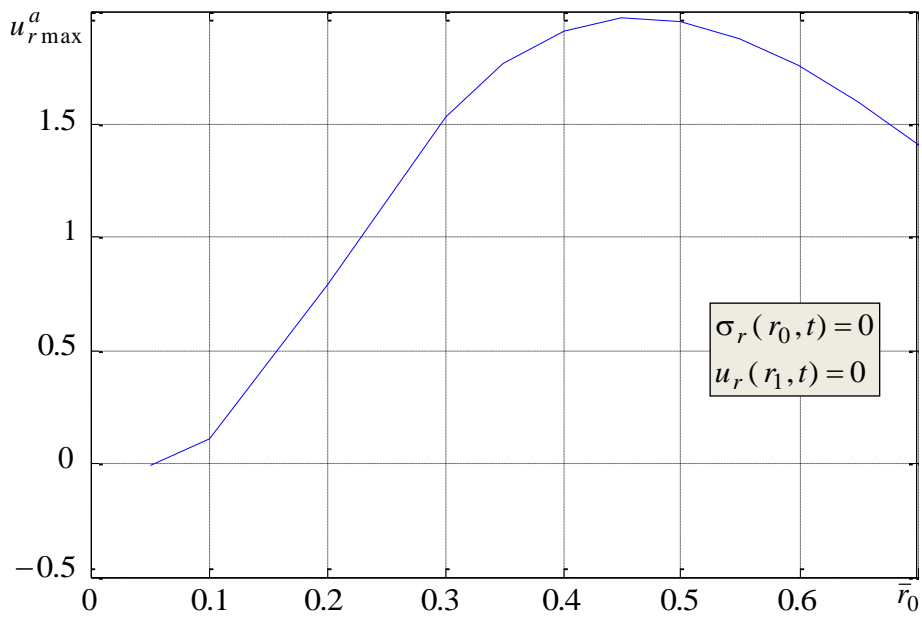


Рис. 14. Залежність максимальних переміщень  $\bar{u}_{r_{\max}}^a$  затиснутого зовні кільця від  $\bar{r}_0$

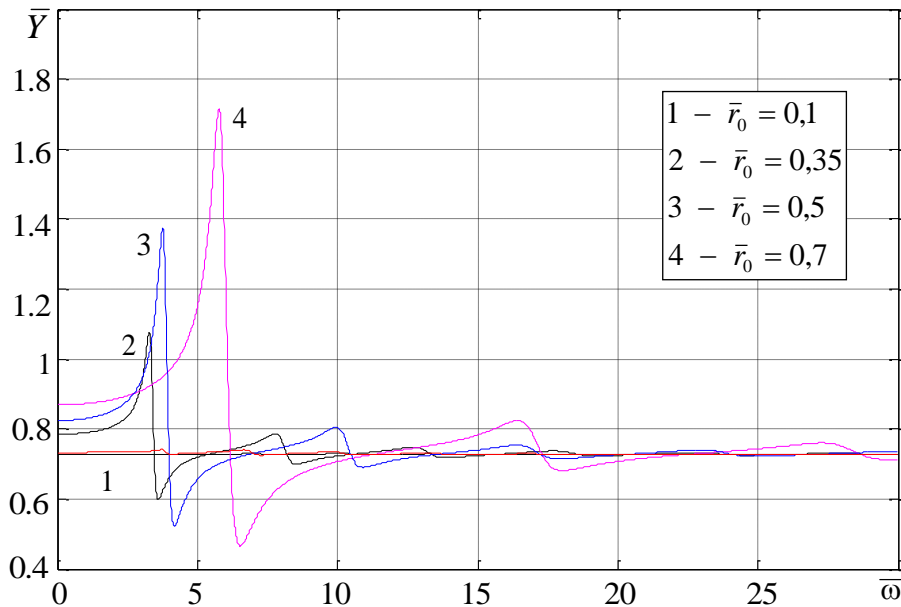


Рис. 15. АЧХ безрозмірної провідності  $\bar{Y}$  затиснутого зовні кільця

Амплітудні значення напружень затиснутого зовні кільця  $\bar{\sigma}_r^a$  на зовнішній поверхні зі збільшенням внутрішнього радіуса на резонансі зростають, а зі зростанням частоти падають (рис. 16).

При обох жорстко закріплених краях кільця граничні умови будуть

$$u_r(r_0, t) = 0, \quad u_r(r_1, t) = 0. \tag{20}$$

З відповідної системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{A}J_1(\kappa\bar{r}_0) + \tilde{B}Y_1(\kappa\bar{r}_0) &= 0, \\ \tilde{A}J_1(\kappa\bar{r}_1) + \tilde{B}Y_1(\kappa\bar{r}_1) &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

випливає, що вимушені коливання в цьому випадку електричним потенціалом не збуджуються.

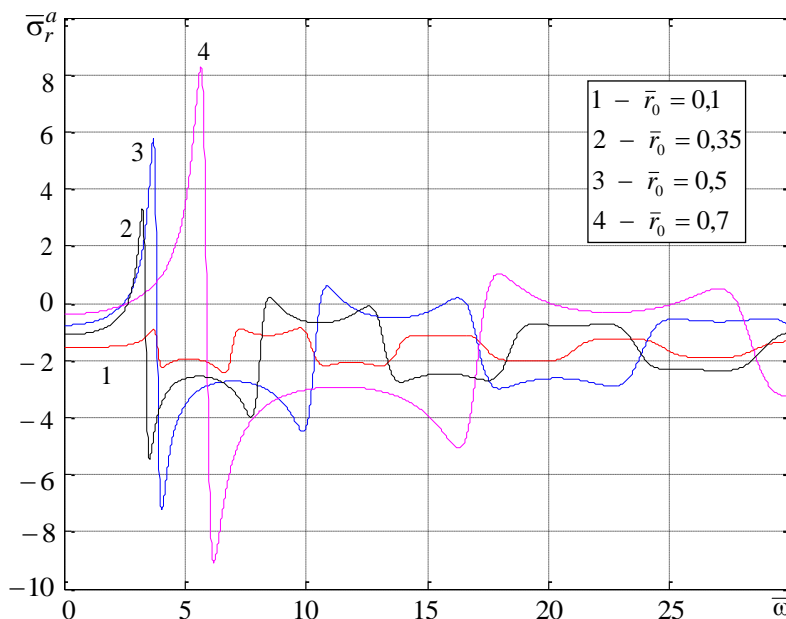


Рис. 16. АЧХ безрозмірних напружень  $\bar{\sigma}_r^a$  затиснутого зовні кільця на зовнішній поверхні

### ВИСНОВКИ

У статті досліджені вимушені коливання п'єзокерамічних кільцевих пластин при різних умовах закріплення і проаналізовані напруження, переміщення і провідності з урахуванням механічних, діелектричних і п'єзоелектричних втрат у широкому діапазоні частот, що виникають у кільцевій пластині з п'єзокераміки ЦТС-19. Одержано цілий ряд фізичних залежностей для амплітудних значень переміщень, напружень і провідностей, які узгоджуються з експериментальними результатами.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Лазуткин В. Н., Цыганов Ю. В., Ключниченко В. А. Радиальные колебания и электрический импеданс пьезокерамических колец с поляризацией по высоте. *Пьезоэлектрические материалы и преобразователи*. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1971. С. 4-9.
2. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.5. *Электроупругость*. (Ред. А. Н. Гузь). АН УССР. Ин-т механики. Киев: Наук. думка, 1989. 280 с.
3. Партон В. З., Кудрявцев А. Б. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. Москва: Наука, 1988. 472 с.
4. Шульга Н. А., Болкисев А. М. Колебания пьезоэлектрических тел. Киев: Наук. думка, 1990. 228 с.
5. Шульга М. О., Карлаш В. Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. Киев: Наукова думка, 2008. 270 с.
6. Mason W. P. Piezoelectricity, its history and applications. *J. Acoust. Soc. Am.* 1981. 70, № 6. P. 1561-1566.

### REFERENCES

1. Lazutkin, V. N., Tsyganov, Yu. V. & Klyushnichenko, V. A. (1971). Radial Oscillations and Electrical Impedance of Piezoceramic Rings with Height Polarization. *Piezoelectric materials and converters*, Rostov-on-Don: Publishing house of the Russian State University, pp. 4-9.
2. Grinchenko, V. T., Ulitko, A. F. & Shulga, N. A. (1989). Mechanics of bound fields in structural elements. Vol.5. *Electroelasticity Ans. Ed. Guz A.N.*, *Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. Institute of Mechanics*, Naukova Dumka, Kyiv.
3. Parton, V. Z. & Kudryavtsev, A. B. (1988). *Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electrically conductive bodies*. Moscow: Nauka.
4. Shulga, N. A. & Bolkisev, A. M. (1990). *Oscillations of piezoelectric bodies*. Kyiv: Naukova Dumka.
5. Shulga, M. O. & Karlash, V. L. (2008). *Electromechanical resonant vibrations of piezoelectric plates*. Kyiv: Naukova Dumka.
6. Mason, W. P. (1981). Piezoelectricity, its history and applications. *Jour. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 70, No. 6, pp. 1561-1566.



УДК 539.375

## ПЛАСТИНА З ТРІЩИНОЮ ПІД ДВОВІСНИМ РОЗТЯГОМ ТА ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ СИЛАМИ З УРАХУВАННЯМ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН ТА ЗМІЦНЕННЯ МАТЕРІАЛУ В ЇЇ ВЕРШИНАХ

Білаш О. В., к. е. н.

*Національна академія сухопутних військ ім. гетьмана Петра Сагайдачного,  
вул. Героїв Майдану, 32, м. Львів, 79000, Україна*

oksana.bilash@gmail.com

Розв'язано задачу про сумісну дію зосереджених сил та двовісного розтягу на ізотропну пластину з наскрізною прямолінійною тріщиною, вільною від зовнішнього навантаження, та за наявності пластичних зон у її вершинах з урахуванням зміцнення матеріалу. З використанням методів теорії функцій комплексної змінної розв'язування задачі зведено до задач лінійного спряження, розв'язок яких отримано в класі функцій, обмежених у вершинах пластичних зон. Наведено залежності для знаходження довжини пластичної зони та розходження берегів тріщини у її вершині, проведено їх числовий аналіз при різних параметрах задачі, який подано графічно. У часткових випадках отримано відомі в літературі результати.

*Ключові слова: ізотропна пластина, двовісний розтяг, зосереджені сили, тріщина, пластичні зони, зміцнений матеріал, розходження берегів тріщини.*

## ПЛАСТИНА С ТРЕЩИНОЙ ПОД ДВУХОСНЫМ РАСТЯЖЕНИЕМ И СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗОН И УПРОЧНЕНИЕ МАТЕРИАЛА В ЕЕ ВЕРШИНАХ

Білаш О. В., к. е. н.

*Національна академія сухопутних військ ім. гетьмана Петра Сагайдачного,  
ул. Героев Майдана, 32, г. Львов, 79000, Україна*

oksana.bilash@gmail.com

Исследована задача о совместном действии на изотропную пластину со сквозной трещиной, свободной от внешней нагрузки, сосредоточенных сил и двухосного растяжения на бесконечности. Предполагается, что в вершинах трещины на ее продолжении имеются узкие пластические зоны в материале пластины с упрочнением. С использованием методов теории функций комплексной переменной и комплексных потенциалов исследование задачи сведено к задачам линейного сопряжения, решение которых построено в классе функций, ограниченных в вершинах пластических зон. Записано уравнение для определения их длины, а также найдено раскрытие берегов трещины в ее вершине. Проведен численный анализ задачи. В частных случаях получены известные в литературе результаты.

*Ключевые слова: изотропная пластина, двухосное растяжение, сосредоточенные силы, трещина, пластические зоны, упрочняющий материал, раскрытие берегов трещины.*

## PLATE WITH A CRACK UNDER BIAXIAL TENSILE AND CONCENTRATED FORCES TAKING INTO ACCOUNT PLASTIC ZONES AND STRENGTHENING THE MATERIAL IN HER APEXS

Bilash O. V., Ph. D. in Economics

*Hetman Petro Sahaidachnyi National Army Academy,  
Heroes of Maidan street, 32, Lviv, 79000, Ukraine*

oksana.bilash@gmail.com

The problem of a joint action of concentrated forces and biaxial stretching on infinity isotropic plate with a crack, which banks are free from external loads was researched. In the crack's apexes are present the plastic zones, which strengthened of material take into account. Using methods of theory of complex variable the analytical solution of the problem was received. In the particular case known results in the literature was obtained. A numerical analysis of the divergence crack's banks and length of plastic zone in its apex was conducted.

*Key words: isotropic plate, biaxial stretching, concentrated forces, crack, plastic zones, strengthened material, divergence crack's banks.*

## ВСТУП

Пластинчасті елементи конструкцій широко використовуються в різних галузях техніки і будівництва. У них під час експлуатації чи виготовленні можуть виникнути тріщини, які є сильними концентраторами напружень і при певному навантаженні може відбутися їх руйнування. Дослідження напруженого стану пластинчастих елементів конструкції з тріщинами займалися багато дослідників, що відображено у монографіях [1, 3-14] та довідниках [15, 16]. Для пластичного матеріалу руйнування елемента конструкції з тріщиною супроводжується появою зон пластичності у її вершинах, що відображено в монографіях [7, 10, 13, 14] без урахування зміцнення матеріалу в зонах пластичності та з урахуванням зміцнення матеріалу [3, 4, 17], що проаналізовано в оглядовій статті [18].

У статті досліджено напружено-деформований стан пластини з тріщиною за сумісної дії двовісного розтягу на безмежності та зосереджених сил за наявності пластичних зон у її вершинах та з урахуванням зміцнення матеріалу. З використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів плоскої задачі теорії пружності розв'язування задачі зведено до задач лінійного спряження, розв'язок яких знайдено у класі функцій, обмежених у вершинах пластичних зон. Визначено довжину пластичної зони та розходження берегів тріщини у її вершині. Проведено числовий аналіз довжини пластичної зони та розходження берегів тріщини у її вершині при різних параметрах задачі, який подано графічно. Частковий випадок цієї задачі, за відсутності зосереджених сил, досліджено у статті [17], де розв'язок знаходився у класі функцій необмежених у вершинах пластичних зон, тим самим підходом у публікації [18] досліджено напружений стан пластини з тріщиною за розтягу її двома зосередженими силами без урахування зміцнення матеріалу.

## ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Дослідимо напружено-деформований стан нескінченної ізотропної пластини за наявності в ній наскрізної прямолінійної тріщини завдовжки  $2l$ , береги якої вільні від зовнішнього навантаження, яка знаходиться під дією двовісного розтягу на нескінченності зусиллями  $p$  і  $q$ , які перпендикулярні та паралельні до берегів тріщини, та двох рівних по величині, але протилежно направлених зосереджених сил  $P$ , точки прикладання яких знаходяться на осі симетрії тріщини на віддалі  $c$  від неї (див. рис.1).

Введемо декартову систему координат  $Oxy$  з початком координат у центрі тріщини, направивши вісь  $Ox$  по ній. Вважаємо, що під дією заданого навантаження, у вершинах тріщини утворилися зміцнені пластичні зони завдовжки  $\Delta$  з вершинами  $d$  і  $-d$ , де напруження розподілено згідно закону [17].

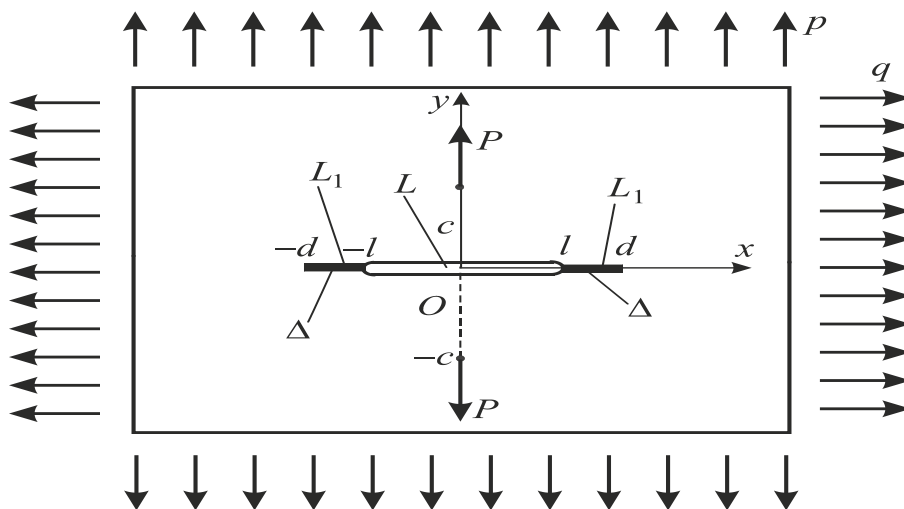


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини з пластичними зонами

$$\sigma(x) = B_1|x| + B_2, \quad (1)$$

де

$$B_1 = \frac{\sigma_Y - \sigma_\epsilon}{d-l}, \quad B_2 = \sigma_\epsilon - \frac{l(\sigma_Y - \sigma_\epsilon)}{d-l}, \quad (2)$$

$\sigma_\epsilon$  і  $\sigma_Y$  – межі міцності та текучості матеріалу.

Частину дійсної осі, де розміщена тріщина, позначимо через  $L$ , пластичні зони – через  $L_1$ .

Згідно з формулюваннями задачі маємо такі крайові умови

$$\sigma_{xy}^\pm = 0, \quad x \in L + L_1, \quad \sigma_{yy}^\pm = 0, \quad x \in L, \quad \sigma_{yy}^\pm = B_1|x| + B_2, \quad x \in L_1, \quad (3)$$

де  $\sigma_{yy}$  і  $\sigma_{xy}$  – компоненти тензора напружень, значками «+» і «-» позначено граничне значення відповідної величини при  $y \rightarrow \pm 0$ .

### РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ

Введемо комплексні потенціали  $\Phi(z)$  і  $\Omega(z)$  та скористаємося залежностями [6]

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (4)$$

$$2\mu(u+iv)'_x = 2\mu\partial_x(u+iv) = \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (5)$$

де  $z = x + iy$ ,  $i^2 = -1$ ,  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ ,  $\mu$  – модуль зсуву,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини,  $u$  і  $v$  – проекції вектора переміщення її точки на осі  $Ox$  і  $Oy$  відповідно.

Для функції  $\Phi(z)$  і  $\Omega(z)$  при великих  $|z|$  мають місце розвинення [6]

$$\Phi(z) = \Gamma + O(1/z^2), \quad \Omega(z) = \Gamma' + O(1/z^2), \quad (6)$$

$$\Gamma = 0,25(p+q), \quad \Gamma' = (p-q)/2.$$

Комплексні потенціали  $\Phi(z)$  і  $\Omega(z)$  в околі точок прикладання зосереджених сил можна подати у вигляді [6]

$$\Phi(z) = \frac{2\tilde{P}c}{z^2 + c^2} + \Phi_0(z), \quad \Omega(z) = 2\tilde{P}c \left[ \frac{\kappa - 2}{z^2 + c^2} + \frac{4c^2}{(z^2 + c^2)^2} \right] + \Omega_0(z), \quad (7)$$

де  $\Phi_0(z)$  і  $\Omega_0(z)$  – функції голоморфні у всій комплексній площині,  $\tilde{P} = P/(2\pi(1 + \kappa))$ .

Урахувавши (4), з крайових умов (3) одержимо

$$\Phi^\pm(x) + \Omega^\pm(x) = \begin{cases} 0, & x \in L, \\ B_1|x| + B_2, & x \in L_1. \end{cases} \quad (8)$$

На основі залежностей (8) отримаємо такі задачі лінійного спряження для знаходження комплексних потенціалів  $\Phi(z)$  і  $\Omega(z)$

$$(\Phi(x) - \Omega(x))^+ - (\Phi(x) - \Omega(x))^- = 0, \quad x \in L + L_1, \quad (9)$$

$$(\Phi(x) + \Omega(x))^+ + (\Phi(x) + \Omega(x))^- = \begin{cases} 0, & x \in L, \\ B_1|x| + B_2, & x \in L_1. \end{cases}$$

Розв'язавши задачі лінійного спряження (9) та врахувавши (6) і (7), матимемо

$$\Phi(z) - \Omega(z) = R_1(z), \quad (10)$$

$$\Phi(z) + \Omega(z) = R_2(z) + R_3(z), \quad (11)$$

де

$$R_1(z) = -\Gamma' + \frac{2\tilde{P}c(1-\kappa)}{z^2 + c^2} + \frac{4\tilde{P}c(z^2 - c^2)}{(z^2 + c^2)^2}, \quad R_2(z) = \frac{2zX(z)}{z^2 + c^2} \left( A_1 - \frac{2ca_3}{z^2 + c^2} \right),$$

$$R_3(z) = \frac{X(z)}{\pi i} \int_{L_1} \frac{(B_1|t| + B_2)dt}{X^+(t)(t-z)}, \quad X(z) = \sqrt{z^2 - d^2},$$

$$a_3 = \frac{2\tilde{P}c}{\sqrt{d^2 + c^2}}, \quad A_1 = -\frac{\tilde{P}}{\sqrt{d^2 + c^2}} \left( 1 + \kappa + \frac{2c^2}{\sqrt{d^2 + c^2}} \right). \quad (12)$$

Врахувавши (6), з (11) отримаємо залежність для знаходження довжини пластичної зони  $\Delta$

$$g(\varepsilon) - \tilde{p}\pi/2 - 0,5Q \left[ 1 + 2\lambda_1^2 / ((1+\kappa)\gamma_1^2) \right] / \gamma_1 = 0, \quad (13)$$

де

$$g(\varepsilon) = (m - (1-m)/\varepsilon) \arccos \lambda^{-1} + (1-m)\gamma_2/\varepsilon,$$

$$m = \sigma_e/\sigma_Y, \quad \lambda = 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon = \Delta/l, \quad \lambda_1 = c/l, \quad (14)$$

$$\tilde{p} = p/\sigma_Y, \quad Q = \tilde{P}/(\sigma_Y l), \quad \gamma_1 = \sqrt{\lambda^2 + \lambda_1^2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\varepsilon(2+\varepsilon)}.$$

Якщо взяти інтеграл, що входить у функцію  $R_3(z)$  (12), то отримаємо

$$R_3(z) = \frac{2}{\pi i} \left[ B_1 z \ln \frac{\sqrt{d^2 - z^2} + \sqrt{d^2 - l^2}}{\sqrt{l^2 - z^2}} + B_2 \ln \frac{d\sqrt{l^2 - z^2}}{z\sqrt{d^2 - l^2} + l\sqrt{d^2 - z^2}} \right]. \quad (15)$$

На основі (10) і (11) можемо записати

$$\Phi(z) = 0,5 \sum_{i=1}^3 R_i(z), \quad \Omega(z) = \Phi(z) - R_1(z). \quad (16)$$

При  $P = 0$ , із (13) отримаємо відповідну залежність зі статті [17], а коли зміщення відсутнє, тобто  $m = 1$ , із (13) одержимо відомі результати із монографій [7, 10], а за відсутності двовісного розтягу матимемо відповідну залежність із публікації [18].

Знайдемо тепер розходження берегів тріщини у її вершині. Якщо врахувати (16), то виходячи з (5), можемо записати

$$2\mu \left[ (u + iv)_x^+ - (u + iv)_x^- \right] = (\kappa + 1) (\Phi^+(x) - \Phi^-(x)), \quad x \in L_1. \quad (17)$$

Беручи до уваги (15) і (12) та підставляючи (16) у (17), отримаємо

$$\frac{4\mu \left[ (v')_x^+ - (v')_x^- \right]}{1+\kappa} = \frac{4x\sqrt{d^2-x^2}}{x^2+c^2} \left( A_1 - \frac{2ca_3}{x^2+c^2} \right) - \frac{B_2}{\pi} [\Gamma(d,x,l) - \Gamma(d,x,-l)] - \frac{x B_1}{\pi} [\Gamma(d,x,l) + \Gamma(d,x,-l)], \quad (18)$$

де

$$\Gamma(d,x,\xi) = \ln \frac{d^2 - x\xi - \sqrt{(d^2-x^2)(d^2-\xi^2)}}{d^2 - x\xi + \sqrt{(d^2-x^2)(d^2-\xi^2)}}.$$

Розходження берегів тріщини у її вершині  $\delta$  знаходимо за формулою

$$\delta = \int_d^l (v^+ - v^-)'_x dx, \quad (19)$$

з якої, після підстановки (18) у (19) та обчислення відповідних інтегралів [2], матимемо

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} = \frac{1+\kappa}{4\mu} & \left\{ \frac{4B_2 l}{\pi} \ln \frac{d}{l} + \frac{2B_1}{\pi} (d^2 - l^2) + 4A_1 \left[ \sqrt{d^2 - l^2} + \sqrt{d^2 + c^2} \cdot \ln \frac{\sqrt{d^2 + c^2} + \sqrt{d^2 - l^2}}{\sqrt{d^2 + c^2} - \sqrt{d^2 - l^2}} \right] - \right. \\ & \left. - 4ca_3 \left[ \frac{\sqrt{d^2 - l^2}}{l^2 + c^2} - \frac{1}{\sqrt{d^2 + c^2}} \ln \frac{\sqrt{d^2 + c^2} + \sqrt{d^2 - l^2}}{\sqrt{d^2 + c^2} - \sqrt{d^2 - l^2}} \right] \right\}. \quad (20) \end{aligned}$$

Залежність (20) подамо так

$$\tilde{\delta} = \delta E / (\sigma_Y l) = \gamma_4 - Q \left\{ (1 + 2\lambda_1^2 / \gamma_1^2) (\gamma_2 - \gamma_1 \gamma_3) - 0,25(1 + \nu) \lambda_1^2 \left[ \gamma_2 / (1 + \lambda_1^2) - \gamma_3 / \gamma_1 \right] \right\} / (\pi \gamma_1),$$

де  $E$  – модуль Юнга матеріалу пластини,

$$\gamma_4 = \left\{ 2 \left[ m - (1 - m) / \varepsilon \right] \ln \lambda + (1 - m)(2 + \varepsilon) \right\}, \quad \gamma_3 = \ln \left[ (\gamma_1 + \gamma_2) / (\gamma_1 - \gamma_2) \right].$$

### ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ТА ВИСНОВКИ

Був проведений числовий аналіз задачі, який поданий на рис. 2-4, при чому рис. 3-4 побудовано при  $\nu = 0,3$ .

На рис. 2-3 крива 1 побудована при  $m = 1$ , крива 2 – при  $m = 1.1$ , крива 3 – при  $m = 1.3$ , крива 4 – при  $m = 1.6$ , крива 5 – при  $m = 2$ .

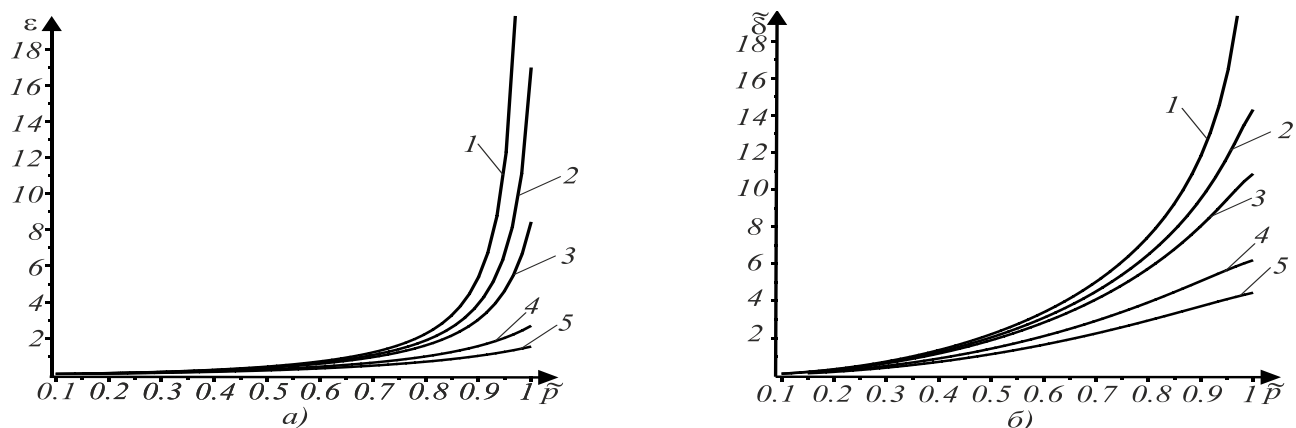


Рис. 2. Графічні залежності  $\varepsilon$  і  $\tilde{\delta}$  від зведеного зусилля на нескінченності  $\tilde{p}$

На рис. 2а) та 2б) дається відповідна графічна залежність зведеної довжини пластичної зони  $\varepsilon = \Delta/l$  та зведеного розходження берегів тріщини у її вершині  $\tilde{\delta} = \delta E/(\sigma_Y l)$  від зведеного зусилля на нескінченності  $\tilde{p} = p/\sigma_Y$ . З цих рисунків видно, що при зростанні зусилля на нескінченності  $\tilde{p}$  довжина пластичної зони та розходження берегів тріщини у її вершині зростають, причому, при  $\tilde{p} \rightarrow \sigma_Y$  довжина пластичної зони прямує до нескінченності. Зауважимо, що зусилля на нескінченності  $q$ , яке паралельне до берегів тріщини, не впливає ні на довжину пластичної зони, ні на розходження берегів тріщини у її вершині.

З рис. 2 можна зробити висновок, що зі зростанням параметра  $m$ , що характеризує величину лінійної зміцнюваності матеріалу, довжина пластичної зони та розходження берегів тріщини у її вершині зменшується.

На рис. 3а), 3в), 3д) та 3б), 3г), 3е) дається відповідна графічна залежність зведеної довжини пластичної зони  $\varepsilon = \Delta/l$  та зведеного розходження берегів тріщини у її вершині  $\tilde{\delta} = \delta E/(\sigma_Y l)$  від зведеної величини зосереджених сил  $Q = P/(\sigma_Y l)$  при різних значеннях відносної координатної точки прикладання зосереджених сил  $\lambda_1 = c/l$ .

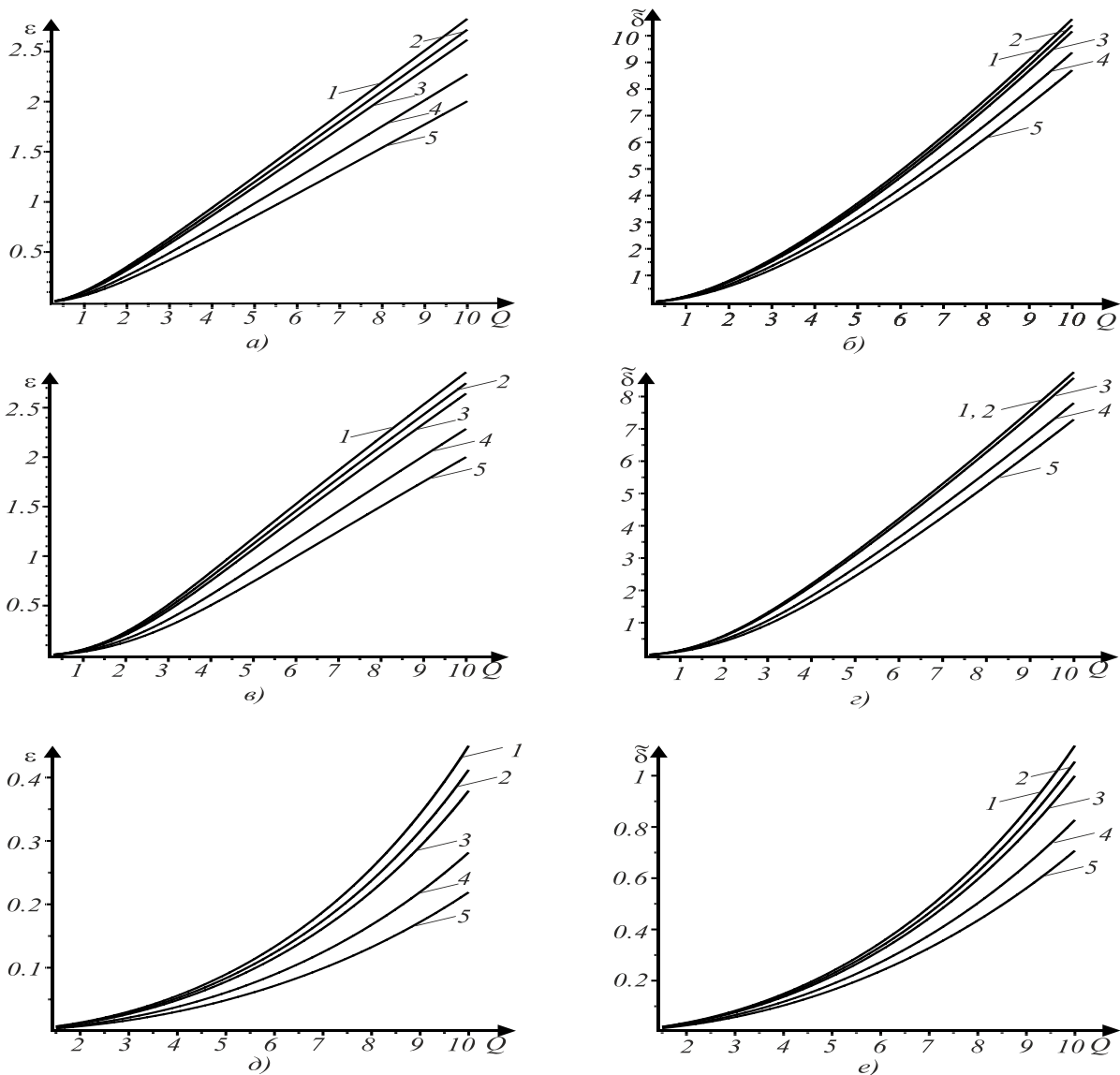


Рис. 3. Графічні залежності  $\varepsilon$  і  $\tilde{\delta}$  від зведеної величини зосереджених сил  $Q$  при різних відносних значеннях координати точки прикладання  $c/l$

Рис. 3а) і 3б) побудовано, коли  $\lambda_1 = 0$ , тобто зосереджені сили прикладені до берегів тріщини, а 3в) і 3г) та рис. 3д) і 3е) – відповідно при  $\lambda_1 = 2$  та  $\lambda_1 = 10$ . На основі цього рисунка можна зробити висновок, що при віддаленні точки прикладання зосереджених сил від тріщини або при зростанні параметра  $m$ , тобто змінюваності матеріалу, довжина пластичної зони та розходження берегів тріщини у її вершині зменшуються, а при зростанні величини зосереджених сил навпаки зростають.

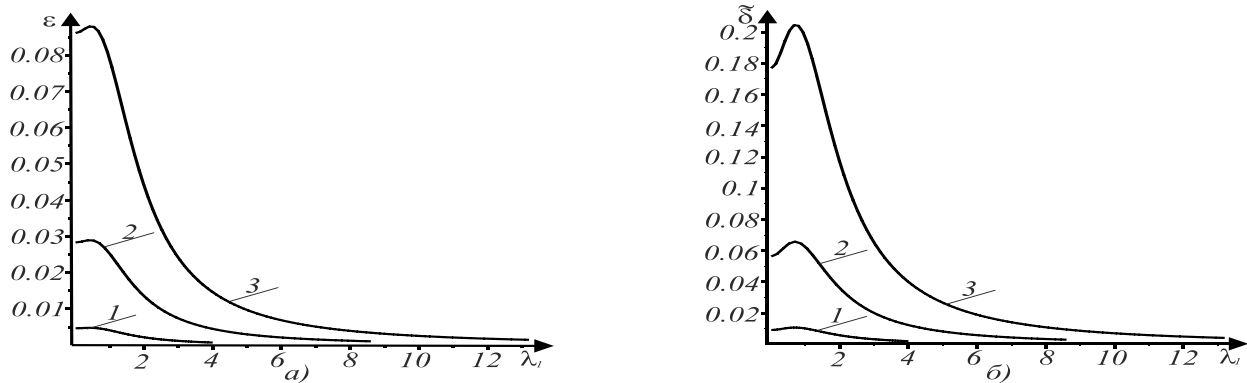


Рис. 4. Графічні залежності  $\varepsilon$  і  $\deltã$  від відносної координати точки прикладання сили  $\lambda_1$  при різних значеннях зведеної величини зосереджених сил  $Q$

На рис. 4а) і 4б) наведену графічну залежність зведеної довжини пластичної зони  $\varepsilon$  та зведеного розходження берегів тріщини у її вершині від відносної координати точки прикладання зосереджених сил  $\lambda_1 = c/l$  при  $m=1.1$ . Крива 1 характеризує випадок, коли зведена сила  $Q = 0.2$ , крива 2 –  $Q = 0.5$ , крива 3 –  $Q = 0.9$ . З цього рисунка видно, що коли точка прикладання сили віддаляється від тріщини, то довжина пластичної зони і розходження берегів тріщини у її вершині спочатку зростає, а потім зменшується, особливо суттєво при великих  $c$ .

## ЛІТЕРАТУРА

1. Бережницький Л. Т., Делявський М. В., Панасюк В. В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. Киев: Наукова думка, 1979. 400 с.
2. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. Москва: Изд-во «Наука», 1967. 608 с.
3. Кир'ян В. І., Осадчук В. А., Николишин М. М. Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій. Львів: СПОЛОМ, 2007. 320 с.
4. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. Львів: СПОЛОМ, 2003. 320 с.
5. Мазурак Л. П., Бережницький Л. Т. Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин. Киев: Наукова думка, 1990. 256 с.
6. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 707 с.
7. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1968. 246 с.
8. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. 256 с.
9. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1988. 324 с.
10. Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. Киев: Наук. думка, 1989. 248 с.

11. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 444 с.
12. Морозов Н. Р. Математические вопросы теории трещин. Москва: Наука, 1984. 256 с.
13. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. Москва: Наука, 1985. 502 с.
14. Мирсалимов В. М. Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами. Баку: Элм, 1984. 122 с.
15. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: Маруками Ю. (ред.). Москва: Мир, 1990. Т. 2. 560 с.
16. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев: Наук. думка, 1988. 617 с. (Механика разрушения и прочности материалов. Т. 2.)
17. Каминский А. А., Галатенко Г. В. Исследование роста усталостных трещин в материалах с упрочнением. *Прикл. механика*. 1984. Т. 2, № 4. С. 54–60.
18. Витвицький П. М. Про розвиток пластичних деформацій біля кінців щілини в тонкій пластинці при її розтягу зосередженими силами. *ДАН УРСР. Сер. А*. 1969. № 4. С. 316–320.

### REFERENCES

1. Beregnitskiy, L. T., Delyavskiy, M. V. & Panasyuk, V. V. (1979). Bending of thin plates with defects type of cracks. Kiev: Naukova Dumka.
2. Bronshtejn, I. N. & Semendjajev, K. A. (1967). Handbook of mathematics. M.: Nauka.
3. Kyrjan, V. I., Osadchuk, V. A. & Nykolyshyn, M. M. (2007). Destruction mechanics of the weld-fabricated connections of metal structures. Lviv: SPOLOM, 2007.
4. Kushnir, R. M., Nykolyshyn, M. M. & Osadchuk, V. A. (2003). Elastic and elasticly-plastic limit state of shells with boundary condition. Lviv: SPOLOM.
5. Mazurak, L. P. & Beregnitskiy, L. T. Bending of transversally isotropic plate with defects like cracks. Kiev: Naukova Dumka.
6. Mushelishvili, N. I. (1966). Some basic problems of mathematical theory of elasticity. M.: Nauka.
7. Panasjuk, V. V. (1968). Limit equilibrium of brittle bodies with cracks. Kiev: Naukova Dumka.
8. Prusov, I. A. (1975). The conjugation method in plate theory. Minsk: Publisher Belarusian University.
9. Savruk, M. P. (1988). Two-dimensional elasticity problems for bodies with cracks. Kiev: Naukova Dumka.
10. Savruk, M. P., Osiv, P. N. & Prokopchuk, I. V. (1989). Numerical analysis in plane problems of fracture theory. Kiev: Naukova Dumka.
11. Panasjuk, V. V., Savruk, M. P. & Dacyshyn, A. P. (1976). Distribution of stresses near cracks in plates and shells. Kiev: Naukova Dumka.
12. Morozov, N. R. (1984). Mathematical questions in the theory of cracks. M.: Nauka.
13. Parton, V. Z. & Morozov, N. R. (1985). Mechanics of elastoplastic fracture. M.: Nauka.
14. Mirsalimov, V. M. (1984). Destruction of elastic and elastoplastic bodies with cracks. Baky: Jel'm.
15. Marukami Ju. (Eds.). (1990). Reference book on the coefficients of intensity of tensions. M.: Myr. Vol. 2.
16. Savruk, M. P. (1988). Coefficients of stress intensity in bodies with cracks. Kiev: Naukova Dumka. (Mechanics of fracture and strength of materials. Vol. 2.)
17. Kaminskyj, A. A. & Galatenko, G. V. (1984). Investigation of the growth of fatigue cracks in materials with hardening. Applied mechanics, Vol. 2, No. 4, pp. 54-60.
18. Vytvyckyj, P. M. (1969). About development of plastic deformation near the ends of the slit in the small plate when it lumped tensile forces. DAN URSR, Vol. A, No. 4, pp. 316-320.



УДК 539.3:629.7

## ВЛИЯНИЕ АЗИМУТАЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ ОСЕЙ НА ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ ОХЛАЖДАЕМОЙ ЛОПАТКИ

<sup>1</sup>Воробьев Ю. С., <sup>2</sup>Берлизова Т. Ю., <sup>1</sup>Овчарова Н. Ю.

<sup>1</sup>*Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,  
ул. Пожарского, 2/10, г. Харьков, Украина*

<sup>2</sup>*Национальный технический университет «ХПИ»,  
ул. Кирпичева, 2, г. Харьков, Украина*

vorobiev@ipmach.kharkov.ua

Рассматривается охлаждаемая монокристаллическая лопатка с эффективной, но сложной системой вихревого охлаждения. Решается задача определения температурного и термоупругого состояния охлаждаемой монокристаллической лопатки при повороте кристаллографических осей. Рассмотрено влияние азимутальной ориентации кристаллографических осей на распределение термоупругих напряжений по объему лопатки. Показано перераспределение напряжений по объему лопатки в зависимости от угла поворота кристаллографических осей. Показано, что основной вклад в напряженно-деформированное состояние вносят термоупругие напряжения.

*Ключевые слова: охлаждаемая лопатка, термоупругие напряжения, кристаллографические оси, азимутальная ориентация.*

## ВПЛИВ АЗИМУТАЛЬНОЇ ОРІЄНТАЦІЇ КРИСТАЛОГРАФІЧНИХ ВІСЕЙ НА ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН МОНОКРИСТАЛІЧНОЇ ОХОЛОДЖУВАНОЇ ЛОПАТКИ

<sup>1</sup>Воробйов Ю. С., <sup>2</sup>Берлізова Т. Ю., <sup>1</sup>Овчарова Н. Ю.

<sup>1</sup>*Институт проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України,  
вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, Україна*

<sup>2</sup>*Національний технічний університет «ХПИ»,  
вул. Кирпичова, 2, м. Харків, Україна*

vorobiev@ipmach.kharkov.ua

Розглядається охолоджувана монокристалічна лопатка з ефективною, але складною системою вихревого охолодження. Вирішується завдання визначення температурного і термопружного стану охолоджуваної монокристалічної лопатки при повороті кристаллографічних вісей. Розглянуто вплив азимутальної орієнтації кристаллографічних вісей на розподіл термопружних напружень за об'ємом лопатки. Показано перерозподіл напружень за об'ємом лопатки залежно від кута повороту кристаллографічних вісей. Показано, що основний внесок у напружено-деформований стан вносять термопружні напруження.

*Ключові слова: охолоджувана лопатка, термопружні напруження, кристаллографічні вісі, азимутальна орієнтація.*

## INFLUENCE AZIMUTHAL ORIENTATION OF CRYSTALLOGRAPHIC AXES ON THE THERMO-STRESSED STATE OF THE COOLED SINGLE-CRYSTAL BLADE

<sup>1</sup>Vorobiev Yu. S., <sup>2</sup>Berlizova T. Yu., <sup>1</sup>Ovcharova N. Iu.

<sup>1</sup>*A. N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems  
of the National Academy of Sciences of Ukraine,  
Pozharsky street, 2/10, Kharkov, Ukraine*

<sup>2</sup>*National Technical University "KHPI",  
Kirpicheva Str., 2, Kharkov, Ukraine*

vorobiev@ipmach.kharkov.ua

The increase of power and efficiency of the gas turbine engine causes the rise of temperature and the gas pressure. It leads to increased thermal and mechanical loads of gas turbine engine blades. High temperatures lead to the need to use new high temperature materials for the creation of gas turbine blades, which are subjected to great temperatures for many hours, while blades must not lose its

mechanical properties. In recent years the single-crystal heat-resistant super alloys are widespread. They are able to withstand higher temperatures. For the lower of the operating temperature in the blades the cooling systems used such as: internal – vortex cooling, external – membrane cooling. The internal channels for the exit of cooling air have a complex geometric shape, which leads to the formation of concentration and localization of stresses. Analysis of the reliability strength of the blades is an urgent problem and it is associated with taking into account the properties of the single-crystal materials. In this case, a cooled single-crystal blade with an effective but complex vortex cooling system is considered.

The channels for the exit of cooling air there are near the exit edge, which provide the external membrane-cooling for the rather thin exit edge. The resulting temperature field with high temperature gradient causes the thermal expansion of the blade and high thermoelastic stresses. Therefore, it is necessary to solve the interrelated problems of determining the temperature and thermoelastic state of cooled single-crystal blade. The main contributions to the stress-strain state of the blades the thermoelastic stresses are made. The maximum stress intensities there are in the places of the maximum temperature gradients. Typically, it corresponds to locations on the surface of the cooling channels and exit holes for cooling air. It is known that the orientation of the crystallographic axes exerts a significant influence on the distribution of the stress fields. When the orientation of crystallographic axes changes, the redistribution all of stress is occur and changing the whole picture of stress-strain state of the blade. It is shown that the stress-strain state with a change in the azimuthal orientation of the crystallographic axes is periodic. The general picture of the stress-strain state is cyclically repeated, with the rotation of the crystallographic axes on  $90^\circ$  (up  $-45^\circ$  to  $+45^\circ$ ). The maximum stresses change significantly. In this connection, it is necessary to introduce restrictions on the deviations of the crystallographic axes. In this paper, the influence of the deflection of the azimuth orientation of crystallographic axes in a cooled single-crystal blade is investigated. For the azimuth orientation of the crystallographic axis, restrictions on the rotation of the crystallographic axis  $[001]$  by an angle  $\psi$  of  $12-15^\circ$  are recommended. The generalization of the results of all studies to the limits of the deviations of the crystallographic axes in a graphical form was performed. Locations of localization of thermoelastic stresses often coincide with locations of localization of vibrational stresses, which creates an additional danger. Therefore, in order to reliability strength of the cooled single-crystal blades, it is necessary to carry out a complex analysis of their dynamic stressed state under vibrations and a static thermoelastic state.

*Key words: cooled blade, thermoplastic stresses, crystallographic axes, azimuthal orientation.*

## ВВЕДЕНИЕ

Повышение мощности и эффективности ГТД вызывает рост температуры и давления газа. Это приводит к увеличению температурных и механических нагрузок на лопатки ГТД.

Высокие температуры приводят к необходимости использования новых жаропрочных материалов для создания лопаток газовых турбин, которые подвергаются высоким температурам в течении многих часов, при этом лопатки не должны терять своих механических свойств. Поэтому все более широкое распространение получают монокристаллические жаропрочные сплавы. Они способны выдерживать более высокие температуры. Для понижения рабочей температуры в лопатках используют различные системы охлаждения: внутреннее – вихревое, внешнее – пленочное.

Внутренние каналы для охлаждающего воздуха имеют сложную геометрическую форму, что приводит к возникновению концентрации и локализации напряжений [1-5]. Анализ прочностной надежности таких лопаток является актуальной проблемой и связан с учетом свойств монокристаллических материалов. В данном случае рассматривается охлаждаемая монокристаллическая лопатка с эффективной, но сложной системой вихревого охлаждения (рис. 1).

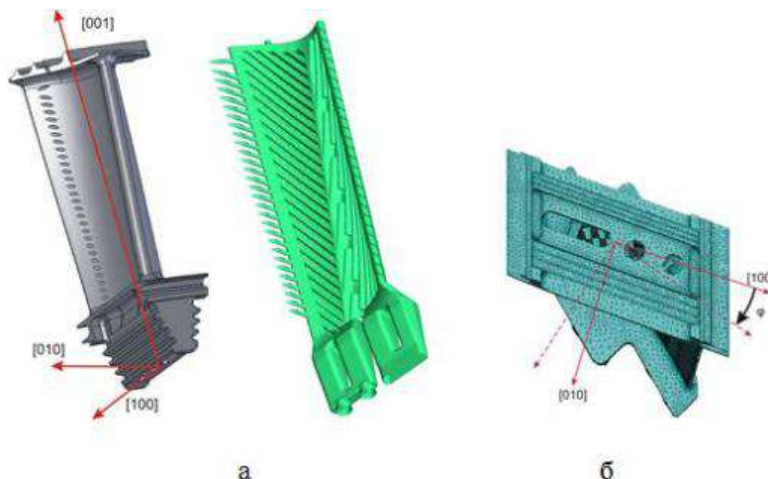


Рис. 1. Охлаждаемая лопатка с обозначением монокристаллических осей (а) и ее система охлаждения в виде вихревой матрицы (б)

Вблизи выходной кромки расположены каналы для выхода охлаждающего воздуха, что обеспечивает внешнее пленочное охлаждение довольно тонкой выходной кромки. Возникающее температурное поле с высокими градиентами температур вызывает температурное расширение лопаток и высокие термоупругие напряжения. Поэтому необходимо решение взаимосвязанных задач определения температурного и термоупругого состояния охлаждаемой монокристаллической лопатки.

### ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Процесс теплопроводности описывается нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c T) = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + Q, \quad (1)$$

где  $T$  – температура;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $c$  – удельная теплоемкость;  $Q$  – характеристика внутреннего источника или стока;  $\rho$  – плотность материала лопатки.

Решение температурной задачи на основе уравнения (1) с граничными условиями двух типов позволили получить распределение температур по объему лопатки [6, 7]. Показано, что рассматриваемая лопатка имеет перепад температур в продольных и в поперечных сечениях. В связи с этим задача должна решаться как трехмерная.

В работах [6, 7] рассмотрено влияние изменения аксиальной ориентации кристаллографических осей на термоупругое состояние охлаждаемой монокристаллической лопатки с вихревой системой охлаждения. Поэтому в данной статье уделяется внимание влиянию отклонения азимутальной ориентации кристаллографических осей в той же лопатке. При этом используется та же математическая модель лопатки, что и в работах [6, 7].

На рис. 2 показано влияние поворота кристаллографических осей в плоскости  $yz$  вокруг оси  $x$  на распределение интенсивностей напряжений по поверхности лопатки.

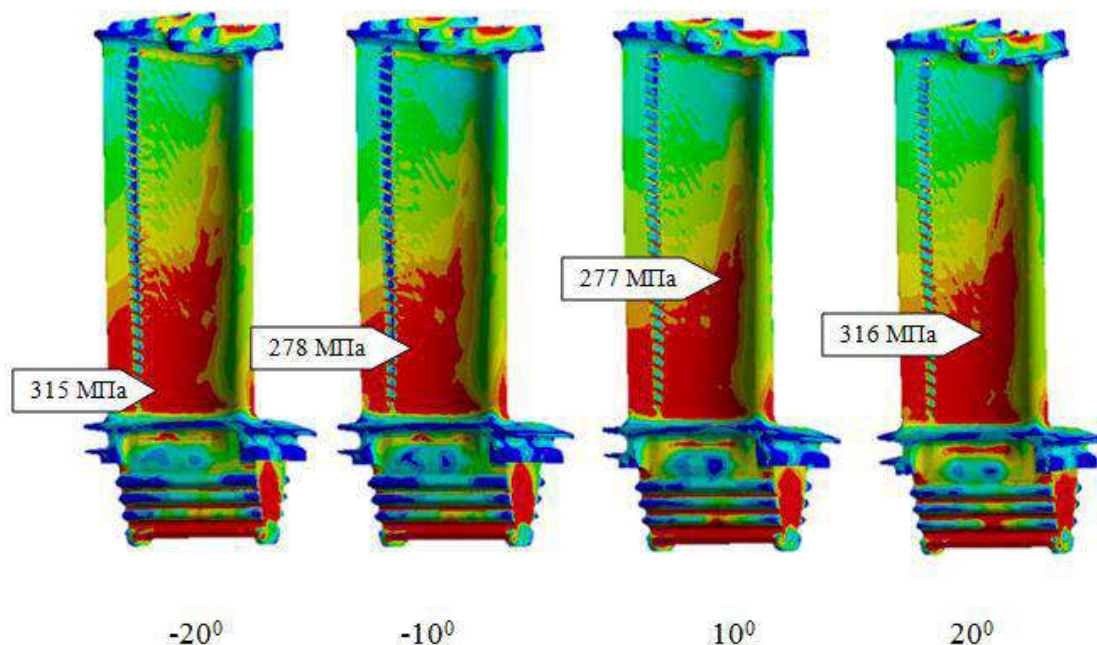


Рис. 2. Изменение полей интенсивностей напряжений на поверхности лопатки при повороте кристаллографических осей на  $-20^\circ$ ,  $-10^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $20^\circ$  вокруг оси  $x$

На рис. 3 приведено изменение распределения термоупругих напряжений в наиболее напряженных поперечных сечениях лопатки вокруг оси  $x$ .

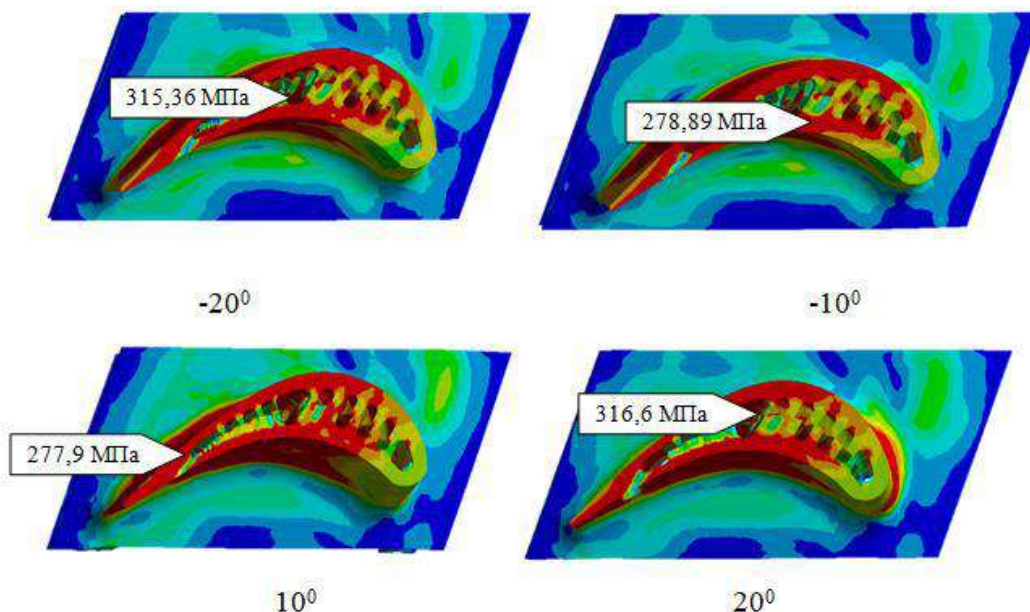


Рис. 3. Изменение полей интенсивностей напряжений в поперечных сечениях лопатки при повороте кристаллографических осей на  $-20^\circ$ ,  $-10^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $20^\circ$  вокруг оси  $x$

На рис. 4 показаны зависимости распределения интенсивности напряжений по поверхности лопатки, при изменении азимутальной ориентации (поворот кристаллографических осей в плоскости  $xz$  вокруг оси  $y$ , что соответствует кристаллографической оси  $[010]$ ).

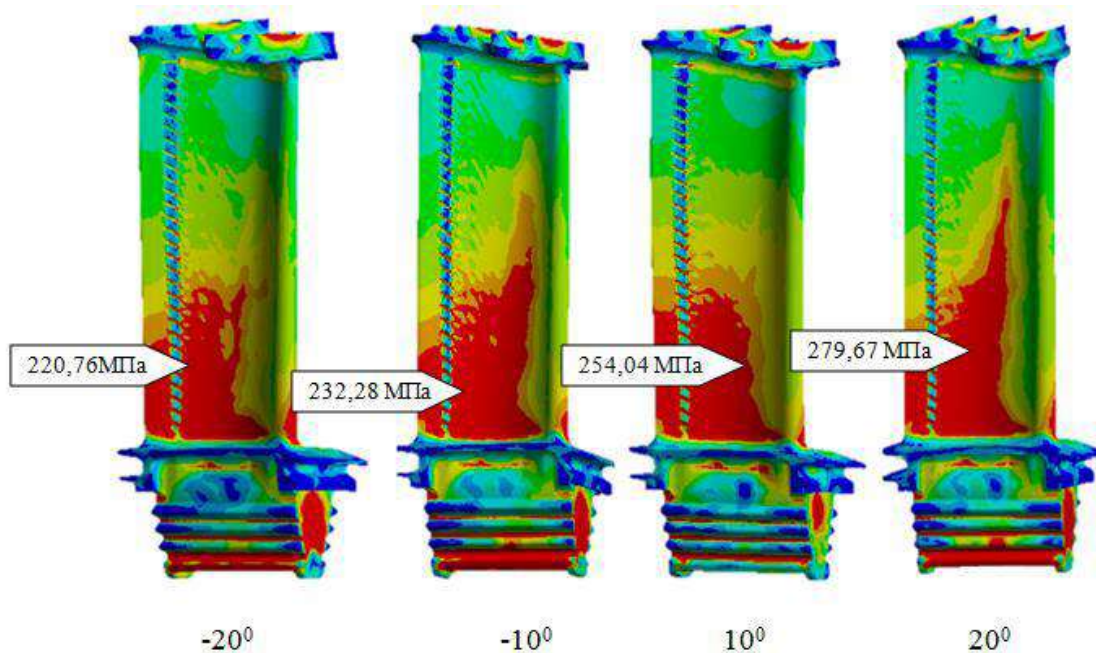


Рис. 4. Изменение полей интенсивностей напряжений на поверхности лопатки при повороте кристаллографических осей на  $-20^\circ$ ,  $-10^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $20^\circ$  вокруг оси  $y$

На рис. 5 приведено изменение распределения термоупругих напряжений в наиболее напряженных продольных сечениях лопатки при тех же условиях.

На основании результатов исследований, часть которых представлена на рис. 2-5, выявляется влияние отклонений кристаллографических осей от азимутальной ориентации. На рис. 6 представлено влияние изменения максимальных интенсивностей напряжений при повороте кристаллографических осей вокруг оси  $y$ .



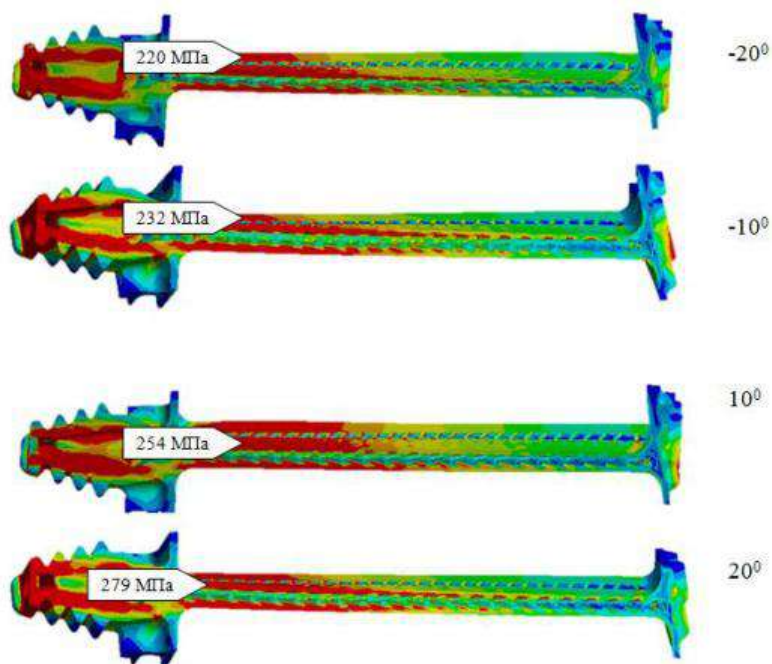


Рис. 5. Изменение полей интенсивностей напряжений в продольных сечениях лопатки при повороте кристаллографических осей на  $-20^\circ$ ,  $-10^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $20^\circ$  вокруг оси  $y$



Рис. 6. Изменение максимальных интенсивностей напряжений при повороте кристаллографических осей вокруг оси  $y$

На рис. 7 представлено изменение максимальных интенсивностей напряжений при повороте кристаллографических осей вокруг оси  $x$ .

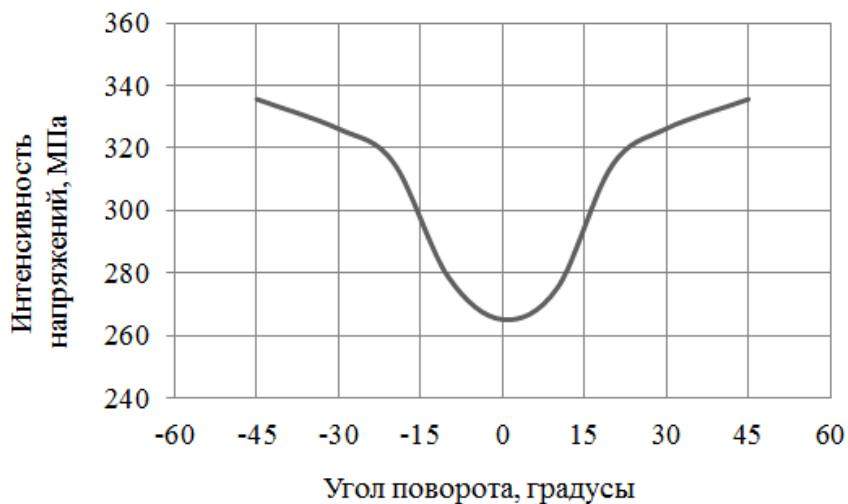


Рис. 7. Изменение максимальных интенсивностей напряжений при повороте кристаллографических осей вокруг оси  $x$

Несмотря на незначительные изменения минимальных напряжений, они также носят периодический характер (рис. 8).

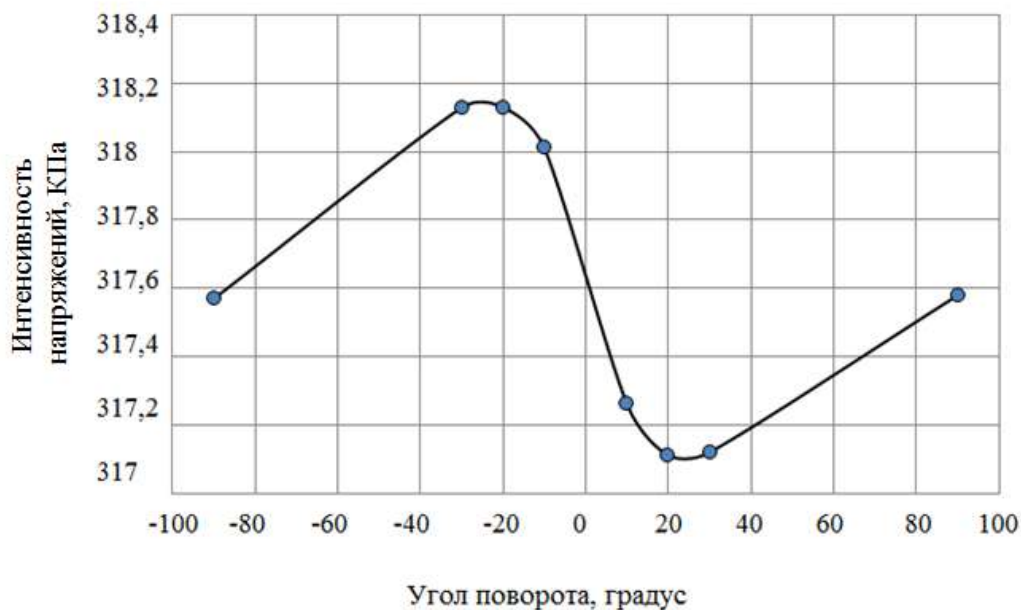


Рис. 8. Изменение минимальных интенсивностей напряжений при повороте кристаллографических осей вокруг оси  $x$

На графиках видно, что напряженно-деформированное состояние при изменении азимутальной ориентации кристаллографических осей носит периодический характер. Подобные исследования позволяют выявить влияние изменения ориентации кристаллографических осей на напряженно-деформированное состояние лопатки. При повороте кристаллографических осей происходит перераспределение всех напряжений. В лопатках с вихревой системой охлаждения перераспределение напряжений является весьма сложным, так как геометрическая форма каналов меняется от сечения к сечению. На распределение НДС влияют также изменение температурного поля и начальная неоднородность материала. В работах [6, 7] выявлено изменение аксиальной ориентации КГО, которое определяется условием ограничения на значения изменения угла  $\varphi$  на 12-15° (рис. 9).

Для азимутальной ориентации КГО имеются ограничения на поворот кристаллографической оси [001] на угол  $\psi$ , который составляет 12-15°. При этом отклонение оси [001] от оси  $z$  не должны выходить за пределы конуса с углом  $\psi$  (рис. 9).

Аналогичные ограничения на поворот КГО рекомендуются в работах [4, 5] для монокристаллических лопаток с другой конфигурацией охлаждающих каналов. Кроме того, поворот КГО вызывает отклонение собственных частот лопаток. Чтобы изменения собственных частот лопатки находились в границах допустимого разброса (8-10%), необходимы ограничения на отклонения кристаллографических осей [8]. Эти ограничения аналогичны ограничениям на поворот КГО, связанным с термоупругими напряжениями.

Известно, что ориентация кристаллографических осей оказывает существенное влияние на распределение полей напряжений. В данном случае кристаллографические оси [100], [010], [001] совпадают с осями лопатки  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Азимутальная и аксиальная ориентации осей монокристаллических лопаток являются важнейшей характеристикой, поэтому исследование влияния поворота КГО вокруг всех осей лопатки является важной и интересной задачей.

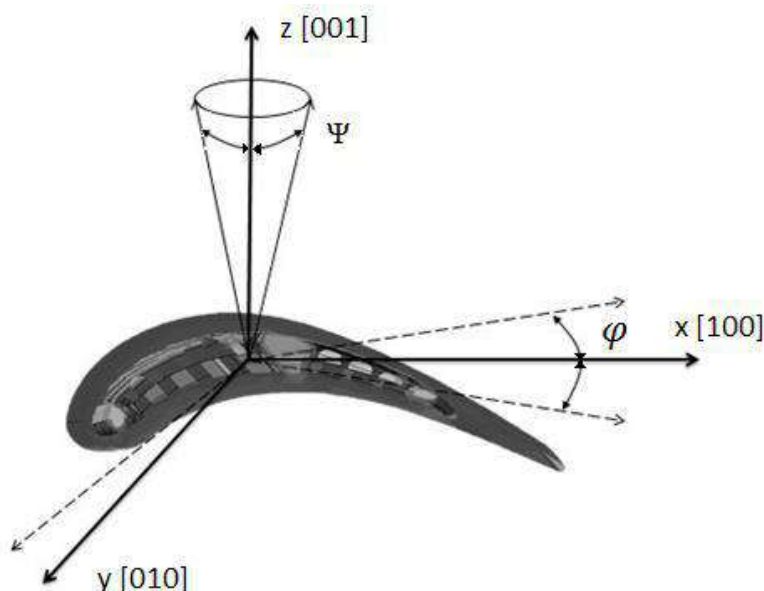


Рис. 9. Ограничения поворота кристаллографических осей

## ВЫВОДЫ

При изменении ориентации кристаллографических осей происходит перераспределение всех напряжений и изменение всей картины НДС лопатки.

Общая картина напряженно-деформированного состояния циклически повторяется при повороте кристаллографических осей на  $90^\circ$  (от  $-45^\circ$  до  $+45^\circ$ ). При этом максимальные напряжения значительно изменяются. В связи с этим необходимо вводить ограничения на отклонения кристаллографических осей.

В предыдущих работах [6, 7] выявлено изменение аксиальной ориентации КГО, которое определяется условием ограничения на значения изменения угла  $\varphi$  на  $12-15^\circ$ . В данной работе исследовано влияние отклонения азимутальной ориентации кристаллографических осей в охлаждаемой монокристаллической лопатке. Для азимутальной ориентации КГО рекомендуются ограничения на поворот кристаллографической оси [001] на угол  $\psi$ , который составляет  $12-15^\circ$ . Выполнено обобщение результатов всех исследований на ограничения отклонений кристаллографических осей (рис.9).

Места локализации термоупругих напряжений часто совпадают с местами локализации вибрационных напряжений [8], что создает дополнительную опасность. Поэтому для оценки прочностной надежности охлаждаемых монокристаллических лопаток необходимо проводить комплексный анализ их динамического напряженного состояния при колебаниях и статического термоупругого состояния.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ножницкий Ю. А., Голубовский Е. Р. О прочностной надежности монокристаллических рабочих лопаток высокотемпературных турбин перспективных ГТД. *Прочность материалов и ресурс элементов энергооборудования*: Тр. ЦКТИ (Санкт-Петербург, 2009). Вып. 296. С. 74–82.
2. Шалин Р. Е., Светлов И. Л. и др. Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов. Москва: Машиностроение, 1997. 336 с.
3. Wolf D. S. Stress analysis of a first turbin vane using 3-dimantional model wich non-linear material behavior subjected to transient temperatures. *AIAA Pap.* 1981. № 1437. 5 p.
4. Придорожный Р. П. Расчетное исследование объемного напряженно-деформированного состояния монокристаллической охлаждаемой лопатки турбины. *Авиационно-космическая техника и технология*. 2002. Вып. 34. С. 119–123.
5. Придорожный Р. П., Шереметьев А. В. Влияние кристаллографической ориентации на объемное напряженно-деформированное состояние монокристаллической неохлаждаемой лопатки турбины. *Вестник двигателестроения*. 2003. Вып. 1. С. 47–51.
6. Воробьев Ю. С., Овчарова Н. Ю., Жондковски Р., Берлизова Т. Ю. Напряженно-деформированное состояние охлаждаемой монокристаллической лопатки ГТД в температурном поле с учетом влияния

ориентации кристаллографических осей. *Компрессорное и энергетическое машиностроение*. 2015. № 4. С. 15–19.

7. Воробьев Ю. С., Овчарова Н. Ю., Жондковский Р., Берлизова Т. Ю. Влияние азимутальной ориентации кристаллографических осей на термоупругое состояние лопатки ГТД с вихревой системой охлаждения. *Проблемы прочности*. 2016. № 3. С. 15–24.
8. Vorobiov Iu. S., Dyakonenko K. Yu., Kulishov S. B., Skritskij A. N., Rzakowski R. Vibration characteristics of cooled single-crystal gas turbine blades. *Journal of vibration engineering & technologies*. 2014. Vol. 2, No. 6. P. 537–541.

## REFERENCE

1. Nozhnitskiy, Yu. A. & Golubovskiy, Ye. R. (2009). About прочностной reliability of single-crystal working shoulder-blades of high temperature turbines perspective GTE. Durability of materials and resource of elements of energyequipment, Iss. 296, (pp. 74-82), Saint Petersburg.
2. Shalin, R. Ye., Svetlov, I. L. et al. (1997). Single-crystals of nickeliferous heatproof alloys. Moscow: Mashinostroyeniye.
3. Wolf, D. S. (1981). Stress analysis of a fist turbine vane using 3-dimantional model wich non-linear material behavior subjected to transient temperatures. AIAA Pap. No. 1437, 5 p.
4. Pridorozhnyy, R. P. (2002). Calculation research of the by volume tensely-deformed state of the single-crystal cooled shoulder-blade of turbine. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya*, Iss. 34, pp. 119-123.
5. Pridorozhnyy, R. P. & Sheremet' yev, A. V. (2003). Influence of crystallography orientation on the by volume tensely-deformed state of the single-crystal uncooled shoulder-blade of turbine. *Vestnik dvigatelestroyeniya*, Iss. 1, pp. 47-51.
6. Vorob' yev, Yu. S., Ovcharova, N. Yu., Zhondkovski, R. & Berlizova, T. Yu. (2015). Tensely-deformed state of the cooled single-crystal shoulder-blade of GTE in the temperature field taking into account influence of orientation of crystallography axes. *Kompressornoye i energeticheskoye mashinostroyeniye*, No. 4. pp. 15-19.
7. Vorob' yev, Yu. S., Ovcharova, N. Yu., Zhondkovski, R. & Berlizova, T. Yu. (2016). Influence of azimuthal orientation of crystallography axes on the термоупругое state of shoulder-blade of GTD with the vortical system of cooling. *Problemy prochnosti*, No. 3, pp. 15-24.
8. Vorobiov, Iu. S., Dyakonenko, K. Yu., Kulishov, S. B., Skritskij, A. N. & Rzakowski, R. (2014). Vibration characteristics of cooled single-crystal gas turbine blades. *Journal of vibration engineering & technologies*, Vol. 2, No. 6, pp. 537-541.

УДК 539.3

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО И ОБОЛОЧЕЧНОГО РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ПОЛЗУЧЕСТИ И ПРОЧНОСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРОВ

<sup>1</sup>Галишин А. З., д. т. н., с. н. с., <sup>2</sup>Склепус С. Н., к. ф.-м. н., с. н. с.

<sup>1</sup>*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины,  
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина*

<sup>2</sup>*Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,  
ул. Пожарского, 2/10, Харьков, 61046, Украина*

plast@inmech.kiev.ua, snsklepus@ukr.net

Рассмотрена задача ползучести и прочности полого многослойного цилиндра в рамках пространственной и оболочечной постановок. Решения для двухслойных оболочек с различным соотношением толщин слоев, основанные на гипотезе прямолинейного элемента, сравниваются с пространственными решениями для осесимметрично нагруженных полых цилиндров. Показано, что при уменьшении толщины наружного слоя погрешность оболочечного решения уменьшается, а ползучесть наружного слоя увеличивает время до разрушения.

*Ключевые слова: многослойный цилиндр, ползучесть, критерий прочности, время до разрушения.*



## ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ПРОСТОРОВОГО ТА ОБОЛОНКОВОГО РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ПОВЗУЧОСТІ ТА МІЦНОСТІ БАГАТОШАРОВИХ ЦИЛІНДРІВ

<sup>1</sup>Галішшин О. З., д. т. н, с. н. с., <sup>2</sup>Склепус С. М., к. ф.-м. н., с. н. с.

<sup>1</sup>*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,  
вул. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна*

<sup>2</sup>*Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України,  
вул. Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна*

plast@inmech.kiev.ua, snsklepus@ukr.net

Розглянуто задачу повзучості та міцності порожнистого багатошарового циліндра в рамках просторової і оболонкової постановок. Розв'язки для двошарових оболонок з різним співвідношенням товщини шарів, що базуються на гіпотезі прямолінійного елемента, порівнюються з просторовими рішеннями для осесиметрично навантажених порожнистих циліндрів. Показано, що при зменшенні товщини зовнішнього шару похибка оболонкового розв'язку зменшується, а повзучість зовнішнього шару збільшує час до руйнування.

*Ключові слова: багатошаровий циліндр, повзучість, критерій міцності, час до руйнування.*

## COMPARATIVE ANALYSIS OF SPATIAL AND SHELL SOLUTIONS FOR CREEP AND STRENGTH PROBLEM OF THE MULTILAYERED CYLINDERS

<sup>1</sup>Galishin A. Z., D. Sc., <sup>2</sup>Sklepus S. N., Ph.D. in Physics and Maths

<sup>1</sup>*S. P. Timoshenko Institute of Mechanics, NAS of Ukraine,  
Nesterov str.,3, Kyiv, 03057, Ukraine*

<sup>2</sup>*A. N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems, NAS of Ukraine,  
Pozgarsky str., 2/10, Kharkov, 61046, Ukraine*

plast@inmech.kiev.ua, snsklepus@ukr.net

In engineering practice we often meet multi-layered structural elements in the form of hollow cylinders operating at high temperatures under creep conditions. The error of the solution obtained in the framework of a theory of shells depends on many factors. They include the shell characteristic ratio, the ratio of the thickness of the layers, type of boundary conditions, loading conditions, the mechanical characteristics of the materials. Simultaneous study of the influence of all these factors is a complex problem. One possible way of studying of the error of solutions obtained in the framework of the shell theories is a comparison of them with the results obtained within of the three-dimensional (3D) formulation. The aims of this paper are: 1) to compare the 3D and shell solutions for two-layered cylinders under internal uniform pressure for various ratios of the thickness of the layers, 2) to investigate the influence of the ratio of the thickness of the layers on the deviation of the shell solution from the 3D solution, 3) to investigate the effect of creep of the outer layer on the long-term strength of the cylinder. The problem creep and strength of hollow two-layered cylinder is considered. The inner layer of the cylinder is made of a heat-resistant alloy based on nickel ЭИ437, outer layer is made of the yttria partially stabilized zirconia (8YSZ). Solutions for two-layered shells of varying ratios of layer thicknesses, based on the hypothesis of rectilinear element, are compared with the spatial solutions for axisymmetrically loaded hollow cylinders. For the solution of a spatial initial boundary value problem the joint application of Ritz, R-functions methods and the Runge-Kutta-Merson method for time integration with automatic time step control has been used. Within the shell formulation the initial boundary value problem is also solved using the Runge-Kutta-Merson method with the combination of the Runge-Kutta method and Godunov's technique of discrete orthogonalization for solving the boundary problem at each time step. A good agreement of the results of the 3D and shell solutions for different ratios of the layer thicknesses for the parameters of the stress-strain state is obtained. It is shown that as the thickness of the outer layer increases, the error of the shell solution increases, and the creep of the outer layer increases the time to failure. A conclusion was also made about the satisfactory accuracy of finding time to failure.

*Key words: multilayered cylinder, creep, strength criterion, time to failure.*

## ВВЕДЕНИЕ

В современной технике находят широкое применение многослойные элементы конструкций, работающие в условиях ползучести. Задачи ползучести слоистых цилиндров и цилиндрических оболочек рассматривались в работах [1-4 и др.]. В инженерных расчетах ползучести таких объектов применяются приближенные методы решения. Зачастую для преодоления возникающих вычислительных трудностей используются те или иные теории оболочек, которые позволяют упростить постановку задачи и понизить размерность исходной краевой задачи. Погрешность решения, полученного в рамках теории оболочек, зависит от многих факторов. Они включают в себя соотношение геометрических размеров оболочки, соотношение толщин слоев, тип граничных условий, вида нагружения, механических характеристик материалов. Анализ применимости классической и уточненных теорий оболочек в задачах упругого деформирования однородных и слоистых оболочек дан в работе [5]. Одним из возможных путей исследования погрешностей теорий оболочек в задачах ползучести цилиндров является сопоставление полученных на их основе решений с результатами решения пространственных задач. Оценке погрешности оболочечных моделей в задачах ползучести и длительной прочности однородных цилиндрических оболочек посвящены лишь единичные работы. Так, например, в [6] для однородного полого цилиндра, нагруженного внутренним давлением, проводится анализ применимости различных оболочечных моделей в исследованиях напряженно-деформированного состояния (НДС), ползучести и повреждаемости. Решения для оболочек различной толщины, основанные на гипотезах прямолинейного элемента либо на гипотезах Кирхгофа-Лява, сопоставляются с решением пространственной задачи для осесимметрично нагруженного цилиндра. Отметим, что в литературе отсутствуют работы, посвященные обоснованию применимости теории оболочек для исследования ползучести и прочности слоистых цилиндров.

Целями данной работы являются:

- сопоставить результаты решения задачи ползучести и прочности слоистых цилиндров, полученные в рамках пространственной и оболочечной постановок;
- исследовать влияние соотношения толщин слоев на отклонение оболочечного решения от пространственного;
- исследовать влияние ползучести наружного слоя на длительную прочность цилиндра.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассмотрим круговой осесимметрично нагруженный полый двухслойный цилиндр конечной длины в цилиндрической системе координат  $r\varphi z$ . Ось  $z$  совпадает с осью вращения. Пусть цилиндр состоит из изотропных слоев постоянной толщины, которые жестко соединены между собой и деформируются без проскальзывания и отрыва. Полагаем, что цилиндр находится под действием поверхностных сил, деформирование в процессе ползучести происходит изотермически. Деформации цилиндра остаются малыми, а температурными деформациями можно пренебречь. Задачу будем решать в геометрически линейной, квазистатической постановке и в предположении, что в процессе деформирования пластические деформации не возникают.

Определяющие уравнения ползучести материалов слоев запишем в виде [7]

$$\dot{p}_{kl} = \frac{3}{2} A \sigma_i^{n-1} s_{kl}, \quad (k, l = \overline{1,3}). \quad (1)$$

Здесь  $\dot{p}_{kl}$  – компоненты тензора скоростей деформаций ползучести;  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений;  $s_{kl} = \sigma_{kl} - \delta_{kl} (\sigma_{kk})$  – компоненты девиатора напряжений;  $A, n$  – константы материала. Данный закон справедлив для многих материалов при достаточно высоком уровне температур и напряжений и позволяет исследовать ползучесть в наиболее «чистой»

форме, исключив такие явления, как упрочнение и повреждаемость материала вследствие ползучести.

Здесь и далее точка над символами обозначает полную производную по времени.

Граничные условия на торцах цилиндра  $z = \pm l/2$  задавались в виде:

$$\begin{aligned} \dot{u}_r &= 0, \\ \dot{\sigma}_{zz} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

На внутренней поверхности  $r = r_{inn}$  цилиндра:

$$\dot{\sigma}_{rr} = -\dot{P}_{inn}, \quad \dot{\sigma}_{rz} = 0,$$

На внешней поверхности  $r = r_{out}$  цилиндра:

$$\dot{\sigma}_{rr} = 0, \quad \dot{\sigma}_{rz}^{(2)} = 0.$$

При решении задачи в рамках пространственной осесимметричной постановки, краевая задача ползучести в момент времени  $t \neq 0$  может быть сведена к вариационной задаче для функционала в форме Лагранжа, определенного в пространстве кинематически возможных скоростей перемещений  $\Lambda = \Lambda(\dot{u}_r, \dot{u}_z)$ , выражение для которого приведено, например, в работах [4, 8]. Здесь  $\dot{u}_r(r, z, t)$ ,  $\dot{u}_z(r, z, t)$  – скорости перемещений вдоль осей  $O_r$  и  $O_z$  соответственно. Обращение в нуль первой вариации функционала  $\delta\Lambda = 0$  эквивалентно выполнению линеаризованных уравнений равновесия и статических граничных условий, записанных относительно скоростей перемещений [4, 8].

Основные неизвестные задачи ползучести: перемещения  $u_r$ ,  $u_z$ , напряжения  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{rz}$ , полные деформации  $\varepsilon_{rr}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ ,  $\gamma_{rz}$  и деформации ползучести  $p_{rr}$ ,  $p_{zz}$ ,  $p_{\varphi\varphi}$ ,  $2p_{rz}$  в произвольной точке цилиндра. Их можно найти из решения задачи Коши по времени для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [4, 8]. В начальный момент времени деформации ползучести равны нулю. Начальные условия для остальных неизвестных функций следуют из решения задачи упругого деформирования цилиндра.

Решение задачи Коши осуществляется методом Рунге-Кутты-Мерсона (РКМ) с автоматическим выбором шага по времени. Правые части уравнений, в моменты времени, соответствующие схеме РКМ, определяются из решения вариационной задачи для функционала в форме Лагранжа. Вариационные задачи решаются методом Ритца в сочетании с методом R-функций [9]. При этом приближенное решение краевой задачи представляется в виде формулы – структуры решения, которая точно удовлетворяет всем (общая структура решения) или части (частичная структура решения) граничным условиям и является инвариантной относительно геометрической формы области.

Можно показать, что структура решения, удовлетворяющая кинематическим граничным условиям для скоростей перемещений (2) имеет вид:

$$\dot{u}_{ri} = \omega\Phi_1, \quad \dot{u}_{zi} = z\Phi_2.$$

Здесь  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  – неопределенные компоненты структуры решения [9];  $\omega = \frac{1}{l} \left( \frac{l^2}{4} - z^2 \right) = 0$  – уравнение участка границы, где заданы скорости перемещений.

При численной реализации неопределенные компоненты структуры решения представлялись в виде конечных рядов вида  $\Phi(r, z, t) = \sum_n C_n(t) f_n(r, z)$ , где  $C_n(t)$  – неопределенные

коэффициенты, которые на каждом временном шаге находятся методом Рунге;  $t$  – некоторый фиксированный момент временной дискретизации схемы РКМ или дискретизации по времени для выдачи результатов расчета;  $\{f_n\}$  – система линейно независимых функций. Здесь в качестве  $\{f_n\}$  использовались бикубические сплайны Шенберга. Системы сплайнов строились на регулярной сетке  $K_r \times K_z$ , где  $K_r$ ,  $K_z$  – количество отрезков дискретизации вдоль осей  $O_r$  и  $O_z$ , соответственно.

Постановка задачи в рамках теории оболочек базируется на использовании уточненной модели прямолинейного элемента, учитывающей деформации поперечного сдвига [5]. В произвольный момент времени краевая задача сводится к численному интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{Y}}{dz} = P(z)\vec{Y} + \vec{f}(z); \quad \vec{Y} = \{N_r, N_z, M_z, u_r, u_z, \psi_z\}^T \quad (3)$$

при заданных на торцах  $z = z_0$  и  $z = z_n$  граничных условиях вида

$$B_i \vec{Y} = \vec{b}_i \quad (i = 0, n). \quad (4)$$

В равенствах (3), (4) обозначено:  $\vec{Y}$  – вектор разрешающих функций, состоящий из радиальной  $N_r$  и осевой  $N_z$  составляющих усилий, действующих в сечении  $z = \text{const}$ ;  $M_z$  – осевой изгибающий момент;  $u_r$ ,  $u_z$  – радиальное и осевое составляющие перемещения точки координатной поверхности;  $\psi_z$  – полный угол поворота прямолинейного элемента, состоящий из угла поворота нормали и угла поворота, обусловленного поперечным сдвигом. Величины  $P(z)$  и  $\vec{f}(z)$  означают матрицу системы и вектор свободных членов, а  $B_i$  и  $\vec{b}_i$  – матрицы и векторы граничных условий. Компоненты матрицы  $P(z)$  зависят от жесткостных характеристик оболочки и находятся в результате численного интегрирования по толщине оболочки. Компоненты вектора  $\vec{f}(z)$  кроме этого зависят от деформаций ползучести.

Для рассматриваемой задачи граничные условия в рамках теории оболочек формулировались в виде

$$\text{при } z = 0: \quad N_r = u_z = \psi_z = 0,$$

$$\text{при } z = l/2: \quad N_z = M_z = u_r = 0.$$

Решение краевой задачи (3), (4) осуществлялось методом Рунге-Кутты с дискретной ортогонализацией по С. К. Годунову. Для решения задачи по времени использовался метод РКМ с автоматическим выбором шага.

### ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Проведем сравнение результатов решения задачи ползучести для двухслойного цилиндра, полученных на основе пространственной постановки и в рамках уточненной теории оболочек. Геометрические размеры: длина  $l = 0,1$  м, внутренний радиус цилиндра  $r_{inn} = 0,095$  м, внешний –  $r_{out} = 0,105$  м. Толщины слоев будем варьировать. Внутренний слой цилиндра толщиной  $h_1$  выполнен из жаропрочного сплава на основе никеля ЭИ437, наружный, толщиной  $h_2$  – из диоксида циркония, стабилизированного иттрием (8YSZ). Данный керамический материал часто применяется для термобарьерных покрытий (thermal barrier coating – ТБС). Температура  $T = 800^\circ\text{C}$ . На внутренней поверхности  $r = r_{inn}$  приложено постоянное давление  $P_{inn} = 15$  МПа.

Модуль Юнга и коэффициент Пуассона сплава ЭИ437:  $E_1 = 1,5285 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu_1 = 0,28$  [10]. Предел текучести  $\sigma_T = 340$  МПа. Упругие характеристики материала 8YSZ:  $E_2 = 1,539 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu_2 = 0,27$  [11]. Предел прочности  $\sigma_g = 360$  МПа. Константы ползучести материалов слоев следующие:  $A_1 = 5,15 \cdot 10^{-19}$  МПа<sup>-n</sup>ч<sup>-1</sup>,  $n_1 = 5,23$  (сплав ЭИ437) [7] и  $A_2 = 1,26 \cdot 10^{-12}$  МПа<sup>-n</sup>ч<sup>-1</sup>,  $n_2 = 1,475$  (керамический материал) [11].

Критерием определения критического времени, или времени до разрушения  $t_*$  и окончания процесса расчета было выполнение в какой-либо точке пространственной дискретизации критерия наибольших нормальных напряжений [12]:

$$\max \{|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|\} = \sigma_*, \tag{5}$$

где  $\sigma_*$  – предельное напряжение. В качестве  $\sigma_*$  могут быть выбраны, например: предел пропорциональности  $\sigma_{np}$ , предел текучести  $\sigma_T$  или предел прочности  $\sigma_g$ .

Отношение толщины наружного слоя цилиндра к общей толщине  $\eta = h_2/h$  варьировалось в пределах от 1/50 до 1/4 (табл. 1).

В результате расчетов установлено, что процесс ползучести во внутреннем слое идет с большей скоростью, чем во внешнем слое. Со временем происходит перераспределение напряжений – во внутреннем слое происходит релаксация максимальных напряжений, что приводит к увеличению абсолютных значений напряжений в наружном слое и, в конечном итоге – к выполнению критерия (5) на наружной поверхности в центре цилиндра:

$$\max \{|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|\} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_g.$$

В таблице 1 приведены значения времени до разрушения  $t_*$ , полученные по пространственной модели ( $t_*^{3D}$ ) и на основе оболочечной модели ( $t_*^{SH}$ ) в случае, когда учитывается ползучесть в обоих слоях. Там же приведены значения относительных отклонений  $\Delta = Abs(t_*^{3D} - t_*^{SH}) / t_*^{3D} \cdot 100\%$  оболочечного решения от пространственного. Из таблицы видно, что с ростом параметра  $\eta$  указанное отклонение увеличивается.

Таблица 1

$\eta$	1/50	1/10	1/5	1/4
$t_*^{3D}$ , ч	11083	14920	28155	46750
$t_*^{SH}$ , ч	11750	17040	34080	61550
$\Delta$ , %	6,0	14,2	21,0	31,7

Также были выполнены расчеты в предположении, что материал наружного слоя деформируется упруго, при отсутствии деформаций ползучести. Соответствующие времена до разрушения и относительные отклонения представлены в таблице 2.

Таблица 2

$\eta$	1/50	1/10	1/5	1/4
$t_*^{3D}$ , ч	10634	14120	25015	37500
$t_*^{SH}$ , ч	11270	16000	29440	45550
$\Delta$ , %	6,0	13,3	17,7	21,5

Из представленных результатов можно сделать вывод о том, что ползучесть наружного слоя увеличивает время до разрушения. Также видно, что при увеличении толщины наружного слоя погрешность оболочечного решения возрастает.

Некоторые результаты расчетов для  $\eta = 1/4$ , когда деформации ползучести развиваются в двух слоях, показаны на рис. 1-8. Кривые, соответствующие пространственному решению, помечены маркерами.

На рис. 1 изображены графики изменения вдоль оси цилиндра прогиба  $w = u_r(R_0, z, t)$  (радиального перемещения срединной поверхности  $r = R_0$ ) в начальный момент времени  $t = 0$  и в момент  $t = t_*$ . На рис. 2 показано изменение прогиба во времени в центре цилиндра.

На рис. 3 представлены графики изменения вдоль оси цилиндра напряжений  $\sigma_{\varphi\varphi}$  на внутренней поверхности цилиндра, а на рис. 4 – на наружной поверхности. Изменение во времени деформаций ползучести  $p_{\varphi\varphi}$  и напряжений  $\sigma_{\varphi\varphi}$  на внутренней и внешней поверхностях в центре цилиндра показано на рис. 5-8.

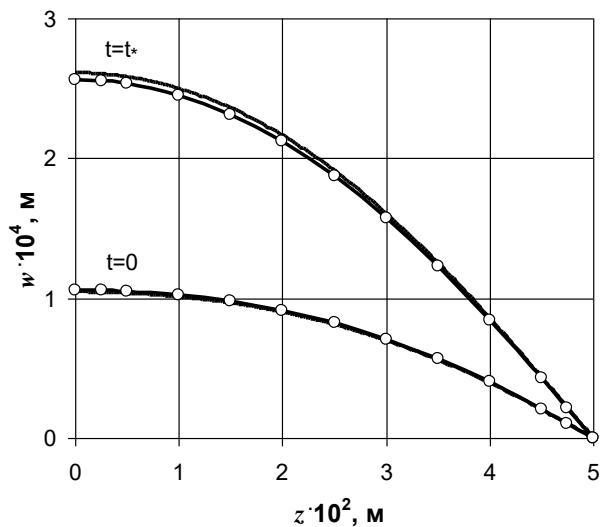


Рис. 1. Изменение прогиба вдоль оси  $z$ .

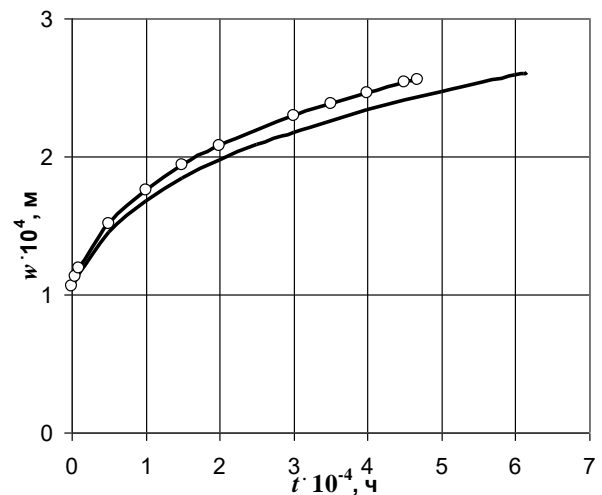


Рис. 2. Изменение прогиба во времени в центре цилиндра

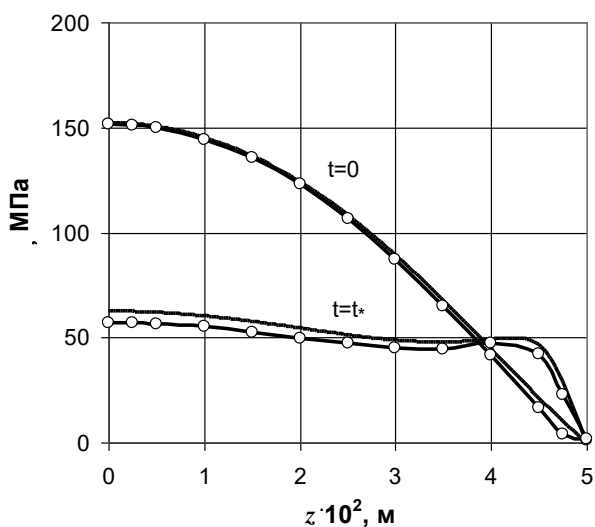


Рис. 3. Окружные напряжения на внутренней поверхности

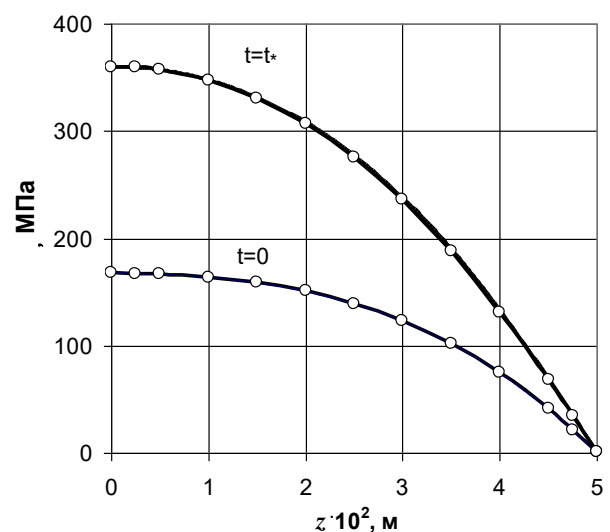


Рис. 4. Окружные напряжения на внешней поверхности

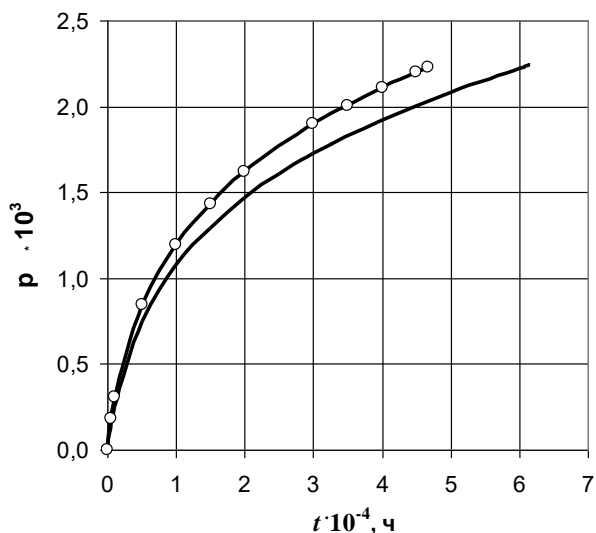


Рис. 5. Деформации ползучести  $p_{\text{вн}}$  на внутренней поверхности в центре цилиндра

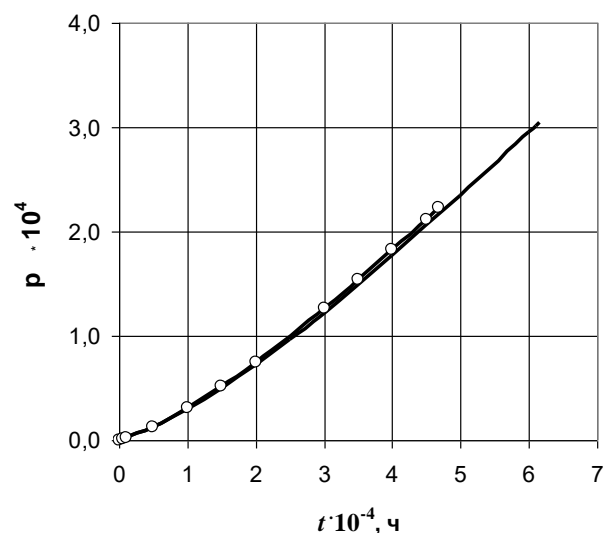


Рис. 6. Деформации ползучести  $p_{\text{вн}}$  на внешней поверхности в центре цилиндра

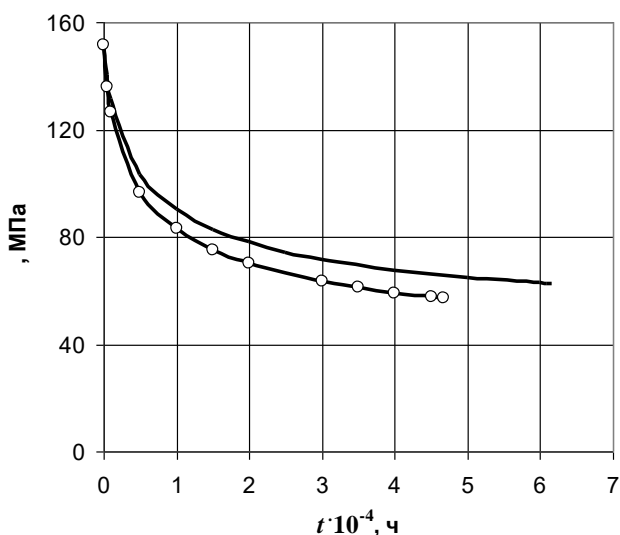


Рис. 7. Окружные напряжения  $\sigma_{\text{вн}}$  на внутренней поверхности в центре цилиндра

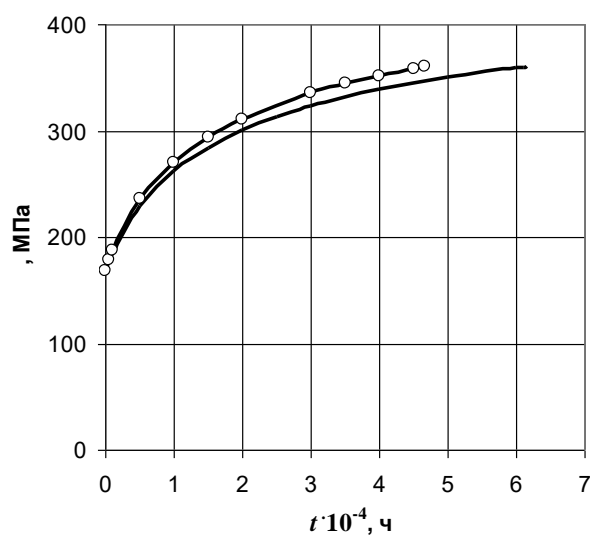


Рис. 8. Окружные напряжения  $\sigma_{\text{вн}}$  на внешней поверхности в центре цилиндра

Из представленных результатов видно, что в начальный момент времени пространственное и оболочечное решения для перемещений, напряжений и деформаций практически совпадают. Далее, при решении задачи ползучести, с ростом времени, отклонение увеличивается, но не превышает 15%, что свидетельствует о достаточно хорошей точности оболочечного решения. Также, учитывая естественный разброс экспериментальных данных, на основе которых определяются константы ползучести в определяющих соотношениях, можно сделать вывод об удовлетворительной точности нахождения времени до разрушения.

### ВЫВОДЫ

Решена задача ползучести и прочности двухслойного цилиндра в рамках пространственной и оболочечной моделей. Исследования проводились при условиях, что внутренний слой работает в условиях ползучести, а наружный деформируется упруго, а также с учетом ползучести в обоих слоях. Получено хорошее согласование результатов пространственного и оболочечного решений для различных соотношений толщин слоев для параметров НДС. Показано, что при увеличении толщины наружного слоя погрешность оболочечного решения возрастает, а ползучесть наружного слоя увеличивает время до разрушения.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Galishin A. Z. Axisymmetric thermoviscoelastoplastic state of thin laminated shells made of a damageable material. *Int. Appl. Mech.* 2008. Vol. 44, No. 4. P. 431–441.
2. Shevchenko Yu. N., Galishin A. Z. Determination of the axially symmetric geometrically nonlinear thermoviscoelastoplastic state of thin layered shells with regard for the damageability of the material. *Journal of Mathematical Sciences.* 2009. Vol. 162, No. 2. P. 216–230.
3. Shevchenko Yu. N., Galishin A. Z., Babeshko M. E. Thermoviscoelastoplastic deformation of compound shells of revolution made of a damageable material. *Int. Appl. Mech.* 2015. Vol. 51, No. 6. P. 607—613.
4. Sklepus S. M. Solution of the Axisymmetric Problem of Creep and Damage for a Piecewise Homogeneous Body with an Arbitrary Shape of a Meridional Section. *Journal of Mathematical Sciences.* 2015. Vol. 205, No. 5. P. 644–658.
5. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. Киев: Наук. думка, 1981. 544 с. (Методы расчета оболочек: В 5 т.; Т. 4).
6. Галишин А. З., Склепус С. Н. Применение оболочечных моделей к расчету ползучести и повреждаемости полых цилиндров. *Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету.* 2015. Вип. 1(26). С. 60–70.
7. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. Москва: Наука, 1966. 752 с.
8. Золочевский А. А., Склепус А. Н., Склепус С. Н. Нелинейная механика деформируемого твердого тела. Харьков: «Бізнес Інвестор Груп», 2011. 720 с.
9. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 552 с.
10. Шевченко Ю. Н., Бабешко М. Е., Терехов Р. Г. Термовязкоупруго-пластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. Киев: Наук. думка, 1992. 329 с.
11. Zolochovsky A., Galishin A., Sklepus S., Parkhomenko L., Gnitko V., Kühhorn A., Kober M., Leyens C. Benchmark creep tests for thermal barrier coating. *Вісник НТУ «ХПИ». Серія: Машинознавство і САПР.* 2013. № 23(996). С. 159–177.
12. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. Москва: Наука, 1974. 312 с.

## REFERENCES

1. Galishin, A. Z. (2008). Axisymmetric thermoviscoelastoplastic state of thin laminated shells made of a damageable material. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 44, No. 4, pp. 431-441.
2. Shevchenko, Yu. N. & Galishin, A. Z. (2009). Determination of the axially symmetric geometrically nonlinear thermoviscoelastoplastic state of thin layered shells with regard for the damageability of the material. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 162, No. 2, pp. 216-230.
3. Shevchenko, Yu. N., Galishin, A. Z. & Babeshko, M. E. (2015). Thermoviscoelastoplastic deformation of compound shells of revolution made of a damageable material. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 51, No. 6, pp. 607-613.
4. Sklepus, S. M. (2015). Solution of the Axisymmetric Problem of Creep and Damage for a Piecewise Homogeneous Body with an Arbitrary Shape of a Meridional Section. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 205, No. 5, pp. 644-658.
5. Grigorenko, Ya. M. & Vasilenko, A. T. (1981). Theory of shells of variable inflexibility. Kiev: Nauk. Dumka, (Metody rascheta obolochek: in 5 vol.; vol.4).
6. Galishin, A. Z. & Sklepus, S. N. (2015). Application of shell models to calculation of creep and damageability of hollow cylinders. *Zbirnik Dniprodzherzinskogo technichnogo un-tu*, Iss. 1(26), pp. 60-70.
7. Rabotnov, Yu. N. (1969). Creep Problems in Structural Members. Moscow: Nauka.
8. Zolochovsky, A. A., Sklepus, A. N. & Sklepus, S. N. (2011). Nonlinear mechanics of deformable solids. Kharkov: Biznes Investor Grup.
9. Rvachev, V. L. (1982). Theory of R-functions and some applications. Kiew: Nauk. dumka.
10. Shevchenko, Yu. N., Babeshko, M. E. & Terehov, R. G. (1992). Thermo-viscoelastic-plastic processes of complex deformation of structural elements. Kiev: Nauk. dumka.
11. Zolochovsky, A., Galishin, A., Sklepus, S., Parkhomenko, L., Gnitko, V., Kühhorn, A., Kober, M. & Leyens, C. (2013). Benchmark creep tests for thermal barrier coating. *Visnik NTU “KHPI”*, No. 23, pp. 159-179.
12. Kachanov, L. M. (1975). Fundamentals of fracture mechanics. Moscow: Nauka.



УДК 539.3

## ВІСЕСИМЕТРИЧНІ ХВИЛІ В КОМПЗИТНИХ НЕСТИСЛИВИХ МАТЕРІАЛАХ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ЗА УМОВИ НЕПОВНОГО КОНТАКТУ МІЖ ШАРАМИ

Глухов А. Ю.

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,  
вул. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна*

ndrew.gl@gmail.com

У рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянуті постановка та метод розв'язку задач про поширення вісесиметричних хвиль у шаруватих композитних нестисливих заздалегідь напружених матеріалах при проковзуванні шарів. Досліджено випадок поширення хвиль вздовж шарів. Отримано дисперсійне рівняння для квазіпоперечних хвиль та його довгохвильове наближення. Досліджено чисельні розв'язки дисперсійного рівняння для матеріалу з пружним потенціалом типу Трелоара.

*Ключові слова: шаруватий композитний нестисливий матеріал, початкові напруження, пружні хвилі, дисперсійне рівняння, довгохвильове наближення.*

## ОСЕСИМЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ В КОМПЗИТНЫХ НЕСЖИМАЕМЫХ МАТЕРИАЛАХ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ ПРИ УСЛОВИИ НЕПОЛНОГО КОНТАКТА МЕЖДУ СЛОЯМИ

Глухов А. Ю.

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,  
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина*

ndrew.gl@gmail.com

В рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянуті постановка та метод рішення задач про поширення осесиметричних волн в шаруватих композитних нестисливих заздалегідь напружених матеріалах при проковзуванні шарів. Досліджено випадок поширення волн вздовж шарів. Отримано дисперсійне рівняння для квазіпоперечних волн та його довгохвильове наближення. Досліджено чисельні рішення дисперсійного рівняння для матеріалу з пружним потенціалом типу Трелоара.

*Ключевые слова: слоистый композитный несжимаемый материал, начальные напряжения, упругие волны, дисперсионное уравнение, длинноволновое приближение.*

## AXISYMMETRIC WAVES IN COMPOSITE INCOMPRESSIBLE MATERIALS WITH INITIAL STRESSES UNDER INCOMPLETE CONTACT BETWEEN LAYERS

Glukhov A. Yu.

*S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine,  
Nesterova str., 3, Kyiv, 03057, Ukraine*

ndrew.gl@gmail.com

In this paper, under the three-dimensional dynamic linearized theory of elasticity for bodies with initial stresses research axisymmetric elastic waves propagation in layered incompressible composite materials with initial stresses.

We consider the composite material which has a periodic structure and consists of two types of layers in alternating. For each type of layer materials and initial stress-strain states are the same. Materials of layers are considered hyperelastic isotropic with an arbitrary structure of elastic potentials.

It is also considered that the initial stress state is homogeneous and for each type of layers occurs following equations  $S_{11}^{0(j)} = S_{22}^{0(j)} \neq S_{33}^{0(j)}$ ;  $j = 1, 2$ .

At the border section of layers only normal to layers stresses and movements are continuous, and all tangential stresses equal zero.

Investigation of elastic axisymmetrical wave propagation in incompressible layered composite materials with initial stresses is reduced to constructing solutions of the equations of motion in meeting the

boundary conditions on the section plane layers and Floquet periodicity conditions. The case of wave propagation along the layers has been considered.

A dispersion equation for quasi-transversal waves and its long-wave approximation have been received. The analytical results are presented in aggregate form for elastic materials with the potential of free form.

The numerical research of solutions has been made for dispersive equations of elastic materials of Treloar type potential. The influence of initial stresses is examined on the propagation of axisymmetric harmonic waves in composite materials.

*Key words: laminated composite incompressible material, initial stresses, elastic waves, dispersive equation, long-wave approximation.*

## ВСТУП

Дослідженням динамічних процесів у тілах з початковими напруженнями, у тому числі і в шаруватих матеріалах, присвячені численні публікації [1-10 та ін.].

Поширення плоских хвиль у шаруватих композитних матеріалах періодичної структури з початковими напруженнями розглядалося у працях [1-6]. Переважна частина досліджень стосовно поширення хвиль у шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями проводилися для повного контакту шарів [1-3, 6]. У статтях [4, 5] метод дослідження плоских пружних хвиль у шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями, викладений у монографії [6], поширений на випадок неповного контакту шарів.

У нашій роботі в рамках тривимірної динамічної лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями на основі зазначеного вище методу [6] проведені дослідження поширення вісесиметричних пружних хвиль у шаруватому композитному нестисливому матеріалі з початковими напруженнями при проковзуванні шарів.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ І МЕТОД РОЗВ'ЯЗКУ

Досліджуються закономірності поширення вісесиметричних гармонічних пружних хвиль у шаруватому композитному матеріалі з початковими напруженнями. Дослідження проводяться в рамках тривимірної динамічної лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями з використанням методів, викладених у монографіях академіка НАН України Гузя О. М. Середовище поширення хвиль – композитний матеріал з початковими напруженнями періодичної структури. Композит складається з двох типів шарів, що чергуються. Матеріали шарів гіперпружні ізотропні з довільною структурою пружного потенціалу. Початкові напружено-деформовані стани є однаковими для кожного типу шарів. Вважаємо початковий напружений стан однорідним і визначаємо його відповідно до формул (1)

$$\begin{aligned} y_n &= \lambda_n^{(1)} x_n^{(1)}; \quad y_n = \lambda_n^{(2)} x_n^{(2)}; \quad \lambda_n^{(j)} = \text{const}; \quad j = 1, 2; \\ y_n &= x_n^{(j)} + u_n^{0(j)}; \quad u_m^{0(j)} = \delta_{nm} (\lambda_n^{(j)} - 1) x_n^{(j)}; \quad m, n = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1)$$

Також приймаємо, що для кожного з шарів мають місце співвідношення (2)

$$S_{11}^{0(j)} = S_{22}^{0(j)} \neq S_{33}^{0(j)}; \quad \lambda_1^{(j)} = \lambda_2^{(j)}; \quad h^{(j)} = \lambda_3^{(j)} h^{(j)}; \quad j = 1, 2. \quad (2)$$

У (1) і (2) індексами в дужках ( $j = 1, 2$ ) відзначені всі величини, що відносяться до шарів різних типів.  $S_n^{0(j)}$  – складові тензора узагальнених напружень Лагранжа,  $h^{(j)}$  – товщина  $j$ -го шару в початковому напружено-деформованому стані,  $h^{(j)}$  – товщина  $j$ -го шару в природному стані,  $\lambda_i^{(j)}$  – коефіцієнти видовження уздовж відповідних вісей.

Будемо вважати, що відбувається повне проковзування між шарами, тобто дотичні напруження на границях розділу шарів рівні нулеві.

У представленнях загальних розв'язків приймаємо залежності (3)

$$\begin{aligned} u_{r'}^{(j)} &= u_{r'}^{(j)}(r', y_3, \tau); \quad u_0^{(j)} \equiv 0; \quad u_3^{(j)} = u_3^{(j)}(r', y_3, \tau); \\ u_4^{(j)} &\equiv p^{(j)} = p^{(j)}(r', y_3, \tau). \end{aligned} \quad (3)$$

Вирази (3) відповідають вісесиметричній задачі і в цьому випадку можна також вважати, що функції, через які записується загальний розв'язок задачі, мають вигляд (4)

$$\Psi^{(j)} \equiv 0; \quad X^{(j)} = X^{(j)}(r', y_3, \tau). \quad (4)$$

Враховуючи (4) для визначення переміщень і напружень при  $y_3 = const$  та функції  $X^{(j)}$  маємо вирази (5), (6) і (7)

$$u_{r'}^{(j)} = -\frac{\partial^2}{\partial r' \partial y_3} X^{(j)}; \quad u_3^{(j)} = \Delta'_1 X^{(j)}; \quad \varrho^{(j)} = \varrho^{(j)}; \quad (5)$$

$$u_4^{(j)} \equiv p^{(j)} = \left[ (\kappa'_{1111} - \kappa'_{1133} - \kappa'_{1313}) \Delta'_1 + \kappa'_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \varrho'^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \frac{\partial}{\partial y_3} X^{(j)};$$

$$Q_{33}^{(j)} = \left[ (\kappa'_{1111} + \kappa'_{3333} - 2\kappa'_{1133} - \kappa'_{1313}) \Delta'_1 + \kappa'_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \varrho'^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \frac{\partial}{\partial y_3} X^{(j)}; \quad (6)$$

$$Q_{3r'}^{(j)} = \left( \kappa'_{1313} \Delta'_1 - \kappa'_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial}{\partial r'} X^{(j)};$$

$$\left[ \left( \Delta'_1 + \xi_2'^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \left( \Delta'_1 + \xi_3'^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) - \frac{\varrho'^{(j)}}{\kappa'_{1331}} \left( \Delta'_1 + \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] X^{(j)} = 0. \quad (7)$$

У співвідношеннях (5) і (6) та рівнянні (7)  $\kappa'^{(j)}$  характеризує механічні властивості шарів композиту, а

$$\xi_{2,3}'^{(j)} = c' \pm \left( c'^2 - \kappa'_{3113} \kappa'_{1331} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad 2\kappa'_{1331} c' = \kappa'_{3333} + \kappa'_{1111} - 2(\kappa'_{1133} + \kappa'_{1313}).$$

Отже, відповідно до викладеного задача зводиться до побудови розв'язків рівнянь (7) за умов неперервності на границях розділу шарів типу (8)

$$\begin{aligned} u_3^{(1)}(0) &= u_3^{(2)}(0); \quad Q_{33}^{(1)}(0) = Q_{33}^{(2)}(0); \\ Q_{3r'}^{(1)}(0) &= 0; \quad Q_{3r'}^{(2)}(0) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

і умов періодичності (9), що відповідають теорії Флоке

$$\begin{aligned} u_3^{(1)(0)}(h^{(1)}) &= u_3^{(2)(0)}(-h^{(2)}); \quad Q_{33}^{(1)(0)}(h^{(1)}) = Q_{33}^{(2)(0)}(-h^{(2)}); \\ Q_{3r'}^{(1)(0)}(h^{(1)}) &= 0; \quad Q_{3r'}^{(2)(0)}(-h^{(2)}) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Розглянемо поширення вісесиметричної хвилі в радіальному напрямку. Визначимо «істинну» фазову швидкість. Прийемо умову (10)

$$X^{(j)}(r', y_3, \tau) = X^{(j)(0)}(y_3) H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \quad C = \omega k^{-1}; \quad j = 1, 2. \quad (10)$$

У (10)  $k$  і  $\omega$  – хвильове число і кругова частота;  $C$  – «істина» фазова швидкість вісесиметричних хвиль;  $H_0^{(1)}(x)$  – функція Ханкеля нульового порядку першого роду, що забезпечує поширення вісесиметричних хвиль, які йдуть «на нескінченність»;  $X^{(j)(0)}(y_3)$  – амплітудна функція. Надалі індексом (0) позначені всі амплітудні величини у представленнях типу (10).

Підставляючи (10) в (5) і (6), для визначення переміщень і напружень отримуємо співвідношення (11) і (12)

$$\begin{aligned} u_{r'}^{(j)} &= u_{r'}^{(j)(0)} \frac{d}{dr'} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \quad u_3^{(j)} = u_3^{(j)(0)} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \\ u_4^{(j)} &\equiv p^{(j)} = p^{(j)(0)} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \\ u_{r'}^{(j)(0)} &= -\frac{d}{dy_3} X^{(j)(0)}(y_3); \quad u_3^{(j)(0)} = -k^2 X^{(j)(0)}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} p^{(j)(0)} &= \left[ -k^2 (\chi'_{1111} - \chi'_{1133} - \chi'_{1313}) + \chi'_{3113} \frac{d^2}{dy_3^2} + \omega^2 \varrho'^{(j)} \right] \frac{\partial}{\partial y_3} X^{(j)(0)}; \\ Q_{33}^{(j)} &= Q_{33}^{(j)(0)} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \quad Q_{3r'}^{(j)} = Q_{3r'}^{(j)(0)} \frac{\partial}{\partial r'} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \\ Q_{33}^{(j)(0)} &= \left[ -k^2 (\chi'_{1111} + \chi'_{3333} - 2\chi'_{1133} - \chi'_{1313}) + \chi'_{3113} \frac{d^2}{dy_3^2} + \omega^2 \varrho'^{(j)} \right] \frac{d}{dy_3} X^{(j)(0)}; \\ Q_{3r'}^{(j)(0)} &= -\left( k^2 \chi'_{1313} + \chi'_{3113} \frac{d^2}{dy_3^2} \right) X^{(j)(0)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Підставляючи (10) в (7), отримуємо рівняння для визначення амплітудної функції  $X^{(j)(0)}$  у формі (13)

$$\left[ \left( \zeta_2'^{(j)2} \frac{d^2}{dy_3^2} - k^2 \right) \left( \zeta_3'^{(j)2} \frac{d^2}{dy_3^2} - k^2 \right) + \frac{\omega^2 \varrho'^{(j)}}{\chi'_{1331}} \left( \frac{d^2}{dy_3^2} - k^2 \right) \right] X^{(j)(0)} = 0. \quad (13)$$

Умови на границі контакту шарів і умови періодичності також запишемо для амплітудних величин у вигляді (14) і (15):

$$\begin{aligned} u_3^{(1)(0)}(0) &= u_3^{(2)(0)}(0); \quad Q_{33}^{(1)(0)}(0) = Q_{33}^{(2)(0)}(0); \\ Q_{3r'}^{(1)(0)}(0) &= 0; \quad Q_{3r'}^{(2)(0)}(0) = 0; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} u_3^{(1)(0)}(h^{(1)}) &= u_3^{(2)(0)}(-h^{(2)}); \quad Q_{33}^{(1)(0)}(h^{(1)}) = Q_{33}^{(2)(0)}(-h^{(2)}); \\ Q_{3r'}^{(1)(0)}(h^{(1)}) &= 0; \quad Q_{3r'}^{(2)(0)}(-h^{(2)}) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Отже, для нестисливого тіла необхідно знайти розв'язок звичайного диференціального рівняння (13), що задовольнить умовам (14) і (15).

Розв'язок рівняння (13) шукаємо у формі (16)

$$X^{(j)(0)}(y_3) = \sum_{m=1}^4 B_m^{(j)} e^{(-1)^m i k \alpha_m^{(j)} \left( y_3 + (-1)^m \frac{1}{2} h^{(j)} \right)}; \quad \tau = \begin{cases} m = 1, 3; \\ m = 2, 4. \end{cases} \quad (16)$$

У (16)  $\alpha_1^{(j)2}$  і  $\alpha_2^{(j)2}$  – корені характеристичного рівняння (17)

$$\chi'_{3113} \alpha^{(j)4} - \alpha^{(j)2} \left[ C^2 \varrho'^{(j)} - \chi'_{3333} - \chi'_{1111} + 2(\chi'_{1133} + \chi'_{1313}) \right] - (C^2 \varrho'^{(j)} - \chi'_{1331}) = 0. \quad (17)$$

### КВАЗИПОПЕРЕЧНА ХВИЛЯ УЗДОВЖ ВІСІ $Or'$ , ПОЛЯРИЗОВАНА У ПЛОЩИНІ $r'Oy_3$

Для нестисливого матеріалу має сенс розглядати квазіпоперечну хвилю, яка поширюється вздовж вісі  $Or'$  і поляризована у площині  $r'Oy_3$ . Для розглянутої хвилі переміщення  $u_{r'}^{(j)}$  будуть антисиметричні і  $u_3^{(j)}$  симетричні щодо середини відповідних шарів.

Для розглянутого випадку в поданні розв'язку у формі (16) для двох сусідніх шарів прийемо залежності (18):

$$B_1^{(j)} = B_2^{(j)}; \quad B_3^{(j)} = B_4^{(j)}. \quad (18)$$

Враховуючи позначення (11) і (12) і підставивши (16) і (18) в умови (14) і (15), отримуємо однорідну систему алгебраїчних рівнянь, з умови існування нетривіальних рішень якої слідує дисперсійне рівняння у вигляді (19)

$$\begin{aligned} & (\alpha_2^{(2)2} - \alpha_1^{(2)2}) \kappa_{3113}^{(2)} \left[ \alpha_1^{(1)} \left( \kappa_{1313}^{(1)} - \alpha_2^{(1)2} \kappa_{3113}^{(1)} \right) \left( C_{S_{y_3}}^2 \varrho^{(1)} - \kappa_{1111}^{(1)} - \kappa_{3333}^{(1)} + 2\kappa_{1133}^{(1)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \kappa_{1313}^{(1)} - \alpha_1^{(1)2} \kappa_{3113}^{(1)} \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} k \alpha_1^{(1)} h^{(1)} - \alpha_2^{(1)} \left( \kappa_{1313}^{(1)} - \alpha_1^{(1)2} \kappa_{3113}^{(1)} \right) \left( C_{S_{y_3}}^2 \varrho^{(1)} - \kappa_{1111}^{(1)} - \kappa_{3333}^{(1)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\kappa_{1133}^{(1)} + \kappa_{1313}^{(1)} - \alpha_2^{(1)2} \kappa_{3113}^{(1)} \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} k \alpha_2^{(1)} h^{(1)} \right] - \left( \alpha_2^{(1)2} - \alpha_1^{(1)2} \right) \kappa_{3113}^{(1)} \left[ \alpha_2^{(2)} \times \right. \\ & \left. \times \left( \kappa_{1313}^{(2)} - \alpha_1^{(2)2} \kappa_{3113}^{(2)} \right) \left( C_{S_{y_3}}^2 \varrho^{(2)} - \kappa_{1111}^{(2)} - \kappa_{3333}^{(2)} + 2\kappa_{1133}^{(2)} + \kappa_{1313}^{(2)} - \alpha_2^{(2)2} \kappa_{3113}^{(2)} \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} k \alpha_2^{(2)} h^{(2)} \right. \\ & \left. - \alpha_1^{(2)} \left( \kappa_{1313}^{(2)} - \alpha_2^{(2)2} \kappa_{3113}^{(2)} \right) \times \right. \\ & \left. \times \left( C_{S_{y_3}}^2 \varrho^{(2)} - \kappa_{1111}^{(2)} - \kappa_{3333}^{(2)} + 2\kappa_{1133}^{(2)} + \kappa_{1313}^{(2)} - \alpha_1^{(2)2} \kappa_{3113}^{(2)} \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} k \alpha_1^{(2)} h^{(2)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Для довгохвильового (низькочастотного) наближення, обмежуючись одночленною апроксимацією, отримаємо рівняння (20)

$$\begin{aligned} C_{S_{y_3}}^2 = & \left\{ h^{(1)} \kappa_{3113}^{(2)} \left[ \kappa_{1313}^{(1)} \left( \kappa_{1111}^{(1)} + \kappa_{3333}^{(1)} - \kappa_{1133}^{(1)} \right) - 2\kappa_{1331}^{(1)} \kappa_{3113}^{(1)} \right] + \right. \\ & \left. + h^{(2)} \kappa_{3113}^{(1)} \left[ \kappa_{1313}^{(2)} \left( \kappa_{1111}^{(2)} + \kappa_{3333}^{(2)} - \kappa_{1133}^{(2)} \right) - 2\kappa_{1331}^{(2)} \kappa_{3113}^{(2)} \right] \right\} \times \\ & \times \left[ \varrho^{(1)} h^{(1)} \kappa_{3113}^{(2)} \left( \kappa_{1313}^{(1)} - \kappa_{3113}^{(1)} \right) + \varrho^{(2)} h^{(2)} \kappa_{3113}^{(1)} \left( \kappa_{1313}^{(2)} - \kappa_{3113}^{(2)} \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Аналіз рівнянь (19) і (20) свідчить, що при поширенні хвиль відбувається взаємодія між шарами композиту.

### АНАЛІЗ ЧИСЛОВИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Дисперсійне співвідношення (19) отримане для пружного потенціалу довільної форми. Для проведення числового аналізу конкретизуємо вигляд пружного потенціалу. Розглянемо закономірності впливу початкових напружень на швидкість поширення квазіпоперечних хвиль у композитному високоеластичному матеріалі в рамках потенціалу Трелоара [6]

$$w^{(j)} = 2c_{10}^{(j)} A_1^{(j)},$$

де  $c_{10}^{(j)}$  – пружна сталаю  $A_1^{(j)}$  – алгебраїчний інваріант.

Для складових тензора  $\kappa^{(j)}$  отримаємо

$$\begin{aligned} \kappa_{1111}^{(j)} &= \lambda_1^{(j)2} \left( -2p_0^{(j)} \lambda_1^{(j)-2} + S_{11}^{0(j)} \right); \quad \kappa_{3113}^{(j)} = \lambda_3^{(j)2} \left( -p_0^{(j)} \lambda_3^{(j)-2} + S_{33}^{0(j)} \right); \\ \kappa_{3333}^{(j)} &= \lambda_3^{(j)2} \left( -2p_0^{(j)} \lambda_3^{(j)-2} + S_{33}^{0(j)} \right); \quad \kappa_{1313}^{(j)} = \lambda_1^{(j)} \lambda_3^{(j)} \left( -p_0^{(j)} \lambda_1^{(j)-1} \lambda_3^{(j)-1} + S_{33}^{0(j)} \right); \\ \kappa_{1331}^{(j)} &= \lambda_1^{(j)2} \left( -p_0^{(j)} \lambda_1^{(j)-2} + S_{11}^{0(j)} \right); \quad \kappa_{1133}^{(j)} = 0. \end{aligned}$$

Розрахунки проведемо при початковому стані

$$\begin{aligned} S_{11}^{0(j)} &= S_{22}^{0(j)} \neq 0; \quad S_{33}^{0(j)} = 0; \\ \lambda^{(j)} &= \lambda_1^{(j)} = \lambda_2^{(j)}; \quad \lambda_3^{(j)} = \lambda^{(j)-2} \end{aligned}$$

та наступних співвідношеннях механічних характеристик шарів композиту

$$c_{10}^{(1)}/c_{10}^{(2)} = 5; \quad \rho^{(2)}/\rho^{(1)} = 0,7.$$

На рисунках введені такі позначення:  $C/C_s^{0(2)}$  – безрозмірна швидкість поширення хвилі в шаруватому композитному матеріалі,  $\bar{h}$  – приведена частота ( $\bar{h} = k_s^{0(2)}h^{(2)}$ ),  $k_s^{0(2)}$  – хвильове число,  $C_s^{0(2)}$  – швидкість поперечних хвиль в ізотропному матеріалі другого шару без початкових напружень,  $m$  – параметр шаруватості ( $m = h^{(1)}/h^{(2)}$ ).

На рис. 1 показана залежність безрозмірної швидкості поширення хвилі в шаруватому композитному матеріалі  $C/C_s^{0(2)}$  від наведеної частоти  $\bar{h}$  для  $m=1$  для перших п'яти мод. Наведений на рис. 1 випадок відповідає ненапруженому початковому стану.

На рис. 2-6 показані відповідні моди для різних початкових напружень у другому шарі композиту.

Аналізуючи вплив початкових напружень на фазові швидкості, можна зробити такі висновки:

- початкові напруження суттєво впливають на фазові швидкості вісесиметричних хвиль;
- особливо значний вплив початкові напруження мають на фазову швидкість хвиль, що зароджуються;
- як правило, початкові напруження змінюють значення критичних частот;
- залежність фазової швидкості від початкових напружень для кожної моди визначається діапазоном частот;
- існують частоти, за яких початкові напруження не суттєво впливають (або взагалі не впливають) на значення фазової швидкості;
- для розглянутого варіанту початкового стану фазова швидкість значно більше реагує на розтягнення другого шару, ніж на стискання.

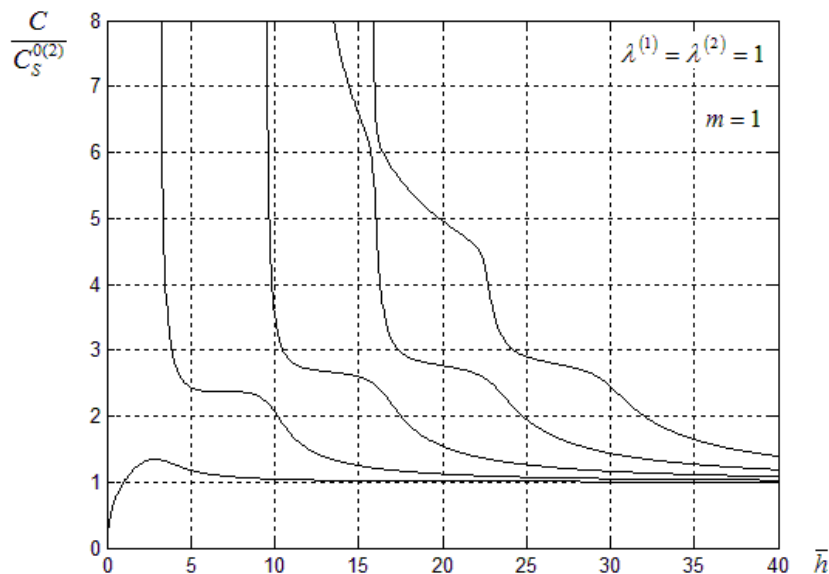


Рис. 1. Залежність фазової швидкості від частоти при ненапруженому початковому стані

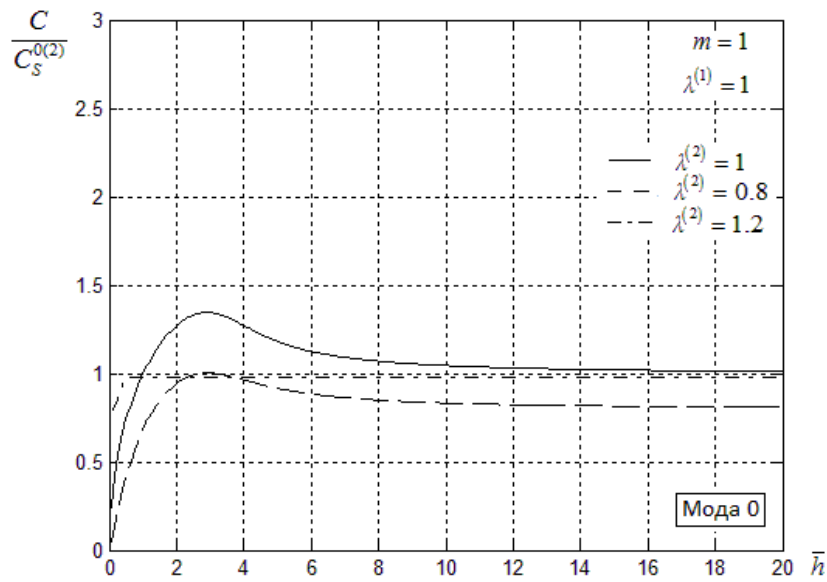


Рис. 2. Залежність фазової швидкості від частоти (мода 0)

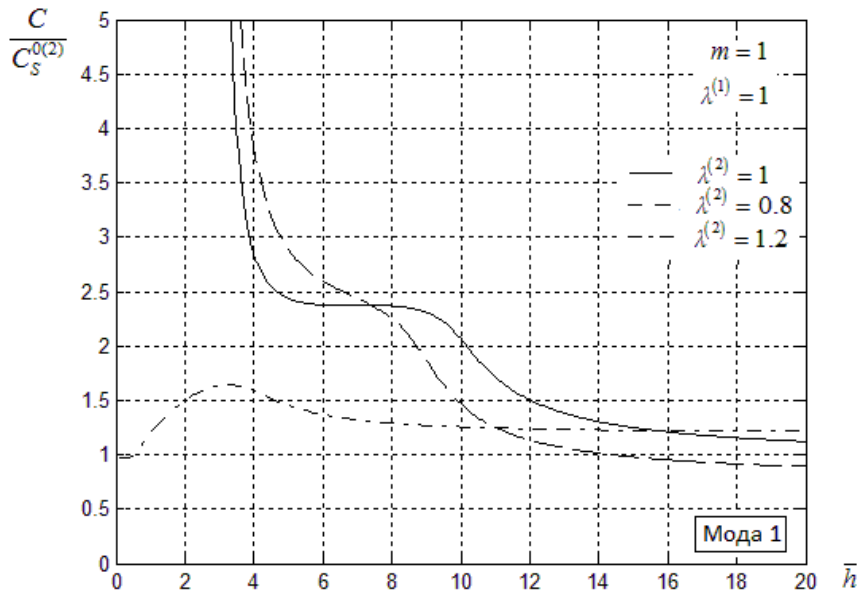


Рис. 3. Залежність фазової швидкості від частоти (мода 1)

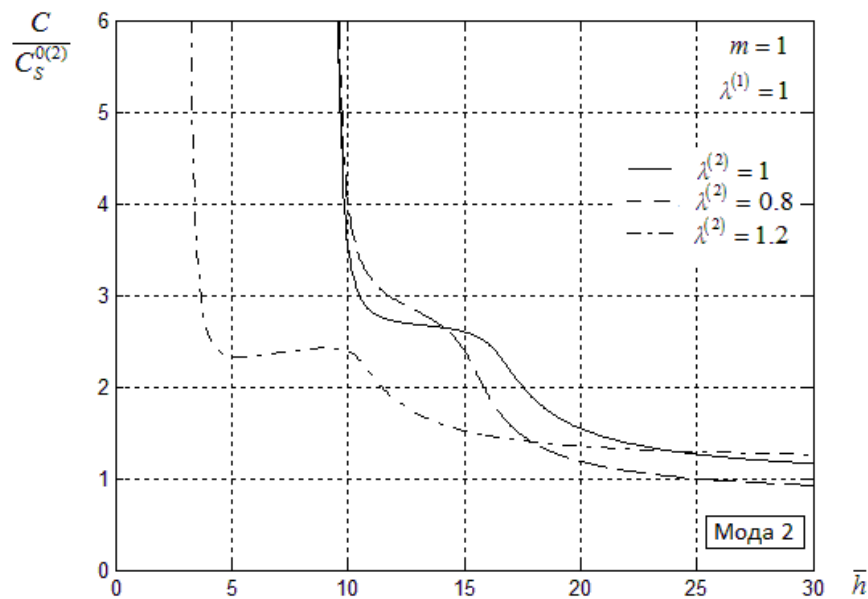


Рис. 4. Залежність фазової швидкості від частоти (мода 2)

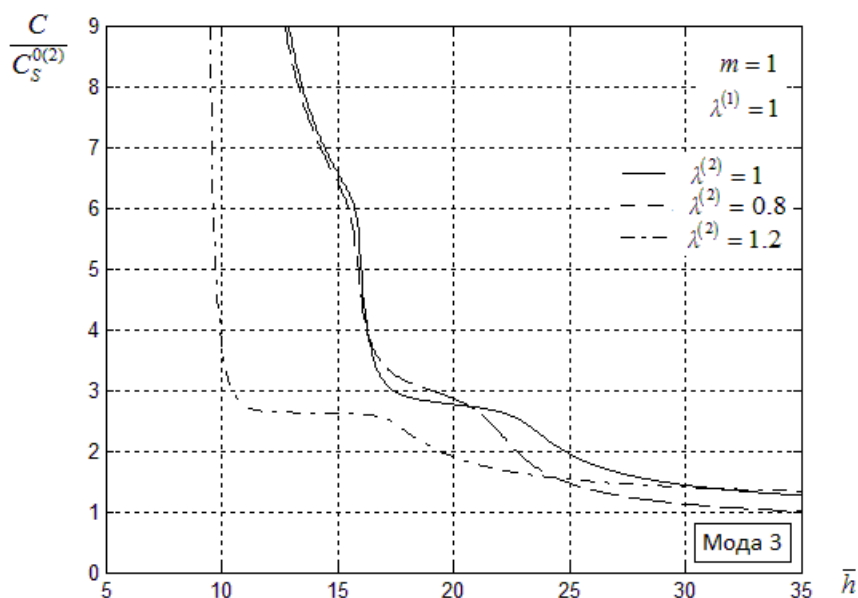


Рис. 5. Залежність фазової швидкості від частоти (мода 3)

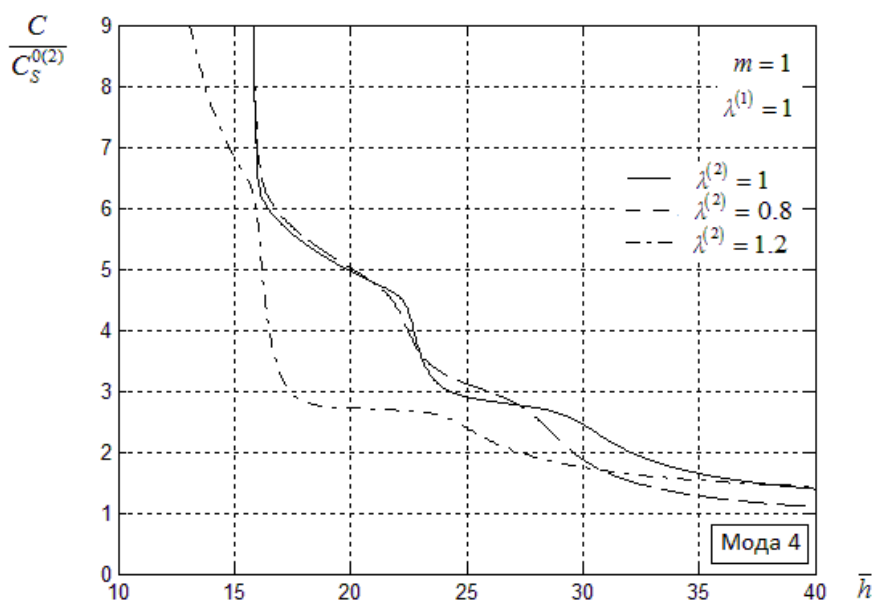


Рис. 6. Залежність фазової швидкості від частоти (мода 4)

## ВИСНОВКИ

У рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянуті постановка та метод розв'язку задачі про поширення вісесиметричних хвиль у шаруватому нестисливому матеріалі з початковими напруженнями при проковзуванні шарів. Досліджено випадок поширення хвиль вздовж шарів. Отримані дисперсійні рівняння для квазіпоперечних хвиль та їх довгохвильові наближення. Для матеріалу з пружним потенціалом типу Трелоара проведені чисельні дослідження і аналіз отриманих результатів.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н., Кхань Л. М. Распространение волн в композитных слоистых материалах с большими начальными деформациями. *Прикл. механика*. 1976. 12, № 1. С. 3–11.
2. Гузь А. Н., Ситенок Н. А., Жук А. П. Осесимметричные упругие волны в слоистых сжимаемых композитных материалах с начальными напряжениями. *Прикл. механика*. 1984. 20, № 7. С. 20–30.
3. Кхань Л. М. Распространение волн вдоль слоев в слоистых сжимаемых материалах с начальными деформациями. *Прикл. механика*. 1977. 13, № 9. С. 21–26.
4. Панасюк О. М. Про поширення хвиль в шаруватих композитних стисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів. *Доп. НАН України*. 2010. № 1. С. 65–70.
5. Панасюк О. Н. Распространение квазіпоперечных волн в слоистых материалах с начальными напряжениями с учетом проскальзывания. *Прикл. механика*. 2011. 47, № 3. С. 59–66.



6. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. Киев: А.С.К., 2004. 672 с.
7. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. Германия: Lambert Academic Publishing, 2015. 468 с.
8. Гузь А. Н., Жук А. П., Махорт Ф. Г. Волны в слое с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка, 1976. 104 с.
9. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. *Прикл. механика*. 2002. 38, № 1. С. 35–78.
10. Бабич С. Ю., Гузь А. Н., Жук А. П. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. *Прикл. механика*. 1979. 15, № 4. С. 3–23.

### REFERENCES

1. Guz', A. N. & Khanh, L. M. (1976). Wave propagation in composite layered materials with large initial deformations. *Soviet Applied Mechanics*, Vol. 12, Iss. 1, pp. 1-7.
2. Guz', A. N., Sitenok, N. A. & Zhuk, A. P. (1984). Axially symmetric elastic waves in a laminated compressible composite material with initial stresses. *Soviet Applied Mechanics*, Vol. 20, Iss. 7, pp. 589-596.
3. Khanh L. M. (1977). Wave propagation along layers in initially strained laminated compressible materials. *Soviet Applied Mechanics*, Vol. 13, Iss. 9, pp. 868-873.
4. Panasyuk, O. M. (2010). On the propagation of waves in laminated composite compressible materials with initial stresses at a slipping of layers. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, No. 1, pp. 65-70 (in Ukrainian).
5. Panasyuk, O. N. (2011). Propagation of quasishear waves in prestressed materials with unbonded layers. *International Applied Mechanics*, Vol. 47, Iss. 3, pp. 276-283.
6. Guz', A. N. (2004). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. Kiev: "A.S.K" (in Russian).
7. Guz', A., Babich, S. & Glukhov, Yu. (2015). Mixed problems for elastic foundation with initial stresses. Germany: Lambert Academic Publishing (in Russian).
8. Guz', A. N., Zhuk, A. P. & Makhort, F. G. (1986). Waves in a Layer with Initial Stresses. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
9. Guz', A. N. (2002). Elastic Waves in Bodies with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*, Vol. 38, Iss. 1, pp. 23-59.
10. Babich, S. Yu., Guz', A. N. & Zhuk, A. P. (1979). Elastic waves in bodies with initial stresses. *Soviet Applied Mechanics*, Vol. 15, Iss. 4, pp. 277-291.

UDC 539.3

## AN ARC CRACK AT THE INTERFACE BETWEEN TWO ELECTROSTRICTIVE MATERIALS

Hodes A. Yu., Loboda V. V.

*Dnepropetrovsk National University,  
Gagarina, 72, Dnepr, 49050, Ukraine*

alinegg@mail.ru, lobvv@ua.fm

Exact analytical solution for an electrostrictive plane with circular electrostrictive inclusion and an arc crack at the materials interface under the influence of general mechanical and electrical loadings at infinity is obtained. It is assumed that both materials are isotropic and linear elastic, the crack faces don't interact with each other and are permeable to an electric field. The problem is considered as an uncoupled problem of electroelasticity. Solution of electrostatics problem is obtained by complex potentials method. Boundary problem of electroelasticity for four complex potentials that are analogues of Kolosov-Muskhelishvili potentials is reduced to the problem of linear relationship at the crack. Unknown constants in general solution of this problem are determined from the boundary conditions at infinity and the restrictions imposed on stresses and displacements. Analytical expressions for the stress-strain state in the whole plane, in particular for the crack opening, normal and shear stresses at materials interface and the stress intensity factors at the crack tips, are found.

*Key words: electrostriction, arc crack, problem of linear relationship, stress intensity factor.*

## ДУГОВАЯ ТРЕЩИНА НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ЭЛЕКТРОСТРИКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Годес А. Ю., Лобода В. В.

*Днепропетровский национальный университет,  
просп. Гагарина, 72, г. Днепр, 49050, Украина*

alinegg@mail.ru, lobvv@ua.fm

Получено точное аналитическое решение для электрострикционной плоскости с круговым электрострикционным включением и дуговой трещиной на границе раздела материалов под действием произвольных механических и электрических нагрузок на бесконечности. Принимается, что оба материала являются изотропными и линейно упругими, а берега трещины не взаимодействуют друг с другом и являются проницаемыми для электрического поля. Задача рассматривается как несвязанная задача электроупругости. Решение задачи электростатики получено с помощью метода комплексных потенциалов. Граничная задача электроупругости для четырех комплексных потенциалов, являющихся аналогами потенциалов Колосова-Мухелишвили, сведена к задаче линейного сопряжения на трещине. Неизвестные константы из общего решения этой задачи определены из граничных условий на бесконечности и ограничений, наложенных на напряжения и перемещения. Найдены аналитические выражения для напряженно-деформированного состояния всей плоскости, в частности для раскрытия трещины, нормальных и касательных напряжений на границе раздела сред и коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах трещины.

*Ключевые слова: электрострикция, дуговая трещина, задача линейного сопряжения, коэффициент интенсивности напряжений.*

## ДУГОВА ТРІЩИНА НА МЕЖІ ПОДІЛУ ДВОХ ЕЛЕКТРОСТРИКЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

Годес А. Ю., Лобода В. В.

*Дніпропетровський національний університет,  
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49050, Україна*

alinegg@mail.ru, lobvv@ua.fm

Отримано точний аналітичний розв'язок для електрострикційної площини з круговим електрострикційним включенням і дуговою тріщиною на межі поділу матеріалів під дією довільних механічних та електричних навантажень на нескінченності. Вважається, що обидва матеріали є ізотропними та лінійно пружними, а береги тріщини не взаємодіють один з одним та є проникними для електричного поля. Задача розглядається як незв'язана задача електропружності. Розв'язок задачі електростатики отримано за допомогою методу комплексних потенціалів. Граничну задачу електропружності для чотирьох комплексних потенціалів, які є аналогами потенціалів Колосова-Мухелішвілі, зведено до задачі лінійного спряження на тріщині. Невідомі константи з загального розв'язку цієї задачі визначено з граничних умов на нескінченності та обмежень, що накладено на напруження і переміщення. Знайдено аналітичні вирази для напружено-деформованого стану всієї площини, зокрема для розкриття тріщини, нормальних і дотичних напружень на границі поділу середовищ та коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершинах тріщини.

*Ключові слова: електрострикція, дугова тріщина, задача лінійного спряження, коефіцієнт інтенсивності напружень.*

### INTRODUCTION

Electrostrictive materials, in particular ferroelectric relaxors, become widespread in modern technologies because for these relaxors electrostrictive effect is close to the piezoelectric one. As described in [1], cracks may appear in electrostrictive materials under the action of large electrical and mechanical stresses. This causes the importance of studying of cracked electrostrictive materials behavior under the action of electrical and mechanical loads.

In general case constitutive equations of electrostrictive materials are quite complex and require solving of the coupled electroelasticity problem that is associated with considerable mathematical difficulties. However, in the case of small deformations the constitutive equations can be simplified so that the electroelasticity problem becomes uncoupled. For this case an analogue of Kolosov-Muskhelishvili equations [2] that takes into account electrostriction was developed in [3]. The electrostrictive body with an arc crack under the action of electrical load at infinity parallel to the

crack axis of symmetry is analyzed in the article [4]. The homogeneous electrostrictive plane with an arc crack under the action of arbitrary electrical and mechanical loads at infinity is considered in [5] and [6]. Stress intensity factors for electrostrictive fibrous composite with an arc-shaped permeable interface crack under electric loadings are found in [7]. Nevertheless, general stress-strain state, especially crack opening, of electrostrictive composite with an arc interface crack under the action of arbitrary electrical and mechanical loadings has not been considered yet. Thereby important point related to the possible appearance of the crack faces contact zones has not been also investigated.

Much more works are devoted to investigation of arc cracks in electrically passive materials. Firstly, an arc crack in elastic plane was considered by Muskhelishvili [2]. His method was extended to the case of different materials by England [8]. Method designed by England was used for investigation of interfacial arc crack under the action of arbitrary loading at infinity [9] and at the crack [10]. Partially debonded circular inclusion was also considered by means of finite elements method in [11]. Stress intensity factors of arc crack between homogeneous cylinder and its coating are obtained from system of singular integral equations in [12]. A plane containing the system of partially debonded circular inclusions is considered in [13] using superposition principle and general displacement solution.

A contact problem for the crack in a homogeneous plane [14] and for the crack between matrix and inclusion [15] was firstly considered by Chao and Laws. A contact problem for interfacial arc crack under the action of arbitrary loading at infinity was resolved using singular integral equations in [16]. Closure of an arc cracks in homogeneous material and its influence on stress intensity factors are analyzed in [17] using boundary elements method. Contact zones that arise in vicinity of interfacial arc crack tips are investigated also in [18] and [19] using boundary elements method.

In the present article an electrostrictive plane with circular electrostrictive inclusion and an arc crack at materials interface under the influence of arbitrary mechanical and electrical loadings at infinity is considered. Electrostatics boundary problem for three unknown complex potentials is resolved by expanding these functions in Laurent series. Boundary problem of electroelasticity for four complex potentials that are analogues of Kolosov-Muskhelishvili potentials is reduced to the problem of linear relationship using the method developed by England [8]. Solution of this problem is obtained by well-known methods of analytical function theory described in [2] and [20]. The unknown constants in general solution of the problem of linear relationship are found from boundary conditions at infinity, displacements uniqueness condition and finiteness of displacements and stresses at origin.

Analytical expressions for stresses and displacements at the whole plane are obtained, and also the formulas for crack opening and stress intensity factors at the crack tips are found. Crack opening, normal and shear stresses at materials interface and stress intensity factors at the crack tips are found for various material constants and loading at infinity. The figures that demonstrate the influence of different parameters on the crack opening, stresses and the stress intensity factors are presented.

### FORMULATION OF THE PROBLEM

Infinite plane with a circular inclusion of radius  $R$  bonded along the whole interface except of the arc  $r = R$ ,  $|\theta| < \beta$  is considered. We assume that crack faces cannot interact with each other and are permeable to electric field. Mechanical properties of inclusion and matrix are characterized by shear modules  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  and Poisson's ratios  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  respectively. Electrostrictive properties of inclusion are determined by constants  $a_1^{(1)}$  and  $a_2^{(1)}$ , and the matrix electrostrictive properties are determined by constants  $a_1^{(2)}$  and  $a_2^{(2)}$  [21]. The dielectric permittivities of inclusion, matrix and crack filler are denoted as  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  and  $\varepsilon_c$ , accordingly. Principal stresses  $N_1$  and  $N_2$  act at infinity; the angle

between the direction of  $N_1$  and the abscissa axis is  $\alpha_N$ . Also the electric field with intensity vector of magnitude  $E_0$  that forms the angle  $\alpha$  with abscissa axis is applied at infinity (Fig. 1).

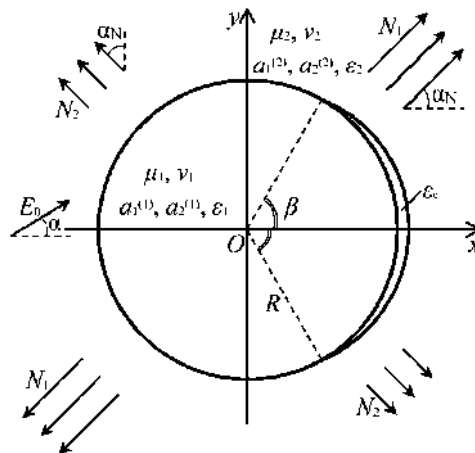


Fig. 1

Analogs of Kolosov-Muskhelishvili equations for electrostrictive materials are [3, 21]

$$2\mu_j(u_r^{(j)} + iu_\theta^{(j)}) = e^{-i\theta} \left( \kappa_j \varphi_j(z) - z\varphi_j'(z) - \psi_j(z) + \chi_j \overline{W_j(z)} - \frac{k_j}{2} w_j(z) \overline{w_j'(z)} \right), \quad (1)$$

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{(j)} + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(j)} = \varphi_j'(z) + \overline{\varphi_j'(z)} - \bar{z}\varphi_j''(z) - \frac{\bar{z}}{z}\psi_j''(z) + \frac{k_j}{2} \left( w_j'(z) \overline{w_j'(z)} - \frac{\bar{z}}{z} w_j(z) \overline{w_j''(z)} \right), \quad (2)$$

$$\sigma_{rr}^{M(j)} + i\sigma_{r\theta}^{M(j)} = \frac{\epsilon_j}{2} \frac{\bar{z}}{z} \overline{W_j'(z)}, \quad (3)$$

where  $j=1$  refers to area  $r < R$  and  $j=2$  refers to area  $r > R$ ;  $\tilde{\sigma}_{ks}^{(j)} = \sigma_{ks}^{(j)} + \sigma_{ks}^{M(j)}$  are pseudo total stresses [4];  $w_j'(z)$  are electrostatic complex potentials;  $W_j'(z) = [w_j'(z)]^2$ ;  $\chi_j = \frac{a_1^{(j)} - 2\epsilon_j}{4}$ ;

$$\kappa_j = 3 - 4\nu_j, \quad k_j = -\frac{(1 - 2\nu_j)(a_1^{(j)} + 2a_2^{(j)})}{4(1 - \nu_j)} \quad \text{for plane strain and} \quad \kappa_j = \frac{3 - \nu_j}{1 + \nu_j},$$

$$k_j = -\frac{a_1^{(j)}(1 - \nu_j) + 2a_2^{(j)}(1 - 2\nu_j)}{4} \quad \text{for plane stress [21].}$$

Boundary conditions for displacement and stresses at the interface are the following [4]:

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{(1)} + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(1)} = \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)} + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(2)}, \quad u_r^{(1)} + iu_\theta^{(1)} = u_r^{(2)} + iu_\theta^{(2)} \quad \text{for } r = R, \quad \beta < |\theta| \leq \pi, \quad (4)$$

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{(1)} + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(1)} = \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)} + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(2)} = \frac{\epsilon_c}{2} \frac{\bar{z}}{z} \overline{W_c'(z)} \quad \text{for } r = R, \quad |\theta| < \beta, \quad (5)$$

where  $w_c'(z)$  is an electrostatic complex potential of the crack,  $W_c'(z) = [w_c'(z)]^2$ . The boundary conditions at infinity can be presented as

$$\sigma_{rr}^{(2)} + i\sigma_{r\theta}^{(2)} = \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{N_1 - N_2}{2} e^{2i(\alpha_N - \theta)} \quad \text{for } r \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Electrostatic complex potentials  $w_1'(z)$ ,  $w_2'(z)$  and  $w_c'(z)$  are determined by boundary problem of electrostatics which solution is given in the next section.

### BOUNDARY PROBLEM OF ELECTROSTATICS

The equations of electrostatics are as follows [22, 23]:

$$\Delta\varphi_1 = 0 \quad \text{for } r < R, \quad \Delta\varphi_2 = 0 \quad \text{for } r > R, \quad \Delta\varphi_c = 0 \quad \text{for } r = R, \quad |\theta| \leq \beta, \quad (7)$$

$$\mathbf{E}^{(1)} = -\nabla\varphi_1, \quad \mathbf{E}^{(2)} = -\nabla\varphi_2, \quad \mathbf{E}^{(c)} = -\nabla\varphi_c, \quad (8)$$

$$\mathbf{D}^{(1)} = \varepsilon_1\mathbf{E}^{(1)}, \quad \mathbf{D}^{(2)} = \varepsilon_2\mathbf{E}^{(2)}, \quad \mathbf{D}^{(c)} = \varepsilon_c\mathbf{E}^{(c)}, \quad (9)$$

where  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_c$  are the potentials of electrostatic field,  $\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{E}^{(2)}, \mathbf{E}^{(c)}$  are the intensities of electrostatic field,  $\mathbf{D}^{(1)}, \mathbf{D}^{(2)}, \mathbf{D}^{(c)}$  are the electric displacements in inclusion, matrix and crack filler respectively.

Electrostatic boundary condition at infinity are

$$\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{i}_1 E_0 \cos\alpha + \mathbf{i}_2 E_0 \sin\alpha \quad \text{for } r \rightarrow \infty, \quad (10)$$

and electrostatic boundary conditions on the interface have the form [22, 1–4]

$$\mathbf{D}^{(1)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{D}^{(2)} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{E}^{(1)} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{E}^{(2)} \cdot \mathbf{t} \quad \text{for } r = R, \quad \beta < |\theta| \leq \pi, \quad (11)$$

$$\mathbf{D}^{(1)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{D}^{(2)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{D}^{(c)} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{E}^{(1)} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{E}^{(2)} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{E}^{(c)} \cdot \mathbf{t} \quad \text{for } r = R, \quad |\theta| \leq \beta, \quad (12)$$

where  $\mathbf{n} = \mathbf{i}_1 \cos\theta + \mathbf{i}_2 \sin\theta$  is the vector of outward unit normal to the circle  $r = R$  and  $\mathbf{t} = -\mathbf{i}_1 \sin\theta + \mathbf{i}_2 \cos\theta$  is unit vector tangent to this circle.

Complex potentials  $w_1'(z), w_2'(z)$  and  $w_c'(z)$  are determined as

$$E_x^{(1)} + iE_y^{(1)} = \overline{w_1'(z)} \quad \text{for } r < R, \quad E_x^{(2)} + iE_y^{(2)} = \overline{w_2'(z)} \quad \text{for } r > R,$$

$$E_x^{(c)} + iE_y^{(c)} = \overline{w_c'(z)} \quad \text{for } r = R, \quad |\theta| \leq \beta,$$

where functions  $w_1'(z), w_2'(z)$  and  $w_c'(z)$  are analytical in the correspondent areas. This choice of unknown functions allows satisfy Laplace equations (7) completely.

As the boundary conditions (11)-(12) are formulated for  $z = Re^{i\theta}$ , they may be written by presenting of complex potentials in the following way:

$$\varepsilon_2 \operatorname{Re}[zw_2'(z)] = \varepsilon_1 \operatorname{Re}[zw_1'(z)], \quad \operatorname{Im}[zw_2'(z)] = \operatorname{Im}[zw_1'(z)] \quad \text{for } r = R, \quad |\theta| \leq \pi. \quad (13)$$

$$\varepsilon_c \operatorname{Re}[zw_c'(z)] = \varepsilon_1 \operatorname{Re}[zw_1'(z)], \quad \operatorname{Im}[zw_c'(z)] = \operatorname{Im}[zw_1'(z)] \quad \text{for } r = R, \quad |\theta| \leq \beta. \quad (14)$$

It follows from boundary condition at infinity (10) that

$$w_2'(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} E_0 e^{-i\alpha}. \quad (15)$$

Thereby boundary problem of electrostatics is reduced to determination of three unknown complex potentials  $w_1'(z), w_2'(z)$  and  $w_c'(z)$  that are analytical in correspondent areas from boundary conditions (13)-(15). Unknown coefficients of Laurent series for functions  $w_1'(z), w_2'(z)$  and  $w_c'(z)$  are determined from these boundary conditions. Thus, the electrostatic potentials are given in the following way:

$$w_1'(z) = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 e^{-i\alpha}, \quad w_2'(z) = E_0 \left( e^{-i\alpha} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} e^{i\alpha} \frac{R^2}{z^2} \right),$$

$$w'_c(z) = E_0 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_c} \left( \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_c}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} e^{-i\alpha} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_c}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} e^{i\alpha} \frac{R^2}{z^2} \right). \quad (16)$$

### PROBLEM OF LINEAR RELATIONSHIP

Functions  $\phi(z)$  and  $\omega(z)$  are introduced to satisfy boundary conditions at electrostrictive materials interface (4) by the formulas

$$\phi(z) = \begin{cases} \mu_2 \kappa_1 \varphi_1(z) + \mu_1 z \bar{\varphi}'_2 \left( \frac{R^2}{z} \right) + \mu_1 \bar{\psi}'_2 \left( \frac{R^2}{z} \right) - \mu_1 \chi_2 \bar{W}'_2 \left( \frac{R^2}{z} \right) + \frac{1}{2} \mu_1 k_2 w_2(z) \bar{w}'_2 \left( \frac{R^2}{z} \right), & |z| < R, \\ \mu_1 \kappa_2 \varphi_2(z) + \mu_2 z \bar{\varphi}'_1 \left( \frac{R^2}{z} \right) + \mu_2 \bar{\psi}'_1 \left( \frac{R^2}{z} \right) - \mu_2 \chi_1 \bar{W}'_1 \left( \frac{R^2}{z} \right) + \frac{1}{2} \mu_2 k_1 w_1(z) \bar{w}'_1 \left( \frac{R^2}{z} \right), & |z| > R, \end{cases} \quad (17)$$

$$\omega(z) = \begin{cases} \varphi_1(z) - z \bar{\varphi}'_2 \left( \frac{R^2}{z} \right) - \bar{\psi}'_2 \left( \frac{R^2}{z} \right) - \frac{1}{2} k_2 w_2(z) \bar{w}'_2 \left( \frac{R^2}{z} \right), & |z| < R, \\ \varphi_2(z) - z \bar{\varphi}'_1 \left( \frac{R^2}{z} \right) - \bar{\psi}'_1 \left( \frac{R^2}{z} \right) - \frac{1}{2} k_1 w_1(z) \bar{w}'_1 \left( \frac{R^2}{z} \right), & |z| > R. \end{cases} \quad (18)$$

The derivatives of these functions are analytical at the complex plane with cut along the arc  $r = R$ ,  $|\theta| \leq \beta$  except of infinity and zero points. Further the function  $F'(z) = \phi'(z) - K\omega'(z)$ ,  $K = -\frac{\mu_1(1 - \lambda\kappa_2)}{1 + \lambda}$ ,  $\lambda = \frac{\mu_1 + \mu_2\kappa_1}{\mu_2 + \mu_1\kappa_2}$  is used instead of  $\phi'(z)$ .

Boundary condition (5) specifies that  $\tilde{\sigma}_{rr}^{(1)} + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(1)} = \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)} + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(2)}$  at the crack. It follows from this condition and equations (2) and (18) that  $\omega'^+(z) = \omega'^-(z)$ . Also formulas (17) – (18) specify that the functions  $\omega'(z)$  and  $F'(z)$  are finite at infinity and have second-order poles at zero point. Since the function  $\omega'(z)$  is analytical at the whole complex plane except of zero point it is given by expression

$$\omega'(z) = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2}. \quad (19)$$

It follows from the boundary conditions (5) that the function  $F'(z)$  should satisfy the following problem of linear relationship at the crack:

$$F'^+(z) + \lambda F'^-(z) = \frac{R^2}{z^2} \left( \mu_1 \chi_2 \bar{W}'_2 \left( \frac{R^2}{z} \right) + \lambda \mu_2 \chi_1 \bar{W}'_1 \left( \frac{R^2}{z} \right) + \left( \mu_1 + \mu_2 \kappa_1 \right) \frac{\varepsilon_c}{2} \bar{W}'_c \left( \frac{R^2}{z} \right) \right) \quad \text{for } r = R, \quad |\theta| \leq \beta. \quad (20)$$

Using formulas (16) equation (20) is transformed to the following form:

$$F'^+(z) + \lambda F'^-(z) = f(z) \quad \text{for } r = R, \quad |\theta| \leq \beta, \quad (21)$$

where  $f(z) = \frac{C_1}{z^2} + C_2 + C_3 z^2$ .

The stresses and displacements of the inclusion are expressed in terms of functions  $F(z)$  and  $\omega(z)$  by the following way:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma}_{rr}^{(1)} + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(1)} &= \frac{1}{\mu_1 + \mu_2\kappa_1} \left( (\mu_1 + K)\omega'(z) + F'(z) - \mu_1\chi_2 \frac{R^2}{z^2} \bar{W}_2' \left( \frac{R^2}{z} \right) + \right. \\
 &+ \left. \left( 1 - \frac{R^2}{z\bar{z}} \right) \left( (\mu_1 + K)\bar{\omega}'(\bar{z}) + \bar{F}'(\bar{z}) - \mu_1\chi_2 \frac{R^2}{\bar{z}^2} W_2' \left( \frac{R^2}{\bar{z}} \right) \right) \right) + \\
 &+ \left( \frac{R^2}{z} - \bar{z} \right) \left( (\mu_1 + K)\bar{\omega}''(\bar{z}) + \bar{F}''(\bar{z}) + \mu_1\chi_2 \frac{R^4}{\bar{z}^4} \left( 2 \frac{\bar{z}}{R^2} W_2' \left( \frac{R^2}{\bar{z}} \right) + W_2'' \left( \frac{R^2}{\bar{z}} \right) \right) \right) \\
 &+ \frac{R^2}{z\bar{z}} \left( -(\mu_1 + K)\omega' \left( \frac{R^2}{z} \right) + \lambda F' \left( \frac{R^2}{z} \right) - \lambda\mu_2\chi_1 \frac{\bar{z}^2}{R^2} \bar{W}_1'(\bar{z}) \right) + \\
 &+ \frac{k_1}{2} \left( \bar{w}_1'(\bar{z}) \left( w_1'(z) - \frac{R^2}{z\bar{z}} w_1' \left( \frac{R^2}{\bar{z}} \right) \right) - \frac{\bar{z}}{z} \bar{w}_1''(\bar{z}) \left( w_1(z) - w_1 \left( \frac{R^2}{\bar{z}} \right) \right) \right), \tag{22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_r^{(1)} + iu_\theta^{(1)} &= \frac{e^{-i\theta}}{2\mu_1(\mu_1 + \mu_2\kappa_1)} \left( \kappa_1 \left( (\mu_1 + K)\omega(z) + F(z) + \mu_1\chi_2 \bar{W}_2 \left( \frac{R^2}{z} \right) \right) + \right. \\
 &+ \left. \left( \frac{R^2}{\bar{z}} - z \right) \left( (\mu_1 + K)\bar{\omega}'(\bar{z}) + \bar{F}'(\bar{z}) - \mu_1\chi_2 \frac{R^2}{\bar{z}^2} W_2' \left( \frac{R^2}{\bar{z}} \right) \right) + (\mu_1 + K)\omega \left( \frac{R^2}{\bar{z}} \right) - \right. \\
 &- \left. \lambda F \left( \frac{R^2}{\bar{z}} \right) - \lambda\mu_2\chi_1 \bar{W}_1(\bar{z}) + (\mu_1 + \mu_2\kappa_1) \left( \frac{k_1}{2} \bar{w}_1'(\bar{z}) \left( w_1 \left( \frac{R^2}{\bar{z}} \right) - w_1(z) \right) + \chi_1 \bar{W}_1(\bar{z}) \right) \right). \tag{23}
 \end{aligned}$$

Stresses and displacements of matrix may be obtained from expressions (22) and (23) by replacing suffix 1 by 2, 2 by 1 and  $\lambda$  by  $1/\lambda$ .

**SOLUTION OF PROBLEM OF LINEAR RELATIONSHIP**

General solution of the problem of linear relationship (21) has the form [2, 20]

$$\begin{aligned}
 F'(z) &= \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)dt}{X_0^+(t)(t-z)} + X_0(z)P_0(z), \\
 X_0(z) &= \frac{1}{\sqrt{(z - Re^{-i\beta})(z - Re^{i\beta})}} \left( \frac{z - Re^{-i\beta}}{z - Re^{i\beta}} \right)^{i\gamma}, \quad P_0(z) = B_1z + B_0 + \frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2}, \tag{24}
 \end{aligned}$$

where  $\gamma = \frac{\ln \lambda}{2\pi}$ ,  $L$  is the arc  $r = R$ ,  $|\theta| \leq \beta$  that is bypassed counterclockwise. It should be noted

that the branch of the function  $X_0(z)$  that satisfies conditions  $\left( \frac{z - Re^{-i\beta}}{z - Re^{i\beta}} \right)^{i\gamma} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 1$  and

$\frac{z}{\sqrt{(z - Re^{-i\beta})(z - Re^{i\beta})}} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 1$  is selected.

Contour integral from (24) is given by the following expression [2]:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)dt}{X_0^+(t)(t-z)} = \frac{1}{1+\lambda} \left( \frac{f(z)}{X_0(z)} - \sum_{j=0}^3 b_j z^j \right),$$

therefore

$$F'(z) = \frac{1}{1+\lambda} f(z) + X_0(z)P(z), \quad P(z) = B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0 + \frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2}. \quad (25)$$

Expressions (19) and (25) contain seven unknown constants  $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, D_1$  and  $D_2$  that need to be determined.

The function  $X_0(z)$  is expanded in the following series near zero and a point at infinity:

$$X_0(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} -\frac{e^{2\gamma\beta}}{R} (1 + X_1^{(0)}z + X_2^{(0)}z^2 + \dots), \quad X_0(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{X_1^{(\infty)}}{z} + \frac{X_2^{(\infty)}}{z^2} + \frac{X_3^{(\infty)}}{z^3} + \dots \right).$$

Because the function  $F'(z)$  is limited at infinity,  $B_3 = -\frac{1}{1+\lambda}C_3$ ,  $B_2 = \frac{X_1^{(\infty)}}{1+\lambda}C_3$ . Therefore, this function has the following representations near zero point and point at infinity:

$$F'(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1+\lambda}C_1 - \frac{e^{2\gamma\beta}}{R}D_2 \right) \frac{1}{z^2} - \frac{e^{2\gamma\beta}}{R} (D_1 + X_1^{(0)}D_2) \frac{1}{z} + \left( \frac{1}{1+\lambda}C_2 - \frac{e^{2\gamma\beta}}{R} (B_0 + X_1^{(0)}D_1 + X_2^{(0)}D_2) \right) + \dots, \quad (26)$$

$$F'(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1+\lambda}C_2 + X_1' C_3 + B_1 \right) + (B_0 + B_1 X_1^{(\infty)} + X_2' C_3) \frac{1}{z} + \dots, \quad (27)$$

where  $X_1' = \frac{1}{1+\lambda} \left( (X_1^{(\infty)})^2 - X_2^{(\infty)} \right)$ ,  $X_2' = \frac{1}{1+\lambda} \left( X_1^{(\infty)} X_2^{(\infty)} - X_3^{(\infty)} \right)$ .

It follows from finiteness of stresses and displacements at zero point, boundary condition at infinity (6) and condition of displacements uniqueness that

$$\begin{aligned} D_1 + X_1^{(0)}D_2 &= R e^{-2\gamma\beta} (\mu_1 + K)A_1, \quad B_0 + B_1 X_1^{(\infty)} + X_2' C_3 = \frac{1}{\lambda} (\mu_1 + K)A_1, \\ (\mu_1 + K)A_2 - \frac{e^{2\gamma\beta}}{R} D_2 &= \mu_1 \chi_2 R^2 E_0^2 e^{2i\alpha} - \frac{1}{1+\lambda} C_1, \quad A_1 = 0, \\ -(\mu_1 + K)(A_0 + \bar{A}_0) + \lambda \bar{B}_1 + \frac{e^{2\gamma\beta}}{R} (B_0 + X_1^{(0)}D_1 + X_2^{(0)}D_2) &= \\ = (\mu_1 + \mu_2 \kappa_1) \frac{2k_1 \varepsilon_2^2 E_0^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} - 2\mu_1 \chi_2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0^2 + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} C_2 - \lambda X_1' \bar{C}_3, \\ (\mu_2 + K)A_0 + B_1 &= (\mu_2 + \mu_1 \kappa_2) \left( \frac{N_1 + N_2}{4} - \frac{k_2 E_0^2}{4} \right) - \frac{1}{1+\lambda} C_2 - X_1' C_3, \\ (\mu_2 + K)A_2 + \frac{e^{2\gamma\beta}}{\lambda R} D_2 &= \frac{1}{\lambda(1+\lambda)} C_1 - \frac{1}{\lambda} \mu_1 \chi_2 R^2 E_0^2 e^{2i\alpha} - \\ - R^2 (\mu_2 + \mu_1 \kappa_2) &\left( \frac{N_1 - N_2}{2} e^{2i\alpha_N} + \left( \frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{k_2}{2} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) E_0^2 e^{2i\alpha} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

As one can see, system of linear algebraic equations (28) fully determines the unknown constants.



### STRESSES, CRACK OPENING AND STRESS INTENSITY FACTORS

As it follows from (23), crack opening  $\Delta = u_r^{(2)} - u_r^{(1)}$  is given by expression

$$\Delta = \frac{1}{2\mu_1\mu_2} \operatorname{Re} \left( e^{-i\theta} (F^-(z) - F^+(z)) \right), \quad z = Re^{i\theta}, \quad |\theta| \leq \beta. \quad (29)$$

Using equations (21) and (25) the expression (29) is transformed to the form

$$\Delta = \frac{1+\lambda}{2\mu_1\mu_2} \operatorname{Re} \left( e^{-i\theta} \int X_0^-(z) P(z) dz \right) = \frac{1+\lambda}{2\mu_1\mu_2} \operatorname{Re} \left( e^{-i\theta} F_0(z) \right), \quad z = Re^{i\theta}, \quad |\theta| \leq \beta, \quad (30)$$

where

$$F_0(z) = \sqrt{(z - Re^{-i\beta})(z - Re^{i\beta})} \left( \frac{z - Re^{-i\beta}}{z - Re^{i\beta}} \right)^{iy} \left( p_1 z^2 + p_2 z + p_3 + \frac{p_4}{z} \right), \quad p_1 = -\frac{1}{3(1+\lambda)} C_3,$$

$$p_2 = -\frac{1}{3(1+\lambda)} R^2 X_1^{(0)} C_3, \quad p_3 = B_1 - \left( 2R^2 \cos 2\beta - (X_1^{(\infty)})^2 \right) \frac{1}{3(1+\lambda)} C_3, \quad p_4 = -R^2 D_2.$$

Stresses on the bonded part of the interface are given by the following equation:

$$\sigma_{rr}^{(1)} + i\sigma_{r\theta}^{(1)} = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1} \left( (1+\lambda) F'(z) - \right.$$

$$\left. - \frac{R^2}{z^2} \left( \mu_1 \chi_2 \bar{W}_2'(\bar{z}) + \lambda \mu_2 \chi_1 \bar{W}_1'(\bar{z}) \right) - \frac{\varepsilon_1}{2} \frac{R^2}{z^2} \bar{W}_1'(\bar{z}) \right), \quad z = Re^{i\theta}, \quad \beta < |\theta| \leq \pi. \quad (31)$$

Crack opening (30) and stresses on the bonded part of the interface (31) have a physically unreal oscillation near crack tips in case of different materials of matrix and inclusion. Such oscillation of stresses and displacements near the tips of an interfacial crack is a known limitation of the “open” crack model that was described, for example, in [8]. However, in most cases the oscillation zones are negligible small and the use of the “open” crack model can be approved by Rice [24] approach. Thereby stress intensity factors at the crack tips are introduced as

$$K_1^\pm + iK_2^\pm = \lim_{\theta \rightarrow \pm\beta \pm 0} \sqrt{2\pi R} (\pm\theta - \beta)^{\frac{1}{2} \pm iy} \left( \tilde{\sigma}_{rr}^{(1)} + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(1)} \right). \quad (32)$$

After calculation of the limits they get the following form:

$$K_1^\pm + iK_2^\pm = \mp \frac{1+\lambda}{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1} \sqrt{\frac{\pi}{R \sin \beta}} i e^{\mp \frac{i\beta}{2}} \left( 2e^{\mp i\beta} \sin \beta \right)^{\pm iy} P \left( Re^{\pm i\beta} \right). \quad (33)$$

### NUMERICAL RESULTS

All results presented in this section are obtained for plane stress state, Poisson’s ratios  $\nu_1 = \nu_2 = 0,26$  and uniaxial tension at infinity  $N_2 / N_1 = 0$ ,  $N_1 > 0$ .

Fig. 2-4 show the crack opening, normal and shear stresses at the interface, respectively, for the ratios of the intensities of electrical and mechanical loads at infinity  $\varepsilon_1 E_0^2 / N_1 = 0$ ,  $\varepsilon_1 E_0^2 / N_1 = 0,5 \cdot 10^{-4}$  and  $\varepsilon_1 E_0^2 / N_1 = 10^{-4}$ . These Figures are obtained for  $\beta = 60^\circ$ ,  $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 2$ ,

$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_1} = 10^{-4}$ ,  $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 2$ ,  $\frac{a_1^{(1)}}{\varepsilon_1} = 200$ ,  $\frac{a_2^{(1)}}{\varepsilon_1} = -45$ ,  $\frac{a_1^{(2)}}{\varepsilon_1} = 400$ ,  $\frac{a_2^{(2)}}{\varepsilon_1} = -75$ ,  $\alpha = -45^\circ$ ,  $\alpha_N = 0$ . As it is shown in Fig. 2, an increasing of electrical load intensity leads to decrease of the crack opening.

Also it should be noted from Fig. 3-4, that intensity of the electrical load influences the normal stresses at the interface much more essentially than the shear ones.

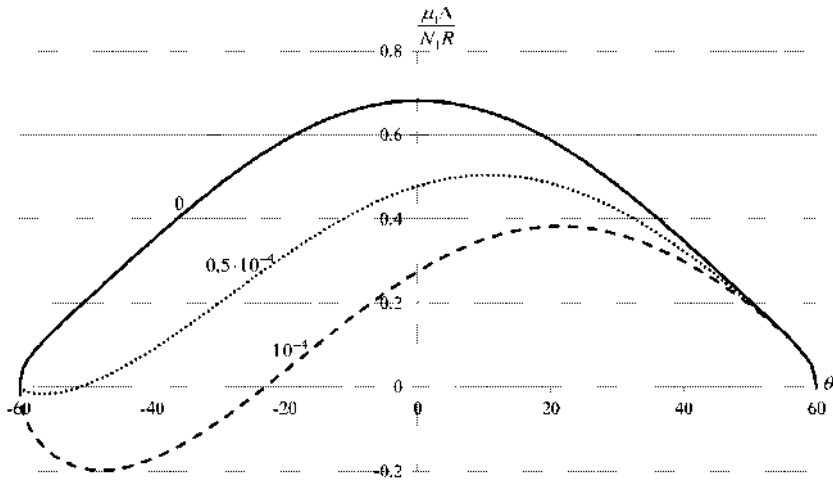


Fig. 2

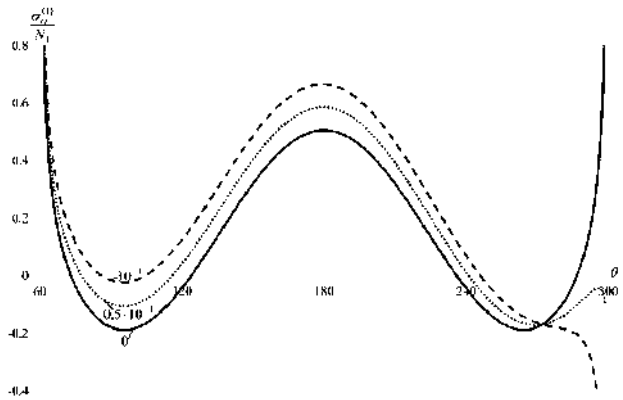


Fig. 3

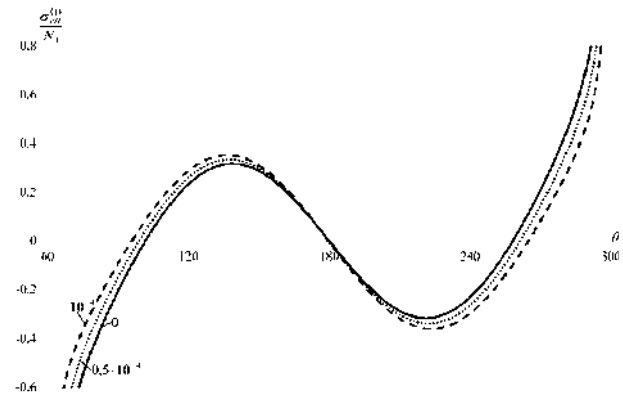


Fig. 4

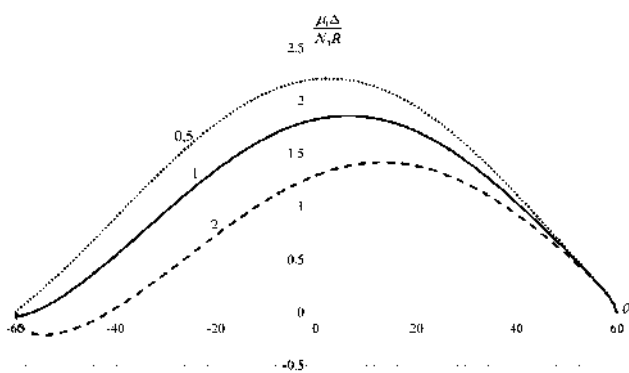


Fig. 5

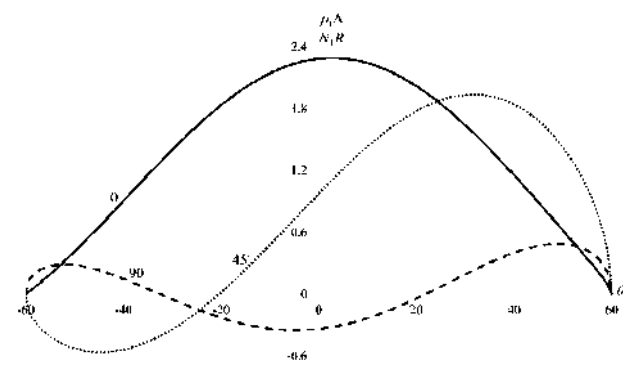


Fig. 6

The crack opening for various parameters of materials and applied loads is shown in Fig. 5-8. All these results are obtained for  $\beta = 60^\circ$ ,  $\frac{\epsilon_c}{\epsilon_1} = 10^{-4}$ ,  $\epsilon_1 E_0^2 / N_1 = 10^{-4}$ . Particularly, Fig. 5 shows the crack opening for the ratios of materials dielectric permittivities  $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = 0,5$ ,  $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = 1$  and  $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = 2$ , and

also  $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 0,5$ ,  $\frac{a_1^{(1)}}{\varepsilon_1} = 400$ ,  $\frac{a_2^{(1)}}{\varepsilon_1} = -75$ ,  $\frac{a_1^{(2)}}{\varepsilon_1} = 0$ ,  $\frac{a_2^{(2)}}{\varepsilon_1} = 0$ ,  $\alpha = -30^\circ$ ,  $\alpha_N = 0$ . As it is shown in this figure, increasing of the matrix dielectric permittivity decreases the crack opening. Fig. 6 shows the crack opening for the direction angles of mechanical load at infinity  $\alpha_N = 0$ ,  $\alpha_N = 45^\circ$  and  $\alpha_N = 90^\circ$ , and also  $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 0,5$ ,  $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 0,5$ ,  $\frac{a_1^{(1)}}{\varepsilon_1} = 400$ ,  $\frac{a_2^{(1)}}{\varepsilon_1} = -75$ ,  $\frac{a_1^{(2)}}{\varepsilon_1} = 200$ ,  $\frac{a_2^{(2)}}{\varepsilon_1} = -45$ ,  $\alpha = -45^\circ$ .

Fig. 7 shows crack opening for the direction angles of electrical load at infinity  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 45^\circ$  and  $\alpha = 90^\circ$ , and also  $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 0,5$ ,  $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 2$ ,  $\frac{a_1^{(1)}}{\varepsilon_1} = 200$ ,  $\frac{a_2^{(1)}}{\varepsilon_1} = -45$ ,  $\frac{a_1^{(2)}}{\varepsilon_1} = 400$ ,  $\frac{a_2^{(2)}}{\varepsilon_1} = -75$ ,  $\alpha_N = 0$ . As one can see, angles  $\alpha$  and  $\alpha_N$  have a great influence on the crack faces intersection zones appearing. The cases of none intersection zones, one zone and two zones are presented. Fig. 8 shows the crack opening for ratios of elastic modules  $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 0,5$ ,  $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 1$  and  $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 2$ . These results are obtained for  $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 0,5$ ,  $\frac{a_1^{(1)}}{\varepsilon_1} = 400$ ,  $\frac{a_2^{(1)}}{\varepsilon_1} = -75$ ,  $\frac{a_1^{(2)}}{\varepsilon_1} = 200$ ,  $\frac{a_2^{(2)}}{\varepsilon_1} = -45$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\alpha_N = 15^\circ$ . As it is shown in this figure, decreasing of the matrix elastic modulus increases the crack opening.

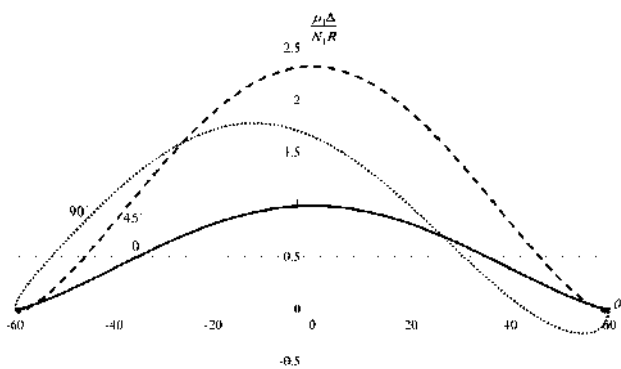


Fig. 7

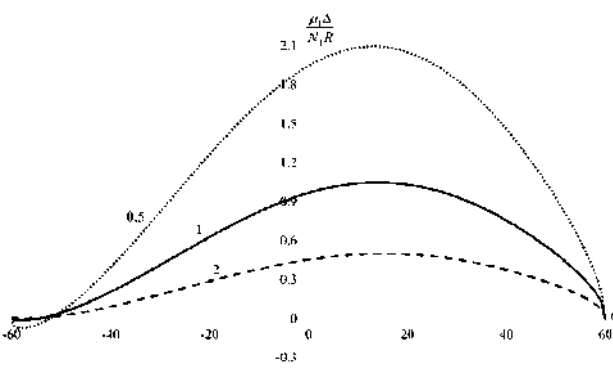


Fig. 8

Fig. 9-14 show the dependencies of the normal and shear stress intensity factors at the upper crack tip from different variables. All these results are obtained for  $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 0,5$ ,  $\frac{a_1^{(1)}}{\varepsilon_1} = 400$ ,  $\frac{a_2^{(1)}}{\varepsilon_1} = -75$ ,  $\frac{a_1^{(2)}}{\varepsilon_1} = 200$ ,  $\frac{a_2^{(2)}}{\varepsilon_1} = -45$ . Particularly, Fig. 9-10 show variation of stress intensity factors from crack angle  $\beta$  for ratios of the intensities of electrical and mechanical loads at infinity  $\varepsilon_1 E_0^2 / N_1 = 0$ ,  $\varepsilon_1 E_0^2 / N_1 = 10^{-4}$  and  $\varepsilon_1 E_0^2 / N_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ . These results are obtained for  $\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_1} = 10^{-4}$ ,  $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 0,5$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\alpha_N = 0$ . As one can see, increasing of the electrical load intensity decreases the absolute values of both normal and shear stress intensity factors.

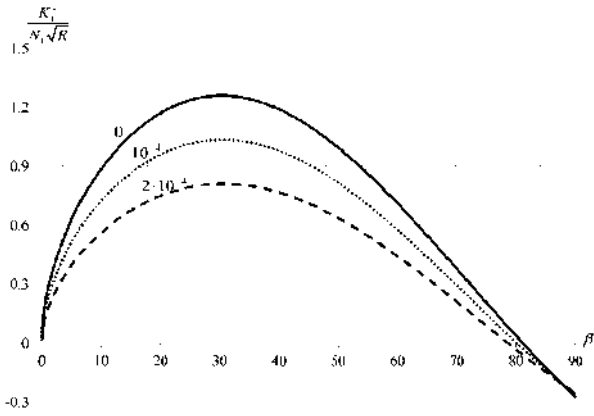


Fig. 9

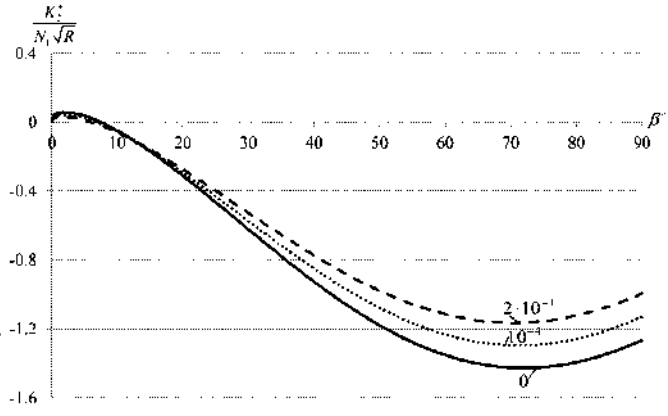


Fig. 10

Fig. 11-12 show variation of stress intensity factors with respect to the angle of mechanical load applying at infinity  $\alpha_N$  for ratios of elastic modules  $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 0,5$ ,  $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 1$  and  $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 2$ . These results

are obtained for  $\beta = 60^\circ$ ,  $\frac{\epsilon_c}{\epsilon_1} = 10^{-4}$ ,  $\epsilon_1 E_0^2 / N_1 = 10^{-4}$ ,  $\alpha = 0$ . As it can be seen from these figures, increasing of the matrix elastic modulus decreases the absolute values of the stress intensity factors.

Fig. 13-14 show variation of stress intensity factors on the angle  $\alpha$  of electrical load applying at infinity for the ratios of dielectric permittivities  $\frac{\epsilon_c}{\epsilon_1} = 0,5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\frac{\epsilon_c}{\epsilon_1} = 10^{-4}$  and  $\frac{\epsilon_c}{\epsilon_1} = 2 \cdot 10^{-4}$ . These

results are obtained for  $\beta = 60^\circ$ ,  $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 2$ ,  $\epsilon_1 E_0^2 / N_1 = 10^{-4}$ ,  $\alpha_N = 0$ .

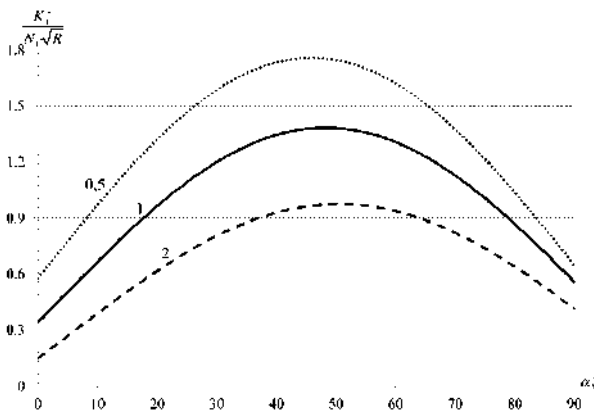


Fig. 11

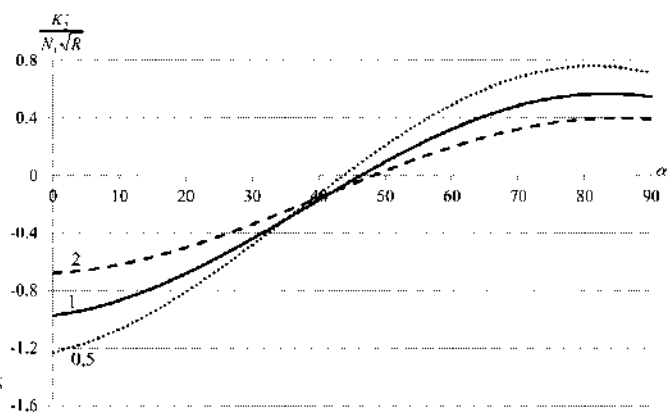


Fig. 12

As it is shown in above figures, various combinations of materials and parameters of electrical and mechanical loadings may cause intersection of crack faces. It is obvious that appearance of the intersection zones in the “open” crack model solution means that in reality the crack faces contact with each other and the crack model, which takes into account the crack faces contact should be applied. Nevertheless, “open” crack model solution can be used to predict number and configuration of the contact zones for such cases. Furthermore, the obtained results are precise enough at a certain distance from the contact zones; in particular, they are reliably applicable for the determination of the fracture parameter at the most dangerous crack tips, where the crack is completely open except small zones of oscillation.

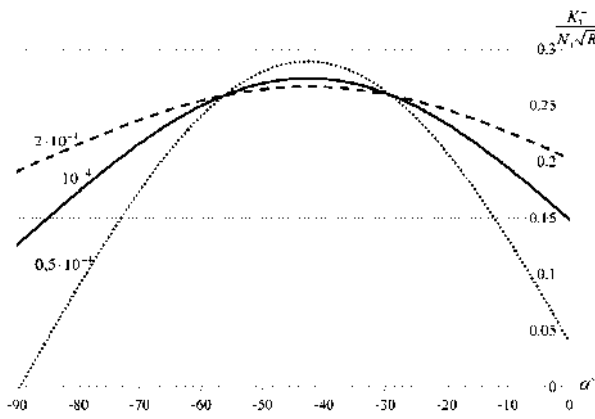


Fig. 13

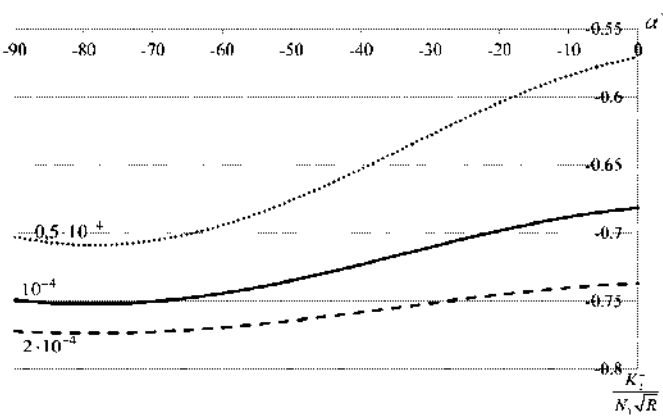


Fig. 14

### SUMMARY

An electrostrictive plane with a circular electrostrictive inclusion made of another material and having an arc crack at the material interface under the influence of arbitrary mechanical and electrical loadings at infinity is considered. Crack faces are assumed to be non-interacting and permeable to an electric field. Specified problem is resolved within the framework of uncoupled problem of electroelasticity.

At the beginning the boundary problem of electrostatics is resolved by expanding three unknown complex potentials in Laurent series. Further, the problem of electroelasticity is resolved taking into account the obtained solution of electrostatics problem. Boundary problem of electroelasticity is formulated for four complex potentials that are analogues of Kolosov-Muskhelishvili potentials. It is reduced to the problem of linear relationship at the crack, which is resolved by the methods of analytical function theory. Unknown constants in the general solution of the problem of linear relationship are found from the boundary conditions at infinity and from the limitations imposed on stresses and displacements at origin, at infinity and near the crack.

The obtained solution determines completely the stress-strain state of the plane with circular inclusion and an interface arc crack under arbitrary electro-mechanical loading at infinity. Particularly, the formulas determining stress-strain state at any point of the plane are found and also the exact analytical expressions for the crack opening and the main fracture mechanical parameters are obtained. Dependencies of the crack opening and the stress intensity factors near crack tips from mechanical and dielectric properties of materials and from applied mechanical and electrical loadings are analyzed. The scope of applicability of the “open” crack model is defined and the importance of this model for the determination of the fracture parameter at the most dangerous crack tips is emphasized.

### REFERENCES

1. Gao C.-F., Mai Y.-W. Fracture of electrostrictive solids subjected to combined mechanical and electric loads. *Eng. Fract. Mech.* 2010. Vol. 77. P. 1503–1515.
2. Muskhelishvili N. I. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Leyden: Noordhoff International Publishing, 1977. 732 p.
3. Knops R. J. Two-dimensional electrostriction. *Q. J. Mech. Appl. Math.* 1963. Vol. XVI, Pt. 3. P. 377–388.
4. Zheng M., Gao C.-F. An arc-shaped crack in an electrostrictive material. *Int. J. Eng. Sci.* 2010. Vol. 48. P. 771–782.
5. Hodes A. J., Loboda V. V. Arc Crack in a Homogeneous Electrostrictive Material. *J. Math. Sci.* 2017. Vol. 222, Iss. 2. P. 114–130.
6. Hodes A. Yu., Loboda V. V. The contact problem for an arc crack in an electrostrictive material. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Physics & Mathematics.* 2015. Vol. 5. P. 69–72 (in Ukrainian).
7. Dai M., Gao C.-F., Schiavone P. Arc-shaped permeable interface crack in an electrostrictive fibrous composite under uniform remote electric loadings. *Int. J. Mech. Sci.* 2016. Vol. 115-116. P. 616–623.
8. England A. H. An Arc Crack Around a Circular Elastic Inclusion. *J. Appl. Mech.* 1966. Vol. 33. P. 637–640.

9. Hodes A. Yu., Loboda V. V. Stress-strain state of an elastic plane with an arc crack between circular inclusion and matrix. *Bulletin of Dniepropetrovsk University: Mechanics*. 2013. Iss. 17, Vol. 1. P. 3–10 (in Russian).
10. Hodes A. Yu. An arc interfacial crack with loaded sides. *Bulletin of Dniepropetrovsk University: Mechanics*. 2014. Iss. 18, Vol. 1. P. 33–43 (in Russian).
11. Brighenti R., Carpinteri A., Scorza D. Fracture mechanics approach for a partially debonded cylindrical fibre. *Composites: Part B*. 2013. Vol. 53. P. 169–178.
12. Li Y.-D., Zhang N., Lee K. Y. Fracture analysis on the arc-shaped interfacial crack between a homogeneous cylinder and its coating. *Eur. J. Mech. A/Solids*. 2010. Vol. 29. P. 794–800.
13. Kushch V. I., Shmegeera S. V., Mishnaevsky Jr. L. Elastic interaction of partially debonded circular inclusions. I. Theoretical solution. *Int. J. Solids Struct.* 2010. Vol. 47. P. 1961–1971.
14. Chao R., Laws N. Closure of an arc crack in an isotropic homogeneous material due to uniaxial loading. *Q. J. Mech. Appl. Math.* 1992. Vol. 45. P. 629–640.
15. Chao R., Laws N. The Fiber-Matrix Interface Crack. *J. App. Mech.* 1977. Vol. 64. P. 992–999.
16. Hodes A. Yu., Loboda V. V. A contact problem for an arc interfacial crack. *Bulletin of Dniepropetrovsk University: Mechanics*. 2015. Iss. 19, Vol. 2. P. 3–17 (in Russian).
17. Ritz E., Pollard D. D. Closure of circular arc cracks under general loading: effects on stress intensity factors. *Int. J. Fract.* 2011. Vol. 167. P. 3–14.
18. Paris F., Cano J. C., Varna J. The fiber-matrix interface crack – A numerical analysis using Boundary Elements. *Int. J. Fract.* 1996. Vol. 82. P. 11–29.
19. Varna J., Paris F., Cano J. C. The effect of crack-face contact on fiber/matrix debonding in transverse tensile loading. *Compos. Sci. Technol.* 1997. Vol. 51. P. 523–532.
20. Gakhov F. D. *Boundary Value Problems*. Oxford: Pergamon Press, 1966. 561 p.
21. Jiang Q., Kuang Z.-B. Stress analysis in two dimensional electrostrictive material with an elliptic rigid conductor. *Eur. J. Mech. A/Solids*. 2004. Vol. 23. P. 945–956.
22. Stratton J. A. *Electromagnetic Theory*. New York: McGraw-Hill, 1941. 648 p.
23. Landau L., Lifshitz E. *Electrodynamics of Continuous Media*. Oxford: Pergamon Press, 1960. 417 p.
24. Rice J. R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *J. Appl. Mech.* 1988. Vol. 55. P. 98–103.

УДК 539.3

## ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗРАХУНОК ЧАСТОТ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ НЕКРУГОВОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНИМИ ТОРЦЯМИ

<sup>1</sup>Григоренко О. Я., д. ф.-м. н., професор, <sup>2</sup>Борисенко М. Ю., к. ф.-м. н.,  
<sup>2</sup>Бойчук О. В., к. ф.-м. н., <sup>2</sup>Пригода О. П., аспірант

<sup>1</sup>Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,  
вул. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна

<sup>2</sup>Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухомлинського,  
вул. Нікольська, 24, Миколаїв, 54030, Україна

ayagrigorenko@yandex.ru, maxborisenko530@mail.ru

Визначаються частоти та форми вільних коливань тонкої циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу сталі товщини з жорстко закріпленими торцями. Дослідження проводились методом скінченних елементів, який реалізовано на ліцензійному програмному засобі FEMAP з розв'язувачем NX Nastran. Достовірність отриманих результатів забезпечується використанням обґрунтованої математичної моделі, коректністю постановки задачі, розв'язком тестових задач та практичною збіжністю розрахованих частот при застосуванні методу

скінченних елементів. У результаті дослідження розв'язано дві тестові задачі для кругової та не кругової циліндричної оболонки сталої товщини з жорстко закріпленими торцями. Результати тестових задач добре збігаються з результатами, отриманими іншими авторами експериментальним та чисельним методами. Проведено порівняльний аналіз частот і форм вільних коливань розглянутої оболонки з частотами і формами вільних коливань цієї ж оболонки з жорстко закріпленим одним торцем, інший торець вільний.

*Ключові слова:* метод скінченних елементів, частоти і форми вільних коливань, кругова оболонка, оболонка еліптичного поперечного перерізу.

## **ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕКРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННЫМИ ТОРЦАМИ**

<sup>1</sup>Григоренко А. Я., д. ф.-м. н., профессор, <sup>2</sup>Борисенко М. Ю., к. ф.-м. н.,  
<sup>2</sup>Бойчук Е. В., к. ф.-м. н., <sup>2</sup>Пригода А. П., аспирант

<sup>1</sup>*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины,  
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина*

<sup>2</sup>*Николаевский национальный университет им. В. А. Сухомлинского,  
ул. Никольская, 24, Николаев, 54030, Украина*

ayagrigorenko@yandex.ru, maxborisenko530@mail.ru

Определяются частоты и формы свободных колебаний тонкой цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения постоянной толщины с жестко закрепленными торцами. Исследования проводились методом конечных элементов, который реализован на лицензионной программе FEMAP с решателем NX Nastran. Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием обоснованной математической модели, корректностью постановки задачи, решением тестовых задач и практической сходимостью рассчитанных частот при применении метода конечных элементов. В результате исследования решено две тестовые задачи для круговой и некруговой цилиндрической оболочки постоянной толщины с жестко закрепленными двумя торцами. Результаты тестовых задач хорошо совпадают с результатами, полученными другими авторами экспериментальным и численным методами. Проведен сравнительный анализ частот и форм свободных колебаний рассматриваемой оболочки с частотами и формами свободных колебаний этой же оболочки с жестко закрепленным одним торцом, другой торец свободен.

*Ключевые слова:* метод конечных элементов, частоты и формы свободных колебаний, круговая оболочка, оболочка эллиптического поперечного сечения.

## **NUMERICAL CALCULATION OF FREE VIBRATION FREQUENCIES OF A NON-CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL WITH FIXED END FACES**

<sup>1</sup>Grigorenko A. Ya., D.Sc. in Physics and Maths, Professor,  
<sup>2</sup>Borisenko M. Yu., D.Ph. in Physics and Maths, <sup>2</sup>Boychuk O. V., D.Ph. in Physics and Maths,  
<sup>2</sup>Prigoda A. P., postgraduate

<sup>1</sup>*Tymoshenk Institute of Mechanics NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine*

<sup>2</sup>*Sukhomlynsky National University of Mykolaiv, Mykolaiv, Ukraine*

ayagrigorenko@yandex.ru, maxborisenko530@mail.ru

In many cases, cylindrical shell constructions have a noncircular cross-sectional contour, variable thickness and different boundary conditions, and other features. In the study of the strength and stability of shell structures possession of information about the distribution of dynamic characteristics, in particular, the distribution of frequencies and forms of free oscillations is needed.

Theoretical research of vibrations associated with considerable difficulties realization of the mathematical model and necessity solving difficult system of differential equations in partial derivatives with variable coefficients. The instability of solutions and the loss of the calculation accuracy required order occur in solving this system. There are some analytical solutions boundary problems describing vibrations noncircular cylindrical shells that can be used only in rare cases.

Numerical methods for theory shell problem solving got wide applications in comparison with analytical methods. Based on the finite element method many modern programs for engineering calculations created. One such program is the solver FEMAP with NX Nastran.

The proposed software tool used in several studies to determine the free vibration frequencies and forms of thin cylindrical shells elliptical cross section constant [1] and variable [2] thickness for different values of eccentricity [3] and different boundary conditions on one end face, the other an end face free [4]. Apart ready software developed by individual authors programs are often used. Thus, in two finite-element implementations thin-walled structures natural oscillations were studied [5].

Finite element method becomes more popular in engineering calculations, but remember that the basic check any calculation results is only physical experiment. One of the most effective methods of investigation vibration is a method holographic interferometry, which allows real-time observe interference patterns which makes it possible real-time observe interference patterns of vibrations shell surfaces, accurately set moment of occurrence of resonance, select the desired mode vibrational excitation, explore the spectrum of free oscillation frequencies and forms with a sufficient degree of reliability. This experimental method used to study the console fixed cylindrical shells with circular cross-section [6] and noncircular cross-section constant [7] and variable thickness. The experimental results are in good agreement with numerical calculations. In [8] on the basis of holographic interferometry circular cylindrical shell with both rigid fixed end faces investigated, the experiment results made it possible to get empirical formula to calculate the free oscillation frequencies.

In this paper estimates of two test problems are given, the results of which showed a good correspondence to the results obtained numerically [5] and experimentally [8] by other authors. The discrepancy between the numerical calculations does not exceed 4%, the difference between the numerical calculation, which is realized in FEMAP, and results obtained experimentally does not exceed 16%, which is acceptable and demonstrates the correctness of the proposed method for solving this class problems.

The new calculation of free oscillation frequencies and forms of cylindrical shells elliptical cross section with rigid fixed both end faces carried, and conducted comparison of obtained the frequencies and frequencies received for the same shell with rigid fixed one end face, the other an end face free.

A result of research we found that the rigid fixing of the second end face makes it possible to increase the first resonant frequency is twice, and the vibration mode does not match the first resonance frequency form of the console fixed shell.

The obtained results make it possible to control the free vibration frequency spectrum of shell structures for its exclusion from the resonant regime by varying the boundary conditions, which is one on the actual problems of the research strength of shell structures.

*Key words: finite element method, free vibration frequencies and modes, circular shell, elliptical cross section shell.*

## ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

У багатьох випадках циліндричні оболонкові конструкції мають некруговий контур поперечного перерізу, змінну товщину, різні граничні умови та інші особливості. При дослідженні міцності та стійкості таких оболонкових конструкцій є необхідним володіти інформацією про розподіл їх динамічних характеристик, зокрема, про розподіл частот та форм вільних коливань.

Теоретичні дослідження коливань пов'язані зі значними труднощами реалізації математичної моделі та необхідністю розв'язування складної системи диференціальних рівнянь у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, при розв'язуванні якої спостерігається нестійкість розрахунку, втрата необхідного порядку точності обчислень. Відомі аналітичні розв'язки деяких крайових задач, що описують коливання некругових циліндричних оболонок, які можна застосовувати тільки в окремих випадках.

Порівнянно з аналітичними методами широкого практичного застосування набули чисельні методи розв'язування задач динаміки теорії оболонок, а саме метод скінченних елементів (МСЕ). Використовуючи цей чисельний метод побудовано багато сучасних програм для інженерного розрахунку. Однією з таких програм є FEMAP з розв'язувачем NX Nastran. Запропонований програмний засіб використовується в ряді досліджень із визначення частот і форм вільних коливань тонких циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу сталої [1] та змінної [2] товщини при різних значеннях ексцентриситету [3] та різних граничних умовах на одному торці, інший торець вільний [4]. Окрім готових програмних засобів, часто використовуються розроблені власні програми. У [5] в рамках двох скінченно-елементних реалізацій досліджені власні коливання тонкостінних конструкцій. У першій з



них оболонка представлена як сукупність плоских елементів, що знаходяться одночасно під дією мембранних і згинальних сил. Друга заснована на рівняннях теорії пружності. Дискретизація області проводиться за допомогою 8-вузлового скінченного елемента з несумісними формами переміщень. Як приклади розглянуті циліндричні оболонки еліптичного поперечного перерізу. Проаналізовано вплив граничних умов і різних геометричних параметрів на власні частоти коливань. Виявлено переваги і недоліки кожного з підходів.

МСЕ набуває більшої популярності при інженерних розрахунках, проте слід пам'ятати, що основною перевіркою будь-якого з результатів розрахунків залишається тільки фізичний експеримент, чисельний аналіз представляє лише моделювання реальної конструкції і від того, наскільки вдала модель і математичний апарат, який реалізує цю модель, залежить відповідність результатам експериментальної перевірки. Одними з ефективних методів дослідження вібрацій є метод голографічної інтерферометрії, який дає можливість у реальному часі спостерігати інтерференційні картини коливань поверхні оболонок, точно встановлювати момент виникнення резонансу, вибирати необхідний режим віброзбудження, з достатнім ступенем достовірності досліджувати спектр частот і форм вільних коливань. Такий експериментальний метод використовується для дослідження консольно закріплених циліндричних оболонок кругового поперечного перерізу [6], а також некругового поперечного перерізу сталої [7] та змінної товщини. Отримані результати добре узгоджуються з чисельними розрахунками. У [8] на основі методу голографічної інтерферометрії досліджена кругова циліндрична оболонка з жорстко закріпленими торцями, результати експерименту дали можливість отримати емпіричну формулу для розрахунку частот вільних коливань.

Метою цієї роботи є визначення частот та форм вільних коливань пружної ізотропної циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу сталої товщини з жорстко закріпленими торцями на основі методу скінчених елементів.

### ВИХІДНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

Рівняння руху оболонки при відсутності демпфування має вигляд

$$\mathbf{K}\vec{\Phi}_j + \mathbf{M}\ddot{\vec{\Phi}}_j = 0, \quad (1)$$

де  $\mathbf{K}$  та  $\mathbf{M}$  – матриця жорсткості та матриця мас механічної системи відповідно,  $\vec{\Phi}_j$  – вектор переміщень вузлів системи, що відповідає  $j$ -тому ступеню вільності, який відтворює  $j$ -ту форму коливань.

При вільних коливаннях оболонок усі вузлові точки здійснюють гармонічні коливання як функції часу:

$$\vec{\Phi}_j(t) = \vec{\Phi}_j \sin \omega_j t. \quad (2)$$

Після підстановки функцій (2) в рівняння руху оболонки визначення власних частот і форм коливань зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K}\vec{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{M}\vec{\Phi}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (3)$$

де  $\omega_j$  – пульсація або частота гармонічних коливань.

NX Nastran для визначення частот і форм вільних коливань у випадку, коли дисипація енергії і демпфування не враховується, використовує, як основний, метод Ланцоша (Lanczos) [9].

## ТЕСТОВІ ЗАДАЧІ

Для перевірки достовірності вибраної методики при дослідженні динамічних характеристик циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу сталої товщини з жорстко закріпленими торцями спочатку розв'язувалися дві тестові задачі та виконувалося порівняння результатів з результатами, отриманими іншими авторами.

Як першу тестову задачу за допомогою системи FEMAP побудовано геометрію циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу з великою піввіссю  $a = 0,02 \text{ м}$  і малою піввіссю  $b = 0,01 \text{ м}$ , висотою  $h = 0,2 \text{ м}$ , товщиною  $d = 0,0005 \text{ м}$ . Дослідження проводилось для оболонки з жорстко закріпленими торцями:  $u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$  (C-C). Як матеріал оболонки задавалась сталь з модулем Юнга  $E = 205 \text{ ГПа}$ , коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 0,3$ , густиною  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ . Скінченно-елементна розбивка проводилась двома типами елементів: лінійними чотирикутними plate-елементами розміром сторони  $1 \text{ мм}$ ; лінійними восьмикутними solid-елементами розміром сторони  $1 \text{ мм}$ . Геометрія оболонки, фізико-механічні характеристики та граничні умови вибирались відповідно до оболонки дослідженої методом скінченних елементів у [5].

У результаті розв'язування першої тестової задачі отримано частоти вільних коливань за допомогою plate- та solid-елементів, які представлені в таблиці 1 разом із частотами, отриманими за допомогою 3D shell- і 3D solid-елементів іншим автором [5], а також з наведеною розбіжністю розрахунків у відсотках. Для наочного аналізу результати представлені у вигляді гістограм (рис. 1).

Зазначимо, що автор не класифікує отримані частоти за формами вільних коливань, а просто наводить десять перших отриманих частот, тому самостійно проведемо класифікацію частот без зміни порядку, запропонованого автором, з урахуванням наявності симетричних і несиметричних форм вільних коливань [7]. Введемо позначення:  $m$  – кількість вузлів уздовж твірної і  $n$  – кількість вузлів по колу для симетричних форм,  $\underline{m}$  і  $\underline{n}$  – відповідно для несиметричних форм.

Таблиця 1 – Частоти вільних коливань, отримані при розрахунку першої тестової задачі

$m$	$n$	$f, \text{Гц}$		$\varepsilon, \%$	$f, \text{Гц}$		$\varepsilon, \%$
		3D shell [5]	FEMAP plate		3D solid [5]	FEMAP solid	
1	4	1710,87	1703,51	0,4	1689,60	1720,23	1,8
<u>1</u>	<u>4</u>	1828,37	1816,52	0,6	1806,60	1797,61	0,5
згин		2596,38	2611,12	0,6	2650,20	2605,58	1,7
2	4	3042,21	3038,92	0,1	3070,50	3030,40	1,3
<u>2</u>	<u>4</u>	3360,86	3344,71	0,5	3391,90	3333,08	1,7
<u>1</u>	<u>6</u>	3676,46	3704,84	0,8	3616,80	3727,98	3,1
1	6	3781,88	3786,90	0,1	3694,00	3772,39	2,1
2	6	3969,78	3973,69	0,1	3897,90	3936,60	1,0
<u>2</u>	<u>6</u>	4011,43	4024,21	0,3	3952,20	4044,44	2,3
3	2	4456,36	4469,26	0,3	4493,30	4470,54	0,5

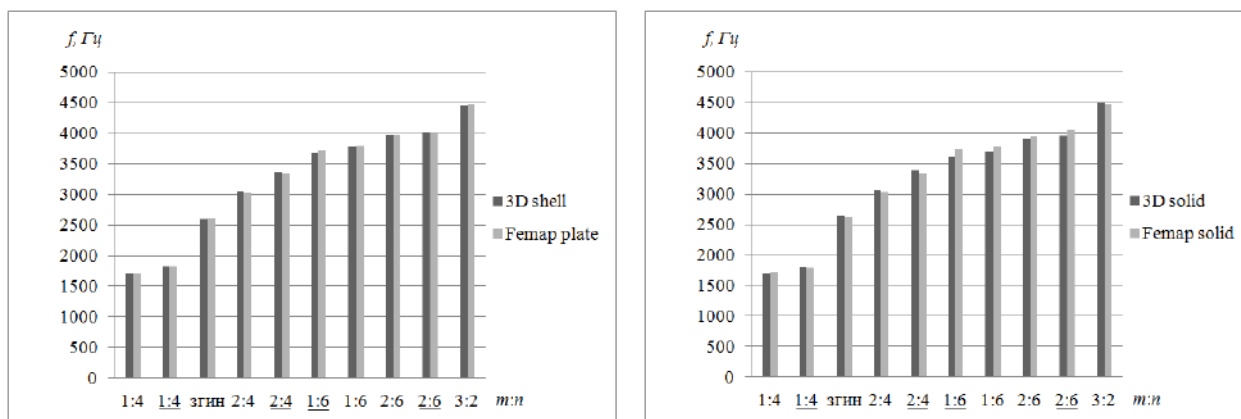


Рис. 1. Порівняльні гістограми частот вільних коливань першої тестової задачі

Як другу тестову задачу за допомогою системи FEMAP побудовано геометрію циліндричної оболонки кругового поперечного перерізу радіусом  $R = 0,04\text{ м}$ , висотою  $h = 0,12\text{ м}$ , сталюю товщиною  $d = 0,00024\text{ м}$ . Дослідження проводилось для оболонки з жорстко закріпленими торцями:  $u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$  (C-C). Як матеріал оболонки задавалась сталь з модулем Юнга  $E = 200\text{ ГПа}$ , коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 0,3$ , густиною  $\rho = 7800\text{ кг/м}^3$ . Скінченно-елементна розбивка проводилась лінійними чотирикутними plate-елементами розміром сторони  $1\text{ мм}$ . Геометрія оболонки, фізико-механічні характеристики та граничні умови вибирались відповідно до оболонки, дослідженої експериментально методом голографічної інтерферометрії [8].

У результаті розв’язування другої тестової задачі отримано частоти вільних коливань, які представлені в таблиці 2 разом із частотами, отриманими іншим автором [8], а також з наведеною розбіжністю розрахунків у відсотках. Для наочного аналізу результати представлені у вигляді гістограми (рис. 2).

Аналізуючи отримані результати двох тестових задач, можна побачити добру відповідність між частотами вільних коливань, отриманих за допомогою FEMAP та частотами, отриманими іншими авторами, що свідчить про коректність використання всіх розглянутих методик.

Таблиця 2 – Частоти вільних коливань, отримані при розрахунку другої тестової задачі

m	n	f, Гц		ε, %
		Експеримент [8]	FEMAP	
1	8	1880	2303	22,5
1	10	1597	1828	14,5
1	12	1680	1760	4,8
1	14	2064	1999	3,1
2	12	2745	3166	15,3
4	16	5040	5581	10,7
5	20	6112	6594	7,9
5	26	8188	7806	4,7
8	28	11848	11185	5,6

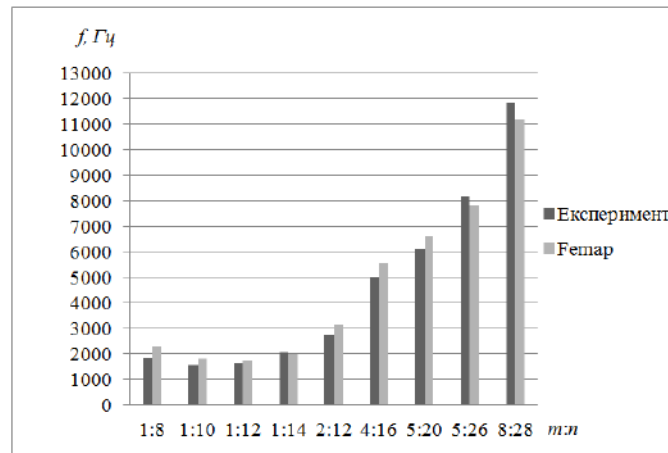


Рис. 2. Порівняльна гістограма частот вільних коливань другої тестової задачі

## РЕЗУЛЬТАТИ

Достовірність отриманих результатів забезпечується використанням обґрунтованої математичної моделі, коректністю постановки задачі, розв'язком тестових задач та практичною збіжністю розрахованих частот при застосуванні методу скінченних елементів.

За допомогою системи FEMAP досліджуються частоти і форми вільних коливань циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу з великою піввіссю  $a = 50,810 \cdot 10^{-3} \text{ м}$  і малою піввіссю  $b = 36,285 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ , висотою  $h = 0,12 \text{ м}$ , товщиною  $d = 0,002 \text{ м}$ . Дослідження проводилось для оболонки з жорстко закріпленими торцями:  $u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$  (C-C). Як матеріал оболонки задавалась сталь з модулем Юнга  $E = 214 \text{ ГПа}$ , коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 0,32$ , густиною  $\rho = 7820 \text{ кг/м}^3$ . Скінченно-елементна розбивка проводилась лінійними восьмикутними solid-елементами розміром сторони  $1 \text{ мм}$ . Геометрія оболонки та фізико-механічні характеристики вибирались відповідно до оболонки, дослідженої методом скінченних елементів та методом стробоголографічної інтерферометрії у випадку жорстко закріпленого одного торця, інший торець вільний (C-F) [4].

У результаті розрахунків отримано частоти вільних коливань, які представлені в таблиці 3 разом із частотами, отриманими в [4], а також з наведеною розбіжністю розрахунків. Для наочного аналізу результати представлені у вигляді гістограми (рис. 3).

Таблиця 3 – Частоти вільних коливань циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу з різними граничними умовами на торцях

m	n	f, Гц		$\frac{f_{C-C}}{f_{C-F}}$
		C-F	C-C	
1	4	1712	5451	3,2
1	6	2154	4026	1,9
1	8	3849	4466	1,2
1	10	6129	6720	1,1
1	12	8963	9428	1,1
2	4	6159	9545	1,5
2	6	4488	7176	1,6
2	8	4895	7001	1,4
2	10	7072	8875	1,3
2	12	9748	11023	1,1

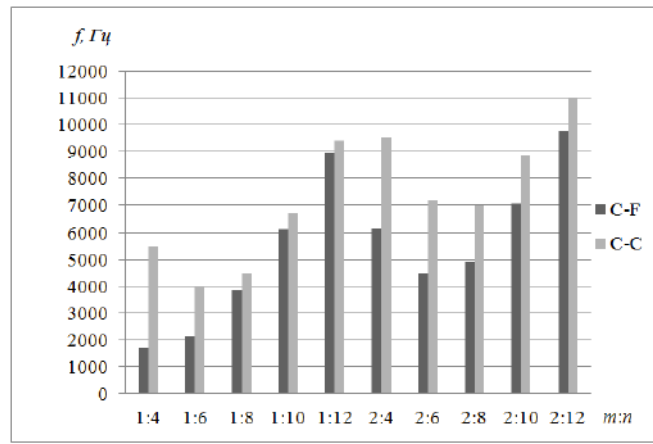
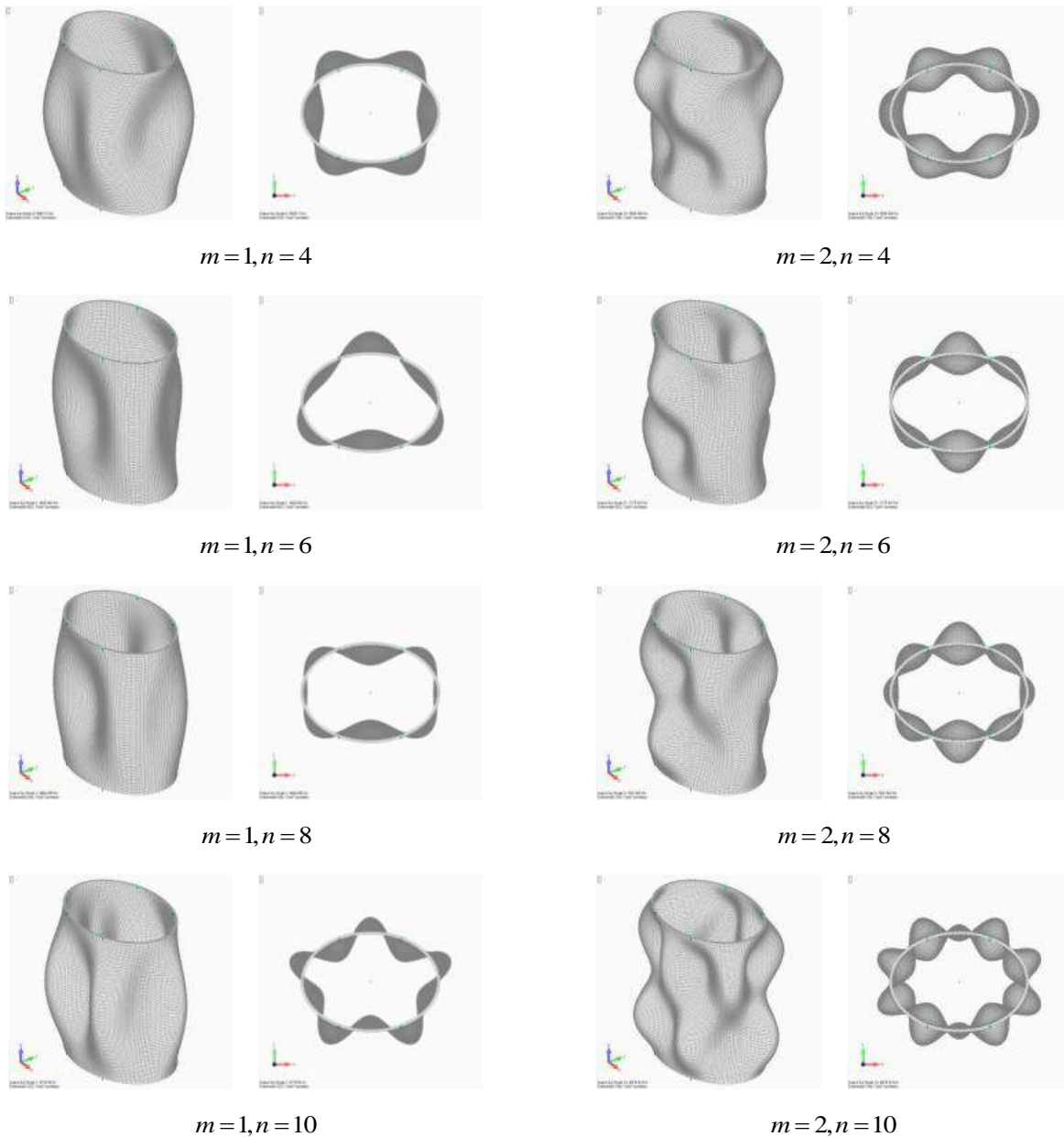


Рис. 3. Порівняльна гістограма частот вільних коливань циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу з різними граничними умовами на торцях

Форми вільних коливань розглянутої оболонки з жорстко закріпленими торцями зображено на рис. 4. Переміщення точок оболонок для візуалізації показані в чотирикратному збільшенні.



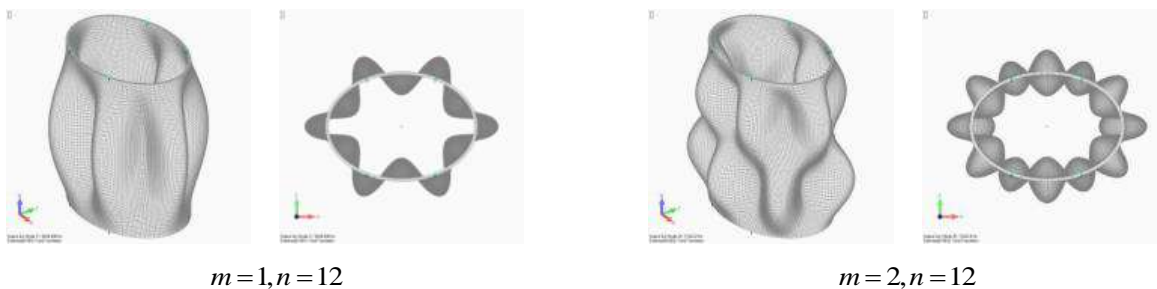


Рис. 4. Форми вільних коливань циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу з жорстко закріпленими торцями

## ВИСНОВКИ

Розраховано дві тестові задачі та проведено порівняння з результатами, отриманими чисельно і експериментально іншими авторами. Розбіжність між чисельними розрахунками не перевищує 4%, розбіжність між чисельним розрахунком, який реалізовано на FEMAP та результатами, отриманими експериментально, не перевищує 23%, що є допустимою і свідчить про коректність використання запропонованого методу до розв'язування задач цього класу.

Проведено новий розрахунок частот і форм вільних коливань циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу з жорстко закріпленими торцями, а також проведено порівняння отриманих частот з частотами, отриманими для такої самої оболонки з жорстко закріпленим одним торцем, інший торець вільний. У результаті дослідження встановлено, що жорстке закріплення другого торця дає можливість підвищити першу резонансну частоту вдвічі, при цьому форма коливань не відповідає формі коливань першої резонансної частоти консольно закріпленої оболонки.

Отримані результати дають можливість керувати спектром частот вільних коливань оболонкових конструкцій для виключення її з резонансного режиму за рахунок варіації граничних умов, що є однією з актуальних проблем дослідження міцності оболонкових конструкцій.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Budak V. D., Grigorenko A. Ya., Borisenko M. Yu., Boychuk E. V. Determination of eigenfrequencies of an elliptic shell with constant thickness by the finite-element method. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 212, № 2. P. 182–192.
2. Будак В. Д., Григоренко А. Я., Борисенко М. Ю., Бойчук Е. В. Вільні коливання еліптичної оболонки змінної товщини. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка*. 2014. 2(32). С. 32–37.
3. Будак В. Д., Григоренко О. Я., Борисенко М. Ю., Бойчук О. В. Вплив ексцентриситету еліптичної оболонки на розподіл її динамічних характеристик. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія: «Фізико-математичні науки»*. 2015. № 1. С. 23–28.
4. Будак В. Д., Григоренко О. Я., Борисенко М. Ю., Бойчук О. В. Про вільні коливання циліндричних оболонок кругового та некругового поперечного перерізу при різних граничних умовах. *Вісник Запорізького національного університету, серія фізико-математичні науки*. 2015. № 2. С. 20–28.
5. Лекомцев С. В. Конечно-элементные алгоритмы расчёта собственных колебаний трёхмерных оболочек. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2012. 5, № 2. С. 233–243.
6. Budak V. D., Grigorenko A. Ya., Khorishko V. V., Borisenko M. Yu. Holographic Interferometry Study of the Free Vibrations of Cylindrical Shells of Constant and Variable Thickness. *International applied mechanics*. 2014. Vol. 50, № 1. P. 68–74.
7. Будак В. Д., Григоренко О. Я., Борисенко М. Ю., Пригода О. П., Бойчук О. В. Визначення власних частот тонкостінної оболонки некругового поперечного перерізу методом стробоголографічної інтерферометрії. *Проблеми вычислительной механики и прочности конструкций*. 2015. № 24. С. 18–25.

8. Шалабанов А. К. Исследование высокочастотных колебаний цилиндрических оболочек на основе двух методов голографической интерферометрии. *Исслед. по теор. пластин и оболочек*. 1979. № 14. С. 184–190.
9. Рудаков К. Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций. Київ: НТУУ «КПІ», 2011. 317 с.

### REFERENCES

1. Budak, V. D., Grigorenko, A. Ya., Borisenko, M. Yu. & Boychuk, E. V. (2016). Determination of eigenfrequencies of an elliptic shell with constant thickness by the finite-element method. *Journal of Mathematical Science*, Vol. (212), No. 2, pp. 182-192.
2. Budak, V. D., Grigorenko, O. Ya., Borisenko, M. Yu. & Boychuk, O. V. (2014). Vilni kolyvannia eliptychnoi obolonky zminnoi tovshchyny, *Visnyk Kyivskogo natsionalnogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Matematika. Mekhanika*, 2(32), pp. 32-37.
3. Budak, V. D., Grigorenko, O. Ya., Borisenko, M. Yu. & Boychuk, O. V. (2015). Vplyv ekscentrycity eliptychnoi obolonky na rozpodil yii dynamichnykh kharakterystyk, *Visnyk Kyivskogo natsionalnogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka, seriia Fizyko-matematychni nauky*, No. 1, pp. 23-28.
4. Budak, V. D., Grigorenko, O. Ya., Borisenko, M. Yu. & Boychuk, O. V. (2015). Pro vilni kolyvannia tsylindrychnykh obolonok kruhovooho ta nekruhovooho poperechnoho pererizu pry riznykh hranychnykh umovakh. *Visnyk Zaporizhskogo natsionalnogo universytetu, seriia Fizyko-matematychni nauky*, No. 2, pp. 20-28.
5. Lekomtsev, S. V. (2012). Konechno-elementnyie algoritmy rascheta sobstvennykh kolebaniy trekhmernykh obolochek, *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, 5, No. 2, pp. 233-243.
6. Budak, V. D., Grigorenko, A. Ya., Khorishko V. V. & Borisenko, M. Yu. (2014). Holographic Interferometry Study of the Free Vibrations of Cylindrical Shells of Constant and Variable Thickness, *International applied mechanics*, Vol. 50, No. 1, pp. 68-74.
7. Budak, V. D., Grigorenko, O. Ya., Borisenko, M. Yu., Prygoda, O. P. & Boychuk, O. V. (2015). Vyznachennia vlasnykh chastot tonkostinnoi obolonky nekruhovooho poperechnoho pererizu metodom stroboholohrafichnoi interferometrii. *Problemy vychislitel'noi mekhaniki i prochnosti konstruksii*, No. 24, pp. 18-25.
8. Shalabanov, A. K. (1979). Issledovanie vysokochastotnykh kolebaniy tsilindricheskiy obolochek na osnove dvukh metodov golograficheskoy interferometrii, *Issled. po teor. plastin i obolochek*, No. 14, pp. 184-190.
9. Rudakov, K. N. (2011). FEMAP 10.2.0. Geometricheskoe i konechno-elementnoe modelirovanie konstruksii. Kiev: NTUU «KPI».

УДК 539.3

## НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ ПЛОСКОГО БАГАТОШАРОВОГО П'ЄЗОЕЛЕМЕНТА З УРАХУВАННЯМ ПРУЖНОГО ПІДКРІПЛЮЮЧОГО ШАРУ Й АКУСТИЧНОГО СЕРЕДОВИЩА

Григор'єва Л. О.

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,  
вул. П. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна*

[l\\_grigoryeva@ukr.net](mailto:l_grigoryeva@ukr.net)

Розвинуто чисельний спосіб дослідження нестационарного напружено-деформівного стану плоских багатошарових електромеханічних перетворювачів з електродованими поверхнями спряження при електричних збуреннях. Проводиться дослідження параметрів електромеханічного стану перетворювача в динаміці в залежності від кількості електродованих шарів та оцінка впливу пружного шару та акустичного середовища.

*Ключові слова: п'єзокерамічний перетворювач, нестационарні коливання, електричне збурення, багатошаровий п'єзоелемент.*

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛОСКОГО МНОГОСЛОЙНОГО ПЬЕЗОЭЛЕМЕНТА С УЧЕТОМ УПРУГОГО ПОДКРЕПЛЯЮЩЕГО СЛОЯ И АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Григорьева Л. А.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины,  
ул. П. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина*

[l\\_grigoryeva@ukr.net](mailto:l_grigoryeva@ukr.net)

Развит численный способ исследования нестационарного напряженно-деформированного состояния плоских многослойных электромеханических преобразователей с электродированными поверхностями сопряжения при электрических возмущениях. Проводится исследование параметров электромеханического состояния преобразователя в динамике в зависимости от количества слоев и оценка влияния упругого слоя и акустической среды.

*Ключевые слова: пьезокерамический преобразователь, нестационарные колебания, электрическое возмущение, многослойный пьезоэлемент.*

## UNSTEADY VIBRATIONS OF PLANE MULTILAYERED PIEZOELEMENT IN VIEW OF ELASTIC REINFORCING LAYER AND AN ACOUSTIC MEDIUM

Grigoryeva L. O.

*S. P. Tymoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine,  
P. Nesterov str., 3, Kyiv, 03057, Ukraine*

[l\\_grigoryeva@ukr.net](mailto:l_grigoryeva@ukr.net)

Numerical study of unsteady stress-strain state of multilayered planar electromechanical transformers with electroded coupling surfaces at electrical disturbances are developed. A study of electromechanical transducer state options dynamics depending on the number of electroded layers with the same polarization direction and impact of elastic layer and the acoustic environment assessment is provided.

*Key words: piezoceramic transducer, transient vibrations, electrical disturbances, multilayered piezo element.*

### ВСТУП

Зараз у промисловості широко застосовуються технічні пристрої, у яких використовується явище п'єзоєфекту, що пояснює великий інтерес до п'єзоелектричних матеріалів і приладів, створених на їх основі. Геометричні розміри і форма п'єзокерамічних елементів конструкцій визначаються їх призначенням і типом навантаження. Останнім часом значного поширення в акустoeлектроніці набули багат шарові п'єзоелементи пластинчастої форми, що експлуатуються в різних режимах, у тому числі нестационарних. У зв'язку з цим актуальною проблемою стало дослідження нестационарного деформування та вибір оптимальних режимів експлуатації та конфігурації таких перетворювачів.

Фундаментальні підходи до постановки та розв'язання задач нестационарної гідропружності описано в класичній літературі [1, 2 та ін.]. Двовимірні коливання пружного шару досліджувались в [3]. Товщинні коливання однорідних п'єзоелектричних тіл досліджувались в [4-7]. У [8, 9] побудовано аналітичний розв'язок задачі про коливання багат шарового п'єзокерамічного пакету з зустрічною поляризацією суміжних шарів при електричних збуреннях з урахуванням зовнішнього пружного шару та акустичного середовища. На жаль, у [8] надано лише результати, отримані для пакету з вільною поверхнею, в [9] їх немає.

У роботі розглядаються коливання п'єзокерамічних багат шарових плоских тіл, планарні розміри яких набагато більші за товщину. В такому випадку перш за все виникають товщинні нестационарні коливання, що носять високочастотний характер порівняно з планарними коливаннями, вплив яких проявляється через певну кількість пробігів хвилі по товщині пластини. У статті побудовано чисельний спосіб розв'язання задачі про нестационарні товщинні коливання плоского багат шарового нескінченного у площині



п'єзокерамічного тіла з паралельною поляризацією шарів та досліджено динаміку зміни параметрів електромеханічного стану перетворювача залежно від кількості електродованих шарів з урахуванням впливу пружного підкріплюючого шару та акустичного середовища.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається багатошаровий поляризований по товщині п'єзоелектричний плоский елемент, який складається з  $n$  шарів різних п'єзокерамічних матеріалів товщиною  $h$  кожен. Одна поверхня елемента жорстко закріплена, інша підкріплена пружним шаром товщиною  $l$  та стикається з півпростором ідеальної стисливої рідини. Коливання кожного шару описуються рівнянням руху і рівнянням для електричної індукції

$$\rho^k \frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x}; \quad \frac{\partial D_x^k}{\partial x} = 0, \quad i=1..n \quad (1)$$

при матеріальних співвідношеннях, що відповідають радіальній поляризації всього пакету

$$\sigma_x^k = c_{33}^{E k} \frac{\partial u^k}{\partial x} + e_{33}^k \frac{\partial \varphi^k}{\partial x}; \quad D_x^k = e_{33}^k \frac{\partial u^k}{\partial x} - \varepsilon_{33}^{S k} \frac{\partial \varphi^k}{\partial x}. \quad (2)$$

Коливання ізотропного пружного підкріплюючого шару описуються рівнянням

$$\rho_{n+1} \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_x^{n+1}}{\partial x}, \quad \sigma_x^{n+1} = E \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}. \quad (3)$$

Рівняння руху акустичного середовища

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad y \in (0, \infty). \quad (4)$$

Між шарами виконуються умови повного контакту

$$u^k(hk) = u^{k+1}(hk), \quad \sigma_x^k(hk) = \sigma_x^{k+1}(hk), \quad k=1..n, \quad (5)$$

$$u^n(hn) = u^{n+1}(hn), \quad \sigma_x^n(hn) = \sigma_x^{n+1}(hn),$$

між пружним шаром та акустичним середовищем виконується умова нерозривності

$$\sigma_x^{n+1}(hn+l) = -p(0,t) = \gamma \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{y=0}, \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{hn+l,t} = \left. \frac{d\psi}{dt} \right|_{y=0}. \quad (6)$$

Поверхні розділу шарів електродовані, до них підводиться різниця потенціалів

$$\varphi(hk) = (-1)^{k+1} H(t), \quad k=0..n. \quad (7)$$

Початкові умови приймаємо нульовими:

$$u(x,0) = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0. \quad (8)$$

Тут  $u^k(x,t)$  і  $\sigma_x^k(x,t)$  – механічні переміщення і напруження,  $D_x^k(x,t)$  – компонента вектора електричної індукції в напрямку осі  $ox$ ;  $\varphi^k(x,t)$  – електричний потенціал;  $\rho^k$  – щільність матеріалу;  $c_{33}^{E k}$  – модуль пружності при постійному електричному полі;  $\varepsilon_{33}^{S k}$  – діелектрична проникність при постійній деформації;  $e_{33}^k$  – п'єзоелектричний модуль  $k$ -го шару,  $E$ ,  $\rho_{n+1}$  – модуль Юнга і щільність пружного шару,  $\psi$  - хвильовий потенціал,  $\gamma$ ,  $c_a$  – щільність і швидкість поширення хвилі в акустичному просторі.

Диференціальні рівняння (1) з урахуванням матеріальних співвідношень (2)-(3) можна звести до рівнянь

$$\frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2} = c_k^2 \frac{\partial^2 u^k}{\partial x^2}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial x^2} = \frac{e_{33}^k}{\varepsilon_{33}^{S k}} \frac{\partial^2 u^k}{\partial x^2}. \quad (10)$$

Тут стала  $c_k = \sqrt{\frac{1}{\rho^k} \left( c_{33}^{E k} + \frac{e_{33}^{k 2}}{\varepsilon_{33}^{S k}} \right)}$  – швидкість поширення електропружної хвилі в  $k$ -му шарі.

Приведемо систему рівнянь електропружності (1)-(3) і граничні умови (5) до безрозмірного вигляду за допомогою позначень

$$\begin{aligned} \bar{x} = \frac{x}{h}; \quad \bar{t} = \frac{t}{t_h}; \quad \bar{u} = \frac{u}{h}; \quad \bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x}{c_{00}}; \quad \bar{\varphi} = \varphi \sqrt{\frac{\varepsilon_{00}}{c_{00} h^2}}; \quad \bar{D}_x = \frac{D_x}{\sqrt{c_{00} \varepsilon_{00}}}; \quad \bar{c}_k = \frac{c_k}{c_{k00}}; \\ \bar{V}(\bar{t}) = V(\bar{t} \cdot t_h) \sqrt{\frac{\varepsilon_{00}}{c_{00} h^2}}; \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{00}}; \quad \bar{c}_{33} = \frac{c_{33}^E}{c_{00}}; \quad \bar{e}_{33} = \frac{e_{33}}{\sqrt{c_{00} \varepsilon_{00}}}; \quad \bar{\varepsilon}_{33} = \frac{\varepsilon_{33}^S}{\varepsilon_{00}}, \end{aligned} \quad (11)$$

де  $\rho_{00}, c_{00}, \varepsilon_{00}, t_h = h/c_{k00}$  – нормуючі величини, наприклад параметри першого шару. Такі позначення дозволяють зберегти первинний вигляд рівнянь, початкових і граничних умов. Далі знаки безрозмірності опущені, і все результати представлені в безрозмірному вигляді.

Інтегруючи (10) при електричних граничних умовах (7), отримуємо вираз для електричного потенціалу через переміщення

$$\frac{\partial \varphi^k}{\partial x} = \frac{e_{33}^k}{\varepsilon_{33}^{S k}} \left( \frac{\partial u^k}{\partial x} - \frac{u^k(kh) - u^k((k-1)h)}{h} \right) + \frac{2}{h} (-1)^{k+1} H(t).$$

Тепер виразу для механічного напруження можна надати вигляду ( $e_k = e_{33}^{k 2} / \varepsilon_{33}^{S k}, h = 1$ )

$$\sigma_x^k = c_{33}^{E k} \frac{\partial u^k}{\partial x} + e^k \left( \frac{\partial u^k}{\partial x} - u^k(kh) + u^k((k-1)h) \right) + 2e_{33}^k (-1)^{k+1} H(t). \quad (12)$$

Умова спряження  $\sigma_x^k(k) = \sigma_x^{k+1}(k)$  (12) набуває вигляду ( $c_{33}^* = c_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}^S}$ ):

$$\begin{aligned} c_{33}^{* k+1} \frac{\partial u^{k+1}}{\partial x}(k) - c_{33}^{* k} \frac{\partial u^k}{\partial x}(k) + (-e_{k+1} u^{k+1}(k+1) + (e_{k+1} + e_k) u^{k+1}(k) - e_k u^k(k-1)) = \\ = 2(e_{33}^k + e_{33}^{k+1}) (-1)^{k+1} H(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Вводимо розбиття  $x_{(k-1)m+i} = ((k-1)m+i-1)dx, i=0..m, k=1, \dots, n, dx=1/m$ , та шукаємо розв'язок у вигляді дискретних значень  $u^k(x_{(k-1)m+i}) = u_{(k-1)m+i}$ . Рівняння руху (9) записуємо за допомогою центральних різниць ( $i=1..m+1, k=1..n+1$ , при  $k=n+1 \quad dx=l/m$ ):

$$\frac{d^2 u_{(k-1)m+i}}{dt^2} = c_k^2 \frac{u_{(k-1)m+i-1} - 2u_{(k-1)m+i} + u_{(k-1)m+i+1}}{dx^2}. \quad (14)$$

Умова спряження (13) із застосуванням односторонніх скінченних різниць другого порядку точності ( $k = 1 \dots n-1$ )

$$\frac{c_{33}^{*k+1}}{2dx}(-3u_{km} + 4u_{km+1} - u_{km+2}) - \frac{c_{33}^{*k}}{2dx}(3u_{km} - 4u_{km-1} + u_{km-2}) +$$

$$+ (-2_{k+1}u_{(k+1)m} + (e_{k+1} + e_k)u_{km} - e_k u_{(k-1)m}) - 2(e_{33}^k + e_{33}^{k+1})(-1)^{k+1} H(t), \tag{15}$$

умова спряження з пружним шаром

$$c_{33}^{*k} \frac{1}{2dx}(3u_{nm} - 4u_{nm-1} + u_{nm-2}) - E \frac{1}{2dx}(-3u_{nm} + 4u_{nm+1} - u_{nm+2}) +$$

$$+ e_n (-u_{nm} + u_{(n-1)m}) = -2e_{33}^n (-1)^{n+1} H(t). \tag{16}$$

Оскільки в акустичному напівпросторі виникає тільки пряма хвиля тиску, загальний розв’язок хвильового рівняння (4) через метод характеристик має вигляд

$$\psi(x, t) = f(c_a t - y),$$

де  $f(\cdot)$  – довільна функція, що задовольняє граничні умови. З умов (6) маємо

$$\sigma_x^{n+1}(hn+l, t) = \gamma c_a f'(c_a t), \quad \frac{du^{n+1}}{dt}(hn+l, t) = -f'(c_a t).$$

Отримуємо імпедансну граничну умову

$$\sigma_{rr}^{n+1}(hn+l, t) + z_a v^{n+1}(hn+l, t) = 0, \tag{17}$$

де  $z_a$  – питомий акустичний опір середовища. Імпедансна гранична умова в цій постановці також дає визначення питомого акустичного опору як відносини амплітуди звукового тиску в середовищі до швидкості коливань її частинок при проходженні через середовище звукової хвилі. Тиск і швидкість у середовищі визначаються через функцію  $f'(z) = v^{n+1} \left( hn+l, \frac{z}{c_a} \right)$  як

$$p(y, t) = z_a v^{n+1} \left( hn+l, t - \frac{y}{c_a} \right), \quad v(y, t) = v^{n+1} \left( hn+l, t - \frac{y}{c_a} \right).$$

У безрозмірних змінних (11) з (17) маємо

$$E \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \left( n + \frac{l}{h} \right) + z_a \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} \left( n + \frac{l}{h} \right) = 0.$$

Відповідне різницеве рівняння

$$\frac{du_{(n+1)m}}{dt} = - \frac{E}{z_a 2dx_n} (3u_{(n+1)m} - 4u_{(n+1)m-1} + u_{(n+1)m-2}). \tag{18}$$

Систему рівнянь (14), (18), доповнену (8), (15)-(17), зручно розв’язувати за допомогою методу Рунге-Кутта або явних і неявних різницевих схем за часом. Тестування запропонованого методу здійснювалося шляхом згущення сітки, порівняння результатів, отриманих різними чисельними схемами за часом та в частинному випадку з результатами, представленими в [8].

### ЧИСЕЛЬНИЙ ПРИКЛАД

Розглянемо коливання багат шарового пакета товщиною  $nh$  з кераміки PZT-4

$$c_{33}^E = 11,5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad e_{33} = 15,1 \text{ Кл/м}^2, \quad \varepsilon_{33}^S = 562 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}, \quad \rho = 7500 \text{ кг/м}^3,$$

жорстко закріпленого при  $x=0$  та при  $x=nh$  підкріпленого пружним шаром товщиною  $l$  з параметрами  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $\rho_{n+1} = 7850 \text{ кг/м}^3$ . Питомий акустичний опір середовища  $z_a = 150 \cdot 10^4 \text{ Па} \cdot \text{с/м}$ . При обезрозміренні вибираємо  $c_{00} = c_{33}^E$ ,  $\rho_{00} = \rho$ ,  $\varepsilon_{00} = \varepsilon_{33}^S$ ,  $c_{k00} = c_k$ .

Оцінити вплив підкріплюючого пружного шару та акустичного середовища ми можемо за допомогою рис. 1. Бачимо, що вільна поверхня п'єзоелемента набуває більше ніж удвічі більших переміщень, ніж поверхня з пружним шаром та з урахуванням акустичного середовища. Переміщення поверхні елемента з пружним шаром  $l = h/4$  виявились меншими, ніж з  $l = h/2$ .

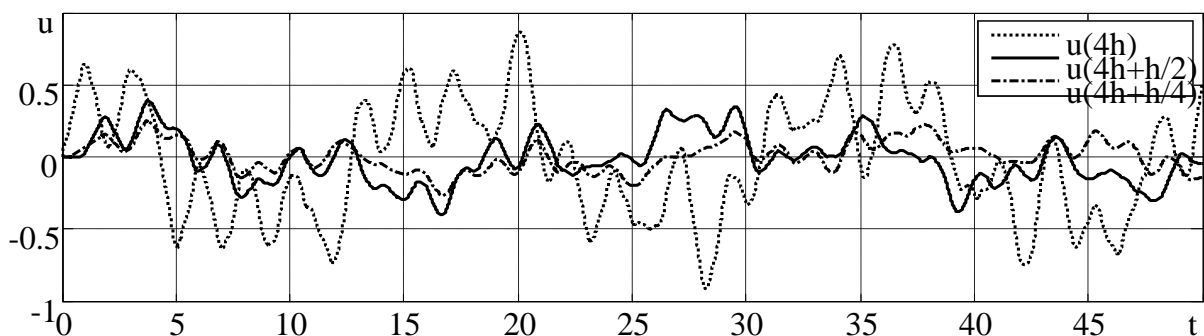


Рис. 1. Переміщення незакріпленої поверхні чотиришарового елемента з вільною поверхнею та з урахуванням шарів різної товщини та акустичного середовища

Напруження в закріпленні розглянутих шарів ілюструються рис. 2. Бачимо, що на початковому інтервалі напруження для всіх випадків співпадають, потім проявляється вплив відбитої від незакріпленої поверхні хвилі. Час виникнення відхилень різний у зв'язку з різною товщиною п'єзоелемента разом з пружним шаром. Максимальні значення напружень для всіх випадків майже однакові, але виникають у різні моменти часу.

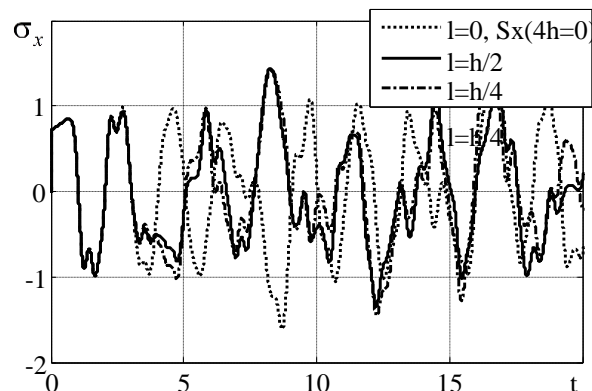


Рис. 2. Напруження в закріпленні для чотиришарового елемента з вільною поверхнею та з урахуванням шарів різної товщини та зовнішнього середовища

На рис. 3 наведено переміщення зовнішньої поверхні для п'єзоелементів з різною кількістю шарів. Бачимо, що при непарних  $n$  п'єзоелемент набуває набагато більших переміщень, ніж при парних. Це пояснюється протилежним напрямком коливань сусідніх шарів при однаковому напрямку поляризації. Отже, для отримання максимальних переміщень при паралельній поляризації потрібно використовувати п'єзоелементи з непарною кількістю шарів.

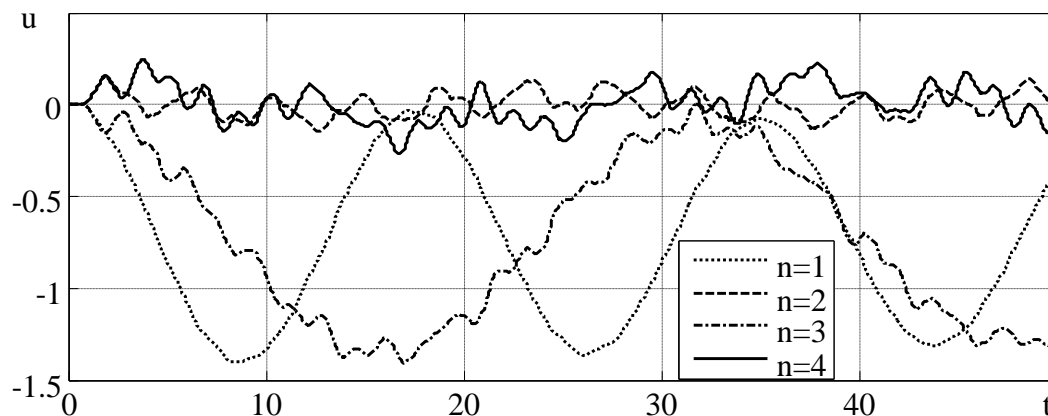


Рис. 3. Коливання зовнішньої поверхні п'єзоелементів з різною кількістю шарів з врахуванням пружного шару  $l = h/4$  та акустичного середовища

### ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Бабаєв А. Э. Гидроупругость систем оболочек. Киев: Вища школа, 1984. 206 с.
2. Кубенко В. Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой. Киев: Наукова думка, 1979. 184 с.
3. Кубенко В. Д. Нестационарное деформирование упругого слоя при смешанных граничных условиях. *Прикл. механика*. 2016. Т. 52, № 6. С. 3–25.
4. Шульга Н. А., Болкисев А. М. Колебания пьезокерамических тел. Киев: Наукова думка, 1990. 228 с.
5. Григорьева Л. О. Электромеханические нестационарные толщинные колебания пьезокерамического слоя. *Прикл. механика*. 2010. Т. 46, № 2. С. 46–52.
6. Shulga M. O., Grigoryeva L. O. Electromechanical unstationary thickness vibrations of piezoceramic transformers at electric excitation. *Mechanical Vibrations: Types, Testing and Analysis*. New York: Nova Science Publishers. 2010. P. 179–204.
7. Шульга Н. А., Григорьева Л. О. Сравнительный анализ упругоэлектрических толщинных колебаний слоев с искривленными границами. *Прикл. механика*. 2011. Т. 47, № 2. С. 86–95.
8. Бабаєв А. Э. Нестационарные волны в сплошных средах с системой отражающих поверхностей. Киев: Наук. думка, 1990. 176с.
9. Бабаєв О. А., Штефан Н. І., Гнатейко Н. В. Збудження багат шарового п'єзокерамічного пакету нестационарним електричним сигналом. *Молодий вчений*. 2016. № 3(30). С. 296–299.

### REFERENCES

1. Guz, A. N., Kubenko, V. D. & Babaev A. E. (1984). Hydroelasticity of the systems of shells. Kiev: Vyshcha shkola.
2. Kubenko, V. D. (1979). Non-stationary co-operating of elements of constructions with an environment. Kiev: Naukova dumka.
3. Kubenko, V. D. (2016). Nonstationary Deformation of an Elastic Layer with Mixed Boundary Conditions. *International Applied Mechanics*, Vol. 52, Iss. 6, pp. 3-25.
4. Shul'ga, N. A. & Bolkisev, A.M. (1990). Vibrations of piezoceramic bodies. Kiev: Naukova dumka.
5. Grigor'eva, L. O. (2010). Electromechanical nonstationary thickness vibrations of a piezoceramic layer. *International Applied Mechanics*, Vol. 46, Iss. 2, pp. 159-164.
6. Shulga, M. O. & Grigoryeva, L.O. (2010). Electromechanical unstationary thickness vibrations of piezoceramic transformers at electric excitation. *Mechanical Vibrations: Types, Testing and Analysis*, pp. 179-204. New York: Nova Science Publishers.
7. Shul'ga, N. A. & Grigor'eva, L. O. (2011). Comparative Analysis of the Electroelastic Thickness Vibrations of Layers with Curved Boundaries. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 47, No. 2, pp. 177-185.
8. Babaev, A. E. (1990). Non-stationary waves in continuous environments with the system of catopters. Kiev: Nauk. dumka.
9. Babajev, O. A., Shtefan, N. I. & Gnatejko, N. V. (2016). Excitation multilayer piezoceramic package nonstationary electrical signals. *Molodyj vchenyj*, No. 3(30), pp. 296-299.

УДК 534:539.3

## МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ АЕРОКОСМІЧНИХ СИСТЕМ НА БАЗІ ГІБРИДНИХ АСИМПТОТИЧНИХ МЕТОДІВ

Грищак Д. Д.

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

grk@znu.edu.ua

У статті запропоновано гібридний аналітико-чисельний метод дослідження нелінійної динаміки моделей аерокосмічних систем з параметрами, залежними від часу, при заданому характері зовнішнього навантаження. Аналізується ефективність запропонованого підходу до розв'язку класу задач динаміки, які зводяться до звичайних і частинними похідними нелінійних сингулярних диференціальних рівнянь та їх систем із змінними коефіцієнтами. Подається порівняння здобутих наближених аналітичних розв'язків із прямим чисельним інтегруванням основних рівнянь дослідження.

*Ключові слова: математична модель, нелінійна задача, змінні за часом параметри, математичний маятник, коливання супутника, еліптична орбіта, літальний апарат, демпфування, збурена поверхня, концентрована рухомо маса, гібридний асимптотичний підхід, візуалізація динамічного процесу.*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ АЭРОКОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА БАЗЕ ГИБРИДНЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Грищак Д. Д.

*Запорожский национальный университет,  
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

grk@znu.edu.ua

В работе предложен гибридный аналитико-численный метод исследования нелинейной динамики моделей аэрокосмических систем с параметрами, зависящими от времени, при заданном характере внешнего нагружения. Анализируется эффективность предложенного подхода к решению класса задач динамики, который сводится к обыкновенным и в частных производных нелинейных сингулярных дифференциальных уравнений и их систем с переменными коэффициентами. Дается сравнение полученных приближенных аналитических решений с прямым численным интегрированием основных уравнений исследования.

*Ключевые слова: математическая модель, нелинейная задача, переменные во времени параметры, математический маятник, колебания спутника, эллиптическая орбита, летательный аппарат, демпфирование, возмущенная поверхность, асимптотических подход, визуализация динамического процесса.*

## MATHEMATICAL MODELS FOR NONLINEAR DYNAMICS OF AIRSPACE SYSTEMS ON BASIS OF HYBRID ASYMPTOTIC METHODS

Gristchak D. D.

*Zaporizhzhye National University,  
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhye, 69600, Ukraine*

grk@znu.edu.ua

This paper deals with the proposed hybrid analytical-numerical method for nonlinear dynamics problem of airspace systems with time depending parameters under the external loading. Effectiveness of proposed approach for some class of dynamic problems which are described by ordinary and particular derivatives nonlinear singular differential equations with variable coefficients and systems of equations is analyzed. Proposed method is applied for investigation of control problem for forced vibrations of rotating mathematical pendulum with dependent from time length and mass as a mathematical model of dynamical systems with variable in time parameters. Basic differential equations of such problems are nonlinear with variable coefficients that in the general case can not be integrated analytically exactly. There are popular direct numerical methods of integration this type of equations or approximate asymptotic approaches. For the asymptotic solution of nonlinear problem on the first step of hybrid

approach the solution is presented by perturbation method on parameter of nonlinearity. Introducing it into initial equation and acquainting the coefficients at equal order of parameter nonlinearity, the system of singular linear equations with variable coefficients is obtained. On the second step the phase integral (or WKB) method is explored. Finally an approximate analytical solution for the problem is formulated. Comparison of obtained analytical solution with direct numerical integration of basic equations is given. A two-step hybrid perturbation – WKB (or phase-integral) method is presented for the solution of a satellite nonlinear vibration problem in the plane of elliptic orbit. The resulting (an approximate) analytical solutions has a form of a sum where each term consists of the product of two functions according to perturbation (on parameter at nonlinear term) and WKB (on singular parameter) methods. Visualization of nonlinear satellite vibration in the plane of circular and elliptical orbits is given.

Proposed approach has been applied for the investigation of flying apparatus nonlinear vibration near the regular-perturbed surface. The problem leads to singular nonlinear equation with variable in time coefficients at given initial conditions. Obtained solution of the problem isn't limited by the value of non dimensional amplitude of perturbed surface and nonlinearity order of evocative forces.

Nonlinear dynamic problem for the airspace structure on the basis of flexible beam with moving concentrated mass which is a function from time and special algorithm of dynamical process visualization are analyzed.

*Key words: mathematical model, nonlinear problem, variable in time parameters, mathematical pendulum, satellite vibration, elliptical orbit, flying apparatus, damping, perturbed surface, asymptotic approach, visualization dynamic process.*

## ВСТУП

На стадії проектування конструкцій нової техніки, зокрема аерокосмічних систем, важливим елементом є наявність математичних моделей, які дозволяють одержати аналітичні залежності для надання надійних оцінок і рекомендацій щодо вибору раціональних параметрів та виявити функціональну залежність динамічних властивостей від характеру зміни їх за часом з урахуванням реальних схем зовнішнього навантаження та оцінити, у ряді випадків, результати прямого чисельного розрахунку. Необхідно зауважити, що точні аналітичні розв'язки вказаних проблем, які зводяться до нелінійних диференціальних рівнянь сингулярного типу зі змінними коефіцієнтами та їх систем, можуть бути здобуті лише у виняткових випадках. Для аналізу конструкцій зі змінними за часом і координатами параметрами, зазвичай, застосовуються чисельні методи. Однак, прямі чисельні підходи до аналізу нелінійних проблем динаміки систем зі змінними параметрами не дозволяють у повному обсязі провести якісний аналіз впливу характеру зміни параметрів досліджуваної конструкції, зокрема за часом, на її динамічну поведінку на етапі проектування нової системи. Як свідчить досвід застосування аналітичних і чисельних підходів, з одного боку асимптотичні методи є досить дієвим засобом розв'язку задач у таких напрямках природознавства, як квантова механіка, механіка деформівного твердого тіла, гідроаеромеханіка, прикладна газодинаміка, тепло-масоперенос та інші, з другого – попередній асимптотичний аналіз досліджуваних процесів (особливо нелінійних) може суттєво підвищити ефективність чисельних алгоритмів аналізу проблем нелінійної динаміки, зокрема конструкцій аерокосмічної техніки.

Не зважаючи на можливість одержання розв'язків проблем нелінійної динаміки на базі моделей із використанням сучасних чисельних методів, одержання надійних алгоритмів розв'язку значної кількості динамічних задач аерокосмічної техніки є проблемою, яка пов'язана зі створенням відповідних математичних моделей із застосуванням сучасних аналітичних, зокрема асимптотичних, методів із застосуванням існуючих програмних комплексів.

Що стосується літальних апаратів, то дослідження особливостей динамічних процесів у конструкціях зі змінними параметрами за координатами та часом є досить актуальною проблемою не тільки для інженерів-механіків, які займаються проектуванням сучасних аерокосмічних систем, аналізуючи міцність, статичну і динамічну несучу здатність в екстремальних умовах зовнішнього навантаження, але і для конструкторів, які на базі цих характеристик проектують системи управління і стабілізації літального апарату як об'єкта регулювання. Знання можливих змін динамічних характеристик літального апарату в часі

дозволяє спростити вимоги до автомату стабілізації і покращити стійкість руху літального апарату загалом.

Не зважаючи на існування досить потужних чисельних програмних комплексів, для якісного аналізу нелінійних систем зі змінними параметрами необхідні удосконалені математичні моделі на базі ефективних аналітичних, у тому числі наближених, розв'язків, які із застосуванням чисельних методів дають змогу надати достовірний аналіз досліджуваних конструкцій на етапі проектування.

При цьому, математичні моделі динамічних процесів в аерокосмічних системах повинні враховувати специфіку, зумовлену наявністю змінності геометричних та жорсткісних характеристик і маси за координатами і часом, а також ефекти, пов'язані з геометричною нелінійністю та можливістю демпфуванням досліджуваних процесів.

Основна увага в статті приділена аналізу на базі існуючих публікацій, пов'язаних із математичним моделюванням нелінійних динамічних процесів в аерокосмічних системах на базі моделі математичного маятника зі змінними в часі параметрами і пружного стрижня із концентрованою масою, залежною від часу, з розширенням області застосування гібридних асимптотичних методів.

### ДИНАМІКА ОБЕРТОВОГО МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА ЗІ ЗМІННИМИ В ЧАСІ ПАРАМЕТРАМИ

Проблема управління математичним маятником зі змінними за часом параметрами привертає останнім часом увагу дослідників у зв'язку з тим, що модель маятника може суттєво відображати основні динамічні ефекти в реальних системах. Необхідно зазначити, що існуючі розв'язки, зазвичай, зводяться до вирішення рівняння Мат'є за умови наявності кубічної складової нелінійного рівняння динаміки системи зі сталими параметрами [1-7]. Базове рівняння нелінійних коливань обертового маятника зі змінними параметрами має вигляд [8]:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + D'(t) \frac{dv}{dt} = \mu \left[ \beta_0^2 \varphi(t) \sin 2v - \frac{\sin v}{1 + \psi(t)} \right] + \tilde{F}(t), \quad (1)$$

де  $\mu = \frac{g}{L_0} = \omega_0^2$  – параметр власної частоти коливань лінеаризованої системи із незалежними від часу параметрами,  $\varphi(t) = [1 + \eta(t)]$  – функція зміни швидкості обертання маятника від часу;  $\beta_0^2 = \frac{\Omega_0^2}{2\omega_0^2}$  – відносний параметр частот коливань;  $D'(t) = \frac{\varphi'(t)}{[1 + \varphi(t)]} + \frac{\psi'(t)}{[1 + \psi(t)]}$  – функція зміни маси та довжини маятника за часом.

Відповідно до праці [5] на першому етапі застосування гібридного асимптотичного методу розв'язок рівняння (1) представляємо у вигляді розкладу за методом збурення по параметру  $\mu$ :

$$v(t) = v_0(t) + \mu v_1(t) + \dots = \sum_{i=0}^N v_i(t) \mu^i. \quad (2)$$

Після підстановки (2) у рівняння (1) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях параметру  $\mu$ , отримуємо зв'язану систему лінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами

$$\mu^1: \frac{d^1 v_0}{dt^2} + D'(t) \frac{d v_0}{dt} = \tilde{F}(t); \quad (3)$$



$$\mu^2 : \frac{d^2 v_1}{dt^2} + D'(t) \frac{dv_1}{dt} = \beta_0^2 \phi(t) \sin 2v - \frac{\sin v}{1 + \psi(t)}, \tag{4}$$

яка розв'язується за допомогою методу фазних інтегралів [4].

Загальний розв'язок набуває форми [6]

$$v_0(t) = \int \left\{ \exp \left[ \int -P(t) dt \right] \right\} dt \left\{ c_1 + \int \frac{\tilde{F}(t)}{\exp \left[ \int -P(t) dt \right]} dt \right\} + \left\{ c_2 - \int \frac{\tilde{F}(t) \int \left\{ \exp \left[ \int -P(t) dt \right] \right\} dt}{\exp \left[ \int -P(t) dt \right]} dt \right\}. \tag{5}$$

З урахуванням початкових умов

$$\begin{aligned} v_0(0) &= 1, \\ v_0'(0) &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

залежності розв'язку (5) надані на рис. 1.

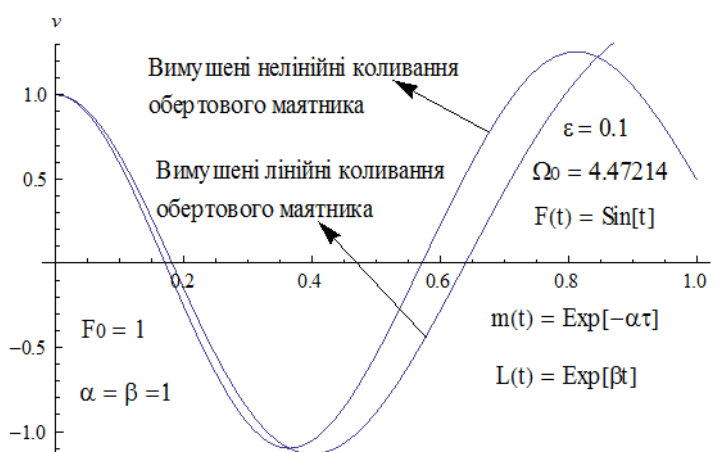


Рис. 1. Порівняння аналітичного та чисельного розв'язків для випадку вимушених коливань обертового маятника із змінними довжиною і масою за експоненціальним законом

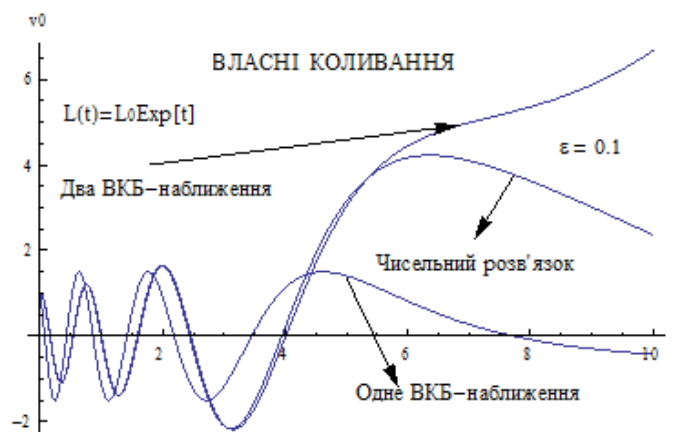


Рис. 2. Порівняння аналітичних та чисельного розв'язків для випадку власних коливань

Результати аналізу можуть бути застосовані для дослідження ефекту спонтанного порушення діаграми біфуркації цієї нелінійної системи, а також для подальшого застосування запропонованого аналітичного підходу для розв'язання математичних моделей нелінійної динаміки.

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ СУПУТНИКА В ПЛОЩИНІ ЕЛІПТИЧНОЇ ОРБИТИ

У припущенні, що супутник рухається в центральному гравітаційному полі так, що його центр мас рухається у площині еліптичної орбіти, основне нелінійне диференціальне рівняння проблеми зі змінними коефіцієнтами має вигляд [1]:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 \delta}{dv^2} - a(v) \frac{d\delta}{dv} + b(v) \sin \delta = F(v), \quad (7)$$

де

$$a(v) = \frac{1}{\mu^2} \frac{2e \sin v}{1 + e \cos v}; \quad b(v) = \frac{1}{1 + e \cos v} \cdot \frac{1}{\mu};$$

$$F(v) = \frac{1}{\mu^2} \frac{4e}{1 + e \cos v} \sin v; \quad \delta = 2\theta, \quad \mu = \frac{A-C}{B}, \quad (8)$$

$\varepsilon^2 = \frac{1}{\mu^2}$  – параметр при старшій похідній.

При цьому параметри системи змінюються в інтервалах

$$-3 \leq \mu \leq 3; \quad 0 \leq e \leq 1. \quad (9)$$

У випадку, коли нелінійна функція не розкладається в ряд, розв'язок отримується у двох ВКБ-наближеннях у формі:

$$\delta(v) = \left[ \frac{E(v)}{Q_2(v)^{0.25}} \right] \left\{ \sin I_2(v) \left[ s_1 + \int \frac{F(v) y_{22}(v)}{A_2^2(v) I_2'(v)} dv + \lambda \int \frac{\bar{b}(v) \sin[\delta_0] y_{22}(v)}{A_2^2 I_2'(v)} dv \right] - \right.$$

$$\left. \cos I_2(v) \left[ s_1 + \int \frac{F(v) y_{12}(v)}{A_2^2(v) I_2'(v)} dv + \lambda \int \frac{\bar{b}(v) \sin[\delta_0] y_{12}(v)}{A_2^2 I_2'(v)} dv \right] \right\}, \quad (10)$$

де  $A_2(v) = \frac{E(v)}{Q_2(v)^{0.25}}$ ,  $y_{12}(v) = \frac{E(v)}{Q_2(v)^{0.25}} \sin[I_2(v)]$ ,  $y_{22}(v) = \frac{E(v)}{Q_2(v)^{0.25}} \cos[I_2(v)]$ ,

$$N(v) = \tilde{b}(v) \sin[\delta_0(v)], \quad Q_2(v) = \frac{1}{2} \left[ a'(v) - \frac{a^2(v)}{2\varepsilon^2} \right], \quad I_2(v) = \int \varepsilon^{-1} Q_2(v)^{1/2} d\xi. \quad (11)$$

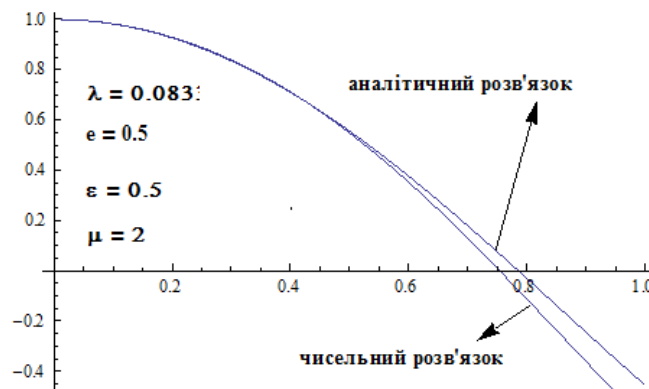


Рис. 3. Співставлення аналітичного та чисельного розв'язків однорідної нелінійної задачі  $\delta = \delta(v)$

Висновок полягає в можливості застосування запропонованого підходу як на початковій стадії зміни параметру  $v$ , так і для великих його значень.

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ І ДЕМПФУВАННЯ АЕРОКОСМІЧНОГО АПАРАТУ ПОБЛИЗУ ЗБУРЕНОЇ ПОВЕРХНІ

Розв'язок математичної моделі на базі запропонованого гібридного підходу не обмежується величиною безрозмірної амплітуди збурень і ступенем нелінійності відновлюючих сил. На відміну від [1], де припускається, що нелінійність моменту відновлюючих сил є кубічною функцією, у нашому дослідженні обговорюється нелінійність порядку  $m$ , а безрозмірна амплітуда збурень  $\mu$  може бути не малою величиною, через те, що в цьому випадку можливе погіршення динамічних характеристик літального апарату. В цьому випадку диференціальне рівняння, яке описує бортове качання (ЛА), набуває вигляду

$$I_x \ddot{\gamma}(t) + n \dot{\gamma}(t) + C_{11} \gamma(t) + C_{22} \gamma^m(t) = 0, \quad (12)$$

де  $C_{11}$ ,  $C_{22}$  даються виразами з роботи [1]:

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_1 + C_2; \quad C_{22} = C_1 3l_1^2 / (7h_1^2) + C_2 3l_2^2 / (7h_2^2); \\ C_1 &= 2\alpha_1 q l_1^3 / [5\bar{h}_1^2 (1 + 6/\lambda_1^2)]; \\ C_2 &= 2\alpha_2 q l_2^2 / [5\bar{h}_2^2 (1 + 6/\lambda_2^2)]; \end{aligned} \quad (13)$$

$q$  – швидкісний напір;  $l_1, l_2$  – половина розмаху крилів;  $\bar{h}_1, \bar{h}_2$  – відносна відстань крил від екрану;  $\lambda_1, \lambda_2$  – відносне подовження;  $\alpha_1, \alpha_2$  – чисельні коефіцієнти;  $n$  – сумарний коефіцієнт демпфування.

Якщо покласти

$$h_1 = h_2 = h^* = h + I_0 \cos \omega t \quad (14)$$

з урахуванням періодичних доданок вертикальних коливань (ЛА) у площині тангажа, вводячи безрозмірний час

$$2\tau = \omega t, \quad (15)$$

отримується основне рівняння задачі у формі:

$$\frac{d^2 \gamma}{d\tau^2} + \nu \frac{d\gamma}{d\tau} + (a - 2\mu \cos 2\tau) \gamma + \eta \gamma^m = 0, \quad (16)$$

де

$$\nu = 2n / (I_x \omega); \quad a = 4C_{11} / (I_x \omega^2); \quad \eta = 4C_{22} / (I_x \omega^2); \quad \mu = a I_0 / h = ka. \quad (17)$$

У загальному випадку рівняння (16) може бути представлено у вигляді:

$$\varepsilon^2 \gamma''(\tau) + \bar{\nu} \gamma'(\tau) + b(\tau) \gamma(\tau) + \bar{\eta} \gamma^m(\tau) = 0, \quad (18)$$

де  $(\quad)' = \frac{d(\quad)}{d\tau}$ ;  $b(\tau) = \frac{a}{\mu} - 2 \cos 2\tau$ ;  $\varepsilon^2 = \frac{1}{\mu}$ ;  $\bar{\nu} = \frac{\nu}{\mu}$ ;  $\bar{\eta} = \frac{\eta}{\mu}$ ;  $\varepsilon$  і  $\bar{\eta}$  – скалярні параметри асимптотичного розвинення відповідно до методів фазних інтегралів та збурення.

Відповідно до запропонованого гібридного асимптотичного підходу [5], отримується розв'язок

$$\gamma(\tau) = E(\tau) \left\{ \sin I(\tau) [c_1 + \bar{c}_1(G(\gamma_0))] + \cos I(\tau) [c_2 + \bar{c}_2(G(\gamma_0))] \right\}, \quad (19)$$

де

$$E(\tau) = \exp \int -\frac{\bar{V}}{2} d\tau; \quad I(\tau) = \int \varepsilon^{-1} Q(\tau)^{1/2} d\tau;$$

$$Q(\tau) = \left[ -\frac{\bar{V}^2}{4} + b(\tau) \right]; \quad \bar{c}_1 = -\bar{\eta} \int \frac{\cos I(\tau) G(\gamma_0)}{\exp \int -\frac{\bar{V}}{2} d\tau \cdot I'(\tau)};$$

$$\bar{c}_2 = +\bar{\eta} \int \frac{\sin I(\tau) G(\gamma_0)}{\exp \int -\frac{\bar{V}}{2} d\tau \cdot I'(\tau)}; \quad G(\gamma_0) = [\gamma_0]^m; \quad \gamma_0 = E(\tau) [c_1 \sin I(\tau) + c_2 \cos I(\tau)].$$

Характерні залежності наведені на рис. 4.

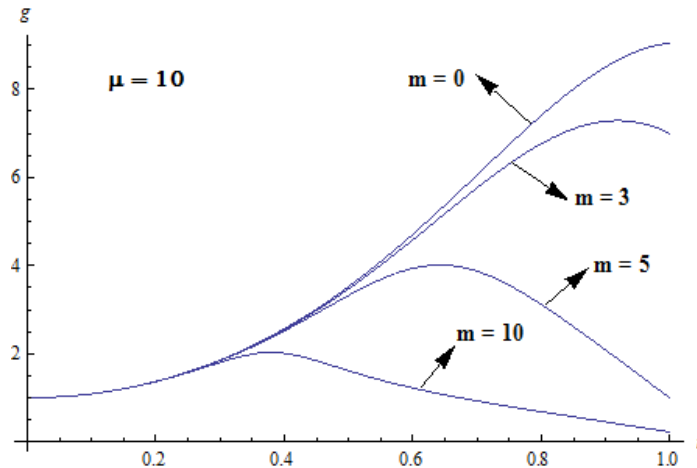


Рис. 4. Порівняння чисельних розв'язків для різного степеня нелінійності

### НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТУ З КОНЦЕНТРОВАНОЮ РУХОМОЮ МАСОЮ, ЗАЛЕЖНОЮ ВІД ЧАСУ

На базі математичної моделі гнучкого пружного стрижня досліджується диференціальне рівняння задач у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, де нелінійні складові третього та п'ятого порядків відповідають високій амплітуді та розтягуванню серединної лінії стрижня, а права частина початкового рівняння описує ефект, пов'язаний із наявністю концентрованої, залежною від часу, рухомої маси:

$$\ddot{q}(\tau) + \omega_0^2(\tau) q(\tau) = \mu \left[ \bar{f}(u, \xi_0) q^3(\tau) + \bar{\gamma}(u, \xi_0) q^5(\tau) \right] + \tilde{Q}_0(\xi) \text{Sin} \tilde{\Omega} \tau =$$

$$= \mu N[q(\tau)] + Q(\xi, \tau),$$

де коефіцієнти мають вигляд

$$\omega_0^2(u, \xi_0) = \frac{[\pi^4 - 2u^2 a(\tau) \sin^2(\pi \xi_0)] \pi^2}{1 + 2\tilde{a}(\tau) \sin^2(\pi \xi_0)};$$

$$f(\xi_0) = \frac{\beta \pi^4}{4[1 + 2\tilde{a}(\tau) \sin^2(\pi \xi_0)]};$$

$$\gamma(\xi_0) = \frac{3\beta \pi^6}{64[1 + 2\tilde{a}(\tau) \text{Sin}^2(\pi \xi_0)]}.$$

Для одержання наближеного аналітичного розв'язку рівняння (22) застосовується гібридний асимптотичний підхід [2, 3], який базується на традиційному методі збурення за параметром

нелінійності досліджуваної системи та методі фазних інтегралів за параметром при старшій похідній:

$$q(\tau) = \frac{1}{[\bar{\omega}_0^2(\tau)]^{0.25}} \left\{ \text{Sin}K(\tau) \left[ c_1 + \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{\bar{Q}(\xi, \tau) \text{Cos}K(\tau)}{\dot{K}(\tau)} + \mu \int \frac{N(q_0, \tau) \text{Cos}K(\tau)}{\dot{K}(\tau)} d\tau \right] + \right. \\ \left. + \text{Cos}K(\tau) \left[ c_2 - \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{Q(\xi, \tau) \text{Sin}K(\tau)}{\dot{K}(\tau)} - \mu \int \frac{N(q_0, \tau) \text{Sin}K(\tau)}{\dot{K}(\tau)} d\tau \right] \right\},$$

де

$$K(\tau) = \int \varepsilon^{-1} \omega_0(\tau) d\tau. \tag{23}$$

Результати чисельного аналізу наведені на рис. 5, 6.

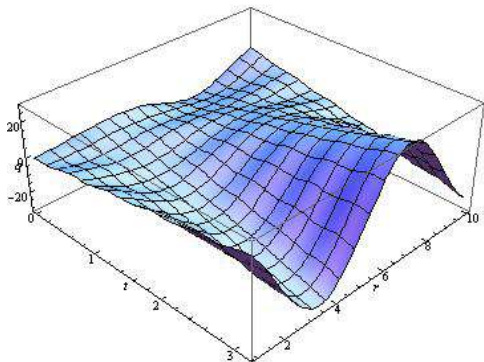


Рис. 5. Залежність від амплітуди функції коливань концентрованої маси в часі

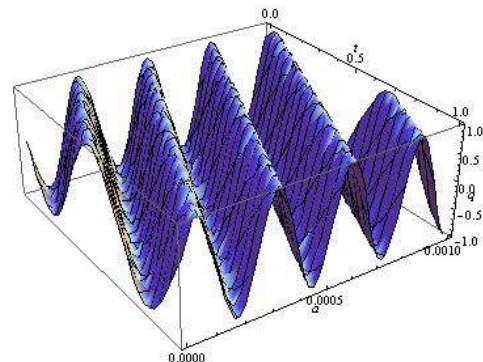


Рис. 6. Вплив безрозмірного параметру рухомої концентрованої маси в часі

### ВИСНОВКИ

Подано аналіз математичних моделей та запропоновано удосконалений алгоритм наближеного аналітичного розв'язку задач нелінійної динаміки ряду аерокосмічних систем, які зводяться до інтегрування сингулярних нелінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Запропонований аналітико-чисельний підхід на базі застосування гібридних асимптотичних методів може бути ефективним при розв'язку нелінійних задач динаміки систем зі змінними в часі параметрами.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Красильников П. С. О нелинейных колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании. *ПММ*. 2012. Т. 76, Вып. 1. С. 36–51.
2. Безгласный С. П., Кутырев Н. И. Управление колебаниями маятника переменной длины. *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*. 2013. Т. 15, № 6(3). С. 590–593.
3. Николис Дж. Динамика иерархических систем. Эволюционное представление. Москва: Мир, 1989. 486 с.
4. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Нестационарные колебания осциллятора переменной массы с учетом вязкого трения. *Вібрації в техніці і технологіях*. 2014. № 3(75). С. 18–27.
5. Азарсков В. Н., Грищак Д. Д. Приближенное аналитическое решение задачи динамики математического маятника переменной массы и длины. «*ABIA-2013*»: Матеріали XI міжнар. наук.-техн. конф. (Київ, 21-23 травня 2013). Київ: НАУ, 2013. Т. 4. С. 22.1–22.4.
6. Azarskov V. N., Gristchak D. D. Vibration damping for the problems of aircraft motion. *J. Electronics and Control Systems*. 2014. N 4(42). P. 30–34.
7. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. Москва: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
8. Брюно А. Д., Петрович В. Ю. Вычисление периодических колебаний спутника. *Математическое моделирование*. 1997. Т. 9, № 6. С. 82–94.

9. Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 1979. 256 с.
10. Красильников П. С. Малые плоские колебания спутника на эллиптической орбите. *Нелинейная динамика*. 2013. Т. 9, № 4. С. 671–696.
11. Садов С. Ю. Нормальная форма уравнения колебаний спутника в сингулярном случае. *Математические заметки*. 1995. Т. 58, № 5. С. 785–789.
12. Сарычев В. А., Сазонов В. В., Златоустов В. А. Периодические колебания спутника в плоскости эллиптической орбиты. *Космические исследования*. 1977. Т.15, № 6. С. 809–834.
13. Bruno A. D., Varin V. P. Limit problems for the equation of oscillation of a satellite. *Celestial Mechanics*. 1977. V. 66, N 1. P. 17–68.
14. Gaetan Kerschen, Keith Worden, Aleksander F. Vakakis, Jean-Claude Golinval. Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. *Int. J. Mechanical Systems and Signal Processing*. 2006. 20. P. 505–592.
15. Gristchak V. Z., Gristchak D. D., Fatieieva Yu. A. Hybrid asymptotic method. Theory and applications. Zaporizhzhye: ZNU, 2016. 107 p.
16. Gristchak V. Z., Gristchak D. D. More Precise Analytical Solution for Satellite Nonlinear Vibration Problem in the Plane of Elliptical Orbit. *Proc. 4-th Int. Conf. "Nonlinear Dynamics"* (Sevastopol, 19-22 June, 2013). Sevastopol, 2013. P. 46–50.
17. Gristchak D. D. Vibration of Spacecraft Structure with Joint-up Dynamic Absorber and Periodic Damping Coefficients Near Disturbed Surface. *Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures*. 2015. Vol. 24. P. 24–27.
18. Ольков В. В., Гусев И. Н. Динамическая устойчивость летательного аппарата вблизи взволнованной поверхности. *Методы возмущений в механике*. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1982. С. 105–111.
19. Гусев И. Н. Переходные режимы движения летательного аппарата в плоскости крена. *Методы возмущений в механике*. Иркутск, 1979. С. 171–180.
20. Gristchak D. D. Nonlinear Vibration of Launch Vehicle Carrying a Moving Time-Dependent Mass. *Proceedings of the 5-th International Conference on Nonlinear Dynamics ND–KhPI 2016*. (Kharkov, 27-30 September 2016). Kharkov, 2016. P. 294–297.

## REFERENCES

1. Krasilnikov, P. S. (2012). On nonlinear oscillations of a pendulum of variable length on a vibrating base. *PMM*, Vol. 76, Iss. 1, pp. 36-51.
2. Bezglasnyiy, S. P. & Kut'yirev, N. I. (2013). Control of oscillations of a pendulum of variable length. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiyskoy akademii nauk*, Vol. 15, No. 6(3), pp. 590-593.
3. Nikolis, Dzh. (1989). Dynamics of hierarchical systems. Evolutionary view. Moscow: Mir.
4. Olshanskiy, V. P. & Olshanskiy, S. V. (2014). Nonstationary oscillations of a variable mass oscillator with allowance for viscous friction. *Vibratsiyi v tekhnitsi i tekhnolohiyakh*, No. 3(75), pp. 18-27.
5. Azarskov, V. N. & Gristchak, D. D. (2013). An approximate analytical solution of the problem of the dynamics of a mathematical pendulum of variable mass and length. XI International Materials Sci.-Tech. Conf. "AVIA-2013", (Vol. 4, pp. 22.1-22.4), Kyiv.
6. Azarskov, V. N. & Gristchak, D. D. (2014). Vibration damping for the problems of aircraft motion. *J. Electronics and Control Systems*, No. 4(42), pp. 30-34.
7. Beletskiy, V. V. (1975). The motion of the satellite relative to the center of mass in the gravitational field. Moscow: Izd-vo MGU.
8. Bryuno, A. D. & Petrovich, V. Yu. (1997). Calculation of periodic oscillations of a satellite. *Matematicheskoe modelirovanie*, Vol. 9, No. 6, pp. 82-94.
9. Bryuno, A. D. (1979). Local method of nonlinear analysis of differential equations. Moscow: Nauka.
10. Krasilnikov, P. S. (2013). Small flat oscillations of the satellite in elliptical orbit. *Nelineynaya dinamika*, Vol. 9, No. 4, pp. 671-696.
11. Sadov, S. Yu. (1995). The normal form of the satellite oscillation equation in the singular case. *Matematicheskie zametki*, Vol. 58, no. 5, pp. 785-789.

12. Saryichev, V. A., Sazonov, V. V. & Zlatoustov, V. A. (1977). Periodic oscillations of the satellite in the plane of the elliptical orbit. Kosmicheskie issledovaniya, Vol. 15, No. 6, pp. 809-834.
13. Bruno, A. D. & Varin, V. P. (1977). Limit problems for the equation of oscillation of a satellite. Celestial Mechanics, Vol. 66, No. 1, pp. 17-68.
14. Gaetan Kerschen, Keith Worden, Aleksander F. Vakakis & Jean-Claude Golinval (2006). Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. Jnt. J. Mechanical Systems and Signal Processing, 20, pp. 505-592.
15. Gristchak, V. Z., Gristchak, D. D. & Fatieieva, Yu. A. (2016). Hybrid asymptotic method. Theory and applications. Zaporizhzhye: ZNU.
16. Gristchak, V. Z. & Gristchak, D. D. (2013). More Precise Analytical Solution for Satellite Nonlinear Vibration Problem in the Plane of Elliptical Orbit. Proc. 4-th Int. Conf. "Nonlinear Dynamics" (pp. 46-50), Sevastopol.
17. Gristchak, D. D. (2015). Vibration of Spacecraft Structure with Joint-up Dynamic Absorber and Periodic Damping Coefficients Near Disturbed Surface. Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures, Vol. 24, pp. 24-27.
18. Olkov, V. V. & Gusev, I. N. (1982). Dynamic stability of an aircraft near an agitated surface. Perturbation methods in mechanics (pp. 105-111). Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otdelenie.
19. Gusev, I. N. (1979). Transitional regimes of the aircraft in the plane of roll. Perturbation methods in mechanics (pp. 171-180). Irkutsk.
20. Gristchak, D. D. Nonlinear Vibration of Launch Vehicle Carrying a Moving Time-Dependent Mass. Proceedings of the 5-th International Conference on Nonlinear Dynamics ND-KhPI 2016, (pp. 294-297), Kharkov.

УДК 519.6

## **СХОДИМОСТЬ ИТЕРАТИВНОГО ОБОБЩЁННОГО МЕТОДА КАНТОРОВИЧА ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА**

Громов В. А., к. ф.-м. н., с. н. с.

*Днепропетровский национальный университет им. Олесь Гончара,  
просп. Гагарина, 72, Днепр, Украина*

stroller@rambler.ru

В работе устанавливается возможность применения итеративного обобщённого метода Канторовича к анализу уравнений Кармана. Доказывается, что последовательность приближений к решению, порожаемая указанным методом, сходится в норме специального энергетического пространства.

*Ключевые слова: итеративный обобщённый метод Канторовича, нелинейные краевые задачи, уравнения Кармана.*

## **ЗБІЖНІСТЬ ІТЕРАТИВНОГО УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ РІВНЯНЬ КАРМАНА**

Громов В. О., к. ф.-м. н., с. н. с.

*Дніпропетровський національний університет ім. Олесь Гончара,  
просп. Гагаріна, 72, Дніпро, Україна*

stroller@rambler.ru

У роботі встановлюється можливість застосування ітеративного узагальненого методу Канторовича до аналізу рівнянь Кармана. Доводиться, що послідовність наближень до розв'язку, що породжується зазначеним методом, збігається у нормі спеціального енергетичного простору.

*Ключові слова: ітеративний узагальнений метод Канторовича, нелінійні крайові задачі, рівняння Кармана.*

## CONVERGENCE OF THE ITERATIVE EXTENDED KANTOROVICH METHOD FOR VON KARMAN EQUATIONS

Gromov V. A., Ph D (Phys.-Math.)

*Oles Honchar Dnipro national university,  
Gagarina, av., 72, Dnepropetrovsk, Ukraine*

stroller@rambler.ru

Von Karman equations are formulated (in the orthogonal coordinates  $(x_1, x_2)$ ) as a system of partial differential equations (1), (2), where  $\lambda = const$  is a function of an external influence;  $k_1, k_2, a_1, a_2$  are positive constants. The problem is defined on a close cylindrical domain. Hereinafter the following notations (2) are used. The problem is completed by boundary conditions  $u_1|_{\Gamma} = 0, \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}|_{\Gamma} = 0, u_2|_{\Gamma} = 0, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}|_{\Gamma} = 0$  for parts of the boundary  $x_1 = const$  and by periodicity conditions defined on an arbitrary line  $x_2 = const$ .

The generalized solution of the problem under study is a pair of functions  $U = (u_1, u_2)$ ,  $u_1 \in H_1(\Omega)$ ,  $u_2 \in H_0(\Omega)$  such that (3), (4) hold true for arbitrary functions  $v_1 \in H_1(\Omega)$ ,  $v_2 \in H_0(\Omega)$ , where  $H_1(\Omega)$  is the Sobolev's space, the closure of a set of continuous (with 2 derivatives) functions in the norm  $\iint_{\Omega} K(\alpha, \alpha) dx_1 dx_2 \equiv \|\alpha\|_H^2$ ;  $H_0(\Omega)$  is the Sobolev's space, the closure (in the same norm) of a set of continuous (with 2 derivatives) functions satisfying homogenous boundary conditions  $\left\{ \alpha|_{\Gamma} = 0, \frac{\partial \alpha}{\partial n}|_{\Gamma} = 0 \right\}$ .

To find solutions of non-linear boundary problem (1), one constructs a sequence of approximations of the generalized solutions (3), (4) with the employment of the representation (7) of the unknowns in the algorithm iterations. For odd iterations, the functions  $h_j^{(i)}(x_1) \equiv h_j^{(i-1)}(x_1)$  are calculated in the previous, the  $i-1$ -th iteration, and the unknowns evaluated from these equations are  $g_j^{(i)}(x_2)$ ; arbitrary functions  $v_j$  are presented as  $v_j = h_j^{(i-1)}(x_1)\varphi_j(x_2)$ , where  $\varphi_j(x_2)$  are arbitrary functions of a single variable  $x_2$ . Similarly, for even iterations, the functions  $g_j^{(i)}(x_2) \equiv g_j^{(i-1)}(x_2)$  are known, and the unknowns to be found are  $h_j^{(i)}(x_1)$ ; in that case  $v_j$  are presented as  $v_j = \psi_j(x_1)g_j^{(i-1)}(x_2)$ , where  $\psi_j(x_1)$  are arbitrary functions of a single variable  $x_1$ .

Representation (7) allows reducing equations under study (1) to a sequence of boundary problems for ordinary differential equations. On the other hand, it necessitates to consider specific 'weighted' functional spaces  $H_g, g \in W_2^2([c; d])$ , determined as a closure of continuous functions  $C^{(2)}([a; b])$  in the specific norm.

The spaces introduced make it possible to furnish a means of operator expression of single-dimensional non-linear boundary problems for iterations of the method under discussion (17), (18). What follows is a sequence of statements to analyze convergence of the IGKM for von Karman equations.

*Lemma 1.* If a function  $\alpha \in H_p$  can be presented as  $\alpha(x_1, x_2) = h(x_1)g(x_2)$ , then boundedness of  $\alpha$  in  $H_p$  is derived from boundedness of  $h(x_1), g(x_2)$  in  $W_2^{(2)}$ .

*Lemma 2.* The presentation (20), (21) holds true when  $P_s, G_s$  are homogeneous operators of order  $s$ .

*Theorem 1.* Each operator  $P, N, P_s, N_s$  ( $s=1,2$ ) is strongly continuous in  $H_{h_1}, H_{g_1}$  provided sequences  $\{h_1^{(i)}\}, \{g_1^{(i)}\}$  are bounded in  $W_2^{(2)}([x_1^{\min}; x_1^{\max}])$ ,  $W_2^{(2)}([x_2^{\min}; x_2^{\max}])$  respectively.

*Theorem 2.* Under hypotheses of Theorem 1 each operator  $G, H, G_s, H_s$  ( $s=1,2,3$ ), is strongly continuous in  $H_{h_2}, H_{g_2}$  respectively.

*Theorem 3.* Provided sequences  $\{g_1^{(i)}\}, \{h_1^{(i)}\}$  of IGKM approximations are bounded in  $W_2^2 \cdot \{h_1^{(i)} g_1^{(i)}\}, \{h_2^{(i)} g_2^{(i)}\}$  are strongly convergent in  $H_1 \times H_0$ .

*Key words:* the iterative extended Kantorovich method, non-linear boundary problems, von Karman equations.



### ВВЕДЕНИЕ

Значительное число процессов и явлений, описываемых уравнениями Кармана, обуславливает постоянный, незатухающий интерес к исследованию возможных решений соответствующей нелинейной краевой задачи, построение её бифуркационной картины. Несмотря на широкое распространение метода конечных (в меньшей степени – граничных) элементов в расчётной практике, их применение для анализа поведения систем связанных уравнений Кармана встречается со значительными трудностями. Данное обстоятельство обуславливает всё возрастающий интерес к методам, не использующим дискретизацию области. В обзорной работе [3] рассматривается класс методов, основанных на приближении неизвестных функций задачи в окрестности узлов дискретизации, функциями с конечной областью определения, а также применение методов данного класса к анализу нагруженных тонкостенных систем с расслоениями.

Другая группа методов решения и анализа нелинейных краевых задач для уравнений в частных производных связана с построением адаптивного базиса: в отличие от классических методов численного анализа, где базис в процессе решения задачи остаётся фиксированным и не зависит от свойств решения (меняются лишь значения коэффициентов базиса), в методах данной группы базисные функции подстраиваются тем или иным образом под особенности решения рассматриваемой задачи. Так, в работе [1] был предложен метод адаптивной вейвлет-коллокации. Альтернативный подход к построению оптимального базиса для решения нелинейных краевых задач представляет собой обобщённый метод Канторовича [2]. В рамках данного метода неизвестные функции задачи представляются в виде суммы произведений неизвестных функций одной переменной, что позволяет свести решение нелинейной краевой задачи для уравнений в частных производных к последовательности нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Применение данного метода к нелинейным задачам теории тонкостенных систем приводит к необходимости отыскания решения в виде итерационного процесса [4], в основе которого лежит отыскание решений одномерных нелинейных краевых задач методом Ньютона-Канторовича – итеративный обобщённый метод Канторовича.

### ОБОБЩЁННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА

Уравнения Кармана (в ортогональной системе координат  $(x_1, x_2)$ ) формулируются как система нелинейных уравнений в частных производных вида:

$$\begin{aligned} a_1 \nabla^4 u_1 + L(u_1, u_2) - \nabla_k^2 u_2 &= \lambda, \\ a_2 \nabla^4 u_2 - \frac{1}{2} L(u_1, u_1) - \nabla_k^2 u_1 &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\lambda = const$  – функция, описывающая внешнее воздействие;  $k_1, k_2, a_1, a_2$  – положительные константы. Задача рассматривается на замкнутой цилиндрической области  $\Omega = \{x_1^{\min} \leq x_1 \leq x_1^{\max}; x_2^{\min} \leq x_2 \leq x_2^{\max}, x_2^{\min} \equiv x_2^{\max}\}$ , ограниченной контуром  $\Gamma \equiv \partial\Omega = \{x_1 = x_1^{\min}, x_2^{\min} \leq x_2 \leq x_2^{\max}\} \cup \{x_1 = x_1^{\max}, x_2^{\min} \leq x_2 \leq x_2^{\max}\}$ . Здесь и далее используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \nabla_k^2 \alpha &\equiv k_2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} + k_1 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2}; \\ L(\alpha, \beta) &\equiv \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2}; \end{aligned} \tag{2}$$

$$K(\alpha, \beta) \equiv \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} + \mu \left[ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} \right] + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} + 2(1-\mu) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2};$$

$$Q_1(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \left[ \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} + \left[ \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x_1};$$

$$Q_2(\alpha, \beta) \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2}.$$

Задача должна быть дополнена краевыми условиями  $u_1|_{\Gamma} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}|_{\Gamma} = 0$ ,  $u_2|_{\Gamma} = 0$ ,

$\frac{\partial u_2}{\partial x_1}|_{\Gamma} = 0$  на части контура вида  $x_1 = const$  и условиями периодичности решения на произвольной, но фиксированной линии вида  $x_2 = const$ .

Обобщённое решение указанной нелинейной краевой задачи даётся парой функций,  $U = (u_1, u_2)$ ,  $u_1 \in H_1(\Omega)$ ,  $u_2 \in H_0(\Omega)$ , удовлетворяющих интегральным тождествам:

$$a_1 \iint_{\Omega} K(u_1, v_1) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} [\nabla_k^2 u_2 v_1 - Q_1(u_1, u_2, v_1) - \lambda v_1] dx_1 dx_2, \quad (3)$$

$$a_2 \iint_{\Omega} K(u_2, v_2) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} [\nabla_k^2 v_2 u_1 - Q_2(u_1, v_2)] dx_1 dx_2 \quad (4)$$

для любых произвольных функций  $v_1 \in H_1(\Omega)$ ,  $v_2 \in H_0(\Omega)$ , где  $W_p^{(l)}(\Omega)$  – пространство С. Л. Соболева, полученное замыканием множества непрерывных (с производными порядка  $l$ ) функций в норме

$$\|\alpha\|_{W_p^{(l)}(\Omega)} = \left[ \int_{\Omega} \sum_{k=0}^l \left| \frac{\partial^k \alpha}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} \right|^p d\Omega \right]^{1/p}, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_n = k, \quad n = \dim \Omega;$$

$H_1(\Omega)$  – пространство С. Л. Соболева, полученное замыканием в норме  $\iint_{\Omega} K(\alpha, \alpha) dx_1 dx_2 \equiv \|\alpha\|_H^2$  множества непрерывных (с производными порядка 2) функций;

$H_0(\Omega)$  – пространство С. Л. Соболева, полученное замыканием в той же норме множества непрерывных (с производными порядка 2) функций, удовлетворяющих однородным граничным условиям  $\left\{ \alpha|_{\Gamma} = 0, \frac{\partial \alpha}{\partial n}|_{\Gamma} = 0 \right\}$ . Здесь  $\frac{\partial \cdot}{\partial n}$  – производная по направлению, нормальному к контуру  $\Gamma$ .

Для указанных пространств справедливы следующие теоремы вложения [15]: если  $\alpha \in H_p$ ,  $p = 0, 1$ , то

$$1. \quad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_i \partial x_i} \in L_2(\Omega), \quad \left\| \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_i \partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)} \leq m \|\alpha\|_{H_1}; \quad (5)$$

$$2. \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \in L_q(\Omega), \quad \text{для любого } q \geq 1 \text{ и } \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \right\|_{L_q(\Omega)} \leq m \|\alpha\|_{H_1}, \quad (6)$$

причём в силу рефлексивности рассматриваемых пространств оператор вложения действует усиленно непрерывно (т.е. переводит слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся). Подчеркнём, что последнее имеет место и для классических теорем вложения, сформулированных С. Л. Соболевым [5].

Лемма 1. Если функция  $\alpha \in H_p$  допускает представление в виде  $\alpha(x_1, x_2) = h(x_1)g(x_2)$ , то из ограниченности сомножителей  $h(x_1), g(x_2)$  в пространствах  $W_2^{(2)}$  следует ограниченность  $\alpha$  в  $H_p$ .

Доказательство. Действительно

$$\begin{aligned} \|\alpha^{x_1} \alpha^{x_2}\|_{H_p}^2 &= \int (h'')^2 dx_1 \int g^2 dx_2 + 2\mu \int h h'' dx_1 \int g g'' dx_2 + \int h^2 dx_1 \int (g'')^2 dx_2 + 2(1-\mu) \int (h')^2 dx_1 \int (g')^2 dx_2 \leq \\ &\leq \left| \int (h'')^2 dx_1 \int g^2 dx_2 \right| + |\mu| \left| \int [h^2 + (h'')^2] dx_1 \int g g'' dx_2 \right| + \left| \int h^2 dx_1 \int (g'')^2 dx_2 \right| + |2(1-\mu)| \left| \int (h')^2 dx_1 \int (g')^2 dx_2 \right| \leq \\ &\leq \|h\|_{W_2^2}^2 \left[ \left| \int g^2 dx_2 \right| + 0.5|\mu| \left| \int [g^2 + (g'')^2] dx_2 \right| + \left| \int (g'')^2 dx_2 \right| + |2(1-\mu)| \left| \int (g')^2 dx_2 \right| \right] \leq m(\mu) \|h\|_{W_2^2}^2 \|g\|_{W_2^2}^2. \end{aligned}$$

### ИТЕРАТИВНЫЙ ОБОБЩЁННЫЙ МЕТОД КАНТОРОВИЧА

Для отыскания решения нелинейной краевой задачи (1) строится последовательность приближений к обобщённому решению (3), (4) с помощью представления вектора неизвестных функций задачи на итерациях алгоритма в виде:

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2) &= \{u_j(x_1, x_2)\} = \left\{ h_j^{(i)}(x_1) g_j^{(i)}(x_2) \right\}_{j=1,2}, \quad i \rightarrow \infty, \\ h_1^{(i)}(x_1) g_1^{(i)}(x_2) &\in H_1(\Omega), \quad h_2^{(i)}(x_1) g_2^{(i)}(x_2) \in H_0(\Omega). \end{aligned} \tag{7}$$

При этом для нечётных итераций функции  $h_j^{(i)}(x_1) \equiv h_j^{(i-1)}(x_1)$  вычислены на предыдущей  $i-1$ -й итерации и уравнения разрешаются относительно функций  $g_j^{(i)}(x_2)$ ; произвольные функции  $v_j$  представляются в виде  $v_j = h_j^{(i-1)}(x_1) \varphi_j(x_2)$ , где  $\varphi_j(x_2)$  – произвольные функции переменной  $x_2$ . Аналогично, для чётных итераций известны функции  $g_j^{(i)}(x_2) \equiv g_j^{(i-1)}(x_2)$  и уравнения разрешаются относительно  $h_j^{(i)}(x_1)$  с представлением функций  $v_j$  в виде  $v_j = \psi_j(x_1) g_j^{(i-1)}(x_2)$ , где  $\psi_j(x_1)$  – произвольные функции переменной  $x_1$ .

Представление (7) позволяет представить разрешающие соотношения нелинейной краевой задачи (1) в виде последовательности дифференциальных уравнений вида (здесь и далее, для краткости, опущен верхний индекс, соответствующий номеру итерации):

$$\frac{dg_j}{dx_2} = f_j^{x_2}(g(x_2), a^{x_1}(x_2), \lambda), \quad j = \overline{1,8}, \tag{8}$$

$$\frac{dh_j}{dx_1} = f_j^{x_1}(h(x_1), a^{x_2}(x_1), \lambda), \quad j = \overline{1,8}. \tag{9}$$

Векторы  $h(x_1)$  и  $g(x_2)$  определяются как

$$\begin{aligned} h(x_1) &= \{h_1(x_1), h_1'(x_1), h_1''(x_1), h_1'''(x_1), h_2(x_1), h_2'(x_1), h_2''(x_1), h_2'''(x_1)\}, \\ g(x_2) &= \{g_1(x_2), g_1'(x_2), g_1''(x_2), g_1'''(x_2), g_2(x_2), g_2'(x_2), g_2''(x_2), g_2'''(x_2)\}. \end{aligned}$$

Компоненты векторов  $a^{x_1}(x_2)$ ,  $a^{x_2}(x_1)$  представляют собой определённые интегралы от компонент вектор-функций  $h(x_1)$  и  $g(x_2)$ . А именно, компоненты вектора  $a^{x_2}$  зависят от  $g(x_2)$ , компоненты вектора  $a^{x_1}$  – от  $h(x_1)$ . Каждая из задач (8), (9) должна быть дополнена граничными условиями на концах промежутков интегрирования, следующими из граничных условий, сформулированных на контуре  $\Gamma$ .

Для отыскания решения указанных нелинейных одномерных краевых задач использовался метод сведения нелинейной краевой задачи к эквивалентной задаче Коши [4].

Рассматриваемый алгоритм предполагает организацию итерационного процесса, в рамках которого подсистемы (8), (9) вычисляются отдельно, на последовательных итерациях, при этом в качестве подынтегральных функций выбираются приближения, полученные на предыдущей итерации. Тем самым решение двумерной нелинейной краевой задачи сводится к отысканию решений последовательности нелинейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений: так определённый итерационный процесс аналогичен обобщённому методу Канторовича [5].

### ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ИОМК

Линейность и ограниченность функционала  $\iint_{\Omega} \lambda v_1 dx_1 dx_2$  позволяет представить его (в силу теоремы Рисса) в виде  $\iint_{\Omega} \lambda v_1 dx_1 dx_2 = (u^*, v_1)_H$ , что позволяет (с помощью замены  $u_1 \rightarrow u_1 + u^*$ ) привести соотношения для обобщённого решения к виду:

$$a_1 \iint_{\Omega} K(u_1, v_1) dx_1 dx_2 = -a_1 \iint_{\Omega} K(u^*, v_1) dx_1 dx_2 + \iint_{\Omega} [\nabla_k^2 u_2 v_1 - Q_1(u_1 + u^*, u_2, v_1)] dx_1 dx_2, \quad (10)$$

$$a_2 \iint_{\Omega} K(u_2, v_2) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} [\nabla_k^2 v_2 (u_1 + u^*) - Q_2(u_1 + u^*, v_2)] dx_1 dx_2. \quad (11)$$

Представление (7) обуславливает необходимость рассмотрения специальных «взвешенных» функциональных пространств  $H_g$ ,  $g \in W_2^2([c; d])$ , определяемых как замыкание множества функций пространства  $C^{(2)}([a; b])$  в норме

$$\|h\|_{H_g}^2 = \int (h'')^2 dx_1 \int g^2 dx_2 + 2\mu \int h h'' dx_1 \int g g'' dx_2 + \int h^2 dx_1 \int (g'')^2 dx_2 + 2(1-\mu) \int (h')^2 dx_1 \int (g')^2 dx_2.$$

Здесь имеет место очевидное равенство  $\|hg\|_{H_p} = \|h\|_{H_g} = \|g\|_{H_h}$ .

В рамках указанного представления на итерациях алгоритма интегральные соотношения (10), (11) сводятся к двум парам интегральных соотношений (для нечётных и чётных итераций, соответственно):

$$a_1 \iint_{\Omega} K(h_1^{(i-1)} g_1^{(i)}, h_1^{(i-1)} \varphi_1) dx_1 dx_2 = -a_1 \iint_{\Omega} K(h_1^* g_1^*, h_1^{(i-1)} \varphi_1) dx_1 dx_2 + \iint_{\Omega} [\nabla_k^2 [h_2^{(i-1)} g_2^{(i)}] h_1^{(i-1)} \varphi_1 - Q_1(h_1^{(i-1)} g_1^{(i)} + h_1^* g_1^*, h_2^{(i-1)} g_2^{(i)}, h_1^{(i-1)} \varphi_1)] dx_1 dx_2, \quad (12)$$

$$a_2 \iint_{\Omega} K(h_2^{(i-1)} g_2^{(i)}, h_2^{(i-1)} \varphi_2) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} [\nabla_k^2 [h_2^{(i-1)} \varphi_2] (h_1^{(i-1)} g_1^{(i)} + h_1^* g_1^*) - Q_2(h_1^{(i-1)} g_1^{(i)} + h_1^* g_1^*, h_2^{(i-1)} \varphi_2)] dx_1 dx_2 \quad (13)$$

и

$$a_1 \iint_{\Omega} K(h_1^{(i)} g_1^{(i-1)}, \psi_1 g_1^{(i-1)}) dx_1 dx_2 = -a_1 \iint_{\Omega} K(h_1^* g_1^*, \psi_1 g_1^{(i-1)}) dx_1 dx_2 +$$

$$+ \iint_{\Omega} \left[ \nabla_k^2 [h_2^{(i)} g_2^{(i-1)}] \psi_1 g_1^{(i-1)} - Q_1(h_1^{(i)} g_1^{(i-1)} + h_1^* g_1^*, h_2^{(i)} g_2^{(i-1)}, \psi_1 g_1^{(i-1)}) \right] dx_1 dx_2, \quad (14)$$

$$a_2 \iint_{\Omega} K(h_2^{(i)} g_2^{(i-1)}, \psi_2 g_2^{(i-1)}) dx_1 dx_2 =$$

$$= \iint_{\Omega} \left[ \nabla_k^2 [\psi_2 g_2^{(i-1)}] (h_1^{(i)} g_1^{(i-1)} + h_1^* g_1^*) - Q_2(h_1^{(i)} g_1^{(i-1)} + h_1^* g_1^*, \psi_2 g_2^{(i-1)}) \right] dx_1 dx_2. \quad (15)$$

Правая часть соотношения (13) представляет собой линейный функционал относительно  $\varphi_2$  в норме  $H_{h_2^{(i-1)}}$ . Следовательно, в силу теоремы Рисса правая часть данного соотношения может быть представлена в виде

$$\iint_{\Omega} \left[ \nabla_k^2 [h_2^{(i-1)} \varphi_2] (h_1^{(i-1)} g_1^{(i)} + h_1^* g_1^*) - Q_2(h_1^{(i-1)} g_1^{(i)} + h_1^* g_1^*, h_2^{(i-1)} \varphi_2) \right] dx_1 dx_2 \equiv \left( P^{(i)}(g_1^{(i)}), \varphi_2 \right)_{H_{h_2^{(i-1)}}}, \quad (16)$$

что в силу произвольности  $\varphi_2$  даёт

$$g_2^{(i)} = P^{(i)}(g_1^{(i)}). \quad (17)$$

Здесь индекс  $i$  в обозначении оператора  $P^{(i)}$  подчёркивает, что в его определении участвуют определённые интегралы от функций  $h_j^{(i-1)}$ , вычисленных на предыдущей итерации ИОМК.

Подстановка соотношения (17) в правую часть интегрального соотношения (12) даёт линейный функционал относительно  $\varphi_1$  в норме  $H_{h_1^{(i-1)}}$ , который, в свою очередь, в силу теоремы Рисса представим в виде:

$$-a_1 \iint_{\Omega} K(h_1^* g_1^*, h_1^{(i-1)} \varphi_1) dx_1 dx_2 +$$

$$+ \iint_{\Omega} \left[ \nabla_k^2 [h_2^{(i-1)} g_2^{(i)}] h_1^{(i-1)} \varphi_1 - Q_1(h_1^{(i-1)} g_1^{(i)} + h_1^* g_1^*, h_2^{(i-1)} g_2^{(i)}, h_1^{(i-1)} \varphi_1) \right] dx_1 dx_2 \equiv \left( G^{(i)}(g_1^{(i)}), \varphi_1 \right)_{H_{h_1^{(i-1)}}}.$$

В силу произвольности  $\varphi_1$  получаем соотношение

$$g_1^{(i)} = G^{(i)}(g_1^{(i)}, g_2^{(i)}). \quad (18)$$

Объединение соотношений (17) и (18) даёт операторное представление для нелинейной краевой задачи (8) (разрешающих соотношений для нечётных операций ИОМК):

$$U^{(i)} = A_{x_2}^{(i)}(U^{(i)}). \quad (19)$$

Аналогичные рассуждения с использованием соотношений (14), (15) позволяют ввести операторы,  $N^{(i)}, H^{(i)}, A_{x_1}^{(i)}$ , которые соответствует чётным итерациям ИОМК. В этих терминах ИОМК может быть представлен как последовательность операторных уравнений, определяемых операторами  $A_{x_1}$  и  $A_{x_2}$  таких, что действие которых на  $i$ -й итерации либо совпадает либо с действием операторов  $A_{x_1}^{(i)}$  и  $A_{x_2}^{(i)}$  (для чётных и нечётных итераций соответственно), либо с действием тождественного оператора.

*Лемма 2.* Имеют место представления:

$$P = P_0 + P_1 + P_2, \quad (20)$$

$$G = G_0 + G_1 + G_2 + G_3, \quad (21)$$

где  $P_s, G_s$  – однородные операторы порядка  $s$ .

*Доказательство.* Из соотношения (17), определяющего оператор  $P$ , непосредственно следует:

$$\iint_{\Omega} \left[ \nabla_k^2 [h_2^{(i-1)} \varphi_2] h_1^* g_1^* - Q_2 (h_1^* g_1^*, h_2^{(i-1)} \varphi_2) \right] dx_1 dx_2 \equiv (P_0, \varphi_2)_{H_{h_2^{(i-1)}}}, \quad (22)$$

$$\iint_{\Omega} \left[ \nabla_k^2 [h_2^{(i-1)} \varphi_2] h_1^{(i-1)} g_1^{(i)} - \sum_{l,t=1}^2 \frac{\partial [h_1^{(i-1)} g_1^{(i)}]}{\partial x_l} \frac{\partial [h_1^* g_1^*]}{\partial x_t} \frac{\partial^2 [h_2^{(i-1)} \varphi_2]}{\partial x_l \partial x_t} \right] dx_1 dx_2 \equiv (P_1(g_1^{(i)}), \varphi_2)_{H_{h_2^{(i-1)}}}, \quad (23)$$

$$- \iint_{\Omega} \left[ \sum_{l,t=1}^2 \frac{\partial [h_1^{(i-1)} g_1^{(i)}]}{\partial x_l} \frac{\partial [h_1^{(i-1)} g_1^{(i)}]}{\partial x_t} \frac{\partial^2 [h_2^{(i-1)} \varphi_2]}{\partial x_l \partial x_t} \right] dx_1 dx_2 \equiv (P_2(g_1^{(i)}), \varphi_2)_{H_{h_2^{(i-1)}}}, \quad (24)$$

где существование  $P_0, P_1, P_2 \in H_{h_2^{(i-1)}}$  вытекает из т. Рисса. Здесь оператор  $\rightarrow$  означает циклический сдвиг по модулю 2.

Подстановка (22)-(24) в (18) даёт следующие выражения, определяющие  $G_s$ :

$$-a_1 (h_1^* g_1^*, h_1^{(i-1)} \varphi_1)_{H_1} + \iint_{\Omega} \left[ \nabla_k^2 [h_2^{(i-1)} P_0] h_1^{(i-1)} \varphi_1 - Q_1 (h_1^* g_1^*, h_2^{(i-1)} P_0, h_1^{(i-1)} \varphi_1) \right] dx_1 dx_2 \equiv (G_0, \varphi_1)_{H_{h_1^{(i-1)}}}, \quad (25)$$

$$\iint_{\Omega} \left[ \nabla_k^2 [h_2^{(i-1)} P_1(g_1^{(i)})] h_1^{(i-1)} \varphi_1 - Q_1 (h_1^* g_1^*, h_2^{(i-1)} P_1(g_1^{(i)}), h_1^{(i-1)} \varphi_1) - Q_1 (h_1^{(i-1)} g_1^{(i)}, h_2^{(i-1)} P_0, h_1^{(i-1)} \varphi_1) \right] dx_1 dx_2 \equiv a_1 (G_1, \varphi_1)_{H_{h_1^{(i-1)}}}, \quad (26)$$

$$\iint_{\Omega} \left[ \tilde{N}_k^2 [h_2^{(i-1)} P_2(g_1^{(i)})] h_1^{(i-1)} f_1 - Q_1 (h_1^* g_1^*, h_2^{(i-1)} P_2(g_1^{(i)}), h_1^{(i-1)} f_1) - Q_1 (h_1^{(i-1)} g_1^{(i)}, h_2^{(i-1)} P_1(g_1^{(i)}), h_1^{(i-1)} f_1) \right] dx_1 dx_2 \equiv a_1 (G_2, f_1)_{H_{h_1^{(i-1)}}}, \quad (27)$$

$$- \iint_{\Omega} Q_1 (h_1^{(i-1)} g_1^{(i)}, h_2^{(i-1)} P_2(g_1^{(i)}), h_1^{(i-1)} \varphi_1) dx_1 dx_2 \equiv a_1 (G^{(3)}, \varphi_1)_{H_{h_1^{(i-1)}}}. \quad (28)$$

Аналогичные представления имеют место для операторов  $N$  и  $H$ .

*Теорема 1.* Каждый из операторов  $P, N, P_s, N_s$  ( $s=1,2$ ) действует усиленно непрерывно в  $H_{h_1}, H_{g_1}$  при условии ограниченности последовательностей  $\{h_1^{(i)}\}, \{g_1^{(i)}\}$  в  $W_2^{(2)}([x_1^{\min}; x_1^{\max}])$ ,  $W_2^{(2)}([x_2^{\min}; x_2^{\max}])$  соответственно.

*Доказательство.* Для всякого фиксированного  $i$ , если только  $h_i$  не равно тождественному нулю, имеет место очевидные неравенства  $m \|g\|_{W_2^{(2)}} \leq \|g\|_{H_{h_2^{(i)}}} \leq M \|g\|_{W_2^{(2)}}$ . Из эквивалентности норм, поскольку пространства  $H_{h_2^{(i)}}$  и  $W_2^{(2)}$  получены замыканием одного и того же

множества функций, следует, что они состоят из одних и тех же элементов. Поскольку аналогичные рассуждения справедливы и для пространств  $H_{h_2}$  и  $W_2^{(2)}$ , то мы можем считать, что операторы  $P_s$  действуют в пространстве  $H_{h_2}$ .

Пусть  $g_1^{(i)}$  сходится слабо к  $g_1$  в пространстве  $H_{h_2}$  ( $g_1^{(i)} \rightharpoonup g_1$ ); необходимо показать, что последовательность  $P_s g_1^{(i)}$  сходится к указанному пределу сильно ( $\|P_s g_1^{(i)} - g_1\|_{H_{h_2}} \rightarrow 0$ ).

В силу ограниченности бесконечной последовательности  $\{h_1^{(i)}\}$  в гильбертовом пространстве  $W_2^{(2)}$  из неё можно выделить слабосходящуюся в этом пространстве подпоследовательность. Рассмотрим последовательность  $h_1^{(i)} g_1^{(i)}$ , ограничившись номерами  $i$ , отвечающими выделенной подпоследовательности. В силу Леммы 1, последовательность  $h_1^{(i)} g_1^{(i)}$  будет ограничена в пространстве  $H_1$ , что, в свою очередь, позволяет выделить из неё слабосходящуюся в  $H_1$  подпоследовательность ( $h_1^{(i)} g_1^{(i)} \rightharpoonup h_1 g_1$ ). В дальнейшем изложении мы ограничимся номерами  $i$ , отвечающими данной подпоследовательности.

Рассмотрим действие оператора  $P_1$  в пространстве  $H_{h_1}$ . Из (23) имеем:

$$\begin{aligned} & \left( P_1(g_1^{(i)}) - P_1(g_1), \varphi_2 \right)_{H_{h_2}} = \\ & = \iint_{\Omega} \left[ \nabla_k^2 [h_2 \varphi_2] h_1 [g_1^{(i)} - g_1] - \sum_{l,t=1}^2 \frac{\partial [h_1 (g_1^{(i)} - g_1)]}{\partial x_l} \frac{\partial [h_1^* g_1^*]}{\partial x_t} \frac{\partial^2 [h_2 \varphi_2]}{\partial x_l \partial x_t} \right] dx_1 dx_2 \leq \\ & \leq \left| \iint_{\Omega} \nabla_k^2 [h_2 \varphi_2] h_1 [g_1^{(i)} - g_1] dx_1 dx_2 \right| + \sum_{l,t=1}^2 \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial [h_1 (g_1^{(i)} - g_1)]}{\partial x_l} \frac{\partial [h_1^* g_1^*]}{\partial x_t} \frac{\partial^2 [h_2 \varphi_2]}{\partial x_l \partial x_t} \right| dx_1 dx_2 \leq \\ & \leq \|\nabla_k^2 [h_2 \varphi_2]\|_{L_2(\Omega)} \|h_1 [g_1^{(i)} - g_1]\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{l,t=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 [h_2 \varphi_2]}{\partial x_l \partial x_t} \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial [h_1 (g_1^{(i)} - g_1)]}{\partial x_l} \right\|_{L_4(\Omega)} \left\| \frac{\partial [h_1^* g_1^*]}{\partial x_t} \right\|_{L_4(\Omega)} \leq \end{aligned}$$

(в силу теорем вложения для пространств  $H_1$ )

$$\begin{aligned} & \leq \left[ \|h_1 [g_1^{(i)} - g_1]\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{l,t=1}^2 \left\| \frac{\partial [h_1 (g_1^{(i)} - g_1)]}{\partial x_l} \right\|_{L_4(\Omega)} \left\| \frac{\partial [h_1^* g_1^*]}{\partial x_t} \right\|_{L_4(\Omega)} \right] \|h_2 \varphi_2\|_{H_1(\Omega)} = \\ & = \left[ \|h_1 [g_1^{(i)} - g_1]\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{l,t=1}^2 \left\| \frac{\partial [h_1 (g_1^{(i)} - g_1)]}{\partial x_l} \right\|_{L_4(\Omega)} \left\| \frac{\partial [h_1^* g_1^*]}{\partial x_t} \right\|_{L_4(\Omega)} \right] \|\varphi_2\|_{H_{h_2}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим поведение коэффициента при  $\|\varphi_2\|_{H_{h_2}}$  при  $i \rightarrow \infty$ .

1. Для первого слагаемого

$$\|h_1 [g_1^{(i)} - g_1]\|_{L_2(\Omega)} \leq \|h_1^{(i)} g_1^{(i)} - h_1 g_1\|_{L_2(\Omega)} + \|g_1^{(i)}\|_{L_4([x_2^{\min}; x_2^{\max}])} \|h_1^{(i)} - h_1\|_{L_4([x_1^{\min}; x_1^{\max}])}.$$

В силу усиленной непрерывности оператора вложения  $H_1$  в  $L_2(\Omega)$  из слабой сходимости последовательности  $h_1^{(i)} g_1^{(i)} \rightarrow h_1 g_1$  в  $H_1$  следует её сильная сходимость в  $L_2(\Omega)$ :  $\|h_1^{(i)} g_1^{(i)} - h_1 g_1\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0$ ; аналогично в силу теорем вложения С. Л. Соболева из слабой сходимости последовательности  $h_1^{(i)} \rightarrow h_1$  в  $W_2^{(2)}([x_1^{\min}; x_1^{\max}])$  следует её сильная сходимость в  $L_4([x_1^{\min}; x_1^{\max}])$ ; величина  $\|g_1^{(i)}\|_{L_4([x_2^{\min}; x_2^{\max}])}$  ограничена в силу той же теоремы вложения и предположения теоремы об ограниченности  $g_1^{(i)}$  в  $W_2^{(2)}$ .

2. Для второго слагаемого

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_1} [h_1 [g_1^{(i)} - g_1]] \right\|_{L_4(\Omega)} \leq \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} [h_1^{(i)} g_1^{(i)} - h_1 g_1] \right\|_{L_4(\Omega)} + \left\| \frac{\partial g_1^{(i)}}{\partial x_1} \right\|_{L_8([x_2^{\min}; x_2^{\max}])} \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} [h_1^{(i)} - h_1] \right\|_{L_8([x_1^{\min}; x_1^{\max}])}$$

и аналогичные рассуждения устанавливают, что  $\left\| \frac{\partial}{\partial x_1} [h_1 [g_1^{(i)} - g_1]] \right\|_{L_4(\Omega)} \rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$ .

Таким образом, коэффициент при  $\|\varphi_2\|_{H_{h_2}}$ , а с ним и  $\|P_1(g_1^{(i)}) - P_1(g_1)\|_{H_{h_2}}$  (нижняя грань таких коэффициентов), стремится к 0 при  $i \rightarrow \infty$ . Усиленная непрерывность оператора  $P_1$  доказана.

Для оператора  $P_2$  в пространстве  $H_{h_1}$  из (24) имеем:

$$(P_2(g_1^{(i)}) - P_2(g_1), \varphi_2)_{H_{h_2}} \leq \sum_{i,t=1}^2 \left\| \frac{\partial [h_1 g_1^{(i)}]}{\partial x_t} \frac{\partial [h_1 g_1^{(i)}]}{\partial x_t} - \frac{\partial [h_1 g_1]}{\partial x_t} \frac{\partial [h_1 g_1]}{\partial x_t} \right\|_{L_2(\Omega)} \|\varphi_2\|_{H_{h_2}}.$$

Теорема вложения  $H_1$  в  $L_2(\Omega)$  гарантирует сильную сходимость  $\frac{\partial [h_1 g_1^{(i)}]}{\partial x_t}$  к  $\frac{\partial [h_1 g_1]}{\partial x_t}$  в  $L_2(\Omega)$ , что завершает доказательство усиленной непрерывности оператора  $P_2$ . Аналогичные рассуждения позволяют установить усиленную непрерывность операторов  $N_s$ .

*Теорема 2.* В условиях теоремы 1 каждый из операторов  $G$ ,  $H$ ,  $G_s$ ,  $H_s$  ( $s=1,2,3$ ), действует усиленно непрерывно в  $H_{h_2}$ ,  $H_{g_2}$  соответственно.

*Доказательство.* Проведя рассуждения, аналогичные тем, что были проведены при доказательстве предыдущей теоремы, мы устанавливаем, что операторы  $G_s$  действуют в пространстве  $H_{h_1}$ .

Пусть  $g_1^{(i)}$  сходится слабо к  $g_1$  в пространстве  $H_{h_1}$  ( $g_1^{(i)} \rightarrow g_1$ ); необходимо показать, что последовательность  $G_s g_1^{(i)}$  сходится к указанному пределу сильно ( $\|G_s g_1^{(i)} - g_1\|_{H_{h_1}} \rightarrow 0$ ). Как и при доказательстве Теоремы 1 ограничимся рассмотрением номеров, отвечающих слабосходящейся в  $H_1$  подпоследовательности ( $h_1^{(i)} g_1^{(i)} \rightarrow h_1 g_1$ ).

Из (26) для оператора  $G_1$  имеем



$$\begin{aligned}
 a_1(G_1(g_1^{(i)}) - G_1(g_1), \varphi_1)_{H_{h_1}} &= -\iint_{\Omega} \left[ \nabla_k^2 \left[ h_2(P_1(g_1^{(i)}) - P_1(g_1)) \right] \right] h_1 \varphi_1 - \\
 &- \left[ Q_1(h_1^* g_1^*, h_2 P_1(g_1^{(i)}), h_1 \varphi_1) - Q_1(h_1^* g_1^*, h_2 P_1(g_1), h_1 \varphi_1) \right] - \\
 &- \left[ Q_1(h_1 g_1^{(i)}, h_2 P_0, h_1 \varphi_1) - Q_1(h_1 g_1, h_2 P_0, h_1 \varphi_1) \right] dx_1 dx_2 \leq
 \end{aligned} \tag{29}$$

(воспользовавшись теоремами вложения и равенством  $\|hg\|_{H_1} = \|g\|_{H_h}$ )

$$\leq \left[ \|h_2(P_1(g_1^{(i)}) - P_1(g_1))\|_{H_1} (1 + 4\|h_1^* g_1^*\|_{H_1}) + 2\|h_2 P_0\|_{H_1} \sum_{l=1}^2 \left\| \frac{\partial [h_1(g_1^{(i)} - g_1)]}{\partial x_l} \right\|_{L_4} \right] \|\varphi_1\|_{H_{h_1}}.$$

Таким образом, коэффициент при  $\|\varphi_1\|_{H_{h_1}}$  равен

$$\|P_1(g_1^{(i)}) - P_1(g_1)\|_{H_{h_2}} (1 + 4\|h_1^* g_1^*\|_{H_1}) + 2\|h_2 P_0\|_{H_1} \sum_{l=1}^2 \left\| \frac{\partial [h_1(g_1^{(i)} - g_1)]}{\partial x_l} \right\|_{L_4(\Omega)}.$$

Стремление к 0 первого слагаемого при  $i \rightarrow \infty$  устанавливается предыдущей теоремой, стремление к 0 второго слагаемого установлено при  $i \rightarrow \infty$  доказательстве Теоремы 1. Усиленная непрерывность оператора  $P_1$  доказана.

Для оператора  $G_2$  аналогичными рассуждениями устанавливаем

$$\begin{aligned}
 a_1(G_2(g_1^{(i)}) - G_2(g_1), \varphi_1)_{H_{h_1}} &\leq \\
 &\leq \left[ \|h_2(P_2(g_1^{(i)}) - P_2(g_1))\|_{H_1} (1 + 4\|h_1^* g_1^*\|_{H_1}) + 4\|h_2(P_1(g_1^{(i)}) - P_1(g_1))\|_{H_1} \|h_1 g_1^{(i)}\|_{H_1} + \right. \\
 &\quad \left. + \|h_1 P_1(g_1)\|_{H_1} \sum_{l=1}^2 \left\| \frac{\partial [h_1(g_1^{(i)} - g_1)]}{\partial x_l} \right\|_{L_4(\Omega)} \right] \|\varphi_1\|_{H_{h_1}}.
 \end{aligned}$$

Поскольку  $\|h_2(P_2(g_1^{(i)}) - P_2(g_1))\|_{H_1} = \|P_2(g_1^{(i)}) - P_2(g_1)\|_{H_{h_2}} \rightarrow 0$  и  $\sum_{l=1}^2 \left\| \frac{\partial [h_1(g_1^{(i)} - g_1)]}{\partial x_l} \right\|_{L_4(\Omega)} \rightarrow 0$  в

силу теоремы 1, а  $\|h_1 g_1^{(i)}\|_{H_1} = \|g_1^{(i)}\|_{H_h}$  и  $\|h_1 P_1(g_1)\|_{H_1} = \|h_1 g_1\|_{H_1} = \|g_1\|_{H_{h_1}}$  ограничены в силу предположений теоремы, то коэффициент при  $\|\varphi_1\|_{H_{h_1}} \rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$ , что и устанавливает усиленную непрерывность оператора  $G_2$ . Аналогично устанавливается усиленная непрерывность для  $G_3$ . Усиленная непрерывность операторов  $G$  и  $H$  позволяет сформулировать следующую теорему:

**Теорема 3.** Пусть последовательности  $\{g_1^{(i)}\}, \{h_1^{(i)}\}$  приближений итеративного обобщённого метода Канторовича, принадлежат ограниченной области пространстве  $W_2^2$ . Тогда последовательность  $\{U^{(i)}\}$  сходится сильно в пространстве  $H_1 \times H_0$ .

*Доказательство.* По предположению теоремы последовательности  $\{g_1^{(i)}\}$ ,  $\{h_1^{(i)}\}$  представляет собой ограниченное бесконечное множество гильбертового пространства  $W_2^2$ ; следовательно, они слабокомпактны, т. е. из всякой бесконечной части каждой из них можно выделить слабосходящуюся подпоследовательность. Обозначим пределы указанных последовательностей  $g_1$  и  $h_1$  соответственно.

Ограниченность последовательностей  $\{g_1^{(i)}\}$ ,  $\{h_1^{(i)}\}$  в пространстве  $W_2^2$ , влечёт за собой (в силу эквивалентности норм) их ограниченность в пространствах  $H_{h_1}$  и  $H_{g_1}$  соответственно, что позволяет, в свою очередь, выделить из них слабосходящиеся в данных пространствах подпоследовательности. В дальнейшем рассмотрении индекс мы будем использовать для нумерации элементов данных подпоследовательностей.

Последовательности  $\{g_1^{(i+1)}\}$ ,  $\{h_1^{(i+1)}\}$  представляет собой результат действие операторов  $G$  и  $H$  на слабосходящуюся последовательности  $\{g_1^{(i)}\}$  и  $\{h_1^{(i)}\}$ . В силу усиленной непрерывности указанных операторов, устанавливаемой Теоремой 2, последовательность  $\{g_1^{(i+1)}\}$ ,  $\{h_1^{(i+1)}\}$  сходятся сильно. Непрерывность оператора  $P$  позволяет установить сильную сходимость для последовательностей  $\{g_2^{(i+1)}\}$ ,  $\{h_2^{(i+1)}\}$  в  $H_{h_1}$  и  $H_{g_1}$ . Эквивалентность норм позволяет распространить данное утверждение на пространство  $W_2^2$ .

**Неравенство**

$$\|h_j^{(i)} g_j^{(i)} - h_j g_j\|_{H_p} \leq m \left[ \|h_j^{(i)}\|_{W_2^{(2)}} \|g_j^{(i)} - g_j\|_{W_2^{(2)}} + \|g_j\|_{W_2^{(2)}} \|h_j^{(i)} - h_j\|_{W_2^{(2)}} \right],$$

следующее из Леммы 1, завершает доказательство теоремы.

При практическом применении алгоритма в качестве критерия окончания итерационного процесса использовалось малость изменения нормы решения на итерациях алгоритма. Здесь проверялась малость относительной нормы разности не только для двух последовательных итераций, но для 3-4-х последовательных итераций, чтобы проверить достоверность предположения об ограниченности последовательности. Метод продемонстрировал хорошую практическую сходимость. Для достижения сходимости (при требовании к величине относительного изменения  $10^{-4}$ ) требовалось 6÷8 шагов алгоритма.

### ВЫВОДЫ

1. Устанавливается возможность применения итеративного обобщённого метода Канторовича к анализу уравнений Кармана.
2. Доказывается, что последовательность приближений к решению, порождаемая указанным методом, сходится к обобщённому решению уравнений Кармана.
3. Сочетание итеративного обобщённого метода Канторовича с методом продолжения по параметру позволило получить решения уравнений Кармана в широком диапазоне значений параметра  $\lambda$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Bertoluzza S. Adaptive wavelet collocation for the solution of steady-state equations. *SPIE Proc.* 1995. Vol. 2491. P. 947–956.
2. Kantorovich L. V., Krylov V. I. Approximate Methods of Higher Analysis. New-York: Interscience, 1958. 682 p.
3. Liew K. M., Zhao X., Ferreira A. J. M. A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates and shells. *Composite Structures.* 2011. Vol. 93. P. 2031–2041.

4. Obodan N. I., Lebedeyev O. G., Gromov V. A. Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells. New-York: Springer, 2013. 180 p.
5. Vorovich I. I. Nonlinear Theory of Shallow Shells. New-York: Springer, 1999. 407 p.

### REFERENCES

1. Bertoluzza, S. (1995). Adaptive wavelet collocation for the solution of steady-state equations. SPIE Proc., Vol. 2491, pp. 947-956.
2. Kantorovich, L. V. & Krylov, V. I. (1958). Approximate Methods of Higher Analysis. New-York: Interscience.
3. Liew, K. M., Zhao, X. & Ferreira A. J. M. (2011). A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates and shells. Composite Structures, Vol. 93, pp. 2031-2041.
4. Obodan, N. I., Lebedeyev, O. G. & Gromov, V. A. (2013). Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells. New-York: Springer.
5. Vorovich, I. I. (1999). Nonlinear Theory of Shallow Shells. New-York: Springer.

УДК 539.3

## НЕСТАЦИОНАРНИЙ ЗАКРУТ СКИНЧЕННОГО ЦИЛІНДРУ З КРУГОВОЮ ТРІЩИНОЮ

Демидов О. В., Попов В. Г.

*Національний університет «Одеська морська академія»,  
вул. Дідрихсона, 8, Одеса, 65029, Україна*

alexandr.v.demidov@gmail.com, dr.vg.popov@gmail.com

Розв'язана вісесиметрична динамічна задача про визначення напруженого стану навколо кругової тріщини у скінченному циліндрі, джерелом навантаження є абсолютно жорстка кругова накладка, яка зчеплена з одним з торців циліндру і до якої прикладений крутний момент, який змінюється за часом. На відміну від традиційних методів розв'язання, які ґрунтуються на застосуванні інтегрального перетворення Лапласа, запропонований метод полягає в різнищевому наближенні похідної за часом. У результаті вихідна задача замінюється послідовністю однорідних граничних задач, інтегральне подання розв'язку яких зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, числовий розв'язок якого дозволив отримати наближену формулу для обчислення КІН.

*Ключові слова:* коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН), вісесиметрична динамічна задача, скінченні різниці за часом, скінченний циліндр, кругова тріщина, крутний момент.

## НЕСТАЦИОНАРНОЕ КРУЧЕНИЕ КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА С КРУГОВОЙ ТРЕЩИНОЙ

Демидов А. В., Попов В. Г.

*Национальный университет «Одесская морская академия»,  
ул. Дидрихсона, 8, Одесса, 65029, Украина*

alexandr.v.demidov@gmail.com, dr.vg.popov@gmail.com

Решена осесимметричная динамическая задача об определении напряженного состояния в окрестности круговой трещины в конечном цилиндре, источником нагрузки является абсолютно жесткая круговая накладка, которая сцеплена с одним из торцов цилиндра и к которой приложен крутящий момент, меняющийся во времени. В отличие от традиционных методов решения, основанных на применении интегрального преобразования Лапласа, предложенный метод заключается в разностном приближении производной по времени. В результате исходная задача заменяется последовательностью однородных краевых задач, интегральное представление решения которых сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, численное решение которого позволило получить приближенную формулу для вычисления КИИ.

*Ключевые слова:* коэффициент интенсивности напряжений (КИИ), осесимметричная динамическая задача, конечные разности, конечный цилиндр, круговая трещина, крутящий момент.

## NONSTATIONARY TORSION OF THE FINITE CYLINDER WITH CIRCULAR CRACK

Demydov O. V., Popov V. G.

National University "Odessa Maritime Academy",  
8 Didrikhson str., Odessa, 65029, Ukraine

alexandr.v.demidov@gmail.com, dr.vg.popov@gmail.com

The axisymmetric dynamic problem of determining the stress state in the region of a circular crack in a finite cylinder is solved. The source of the loading is the rigid circular plate, which is coupled with one of the cylinder ends and loaded by the torsional moment, which depends on time. The proposed method consists in the difference approximation only of the time derivative. The original problem is reduced to a system of homogeneous boundary value problems, which are solved successively. Their solution contains an unknown displacement jump on the crack. The integral equation with respect to the unknown jump reduces to the Fredholm integral equation of the second kind. The found numerical solution of this equation gave the possibility to obtain the approximate formula for the SIF calculation. Analysis of the results shows that the SIF increases during the transient process to a level exceeding the SIF value under static loading. Increasing the weight of the plate and the height of the cylinder cause to increasing the duration of the transient process and reduces the magnitude of the SIF's maximum.

*Key words: stress intensity factor (SIF), an axisymmetric dynamic problem, finite differences, finite cylinder, a circular crack, torsional moment.*

### ВСТУП

Велика кількість елементів машин і конструкцій мають циліндричну форму. Наявність у них дефектів, наприклад, тріщин, суттєво знижує їх експлуатаційні характеристики і може привести до руйнування, особливо в умовах динамічного навантаження. Тому дослідження розподілу напружень у циліндричних тілах з тріщинами за динамічного навантаження є важливою задачею.

Аналіз сучасної наукової літератури показує, що напружений стан скінченних і нескінчених циліндричних тіл з тріщинами при статичному навантаженні вивчений достатньо повно. Приклади розв'язання подібних задач представлені в роботах [1-6]. При розв'язанні динамічних задач, в основному, розглядалися необмежені тіла з тріщинами, частіше за все круговими. Детальний аналіз результатів поданий в оглядовій статті [7] і монографії [8]. У випадку гармонічних коливань є ряд статей, наприклад [9,10], де кругові тріщини розглянуті у плитах та нескінченних циліндрах, а також стаття [11], у якій розглянута кругова тріщина у скінченному циліндрі.

Останнім часом для визначення КІН у циліндричних тілах із зовнішніми кільцевими тріщинами пропонується використовувати змішані числово-експериментальні методи. Так у [12] розглянуто динамічний закрут циліндричних зразків з такими тріщинами. Але цим методам, як і всім експериментальним, властиві недоліки, пов'язані з тим, що для кожного конкретного зразка необхідно проводити експерименти. Це ускладнює дослідження впливу геометричних розмірів циліндра на значення КІН.

Складність теоретичних досліджень динамічних задач зумовлена необхідністю використання інтегрального перетворення Лапласа за часом з подальшим числовим оберненням. А ця задача не тільки математично складна, але й не коректна. Останнім часом з'явилися праці, де застосовано модифікований метод скінченних різниць за часом. За допомогою цього методу, у нашому дослідженні розв'язано задачу про визначення коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) в околі плоскої кругової тріщини у скінченному циліндрі за умови дії крутного моменту.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається скінченний пружний циліндр з ізотропного матеріалу висотою  $a$  і радіусом  $r_0$ . З циліндром пов'язана циліндрична система координат, центр якої збігається з центром нижньої основи (рис. 1).

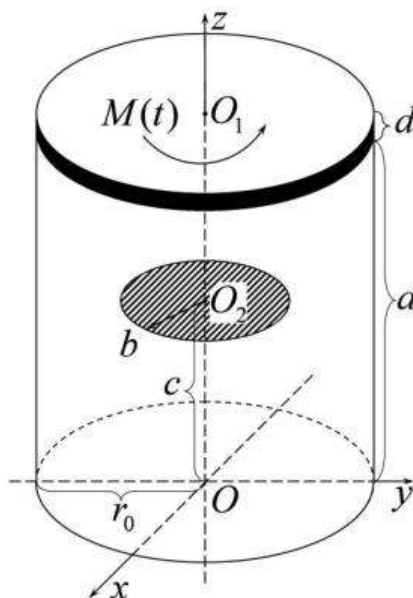


Рис. 1. Циліндр з тріщиною

Нижня основа вважається нерухомою, а з верхньою зчеплена жорстка накладка товщиною  $d$  і того ж радіусу, що і циліндр. До накладки в початковий момент часу  $t=0$  прикладений момент  $M(t)$ . Усередині циліндра міститься кругова тріщина радіусу  $b < r_0$ , центр якої знаходиться на осі циліндра і має координату  $z=c$ ,  $0 < c < a$ . За таких умов, циліндр знаходиться у стані вісесиметричної деформації крутіння і відмінним від 0 буде тільки кутове переміщення  $w(r, z, t)$ , яке знаходиться з рівняння (1) за нульових початкових умов:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$0 < r < r_0, \quad 0 < z < a, \quad t \in (0, +\infty), \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho},$$

де  $\rho$  – густина,  $G$  – модуль зсуву матеріалу циліндра.

На торцевих поверхнях циліндра виконуються рівності

$$w(r, 0, t) = 0, \quad w(r, a, t) = \alpha(t)r, \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad t \in (0, +\infty),$$

де  $\alpha(t)$  – невідомий кут повороту жорсткої накладки, який визначається з рівняння:

$$j_0 \ddot{\alpha} = \tilde{M}(t) - \tilde{M}_R(t),$$

де  $j_0$  – момент інерції накладки відносно осі,  $\tilde{M}_R(t)$  – момент сил реакції, які діють на накладку з боку циліндра. Зазначені моменти дорівнюють:

$$j_0 = \frac{r_0^2 m_n}{2}, \quad \tilde{M}_R(t) = 2\pi \int_0^{r_0} r^2 \tilde{\tau}_{\varphi z}(r, a, t) dr,$$

де  $m_n$  – маса накладки,  $\tilde{\tau}_{\varphi z}(r, a, t)$  – дотичні напруження під накладкою. Бічна поверхня циліндру вважається незавантаженою

$$\tilde{\tau}_{\varphi r}(r_0, z, t) = Gr \left. \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{w}{r} \right) \right|_{r=r_0} = 0, \quad 0 \leq z \leq a, \quad t \in (0, +\infty).$$

Поверхня тріщини також вважається вільною від напружень

$$\tilde{\tau}_{\varphi z}(r, c, t) = G \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \Big|_{z=c} = 0, \quad 0 \leq r \leq b, \quad t \in (0, +\infty),$$

а переміщення на поверхні тріщини розривне і має стрибок

$$w(r, c+0, t) - w(r, c-0, t) = \chi(r, t), \quad 0 \leq r \leq b, \quad t \in (0, +\infty).$$

### РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

**Скінченно-різницеve формулювання задачі.** Для розв'язання динамічної задачі доцільно буде перейти до безрозмірних величин за формулами (2):

$$\begin{aligned} w(r, z, t) &= r_0 \cdot w(\eta, \zeta, \tau), \quad \gamma = a/r_0, \quad l = c/a, \quad \beta = b/r_0, \\ r &= r_0 \eta, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad z = a\zeta, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad t = r_0 \tau / c_2, \quad \tau \in (0, +\infty). \end{aligned} \quad (2)$$

Після цього рівняння (1) набуває вигляду:

$$\Delta_{\eta\zeta} w = \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \quad \Delta_{\eta\zeta} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}. \quad (3)$$

Граничні умови на поверхнях циліндру в позначеннях (2) переписуться так:

$$\begin{aligned} w|_{\zeta=0} &= 0, \quad w|_{\zeta=1} = \alpha(\tau)\eta, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad \tau \in [0, +\infty), \\ \tau_{\varphi r}(1, \zeta, \tau) &= \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{w}{\eta} \right) \Big|_{\eta=1} = 0, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad \tau \in [0, +\infty). \end{aligned}$$

Для умов на тріщині маємо:

$$\begin{aligned} \tau_{\varphi z}(\eta, l, \tau) &= \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) \Big|_{\zeta=l} = 0, \quad 0 \leq \eta \leq \beta, \quad \tau \in [0, +\infty), \\ w|_{\zeta=l+0} - w|_{\zeta=l-0} &= \langle w \rangle|_{\zeta=l} = \chi(\eta, \tau). \end{aligned}$$

Рівняння крутильних коливань накладки набуде вигляду:

$$\frac{\pi \gamma m_0}{2} \ddot{\alpha}(\tau) = M_0(\tau) - M_R(\tau), \quad \alpha(0) = 0, \quad \dot{\alpha}(0) = 0, \quad (4)$$

де  $m_0 = \frac{\rho_n}{\rho_c} \cdot \frac{d}{a}$ ,  $M_0 = \frac{\tilde{M}}{Gr_0^3}$ ,  $M_R = \frac{\tilde{M}_R}{Gr_0^3}$  – безрозмірні моменти.

Для розв'язання сформульованої початково-крайової задачі застосуємо метод, що ґрунтується на різницеvій апроксимації похідних за часом, детально викладений у [13].

З цією метою утворюємо часову сітку,  $\tau_k$ :

$$\tau_k = \sum_{v=1}^k h_v, \quad h_v = \tau_k - \tau_{k-1}, \quad (\tau_0 = 0), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad h_i \neq h_j, \quad \forall (i, j).$$

Введемо позначення для кутового переміщення у фіксований момент часу  $w(\eta, \zeta, \tau_k) = w_k(\eta, \zeta)$ . Скористаємось лівими різницеvими похідними за часом:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial \tau} \right|_{\tau=\tau_k} = \frac{w_k - w_{k-1}}{h_k}, \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \right|_{\tau=\tau_k} = \frac{w_k}{h_k^2} + \frac{w_{k-2}}{h_k h_{k-1}} - \frac{w_{k-1}}{h_k^2} - \frac{w_{k-1}}{h_k h_{k-1}}.$$

Отже, рівняння (3) можна записати у вигляді

$$w_0 = 0, \quad \Delta_{\eta\zeta} w_1 = \frac{w_1}{h_1^2}, \quad \Delta_{\eta\zeta} w_k - \frac{w_k}{h_k^2} = \frac{w_{k-2}}{h_k h_{k-1}} - \frac{w_{k-1}}{h_k} \left( \frac{1}{h_k} + \frac{1}{h_{k-1}} \right), \quad k = 2, 3, \dots$$

Запишемо кутове переміщення у вигляді лінійної комбінації нових функцій:

$$w_k = \sum_{\nu=1}^k C_{k\nu} U_\nu. \tag{5}$$

У роботі [13] показано, якщо обрати коефіцієнти у формулі (5), згідно з формулами (6):

$$C_{kk} = 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad C_{k,k-1} = \frac{h_{k-1}}{h_{k-1} - h_k}, \quad k = 2, 3, \dots$$

$$C_{k,\nu} = \frac{h_\nu^2}{h_k^2 - h_\nu^2} \cdot \left( \frac{h_k}{h_{k-1}} C_{k-2,\nu} - \left( 1 + \frac{h_k}{h_{k-1}} \right) C_{k-1,\nu} \right), \quad k = 3, 4, \dots; \quad \nu = 1, 2, \dots, k-2, \tag{6}$$

то функції  $U_\nu$  задовольняють однорідному рівнянню (7):

$$\Delta_{\eta\zeta} U_\nu - \chi_\nu^2 U_\nu = 0, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots, \quad \chi_\nu = \frac{1}{h_\nu} \tag{7}$$

Тепер здійснимо дискретизацію рівняння коливання накладки (4)

$$\frac{\pi \gamma t_0}{2} \left\{ \frac{\alpha_k}{h_k^2} + \frac{\alpha_{k-2}}{h_k h_{k-1}} - \frac{\alpha_{k-1}}{h_k} \left( \frac{1}{h_k} + \frac{1}{h_{k-1}} \right) \right\} = M_{0k} - M_{Rk}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Запишемо  $\alpha_k, M_{0k}, M_{Rk}, \chi_k$  у вигляді лінійної комбінації нових функцій:

$$\alpha_k = \sum_{\nu=1}^k C_{k\nu} A_\nu, \quad M_{0k} = \sum_{\nu=1}^k C_{k\nu} \mu_{0\nu}, \quad M_{Rk} = \sum_{\nu=1}^k C_{k\nu} \mu_{R\nu}, \quad \chi_k = \sum_{\nu=1}^k C_{k\nu} \chi_\nu.$$

У результаті граничні умови на торцевих поверхнях циліндру запишуться у вигляді:

$$U_\nu \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad U_\nu \Big|_{\zeta=1} = A_\nu \eta, \tag{8}$$

а на бічній поверхні циліндру у вигляді:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{U_\nu}{\eta} \right) \right|_{\eta=1} = 0. \tag{9}$$

Умови на тріщині набудуть вигляду:

$$\left. \frac{\partial U_\nu}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=l} = 0, \quad \langle U_\nu \rangle \Big|_{\zeta=l} = \chi_\nu. \tag{10}$$

Якщо коефіцієнти  $C_{k\nu}$  обрати згідно з формулами (6), то з рівняння крутильних коливань накладки (4) знаходимо:

$$\frac{\pi \gamma m_0}{2} \chi_v^2 A_v = \mu_{0v} - \mu_{Rv}, \quad (11)$$

де  $\mu_{0v}$  – є розв'язком системи  $\sum_{v=1}^k C_{kv} \mu_{0v} = M_{0k}$ , а  $\mu_{Rv}(\tau) = \frac{2\pi}{\gamma} \int_0^1 \eta^2 \frac{\partial U_v}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=1} d\eta$ .

**Розв'язання задачі.** Розв'язок отриманої граничної задачі (5), (8)-(11) у вигляді суми:

$$U_v(\eta, \zeta) = U_v^0(\eta, \zeta) + U_v^1(\eta, \zeta).$$

Перший доданок є розв'язком задачі за відсутності тріщини, задовольняє умовам на торцях і бічній поверхні та подається формулою:

$$U_v^0(\eta, \zeta) = A_v \eta \frac{\text{sh}(\gamma \zeta \chi_v)}{\text{sh}(\gamma \chi_v)}.$$

Другий доданок є розв'язком, який задовольняє нульовим умовам на торцях і бічній поверхні, а на поверхні тріщини є розривним зі стрибком (10) і задовольняє умові:

$$\tau_{\varphi z v}^1(\eta, l) = -\tau_{\varphi z v}^0(\eta, l), \quad \tau_{\varphi z v}^0(\eta, l) = A_v \eta \chi_v \frac{\text{ch} \gamma l \chi_v}{\text{sh} \gamma \chi_v}, \quad 0 \leq \eta \leq \beta. \quad (12)$$

Розв'язок крайової задачі (5), (8), (9), (11), (12) побудуємо методом інтегральних перетворень, узагальненим на розривні задачі [14]. Застосуємо скінченне синус-перетворення Фур'є за змінною  $\zeta$  [15]:

$$U_{jv}^1(\eta) = \int_0^1 U_v^1(\eta, \zeta) \sin \lambda_j \zeta d\zeta, \quad U_v^1(\eta, \zeta) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} U_{jv}^1(\eta) \sin \lambda_j \zeta, \quad \lambda_j = \pi j. \quad (13)$$

Отримали одномірну крайову задачу:

$$U_{jv}^{1''}(\eta) + \frac{1}{\eta} U_{jv}^{1'}(\eta) - \left( \frac{1}{\eta^2} + q_{jv}^2 \right) U_{jv}^1(\eta) = -\frac{\lambda_j}{\gamma^2} \chi_v(\eta) \cos \lambda_j l, \quad (14)$$

$$U_{jv}^1 \Big|_{\eta=0} = 0, \quad \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{U_{jv}^1}{\eta} \right) \Big|_{\eta=1} = 0,$$

де  $q_{jv}^2 = \frac{\lambda_j^2}{\gamma^2} + \chi_v^2$ .

Функція Гріна цієї задачі має вигляд:

$$G_{jv}(\xi, \eta) = \xi \left[ g_{jv}(\xi, \eta) + Q_{jv}(\xi, \eta) \right],$$

$$g_{jv}(\xi, \eta) = -\int_0^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2 + q_{jv}^2} J_1(\eta \lambda) J_1(\xi \lambda) d\lambda, \quad Q_{jv}(\xi, \eta) = -\frac{K_2(q_{jv})}{I_2(q_{jv})} I_1(q_{jv} \xi) I_1(q_{jv} \eta).$$

Розв'язок одномірної крайової задачі (14) має вигляд

$$U_{jv}^1(\eta) = \int_0^1 \xi f_{jv}(\xi) \left\{ g_{jv}(\xi, \eta) + Q_{jv}(\xi, \eta) \right\} d\xi, \quad f_{jv}(\xi) = -\frac{\lambda_j}{\gamma^2} \chi_v(\xi) \cos \lambda_j l.$$

Обернемо інтегральне перетворення Фур'є за другою формулою з (13) і отримаємо:



$$\begin{aligned}
 U_v^1(\eta, \zeta) &= \int_0^1 \xi \chi_v(\xi) [S(\xi, \eta, \zeta) + D(\xi, \eta, \zeta)] d\xi, \\
 D(\xi, \eta, \zeta) &= 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{\gamma^2} \cos \lambda_j l \cdot \sin \lambda_j \zeta \cdot \frac{K_2(q_{jv})}{I_2(q_{jv})} I_1(q_{jv} \xi) I_1(q_{jv} \eta), \\
 S(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \lambda J_1(\eta \lambda) J_1(\xi \lambda) [F(\lambda, \zeta - l) + F(\lambda, \zeta + l)] d\lambda, \\
 d_v(\lambda) &= \gamma \kappa_v \sqrt{\lambda^2 + \kappa_v^2}, \quad F(\lambda, \zeta \pm l) = \operatorname{sgn}(\zeta \pm l) \frac{\operatorname{sh}(d_v(\lambda)(1 - |\zeta \pm l|))}{\operatorname{sh}(d_v(\lambda))}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Залишилось визначити невідомий стрибок  $\chi_v$ . Підставивши (15) у (12), отримаємо інтегральне рівняння, яке після інтегрування частинами і введення нової функції:

$$\psi_v(\xi) = \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} (\xi \chi_v(\xi))$$

набуде вигляду:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\beta} \xi \psi_v(\xi) [F_1(\xi, \eta) + D_1(\xi, \eta)] d\xi &= A_v \eta \gamma \kappa_v \frac{\operatorname{ch}(\gamma l \kappa_v)}{\operatorname{sh}(\gamma \kappa_v)}, \quad 0 \leq \eta \leq \beta, \\
 D_1(\xi, \eta) &= 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2}{\gamma^2} \cos^2 \lambda_j l \cdot \frac{K_2(q_{jv})}{q_{jv} I_2(q_{jv})} I_0(q_{jv} \xi) I_1(q_{jv} \eta), \\
 F_1(\xi, \eta) &= - \int_0^{\infty} \frac{d_v(\lambda)}{\operatorname{sh}(d_v(\lambda))} \operatorname{ch}(d_v(\lambda)(1-l)) \cdot \operatorname{ch}(d_v(\lambda)l) \cdot J_1(\eta \lambda) J_0(\xi \lambda) d\lambda.
 \end{aligned}$$

Отримане інтегральне рівняння можна звести до інтегрального рівняння Фредгольма шляхом введення нових невідомих функцій і перетворень, аналогічних до викладених докладно у [11]. З цією метою введемо невідому функцію  $\varphi_v(\tau)$ :

$$\psi_v(\xi) = - \frac{2}{\pi} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \int_{\xi}^{\beta} \frac{\tau \cdot \varphi_v(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - \xi^2}} d\tau$$

і застосуємо до обох частин рівняння оператор:

$$D_2[f] = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} \int_0^y f(\eta) d\eta.$$

Унаслідок цих перетворень інтегральне рівняння набуває вигляду:

$$g_v(s) - \frac{2\beta}{\pi \gamma} \int_{-1}^1 g_v(y) [B(y, s) + Q(y) - Q(y-s)] dy - g_v(0) = - \frac{2\beta \kappa_v A_v \operatorname{ch}(l \gamma \kappa_v)}{\operatorname{sh}(\gamma \kappa_v)} s^2, \tag{16}$$

де

$$B(y, s) = G(y, s) + R(y, s),$$

$$R(y, s) = 2\gamma\kappa_v \int_0^1 \frac{p \cdot \operatorname{ch} \gamma\kappa_v (1-l) p \cdot \operatorname{ch} \gamma\kappa_v lp}{u \cdot \operatorname{sh} \gamma\kappa_v p} \sin^2 \left( \frac{\beta\kappa_v u}{2} s \right) \cdot \cos(\beta\kappa_v uy) du,$$

$$G(y, s) = 4 \sum_{j=1}^{\infty} A_{jv} \operatorname{sh}^2(\beta\theta_{jv} s) \operatorname{ch}(2\beta\theta_{jv} y), \quad A_{jv} = \frac{j^2 \cos^2(\pi jl) \cdot K_2(2\theta_{jv})}{\sigma_{jv}^2 I_2(2\theta_{jv})},$$

$$Q(Y) = \gamma\kappa_v \int_1^{\infty} \left( D(u) - \frac{1}{2} \right) \cdot \cos(\beta\kappa_v uY) \cdot du, \quad D(u) = \frac{p \cdot \operatorname{ch}(\gamma\kappa_v (1-l) p) \cdot \operatorname{ch}(\gamma\kappa_v lp)}{u \cdot \operatorname{sh}(\gamma\kappa_v p)}.$$

У цьому рівнянні були введені наступні позначення:

$$\sigma_{jv} = \sqrt{j^2 + \left( \frac{\gamma\kappa_v}{\pi} \right)^2}, \quad \theta_{jv} = \frac{\pi\sigma_{jv}}{2\gamma}, \quad \lambda = u\kappa_v, \quad p = \sqrt{u^2 + 1}, \quad \tau = \beta y, \quad \varphi_v(\tau) = \beta g_v(y), \quad x = \beta s,$$

а функція  $g_v(y)$  парним чином продовжена на проміжок  $[-1; 0]$ .

Права частина рівняння (16) містить невідомий кут повороту накладки. Для його обчислення скористаємось рівнянням (11). Після перетворень, аналогічних до викладених вище, отримаємо формулу:

$$A_v = \frac{\mu_{0v}}{q_v} + \frac{\beta^2}{q_v \gamma} \int_{-1}^1 g_v(y) [Z_1(y) + Z_2(y)] dy, \quad q_v = \frac{\pi}{2} [\gamma m_0 \kappa_v^2 + \kappa_v \operatorname{cth}(\gamma\kappa_v)],$$

$$Z_1(y) = 2\gamma\kappa_v \int_0^{\infty} \frac{p \cdot \operatorname{ch}(l\gamma\kappa_v p)}{u \cdot \operatorname{sh}(\gamma\kappa_v p)} J_2(\kappa_v u) \cos(\kappa_v u \beta y) du,$$

$$Z_2(y) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j j^2 K_2(2\theta_{jv})}{\sigma_{jv}^2} \cos(\pi lj) \cdot \operatorname{ch}(2\beta\theta_{jv} y).$$

Наближений розв'язок рівняння (16) будемо шукати у вигляді інтерполяційного поліному:

$$g_v(y) = \sum_{m=1}^n g_{vm} \frac{P_n(y)}{(y - y_m) P'_n(y_m)}, \quad g_{vm} = g_v(y_m), \quad m = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (17)$$

де  $P_n(y)$  – поліном Лежандра  $n$ -го степеню, а  $y_m$  – корені цього поліному.

Для отримання розв'язку рівняння (16), інтеграли у ньому наближаємо за квадратурною формулою Гауса-Лежандра [16] і отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень невідомої функції у вузлах інтерполяції:

$$g_{vj} - \frac{2\beta}{\pi\gamma} \sum_{m=1}^n g_{vm} A_m [B(y_m, y_j) + Q(y_m) - Q(y_m - y_j)] - \frac{\pi y_j^2 \beta^2 \kappa_v \operatorname{ch}(l\gamma\kappa_v)}{q \operatorname{sh}(\gamma\kappa_v)} (Z_1(y_m) + Z_2(y_m)) \Bigg] - \sum_{m=1}^n b_m^0 g_{vm} = - \frac{2\mu_{0v} \beta \kappa_v \operatorname{ch}(l\gamma\kappa_v)}{q \operatorname{sh}(\gamma\kappa_v)} y_j^2, \quad (18)$$

$$A_m = \frac{2}{(1 - y_m^2) [P'_n(y_m)]^2}, \quad b_m^0 = - \frac{P_n(0)}{y_m P'_n(y_m)}.$$

Після розв'язання системи, невідома функція апроксимується інтерполяційним поліномом за формулою (17). Отриманий розв'язок дозволяє визначити напружений стан у будь-якій точці циліндру.

Для опису полів напружень у лінійній механіці руйнування використовують коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН). У цьому випадку він обчислюється за формулою:

$$\tilde{K}(t_k) = \lim_{r \rightarrow b+0} \sqrt{r-b} \cdot \tilde{\tau}_{\varphi zk}^I(r, c).$$

Безрозмірне значення КІН, після розв'язання системи (18), отримаємо за формулою:

$$K(\tau_k) = \frac{\tilde{K}(t_k)}{G\sqrt{r_0}}, \quad K(\tau_k) = \sum_{v=1}^k C_{kv} K_v, \quad K_v = -\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{2\pi\gamma}} \sum_{m=1}^n \frac{g_{vm}}{(1-y_m)^{P'_n}(y_m)}. \quad (19)$$

### РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

За допомогою формули (19) проведене числове дослідження залежності КІН від безрозмірного часу  $\tau = c_2 t / r_0$ . Вузли часової сітки були згущені біля точки  $\tau = 0$ . При розрахунках вважали, що відносна товщина накладки  $\delta = d/a = 0.1$ , а тріщина розташована в серединній площині циліндру  $l = c/a = 0.5$  і має відносний радіус  $\beta = b/r_0 = 0.5$ .

Досліджувався вплив різних видів навантаження і маси накладки на значення КІН. Результати розрахунків наведені на рисунках 2-4 у вигляді графіків часових залежностей відносних КІН. При цих розрахунках вважали, що відносна висота циліндру  $\gamma = a/r_0 = 2$ . Графіки на рис. 2 побудовані для випадку дії постійного крутного моменту  $M_0(\tau) = 1$ , ( $\tau \geq 0$ ), на рис. 3 криві описують випадок, коли крутний момент задається одиничним імпульсом  $M_0(\tau) = 1$ , ( $0 \leq \tau \leq 1$ ), а на рис. 4. наведені графіки для випадку дії гармонічного крутного моменту  $M_0(\tau) = \cos(\omega\tau)$ , ( $\tau \geq 0$ ). При розрахунках вважалось, що безрозмірна частота дорівнює  $\omega = c_2 \varpi / r_0 = 3$ . На рис. 2-4 різним значенням відносної густини  $\bar{\rho} = \rho_n / \rho_c : 0.25; 1; 4$  відповідають криві з номерами 1-3.

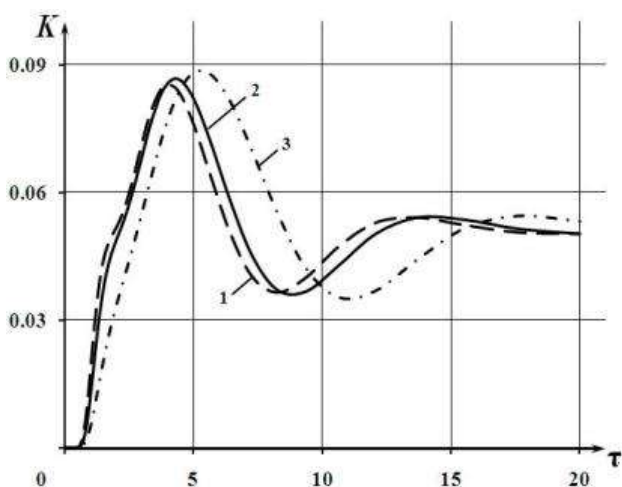


Рис. 2. Часові залежності відносних КІН при  $M_0(\tau) = 1, (\tau \geq 0)$

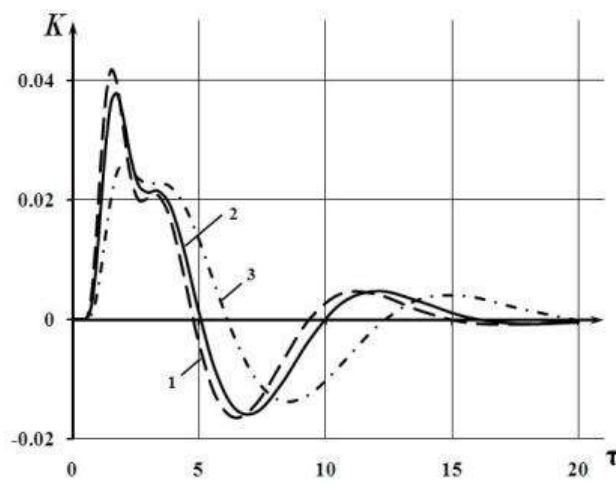


Рис. 3. Часові залежності відносних КІН при  $M_0(\tau) = 1, (0 \leq \tau \leq 1)$

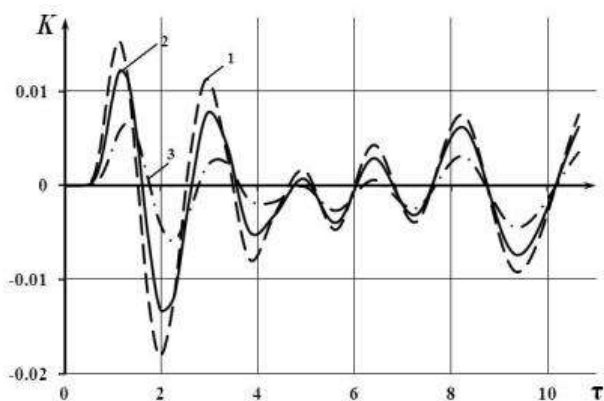


Рис. 4. Часові залежності відносних КІН при  $M_0(\tau) = \cos(3\tau)$ ,  $(\tau \geq 0)$

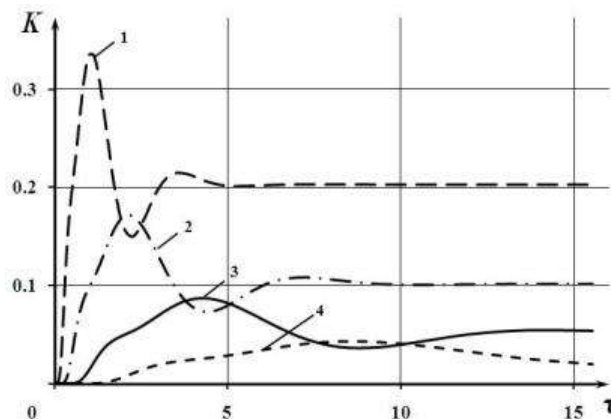


Рис. 5. Вплив геометричних параметрів циліндру на значення КІН при  $M_0(\tau) = 1$ ,  $(\tau \geq 0)$

З графіків на рис. 2 видно, що значення КІН спочатку зростають до максимального, а потім спадають зі слабкою осциляцією до рівня, який відповідає статичному навантаженню. Зі збільшенням маси накладки спостерігається збільшення тривалості перехідного процесу.

З рис.3 можна бачити, що під час дії навантаження значення КІН стрімко зростають до додатного максимуму, а по закінченні дії імпульсу стрімко спадають до від'ємного значення, потім має місце осцилююче затухання. Збільшення маси накладки спричиняє подовження перехідного процесу і зменшує значення максимуму КІН.

З рис. 4 видно, що за гармонічного навантаження поведінка КІН має осцилюючий характер. Як і на попередніх рисунках, спостерігається підвищене значення КІН під час перехідного процесу, порівняно із значенням КІН в усталеному режимі.

Було також оцінено вплив геометричних параметрів циліндру на значення КІН. Розрахунки проводились для значення відносної густини  $\bar{\rho} = \rho_n / \rho_c = 1$  у випадку навантаження постійно діючим крутним моментом  $M_0(\tau) = 1$ ,  $(\tau \geq 0)$ . Результати наведені на рис. 5. Криві 1–4, відповідають різним значенням відносної висоти циліндру  $\gamma = a/r_0 : 0.5; 1; 2; 4$ .

З графіків на рис. 5 можна зробити висновок, що зі збільшенням висоти циліндру відбувається зменшення максимуму КІН, зменшується осциляція під час перехідного процесу і збільшується його тривалість.

Із аналізу усіх графіків можна зробити висновок, що оскільки максимуми КІН спостерігаються саме під час перехідного процесу, то руйнування матиме місце саме під час нього.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Akiyama T., Hara T., Shibuya T. Torsion of an infinite cylinder with multiple parallel circular cracks. *Theor. Appl. Mech.* 2001. Vol. 50. P. 137–143.
2. Lee D.-S. Penny-shaped crack in a long circular cylinder subjected to a uniform shearing stress. *Eur. J. Mech. – A/Solids.* 2001. Vol. 20, N 2. P. 227–239.
3. Huang G.-Y., Wang Y.-S., Yu S.-W. Stress concentration at a penny-shaped crack in a nonhomogeneous medium under torsion. *Acta Mech.* 2005. Vol. 180, N 1. P. 107–115.
4. Jia Z. H., Shippy D. J., Rizzo F. J. Three-dimensional crack analysis using singular boundary elements. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1989. Vol. 28, N 10. P. 2257–2273.
5. Kaman M. O., Gecit M. R. Cracked semi-infinite cylinder and finite cylinder problems. *Int. J. Eng. Sci.* 2006. Vol. 44, N 20. P. 1534–1555.

6. Wang Q. Note on the crack-plane stress field method for analyzing SIFs and its application to a concentric penny-shaped crack in a circular cylinder opened up by constant pressure. *Int. J. Fract.* 1994. Vol. 66. P. 73–76.
7. Martin P. A., Wickham G. R. Diffraction of elastic waves by a penny-shaped crack: analytical and numerical results. *Proc. R. Soc. London A Math. Phys. Eng. Sci. The Royal Society.* 1983. Vol. 390, N 1798. P. 91–129.
8. Гузь А., Зозуля В. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках. Киев: Наук. думка, 1993. 236 с.
9. Singh B. M. et al. Dynamic stress intensity factors for penny-shaped crack in twisted plate. *J. Appl. Mech.* 1980. Vol. 47, N 4. P. 963–965.
10. Srivastava K. N., Palaiya R. M., Gupta O. P. Interaction of elastic waves with a penny-shaped crack in an infinitely long cylinder. *J. Elast. Kluwer Academic Publishers.* 1982. Vol. 12, N 1. P. 143–152.
11. Попов В. Г. Напряженное состояние конечного упругого цилиндра с круговой трещиной при крутильных колебаниях. *Прикладная Механика.* 2012. Т. 48, № 4. С. 86–93.
12. Ivanyts'kyi Y. L. et al. Stressed state of a cylinder with external circular crack under dynamic torsion. *Mater. Sci., Springer US.* 2007. Vol. 43, N 2. P. 203–214.
13. Savruk M. P. New method for the solution of dynamic problems of the theory of elasticity and fracture mechanics. *Mater. Sci., Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers.* 2003. Vol. 39, N 4. P. 465–471.
14. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. Москва: Наука, 1982. 341 с.
15. Попов Г. Я., Реут В. В., Вайсфельд Н. Д. Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень: навч. посібник. Одеса: Астропринт, 2005. 184 с.
16. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. Москва: Наука, 1967. 500 с.

## REFERENCES

1. Akiyama, T., Hara, T. & Shibuya, T. (2001). Torsion of an infinite cylinder with multiple parallel circular cracks. *Theor. Appl. Mech.*, Vol. 50, pp. 137-143.
2. Lee, D.-S. (2001). Penny-shaped crack in a long circular cylinder subjected to a uniform shearing stress. *Eur. J. Mech. - A/Solids*, Vol. 20, No. 2, pp. 227-239.
3. Huang, G.-Y., Wang, Y.-S. & Yu, S.-W. (2005). Stress concentration at a penny-shaped crack in a nonhomogeneous medium under torsion. *Acta Mech.*, Vol. 180, No. 1, pp. 107-115.
4. Jia, Z. H., Shippy, D. J. & Rizzo, F. J. (1989). Three-dimensional crack analysis using singular boundary elements. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 28, No. 10, pp. 2257-2273.
5. Kaman, M. O. & Gecit, M. R. (2006). Cracked semi-infinite cylinder and finite cylinder problems. *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 44, No. 20, pp. 1534-1555.
6. Wang, Q. (1994). Note on the crack-plane stress field method for analyzing SIFs and its application to a concentric penny-shaped crack in a circular cylinder opened up by constant pressure. *Int. J. Fract.*, Vol. 66, pp. 73-76.
7. Martin, P. A. & Wickham, G. R. (1983). Diffraction of elastic waves by a penny-shaped crack: analytical and numerical results. *Proc. R. Soc. London A Math. Phys. Eng. Sci. The Royal Society*, Vol. 390, No. 1798, pp. 91-129.
8. Guz, A. & Zozulja, V. (1993). Brittle fracture of materials under dynamic loads. Kyiv: Naukova dumka, Ukraine.
9. Singh, B. M., Haddow, J. B., Vrbik, J. & Moodie, T. B. (1980). Dynamic stress intensity factors for penny-shaped crack in twisted plate. *J. Appl. Mech.*, Vol. 47, No. 4, pp. 963-965.
10. Srivastava, K. N., Palaiya, R. M. & Gupta, O. P. (1982). Interaction of elastic waves with a penny-shaped crack in an infinitely long cylinder. *J. Elast. Kluwer Academic Publishers*, Vol. 12, No. 1, pp. 143-152.
11. Popov, V. G. (2012). Stress state of a finite elastic cylinder with a circular crack at torsional oscillations. *International Applied Mechanics*, Vol. 48, Iss. 4, pp. 86-93.
12. Ivanytskyi, Ya. L., Boiko, V. M., Khodan', I. V. & Shtayura, S. T. (2007). Stressed state of a cylinder with external circular crack under dynamic torsion. *Mater. Sci., Springer US*, Vol. 43, No. 2, pp. 203-214.
13. Savruk, M. P. (2003). New method for the solution of dynamic problems of the theory of elasticity and fracture mechanics. *Mater. Sci., Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers*, Vol. 39, No. 4, pp. 465-471.

14. Popov, G. Ya. (1982). The elastic stress concentration near the cliches, incisions, thin inclusions and reinforcements. Moscow: Nauka, Russia.
15. Popov, G. Ya., Reut, V. V. & Vaisfeld, N. D. (2005). Equations of Mathematical Physics. Method of Integral Transformations. Odessa: Astroprint, Ukraine.
16. Krylov, V. I. (1967). Approximate calculation of integrals. Moscow: Nauka, Russia.

УДК 378

## **С. П. ТИМОШЕНКО ТА СУЧАСНА ІНЖЕНЕРНА ОСВІТА В УКРАЇНІ: ДЕЯКІ РЕАЛІЇ, ПРОБЛЕМИ, ТЕНДЕНЦІЇ ТА ПЕРСПЕКТИВИ**

Дем'яненко А. Г.

*Дніпропетровський державний аграрно-економічний університет,  
вул. Ворошилова, 25, м. Дніпро, Україна*

anatdem@ukr.net

Наведено деякі міркування, погляди та думки одного з найвидатніших механіків світу, нашого співвітчизника С. П. Тимошенка, стосовно інженерної освіти, яку він створював і знав зсередини, та які є актуальними і для сьогоднішнього дня. Обговорюються деякі питання сучасного стану та перспектив вищої інженерної освіти в Україні. Наголос робиться на необхідності збереження її фундаментальності.

*Ключові слова: інженерна освіта, стан, перспективи, фундаментальність.*

## **S. P. TIMOSHENKO И СОВРЕМЕННОЕ ИНЖЕНЕРНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В УКРАИНЕ: НЕКОТОРЫЕ РЕАЛИИ, ПРОБЛЕМЫ, ТЕНДЕНЦИИ И ПЕРСПЕКТИВЫ**

Демьяненко А. Г.

*Днепропетровский государственный аграрно-экономический университет,  
ул. Ворошилова, 25, г. Днепр, Украина*

anatdem@ukr.net

Приведены некоторые соображения, мысли и взгляды одного из выдающихся механиков XX века, нашего соотечественника С. П. Тимошенко, касающиеся инженерного образования, которые актуальны и сегодня. Обсуждается состояние, проблемы, тенденции и перспективы высшего инженерного образования в Украине. Акцент делается на необходимости сохранения его фундаментальности.

*Ключевые слова: инженерное образование, состояние, перспектива, фундаментальность.*

## **S.P. TIMOSHENKO AND HIGHER ENGINEERING EDUCATION: SOME PROBLEMS, CURRENT STATUS AND PERSPECTIVES OF ENGINEERING EDUCATION IN UKRAINE**

Demianenko A. G.

*Dnipropetrovsk State Agrarian and economics University of Ukraine,  
Voroshilova str., 25, Dniepr, Ukraine*

anatdem@ukr.net

Shows some thoughts, opinions and ideas of one of the founders of engineering education on a global scale, our fellow S.P. Tymoshenko regarding engineering education, which he created and knew from the inside, and that are relevant for today. Some problems of education engineering and of current status and perspectives of higher education engineering in Ukraine are discussed. Saving fundamental bases of agrarian engineering higher education system and its intensification of the self instruction learning are accented.

*Key words: engineering education, status, fundamental, perspectives.*

## ВСТУП

У грудні 2018 року світова наукова спільнота відзначатиме 140 років від дня народження одного з найвидатніших вітчизняних фахівців у галузі інженерної механіки С. П. Тимошенка (1878-1972), з ім'ям та працями якого пов'язані становлення і розвиток інженерної механіки та освіти, виховання багатьох поколінь наукових та інженерних кадрів не тільки в Україні, а й у всьому світі. С. П. Тимошенко народився 23 грудня 1878 року у селі Шпотівка Конотопського району Чернігівської губернії у сім'ї землеміра Прокопа Тимошенка. Дитинство Степана Тимошенка минуло в сусідньому селі Базилівка – мастьку Скоропадських, з чудовою природою, гаями, садами та ставками. Спочатку реальне училище у Ромнах, потім студент Інституту інженерів шляхів сполучення С.-Петербургу, служба в армії сапером, лаборант механічної лабораторії Інституту інженерів шляхів сполучення, лаборант, викладач кафедри опору матеріалів Петербурзької політехніки, Київська політехніка, знову Петербург в електротехнічному і політехнічному інститутах, завідувач кафедри будівельної механіки політехніки. У грудні 1917 року на період канікул поїхав у Київ, не повернувся до Петербурга, а залишився професором у Київській політехніці. Узяв участь у роботі комісії В. І. Вернадського зі створення Української академії наук та відділення механіки академії. Як один із засновників Академії наук України і визнаний учений-механік С. П. Тимошенко разом з іншими членами комісії був призначений академіком та директором інституту технічної механіки АН УРСР. У 1920 році Тимошенко залишає Україну, але і після цього прискіпливо слідкує за інженерною та навіть шкільною освітою в СРСР, яку він створював і добре знав, порівнює її з системами освіти інших країн. Під час неодноразових відвідувань своєї Батьківщини він спілкується з викладачами, керівниками навчальних закладів, знайомиться зі станом справ в освіті. Особлива увага та акцент зроблені на фізико-математичний цикл дисциплін. У 60 роки минулого сторіччя під час «відлиги» С. П. Тимошенко відвідує багато технічних вишів СРСР і доходить висновку [7]: «Наше старшее поколение так хорошо заложило фундамент образования, что как ни пытаются его сейчас испортить, пока ничего у них не получается». Погляди, думки, міркування, оцінки щодо інженерної освіти, зроблені у свій час С. П. Тимошенко, не тільки залишаються актуальними, а стають сьогодні навіть більш важливими для сучасної України. Виникає логічне запитання, на чому робив наголос у свій час фундатор, засновник інженерної освіти у світовому масштабі С. П. Тимошенко та як з часів С. П. Тимошенка (1878-1972) змінилася інженерна освіта в Україні? Які вона має здобутки? Що відбувається зараз з інженерною освітою в Україні? Що про це говорять авторитети інженерної галузі світового рівня? Звичайно, постає і запитання, що треба принципово зробити, щоб покращувалась, а не погіршувалась основа розвитку технічного прогресу – інженерна освіта в Україні? За словами академіка Григолюка Е.І. [1] саме С. П. Тимошенку належить заслуга постановки та побудови системи інженерної освіти. С. П. Тимошенко разом зі своїм земляком та однокласником з навчання в реальному училищі в Ромнах, відомим фізиком, академіком А. Ф. Иоффе, створили в політехнічному інституті Санкт-Петербурга відомий на весь світ фізико-механічний факультет, де студентам механічного відділення планувалося дати серйозну фундаментальну підготовку з математики, механіки та фізики у зв'язку з широкими технічними застосуваннями цих наук. С. П. Тимошенко відповідав за створення, навчальні плани і програми навчання на механічному відділенні. Ще з реального училища, де готували учнів до практичної технічної роботи, С. П. Тимошенко знав, що механіка для інженера є важливим та визначальним предметом. Чимало уваги цим питанням С. П. Тимошенко приділяв, працюючи деканом інженерно-будівельного факультету Київської політехніки. Аналізуючи певні прогалини у викладанні математики і механіки, С. П. Тимошенко вбачав причину цього в абстрактному підході, далекому від практичних проблем виробництва. Іншою причиною незадовільного вивчення математики і механіки була відсутність практичних занять. У подальшому ці недоліки були усунені С. П. Тимошенко, але на сучасному етапі в Україні усе повертається на ті ж самі кола. Відомий математик, автор підручника «Теория вероятностей» Е. С. Вентцель казав «Учить инженеру математику нужно не для того, чтобы он изошрял свой ум, а для того, чтобы он умел применять ее на практике».

## СТАН І ТЕНДЕНЦІЇ СУЧАСНОЇ ІНЖЕНЕРНОЇ ОСВІТИ

На початку третього тисячоліття людство вступило у якісно нову інформаційну епоху розвитку, яка відповідно ставить нові вимоги до підготовки фахівців будь-якої галузі, в основі якої – формування, становлення та розвиток творчої особистості протягом життя. Підвалини створення такої особистості і повинна закласти система освіти, при цьому акцент робиться на розвитку творчих здібностей особистості та її мобільних і адаптаційних можливостей до швидко змінних процесів у світі [2-4]. Великий вплив на становлення та розвиток інженерної особистості С. П. Тимошенка зробив Олексій Миколайович Крилов (1863-1945), видатний математик, механік, кораблебудівник, академік, якому належить підґрунтя парадигми сучасної освіти не на все життя, а протягом усього життя. О. М. Крилов наголошував [5], що «жодна школа не може випустити закінченого фахівця. Фахівця творить його власна діяльність. Треба лише, щоб він умів учитися, вчитися все життя. Для цього школа повинна прищепити йому культуру, любов до справи, до науки. Він повинен винести з неї основи знань, критично їх засвоїти; повинен знаходити знання, яких йому бракує; знати, де їх можна знайти та як ними скористатися». Саме таким шляхом і творив у собі фахівця, світоча механіки, вченого і педагога молодий С. П. Тимошенко. Саме таким шляхом повинні мандрувати і наші студенти, майбутні інженери, у тому числі й аграрної галузі, будівники економіки незалежної України. В умовах глобалізації світу, переходу до нової інформаційної епохи ключові інтелектуальні професії все більше стають масовими, а інвестиції у сферу освіти, у розвиток інтелектуального людського потенціалу найефективнішими та прибутковими. У Сорбонській декларації 1998 р. проголошено за мету зробити Європу не тільки «зоною євро, банків і економічних інститутів, а і зоною економіки знань». Технологією досягнення цієї мети і є Болонська система. Які ж відбулися зміни в системі вищої інженерної освіти в Україні, чи підвищилася якість інженерної освіти? Чи володіють наші студенти іноземними мовами та є дійсно мобільними з точки зору компетенцій? Чи зберігається фундаментальність, чи закладаються надійні підвалини інженерної освіти в Україні [2-4]? Ці та багато інших питань залишаються відкритими і у 2017 році. За останні роки значно скорочені аудиторні години, відведені на вивчення дисциплін, які закладають основи, формують базис майбутніх інженерів, частину дисциплін професійного блоку у скороченому вигляді п'ятого року навчання перекинуто на попередні роки. Ці нововведення в системі інженерної освіти, до яких студенти у наших реаліях, особливо аграрних вишів, не завжди готові, не покращують якість освіти, рівень знань. Шкільна підготовка, особливо сільської молоді, з математики, природничих дисциплін, м'яко кажучи, залишається на низькому рівні. Тут маємо багато об'єктивних і суб'єктивних причин. На важливість саме шкільної підготовки з математики у свій час наголошував С. П. Тимошенко [6] – «Математика продолжает быть одним из самых важных предметов при обучении в средней школе...». А в Україні з першого класу вчимо іноземну мову, а потім дві іноземні мови. Тепер вчитимемо з другого класу інформатику. Іноді буває не зрозуміло, чи потрібно знати свою, державну мову? Але чи треба вчити у виші етику, естетику, релігію, соціологію, політологію, іноді на інженерних напрямках зарубіжну літературу і культуру? Звичайно, і цим повинна володіти культурна людина. Але виникає питання – а коли ж математику, фізику, механіку вчитимемо, якщо кількість тижневих годин обмежена? А чи вистачає аудиторного часу на базові знання базових дисциплін інженера – математику, фізику, механіку, опір матеріалів чи опановувати їх самостійно? Видатні засновники інженерної освіти С. П. Тимошенко, О. М. Крилов постійно наголошували [5-7], що «удовлетворительное инженерное образование требует предварительной подготовки в таких фундаментальных предметах, как математика, механика, физика. Наличие хорошей математической подготовки в школе позволяло начинать преподавание фундаментальных дисциплин на достаточно высоком уровне уже на первом курсе и дать студентам достаточную подготовку по фундаментальным дисциплинам в первые два года. Последние три года использовались для изучения инженерных дисциплин». Зауважимо, що інженерні дисципліни у більшості своїй для сучасних інженерних напрямів є розділами прикладної математики, оскільки, як відомо, у будь-якій теорії стільки науки, скільки в ній математики. Тут і формування механічних та математичних моделей машин, явищ, технологій, і їх дослідження за допомогою математичного апарату. Низький рівень математичної підготовки, як зазначав



С. П. Тимошенко [6], впливає на рівень викладання, який треба знижувати, пристосовуючись до рівня математичної підготовки студентів, впливає і на відношення студентів до інженерної науки, знижує креативну складову навчального процесу та інженерної діяльності загалом. Таких студентів не цікавить виведення формул, основні теоретичні положення і спрощення. Вони хочуть мати кінцеву формулу, яку можна було б механічно, без зайвих міркувань застосовувати при розв'язуванні практичних задач. Саме таке відношення спостерігається і у деяких студентів сучасності, професійна діяльність яких, іноді через необізнаність з теорією, основами комп'ютерних алгоритмів, призводить до руйнувань новостворених ними споруд. Класики інженерної освіти С. П. Тимошенко, О. М. Крилов, В. Л. Кирпичов висловлювали думку та побажання, щоб математику для інженерів викладали математики, обізнані з інженерною справою, надавали великого значення лекціям та лекторам взагалі, який своїм фахом, компетентністю, прикладом закладав основи знань майбутніх фахівців. Вважаємо, що перші два роки інженерної освіти в технічному університеті необхідно зробити недоторканими для формування саме бази, фундаменту майбутнього інженера, як це було в часи В. Л. Кирпичова, С. П. Тимошенка, О. М. Крилова. При проведенні реформ слід пам'ятати, що система інженерної освіти інерційна, досить консервативна і миттєвих результатів, покращення, навіть при використанні найсучасніших результативних методик та технологій, не матимемо.

У 2014 році МОН України видало наказ № 1050 від 17.09.2014 р. про скасування наказу МОН України від 30.12.2005 р. № 774 «Про впровадження кредитно-модульної системи організації навчального процесу». Що ж при цьому змінилося в сучасній системі підготовки інженерних кадрів в Україні? Відверто кажучи – нічого корисного. Спочатку за старим наказом вивели 50% матеріалу на самостійну роботу, до якої наші студенти в наших реаліях не зовсім готові. Водночас при орієнтації до самостійної роботи зменшили кількість РГР, курсових тощо. На наступному етапі «покращення» ліквідували регулярні контрольні заходи, обмежили кількість дисциплін у семестрі і аудиторних годин у тижні. Не забуваємо при цьому, що п'ять років навчання втиснуто в чотирирічний термін, під час якого готуємо бакалавра, на думку багатьох фахівців – техніка, а не інженера. У більшій частині випадків це зроблено за рахунок зменшення обсягу базових, фундаментальних дисциплін, які закладають базу, фундамент майбутнього інженера будь-якого фаху. А не маючи надійного фундаменту, марно сподіватися на добудову, розбудову, тобто на перспективу розвитку інженерної освіти, економіки і суспільства загалом.

Для забезпечення якісної інженерної освіти, вважаємо, необхідно: підвищити рівень шкільної підготовки, особливо з природничих дисциплін; не знижувати фундаментальності вищої освіти; приділяти більше уваги самостійній роботі студентів; втілювати в навчальний процес дієвий контроль; використовувати ринкові важелі управління навчальним процесом; приділяти більше уваги мотивації студентів до навчання та стимулювання викладачів до ефективної, результативної роботи; створити необхідну, сучасну матеріально-технічну базу та фінансувати систему освіти на належному рівні. Переймаючись питанням покращення якості підготовки інженерних кадрів для АПК на кафедрі теоретичної механіки та опору матеріалів Дніпропетровського державного аграрно-економічного університету за потребою часу у складі авторського колективу С. В. Кагадія, А. Г. Дем'яненка, В. О. Гурідової підготовлено та надруковано навчальний посібник «Основи механіки матеріалів і конструкцій» для інженерно-технологічних спеціальностей АПК. У посібнику наведено багато фахових прикладів з відповідними розрахунками та аналізом. Маючи на увазі, що більшість землеробської техніки працює на ріллі і знаходиться у стані вібрації, велика увага приділена розрахункам деталей машин на міцність за дії динамічних навантажень та питанням їх втомної міцності. У тому ж складі авторів підготовлено та видано з грифом навчальний посібник «Основи теорії коливань в інженерній справі та втомна міцність».

### **СУЧАСНА ПАРАДИГМА, ЗАВДАННЯ ТА ПЕРСПЕКТИВИ**

XXI сторіччя – інформаційне, сторіччя нанотехнологій та економіки знань, а тому єдиним виходом і найважливішим кроком підвищення якості освіти є закладання, формування фундаменту, збереження фундаментальності інженерної освіти. Коли є надійний фундамент

у споруди, то можемо її надбудувати, добудувати та розбудувати [4]. До формування фундаменту інженера необхідно повернутися обличчям та приділяти йому більше уваги. Базисом для інженера будь-якого напрямку є фундаментальна підготовка з фізико-математичних та інженерно-технічних дисциплін, про що свого часу, як уже наголошувалося, влучно сказав С. П. Тимошенко [5, 7]: «Ґрунтова підготовка з математики і основних технічних предметів давали нам величезну перевагу перед американцями...». На жаль, цього не можна сказати про сучасну інженерну освіту в Україні, у тому числі і аграрну, яка з позицій «миттєвого прагматизму» все більше набирає тенденцію підготовки «користувачів», «споживачів» закордонних машин і технологій, а не будівників власних машин, технологій та продовольчої і економічної незалежності України. Фундаментальність інженерної освіти в Україні останніми роками поступово втрачається [4]. Сучасна парадигма освіти ХХІ століття полягає не в отриманні освіти на все життя, а в освіті впродовж усього життя. І саме фахівець, який має міцну та надійно закладену базу, фундамент, зможе продовжувати та розвивати свою справу. Машини, технології дуже стрімко змінюються, оновлюються швидше в рази ніж покоління. Це зайвий раз підтверджує необхідність закладання міцного фундаменту, надійної бази, маючи яку фахівець зможе мобільно переналаштовуватися, орієнтуватися та адаптуватися до будь-яких швидкозмінних ситуацій. Якщо закладемо майбутнім фахівцям інженерії якісний, надійний фундамент, інженерний базис, призвичаїмо до самостійної роботи та освіти впродовж життя, якщо навчимо їх мислити та вчитися, то це і буде запорукою якості, запорукою майбутніх успіхів та перспектив розвитку не тільки інженерної галузі, а і всієї структурної перебудови економіки України. У протилежному випадку марно сподіватися на перспективи розвитку інженерної освіти, економіки та громадянського суспільства в Україні.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И. Разница в подготовке русских и американских инженеров. *Наука и жизнь*. 1997. № 7. С. 48–54.
2. Кобець А. С., Дем'яненко А. Г. С.П. Тимошенко та сучасна інженерна освіта в Україні. *Теорія та методика навчання фундаментальних дисциплін у вищій школі*. Кривий Ріг: Вид. відділ НМетАУ, 2013. С. 16–24.
3. Кобець А. С., Дем'яненко А. Г. Сучасна вища інженерна аграрна освіта в Україні. *Теорія та методика навчання фундаментальних дисциплін у вищій школі*. Кривий Ріг: Вид. відділ НМетАУ, 2011. С. 72–77.
4. Назарова Н. С., Стрижова И. А. Парадигма вищого образования в ХХІ веке. *Зб. наукових праць «Теорія та методика навчання фундаментальних дисциплін у вищій школі»*. 2010. Вып. VI. С. 95–99.
5. Писаренко Г. С. Степан Прокопович Тимошенко. Київ: Наукова думка, 1979. 195 с.
6. Тимошенко С. П. Инженерное образование в России. Люберцы: ПИК, ВИНТИ, 1996. 82 с.
7. Тимошенко С. П. Воспоминания. Киев: Наукова думка. 424 с.

#### REFERENCE

1. Grigoluk, E. I. (1997). The difference in the training of Russian and American engineers. *Nauka i jizn*, No. 7, pp. 48-54.
2. Kobets, A. S. & Demianenko, A. G. (2013). S.P. Tymoshenko and modern engineering education are in Ukraine. *Teoriia ta metodika navchannia fundamentalnih distsiplin u vischii shkoli*. Krivii Rig: Vidavniczii Viddil NMetAU, pp. 16-24 (in Ukrainian).
3. Kobets, A. S. & Demianenko, A. G. (2011). Modern higher engineering agrarian education is in Ukraine. *Teoriia ta metodika navchannia fundamentalnih distsiplin u vischii shkoli*. Krivii Rig: Vid. Viddil NMetAU, pp. 72-77 (in Ukrainian).
4. Nazarova, N. S. Strijova I. A. (2010). A paradigm of higher education is in a XXI century. *Teoriia ta metodika navchannia fundamentalnih distsiplin u vischii shkoli*. Krivii Rig: Vidavniczii Viddil NMetAU, pp. 95-99 (in Ukrainian).
5. Pisarenko, G. S. (1979). Stepan Prokopovich Timoshenko. Kiyv: Naukova dumka.
6. Timoshenko, S. P. (1996). Engineering education is in Russia. Lubertsi: Proizvodstvenno-izdatelskii kombinat VINITI.
7. Timoshenko, S. P. (1993). Remembrances. Kiev: Naukova dumka.

УДК 519.85

## СТОХАСТИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ НА РОЗМІЩЕННЯХ: ВЛАСТИВОСТІ ЛІНІЙНИХ БЕЗУМОВНИХ ЗАДАЧ

<sup>1</sup>Ємець О. О., <sup>2</sup>Барболіна Т. М.

<sup>1</sup>Полтавський університет економіки і торгівлі,  
вул. Коваля, 3, м. Полтава, Україна

<sup>2</sup>Полтавський національний педагогічний університет імені В. Г. Короленка,  
вул. Остроградського, 2, м. Полтава, Україна

yemetsli@ukr.net, tm-b@ukr.net

Досліджуються властивості лінійних безумовних задач стохастичної оптимізації на розміщеннях, постановка яких здійснена на основі введення лінійного порядку на множині дискретних випадкових величин. Встановлено взаємозв'язок стохастичної задачі, що розглядається, зі спеціально сформульованими детермінованими задачами комбінаторної оптимізації на розміщеннях. Обґрунтовано властивості розв'язку стохастичної задачі.

*Ключові слова:* евклідова задача комбінаторної оптимізації, лінійна безумовна задача оптимізації на розміщеннях, стохастична оптимізація, стохастична комбінаторна оптимізація.

## СТОХАСТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ НА РАЗМЕЩЕНИЯХ: СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ БЕЗУСЛОВНЫХ ЗАДАЧ

<sup>1</sup>Ємець О. А., <sup>2</sup>Барболина Т. Н.

<sup>1</sup>Полтавський університет економіки і торгівлі,  
ул. Коваля, 3, г. Полтава, Україна

<sup>2</sup>Полтавський національний педагогічний університет ім. В. Г. Короленко,  
ул. Остроградського, 2, г. Полтава, Україна

yemetsli@ukr.net, tm-b@ukr.net

Исследуются свойства линейных безусловных задач стохастической оптимизации на размещениях, постановка которых осуществлена на основе введения линейного порядка на множестве дискретных случайных величин. Установлена взаимосвязь рассматриваемой стохастической задачи со специально сформулированными детерминированными задачами комбинаторной оптимизации на размещениях. Обоснованы свойства решения стохастической задачи.

*Ключевые слова:* евклидова задача комбинаторной оптимизации, линейная безусловная задача оптимизации на размещениях, стохастическая оптимизация, стохастическая комбинаторная оптимизация.

## STOCHASTIC OPTIMIZATION ON ARRANGEMENTS: PROPERTIES OF LINEAR UNCONSTRAINED PROBLEMS

<sup>1</sup>Yemets O. O., <sup>2</sup>Barbolina T. M.

<sup>1</sup>Poltava university of economics and trade,  
Koval St., 3, Poltava, Ukraine

<sup>2</sup>Poltava V.G. Korolenko National Pedagogical University,  
Ostrogradsky St., 2, Poltava, Ukraine

yemetsli@ukr.net, tm-b@ukr.net

Actual trend of the modern theory of optimization is to study the problems of combinatorial nature. Important results have been obtained as a result of immersion of combinatorial sets in Euclidean space and study the properties of such problems. This paper is a continuation and development of a research within the Euclidean combinatorial optimization, it considers such an important class of Euclidean combinatorial optimization problems as arrangement problems.

We also should note that the problems with uncertainty, including probabilistic, attract the attention of researchers recently. Such problems arise and in combinatorial optimization. Stochastic combinatorial models can be used to describe and solve many other important practical problems. Earlier the authors proposed an approach for stochastic optimization problems formalization through the introduction of the order relation on the set of random variables. This order on a set of discrete random variables is defined through the comparison of the mathematical expectations, dispersions, possible values and associated probabilities.

Using introduced linear order, let us order the elements of the set of discrete random variables. The first random variable in this ordered list is the minimum value and the last one is the maximum value. The definition of the minimum and maximum allows setting the optimization problem for finding the extreme elements under existing conditions. In this article we discuss linear unconstrained problem of stochastic combinatorial optimization on the common set of arrangements when elements of multiset  $\Gamma$  are discrete random variables.

Some properties of such problems are obtained. The interrelation of problems with stochastic uncertainty with the determined problems is shown. Determined problems are specially constructed: coefficients of objective function are powers of coefficients of objective function of initial stochastic problem, feasible region is the general set of arrangements when multiset elements are equal to mathematical expectation (or dispersion) of discrete random variables from given multiset  $\Gamma$ . We prove that minimal in solution of determined problem can be received using numerical characteristics of components of minimal in the solution of stochastic problem. On the other hand if  $x$  is the minimal in the solution of determined problem then there is a minimal in solution of the stochastic problem such that mathematical expectations (dispersions) of components are equal to corresponding components of  $x$ . Further research of properties of stochastic optimization problems based on criterion of minimal in (determined) linear unconstrained optimization problem on arrangements.

A minimal in solution of linear unconstrained stochastic optimization problem on arrangements can be constrained using minimals in the problems of less dimension. The feasible sets of these problems are sets of arrangements from the elements of submultisets of given multiset  $\Gamma$ . The obtained result is used to prove properties of minimal in solution of linear unconstrained stochastic optimization problem on arrangements. There exists a minimal such that mathematical expectations and dispersions of its components are equal to corresponding mathematical expectations and dispersions of specific elements of multiset  $\Gamma$ . In particular if coefficients of objective function are positive and ordered by the lack of increase then there exists a minimal such that mathematical expectations and dispersions of its components are equal to corresponding numerical characteristics of leading elements of multiset which are located according to introduced order. If in addition there are no elements of multiset with equal mathematical expectation and dispersion then the arrangement which components are equal to corresponding elements of multiset is the minimal in solution of linear unconstrained stochastic optimization problem on arrangements.

Subsequent studies suggest further study of the properties of the considered problems that will allow developing methods and algorithms to solve them.

*Key words: euclidean combinatorial optimization problem, linear unconstrained optimization problem on arrangements, stochastic optimization, stochastic combinatorial optimization.*

## ВСТУП

Актуальним напрямком теорії оптимізації протягом останніх десятиліть є дослідження (див., зокрема, [1-15]) задач комбінаторної природи, у тому числі на основі занурення комбінаторних множин в евклідовий простір (див., наприклад, [4-5]) у рамках евклідової комбінаторної оптимізації.

З іншого боку, значну увагу вчених привертають оптимізаційні задачі з урахуванням різних видів невизначеності, зокрема імовірнісної. Поєднання зазначених напрямків представлено, наприклад, у дослідженнях інтервальних моделей задач геометричного проектування, їх відображень в евклідові простори ([5-6] та ін.), екстремальних задач на графах з інтервальними параметрами [7], евклідових задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах [8], нечіткої задачі комівояжера [9], стохастичних задач, пов'язаних з комбінаторними оптимізаційними задачами на допустимій множині  $F \subset \{0,1\}^n$  [10] тощо.

Для формулювання оптимізаційних задач з різними видами невизначеності запропоновано підхід, який ґрунтується на введенні порядку на множині відповідних величин. Такий підхід

для задач з інтервальною та нечіткою невизначеністю розглянуто, зокрема, в [8, 11], його поширення на оптимізаційні задачі з імовірнісною невизначеністю запропоновано в [12, 13].

Один зі способів упорядкування дискретних випадкових величин ґрунтується на порівнянні математичних сподівань, дисперсій, можливих значень та відповідних імовірностей випадкових величин. Для лінійних безумовних задач стохастичної оптимізації на розміщення у такій постановці одержано властивості розв'язку у випадку додатних коефіцієнтів цільової функції [14]. Наша праця присвячена подальшому дослідженню зазначених задач й узагальненню отриманих раніше результатів.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Позначатимемо випадкові величини великими латинськими літерами  $(A, B)$ , їх можливі значення – малими літерами  $(a^i, b^i)$ , а відповідні ймовірності –  $p_a^i, p_b^i$ . Нехай також  $M(A)$  позначає математичне сподівання випадкової величини  $A$ , а  $D(A)$  – дисперсію. Вважатимемо, що випадкові величини є дискретними, причому серед можливих значень існує найменше. Множину таких випадкових величин позначимо  $\Xi$ . Вважатимемо, що можливі значення випадкової величини упорядковані за зростанням, причому найменше значення має індекс 1.

Сформуємо для дискретної випадкової величини характеристичний вектор  $H(A = (M(A); -D(A)))$ . Через  $<_l$  позначатимемо лексикографічне упорядкування в  $m$ -вимірному просторі. З означення лексикографічного порядку випливає, що для двох дискретних випадкових величин  $A, B$  виконується співвідношення  $H(A) <_l H(B)$ , якщо  $M(A) < M(B)$  або при  $M(A) = M(B)$  має місце нерівність  $-D(A) < -D(B)$  (тобто  $D(A) > D(B)$ ).

**Означення 1.** Називатимемо дві дискретні випадкові величини  $A, B \in \Xi$  упорядкованими у зростаючому ( $A$  передуює  $B$ ) порядку  $<$  (і позначати цей факт  $A < B$ ), якщо  $H(A) <_l H(B)$  або при  $H(A) = H(B)$  знайдеться такий індекс  $t$ , що  $a^i = b^i, p_a^i = p_b^i$  для всіх  $1 \leq i < t$ , і при цьому або  $a^t < b^t$ , або  $a^t = b^t$  і  $p_a^t < p_b^t$ .

**Означення 2.** Називатимемо дві дискретні випадкові величини  $A, B \in \Xi$  і упорядкованими в неспадному порядку  $\preceq$  (позначатимемо цей факт  $A \preceq B$ ), якщо  $A < B$  або  $A = B$ .

Аналогічно до того, як це зроблено в [12], легко показати, що відношення  $\preceq$ , введене в означенні 2, є лінійним порядком на множині дискретних випадкових величин  $\Xi$ . При цьому, як показано у [15], якщо для  $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n \in \Xi$  виконуються умови  $A_i \preceq B_i, \forall i \in J_n$ , то  $A_1 + A_2 + \dots + A_n \preceq B_1 + B_2 + \dots + B_n$ .

Використовуючи введений означенням 2 лінійний порядок, упорядкуємо елементи заданої скінченної підмножини  $\Xi'$  множини  $\Xi$  дискретних випадкових величин:  $A_1 \preceq A_2 \preceq \dots \preceq A_l$ . Максимумом є величина  $A_l$ , а мінімумом – величина  $A_1$ . Визначення мінімуму й максимуму дає можливість ставити задачі оптимізації для знаходження екстремальних елементів при заданих умовах.

Нехай  $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$  – багатовимірна випадкова величина. Розглянемо лінійну функцію

$$L(X) = \sum_{j=1}^k c_j X_j, \text{ де } c_j \in R^1 \quad \forall j \in J_k, \text{ причому значення функції належать множині } \Xi' \text{ для}$$

всіх  $X_j \in \Xi' \quad \forall j \in J_k$ . Тоді лінійна задача мінімізації в деякій області  $\Omega$  може бути сформульована так: знайти пару  $\langle L(X^*), X^* \rangle$ , що

$$L(X^*) = \min_{x \in \Omega} \sum_{j=1}^k c_j X_j, \quad X^* = \arg \min_{x \in \Omega} \sum_{j=1}^k c_j X_j. \quad (1)$$

Далі розглядається розв'язування задачі вигляду (1) у випадку, коли  $\Omega$  є загальною множиною  $k$ -розміщень. Розглянемо необхідні поняття й означення евклідової комбінаторної оптимізації, спираючись переважно на [4]. Під мультимножиною розуміємо сукупність елементів, серед яких можуть бути й однакові. Будь-яку мультимножину  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$  можна задати основою  $S(G)$ , тобто кортежем усіх її різних елементів, і первинною специфікацією, тобто кортежем кратностей – числа повторень відповідного елемента основи мультимножини. Упорядкованою  $k$ -вибіркою з мультимножини  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$  називається набір вигляду  $(g_{i_1}, \dots, g_{i_k})$ , де  $g_{i_j} \in G$ ,  $i_j \neq i_t \quad \forall i_j, i_t \in J_n$ ,  $\forall j, t \in J_k$  (тут і далі  $J_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ). Множина усіх упорядкованих  $k$ -вбірок з мультимножини  $G$  називається загальною множиною розміщень  $E_n^k(G)$ .

Нехай елементи  $G_i$  мультимножини  $\Gamma = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$  є незалежними випадковими величинами. Розглянемо задачу вигляду(1) при  $\Omega = E_n^k(\Gamma)$ , тобто задачу пошуку пари  $\langle L(X^*), X^* \rangle$  такої, що

$$L(X^*) = \min_{x \in E_n^k(\Gamma)} \sum_{j=1}^k c_j X_j, \quad X^* = \arg \min_{x \in E_n^k(\Gamma)} \sum_{j=1}^k c_j X_j. \quad (2)$$

Вважатимемо, що елементи мультимножини упорядковані в неспадному порядку

$$G_1 \leq G_2 \leq \dots \leq G_n, \quad (3)$$

а коефіцієнти цільової функції – за незростанням:

$$c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n > 0 = c_{n+1} = \dots = c_{\beta-1} > c_\beta \geq \dots \geq c_k, \quad (4)$$

причому

$$\text{якщо } c_i \neq c_j, \text{ то } c_i^2 \neq c_j^2. \quad (5)$$

### ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК СТОХАСТИЧНИХ І ДЕТЕРМІНОВАНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ НА РОЗМІЩЕННЯХ

Нехай  $h_1(A) = M(A)$ ,  $h_2(A) = -D(A)$ . Сформуємо мультимножини  $Q_r = \{h_r(G_1), \dots, h_r(G_n)\}$  ( $r \in J_2$ ) і разом із задачею (2) розглядатимемо детерміновані задачі мінімізації функцій  $\bar{L}_r(x) = \sum_{j=1}^k c_j^r x_j$ , де  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ , на відповідних множинах  $E_n^k(Q_r)$ : знайти пару  $\langle L(x'), x' \rangle$  таку, що

$$L(x') = \min_{x \in E_n^k(Q_r)} \sum_{j=1}^k c_j^r x_j, \quad x' = \arg \min_{x \in E_n^k(Q_r)} \sum_{j=1}^k c_j^r x_j. \quad (6)$$

Зазначимо, що коли

$$M(G_i) = M(G_j) \quad \forall i, j \in J_\eta, \tag{7}$$

то також  $M(L(X')) = M(L(X'')) \quad \forall X', X'' \in E_\eta^k(\Gamma)$ . Дійсно, з  $X', X'' \in E_\eta^k(\Gamma)$  випливає, що  $X'_i, X''_i \in \Gamma \quad \forall i \in J_k$ , а тоді, згідно з (7),  $M(X'_i) = M(X''_i)$ . Отже,

$$M(L(X')) = M\left(\sum_{j=1}^k c_j X'_j\right) = \sum_{j=1}^k c_j M(X'_j) = \sum_{j=1}^k c_j M(X''_j) = M(L(X'')).$$

Позначимо  $\rho_r(X) = (h_r(X_1), h_r(X_2), \dots, h_r(X_k))$ .

**Лема 1.** Нехай  $X^* \in E_\eta^k(\Gamma)$  – мінімаль у розв’язку задачі (2);  $r = 2$ , якщо виконуються умови (7), інакше  $r = 1$ . Тоді  $\rho_r(X^*)$  є мінімаллю в розв’язку задачі (6).

Доведення. Очевидно, що  $E_\eta^k(Q_r) = \{\rho_r(X) \mid X \in E_\eta^k(\Gamma)\}$ . З властивостей математичного сподівання і дисперсії випливає, що  $h_r(L(X)) = h_r\left(\sum_{j=1}^k c_j X_j\right) = \sum_{j=1}^k c_j^2 h_r(X_j) = \bar{L}_r(\rho_r(X))$ .

Також з умови (6) маємо, що для будь-якої точки  $x \in E_\eta^k(Q_r)$  виконується нерівність  $\bar{L}_r(x') \leq \bar{L}_r(x)$ , а оскільки  $\bar{L}_r(\rho_r(X)) = h_r(L(X))$ , то також  $\bar{L}_r(x') \leq h_r(L(X))$  для будь-якого  $X \in E_\eta^k(\Gamma)$ , зокрема  $\bar{L}_r(x') \leq h_r(L(X^*))$ , де  $X^*$  – мінімаль у розв’язку задачі (2).

З іншого боку, оскільки  $X^*$  – мінімаль у розв’язку задачі (2), то  $L(X^*) \leq L(X) \quad \forall X \in E_\eta^k(\Gamma)$ , звідки на основі означень 1, 2 маємо  $H(L(X^*)) \leq_i H(L(X))$ . Зокрема, останнє співвідношення виконується для розміщення  $X'$ , яке задовольняє умови  $h_r(X'_j) = x'_j \quad \forall j \in J_k$ . Отже,  $M(L(X^*)) \leq M(L(X))$ . Якщо виконуються умови (7), то  $M(L(X^*)) = M(L(X))$ , звідки  $-D(L(X^*)) \leq -D(L(X))$ . Таким чином,  $h_r(L(X^*)) \leq h_r(L(X)) = \bar{L}_r(\rho_r(X')) = \bar{L}_r(x')$ . Ураховуючи  $\bar{L}_r(x') \leq h_r(L(X^*))$ , маємо, що  $\bar{L}_r(x') = h_r(L(X^*))$ , тобто  $\rho_r(X^*)$  є мінімаллю в розв’язку задачі (6). Лему доведено.

**Лема 2.** Нехай виконуються співвідношення (5);  $r = 2$ , якщо виконуються умови (7), інакше  $r = 1$ ;  $\langle \bar{L}_r(x'), x' \rangle$  – розв’язок задачі (6);  $X^* \in E_\eta^k(\Gamma)$  – таке, що  $\rho_r(X^*)$  є мінімаллю в розв’язку задачі (6). Тоді існує  $X' \in E_\eta^k(\Gamma)$  таке, що  $L(X') = L(X^*)$  і

$$h_r(X'_j) = x'_j \quad \forall j \in J_k. \tag{8}$$

Доведення. Нехай  $\bar{t}_i \ (i \in J_\sigma)$  – кратності елементів основи мультимножини коефіцієнтів цільової функції задачі (6), індекси  $t_i$  визначаються так:

$$t_1 = 1, \quad t_{i+1} = t_i + \bar{t}_i = 1 + \sum_{j=1}^i \bar{t}_j \quad \text{для } i \in J_\sigma. \tag{9}$$

Тоді  $c_{t_1}^r = \dots = c_{t_2-1}^r > c_{t_2}^r = \dots = c_{t_3-1}^r > \dots > c_{t_\sigma}^r = \dots = c_k^r$ . Оскільки  $\rho_r(X^*)$  – мінімаль у розв’язку задачі (6), то, як випливає з критерію екстремалі в лінійній безумовній задачі оптимізації на розміщеннях [16], виконуються умови: якщо  $c_{t_i} \neq 0$ , то вектор

$(h_r(X_{t_i}^*), h_r(X_{t_{i+1}}^*), \dots, h_r(X_{t_{i+1-1}}^*))$  є перестановкою з елементів мультимножини  $\{X'_{t_i}, X'_{t_{i+1}}, \dots, X'_{t_{i+1-1}}\}$ . Ураховуючи, що виконуються умови (5), маємо також  $c = c_{t_i} = c_{t_{i+1}} = \dots = c_{t_{i+1-1}}$  для всіх  $i \in J_\sigma$  таких, що  $c_{t_i} \neq 0$ . Отже, закон розподілу випадкової величини  $\sum_{j=t_i}^{t_{i+1}-1} c_j X_j = \sum_{j=t_i}^{t_{i+1}-1} c X_j$  (де  $c = c_{t_i} = c_{t_{i+1}} = \dots = c_{t_{i+1-1}}$ ) не залежить від порядку величин  $X_j$ , тобто  $\sum_{j=t_i}^{t_{i+1}-1} c_j X_j^* = \sum_{j=t_i}^{t_{i+1}-1} c X'_j$ , де вектор  $(X'_{t_i}, X'_{t_{i+1}}, \dots, X'_{t_{i+1-1}})$  є такою перестановкою елементів мультимножини  $\{X_{t_i}^*, X_{t_{i+1}}^*, \dots, X_{t_{i+1-1}}^*\}$ , для якої  $h_r(X'_j) = X'_j \quad \forall j \in J_{t_{i+1-1}}^i$  (тут і далі  $J_s^r = \{r, \dots, s\}$ ). Отже, розміщення  $X' = (X'_1, X'_2, \dots, X'_{t_i}, X'_{t_{i+1}}, \dots, X'_{t_{i+1-1}}, \dots, X'_k)$  задовольняє умову (8) і при цьому

$$L(X') = \sum_{j=1}^k c_j X'_j = \sum_{w=1}^{\sigma} \sum_{j=t_i}^{t_{i+1}-1} c_j X'_j = \sum_{w=1}^{\sigma} \sum_{j=t_i}^{t_{i+1}-1} c_j X_j^* = L(X^*).$$

Лему доведено.

### ВЛАСТИВОСТІ ЕКСТРЕМАЛІ В ЛІНІЙНІЙ БЕЗУМОВНІЙ СТОХАСТИЧНІЙ ЗАДАЧІ НА РОЗМІЩЕННЯХ

Нехай коефіцієнти цільової функції задачі (6) задовольняють умову (5) та

$$c_{p_1}^r \geq c_{p_2}^r \geq \dots \geq c_{p_\gamma}^r > 0 = \dots = c_{p_{\delta-1}}^r > c_{p_\delta}^r \geq \dots \geq c_{p_k}^r. \quad (10)$$

Зазначимо, що коли в умові (4)  $\alpha = k$  або  $r = 1$ , то  $p_j = j \quad \forall j \in J_k$ . Якщо серед коефіцієнтів цільової функції є від'ємні і при цьому  $r = 2$ , то упорядкування коефіцієнтів цільової функції в задачах (2) і (6) може відрізнятись.

Нехай, як і вище,  $r = 2$ , якщо виконуються умови (7), інакше  $r = 1$ . Нехай також мультимножина  $Q_r = \{h_r(G_1), \dots, h_r(G_\eta)\}$  має основу  $S(Q_r) = (\bar{H}_1, \bar{H}_2, \dots, \bar{H}_\sigma)$  і первинну специфікацію  $[Q_r] = (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_\sigma)$ , тобто

$$Q_r = \{h_r(G_1), h_r(G_2), \dots, h_r(G_\eta)\} = \{\bar{H}_1^{\bar{t}_1}, \bar{H}_2^{\bar{t}_2}, \dots, \bar{H}_\sigma^{\bar{t}_\sigma}\}. \quad (11)$$

Тоді з умови (3) та означень 1, 2 випливає, що

$$h_r(G_1) \leq_i h_r(G_2) \leq_l \dots \leq_l h_r(G_\eta), \quad (12)$$

елементи основи  $S(Q_r)$  також вважатимемо впорядкованими за неспаданням. Також для індексів  $t_i$ , визначених згідно з (9), матимемо

$$h_j(G_{t_i}) = \dots = h_j(G_{t_i+\bar{t}_i-1}) = \bar{H}_i \quad \forall i \in J_\sigma \quad \forall j \in J_r. \quad (13)$$

**Лема 3.** Нехай виконуються співвідношення (5), (7), (10) і (12);  $X' \in E_\eta^k(\Gamma)$  таке, що

$$h_r(X'_{p_j}) = h_r(G_j) \quad \forall j \in J_\gamma, \quad h_r(X'_{p_r}) = h_r(G_{\eta-k+t}) \quad \forall j \in J_k^\delta. \quad (14)$$

Нехай також мультимножина  $Q_r$  визначається згідно з (11), а індекси  $t_i$  – згідно з (9);

$$q = \min\{j \mid t_{j+1} > \gamma\}, \quad (15)$$



$$s = \max \{j \mid t_j \leq t - k + \delta\}, \tag{16}$$

для всіх  $i \in J_\sigma$

$$\Gamma_r^i = \{G_{t_i}, G_{t_i+1}, \dots, G_{t_i+\bar{t}_i-1}\}, \tag{17}$$

$$u_i = \begin{cases} t_i, & \text{якщо } i \leq q, \\ k - \eta + t_i, & \text{якщо } i > s, \\ \delta, & \text{якщо } i = s > q; \end{cases} \quad v_i = \begin{cases} t_i + \bar{t}_i - 1, & \text{якщо } i < q, \\ k - \eta + t_i + \bar{t}_i - 1, & \text{якщо } i \geq s, \\ \gamma, & \text{якщо } i = q < s. \end{cases} \tag{18}$$

Тоді для всіх  $i \in J_q \cup J_\sigma^s$

$$(\tilde{X}'_{u_i}, \tilde{X}'_{u_i+1}, \dots, \tilde{X}'_{v_i}) \in E_{\bar{t}_i}^{k_i}(\Gamma_r^i), \tag{19}$$

де  $\tilde{X}'_j = X'_{p_j} \quad \forall j \in J_k, \quad k_i = v_i - u_i + 1$ .

Доведення. Другу частину співвідношень (14) можна записати таким чином:  $h_r(X'_{p_{k-\eta+j}}) = h_r(G_j) \quad \forall j \in J_k^{\eta-k+\delta}$ . Позначимо  $\tilde{X}_j = X'_{p_j} \quad \forall j \in J_k$ . Тоді

$$h_r(\tilde{X}_j) = h_r(G_j) \quad \forall j \in J_\gamma, \quad h_r(\tilde{X}_{k-\eta+j}) = h_r(G_j) \quad \forall j \in J_k^{\eta-k+\delta}. \tag{20}$$

Якщо  $q$  задовольняє (15), тобто  $q$  – найменший індекс, для якого виконується умова  $t_{q+1} > \gamma$ , то з умов (13) і (20) випливає, що  $h_r(\tilde{X}_j) = \bar{H}_i \quad \forall j \in J_{t_i+\bar{t}_i-1}^{t_i} \quad \forall i \in J_{q-1}, \quad h_r(\tilde{X}_j) = \bar{H}_q \quad \forall j \in J_\gamma^{t_q}$ . Аналогічно для  $s$ , визначеного згідно з (16), маємо  $h_r(\tilde{X}_{k-\eta+j}) = \bar{H}_i \quad \forall j \in J_{t_i+\bar{t}_i-1}^{t_i} \quad \forall i \in J_\sigma^{s+1}, \quad h_r(\tilde{X}_{k-\eta+j}) = \bar{H}_s \quad \forall j \in J_{t_s+\bar{t}_s-1}^{\eta-k+\delta}$ .

Отже,  $(\tilde{X}_{t_i}, \tilde{X}_{t_i+1}, \dots, \tilde{X}_{t_i+\bar{t}_i-1}) \in E_{\bar{t}_i}(\Gamma_r^i) \quad \forall i \in J_{q-1}$  (очевидно, що  $|\Gamma_r^i| = \bar{t}_i$ ),  $(\tilde{X}_{t_q}, \tilde{X}_{t_q+1}, \dots, \tilde{X}_\gamma) \in E_{\bar{t}_q}^{k_q}(\Gamma_r^q), \quad k_q = t_q - \gamma + 1; \quad (\tilde{X}_{k-\eta+t_i}, \tilde{X}_{k-\eta+t_i+1}, \dots, \tilde{X}_{k-\eta+t_i+\bar{t}_i-1}) \in E_{\bar{t}_i}(\Gamma_r^i) \quad \forall i \in J_\sigma^{s+1}, \quad (\tilde{X}_\delta, \tilde{X}_{\delta+1}, \dots, \tilde{X}_{k-\eta+t_s+\bar{t}_s-1}) \in E_{\bar{t}_s}^{k_s}(\Gamma_r^s), \quad k_s = k + \eta + t_s + \bar{t}_s - \delta$ .

Разом з тим, при  $q = s$  маємо, що  $(\tilde{X}_{t_q}, \tilde{X}_{\delta+1}, \dots, \tilde{X}_{k-\eta+t_q+\bar{t}_q-1}) \in E_{\bar{t}_s}^{k_s}(\Gamma_r^s) \in$  елементом множини розміщень з елементів мультимножини  $\Gamma_r^q$ . З урахуванням позначень (18) маємо виконання співвідношення (19). Лему доведено.

**Лема 4.** Нехай виконуються співвідношення (5), (7), (10) і (12). Нехай також мультимножина  $Q_r$  визначається згідно з (11), а мультимножини  $\Gamma_r^i$  – згідно з (9), (17), виконуються співвідношення (15), (16), (18),  $k_i = v_i - u_i + 1$ . Тоді справедливі такі твердження:

1) якщо для всіх  $i \in J_q \cup J_\sigma^s$  виконуються співвідношення (19), то існує таке  $X' \in E_\eta^k(\Gamma)$ , що  $X'_{p_j} = \tilde{X}'_j \quad i \in J_q \cup J_\sigma^s$ ;

2)  $L(X) = \sum_{i \in T} \sum_{j=u_i}^{v_i} c_{p_j} X_{p_j}$ , де  $T = J_q \cup J_\sigma^s$ .

Доведення. Нехай для всіх  $i \in J_q \cup J_\sigma^s$  виконуються співвідношення (19). З (9), (17) випливає, що  $h_r(G_i) \neq h_r(G_j) \quad \forall G_i \in \Gamma_r^i, \quad \forall G_j \in \Gamma_r^j \quad \forall i, j \in J_\sigma$ , тому  $\Gamma_r^i \cap \Gamma_r^j = \emptyset \quad \forall i, j \in J_\sigma$ . Якщо  $q \neq s$ ,

то  $v_q = \gamma$ ,  $u_s = \delta$  і вибірки  $(\tilde{X}'_{u_i}, \tilde{X}'_{u_i+1}, \dots, \tilde{X}'_{v_i})$  при різних значеннях  $i$  не містять однакових елементів. Отже, існують такі  $\tilde{X}'_{\gamma+1}, \tilde{X}'_{\gamma+2}, \dots, \tilde{X}'_{\delta-1}$ , що  $(\tilde{X}'_{u_1}, \tilde{X}'_{u_1+1}, \dots, \tilde{X}'_{v_1}, \tilde{X}'_{\gamma+1}, \dots, \tilde{X}'_{\delta-1}, \tilde{X}'_{u_s}, \dots, \tilde{X}'_{v_s}) \in E_\eta^k(\Gamma)$ . А тоді також  $(\tilde{X}'_1, \tilde{X}'_2, \dots, \tilde{X}'_k) \in E_\eta^k(\Gamma)$ , де  $X'_{p_j} = \tilde{X}'_j \quad i \in J_k$ . Якщо  $q = s$ , то  $\Gamma_r^q = \Gamma_r^s$ , однак, згідно з (18) при цьому також  $(\tilde{X}'_{u_q}, \tilde{X}'_{u_q+1}, \dots, \tilde{X}'_{v_q}) = (\tilde{X}'_{u_s}, \tilde{X}'_{u_s+1}, \dots, \tilde{X}'_{v_s}) = (\tilde{X}'_{t_q}, \tilde{X}'_{t_q+1}, \dots, \tilde{X}'_{k-\eta+t_q+\bar{t}_q-1})$ . Таким чином,  $(\tilde{X}'_{u_1}, \tilde{X}'_{u_1+1}, \dots, \tilde{X}'_{v_{q-1}}, \tilde{X}'_{u_q}, \dots, \tilde{X}'_{v_s}, \tilde{X}'_{u_{s+1}}, \dots, \tilde{X}'_{v_\sigma}) \in E_\eta^k(\Gamma)$ , а тоді також  $(\tilde{X}'_1, \tilde{X}'_2, \dots, \tilde{X}'_k) \in E_\eta^k(\Gamma)$ , де  $X'_{p_j} = \tilde{X}'_j \quad i \in J_k$ . Отже, при виконанні співвідношень (19) знайдеться  $X' \in E_\eta^k(\Gamma)$ , що  $X'_{p_j} = \tilde{X}'_j \quad \forall j \in J_{v_i} \quad \forall i \in J_q \cup J_s^s$ .

Доведемо тепер друге твердження леми. Якщо  $q = s$ , то  $T = J_\sigma$  і  $L(X) = \sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{j=u_i}^{v_i} c_{p_j} X_{p_j} = \sum_{j=1}^k c_{p_j} X_{p_j}$ . При  $q \neq s$  з урахуванням  $v_q = \gamma$ ,  $u_s = \delta$ ,  $c_{q+1} = c_{q+2} = \dots = c_{s-1} = 0$  отримаємо

$$\sum_{i \in T} \sum_{j=u_i}^{v_i} c_{p_j} X_{p_j} = \sum_{i=1}^q \sum_{j=u_i}^{v_i} c_{p_j} X_{p_j} + \sum_{i=s}^{\sigma} \sum_{j=u_i}^{v_i} c_{p_j} X_{p_j} = \sum_{j=1}^{\gamma} c_{p_j} X_{p_j} + \sum_{j=\delta}^k c_{p_j} X_{p_j} = L(X).$$

Лему доведено.

**Теорема 1.** Нехай елементи мультимножини задовольняють умову (3), а коефіцієнти цільової функції – умови (4), (5) і (10); мультимножина  $Q_r$  ( $r = 1, 2$ ) визначається згідно з (11), а мультимножини  $\Gamma_r^i$  – згідно з (9), (17); виконуються співвідношення (15), (16), (18),  $k_i = v_i - u_i + 1$ . Якщо при цьому для всіх  $i \in J_q \cup J_\sigma^s$  справедливе співвідношення

$$(\tilde{X}'_{u_i}, \tilde{X}'_{u_i+1}, \dots, \tilde{X}'_{v_i}) = \arg \min_{(\tilde{X}'_{u_i}, \tilde{X}'_{u_i+1}, \dots, \tilde{X}'_{v_i}) \in E_{\tilde{X}'_{v_i}}^{k_i}(\Gamma_r^i)} \sum_{j=u_i}^{v_i} c_{p_j} \tilde{X}'_j, \quad (21)$$

то  $X^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*) \in E_\eta^k(\Gamma)$  таке, що  $X_{p_j}^* = \tilde{X}'_j \quad \forall j \in J_k$  є мінімальною в розв'язку задачі (2).

Доведення. Нехай  $X$  – деяка мінімаль у розв'язку задачі (2). Тоді на основі леми 1 отримуємо, що  $\rho_r(X)$  задовольняє (6), а тоді з леми 2 випливає існування такого  $X' \in E_\eta^k(\Gamma)$ , що  $L(X') = L(X)$  (тобто  $X'$  – мінімаль у розв'язку задачі (2)) і  $h_r(X'_j) = x'_j \quad \forall j \in J_k$ , де  $\langle \bar{L}_r(x'), x' \rangle$  — розв'язок задачі (6). З умов (10), (12) і критерію мінімалі в лінійній безумовній задачі оптимізації на розміщеннях випливає, що одна з мінімалей у розв'язку задачі (6) задовольняє умови

$$x'_{p_j} = h_r(G_j) \quad \forall j \in J_\gamma, \quad x'_{p_t} = h_r(G_{\eta-k+t}) \quad \forall t \in J_k^\delta,$$

тому  $X'$  задовольняє співвідношення (20). Отже, згідно з лемою 3, для всіх  $i \in J_q \cup J_\sigma^s$  виконуються умови (19), де  $\tilde{X}'_j = X'_{p_j} \quad \forall j \in J_k$ .

З першого твердження лема 4 випливає, що  $X^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*) \in E_\eta^k(\Gamma)$  таке, що  $X_{p_j}^* = \tilde{X}_j$   $\forall i \in J_q \cup J_\sigma^s$  існує. Оскільки також згідно з другим твердженням цієї лема

$$L(X) = \sum_{i \in T} \sum_{j=u_i}^{v_i} c_{p_j} X_{p_j}, \text{ де } T = J_q \cup J_\sigma^s, \text{ то на основі твердження 1 для } X^* \text{ маємо}$$

$$L(X^*) = \sum_{i \in T} \sum_{j=u_i}^{v_i} c_{p_j} X_{p_j}^* = \sum_{i \in T} \sum_{j=u_i}^{v_i} c_{p_j} \tilde{X}_j \leq \sum_{i \in T} \sum_{j=u_i}^{v_i} c_{p_j} \tilde{X}'_j = L(X').$$

З іншого боку,  $L(X') \leq L(X^*)$ , оскільки  $X^* \in E_\eta^k(\Gamma)$  і  $X'$  – мінімаль у розв'язку задачі (2).

Отже,  $L(X') = L(X^*)$ , тобто  $X^*$  також є мінімаллю в розв'язку задачі (2). Теорему доведено.

Використовуючи теорему 1, встановимо властивості мінімалі в розв'язку задачі (2). Як показано при доведенні теореми 1, існує мінімаль у розв'язку задачі (2), для якої виконуються умови (20). Останні при  $r = 1$  набувають вигляду

$$M(\tilde{X}_j) = M(G_j) \quad \forall j \in J_\alpha, \quad M(\tilde{X}_{k-\eta+j}) = M(G_j) \quad \forall j \in J_k^{\eta-k+\beta}. \quad (22)$$

Сформуємо мультимножини  $Q_1$  і  $\Gamma_1^i$  згідно з (9), (11) і (17) відповідно. З теореми 1 випливає, що для деякої мінімалі  $X$  у розв'язку задачі (2) виконуються умови (21), причому  $p_j = j$   $\forall j \in J_k$ .

Розглянемо питання про розв'язування задачі мінімізації функції  $L^i(\tilde{X}) = \sum_{j=u_i}^{v_i} c_j \tilde{X}_j$ , де

$\tilde{X} = (\tilde{X}_{u_i}, \tilde{X}_{u_i+1}, \dots, \tilde{X}_{v_i})$ , на множині  $E_{\tilde{f}_i}^{k_i}(\Gamma_1^i)$ . Задача вигляду (6) полягає в пошуку мінімуму і

мінімалі функції  $\bar{L}_2^i(\tilde{x}) = \sum_{j=u_i}^{v_i} c_j^2 \tilde{x}_j$  на множині розміщень з елементів мультимножини

$Q_2 = \{-D(G_1), -D(G_2), \dots, -D(G_\eta)\}$ . Оскільки математичні сподівання всіх випадкових величин із мультимножини  $\Gamma_1^i$  рівні між собою і виконується умова (3), то  $-D(G_{u_i}) \leq -D(G_{u_i+1}) \leq \dots \leq -D(G_{v_i})$ .

Якщо  $i < q$ , де  $q$  задовольняє (16), то  $c_j > 0 \quad \forall j \in J_{v_i}^{u_i}$ . Тоді з умови (4) випливає, що також  $c_{u_i}^2 \geq c_{u_i+1}^2 \geq \dots \geq c_{v_i}^2$ , тому для деякої мінімалі функції  $L^i(\tilde{X})$  виконується умова  $D(X_j) = D(G_j) \quad \forall j \in J_{q-1}^{u_i}$ . Отже, для всіх  $i \in J_{q-1}$  маємо

$$H(X_j) = H(G_j) \quad \forall j \in J_{v_i}^{u_i}. \quad (23)$$

При  $i > s$ , де  $s$  визначається згідно з (15), маємо, що  $c_{v_i}^2 \geq c_{v_i-1}^2 \geq \dots \geq c_{u_i}^2$ , тому одна з мінімалей функції  $L^i(\tilde{X})$  задовольняє співвідношення  $D(X_{v_i-j}) = D(G_{u_i+j}) \quad \forall j \in J_{k-1}^0$ .

Ураховуючи також, що  $M(G_{u_i+j}) = D(G_{u_i}) \quad \forall j \in J_{k-1}^0$ , отримуємо, що при будь-якому  $i \in J_k^{s+1}$

$$H(X_{v_i-j}) = H(G_{u_i+j}) \quad \forall j \in J_{k-1}^0. \quad (24)$$

Якщо  $q < s$ , то  $v_q = \alpha$  і співвідношення (23) виконуються і при  $i = q$ . Отже, співвідношення (23) виконуються при всіх  $j \in J_q$ , де  $\bar{q} = \min\{q, s-1\}$ . Аналогічно з  $u_s = \beta$  впливає виконання (24) при  $i = s$ , а отже, при всіх  $i \in J_k^s$ , де  $\bar{s} = \max\{q+1, s\}$ .

Нехай тепер  $q = s$ , причому для коефіцієнтів цільової функції виконується нерівність

$$c_{u_q+p_1}^2 \geq c_{u_q+p_2}^2 \geq \dots \geq c_{u_q+p_k}^2, \quad (25)$$

де  $k = v_q - u_q + 1$ ,  $p_j \in J_{k-1}^0 \quad \forall j \in J_k$ . Тоді  $\forall j \in J_k$  виконуються співвідношення

$$H(X_{v_j+p_j}) = H(G_{u_j+j-1}). \quad (26)$$

Отже, доведено таку теорему.

**Теорема 2.** Нехай елементи мультимножини задовольняють умову (3), а коефіцієнти цільової функції – умови (4), (5) і (10); мультимножина  $\Gamma_1 = \{M(G_1), M(G_2), \dots, M(G_n)\} = \{\bar{H}_1^{\bar{t}_1}, \bar{H}_2^{\bar{t}_2}, \dots, \bar{H}_\sigma^{\bar{t}_\sigma}\}$ , мультимножини  $\Gamma_i^i$  визначаються згідно з (9), (17); виконуються співвідношення (15), (16), (18),  $k_i = v_i - u_i + 1$ . Тоді існує мінімаль у розв'язку задачі (2) така, що для всіх  $j \in J_q$ , де  $\bar{q} = \min\{q, s-1\}$ , виконуються співвідношення (23), а для всіх  $i \in J_k^s$ , де  $\bar{s} = \max\{q+1, s\}$ , – співвідношення (24). Якщо також  $q = s$  і має місце нерівність (25), то виконується умова (26).

**Наслідок 1.** Якщо усі коефіцієнти цільової функції  $L(X)$  у задачі (2) додатні, то існує мінімаль у розв'язку задачі (2), для якої умова (15) виконується при всіх  $j \in J_k$ .

**Наслідок 2.** Якщо усі коефіцієнти цільової функції  $L(X)$  у задачі (2) додатні, а також

$$H(G_i) \neq H(G_j), \quad \text{якщо } G_i \neq G_j \quad i, j \in J_k, \quad (27)$$

то розміщення  $X_j^* = G_j \quad \forall j \in J_k$  є мінімаллю в розв'язку задачі (2).

Зазначимо, що коли елементи мультимножини  $\Gamma$  упорядковані у неспадному порядку, але умова (27) не виконується, то твердження, аналогічне наслідку 2, місця не має.

## ВИСНОВКИ

У статті розглядаються задачі стохастичної оптимізації на розміщеннях, постановка яких здійснена на основі введення лінійного порядку на множині дискретних випадкових величин. Установлено взаємозв'язок деяких властивостей розв'язування лінійної безумовної задачі стохастичної комбінаторної оптимізації з розв'язуванням спеціально побудованих детермінованих задач на розміщеннях. Доведено можливість отримати розв'язок стохастичної задачі на основі екстремалей задач меншої вимірності. На основі зазначених результатів встановлено умови для математичного сподівання та дисперсії компонентів екстремалі стохастичної задачі.

Як напрямок подальших досліджень можна розглядати формулювання алгоритмів розв'язування задачі, що використовують отримані у статті властивості.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Сергиенко И. В., Каспшицкая М. Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. Киев: Наукова думка, 1981. 288 с.
2. Згуровский М. З., Павлов А. А. Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами. Киев: Наукова думка, 2010. 573 с.

3. Papadimitriou C. H., Steiglitz K. Combinatorial optimization: algorithms and complexity. Mineola, NY: Dover Publications, 1998. 496 p.
4. Стоян Ю. Г., Ємець О. О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. Київ: Інститут системних досліджень освіти, 1993. 188 с. URL: <http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/487>.
5. Стоян Ю. Г., Романова Т. Е., Сысоева Ю. А. Оптимизационная задача размещения правильных интервальных многоугольников. *Доклады НАН Украины*. 1998. № 9. С. 114–120.
6. Гребенник И. В., Евсеева Л. Г., Романова Т. Е. Основная оптимизационная задача геометрического проектирования в интервальном виде. *Радиоэлектроника. Информатика. Управление*. 2004. № 2. С. 68–72.
7. Perepelitsa V. A., Kozina G. L. Interval Discrete Models and Multiobjectivity. Complexity Estimates. *Interval Computations*. 1993. № 1. P. 51–59.
8. Nikolova E. Approximation algorithms for reliable stochastic combinatorial optimization. *Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques*. Springer: Berlin Heidelberg, 2010. P. 338-351.
9. Серая О. В. Нечеткая задача коммивояжера. *Математическое моделирование*. 2007. № 2(17). С. 13–15.
10. Ємець О. О., Ємець Ол-ра О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах. Полтава: ПУЕТ, 2011. 239 с. URL: <http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/352>.
11. Сергиенко И. В., Емец О. А., Емец А. О. Задачи оптимизации с интервальной неопределенностью: метод ветвей и границ. *Кибернетика и системный анализ*. 2013. № 5. С. 38–50.
12. Емец О. А., Барболина Т. Н. Об оптимизационных задачах с вероятностной неопределенностью. *Доповіди Національної академії наук України*. 2014. № 11. С. 40–45.
13. Барболина Т. Н. О подходе к оптимизации с вероятностной неопределенностью с использованием упорядочивания случайных величин. *Вісник Запорізького національного університету: Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 11–20.
14. Емец О. А., Барболина Т. Н. О свойствах линейной безусловной задачи комбинаторной оптимизации на размещениях с вероятностной неопределенностью. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. Т. 52, № 2. С. 127–139.
15. Ємець О. О., Барболіна Т. М. Побудова і дослідження математичної моделі задачі директора зі стохастичними параметрами. *Вісник Черкаського університету. Серія Прикладна математика. Інформатика*. 2014. № 18(311). С. 3–11.
16. Барболіна Т. М. Властивості лінійних безумовних задач оптимізації на розміщеннях. *Збірник наукових праць викладачів, аспірантів, магістрантів і студентів фізико-математичного факультету*. Полтава: Астроя, 2015. С. 12–14.

## REFERENCE

1. Sergienko, I. V. & Kaspshitskaya, M. F. (1981). Models and methods of solving combinatorial optimization problems by computers. Kyiv: Naukova dumka, Ukraine.
2. Zgurovsky, M. Z. & Pavlov, A. A. (2010). Decision making in the network systems with limited resources. Kyiv: Naukova dumka, Ukraine
3. Papadimitriou, C. H. & Steiglitz, K. (1998). Combinatorial optimization: algorithms and complexity, Dover Publications Mineola, NY.
4. Stoyan, Yu. G. & Iemets, O. O. (1993). Theory and methods of euclidian combinatorial optimization. Instytut systemnykh doslidzhen osvity. Retrieved from <http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/487>.
5. Stoyan, Yu. G., Romanova, T. Ye. & Sysoeva, Yu. A. (1998). Optimization problem of placement of regular interval polygons. Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, No. 9, pp. 114-120.
6. Grebennik, I. V., Yevseeva, L. G. & Romanova, T. Ye. (2004). Basic optimization problem of geometric design in the interval form. Radio Electronics, Computer Science, Control, No. 2, pp. 68-72.
7. Perepelitsa, V. A. & Kozina, G. L. (1993). Interval Discrete Models and Multiobjectivity. Complexity Estimates. Interval Computations, No. 1, pp. 51-59.
8. Nikolova, E. (2010). Approximation algorithms for reliable stochastic combinatorial optimization. Approximation, Randomization and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques. Springer: Berlin Heidelberg, pp. 338-351.
9. Sira, O. V. (2007). Fuzzy task of traveling salesman. Matematichne modelyuvannya, No. 2(17), pp. 13-15.

10. Iemets, O. O. & Yemets, O. O. (2011). Solving combinatorial optimization problems on fuzzy sets. Poltava: PUET, Ukraine.
11. Sergienko, I. V., Iemets, O. O. & Yemets, O. O. (2013). Optimization problems with interval uncertainty: Branch and bound method. Cybernetics and Systems Analysis, No. 5, pp. 673-683.
12. Iemets, O. O. & Barbolina, T. M. (2014). About optimization problems with probabilistic uncertainty. Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, No. 11, pp. 40-45.
13. Barbolina, T. M. (2016). About approach to optimization with probabilistic uncertainty using ordering of random variables. Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences, No. 1, pp. 11-20.
14. Iemets, O. O. & Barbolina, T. M. (2016). Properties of the linear unconditional problem of combinatorial optimization on arrangements under probabilistic uncertainty. Cybernetics and Systems Analysis, Vol. 52, No. 2, pp. 285-295.
15. Iemet, O. O. & Barbolina, T. M. (2014). Construction and research of mathematical model of director's task with stochastic parameters. Visnyk Cherkaskoho universytetu. Seria Prykladna matematyka. Informatyka, No 18(311), pp. 3-11.
16. Barbolina, T. M. (2015). Properties of linear unconstrained optimization problems on arrangements. Zbirnik naukovikh prats' vkladachiv, aspirantiv, magistrantiv i studentiv fiziko-matematichnogo fakul'tetu, Poltava: Astraya, pp. 12-14.

УДК 519.8

## **СИМПЛЕКСНА ФОРМА МНОГОГРАННИКА СПОЛУЧЕНЬ З НЕОБМЕЖЕНИМИ ПОВТОРЕННЯМИ**

Ємець О. О., д. ф.-м. н., професор, Ємець Ол-ра О., к. ф.-м. н., доцент, Ванжа С. В.

*Полтавський університет економіки і торгівлі,  
вул. Коваля, 3, Полтава, Україна*

yemetsli@ukr.net, yemets2008@ukr.net

У статті наводиться правило утворення симплексної форми многогранника сполучень з необмеженими повтореннями. Для симплексної форми многогранника сполучень з необмеженими повтореннями доведено ряд тверджень. На прикладі проілюстровано формування симплексної форми многогранника сполучень з необмеженими повтореннями.

*Ключові слова: многогранник сполучень, симплексна форма многогранника, сполучення з необмеженими повтореннями.*

## **СИМПЛЕКСНАЯ ФОРМА МНОГОГРАННИКА СОЧЕТАНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ПОВТОРЕНИЯМИ**

Емец О. А., д. ф.-м. н., профессор, Емец А. О., к. ф.-м. н., доцент, Ванжа С. В.

*Полтавский университет экономики и торговли,  
ул. Коваля, 3, Полтава, Украина*

yemetsli@ukr.net, yemets2008@ukr.net

В статье приводится правило образования симплексной формы многогранника сочетаний с неограниченными повторениями. Для симплексной формы многогранника сочетаний с неограниченными повторениями доказан ряд утверждений. На примере проиллюстрировано формирование симплексной формы многогранника сообщений с неограниченными повторениями.

*Ключевые слова: многогранник сочетаний, симплексная форма многогранника, сочетания с неограниченными повторениями.*

## SIMPLEX FORM OF POLYHEDRON OF COMBINATIONS WITH UNLIMITED REPETITIONS

Iemets O. O., D. Sc. in Physics and Maths, Professor, Yemets` O. O., Ph. D., Vanzha S. V.

*Poltava University of Economics and Trade,  
Koval Street, 3, Poltava, Ukraine*

yemetsli@ukr.net, yemets2008@ukr.net

Within combinatorial optimization it is important to study combinatorial sets and their polyhedrons as the basis for the development of combinatorial optimization methods. For a group of such methods one of the stages is the linear relaxation using combinatorial polyhedrons.

Karmarkar`s polynomial algorithm should be used for solving received problems, but for this purpose feasible polyhedron must have a so-called simplex form prescribed by Karmarkar`s algorithm at the input.

Simplex forms of permutable polyhedrons with reducible and irreducible systems of constraints are known from the literature. In this paper, the simplex form of the convex hull of Euclidean combinatorial set of combinations with unlimited repetitions is derived.

The paper consists of four parts.

The statement of problem, the definition of combinations with unlimited repetitions (i.e. from 0 to  $k$ ) every element as ordered  $k$ -samples, elements of each are arranged by not descending order are given in the first part.

The definition of the set of the combination with unlimited repetitions as the set of all these  $k$ -samples and the polyhedron of combinations with unlimited repetitions as the convex hull of the set of the combination with unlimited repetitions are given. The description of this polyhedron in the form of the system of linear inequalities is given.

The second part is devoted to the transformation algorithm of feasible area of linear programming problem to polyhedron having the simplex form. The algorithm has five steps. In the first step constraints of linear programming problem are reduced to the so-called canonical form. In the second step the inequality that defines the half-space containing all admissible points of the linear programming problem is recorded. In the third step the system of equations in the canonical form is reduced to a homogeneous system. In the fourth step, the bound of the introduced half-space, by introducing new variables, is transformed into a hyperplane that cuts the unit on coordinate axes. This completes the construction of simplex forms of polyhedron by introducing additional variables that provide the satisfaction of the point having the same coordinates (the center) of simplex obtained conditions of the problem.

In the third part this algorithm is applied to the polyhedron of combinations with unlimited repetitions.

The fourth part of the article provides the illustrative example.

*Key words: polyhedron of combinations, simplex form of polyhedron, combinations with unlimited repetitions.*

### ВСТУП

Актуальним напрямком розвитку теорії оптимізації є комбінаторна оптимізація (див., зокрема, [1-17]). Дослідження властивостей комбінаторних множин та їх многогранників є підґрунтям розробки методів комбінаторної оптимізації. Часто одним з етапів таких методів є лінійна релаксація з використанням комбінаторних многогранників. Якщо при цьому використовувати алгоритм Кармаркара (АК), то многогранник треба мати у формі, що дозволяє застосовувати АК – у так звані симплексній формі. У працях [18-19] досліджувалась симплексна форма переставного многогранника. У цій роботі розглядається симплексна форма опуклої оболонки евклідової комбінаторної множини сполучень з необмеженими повтореннями, яка введена в [2].

#### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо мультимножину  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$  з основою  $S(G) = \{e_1, \dots, e_n\}$ , первинною специфікацією  $[G] = (k^n)$ , яка означає, що кратність кожного елемента  $e_i$  основи в  $G$  є  $k$   $\forall i \in J_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . Тоді кожна упорядкована  $k$ -вибірка  $(x_1, \dots, x_k)$ , де

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k,$$

називається [2] евклідовим сполученням з необмеженими (тобто від 0 аж до  $k$ ) повтореннями (кожного елемента основи). Множина всіх таких сполучень називається [2]

евклідовою множиною сполучень з необмеженими повтореннями, позначається  $\bar{S}_n^k(G)$ , а її опукла оболонка  $\text{conv } \bar{S}_n^k(G)$  позначається  $\bar{Q}_n^k(G)$  і називається многогранником сполучень з необмеженими повтореннями.

Як відомо [2], вершинами цього многогранника є точки  $(e_1, \dots, e_1)$ ,  $(e_1, \dots, e_1, e_n)$ ,  $\dots$ ,  $(e_1, \dots, e_1, e_n, \dots, e_n)$ ,  $\dots$ ,  $(e_n, \dots, e_n)$  і тільки вони, а многогранник  $\bar{Q}_n^k(G)$  описується системою

$$e_1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k \leq e_n$$

та є симплексом з названими вершинами.

Розглянемо, як многогранник  $\bar{Q}_n^k(G)$  представляється в симплексній формі.

Для цього спершу розглянемо необхідні далі перетворення допустимої області ЗЛП в симплексну форму (див., наприклад, [20, 21]).

## 2. АЛГОРИТМ ПЕРЕТВОРЕННЯ (АП) ДОПУСТИМИХ УМОВ ЗЛП В СИМПЛЕКСНУ ФОРМУ

Нехай

$$cx \rightarrow \max; \quad (1)$$

$$Ax \leq b; \quad (2)$$

$$x \geq 0, \quad (3)$$

$$c = (c_1, \dots, c_k), \quad x = (x_1, \dots, x_k)^T, \quad A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, r \\ j=1, \dots, k}}, \quad b = (b_1, \dots, b_r)^T.$$

**Крок 1.** Систему (2), (3) зведемо до так званого канонічного вигляду [22, с. 17]

$$Ax + y = b; \quad x, y \geq 0, \quad (4)$$

$$\text{де } y = (y_1, \dots, y_r)^T.$$

**Крок 2.** Записується додаткове обмеження вигляду

$$\sum_{j=1}^k x_j + \sum_{i=1}^r y_i \leq U, \quad (5)$$

тут  $U$  таке велике дійсне додатне число, що всі точки системи (2), (3) задовольняють (5). Якщо  $u \geq 0$ , то (5) еквівалентно рівності:

$$\sum_{j=1}^k x_j + \sum_{i=1}^r y_i + u = U. \quad (6)$$

**Крок 3.** Зводимо систему (4) до однорідної, що еквівалентна системі (4). Це можна зробити, помноживши праву частину рівнянь на одиницю у вигляді такого виразу:

$$\frac{\sum_{j=1}^k x_j + \sum_{i=1}^r y_i + u}{U}.$$

Рівняння в (4) набудуть вигляду

$$A^x x + A^y y - bu = \bar{0}, \quad (7)$$



де матриця  $A^x = (a_{ij}^x)_{j=1,k}^{i=1,r}$  з елементами  $a_{ij}^x = a_{ij} - \frac{b_i}{U} \quad \forall j \in J_k, \quad \forall i \in J_r$ ; матриця  $A^y = (a_{ij}^y)_{j=1,k}^{i=1,r}$  з елементами  $a_{ii}^y = 1 - \frac{b_i}{U} \quad \forall i \in J_r; \quad a_{ij}^y = -\frac{b_i}{U}, \quad j \neq i \quad \forall i \in J_r, \quad \forall j \in J_k; \quad \bar{0} = (0, \dots, 0)^T \in R^r$  – нульовий вектор стовбець з  $r$  елементами.

**Крок 4.** Перетворюємо умову (6) в гіперплощину, що відсікає на координатних осях одиниці, вводячи нові змінні

$$X_j = \frac{x_j}{U}; \quad Y_i = \frac{y_i}{U}; \quad \frac{u}{U} = V \quad \forall i \in J_r, \quad \forall j \in J_k. \quad (8)$$

Умови задачі разом з перетвореною умовою (6) після заміни (7) визначають симплекс з вершиною в початку координат, а основа описується гіперплощиною, що з осями координат перетинається в одиницях.

З умов (1), (6), (7), використовуючи (8), маємо

$$UcX \rightarrow \max \quad (9)$$

за умов

$$A^x X + A^y Y - bV = \bar{0}, \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^k X_j + \sum_{i=1}^r Y_i + V = 1, \quad (11)$$

$$X = (X_1, \dots, X_k)^T \geq 0; \quad Y = (Y_1, \dots, Y_r)^T \geq 0; \quad V \geq 0, \quad (12)$$

де

$$A^x = (a_{ij}^x)_{j=1,k}^{i=1,r}; \quad a_{ij}^x = a_{ij}U - b_j \quad \forall i \in J_r, \quad \forall j \in J_k;$$

$$A^y = (a_{ij}^y)_{j=1,k}^{i=1,r}; \quad a_{ii}^y = U - b_i \quad \forall i \in J_r; \quad a_{ij}^y = -b_i \quad \forall i \neq j; \quad i \in J_r; \quad j \in J_k.$$

**Крок 5.** Здійснюються перетворення задачі, що задовольняють вимогу: точка, що є центром (барі-центром) симплекса  $(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N}) \in R^N$ , задовольняє умовам задачі; тут  $N$  – вимірність простору змінних задачі, що визначається при цьому перетворенні.

Для цього в кожному рівнянні (10) (нехай його номер  $i$ ) віднімемо в лівій частині невід’ємну змінну  $Z_i, i \in J_r$ , помноживши її на коефіцієнт, який дорівнює алгебраїчній сумі всіх коефіцієнтів лівої частини цього рівняння. Крім цього, щоб забезпечити змінній  $Z_i$  нульове значення при максимізації, цільова функція модифікується доданком  $-MZ_i$ , який відіграє штрафну місію за рахунок того, що  $M > 0$  вибирається достатньо великим. Це робиться для всіх рівнянь ( $\forall i \in J_r$ ). У ліву частину (11) додається  $\sum_{i=1}^r Z_i$ .

Задача (9)-(12) набуває вигляду:

$$UcX - M \sum_{i=1}^r Z_i \rightarrow \max, \quad (13)$$

$$A^x X + A^y Y - A^z Z - bV = \bar{0}; \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^k X_j + \sum_{i=1}^r Y_i + \sum_{i=1}^r Z_i + V = 1; \quad (15)$$

$$X \geq 0; \quad Y \geq 0; \quad Z = (Z_1, \dots, Z_r)^T \geq 0; \quad V \geq 0, \quad (16)$$

де в (14)  $A^X$ ;  $A^Y$  матриці описані раніше, а  $A^Z = (a_{ij}^Z)_{j=1, \dots, k}^{i=1, \dots, r}$ ,  
 $a_{ii}^Z = U \sum_{j=1}^k a_{ij} - kb_i + U - b_i - (k-1)b_i - b_i = U \sum_{j=1}^k a_{ij} + U - (2k+1)b_i \quad \forall i \in J_r$ ;  $a_{ij}^Z = 0 \quad \forall i \neq j, i \in J_r$ ;  
 $j \in J_k$ .

Легко бачити, що для системи (14)-(16) точка  $(X^*, Y^*, Z^*, V^*) = \left(\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N}\right) \in \mathbb{R}^N$  є допустимою, а вимірність простору  $N = k + 2r + 1$ , якщо  $X_i^* = Y_j^* = Z_i^* = V = \frac{1}{N} \quad \forall i \in J_r$ ;  
 $\forall j \in J_k$ .

### 3. ПЕРЕТВОРЕННЯ В СИМПЛЕКСНУ ФОРМУ МНОГОГРАННИКА СПОЛУЧЕНЬ З НЕОБМЕЖЕНИМИ ПОВТОРЕННЯМИ

Розглянемо задачу

$$\sum_{j=1}^k c_j x_j \rightarrow \max$$

за умов,  $x = (x_1, \dots, x_k) \in \bar{Q}_n^k(G)$ , тобто:

$$e_1 \leq x_1 \leq \dots \leq x_j \leq \dots \leq x_k \leq e_n.$$

Нехай  $e_1 > 0$ . Обмеження многогранника  $\bar{Q}_n^k(G)$  можна записати так:

$$\begin{cases} -x_1 \leq -e_1, \\ x_1 - x_2 \leq 0, \\ \dots \\ x_{j-1} - x_j \leq 0, \\ \dots \\ x_{k-1} - x_k \leq 0, \\ x_k \leq e_n. \end{cases} \quad (17)$$

Застосовуємо АП.

**Крок 1.** Зводимо (17) до канонічної форми, вводячи в рівняння змінні  $y_{j-1,j} \quad \forall j \in J_{k+1}$ :

$$-x_1 + y_{0,1} = -e_1, \quad (18)$$

$$x_{j-1} - x_j + y_{j-1,j} = 0 \quad \forall j \in J_k^2 = \{2, 3, \dots, k\}, \quad (19)$$

$$x_k + y_{k,k+1} = e_n. \quad (20)$$

**Крок 2.** Записуємо додаткове обмеження:

$$\sum_{j=1}^k x_j + \sum_{j=1}^{k+1} y_{j-1,j} \leq U \quad (21)$$

у формі рівності

$$\sum_{j=1}^k x_j + \sum_{j=1}^{k+1} y_{j-1,j} + u = U, \quad (22)$$

де  $u \geq 0$ .

Оцінимо змінну  $U$ . Додамо  $\forall j \in J_k^2$  обмеження (19). Маємо:

$$x_1 - x_k + \sum_{j=2}^k y_{j-1,j} = 0,$$

або

$$\sum_{j=2}^k y_{j-1,j} = x_k - x_1 \leq e_n - e_1; \quad (23)$$

з (18)

$$y_{0,1} = x_1 - e_1 \leq e_n - e_1, \quad (24)$$

а з (20):

$$y_{k,k+1} = e_n - x_k \leq e_n - e_1. \quad (25)$$

З (23)-(25) одержуємо:

$$\sum_{j=1}^k y_{j-1,j} \leq 3(e_n - e_1). \quad (26)$$

Як відомо [3], у многограннику сполучень з необмеженими повтореннями є вершина  $(e_n, \dots, e_n) \in R^k$ , і це найбільші можливі значення кожної з координат  $x$ , тобто  $\forall x$  з цього многогранника

$$\sum_{i=1}^k x_i \leq k e_n. \quad (27)$$

З умов (21), (26), (27) маємо

$$\sum_{j=1}^k x_j + \sum_{j=1}^{k+1} y_{j-1,j} \leq (k+3)e_n - 3e_1. \quad (28)$$

Отже, доведене таке.

**Твердження 1.** Для многогранника сполучень з необмеженими повтореннями справедлива нерівність (21), де

$$U = (k+3)e_n - 3e_1. \quad (29)$$

**Крок 3.** Для зведення системи (18)-(20) до однорідної помножимо праві частини (18) та (20) на вираз

$$\frac{\sum_{j=1}^k x_j + \sum_{j=1}^{k+1} y_{j-1,j} + u}{(k+3)e_n - 3e_1},$$

що, згідно з (22), (29), є одиницею. Одержимо

$$-x_1 + y_{0,1} = \frac{e_1}{3e_1 - (k+3)e_n} \left( \sum_{j=1}^k x_j + \sum_{j=1}^{k+1} y_{j-1,j} + u \right); \quad (30)$$

$$x_k + y_{k,k+1} = \frac{e_n}{(k+3)e_n - 3e_1} \left( \sum_{j=1}^k x_j + \sum_{j=1}^{k+1} y_{j-1,j} + u \right); \quad (31)$$

або після спрощення

$$\left[ 4e_1 - (k+3)e_n \right] x_1 + e_1 \sum_{j=2}^k x_j + \left[ (k+3)e_n - 2e_1 \right] y_{0,1} + e_1 \sum_{j=2}^{k+1} y_{j-1,j} + e_1 u = 0, \quad (32)$$

$$e_n \sum_{j=1}^{k-1} x_j + \left[ 3e_1 - (k+2)e_n \right] x_k + e_n \sum_{j=1}^k y_{j-1,j} + \left[ 3e_1 - (k+2)e_n \right] y_{k,k+1} + e_n u = 0. \quad (33)$$

**Крок 4.** Робимо заміну змінних згідно з (8). Маємо задачу

$$\left[ (k+1)e_n - e_1 \right] \sum_{j=1}^k c_j X_j \rightarrow \max,$$

що еквівалентно (1), за умов:

$$\left[ 4e_1 - (k+3)e_n \right] X_1 + e_1 \sum_{j=2}^k X_j + \left[ (k+3)e_n - 2e_1 \right] Y_{0,1} + e_1 \sum_{j=2}^{k+1} Y_{j-1,j} + e_1 V = 0; \quad (34)$$

$$X_{j-1} - X_j + Y_{j-1,j} = 0 \quad \forall j \in J_k^2; \quad (35)$$

$$e_n \sum_{j=1}^{k-1} X_j + \left[ 3e_1 - (k+2)e_n \right] X_k + e_n \sum_{j=1}^k Y_{j-1,j} + \left[ 3e_1 - (k+2)e_n \right] Y_{k,k+1} + e_n V = 0; \quad (36)$$

$$\sum_{j=1}^k X_j + \sum_{j=1}^{k+1} Y_{j-1,j} + V = 0. \quad (37)$$

**Крок 5.** У кожному з рівнянь (34)-(36) у лівій частині відніmemo власну невід'ємну змінну  $W_{j-1,j}$  (з тими індексами, з якими входить у відповідне рівняння змінна  $Y_{j-1,j}$ ),  $\forall j \in J_k^2$  – в (35);  $W_{0,1}$  в (34),  $W_{k,k+1}$  – в (36)). Коефіцієнт при  $W_{j-1,j}$  позначимо  $\alpha_{j-1,j}$   $\forall j \in J_{k+1}^1 = \{1, 2, \dots, k+1\}$ . В (37) введемо змінну  $W_{k+1,k+2}$  з коефіцієнтом  $\alpha_{k+1,k+2}$ .

**Твердження 2.** Коефіцієнт  $\alpha_{j-1,j}$   $\forall j \in J_{k+1}^1$  обчислюється так:

$$\alpha_{0,1} = 4e_1 - (k+3)e_n + e_1(k-1) + \left[ (k+3)e_n - 2e_1 \right] + (k+1)e_1 + e_1 =$$

$$= e_1(4+k-2+k+1+1) = (2k+3)e_1;$$

$$\alpha_{j-1,j} = 1-1+1 = 1 \quad \forall j \in J_k^2;$$

$$\alpha_{k,k+1} = e_n(k-1) + 3e_1 - (k+2)e_n + e_n k + 3e_1 - (k+2)e_n + e_n =$$

$$= 6e_1 + e_n(k-1-k-2+k-k-2+1) = 6e_1 - 4e_n.$$

$$\alpha_{k+1,k+2} = k+k+1+1 = 2(k+1).$$

Після кроку 5 маємо задачу:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j - M \sum_{j=1}^{k+2} W_{j-1,j} \rightarrow \max$$

$$\left[ 2e_1 - (k+1)e_n \right] X_1 + e_1 \sum_{j=2}^k X_j + (k+1)e_n Y_{0,1} + e_1 \sum_{j=2}^{k+2} Y_{j-1,j} + e_1 V - (2k+3)e_1 W_{0,1} = 0, \quad (38)$$

$$X_{j-1} - X_j + Y_{j-1,j} - W_{j-1,j} = 0; \quad \forall j \in J_k^2, \quad (39)$$

$$e_n \sum_{j=1}^{k-1} X_j + (e_1 - ke_n) X_k + e_n \sum_{j=1}^k Y_{j-1,j} + (e_1 - ke_n) Y_{k,k+1} + e_n V - (6e_1 - 4e_n) W_{k,k+1} = 0, \quad (40)$$

$$\sum_{j=1}^k X_j + \sum_{j=1}^{k+1} Y_{j-1,j} + V - 2(k+1)W_{k+1,k+2} = 1. \quad (41)$$

Зауважимо, що  $r = k + 1$ , отже  $N = k + 2r + 1 = k + 2k + 2 + 1 = 3(k + 1)$ .

#### 4. ІЛЮСТРАТИВНИЙ ПРИКЛАД

**Приклад.** Нехай  $G = \{1^4; 11^4\}$ ,  $k = 4$ . Розглянемо множину  $\bar{S}_n^k(G)$  сполучень з необмеженими повтореннями.

Отже,  $n = 2$ ;  $S(G) = (e_1, e_2) = (1, 11)$ .

Система для  $\text{conv} \bar{S}_n^k(G) = \bar{Q}_n^k(G) = \bar{Q}_2^4(G)$ , що має вигляд (17), така:

$$\begin{cases} -x_1 \leq -1; \\ x_1 - x_2 \leq 0; \\ x_2 - x_3 \leq 0; \\ x_3 - x_4 \leq 0; \\ x_4 \leq 11. \end{cases} \quad (42)$$

Зводимо (42) до канонічної форми:

$$\begin{cases} -x_1 + y_{01} = -1; \\ x_1 - x_2 + y_{12} = 0; \\ x_2 - x_3 + y_{23} = 0; \\ x_3 - x_4 + y_{34} = 0; \\ x_4 + y_{45} = 11. \end{cases} \quad (43)$$

Записуємо додаткове обмеження вигляду (22):

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_{01} + y_{12} + y_{23} + y_{34} + y_{45} + u = U. \quad (44)$$

Оцінимо  $U$ . Як відомо  $x_1 + \dots + x_4 \leq 4 \cdot 11 = 44$ .

$$y_{01} = -1 + x_1 \leq -1 + 11 = 10, \quad y_{12} = x_2 - x_1 \leq 11 - 1 = 10, \\ y_{23} = x_3 - x_2 \leq 10, \quad y_{34} = x_4 - x_3 \leq 10, \quad y_{45} = 11 - x_4 \leq 10.$$

З іншого боку

$$y_{12} = x_2 - x_1, \quad y_{23} = x_3 - x_2, \quad y_{34} = x_4 - x_3,$$

додавши три останні рівняння маємо:

$$y_{12} + y_{23} + y_{34} = x_4 - x_1 \leq e_n - e_1 = 10.$$

Отже,  $\sum_{j=1}^{k+1} y_{j-1,j} \leq 3(e_n - e_1) = 30$ .

Тобто,  $U = 44 + 30 = 74$ , що дає і формула (29):

$$U = (k+3)e_n - 3e_1 = (4+3) \cdot 11 - 3 \cdot 1 = 77 - 3 = 74.$$

Зведемо перше і останнє рівняння в (43) до однорідних, помноживши їх праві частини на

$$\frac{1}{74} \left( \sum_{j=1}^4 x_j + \sum_{j=1}^5 y_{j-1,j} + u \right):$$

$$-x_1 + y_{01} = -\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_{01} + y_{12} + y_{23} + y_{34} + y_{45} + u}{74};$$

$$x_4 + y_{45} = \frac{11}{74} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_{01} + y_{12} + y_{23} + y_{34} + y_{45} + u).$$

Або

$$\begin{cases} -73x_1 + (x_2 + x_3 + x_4) + 75y_{01} + (y_{12} + y_{23} + y_{34} + y_{45}) + u = 0; \\ 11(x_1 + x_2 + x_3) - 63x_4 + 11(y_{01} + y_{12} + y_{23} + y_{34}) - 63y_{45} + 11u = 0. \end{cases}$$

Якщо скористатися (32), (33),

$$(4 - 7 \cdot 11)x_1 + 1 \cdot (x_2 + x_3 + x_4) + (7 \cdot 11 + 2 \cdot 1)y_{01} + 1 \cdot (y_{12} + y_{23} + y_{34} + y_{45}) + 1 \cdot u = 0$$

$$11(x_1 + x_2 + x_3) + (3 \cdot 1 - 6 \cdot 11) + 11(y_{01} + y_{12} + y_{23} + y_{34}) + (3 \cdot 1 - (4 + 2) \cdot 11) + 11u = 0,$$

тобто маємо ті ж результати.

## ВИСНОВКИ

Одержано симплексну форму многогранника сполучень з необмеженими повтореннями. Як напрямок подальших досліджень доцільно дослідити її використання в задачах оптимізації на сполученнях.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Сергиенко И. В., Каспшицкая М. Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. Киев: Наук. думка, 1981. 288 с.
2. Стоян Ю. Г., Ємець О. О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. Київ: Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. 188 с. URL: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487>.
3. Стоян Ю. Г., Ємець О. О., Ємець Є. М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. 103 с. URL: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/376>.
4. Емец О. А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании: учеб. пособие. Киев: УМК ВО, 1992. 92 с. URL: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/489>.
5. Ємець О. О., Колечкіна Л. М., Недобачій С. І. Дослідження областей визначення задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставних множинах. Полтава: Полтавський державний технічний університет ім. Юрія Кондратюка, ЧПКП «Легат», 1999. 64 с. URL: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/488>.
6. Емец О. А., Романова Н. Г. Оптимизация на полиперестановках. Киев: Наук. думка, 2010. 105 с. URL: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/474>.
7. Ємець О. О., Колечкіна Л. М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними функціями. Київ: Наук. думка, 2005. 117 с. URL: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/474>.
8. Ємець О. О., Роскладка О. В. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування: монографія. Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2006. 129 с. URL: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/377>.
9. Ємець О. О., Ємець Ол-ра О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах: монографія. Полтава: ПУЕТ, 2011. 239 с. URL: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352>.
10. Емец О. А., Черненко О. А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях: монография. Киев: Наук. думка, 2011. 154 с. URL: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/467>.
11. Ємець О. О., Черненко О. О. Моделі евклідової комбінаторної оптимізації: монографія. Полтава: ПУЕТ, 2011. 204 с. URL: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/354>.

12. Ємець О. О., Парфьонова Т. О. Транспортні задачі комбінаторного типу: властивості, розв'язування, узагальнення: монографія. Полтава: ПУЕТ, 2011. 174 с. URL: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/353>.
13. Емец О. А., Барболина Т. Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях. Киев: Наук. думка, 2008. 159 с. URL: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/473>.
14. Донець Г. П., Колечкіна Л. М. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях: монографія. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. 309 с.
15. Панишев А. В., Плечистый Д. Д. Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера. Житомир: ЖДТУ, 2006. 300 с.
16. Гуляницький Л. Ф. Розробка моделей і наближених методів комбінаторної оптимізації та їх застосування в інформаційних технологіях: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук / Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. Київ, 2005. 32 с.
17. Гребеннік І В. Математичні моделі і методи комбінаторної оптимізації в геометричному проектуванні: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук / Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України. Харків, 2006. 30 с.
18. Ємець О. О., Ємець Є. М., Ольховський Д. М. Оптимізація лінійної функції на переставленнях: перетворення переставного многогранника до вигляду, необхідного для використання в алгоритмі Кармаркара. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*. 2010. № 2. С. 43–49.
19. Емец О. А., Леонова М. В. Симплексная форма общего перестановочного многогранника, заданного неприводимой системой. *Проблемы управления и информатики*. 2014. № 1. С. 68–79.
20. Зайченко Ю. П. Исследование операций. Киев: Видавничий дім «Слово», 2003. 688 с.
21. Таха Х. А. Введение в исследование операций. Москва: Издат. дом «Вильямс», 2005. 912 с.
22. Ермолев Ю. М., Ляшко И. И., Михалевич В. С., Тюття В. И. Математические методы исследования операций. Киев: Вища шк., 1979. 312 с.

## REFERENCES

1. Sergienko, I. V. & Kaspshitskaya, M.F. (1981). Models for Computer Solution of Combinatorial Optimization. Kyiv: Naukova Dumka.
2. Stoyan, Y. G. & Iemets, O. O. (1993). Theory and Methods of Euclidian Combinatorial Optimization. Kyiv: Inst. Syst. Doslidzh. Osvity. Retrieved from <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487>.
3. Stoyan, Yu. G., Iemets, O. O. & Yemets E. M. (2005). Optimization on Polypermutations: Theory and Methods. Poltava: RVTs PUSKU. Retrieved from <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/376>.
4. Iemets, O. A. (1992). Euclidian Combinatorial Sets and Optimization on Them. New in Mathematical Programming (An Educational Book). Kiev: UMK VO. Retrieved from <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/489>.
5. Iemets, O. O., Kolechkina, L. M. & Nedobachii, S. I. (1999). Investigation of Domains of Euclidean Combinatorial Optimization Problems on Permutable Sets. Poltava: Yu. Kondratyuk Techn. Univ., ChPKP Legat. Retrieved from <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/488>.
6. Iemets, O. A. & Romanova, N. G. (2010). Optimization on Polypermutations. Kyiv: Naukova Dumka. Retrieved from <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/474>.
7. Iemets, O. O. & Kolechkina, L. M. (2005). Combinatorial Optimization with Linear Fractional Functions. Kyiv: Naukova Dumka. Retrieved from <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/474>.
8. Iemets, O. O. & Roskladka, O. V. (2005). Optimization Problems on Polyarrangements: Properties and Solution. Poltava: RVTs PUSKU. Retrieved from <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/377>.
9. Iemets, O. O. & Yemets', O. O. (2011). Solving Combinatorial Optimization Problems on Fuzzy Sets. Poltava: PUET. Retrieved from <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352>.
10. Yemets, O. A. & Chernenko, O. A. (2011). Optimization of Linear Fractional Functions on Arrangements. Kyiv: Naukova Dumka. Retrieved from <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/467>.
11. Iemets, O. O. & Chernenko, O. O. (2011). Models of Euclidean Combinatorial Optimization. Poltava: RVV PUET. Retrieved from <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/354>.
12. Iemets, O. O. & Parfyonova, T. O. (2011). Combinatorial Transportation Problems: Properties, Solutions, Generalizations. Poltava: RVV PUET. Retrieved from <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/353>.
13. Yemets, O. A. & Barnolina, T. N. (2008). Combinatorial Optimization on Arrangements. Kyiv: Naukova Dumka. Retrieved from <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/473>.
14. Donets, G. P. & Kolechkiya, L. M. (2011). Extremum Problems on Combinatorial Configurations. Poltava: RVV PUET.
15. Panishev, A. V. & Plechistyi, D. D. (2006). Optimization Models and Methods in a Traveling Salesman Problem. Zhitomir: ZhGTU.

16. Hulianytskyi, L. F. (2005). Development of models and approximate combinatorial optimization methods and their application in information technologies. (Extended abstract of Doctor thesis). V.M. Glushkov Inst. of Cybernetics, NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine (in Ukrainian).
17. Grebennik, I. V. (2006). Mathematical models of combinatorial optimization in geometrical design. (Extended abstract of Doctor thesis). A.M. Podgorny Institute for Problems of Mechanical Engineering, Kharkiv, Ukraine (in Ukrainian).
18. Iemets, O. O., Yemets, Ye. M. & Olhovskiy, D. M. (2010). The optimization of linear function on permutations: transformation of permutable polyhedron to kind, necessary for the use in Karmarkar's algorithm. *Nauk. Visti NTUU KPI*, No. 2, pp. 43-49.
19. Iemets, O. A. & Leonova, M. V. (2014). Simplex shape of the general permutable polyhedron specified by irreducible system. *J. Autom. Inform. Sci.*, No. 1, pp. 68-79.
20. Zaichenko, Yu. P. (2003). *Operations Research*. Kyiv: Slovo.
21. Taha, X. A. (2007). *Operations Research: An Introduction*. Moscow: Pearson Prentice Hall.
22. Ermoliev, Yu. M., Lyashko, I. I., Mikhalevich, V. S. & Tyuptya, V. I. (1979). *Mathematical Methods of Operations Research*. Kyiv: Vyshcha Sckola.

УДК 539.3

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ О ПЕРЕДАЧЕ НАГРУЗКИ

<sup>1</sup>Кагадий Т. С., д. ф.-м. н., профессор, <sup>2</sup>Белова О. В., к. ф.-м. н., доцент,  
<sup>2</sup>Щербина И. В., к. ф.-м. н., доцент

<sup>1</sup>*Национальный горный университет,  
просп. Дмитрия Яворницкого, 19, г. Днепр, 49000*

<sup>2</sup>*Национальная металлургическая академия Украины,  
просп. Гагарина, 4, г. Днепр, 49600*

okbelova@rambler.ru

Исследованы плоские задачи о передаче нагрузки упругим стрингером упругой анизотропной полуплоскости при различных видах нагружения (равномерное и неравномерное распределение нагрузки). Проведены различные асимптотические оценки при «малых» и «больших»  $x$ . Асимптотический метод Маневича-Павленко был обобщен на криволинейные координаты.  
*Ключевые слова: асимптотический метод, анизотропный материал, криволинейная анизотропия.*

## АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ПРО ПЕРЕДАЧУ НАВАНТАЖЕННЯ

<sup>1</sup>Кагадій Т. С., д. ф.-м. н., професор, <sup>2</sup>Білова О. В., к. ф.-м. н., доцент,  
<sup>2</sup>Щербина І. В., к. ф.-м. н., доцент

<sup>1</sup>*Національний гірничий університет,  
просп. Дмитра Яворницького, 19, м. Дніпро, 49000*

<sup>2</sup>*Національна металургійна академія України,  
просп. Гагаріна, 4, м. Дніпро, 49600*

okbelova@rambler.ru

Досліджені плоскі задачі про передачу навантаження пружним стрингером пружній анізотропній на півплощині при різних видах навантаження (рівномірний та нерівномірний розподіл навантаження). Проведені різні асимптотичні оцінки при «малих» та «великих»  $x$ . Асимптотичний метод Маневича-Павленка був узагальнений на криволінійні координати.  
*Ключові слова: асимптотичний метод, анізотропний матеріал, криволінійна анізотропія.*



**ANALYTICAL SOLUTION OF FLAT PROBLEMS ABOUT TRANSMISSION OF LOADING**<sup>1</sup>Kagadiy T. S., <sup>2</sup>Belova O. V., <sup>2</sup>Sherbina I. V.<sup>1</sup>National mountain university<sup>2</sup>National metallurgical academy of Ukraine

okbelova@rambler.ru

Planar problems about load transfer by one-dimensional elastic elements to two-dimensional complex bodies are of interest for analysis and calculation of mechanical tensions in a variety of airplane constructional elements, for example plates joined with stringers or overlays. Such types of problems have quite a long history and have been sufficiently researched for elastic isotropic as well as for anisotropic infinite or semi-infinite bodies. Similar problems in case of finite and especially multilayered bodies have been significantly less studied. This paper describes such complicated new cases of load transfer and demonstrates how to solve them using of an asymptotic method based on ideas of L.I. Manevich and Pavlenko A.V. The considered issue is a contact problem about a load transfer by an elastic sustaining element (stringer) to an elastic plate which consists of two joined orthotropic rectangles made of different materials and is fixed at two opposite edges. The stringer is placed in the middle between the other two (free) edges in such a way that the axis of the stringer is perpendicular to the plate's edge and continuously attached to it. The scheme of line contact is assumed to be used here. The paper presents investigation of flat problems considering a load transmission by an elastic rod to an elastic anisotropic half-space through application of various loading types (i.e. uniform and non-uniform distribution of a load). Various asymptotic estimations at "small" and "big" arguments have been done. The proposed method has been generalized taking into account also curvilinear coordinates. In particular, the problem about the elastic plate  $R_0 \leq r < \infty$ ,  $-\gamma \leq \theta \leq \gamma$  fixed at the edges  $\theta = \pm\gamma$  was considered. The boundary  $r = R_0$  remains free, the stresses and the deformations are absent at infinity. Along the medial radius ( $\theta = 0$ ) the plate is strengthened by a stringer which is loaded by longitudinal efforts  $P_0$ . The material of the plate is orthotropic; the main directions of anisotropy coincide with the polar coordinates  $r, \theta$ .

*Key words: asymptotic method, anisotropic material, curvilinear anisotropy.*

**ВВЕДЕНИЕ**

В большинстве задач механики и других разделов физики крайне редко оказывается возможным получить точные решения. Причиной этого служат обычно различного рода нелинейности, неоднородности или сложные граничные условия. Поэтому, инженеры, физики и специалисты по прикладной математике вынуждены обращаться к приближенным решениям, которые могут строиться численными методами либо аналитическими, либо путем комбинации этих подходов [1, 2].

Ключом к решению той или иной задачи является, как известно, построение ее математической модели. В процессе создания такой модели стараются принять во внимание одни особенности задачи, полностью пренебрегая другими и лишь в определенной степени учитывая третьи. Наиболее полезные аппроксимации имеют место, когда один или несколько из параметров или переменных задачи малы (или велики). Если величиной возмущения является один из безразмерных физических или геометрических параметров, то говорят о возмущении параметров. Если величиной возмущения выступает одна из независимых переменных (в безразмерной форме), то говорят о возмущении координат.

Приближения такого типа становятся все более точными по мере стремления величины возмущения к нулю (или бесконечности), т.е. они являются асимптотическими решениями [3]. В принципе, можно улучшить результат, рассматривая его как первый шаг в схеме последовательных приближений. Получающиеся ряды, хотя и не обязательно сходящиеся, по построению представляют собой асимптотические разложения. Обычно вычисляется только первое приближение, иногда – второе. Основной смысл второго приближения состоит в том, что оно помогает понять первое. При наиболее благоприятных условиях решения, полученные методом возмущений, приводят к результатам, удовлетворительным в целом [4].

Часто ряды не могут предполагаться сходящимися, особенно при возмущении параметра. Тем не менее асимптотический характер этих рядов означает, что несколько членов разложения могут давать вполне достаточную точность во всей области при разумно малых  $\varepsilon$ . Одними их первых работ в механике деформируемого твердого тела, были работы А. Л. Гольденвейзера, который рассматривал системы дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Строгое математическое обоснование полученных им результатов было дано в работах Вишека и Люстерника, которые рассматривали более общие случаи систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной или быстро меняющимися коэффициентами. Также обоснование возникновения пограничных слоев и проникающих состояний рассматривается в работах [5, 7]. Оказалось, однако, что во многих задачах математической физики возникает соответствующая сингулярная асимптотика и в том случае, когда малый параметр в уравнениях стоит не обязательно при старшей производной.

Асимптотический метод, разработанный А. В. Павленко на основе идей Л. И. Маневича, также относится к методам возмущений. На основе этого подхода решены все задачи, обзор которых представлен в работах [1, 2, 4, 6].

### ОСНОВЫ МЕТОДА

Рассмотрим систему уравнений для двух переменных  $x$ ,  $y$  с двумя неизвестными функциями  $u$  и  $v$

$$\left. \begin{aligned} u_{xx} + \varepsilon u_{yy} + m\varepsilon v_{xy} + f &= 0 \\ \varepsilon v_{xx} + v_{yy} + m\varepsilon u_{xy} + \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В общем случае это нелинейная система, где в функциях  $f$  и  $\varphi$  собраны нелинейные члены, когда они равны 0, то получаем линейную постановку.

К интегрированию такого рода систем приводятся плоские задачи теории упругости с учетом геометрической линейности материала, термоупругости, гидроаэродинамики, вязкоупругости и многие другие задачи математической физики.  $\varepsilon$  в этих уравнениях – малый параметр, который связан с характеристиками материала. Формальный переход к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  навязывает определенное поведение решений, а именно:  $u$  и  $v$  имеет один и тот же порядок по  $\varepsilon$ , а дифференцирование по координатам не приводят к изменениям порядка. Для линейной задачи приходим к расчетной схеме, соответствующей системе перекрестных стержней, работающих на растяжение-сжатие. В действительности же это не так.

Чтобы учесть возможные соотношения между  $u$  и  $v$  и скоростями их изменения по  $x$  и  $y$ , введем следующие аффинные преобразования координат и искомых функций, представляющие собой частный случай преобразований Лайтхилла (некоторому деформированию, заранее неизвестному, подвергаются не только искомые функции, но и координаты):

$$\xi_i = \kappa_i \varepsilon^{\alpha_i} x, \quad \eta = \omega_i \varepsilon^{\beta_i} y, \quad u^{(i)} = \varepsilon^{\gamma_i} U^{(i)}, \quad v^{(i)} = \varepsilon^{\delta_i} V^{(i)}, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Пусть при этом показатели  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $\delta_i$  принимают значения:

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = 1/2, \quad \gamma_1 = 1, \quad \delta_1 = 5/2; \quad (3)$$

$$\alpha_2 = 1/2, \quad \beta_2 = 1, \quad \gamma_2 = 5/2, \quad \delta_2 = 1. \quad (4)$$

Из вида преобразований (2) получаем, что при значениях коэффициентов (3) компонента функции  $u^{(1)}$  существенно превосходит  $v^{(1)}$ , а изменяемость функций вдоль координаты  $x$  меньше, чем вдоль координаты  $y$ . При значениях (4) функция  $v^{(2)}$  существенно превосходит

$u^{(2)}$ , а изменяемость вдоль координаты  $y$  меньше, чем вдоль координаты  $x$ . Таким образом, может быть выделено два вида решений, обладающие различными свойствами, которые проявляются в различии порядков компонент искомым функций и различной их изменяемости по координатам. После подстановки в уравнения (1) выражений (2) с учетом (3), (4), получим для каждого из вида решений:

$$\kappa_1^2 U_{\xi\xi}^{(1)} + \omega_1^2 U_{\eta\eta}^{(1)} = F^{(1)}(U^{(1)}, V^{(1)}, \xi_1, \eta_1), \quad \kappa_1 U_{\xi\eta}^{(1)} + \omega_1 V_{\eta\eta}^{(1)} = \Phi^{(1)}(U^{(1)}, V^{(1)}, \xi_1, \eta_1), \quad (5)$$

$$\kappa_2^2 V_{\xi\xi}^{(2)} + \omega_2^2 V_{\eta\eta}^{(2)} = F^{(2)}(U^{(2)}, V^{(2)}, \xi_2, \eta_2), \quad \kappa_2 U_{\xi\xi}^{(2)} + \omega_2 V_{\eta\xi}^{(2)} = \Phi^{(2)}(U^{(2)}, V^{(2)}, \xi_2, \eta_2). \quad (6)$$

Функции  $U^{(i)}$ ,  $V^{(i)}$  будем разыскивать в виде рядов по степеням параметра  $\varepsilon$

$$U^{(i)} = U^{i,0} + \varepsilon U^{i,1} + \varepsilon^2 U^{i,2} + \varepsilon^3 U^{i,3} + \dots \quad V^{(i)} = V^{i,0} + \varepsilon V^{i,1} + \varepsilon^2 V^{i,2} + \varepsilon^3 V^{i,3} + \dots \quad (7)$$

При этом, если положить  $\omega_1 = \kappa_2 = 1$ , а коэффициенты  $\kappa_1$  и  $\omega_2$  определять в виде рядов по степеням  $\varepsilon$

$$\kappa_1 = 1 + \kappa_{1,1}\varepsilon + \kappa_{1,2}\varepsilon^2 + \kappa_{1,3}\varepsilon^3 + \dots, \quad \omega_2 = 1 + \omega_{2,1}\varepsilon + \omega_{2,2}\varepsilon^2 + \omega_{2,3}\varepsilon^3 + \dots, \quad (8)$$

то получим (доказаны теоремы), что неизвестные коэффициенты в разложении удастся подобрать таким образом, что основные функции в каждом приближении находятся из уравнений Лапласа:

$$U_{\xi\xi}^{1,j} = 0, \quad V_{\xi\xi}^{2,j} + V_{\eta\eta}^{2,j} = 0 \quad (j = 0, 1, \dots). \quad (9)$$

Вспомогательные функции  $V^{1,j}$  и  $U^{2,j}$  определяются через основные простым интегрированием. Доказано, что граничные условия могут быть сформулированы для  $u$  или  $v$  независимо, а после нахождения одной из функций, формулируются граничные условия для другой. Таким образом, решение задачи на каждом этапе сводится к решению задач теории потенциала.

Далее представлены результаты решения ряда плоских задач о передаче нагрузки от подкрепляющих элементов к однослойным и многослойным телам.

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Пусть упругая пластина, состоящая из двух прямоугольников  $0 \leq x \leq h_1$ ,  $h_1 \leq x \leq h_2$ ,  $|y| \leq b$ , закреплена по граням  $y = \pm b$  и вдоль оси  $Ox$  усилена стрингером, который в граничной точке  $x = 0$  нагружен продольной силой  $P_0$ . Материалы прямоугольников ортотропны и различны, главные направления анизотропии совпадают с декартовыми осями координат  $x$ ,  $y$ . Требуется определить закон изменения усилия в стрингере, а также распределение контактных усилий взаимодействия между стрингером и пластиной. Задача сводится к интегрированию уравнений равновесия для каждого из прямоугольников

$$B_1 u_{xx} + G u_{yy} + (v^* B_1 + G) v_{xy} = 0, \quad (10)$$

$$B_2 v_{yy} + G v_{xx} + (v_* B_2 + G) u_{xy} = 0$$

при следующих граничных условиях:

$$\sigma_{11} = B_1 (u_x + v^* v_y) = 0, \quad \sigma_{12} = G (u_y + v_x) = 0 \quad (x = 0, \quad x = h_1 + h_2);$$

$$u = u_c, \quad v = 0 \quad (y = 0); \quad u = v = 0 \quad (y = \pm b)$$

при  $x = h_1$  перемещения прямоугольников равны, причем перемещения стрингера  $u_c$  удовлетворяют соотношениям

$$E_c F_c u_{c_{xx}} = 2q(x), \quad N = E_c F_c u_{c_x} = P_0 \quad (x=0); \quad N=0 \quad (x=h_1+h_2).$$

Здесь  $u$ ,  $v$  – компоненты вектора перемещений соответствующих полос,  $B_1$ ,  $B_2$  – жесткости полос на растяжение-сжатие вдоль главных направлений,  $G$  – жесткость на сдвиг,  $E_c F_c$  – жесткость на растяжение-сжатие стрингера,  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$  – нормальное и касательное усилия в пластине,  $\nu_*$ ,  $\nu^*$  – коэффициенты Пуассона материалов полос,  $q(x)$  – контактное усилие взаимодействия между стрингером и пластиной,  $N(x)$  – усилие в стрингере. Индексы  $x$ ,  $y$  обозначают дифференцирование по соответствующим координатам. Так как при  $y=0$ ,  $v=0$  ( $v_x=0$ ), то контактное усилие взаимодействия между стрингером и пластиной определяется по формуле

$$q(x) = -\sigma_{12} \Big|_{y=0} = -G u_y \Big|_{y=0}. \quad (11)$$

При определении усилия в стрингере и усилия контактного взаимодействия в соответствии с расщеплением напряженно-деформированного состояния пластины [1, 2] сформулированная выше краевая задача для каждого из прямоугольников в первом приближении сводится к следующей:

$$B_1^{(i)} u_{ixx} + G^{(i)} u_{iyy} = 0, \quad (12)$$

$$u_{ix} = 0 \quad (x=0, \quad x=h_1+h_2), \quad u_{ix} = f(y) \quad (x=h_1), \quad (13)$$

$$u_i = u_c \quad (y=0), \quad u_i = 0 \quad (y=\pm b),$$

$$E_c F_c u_{c_{xx}} = -2G^{(i)} u_{iy} \quad (y=0), \quad (14)$$

$$u_{cx} = P_0/E_c F_c \quad (x=0), \quad u_{cx} = 0 \quad (x=h_1+h_2), \quad (15)$$

$$u_{cx} = f(0) \quad (x=h_1) \quad (i=1,2),$$

где  $f(y)$  – неизвестная функция, подлежащая определению; индексы  $i=1,2$  относятся к соответствующим прямоугольникам. После применения к уравнениям (12), (14) косинус-преобразования Фурье с конечными пределами по координате  $x$  с учетом граничных условий (13), (15) получим

$$u_{iyy}^* - \omega_i^2 \alpha_i^2(n) u_i^*(n, y) = \delta_i \omega_i^2 (-1)^n f(y), \quad (16)$$

$$E_c F_c \alpha_i^2(n) u_i^*(n, 0) = \delta_i \left[ P_i - E_c F_c f(0) (-1)^n \right] + 2G^{(i)} u_{iy}^* \Big|_{y=0}, \quad (17)$$

$$\omega_i^2 = B_1^{(i)} / G^i, \quad \alpha_i(n) = n\pi/h_i, \quad \delta_1 = -1, \quad \delta_2 = (-1)^n, \quad P_1 = P_0, \quad P_2 = 0,$$

$$u_i^*(n, y) = \int_0^{h_i} u_i(x, y) \cos \alpha_i(n) x_i dx_i,$$

$$(0 \leq x_1 \leq h_1, \quad 0 \leq x_2 \leq h_2; \quad x_1 = x, \quad x_2 = x - h_1).$$

Решение уравнений (16) получено при помощи синус-преобразования Фурье с конечными пределами по координате  $y$  ( $0 \leq y \leq b$ ). Возвращение к оригиналу дает

$$u_i^*(n, y) = -\delta_i \frac{2b\omega_i^2}{\pi^2} (-1)^n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F(m) \sin(\beta(m)y)}{m^2 + \omega_i^{*2}(n)} + u_i^*(n, 0) \frac{sh[\omega_i \alpha_i(n)(b-y)]}{sh[\omega_i \alpha_i(n)b]}, \quad (18)$$

$$F(m) = \int_0^b f(y) \sin(\beta(m)y) dy, \quad \omega_i^*(n) = \omega_i \frac{nb}{h_i}, \quad \beta(m) = \frac{m\pi}{b}.$$

После определения  $u_{iy}^*|_{y=0}$  из (18) с учетом (17), получим

$$u_i^*(n, 0) = \delta_i \frac{h_i^2}{\pi^2} \left[ \frac{P_i}{E_c F_c} - \left( f(0) + \frac{\pi\omega_i}{h_i} g_i A_i(n) \right) (-1)^n \right] \times \frac{1}{n [n + g_i cth(\omega_i \alpha_i(n)b)]}, \quad (19)$$

$$g_i = 2G^{(i)} \omega_i h_i / (\pi E_c F_c).$$

Функции  $u_i^*(n, y)$  находятся из (18) с учетом (19), а перемещения  $u_i(x, y)$  выражаются при помощи ряда

$$u_i(x, 0) = \frac{2h_i}{\pi^2} \sum_{n=1}^{2h_i} \delta_i \left[ \frac{P_i}{E_c F_c} - (-1)^n f(0) \right] \frac{\cos \alpha_i(n)x_i}{n [n + g_i cth(\omega_i \alpha_i(n)b)]} \quad (i=1, 2). \quad (20)$$

Неизвестное значение  $f(0)$  находится из условия, что при  $x = h_1$ ,  $u_1 = u_2$ . Приравнявая перемещения (20) при  $x = h_1$ , получим

$$f(0) = \frac{P_0}{E_c F_c} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_1(n)x_1}{n [n + g_1 cth(\omega_1 \alpha_1(n)b)]} \Big|_{x=h_1} \right) \times \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \alpha_1(n)x_1}{n [n + g_1 cth(\omega_1 \alpha_1(n)b)]} \Big|_{x=h_1} + \frac{h_2}{h_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_2(n)x_2}{n [n + g_2 cth(\omega_2 \alpha_2(n)b)]} \Big|_{x_2=0} \right)^{-1}. \quad (21)$$

Усилия в стрингере  $N(x)$  и контактное усилие взаимодействия между стрингером и пластиной  $q(x)$  определяется по формулам

$$N(x) = E_c F_c u_x(x, 0), \quad q(x) = -G u_y|_{y=0}, \quad (22)$$

где функции  $u_{ix}(x, 0)$ ,  $u_{iy}|_{y=0}$  выражаются соотношениями

$$u_{ix}(x, 0) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_i \left[ \frac{P_i}{E_c F_c} - f(0)(-1)^n \right] \frac{\sin \alpha_i(n)x_i}{[n + g_i cth(\omega_i \alpha_i(n)b)]}, \quad (23)$$

$$u_{iy}|_{y=0} = -\frac{2\omega_i}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_i \left[ \frac{P_i}{E_c F_c} - f(0)(-1)^n \right] \frac{cth(\omega_i \alpha_i(n)b) \cos \alpha_i(n)x_i}{[n + g_i cth(\omega_i \alpha_i(n)b)]}, \quad (i=1, 2). \quad (24)$$

Аналогічним образом исследованы плоские задачи о передаче нагрузки упругим стержнем-полосой упругому анизотропному полупространству при различных видах нагружения (равномерное и неравномерное распределение нагрузки) (рис. 1, 2), проведены различные асимптотические оценки при «малых» и «больших»  $x$ .

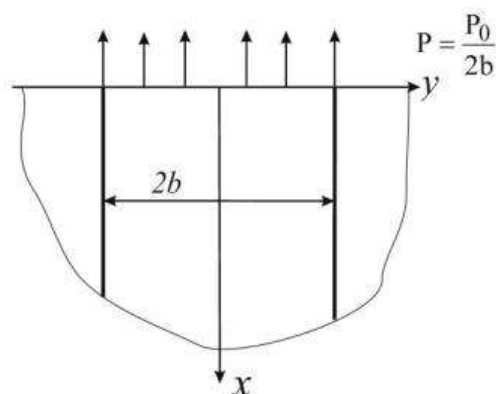


Рис. 1

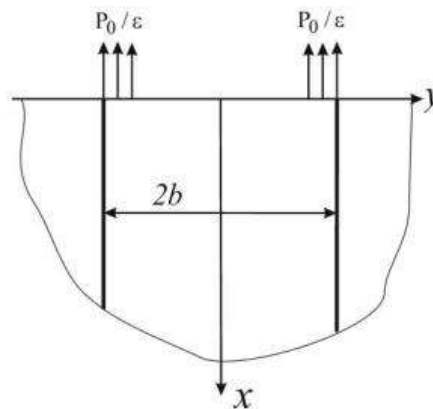


Рис. 2

Предложенный метод был обобщен и на криволинейные координаты. В частности, рассмотрена задача, когда упругая пластина  $R_0 \leq r < \infty$ ,  $-\gamma \leq \theta \leq \gamma$  закреплена по кромкам  $\theta = \pm\gamma$ . Граница  $r = R_0$  остается свободной, на бесконечности напряжения и перемещения отсутствуют. Вдоль срединного радиуса ( $\theta = 0$ ) пластина усилена стрингером, который в граничной точке  $r = R_0$  нагружен продольным усилием  $P_0$ . Материал пластины является ортотропным главные направления анизотропии совпадают с полярными координатами  $r, \theta$ .

Если вместо полярных координат  $r, \theta$  ввести безразмерные координаты  $\xi, \eta$  соотношениями  $\theta = \eta$ ,  $r = R_0 e^\xi$  то поставленная задача может быть сведена к интегрированию уравнений равновесия пластины, аналогичных (10) и решение проводится по изложенной методике.

Определены законы изменения усилия в стрингере, усилия взаимодействия между стрингером и пластиной, а также напряжений в пластине.

Решена также задача для случая, когда пластина представляет собой кольцевой сектор [6].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Маневич Л. И., Павленко А. В., Коблик С. Г. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. Киев-Донецк: Вища шк., 1982. 153 с.
2. Маневич Л. И., Павленко А. В. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов. Киев: Вища шк., 1991. 131 с.
3. Кагадий Т. С. Метод возмущений в механике упругих (вязкоупругих) анизотропных и композиционных материалов. Днепропетровск: РИК НГА України, 1998. 260 с.
4. Кагадий Т. С. Передача нагрузки двуслойным телам конечных размеров. *Вісник Дніпропетровського університету. Механіка*. 2000. Вип. 3, Т. 2. С. 38–46.
5. Сясев А. В. Определение оптимальной формы наращиваемой армированной колонны в условиях ползучести. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Механіка*. 2003. № 11, Вип. 7. С. 153–160.
6. Кагадий Т. С., Белова О. В., Щербина И. В. Эффективность применения асимптотического метода при решении некоторых задач механики. *Вісник Запорізького національного університету. Серія: Фізико-математичні науки*. 2015. № 2. С. 35–40.
7. Сясев А. В., Косташук М. В. Моделирование процесса кристаллизации стержня с учетом взаимного влияния температурных и механических полей. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Моделювання*. 2015. № 23, Вип. 7. С. 9–28.

## REFERENCES

1. Manevich, L.I., Pavlenko, A.V. & Koblik S.G. (1982). Asymptotic methods in the theory of elasticity of an orthotropic body. Kiev-Donetsk: Vishcha shk.
2. Manevich, L.I. & Pavlenko, A.V. (1991). Asymptotic method in micromechanics of composite materials. K.: Vishcha shk.
3. Kagadiy, T.S. (1998). The perturbation method in the mechanics of elastic (viscoelastic) anisotropic and composite materials. Dnepropetrovsk: RIK NGA Ukrainy.
4. Kagadiy, T.S. (2000). Load transfer to bilayer bodies of finite dimensions. Visnyk Dnipropetrovs'koho universytetu. Mekhanika. Iss. 3, Vol. 2, pp. 38-46.
5. Siasev, A.V. (2003). Determination of the optimal shape of a stackable reinforced column under creep conditions. Visnyk Dnipropetrovs'koho universytetu. Seriya: Mekhanika. No. 11, Iss. 7, pp. 153-160.
6. Kagadiy, T.S., Belova, O.V. & Sherbina, I.V. (2015), The effectiveness of the application of the asymptotic method for solving certain problems of mechanics. Vestnik ZNU. No. 2, pp. 35-40.
7. Siasev, A.V. & Kostashchuk, M.V. (2015), Modeling of the process of crystallization of the rod taking into account the mutual influence of temperature and mechanical fields. Visnyk Dnipropetrovs'koho universytetu. Seriya: Modelyuvannya. No. 23, Iss. 7, pp. 9-28.

УДК: 546.815.23

## ЗМІНА ЕЛЕКТРОХІМІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ GaSe ЗА РАХУНОК МОДИФІКАЦІЇ ПОВЕРХНІ

Квашнівська Н. М.

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, Україна*

Natalka522@gmail.com

У повітрі чи в іншому середовищі на поверхні напівпровідника з'являється окисний шар, що призводить до зниження швидкості проходження процесів, які можуть відбуватися на поверхневих шарах при окисно-відновлювальних реакціях. У кристалі можна використати розчинник хімічних реакцій, що впливає на зміни у процесі реакції, а саме утворення та розрив хімічних зв'язків між атомами поверхневих шарів, що утворюють пасивацію, при цьому не змінюючи структури кристалу, тим самим пришвидшити процес передачі електронів при окисно-відновлюваних реакціях.

*Ключові слова: селенід галію, наноструктури, поверхнева рекомбінація, фотосинтез.*

## ИЗМЕНЕНИЕ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ GaSe ЗА СЧЕТ МОДИФИКАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ

Квашневська Н. М.

*Львовский национальный университет им. Ивана Франко,  
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, Украина*

Natalka522@gmail.com

В воздухе или в другой среде на поверхности полупроводника появляется окислительный слой, приводит к снижению скорости прохождения процессов, которые могут происходить на поверхностных слоях при окислительно-восстановительных реакциях. В кристалле можно использовать растворитель химических реакций, что влияет на изменения в процессе реакции, а именно образование и разрыв химических связей между атомами поверхностных слоев, образующие пассивацию при этом не меняя структуры кристалла, тем самым ускорить процесс передачи электронов при окислительно-восстановительных реакциях.

*Ключевые слова: селенид галлия, наноструктуры, поверхностная рекомбинация, фотосинтез.*

## CHANGING THE ELECTROCHEMICAL PROPERTIES OF GaSe DUE TO MODIFICATIONS SURFACE

Kvashnivska N. M.

*Ivan Franko National University of Lviv,  
1, Universytetska St., Lviv, 79000, Ukraine*

Natalka522@gmail.com

The purpose of this work is to study the changes of the electrochemical characteristics of intercalated gallium selenide surface modification by chemical solvent - dimethylformamide, depending on the type of electrolyte and the presence of solar radiation by a scanning potentiostat.

In the air or other medium on the surface of the semiconductor layer appears oxidation that leads to passivation processes that may occur in the surface layers during oxidation-reduction reactions. In the chip can be used solvent chemical reactions. What influences changes in the reaction, namely the formation and breaking of chemical bonds between the surface layers of atoms forming the passivation without changing the crystal structure, thereby speed up the transfer of electrons in redox reactions renewable.

Nanostructures formed on the photoelectrodes surface when using chemical solvents, as a result of rupture of chemical bonds between the atoms of the surface layers that forms a passivation (as a result of oxidation of the semiconductor surface) without changing the crystal structure, thereby speed up the transfer of electrons in redox reactions. The products that will be formed will accumulate on the additional electrode thus conversion velocity and energy conversion efficiency will be higher. Nanostructures formed on the photoanodes surface leads to decreasing of the surface-recombination rate generate by the light carrier and consequently it leads to the growth of the photoanodes photopotential.

*Key words: gallium selenide, nanostructures, surface recombination, photosynthesis.*

### ВСТУП

Монокристали GaSe відносяться до шаруватих сполук із різко анізотропними властивостями [1-9]. Фізичні властивості цих матеріалів вказують на їх перспективність практичного застосування в елементах сучасної електроніки, і ці властивості важко передбачити, оскільки вони залежать від багатьох технологічних чинників. У роботі [10] описані електрохімічні характеристики моноселеніду галію залежно від типу електролітів та за умов дії сонячних променів. Показано, що у воді анодні і катодні процеси в темряві, без доступу сонячних променів, проходять з нижчою швидкістю, ніж на сонячному світлі і потенціал поляризації на світлі зсувається у від'ємний бік, аналогічні результати спостерігалися і для інших середовищ. У результаті інтеркаляції воднем кристалу були отримані результати, що підтверджують, а також покращують вплив сонячного випромінювання на швидкість катодних і анодних реакцій на поверхні напівпровідника у нейтральному середовищі. У результаті інтеркаляції воднем у кислому середовищі на поверхні GaSe утворюється окисна плівка, яка гальмує катодні та анодні процеси, і при освітленні процеси пасивації знижуються. Тому постає питання, за рахунок чого можливо уникнути такої реакції?

### МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Мета роботи полягає в дослідженні змін електрохімічних характеристик інтеркальованого селеніду галію за рахунок модифікації поверхні хімічним розчинником – диметилформамід, залежно від типу електроліту і присутності сонячного випромінювання.

Об'єктом дослідження є монокристали селеніду галію при електрохімічній поляризації в розчинах з різним показником рН. Дослідження потенціостатичних і потенціодинамічних характеристик проведені за допомогою скануючого потенціостата. Для складання поляризаційних діаграм застосували досліджуваний електрод («робочий»), електрод порівняння, додатковий (платиновий) електрод. Поляризаційні дослідження виконані в середовищах дистильованої води, та розчинах кислот  $H_2SeO_3$ ,  $H_2SO_4$  під впливом сонячного випромінювання (у видимому діапазоні) і в темряві.



## РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЇХ ОБГОВОРЕННЯ

У процесі фотосинтезу, при перетворенні сонячної енергії рослини використовують мембрану. Порівняно з рослинами, у штучних системах ККД він малий. Недоліком такої системи є слабе поглинання світла в тонкому шарі, що містить фотоактивні молекули пігменту, у рослин – це мембрана, що складається з тилакоїдів. Тилакоїди регулюють швидкість перенесення електронів у фотосистемі під дією світла. Тонкий шар потрібний для зменшення значних витрат енергії при проходженні електронів через мембрану, яку в штучних системах заміняє потенціальний бар'єр. Процес фотосинтезу зберігається у варіанті пристрою на основі напівпровідникового електроду для фотоелектрохімічного перетворення енергії. У повітрі чи в іншому середовищі на поверхні напівпровідника з'являється окисний шар, що призводить до пасивування процесів які можуть відбуватися на поверхневих шарах при окисно-відновлювальних реакціях. Оскільки в рослинах цього не спостерігається через те, що мембрана багат шарова, і на процеси передачі електронів при цій реакції не діє сповільнення. У кристалі можна використати розчинник хімічних реакцій. Що впливає на зміни у процесі реакції, а саме утворення та розрив хімічних зв'язків між атомами поверхневих шарів, що утворюють пасивацію, при цьому не змінюючи структури кристалу, тим самим пришвидшить процес передачі електронів при окисно-відновлюваних реакціях. Продукти, що утворюються в результаті, будуть накопичуватися на додатковому електроді і таким чином швидкість перетворення і ККД перетворення енергії буде більшою. Під дією сонячного світла крізь тонкий шар прозорого електроліту на поверхні фотоаноду на границі з електролітом генеруються електронно-діркові пари. Під дією електричного поля, що існує на границі фотоаноду з електролітом, вони розділяються – дірки йдуть на окислення, а електрони по зовнішньому колу йдуть до катода, де відбувається реакція відновлення.

Утворений потенціальний бар'єр напівпровідникового кристалу з електролітом перешкоджає проходженню зарядів. Якщо використати розчинник, то потенціальний бар'єр не буде впливати на окисно-відновлювальну реакцію, тому що цей бар'єр буде долатися не вихідною енергією, яку ми бажаємо отримати, а саме продуктами, які отримуємо в результаті хімічної реакції як наслідок дії розчинника. А віддача енергії буде відбуватися в наслідок переходу з одного рівня кристалу на інший і ця відстань буде долатися швидше за рахунок енергії, що отримується від сонячного світла. У таблиці 1 наведені значення для кристалу GaSe, інтеркальованого воднем у різних середовищах, з тим же кристалом GaSe, на поверхню якого нанесено розчинник диметилформамід (DMF).

Таблиця 1

	GaSe				GaSe з шаром DMF-A			
	На світлі		У темряві		На світлі		У темряві	
	E, V	J, mA/mm <sup>2</sup>	E, V	J, mA/mm <sup>2</sup>	E, V	J, mA/mm <sup>2</sup>	E, V	J, mA/mm <sup>2</sup>
H <sub>2</sub> O	-0,296	8,13*10 <sup>7</sup>	-0,265	1,65*10 <sup>7</sup>	-0,476	3,63 *10 <sup>7</sup>	-0,476	5,71*10 <sup>7</sup>
H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	-0,345	2,006*10 <sup>7</sup>	-0,376	1,9*10 <sup>7</sup>	-0,454	3,615*10 <sup>7</sup>	-0,454	1,69*10 <sup>7</sup>
H <sub>2</sub> SeO <sub>3</sub>	-0,167	1,24*10 <sup>7</sup>	-0,199	6,04*10 <sup>7</sup>	0,111	7,07*10 <sup>7</sup>	0,111	5,37*10 <sup>7</sup>

## ВИСНОВКИ

Отже, окисно-відновлювальна реакція буде проходити з меншими витратами. Нанесення наночастинок платини на поверхню фотоаноду призводить до зменшення швидкості поверхневої рекомбінації генерованих світлом носіїв (електронів та дірок) і, як наслідок, призводить до збільшення фотопотенціалу фотоанода.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Болездюк В. Б., Заслонкін А. В., Ковалюк З. Д., Пирля М. М., Юрценюк С. П. Вплив відпалу на оптичні властивості шаруватих кристалів GaSe та InSe. *Physics and chemistry of solid state*. 2008. Т. 9, № 2. С. 338–347.
2. Ковалюк З. Д., Болездюк В. Б., Шевчик В. В., Дубик О. М., Камінський В. М. Електричні властивості моно селеніду індію, легованого селенідом ванадію. *ФІП*. 2012. Т. 10, № 4. С. 448–452.
3. Ковалюк З. Д., Шевчик В. В., Болездюк В. Б., Нетяга В. В. Дослідження електричних властивостей InSe інтеркальованого кобальтом. *Журнал нано- та електронної фізики*. 2014. Т. 6, № 4. С. 368–372.
4. Болездюк В. Б., Ковалюк З. Д., Кудринський З. Р., Кушнір Б. В., Литвин О. С., Шевченко А. Д. Вплив інтеркалювання нікелем на властивості шаруватих кристалів InSe. *ФІП*. 2014. Т. 12, № 2. С. 184–189.
5. Стахира Й. М., Товсюк Н. К., Фоменко В. Л., Цмоць В. М., Щупляк А. Н. Структура и магнитные свойства монокристалов InSe, інтеркалірованих нікелем. *Фізика и техніка напівпровідників*. 2011. Т. 45, вып. 10. С. 44–47.
6. Balitskii O., Porowski S., Elias Jacek, Gryshchenko S., Kvashnivska N., Polishchuk N. Electrochemical Investigation of Hydrogen Influence of Crystals of Gallium Nitride. URL: <http://myprogram14.isonline.org/symp/S06.html>.
7. Balitskii O., Elias Jacek, Gryshchenko S., Kvashnivska N., Polishchuk N. Hydrogen Influence on Electrochemical Properties of Gallium Monoselenide. *Solid State Phenomena*. 2015. Vol. 225. P. 53–58.
8. Балицький О. О., Яцек Еліаш, Грищенко С., Квашнівська Н., Поліщук Н. Виростання шаруватих кристалів у водневій енергетиці. *Нетрадиційні і поновлювальні джерела енергії як альтернативні первинним джерелам енергії в регіоні*. Праці VIII між нар. наук.-практ. конф. (Львів, 10 березня 2015). Львів, 2015. С. 152–154.
9. Ковалюк З. Д., Пирля М. М., Болездюк В. Б., Шевчик В. В. Барична та тензочутливість шаруватих напівпровідників InSe та GaSe. *Укр. фіз. журн.* 2011. Т. 56, № 4. С. 368–372.
10. Квашнівська Н. Електрохімічні властивості селеніду галію. *VI Всеукраїнська науково-практична конференція «Перший крок у науку»*. Т. 5. Луганськ, 2011. С. 37.

## REFERENCE

1. Boledzyuk, V. B., Zasloukin, A. V., Kovalyuk, Z. D., Pyrlya, N. M. & Yurtsenyuk, S.P. (2008). Influence of annealing on the optical properties of layered crystals GaSe and InSe. *Physics and chemistry of solid state*, Vol. 9, No. 2, pp. 338-347.
2. Kovalyuk, Z. D., Boledzyuk, V. B., Szewczyk, V. V., Dubyk, A. & Kaminsky, V. M. (2012). The electric properties of indium selenide mono doped selenide vanadium. *FIP*, Vol. 10, No. 4, pp. 448-452.
3. Kovalyuk, Z. D., Szewczyk, V. V., Boledzyuk, V. B. & Netyaga, V. V. (2014). Research electrical properties of InSe intercalated cobalt. *Journal nano-physics and electronics*, Vol. 6, No. 4, pp. 368-372.
4. Boledzyuk, V. B., Kovalyuk, Z., Kudrynsky, S. G., Kushnir, B., Lytvyn, O. S. & Shevchenko, A. D. (2014). Nickel intercalation Influence on properties to properties of layered crystals of InSe. *FIP*, Vol. 12, No. 2, pp. 184-189.
5. Stahyra, J. M., Tovsyuk, N. K., Fomenko, V. L., Tsmots, V. N. & Schuplyak, A. N. (2011). Structure and properties of monocrystals InSe mahnytnye, unterkalyrovannih Nickel. *Physics and technics polkprovodnykov*, Vol. 45, iss. 10, pp. 44-47.
6. Balitskii O., Porowski, S., Elias Jacek, Gryshchenko, S., Kvashnivska, N. & Polishchuk, N. Electrochemical Investigation of Hydrogen Influence of Crystals of Gallium Nitride. doi: <http://myprogram14.isonline.org/symp/S06.html>.
7. Balitskii O., Elias Jacek, Gryshchenko, S., Kvashnivska, N. & Polishchuk, N. (2015). Hydrogen Influence on Electrochemical Properties of Gallium Monoselenide. *Solid State Phenomena*, Vol. 225, pp. 53-58.
8. Balitskii O., Eliash, Jacek, Grishchenko, S., Kvashnivska, N. & Polishchuk, N. (2015, March). Layered crystals of growth in vodnevii enerhetytsi. 8th International Conference “Non-traditional and renewable sources of energy as an alternative to primary sources of energy in the region”, (pp. 152-154), Lviv.
9. Kovalyuk, Z. D., Pyrlya, N. M., Boledzyuk, V. B. & Szewczyk, V. V. (2011). The pressure and tenzochutlyvist layered semiconductor InSe and GaSe. *Eng. nat. Zh.*, Vol. 56, No. 4, pp. 368-372.
10. Kvashnivska, N. M. (2011). Electrochemical Properties of Gallium Monoselenide. VI National scientific-practical conference “The first step in science”, (Vol. 5, p. 37), Luhansk.

УДК 539.3

## ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА С ИЗОТРОПНОЙ МАТРИЦЕЙ И ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫМ ВОЛОКНОМ

Клименко М. И., к. ф.-м. н., доцент, Гребенюк С. Н., д. т. н., доцент,  
Богуславская А. М., аспирант

*Запорожский национальный университет,  
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

gsm1212@ukr.net

В работе предлагается методика определения эффективных термоупругих характеристик однонаправленного композиционного материала. Композит, состоящий из трансверсально-изотропного волокна и изотропной матрицы, моделируется сплошным однородным трансверсально-изотропным материалом. Применение предложенной методики позволяет получить термоупругие характеристики композита в виде функций термоупругих характеристик его составляющих.

*Ключевые слова: композиционный материал, матрица, волокно, температурные коэффициенты линейного расширения, термоупругие постоянные.*

## ТЕРМОМЕХАНИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ З ІЗОТРОПНОЮ МАТРИЦЕЮ І ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИМ ВОЛОКНОМ

Клименко М. І., к. ф.-м. н., доцент, Гребенюк С. М., д. т. н., доцент,  
Богуславська А. М., аспірант

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

gsm1212@ukr.net

У роботі пропонується методика визначення ефективних термопружних характеристик однонаправленого композиційного матеріалу. Композит, що складається з трансверсально-ізоотропного волокна та ізоотропної матриці, моделюється суцільним однорідним трансверсально-ізоотропним матеріалом. Застосування пропонованої методики дозволяє отримати термопружні характеристики композита у вигляді функцій термопружних характеристик його складових.

*Ключові слова: композиційний матеріал, матриця, волокно, температурні коефіцієнти лінійного розширення, термопружні константи.*

## THERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF THE FIBER COMPOSITE MATERIAL WITH ISOTROPIC MATRIX AND TRANSVERSE ISOTROPIC FIBER

Klymenko M. I., PhD in Math and Physics, Associate Professor,  
Grebenuk S. M., PhD in Engineering, Associate Professor,  
Boguslavska A.M., postgraduate student

*Zaporizhzhya National University,  
Zhukovsky st., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

gsm1212@ukr.net

In this work we describe the definition of thermoelastic response of composite material. The subject of research is the UD composite with hexagonal fibers. We suppose that the matrix is an isotropic material and the fiber is a transverse isotropic material, whereby the isotropic plane is situated vertical to the fiber axis.

The element of fiber composite material is represented as the combination of two cylinders of infinite length – isotropic hollow cylinder modeling matrix and transverse isotropic solid cylinder modeling the fiber.

Thermoelastic constants are found as a result of solution of two boundary values. At first we solve the boundary value of joint deformation of isotropic matrix and transverse isotropic fiber. As a result of the

solution we obtain the components of the stress-strain state as the function of the thermoelastic constants of the matrix material, fiber material as well as a volume fraction of each of them in the composite. Next we obtain the solution of an analogous boundary value for a composite which is represented by a homogenous transverse isotropic material with yet unknown thermoelastic constants. As a result of the solution we obtain the components of the stress-strain state as the function of unknown thermoelastic constants of a homogenous transverse isotropic material modeling the composite. From the matching condition, as a rule such condition is the equality of any components of displacement vector, we obtain unknown thermoelastic constants of transverse isotropic material as the function of the thermoelastic constants of the matrix material, fiber material as well as a volume fraction of each of them in the composite.

From abovementioned it is clear that the more accurately the boundary value is solved the more accurately unknown thermoelastic constants of the composite will be obtained. Analytic solutions for such a combination can be obtained only for a limited number of boundary values. Such problems include uniform longitudinal stretching.

As a result of the calculations we obtained the formulas for unsymmetrical stress-strain state of a composite material with an isotropic matrix and transverse isotropic fiber. We found all the components of the stresses, deformations and displacements as the functions of thermoelastic material response and as the functions of the constants which are found from the boundary conditions taking into account the volume fraction of the fiber in the composite material.

The prospects for further research in this direction are related to the determination of all the effective characteristics of composite materials with a transversely isotropic matrix and fiber and their application to solving the problems of the mechanics of thermoelastic composites.

*Key words: composite material, matrix, fiber, temperature coefficients of inear expansion, thermoelastic constants.*

## ВВЕДЕНИЕ

При решении температурных задач механики волокнистых композитов, композиционный материал, как правило, представляется однородным анизотропным материалом. Свойства такого материала зависят от термоупругих характеристик матрицы и волокна, а также объемной доли каждого из них в композите. Учет анизотропии термоупругих свойств составляющих композита позволяет уточнить результаты и построить более адекватные модели, подтвержденные экспериментальными исследованиями. Задачи данного типа, как правило, решаются в два этапа. Сначала необходимо определить термоупругие свойства матрицы и волокна, а потом решить аналогичную краевую задачу, где композит представлен в виде однородной сплошной среды с термоупругими постоянными.

Необходимость учета термоупругих свойств при моделировании процессов деформирования композитов определяет актуальность задач определения их эффективных термоупругих характеристик по известным характеристикам составляющих. Этим задачам посвящено значительное число исследований. В частности, задачи расчета физических свойств композиционных материалов по свойствам компонентов рассмотрены в работах [1, 3, 4]. В работах [1, 3] для композита построены зависимости его температурных коэффициентов линейного расширения от объемного содержания волокна в композите и термоупругих констант его составляющих. Механические характеристики композитов при продольном деформировании рассмотрены в [2]. В работе [5] исследовано влияние технологических параметров на механические свойства нескольких типов углепластиков при автоклавном формовании. Связанная нестационарная задача термоупругости для неоднородного тела, описываемая системой из четырех дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных с переменными по координатам коэффициентами, рассматривается в [6]. Проблемы прогнозирования реологических свойств композитов с термовязкоупругими характеристиками рассмотрены в работе [7]. Для решения этой задачи предлагается методика, основанная на базе совместного применения метода квазиконстантных операторов и метода конечных элементов.

Целью данного исследования является определение компонент напряженно-деформированного состояния композита как функции термоупругих постоянных изотропной матрицы и трансверсально-изотропного волокна, а также объемной доли каждого из них в композите.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБЩАЯ СХЕМА ЕЕ РЕШЕНИЯ

В работе рассматривается задача определения термоупругих характеристик композитного материала. Объектом исследования является однонаправленный композит с гексагональным расположением волокон. Предположим, что матрица представлена изотропным материалом, а волокно – трансверсально-изотропным, причем плоскость изотропии направлена перпендикулярно оси волокна.

Элемент волокнистого композиционного материала представим в виде комбинации двух цилиндров бесконечной длины – изотропного полого, моделирующего матрицу и трансверсально-изотропного сплошного, моделирующего волокно.

Для этого аппроксимируем объем элементарной гексагональной ячейки объемом цилиндра (рис. 1), причем радиус цилиндра примем таким, чтобы объем содержания волокна в гексагональной ячейке, и объем содержания волокна в цилиндрической ячейке, были бы одинаковыми.

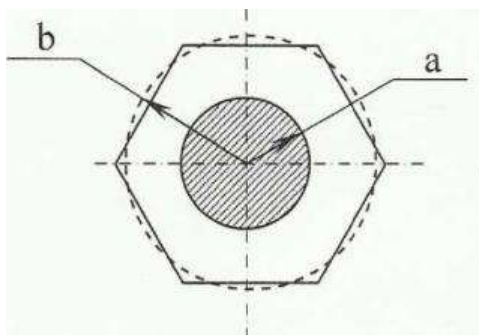


Рис. 1. Гексагональная ячейка

Если объемное содержание волокон в композите равно  $f$ , то учитывая, что область, занимаемая матрицей в элементарной ячейке, и область, занимаемая волокном в элементарной ячейке, имеют одинаковую высоту, то справедливо следующее соотношение:

$$f = \frac{\pi a^2}{\pi b^2} = \frac{a^2}{b^2}. \quad (1)$$

Термоупругие постоянные находятся из решения двух краевых задач. Сначала решается краевая задача совместного деформирования изотропной матрицы и трансверсально-изотропного волокна. В результате решения, получаем компоненты напряженно-деформированного состояния как функции термоупругих постоянных материала матрицы и материала волокна, а также объемной доли каждого из них в композите. Далее получаем решение аналогичной краевой задачи для композита, который представляется однородным трансверсально-изотропным материалом с пока еще неизвестными термоупругими постоянными. В результате решения получаем компоненты напряженно-деформированного состояния как функции неизвестных термоупругих постоянных однородного трансверсально-изотропного материала, моделирующего композит. В качестве условия согласования обычно выступает равенство каких-либо компонент вектора перемещений. Из таких условий находят неизвестные термоупругие постоянные трансверсально-изотропного материала как функции термоупругих постоянных материала матрицы и материала волокна, а также объемной доли каждого из них в композите.

Получить аналитические решения для такой комбинации можно лишь для ограниченного числа краевых задач. К числу таких задач относят: равномерное продольное растяжение, равномерное поперечное растяжение, чистый поперечный сдвиг и чистый продольный сдвиг.

Рассмотрим осесимметричное напряженно-деформированное состояние цилиндрического тела, тогда  $\sigma_{zz} = \sigma_0$ ,  $\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r)$ ,  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(r)$ ,  $\sigma_{zr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = 0$ . Тогда два уравнения равновесия для данной задачи термоупругости:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + G_\theta &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + G_z &= 0\end{aligned}$$

выполняются тождественно, а третье уравнение при массовой силе  $G_r = 0$  принимает вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0. \quad (2)$$

Закон Гука с учетом влияния постоянной температуры  $T$  для трансверсально-изотропного материала запишется в виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} - \alpha_{rr} T &= \frac{1}{E_2} (\sigma_{rr} - (v_{21}\sigma_{zz} + v_{23}\sigma_{\theta\theta})), \\ \varepsilon_{\theta\theta} - \alpha_{\theta\theta} T &= \frac{1}{E_2} (\sigma_{\theta\theta} - (v_{21}\sigma_{zz} + v_{23}\sigma_{rr})), \\ \varepsilon_{zz} - \alpha_{zz} T &= \frac{1}{E_1} (\sigma_{zz} - v_{12}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})).\end{aligned} \quad (3)$$

Если считать осевое напряжение постоянным, в частности нулевым, то, тогда из (3) следует, что  $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}(r)$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}(r)$  и, следовательно,  $\varepsilon_{zz} = const$ . Тогда с учетом обратного закона Гука для трансверсально-изотропного материала и уравнений

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\end{aligned} \quad (4)$$

для осесимметричного напряженно-деформированного состояния уравнение (2) запишется в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} &= \left( \alpha_{rr} + \frac{(v_{23} + v_{21}v_{12})}{1 - v_{21}v_{12}} \alpha_{\theta\theta} + \frac{v_{12}(1 + v_{23})}{1 - v_{21}v_{12}} \alpha_{zz} \right) \frac{\partial T}{\partial r} - \\ &= \frac{T(1 - v_{23} - 2v_{21}v_{12})(\alpha_{\theta\theta} - \alpha_{rr})}{r(1 - v_{21}v_{12})}.\end{aligned}$$

Решение данной задачи имеет вид:

$$u_{rr}(r) = \left( \alpha_{rr} + \frac{v_{23} + v_{21}v_{12}}{1 - v_{21}v_{12}} \alpha_{\theta\theta} + \frac{v_{12}(v_{23} + 1)}{1 - v_{21}v_{12}} \alpha_{zz} \right) \cdot \frac{1}{r} \int Tr dr + C_1 r + \frac{C_2}{r},$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные, определяемые из граничных условий. Отсюда, используя (4), получаем:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr} &= - \left( \alpha_{rr} + \frac{v_{23} + v_{21}v_{12}}{1 - v_{21}v_{12}} \alpha_{\theta\theta} + \frac{v_{12}(v_{23} + 1)}{1 - v_{21}v_{12}} \alpha_{zz} \right) \cdot \left( \frac{1}{r^2} \int Tr dr - T \right) + C_1 - \frac{C_2}{r^2}, \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} &= \left( \alpha_{rr} + \frac{v_{23} + v_{21}v_{12}}{1 - v_{21}v_{12}} \alpha_{\theta\theta} + \frac{v_{12}(v_{23} + 1)}{1 - v_{21}v_{12}} \alpha_{zz} \right) \cdot \frac{1}{r^2} \int Tr dr + C_1 + \frac{C_2}{r^2}.\end{aligned}$$

Воспользовавшись обратным законом Гука для трансверсально-изотропного материала получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E_2 \left[ \nu_{12} (1 + \nu_{23}) \varepsilon_{zz} + (1 + \nu_{23}) C_1 + (\nu_{23} + 2\nu_{21}\nu_{12} - 1) \frac{C_2}{r^2} \right]}{1 - 2\nu_{21}\nu_{12} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{21}} - \\ &\quad - \frac{E_2}{1 + \nu_{23}} \cdot \left( \alpha_{rr} + \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{12}}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \alpha_{\theta\theta} + \frac{\nu_{12}(\nu_{23} + 1)}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \alpha_{zz} \right) \cdot \frac{1}{r^2} \int Trdr; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E_2 \left[ \nu_{12} (1 + \nu_{23}) \varepsilon_{zz} + (1 + \nu_{23}) C_1 + (1 - \nu_{23} - 2\nu_{21}\nu_{12}) \frac{C_2}{r^2} \right]}{1 - 2\nu_{21}\nu_{12} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{21}} + \\ &\quad + \frac{E_2}{1 + \nu_{23}} \cdot \left( \alpha_{rr} + \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{12}}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \alpha_{\theta\theta} + \frac{\nu_{12}(\nu_{23} + 1)}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \alpha_{zz} \right) \cdot \frac{1}{r^2} \int Trdr - \frac{E_2 T (\alpha_{\theta\theta} + \nu_{12} \alpha_{zz})}{1 - \nu_{21}\nu_{12}}. \end{aligned}$$

Подставим полученные соотношения и значения  $\sigma_{zz} = \sigma_0$  в выражение (3) и найдем соотношение для  $\varepsilon_{zz}$ :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_0 (1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1 (1 - \nu_{23})} - \frac{2\nu_{21}C_1}{(1 - \nu_{23})} + \frac{T(\nu_{21}\alpha_{\theta\theta} + \alpha_{zz})(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}{(1 - \nu_{21}\nu_{12})(1 - \nu_{23})}.$$

Учитывая соотношение

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

получим выражение для осевых перемещений:

$$u_z(z) = \int \varepsilon_{zz} dz = \left( \frac{\sigma_0 (1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1 (1 - \nu_{23})} - \frac{2\nu_{21}C_1}{(1 - \nu_{23})} + \frac{T(\nu_{21}\alpha_{\theta\theta} + \alpha_{zz})(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}{(1 - \nu_{21}\nu_{12})(1 - \nu_{23})} \right) z + C_3, \quad (5)$$

При условии

$$u_z(0) = 0,$$

имеем  $C_3 = 0$ . Соотношение (5) запишется в виде:

$$u_z(z) = \left( \frac{\sigma_0 (1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1 (1 - \nu_{23})} - \frac{2\nu_{21}C_1}{(1 - \nu_{23})} + \frac{T(\nu_{21}\alpha_{\theta\theta} + \alpha_{zz})(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}{(1 - \nu_{21}\nu_{12})(1 - \nu_{23})} \right) z. \quad (6)$$

С учетом полученного соотношения (6) выражения для напряжений примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= E_2 \left( \frac{\sigma_0 \nu_{12}}{E_1 (1 - \nu_{23})} + \frac{C_1}{(1 - \nu_{23})} - \frac{C_2}{r^2 (1 + \nu_{23})} \right) + \frac{E_2 T \nu_{12} (\nu_{21} \alpha_{\theta\theta} + \alpha_{zz})}{(1 - \nu_{21}\nu_{12})(1 - \nu_{23})} - \\ &\quad - \frac{E_2}{1 + \nu_{23}} \cdot \left( \alpha_{rr} + \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{12}}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \alpha_{\theta\theta} + \frac{\nu_{12}(\nu_{23} + 1)}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \alpha_{zz} \right) \cdot \frac{1}{r^2} \int Trdr; \\ \sigma_{\theta\theta} &= E_2 \left( \frac{\sigma_0 \nu_{12}}{E_1 (1 - \nu_{23})} + \frac{C_1}{(1 - \nu_{23})} + \frac{C_2}{r^2 (1 + \nu_{23})} \right) + \frac{E_2 T ((\nu_{12}\nu_{21} + \nu_{23} - 1) \alpha_{\theta\theta} + \nu_{12}\nu_{23} \alpha_{zz})}{(1 - \nu_{21}\nu_{12})(1 - \nu_{23})} + \\ &\quad + \frac{E_2}{1 + \nu_{23}} \cdot \left( \alpha_{rr} + \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{12}}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \alpha_{\theta\theta} + \frac{\nu_{12}(\nu_{23} + 1)}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \alpha_{zz} \right) \cdot \frac{1}{r^2} \int Trdr. \end{aligned}$$

Таким образом, для напряженно-деформированного состояния получены все компоненты напряжений, деформаций и перемещений, как функции термоупругих характеристик материала и постоянных.

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Рассмотрим совместную температурную деформацию сплошного цилиндра  $0 \leq r \leq a$ , моделирующего волокно, и полого цилиндра  $a \leq r \leq b$ , моделирующего матрицу.

Краевые условия подберем таким образом, чтобы они соответствовали экспериментальным данным, полученным для композиционного материала. В месте сцепления волокна с матрицей радиальные перемещения и напряжения являются непрерывными, осевые перемещения и волокна и матрицы постоянны и одинаковы:

$$\sigma_{rr}^{\circ}(a) = \sigma_{rr}^{*}(a), \quad u_r^{\circ}(a) = u_r^{*}(a), \quad u_z^{\circ}(h) = u_z^{*}(h). \quad (7)$$

Здесь и далее символом  $^{\circ}$  обозначаются величины, относящиеся к волокну, а символом  $^{*}$  – величины, относящиеся к матрице.

При совместном деформировании матрицы и волокна:

$$\sigma_{rr}^{*}(b) = 0. \quad (8)$$

Радиальные перемещения трансверсально-изотропного волокна описываются соотношением:

$$u_{rr}(r) = \left( \alpha_{rr} + \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{12}}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \alpha_{\theta\theta} + \frac{\nu_{12}(\nu_{23} + 1)}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \alpha_{zz} \right) \cdot \frac{1}{r} \int Trdr + C_1 r + \frac{C_2}{r},$$

а с учетом того, что при  $r=0$ ,  $u_r^{\circ}(0) = 0$  следует, что  $C_2 = 0$ , тогда данное соотношение запишется в виде (переобозначим  $C_1$  на  $C$ ):

$$u_r^{\circ}(r) = \left( \alpha_{rr} + \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{12}}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \alpha_{\theta\theta} + \frac{\nu_{12}(\nu_{23} + 1)}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \alpha_{zz} \right) \cdot \frac{1}{r} \int_0^r Trdr + Cr. \quad (9)$$

Выражения для  $u_r^{\circ}(r)$ ,  $\sigma_{rr}^{\circ}(r)$ ,  $\sigma_{\theta\theta}^{\circ}(r)$  принимают вид:

$$u_z^{\circ}(z) = \left( \frac{\sigma_0^{\circ}(1 - \nu_{23}^{\circ} - 2\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ})}{E_1^{\circ}(1 - \nu_{23}^{\circ})} - \frac{2\nu_{21}^{\circ}C}{1 - \nu_{23}^{\circ}} + \frac{T(\nu_{21}^{\circ}\alpha_{\theta\theta}^{\circ} + \alpha_{zz}^{\circ})(1 - \nu_{23}^{\circ} - 2\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ})}{(1 - \nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ})(1 - \nu_{23}^{\circ})} \right) z, \quad (10)$$

$$\sigma_{rr}^{\circ}(r) = \frac{E_2^{\circ}}{1 - \nu_{23}^{\circ}} \left( \frac{\sigma_0^{\circ}\nu_{12}^{\circ}}{E_1^{\circ}} + C \right) + \frac{E_2^{\circ}T\nu_{12}^{\circ}(\nu_{21}^{\circ}\alpha_{\theta\theta}^{\circ} + \alpha_{zz}^{\circ})}{(1 - \nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ})(1 - \nu_{23}^{\circ})} - \frac{E_2^{\circ}}{\nu_{23}^{\circ} + 1} \cdot \left( \alpha_{rr} + \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{12}}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \alpha_{\theta\theta} + \frac{\nu_{12}(\nu_{23} + 1)}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \alpha_{zz} \right) \cdot \frac{1}{r^2} \int_0^r Trdr, \quad (11)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{\circ}(r) = \frac{E_2^{\circ}}{1 - \nu_{23}^{\circ}} \left( \frac{\sigma_0^{\circ}\nu_{12}^{\circ}}{E_1^{\circ}} + C \right) + \frac{E_2^{\circ}T((\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ} + \nu_{23}^{\circ} - 1)\alpha_{\theta\theta}^{\circ} + \nu_{12}^{\circ}\nu_{23}^{\circ}\alpha_{zz}^{\circ})}{(1 - \nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ})(1 - \nu_{23}^{\circ})} + \frac{E_2^{\circ}}{\nu_{23}^{\circ} + 1} \cdot \left( \alpha_{rr} + \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{12}}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \alpha_{\theta\theta} + \frac{\nu_{12}(\nu_{23} + 1)}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \alpha_{zz} \right) \cdot \frac{1}{r^2} \int Trdr. \quad (12)$$

Аналогично запишем соотношения, описывающие напряженно-деформированное состояние изотропной матрицы (переобозначив  $C_1$  на  $A$ ,  $C_2$  на  $B$ ):



$$u_r^*(r) = \frac{1+\nu^*}{1-\nu^*} \alpha^* \cdot \frac{1}{r} \int_a^r T r dr + Ar + \frac{B}{r}. \tag{13}$$

$$u_z^*(z) = \left( \frac{\sigma_0^* (1-\nu^* - 2(\nu^*)^2)}{E^* (1-\nu^*)} - \frac{2\nu^* A}{1-\nu^*} + \frac{T \alpha^* (1-\nu^* - 2(\nu^*)^2)}{(1-\nu^*)^2} \right) z, \tag{14}$$

$$\sigma_{rr}^*(r) = E^* \left( \frac{\sigma_0^* \nu^*}{E^* (1-\nu^*)} + \frac{A}{1-\nu^*} - \frac{B}{r^2 (\nu^* + 1)} \right) + \frac{E^* T \nu^* \alpha^*}{(1-\nu^*)^2} - \frac{E^* \alpha^*}{1-\nu^*} \cdot \frac{1}{r^2} \int_a^r T r dr; \tag{15}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^*(r) = E^* \left( \frac{\sigma_0^* \nu^*}{E^* (1-\nu^*)} + \frac{A}{1-\nu^*} + \frac{B}{r^2 (\nu^* + 1)} \right) + \frac{E^* T \cdot (2(\nu^*)^2 + \nu - 1) \alpha}{(1-\nu^*)^2 (1+\nu^*)} + \frac{E^* \alpha^*}{1-\nu^*} \cdot \frac{1}{r^2} \int_a^r T r dr. \tag{16}$$

Исходя из краевых условий (7) и (8), находим постоянные  $A$ ,  $B$  и  $C$  и зависимость между  $\sigma_0^\circ$  и  $\sigma_0^*$ . Из второго равенства (7) имеем:

$$C = A + \frac{B}{a^2} - \frac{T}{2} \cdot \left( \alpha_{rr}^\circ + \frac{\nu_{23}^\circ + \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ}{1 - \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ} \alpha_{\theta\theta}^\circ + \frac{\nu_{12}^\circ (\nu_{23}^\circ + 1)}{1 - \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ} \alpha_{zz}^\circ \right). \tag{17}$$

Из равенства (8) получается:

$$A = \frac{B(1-\nu^*)}{b^2(1+\nu^*)} - \frac{\sigma_0^* \nu^*}{E^*} - \frac{T \nu^* \alpha}{1-\nu^*} + \frac{T(1-f)\alpha^*}{2}. \tag{18}$$

Тогда (17) запишется в виде:

$$C = B \left( \frac{f(1-\nu^*) + (1+\nu^*)}{a^2(1+\nu^*)} \right) - \frac{\sigma_0^* \nu^*}{E^*} - \frac{T \nu^* \alpha^*}{1-\nu^*} + \frac{T(1-f)\alpha^*}{2} - \frac{T}{2} \cdot \left( \alpha_{rr}^\circ + \frac{\nu_{23}^\circ + \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ}{1 - \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ} \alpha_{\theta\theta}^\circ + \frac{\nu_{12}^\circ (\nu_{23}^\circ + 1)}{1 - \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ} \alpha_{zz}^\circ \right). \tag{19}$$

Из первого равенства (7), обозначив

$$d_1 = E^* (f - 1)(1 - \nu_{23}^\circ), \tag{20}$$

$$d_2 = E_2^\circ (f(1 - \nu^*) + (1 + \nu^*)), \tag{21}$$

имеем:

$$B = \frac{a^2 E_2^\circ (1 + \nu^*)}{d_1 - d_2} \left( \frac{\sigma_0^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} - \frac{\sigma_0^* \nu^*}{E^*} \right) + \frac{a^2 T \alpha^* (1 + \nu^*) (E_2^\circ (1 - 3\nu^* - f(1 - \nu^*)) + E^* (1 - \nu_{23}^\circ) (f - 1))}{2(d_1 - d_2)(1 - \nu^*)} - \frac{a^2 T E_2^\circ (1 + \nu^*) \alpha_{rr}^\circ}{d_1 - d_2}.$$

Тогда

$$C = \frac{d_2 v_{12}^\circ}{(d_1 - d_2) E_1^\circ} \sigma_0^\circ - \frac{d_1 v^*}{(d_1 - d_2) E^*} \sigma_0^* + \frac{T(\alpha^* d_1 + \alpha_{rr}^\circ d_2)}{(d_1 - d_2)} -$$

$$- \frac{T}{2} \cdot \left( \alpha_{rr}^\circ + \frac{v_{23}^\circ + v_{21}^\circ v_{12}^\circ}{1 - v_{21}^\circ v_{12}^\circ} \alpha_{\theta\theta}^\circ + \frac{v_{12}^\circ (v_{23}^\circ + 1)}{1 - v_{21}^\circ v_{12}^\circ} \alpha_{zz}^\circ \right),$$

$$A = \frac{v_{21}^\circ f (1 - v^*)}{d_1 - d_2} \sigma_0^\circ - \frac{v^* f E_2^\circ (1 - v^*) + d_1 - d_2}{E^* (d_1 - d_2)} \sigma_0^* + \frac{f T E_2^\circ (1 - v^*) (\alpha^* - \alpha_{rr}^\circ)}{d_1 - d_2} + \frac{T \alpha^* (1 - 3v^*)}{2(1 - v^*)}.$$

И наконец из третьего равенства (7) находим соотношение между  $\sigma_0^*$  и  $\sigma_0^\circ$ . Приняв

$$d^\circ = \frac{E^* (f - 1) (1 - v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ) - E_2^\circ (f (1 - v^* - 2v_{12}^\circ v^*) + (1 + v^*))}{E_1^\circ}, \quad (22)$$

$$d^* = \frac{E^* (f - 1) (1 - v_{23}^\circ - 2v^* v_{21}^\circ) - E_2^\circ (f (1 - v^* - 2(v^*)^2) + (1 + v^*))}{E^*}, \quad (23)$$

получаем

$$d^\circ \sigma_0^\circ - d^* \sigma_0^* = T \left( 2v^* f E_2^\circ \alpha_{rr}^\circ + (d_1 - d_2 - 2f E_2^\circ v^*) \alpha^* - (d_1 - d_2) \alpha_{zz}^\circ - \frac{2v_{21}^\circ d_1 (\alpha_{rr}^\circ - \alpha^*)}{(1 - v_{23}^\circ)} \right). \quad (24)$$

Рассмотрим теперь аналогичную задачу для однородного трансверсально-изотропного материала, моделирующего поведение композиционного материала. В этом случае поле напряжений будет определяться следующими соотношениями:

$$\sigma_{zz} = const, \quad \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = 0, \quad (25)$$

причем, для того, чтобы совпадали условия равновесия для обеих задач необходимо, чтобы выполнялись условия:

$$\pi a^2 \sigma_0^\circ + \pi (b^2 - a^2) \sigma_0^* = 0, \quad \text{или} \quad \sigma_0^\circ f + \sigma_0^* (1 - f) = 0. \quad (26)$$

Используя (24), получаем:

$$\sigma_0^* = \frac{\gamma T f}{d^\circ + f (d^* - d^\circ)}, \quad (27)$$

$$\sigma_0^\circ = - \frac{\gamma T (1 - f)}{d^\circ + f (d^* - d^\circ)}, \quad (28)$$

где

$$\gamma = \frac{2v_{21}^\circ d_1 (\alpha_{rr}^\circ - \alpha^*)}{(1 - v_{23}^\circ)} + (d_1 - d_2) \alpha_{zz}^\circ + 2v^* f E_2^\circ (\alpha^* - \alpha_{rr}^\circ) - \alpha^* (d_1 - d_2).$$

С учетом (25) соотношения (3) примут вид:

$$\varepsilon_{rr} = - \frac{v_{21}^\circ}{E_2} \sigma_0 + \alpha_{rr} T, \quad (29)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E_1} \sigma_0 + \alpha_{zz} T. \quad (30)$$

Тогда перемещения будут определяться формулами

$$u_r(r) = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_0 r + \alpha_{rr} Tr + C_1;$$

$$u_z(z) = \frac{1}{E_1} \sigma_0 z + \alpha_{zz} Tz + C_2.$$

Постоянные  $C_1 = C_2 = 0$  с учетом, что для рассматриваемой задачи будут выполняться условия  $u_r(0) = 0$  и  $u_z(0) = 0$ , тогда

$$u_r(r) = \alpha_{rr} Tr; \quad (31)$$

$$u_z(z) = \alpha_{zz} Tz. \quad (32)$$

Будем предполагать, что в качестве условий согласования для рассматриваемой задачи о температурном деформировании однородного композита и задачи о температурном деформировании изотропной матрицы и трансверсально-изотропного волокна будет выступать равенство осевых перемещений для произвольной осевой координаты и равенство радиальных перемещений на наружной части цилиндрической поверхности:

$$u_r(b) = u_r^*(b), \quad (33)$$

$$u_z(h) = u_z^\circ(h) = u_z^*(h). \quad (34)$$

Тогда соотношение (34) с учетом (14), (32) запишем в виде:

$$\frac{1}{1-\nu^*} \left( \frac{\sigma_0^* (1-\nu^* - 2(\nu^*)^2)}{E^*} - 2\nu^* A + \frac{T\alpha^* (1-\nu^* - 2(\nu^*)^2)}{(1-\nu^*)} \right) = \alpha_{zz} T.$$

Используя (27) и выражение для  $A$ , получим:

$$\alpha_{zz} = \frac{\gamma f d^*}{(d^\circ + f(d^* - d^\circ))(d_1 - d_2)} + \frac{2fE_2^\circ \nu^* (\alpha_{rr}^\circ - \alpha^*)}{d_1 - d_2} + \alpha^*. \quad (35)$$

Из условия (34) найдем выражение для  $\alpha_{rr}$ . Тогда

$$\frac{1+\nu^*}{1-\nu^*} \cdot \frac{\alpha^* T}{2} (1-f) + A + \frac{B}{b^2} = \alpha_{rr} T.$$

Подставив выражения для констант  $A$  и  $B$ , получим:

$$\alpha_{rr} = -\frac{Lf}{(d_1 - d_2)(d^\circ + f(d^* - d^\circ))} \left( 2\nu_{21}^\circ (1-f) + \frac{\nu^* (2fE_2^\circ + d_1 - d_2)}{E^*} \right) + \frac{2fE_2^\circ (\alpha^* - \alpha_{rr}^\circ)}{d_1 - d_2} + \alpha^*. \quad (36)$$

Определим термомеханические характеристики для волокнистого композита. Материал матрицы: модуль упругости  $E^* = 10^6$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu^* = 0,4$ , температурный коэффициент линейного расширения  $\alpha^* = 1 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>. Материал волокна: модуль упругости

$E_1^\circ = E_2^\circ = 10^9$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu_{12}^\circ = \nu_{21}^\circ = \nu_{23}^\circ = 0,3$ , температурные коэффициенты линейного расширения  $\alpha_{rr}^\circ = \alpha_{\theta\theta}^\circ = \alpha_{zz}^\circ = 1 \cdot 10^{-6}$  К<sup>-1</sup>.

Воспользовавшись формулами (35), (36) для объемного содержания волокна от 0,1 до 0,9, получим зависимости изображенные на рис. 2, 3 соответственно:

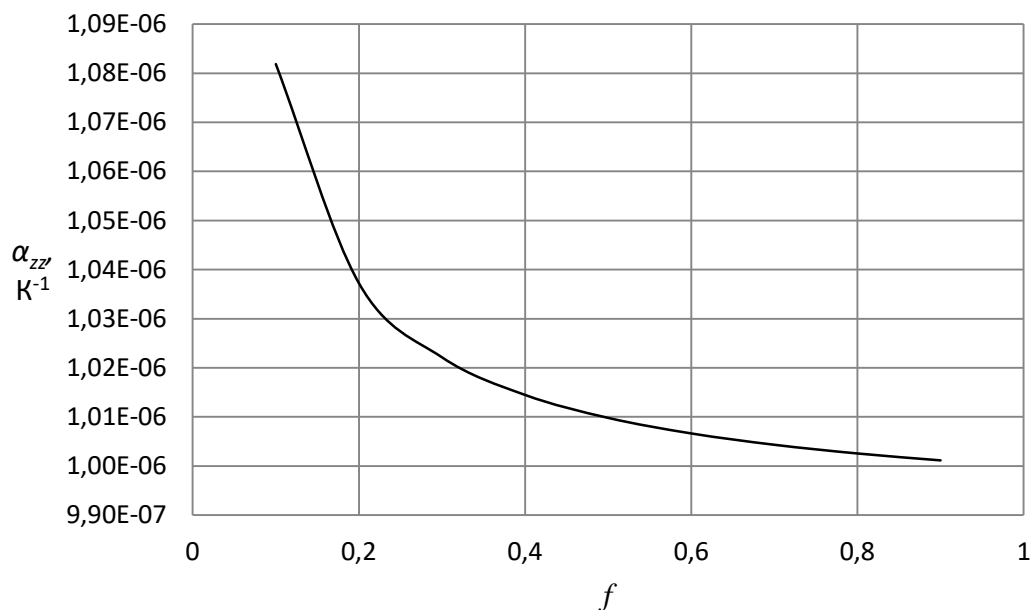


Рис. 2. Изменение коэффициента  $\alpha_{zz}$  в зависимости от объемной доли волокна

Анализируя рис. 2, можно заметить, что с увеличением объемной доли волокна в композите значение коэффициента линейного термоупругого расширения уменьшается и при  $f = 0,9$  приближается к  $1 \cdot 10^{-6}$  К<sup>-1</sup>.

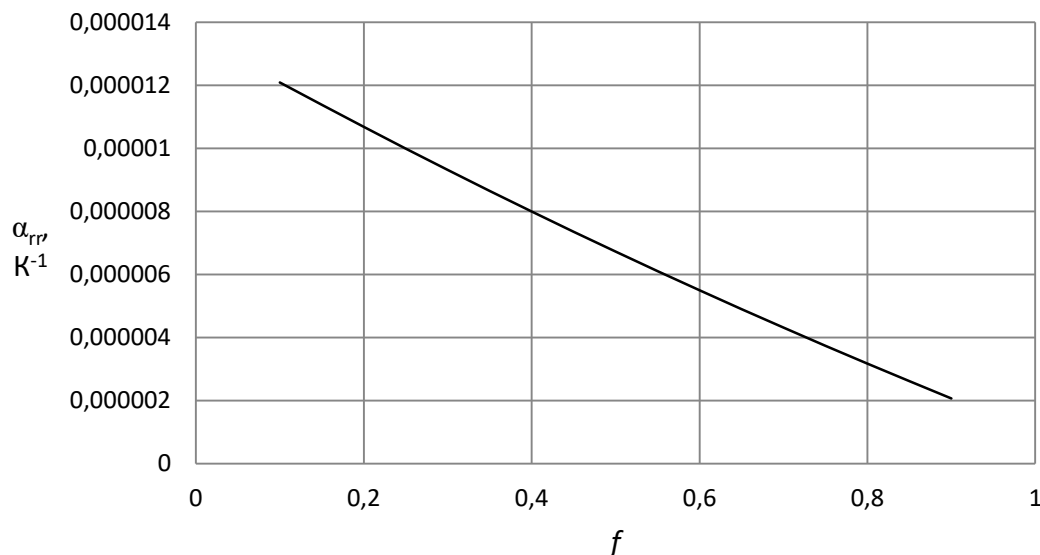


Рис. 3. Изменение коэффициента  $\alpha_{rr}$  в зависимости от объемной доли волокна

Из рис. 3. видно, что данная зависимость близка к линейной и с увеличением объемной доли волокна в композите значение коэффициента линейного термоупругого расширения уменьшается.

## ВЫВОДЫ

Предложена методика гомогенизации термоупругих характеристик однонаправленного композита с трансверсально-изотропным волокном и изотропной матрицей. Получены аналитические соотношения для температурных коэффициентов линейного расширения композита как функции характеристик его составляющих и объемной доли волокна в композите. Согласно предложенной методике проведен расчет температурных коэффициентов для композита с изотропными матрицей и волокном. Перспективы дальнейших исследований в данном направлении связаны с определением всех эффективных характеристик композиционных материалов с трансверсально-изотропными матрицей и волокном и применением их к решению задач термоупругости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Карпинос Д. М. Композиционные материалы. Справочник. Киев: Наукова думка, 1985. 593 с.
2. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. Москва: Наука, 1975. 572 с.
3. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. Москва: Мир, 1982. 336 с.
4. Бойко Л. А., Ксендзенко Л. С., Василенко Н. Ю., Басва Д. С. Зависимость температурных напряжений в компонентах стекловолокнистого композита от процентного содержания стеклянных волокон в материале. *Вестник инженерной школы ДВФУ. Строительство и технологии материалов*. 2013. № 4(17). С. 76–81.
5. Аношкин А. Н., Зуйко В. Ю., Шипунов Г. С., Третьяков А. А. Технологии и задачи механики композиционных материалов для создания лопатки спрямляющего аппарата авиационного двигателя. *Вестник ПНИПУ*. 2014.
6. Горбачев В. И. Интегральные формулы в связанной задаче термоупругости неоднородного тела. Применение в механике композитов. *Прикладная механика и математика*. 2014. Т. 78. № 2. С. 277–299.
7. Куимова Е. В., Труфанов Н. А. Численное прогнозирование эффективных термовязкоупругих характеристик однонаправленного волокнистого композита с вязкоупругими компонентами. *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия*. 2009. № 4(70). С. 129–148.
8. Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н., Савельева И. Ю. Оценка методом самосогласования эффективной теплопроводности трансверсально-изотропного композита с изотропными эллипсоидальными включениями. *Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия «Естественные науки»*. 2015. № 3(60). С. 99–110.

## REFERENCES

1. Karpinos, D. M. (1985). Composite materials. Reference book. Kiev: Naukova Dumka.
2. Timoshenko, S. P. and Goodyer, J. (1975). Theory of Elasticity. Moscow: Science.
3. Christensen, R. (1982). Introduction to Composite Mechanics. Moscow: Mir.
4. Boyko, L. A., Ksendzenko, L. S., Vasilenko, N. Yu. & Baeva, D. S. (2013). Dependence of temperature stresses in the components of a fiberglass composite on the percentage of glass fibers in a material. *Vestnik of the Engineering School of the FEFU. Building and Materials Technology*, No. 4(17), pp. 76-81.
5. Anoshkin, A. N, Zuyko, V. Yu., Shipunov, G. S. & Tretyakov A. A. (2014). Technologies and problems of the mechanics of composite materials for creating a blade of a rectifying device for an aircraft engine. *Vestnik PNIIP. Mechanika*.
6. Gorbachev, V. I. (2014). Integral formulas in the related problem of thermoelasticity of an inhomogeneous body. Application in the Mechanics of Composites. *Applied Mechanics and Mathematics*, Vol. 78, No. 2, pp. 277-299.
7. Kuimova, E. V. & Trufanov, N. A. (2009). Numerical prediction of the effective thermoviscoelastic characteristics of a unidirectional fibrous composite with viscoelastic components. *Bulletin of the SSU. Natural Science Series*, No. 4(70), pp. 129-148.
8. Zarubin, V. S., Kuvyrkin, G. N. & Savel'eva, I. Yu. (2015). Estimation of the effective thermal conductivity of a transversely isotropic composite with isotropic ellipsoidal inclusions by the method of self-correlation. *Bulletin of the Moscow State Technical University N.E. Bauman. Series "Natural Sciences"*, No. 3(60), pp. 99-110.

УДК 533.6.013.42

## КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, РАЗДЕЛЯЮЩЕЙ ИДЕАЛЬНЫЕ ЖИДКОСТИ РАЗНОЙ ПЛОТНОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ С УПРУГИМИ ОСНОВАНИЯМИ

<sup>1</sup>Кононов Ю. Н., д. ф.-м. н., профессор, <sup>2</sup>Лимарь А. А.

<sup>1</sup>Донецкий национальный университет им. Василя Стуса,  
ул. 600-летия, 21, г. Винница, 21021, Украина

<sup>2</sup>Николаевский национальный аграрный университет,  
ул. Георгия Гонгадзе, 9, г. Николаев, 54020, Украина

kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com, aleksandr1402a@mail.ru

Выведено частотное уравнение собственных колебаний упругой пластины, горизонтально разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с упругими основаниями в виде прямоугольных пластин. Рассмотрены произвольные случаи закрепления контуров пластин и различные случаи вырождения пластин. На примере отсутствия нижней жидкости и двух мембран показано, что частотное уравнение распадается на два уравнения, описывающие нечетные и четные частоты. В этом случае частотный спектр для несимметричных частот состоит из двух наборов частот, отвечающих колебаниям верхнего и нижнего основания, а частотный спектр для симметричных частот состоит из трех наборов частот, отвечающих колебаниям верхнего и нижнего основания, а также колебаниям столба жидкости как одного целого. На основании проведенных аналитических исследований сделаны общие выводы о колебании прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с упругими основаниями.

*Ключевые слова:* гидроупругость, прямоугольные упругие пластины, идеальная жидкость, плоские колебания.

## КОЛИВАННЯ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ, ЯКА РОЗДІЛЯЄ ІДЕАЛЬНІ РІДИНИ РІЗНОЇ ЩІЛЬНОСТІ В ПРЯМОКУТНОМУ КАНАЛІ З ПРУЖНИМИ ОСНОВАМИ

<sup>1</sup>Кононов Ю. М., д. ф.-м. н., професор, <sup>2</sup>Лимар О. О.

<sup>1</sup>Донецький національний університет ім. Василя Стуса,  
вул. 600-річчя, 21, м. Вінниця, 21021, Україна

<sup>2</sup>Миколаївський національний аграрний університет,  
вул. Георгія Гонгадзе, 9, м. Миколаїв, 54020, Україна

kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com, aleksandr1402a@mail.ru

Виведено частотне рівняння власних коливань пружної пластины, яка горизонтально поділяє ідеальні рідини різної щільності в прямокутному каналі з пружними основами у вигляді прямокутних пластин. Розглянуто довільні випадки закріплення контурів пластин і різні випадки виродження пластин. На прикладі відсутності нижньої рідини і двох мембран показано, що частотне рівняння розпадається на два рівняння, що описують непарні і парні частоти. У цьому випадку частотний спектр для несиметричних частот складається з двох наборів частот, що відповідають коливанням верхньої і нижньої основ, а частотний спектр для симетричних частот складається з трьох наборів частот, що відповідають коливанням верхньої і нижньої основ, а також коливань стовпа рідини як одного цілого. На підставі проведених аналітичних досліджень зроблено загальні висновки про коливання прямокутної пластины, що розділяє ідеальні рідини різної щільності в прямокутному каналі з пружними основами.

*Ключові слова:* гідропружність, прямокутні пружні пластины, ідеальна рідина, плоскі коливання.

## OSCILLATIONS OF A RECTANGULAR PLATE SEPARATING IDEAL LIQUID OF DIFFERENT DENSITY IN A RECTANGULAR CHANNEL AND AN ELASTIC BASE

<sup>1</sup>Kononov Yu. M., D.Sc. in Physics and Maths, professor, <sup>2</sup>Lymar A. A.

<sup>1</sup>Vasyl' Stus Donetsk National University,  
600-richchya str., 21, Vinnytsia, 21021, Ukraine

<sup>2</sup>Mykolayiv National Agrarian University,  
Heorhiia Honhadze str., 9, Mykolayiv, 54020, Ukraine  
kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com, aleksandr1402a@mail.ru

Was investigated the frequency equation of the natural oscillations of elastic plate, horizontally dividing the perfect liquid of varying density in a rectangular channel with an elastic bases in the form of rectangular plates. We consider an arbitrary contours the case of fixed plates and various cases of degeneration of the plates in the membrane in an absolutely rigid, the lack of one of the plates, no top or bottom of the liquid. For example, the lack of a lower fluid and the two membranes shows that the frequency equation splits into two equations describing the odd and even frequency. In this case, the frequency spectrum of frequencies for asymmetrical consists of two sets of frequencies corresponding to oscillations of the upper and lower bases, and the frequency spectrum of frequencies for symmetrical consists of three sets of frequencies corresponding to oscillations of the upper and lower bases as well as fluctuations of the liquid column as a whole. On the basis of analytical studies to draw general conclusions about the oscillations of a rectangular plate that separates the ideal liquid of different density in a rectangular channel with an elastic foundation.

Consider a flat oscillations of an elastic rectangular plate horizontally separating ideal incompressible heavy fluid of different density in a hard rectangular channel with elastic top and bottom of the base. Elastic bases are presented in the form of rectangular plates. All three plates are considered to be thin and isotropic. The plates are under an action of tensile forces acting on a middle surface. The contours of the plates can be clamped, simply supported or free. The movement of the liquid is potential. The problem is considered in the linear formulation. Plates bending problem is represented as a sum of static and dynamic bending. Joint oscillations of plates and liquid are considered unseparated. Spectral problem is represented as a system of three inhomogeneous equations. These equations govern coupled vibrations of plates and liquid. The general solution to each equation is the sum of the general solution of the related homogeneous equation and the particular solution of inhomogeneous. Mechanical parameters of the plates and the density of the liquid define the general solution of the homogeneous equation which contains an unknown frequency. Particular solution of the inhomogeneous equation takes the form of a series expansion in the eigenfunctions of ideal liquid oscillation in the rectangular channel. From the condition of fixing of contours of the plates, compatibility condition and condition of incompressibility of the liquid follows the frequency equation of natural oscillations of plate, elastic bases and the ideal liquid. In general this transcendental equation takes the form of a determinant of the fifteenth order. On the basis of analytical investigations it may be concluded that:

1. Clamped plates or membranes frequency equation is divided into odd and even frequency.
2. The equation for the even more complex frequency. It includes a main part of the equation for odd frequencies recorded for the even indices, as well as the oscillations of the liquid column as one whole.
4. The frequency spectrum of asymmetric oscillations consists of three sets of frequencies corresponding to oscillations of three plates.
5. The frequency spectrum of the symmetric oscillations is comprised of four sets of frequencies corresponding to oscillations of the three plates of the liquid column as one whole.

*Key words: hydroelasticity, rectangular elastic plates, ideal liquid, plane oscillations.*

### ВВЕДЕНИЕ

Задача о колебании прямоугольной пластины, горизонтально разделяющей идеальные несжимаемые жидкости разной плотности в жестком прямоугольном канале, с учетом свободной поверхности у верхней жидкости, по-видимому, впервые была исследована в [1] на основании единого Лагранжевого подхода. В работе [2] эта задача была рассмотрена на основании Эйлера подхода. Наиболее полное исследование свободных колебаний мембраны на свободной поверхности жидкости в прямоугольном канале было проведено в статье [3]. В работе [4] эта задача была обобщена на случай двухслойной жидкости с мембранами на свободной и внутренней поверхностях, а в статье [5] – на случай упругого дна. Колебания мембраны, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жесткими основаниями, были подробно исследованы в работе [6], а

колебания пластины – в [7]. Вопросы устойчивости колебаний прямоугольной пластины, разделяющей жидкости разной плотности в жестком прямоугольном канале, были исследованы в [7-9]. В статье [10] исследованы осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре. В работе [11] сделана общая постановка задачи о колебании упругой пластинки, разделяющей жидкости в цилиндрическом сосуде с упругими основаниями. Из последних работ ближнего зарубежья следует отметить статьи [12-14], в которых рассматриваются осесимметричные колебания двухслойной жидкости в цилиндрическом резервуаре применительно к проблеме капиллярных фазоразделителей.

В данной статье, на основе общего подхода, предложенного в [11], исследована задача о плоских колебаниях упругой пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в жестком прямоугольном канале с упругим нижним и верхним основаниями. Данная задача обобщает результаты работ [6-9] на случай двух упругих оснований. В статье выведено частотное уравнение собственных совместных колебаний упругих пластин и жидкости, рассмотрены произвольные случаи закрепления контуров пластин, различные случаи вырождения пластин в абсолютно жесткие мембраны, отсутствие одной из пластин, отсутствие верхней или нижней жидкости. Показано, что частотное уравнение распадается на два уравнения, описывающие нечетные и четные частоты. Частотный спектр для несимметричных частот состоит из трех наборов частот, отвечающих колебаниям трех пластин, а частотный спектр для симметричных частот состоит из четырех наборов частот, отвечающих колебаниям пластин и колебаниям столба жидкости как одного целого.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоские колебания упругой прямоугольной пластины, горизонтально разделяющей идеальные несжимаемые жидкости плотности  $\rho_i$  ( $i=1,2$ ) в жестком прямоугольном канале с упругими основаниями в виде прямоугольных пластин. Все три пластины будем считать изотропными, с постоянной изгибной жесткостью  $D_i$  и растягивающими усилиями  $T_i$  в срединной поверхности ( $i=\overline{1,3}$ ). Индекс  $i=1$  будет соответствовать верхней пластине,  $i=2$  – внутренней, а  $i=3$  – нижней пластине. Ширину канала обозначим через  $2a$ . Контур пластины могут быть защемлены, оперты или свободны. Верхняя жидкость плотности  $\rho_1$  заполняет сосуд до глубин  $h_1$ , а нижняя жидкость плотности  $\rho_2$  до  $-h_2$ . Систему координат  $Oxuz$  расположим так, чтобы плоскость  $Oxy$  находилась на невозмущенной срединной поверхности внутренней пластины, ось  $Oy$  была направлена вдоль канала, а ось  $Oz$  – противоположно вектору ускорения силы тяжести  $\vec{g}$ . Колебания пластин и жидкости будем рассматривать в линейной постановке, считая совместные колебания пластин и жидкости безотрывными, а движения жидкостей потенциальными.

Уравнения движения рассматриваемой механической системы имеют вид [2, 4-7, 11]

$$k_{0i} \frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2} + D_i \frac{\partial^4 W_i}{\partial x^4} - T_i \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} = P_i - P_{i-1} \quad \text{при } z = z_i \quad (i = \overline{1,3}), \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} = 0, \quad (i = 1, 2), \quad (2)$$

с учетом следующих граничных условий:

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \quad \text{при } z = h_1, \quad \frac{\partial W_2}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \quad \text{при } z = 0, \quad (3)$$



$$\frac{\partial W_3}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -h_2, \quad (4)$$

$$\left( \mathcal{L}_{jp} [W_i] \right) \Big|_{\gamma_j} = 0, \quad (i = \overline{1,3}; j, p = 1, 2), \quad (5)$$

$$\int_{-a}^a W_1 dx = \int_{-a}^a W_2 dx = \int_{-a}^a W_3 dx, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \Big|_{\gamma_j} = 0, \quad (i, j = 1, 2). \quad (7)$$

Здесь  $W_i, \rho_{0i}, \delta_{0i}$  – соответственно нормальный прогиб, плотность и толщина  $i$ -ой пластины,  $k_{0i} = \rho_{0i} \cdot \delta_{0i}$  ( $i = \overline{1,3}$ );  $\Phi_i(x, y, z, t)$  – потенциал скоростей  $i$ -ой жидкости ( $i = 1, 2$ );  $P_i(x, y, t)$  – гидродинамическое давление в  $i$ -ой жидкости;  $P_0(x, t)$  и  $P_3(x, t)$  – соответственно

внешнее давление на верхнее и нижнее основания;  $z_i = \begin{cases} h_1 & \text{при } i = 1, \\ 0 & \text{при } i = 2, \\ -h_2 & \text{при } i = 3 \end{cases}$ ;  $\mathcal{L}_{j1}$  и  $\mathcal{L}_{j2}$  –

дифференциальные операторы граничных условий закрепления пластины на контуре  $\gamma_j$  ( $j = 1, 2$ ). Здесь для удобства записи введено обозначение контуров через  $\gamma_j$  (индекс  $j = 1$  соответствует контуру  $x = -a$ , а  $j = 2$  –  $x = a$ ). Так, например, для наиболее интересного случая жесткого защемления пластины оператор  $\mathcal{L}_{j1}$  будет единичным, а  $\mathcal{L}_{j2} = \frac{d}{dx}$ .

Гидродинамическое давление  $P_i(x, z, t)$  находится из интеграла Коши-Лагранжа  $\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + gz + \frac{P_i}{\rho_i} = Q_i$ , где  $Q_i$  – произвольные функции времени, которые подлежат определению. С учетом интеграла Коши-Лагранжа уравнение (1) можно записать следующим образом

$$k_{0i} \frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2} + D_i \frac{\partial^4 W_i}{\partial x^4} - T_i \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + g \Delta \rho_i W_i = \left( \rho_{i-1} \frac{\partial \Phi_{i-1}}{\partial t} - \rho_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \right) \Big|_{z=z_i} + gz_i \Delta \rho_i + \rho_i Q_i - \rho_{i-1} Q_{i-1} - \delta_{i1} P_0 + \delta_{i3} P_3, \quad (i = \overline{1,3}), \quad (8)$$

где  $\Delta \rho_i = \rho_i - \rho_{i-1}$  ( $\rho_0 = \rho_3 = 0$ );  $\delta_{ik}$  – символ Кронекера.

### МЕТОД РЕШЕНИЯ

Представим нормальный прогиб пластин  $W_i$  в виде суммы динамического и статического прогибов

$$W_i = W_{id} + W_{is} \quad (i = \overline{1,3}). \quad (9)$$

Статический прогиб находится из следующей краевой задачи:

$$k_{0i} \frac{\partial^2 W_{is}}{\partial t^2} + D_i \frac{\partial^4 W_{is}}{\partial x^4} - T_i \frac{\partial^2 W_{is}}{\partial x^2} + g \Delta \rho_i W_{is} = \Delta C_i, \quad (10)$$

$$\left( \mathcal{L}_{jp} w_i \right) \Big|_{\gamma_j} = 0, \quad (i = \overline{1,3}; j, p = 1, 2), \quad (11)$$

$$\int_{-a}^a W_{1s} dx = \int_{-a}^a W_{2s} dx = \int_{-a}^a W_{3s} dx, \quad (12)$$

где  $\Delta C_i = C_i - C_{i-1}$  ( $C_0 = C_3 = 0$ )  $C_1$ . Константы  $C_1$  и  $C_2$  являются неизвестными и подлежат определению.

Для определения динамического прогиба  $W_{id}(x, t)$  потенциал скоростей жидкости  $\Phi_i(x, z, t)$  представим в виде обобщенного ряда Фурье по собственным функциям  $\psi_n(x)$

$$\Phi_i = a_{0i} + a_{1i}z + \sum_{n=1}^{\infty} (A_{in} e^{k_n z} + B_{in} e^{-k_n z}) \psi_n(x). \quad (13)$$

Здесь функции

$$\psi_n(x) = \cos k_n(x+a), \quad (14)$$

а соответствующие им собственные числа  $k_n = \frac{\pi n}{2a}$  описывают колебания идеальной жидкости в прямоугольном канале. Представление функций  $\Phi_i(x, z, t)$  в виде (13) позволяет удовлетворить уравнению (2) и граничным условиям (7). Коэффициенты  $a_{0i}$ ,  $a_{1i}$ ,  $A_{in}$  и  $B_{in}$  являются функциями времени. Следует отметить, что в выражении (13) входят слагаемые  $a_{0i}$  и  $a_{1i}z$ , которые возникают из-за статического прогиба пластин и возможности вертикальных колебаний столба жидкости как одного целого. Это происходит из-за того, что все пластинки считаются упругими. Если одна из пластин становится жесткой, то задача существенно упрощается, так как отсутствует статический прогиб пластин и возможность вертикальных колебаний столба жидкости.

Из граничных условий (3)-(4), условий несжимаемости жидкости (6) и ортогональности функции  $\psi_n$  вытекают следующие соотношения:

$$\begin{aligned} A_{1n} &= \frac{\ddot{W}_{1n} - \ddot{W}_{2n} e^{-\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh \kappa_{1n}}, & B_{1n} &= \frac{\ddot{W}_{1n} - \ddot{W}_{2n} e^{\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh \kappa_{1n}}, \\ A_{2n} &= \frac{\ddot{W}_{2n} e^{\kappa_{2n}} - \ddot{W}_{3n}}{2k_n \sinh \kappa_{2n}}, & B_{2n} &= \frac{\ddot{W}_{2n} e^{-\kappa_{2n}} - \ddot{W}_{3n}}{2k_n \sinh \kappa_{2n}}. \end{aligned} \quad (15)$$

$$a_{11} = a_{12} = \dot{W}.$$

Здесь

$$W_{in} = \frac{1}{N_n^2} \int_{-a}^a W_i \psi_n dx, \quad (16)$$

$$W = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a W_{1d} dx = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a W_{2d} dx = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a W_{3d} dx, \quad (17)$$

$$N_n^2 = \int_{-a}^a \psi_n^2 dx = a, \quad \kappa_{in} = h_i k_n.$$

На основании выведенных соотношений (15) и представления (16)-(17), запишем систему интегро-дифференциальных уравнений для определения динамического прогиба  $W_{id}(x, t)$  ( $i = \overline{1,3}$ )

$$k_{0i} \frac{\partial^2 W_{id}}{\partial t^2} + D_i \frac{\partial^4 W_{id}}{\partial x^4} - T_i \frac{\partial^2 W_{id}}{\partial x^2} + g \Delta \rho_i W_{id} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} (b_{i-1,n} \ddot{W}_{i-1,n} - a_{in} \ddot{W}_{in} + b_{in} \ddot{W}_{i+1,n}) \psi_n + \Delta Q_i^* - \delta_{i,1,3} \ddot{W} - \delta_{i1} P_0 + \delta_{i3} P_3, \quad (18)$$

где  $b_{in} = \rho_i / \sinh \kappa_{in}$ ,  $\Delta Q_i^* = \rho_i Q_i^* - \rho_{i-1} Q_{i-1}^*$ ,  $Q_i^* = Q_i - \dot{a}_{0i}$ ,  $\delta_{i,1,3} = \rho_1 h_1 \delta_{i1} + \rho_2 h_2 \delta_{i3}$ ,  $a_{in} = \rho_i \coth \kappa_{in} + \rho_{i-1} \coth \kappa_{i-1n}$ .

Таким образом, совместные колебания упругих пластин и жидкости находятся из интегро-дифференциальных уравнений (17)-(18), граничных условий (5) и статической задачи (10)-(12).

### ВЫВОД ЧАСТОТНОГО УРАВНЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ СОВМЕСТНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ПЛАСТИН И ЖИДКОСТИ

Для нахождения собственных частот совместных колебаний упругих пластин и жидкости положим  $P_0 = P_3 = 0$  и

$$W_{id}(x, y, t) = w_i(x, y) e^{i\omega t}, \quad W = w e^{i\omega t}, \quad Q_i^* = \omega^2 \tilde{Q}_i e^{i\omega t}. \quad (19)$$

В выражениях (19) следует различать нижний индекс  $i = \overline{1,3}$  от мнимой единицы  $i$  в показателе степени экспоненты.

Подставив (19) в (16)-(18) и граничные условия (5), получим:

$$D_i \frac{d^4 w_i}{dx^4} - T_i \frac{d^2 w_i}{dx^2} + (g \Delta \rho_i - k_{0i} \omega^2) w_i = \omega^2 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} (-b_{i-1,n} w_{i-1,n} + a_{in} w_{in} - b_{in} w_{i+1,n}) \psi_n + \Delta \tilde{Q}_i + \delta_{i,1,3} w \right], \quad (i = \overline{1,3}), \quad (20)$$

$$w_{in} = \frac{1}{a} \int_{-a}^a w_i \psi_n dx, \quad (21)$$

$$w = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a w_1 dx = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a w_2 dx = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a w_3 dx, \quad (22)$$

$$(\mathcal{L}_{jp} [w_i])|_{\gamma_j} = 0, \quad (i = \overline{1,3}; j, p = 1, 2). \quad (23)$$

Здесь  $\Delta \tilde{Q}_i = \rho_i \tilde{Q}_i - \rho_{i-1} \tilde{Q}_{i-1}$ .

Общее решение уравнения (20) будем искать в виде линейной комбинации четырех независимых решений  $w_{ik}^0$  соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного

$$w_i = \sum_{k=1}^4 A_{ik}^0 w_{ik}^0 + \omega^2 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_{i-1,n} w_{i-1,n} + a_{in} w_{in} - b_{in} w_{i+1,n}}{k_n d_{in}} \psi_n + (\Delta \tilde{Q}_i + \delta_{i13} w) \tilde{k}_{0i} \right], \quad (i = \overline{1,3}). \quad (24)$$

Подставив (24) в (21) и разрешив полученную систему относительно  $w_{in}$ , будем иметь

$$w_i = \sum_{k=1}^4 A_{ik}^0 w_{ik}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_{in} \psi_n + (\Delta \tilde{Q}_i + \delta_{i13} w) \tilde{k}_{0i}, \quad (25)$$

где  $\tilde{C}_{in}$  координаты вектора  $\tilde{C}_n = (D_n^{-1} T_n - E) A_n$  ( $i = \overline{1,3}$ ),  $T_n$  – диагональная матрица с элементами  $T_{in}$ ,  $E$  – единичная матрица, вектор  $A_n$  состоит из элементов  $A_{in}$

$$A_{in} = \sum_{k=1}^4 A_{ik}^0 E_{ikn}^0, \quad (26)$$

$$D_n^{-1} = \frac{1}{\Delta_n} \begin{pmatrix} \tilde{T}_{2n} \tilde{T}_{3n} - b_{2n}^2 & -b_{1n} \tilde{T}_{3n} & b_{1n} b_{2n} \\ -b_{1n} \tilde{T}_{3n} & \tilde{T}_{1n} \tilde{T}_{3n} & -\tilde{T}_{1n} b_{2n} \\ b_{1n} b_{2n} & -\tilde{T}_{1n} b_{2n} & \tilde{T}_{1n} \tilde{T}_{2n} - b_{1n}^2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{T}_{in} = T_{in} - a_{in},$$

$$T_{in} = \frac{k_n d_{in}}{\omega^2}, \quad d_{in} = (D_i k_n^2 + T_i) k_n^2 + g \Delta \rho_i - k_{0i} \omega^2, \quad \tilde{k}_{0i} = \frac{\omega^2}{g \Delta \rho_i - k_{0i} \omega^2},$$

$$E_{ikn}^0 = \frac{1}{a} \int_{-a}^a w_{ik}^0 \psi_n dx. \quad (27)$$

С учетом (25) и (26) окончательное выражение для формы колебаний  $i$ -ой пластинки примет вид

$$w_i = \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^4 \left( w_{ik}^0 \delta_{il} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{iln} E_{lkn}^0 \psi_n \right) A_{ik}^0 + (\Delta \tilde{Q}_i + \delta_{i,1,3} w) \tilde{k}_{0i}. \quad (28)$$

Здесь  $a_{iln}$  элементы матрицы  $D_n^{-1} T_n - E$

$$a_{11n} = \frac{1}{\Delta_n} \left[ (\tilde{T}_{2n} \tilde{T}_{3n} - b_{2n}^2) a_{1n} + b_{1n}^2 \tilde{T}_{3n} \right], \quad a_{12n} = -\frac{1}{\Delta_n} T_{2n} \tilde{T}_{3n} b_{1n}, \quad a_{13n} = \frac{1}{\Delta_n} T_{3n} b_{1n} b_{2n},$$

$$a_{21n} = -\frac{1}{\Delta_n} T_{1n} \tilde{T}_{3n} b_{1n}, \quad a_{22n} = \frac{1}{\Delta_n} (\tilde{T}_{1n} \tilde{T}_{3n} a_{2n} + b_{1n}^2 \tilde{T}_{3n} + b_{2n}^2 \tilde{T}_{1n}), \quad a_{23n} = -\frac{1}{\Delta_n} \tilde{T}_{1n} T_{3n} b_{2n}, \quad (29)$$

$$a_{31n} = \frac{1}{\Delta_n} T_{1n} b_{1n} b_{2n}, \quad a_{32n} = -\frac{1}{\Delta_n} \tilde{T}_{1n} T_{2n} b_{2n}, \quad a_{33n} = \frac{1}{\Delta_n} \left[ (\tilde{T}_{1n} \tilde{T}_{2n} - b_{1n}^2) a_{3n} + b_{2n}^2 \tilde{T}_{1n} \right],$$

$$a_{1n} = \rho_1 \coth \kappa_{1n}, \quad a_{3n} = \rho_2 \coth \kappa_{2n}, \quad a_{2n} = a_{1n} + a_{3n} = a_n,$$

$$\Delta_n = \tilde{T}_{1n} \tilde{T}_{2n} \tilde{T}_{3n} - b_{2n}^2 \tilde{T}_{1n} - b_{1n}^2 \tilde{T}_{3n}.$$

В формулу (28) входит 15 неизвестных констант:  $\tilde{Q}_1$ ,  $\tilde{Q}_2$ ,  $w$  и 12 констант  $A_{ik}^0$ . Из граничных условий закрепления пластин (23) имеем 12 линейных уравнений

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^4 \left( \mathcal{L}_{ijpk}^0 \delta_{il} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{iln} E_{lkn}^0 \mathcal{L}_{jpn} \right) A_{ik}^0 + (\Delta \tilde{Q}_i + \delta_{i,1,3} w) \tilde{k}_{0i} \tilde{\mathcal{L}}_{jp} = 0, \quad (30)$$

где

$$\mathcal{L}_{jpk}^0 = \left( \mathcal{L}_{jp} [w_k^0] \right) \Big|_{\gamma_j}, \quad \mathcal{L}_{jpn} = \left( \mathcal{L}_{jp} [\psi_n] \right) \Big|_{\gamma_j}, \quad \tilde{\mathcal{L}}_{jp} = \left( \mathcal{L}_{jp} [1] \right) \Big|_{\gamma_j}, \quad (i = \overline{1,3}; j, p = 1, 2).$$

Подставив (28) в (22), получим следующие два линейно независимых уравнения:

$$\sum_{k=1}^4 \left( \tilde{w}_{1k}^0 A_{1k}^0 - \tilde{w}_{2k}^0 A_{2k}^0 \right) + \tilde{k}_{01} \rho_1 h_1 w + \rho_1 \left( \tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02} \right) \tilde{Q}_1 - \rho_2 \tilde{k}_{02} \tilde{Q}_2 = 0, \quad (31)$$

$$\sum_{k=1}^4 \left( \tilde{w}_{1k}^0 A_{1k}^0 - \tilde{w}_{3k}^0 A_{3k}^0 \right) + \left( \rho_1 h_1 \tilde{k}_{01} + \rho_2 h_2 \tilde{k}_{03} \right) w + \rho_1 \tilde{k}_{01} \tilde{Q}_1 - \rho_2 \tilde{k}_{03} \tilde{Q}_2 = 0,$$

где

$$\tilde{w}_{ik}^0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a w_{ik}^0 dx. \quad (32)$$

Из (28) и (22) следует последнее недостающее уравнение

$$\sum_{k=1}^4 \tilde{w}_{1k}^0 A_{1k}^0 + \left( \rho_1 h_1 \tilde{k}_{01} - 1 \right) w + \rho_1 \tilde{k}_{01} \tilde{Q}_1 = 0. \quad (33)$$

Таким образом, собственные частоты и формы совместных колебаний упругих пластин и идеальной жидкости определяются из линейной однородной системы (30)-(31) и (33). Из равенства нулю определителя этой системы следует частотное уравнение

$$\left\| \left\| C_{qr} \right\|_{q,r=1}^{15} \right\| = 0. \quad (34)$$

где

$$C_{qk} = \mathfrak{L}_{ijpk}^0 \delta_{i1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathfrak{L}_{jpn}, \quad C_{q,k+4} = \mathfrak{L}_{ijpk}^0 \delta_{i2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathfrak{L}_{jpn},$$

$$C_{q,k+8} = \mathfrak{L}_{ijpk}^0 \delta_{i3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i3n} E_{3kn}^0 \mathfrak{L}_{jpn}, \quad C_{q,13} = \rho_{1i} \tilde{k}_{0i} \tilde{\mathfrak{L}}_{jp}, \quad C_{q,14} = \rho_{2i} \tilde{k}_{0i} \tilde{\mathfrak{L}}_{jp}, \quad (35)$$

$$C_{q,15} = \delta_{i,1,3} \tilde{k}_{0i} \tilde{\mathfrak{L}}_{jp}, \quad (q = \overline{1, i \cdot p \cdot j}; \quad i = \overline{1, 3}; \quad j, p = \overline{1, 2}; \quad k = \overline{1, 4}),$$

$$C_{13,k} = \tilde{w}_{1k}^0, \quad C_{13,k+4} = -\tilde{w}_{2k}^0, \quad C_{13,k+8} = 0, \quad C_{13,13} = \rho_1 \left( \tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02} \right), \quad C_{13,14} = -\rho_2 \tilde{k}_{02}, \quad C_{13,15} = \rho_1 h_1 \tilde{k}_{01},$$

$$C_{14,k} = \tilde{w}_{1k}^0, \quad C_{14,k+4} = 0, \quad C_{14,k+8} = -\tilde{w}_{3k}^0, \quad C_{14,13} = \rho_1 \tilde{k}_{01}, \quad C_{14,14} = -\rho_2 \tilde{k}_{03}, \quad C_{14,15} = \rho_1 h_1 \tilde{k}_{01} + \rho_2 h_2 \tilde{k}_{03},$$

$$C_{15,k} = \tilde{w}_{1k}^0, \quad C_{15,k+4} = 0, \quad C_{15,k+8} = 0, \quad C_{15,13} = \rho_1 \tilde{k}_{01}, \quad C_{15,14} = 0, \quad C_{15,15} = \rho_1 h_1 \tilde{k}_{01} - 1, \quad (k = \overline{1, 4}),$$

$$\rho_{1i} = \begin{cases} \rho_1, & i = 1, \\ -\rho_1, & i = 2, \\ 0, & i = 3. \end{cases} \quad \rho_{2i} = \begin{cases} 0, & i = 1, \\ \rho_2, & i = 2, \\ -\rho_2, & i = 3. \end{cases}$$

Собственные формы колебаний будут найдены из линейной однородной системы (30)-(33) и соотношений (28).

Таким образом, рассматриваемая задача имеет бесконечный дискретный спектр собственных значений  $\omega_l^2$  с единственной предельной точкой на бесконечности, а соответствующие им собственные функции  $w_l$  образуют полную и ортогональную систему функций на отрезке  $[-a, a]$ . Однако, следует отметить, что при определенных соотношениях параметров, рассматриваемой механической системы, частотное уравнение (34) может не иметь

положительных корней и равновесная форма упругих пластин может быть неустойчивой. Так, например, если нижнее основание становится абсолютно жестким, то плоская форма равновесия пластины, разделяющей жидкости, может быть неустойчивой [1-2, 7-9].

Частотное уравнение (34) является довольно общим, т.к. позволяет рассматривать различные случаи закрепления контуров пластин, случаи вырождения пластин в мембраны, в абсолютно жесткие, их отсутствие (наличие свободной поверхности или поверхности раздела жидкостей), отсутствие верхней или нижней жидкости. Если обозначить через  $N$  порядок определителя уравнения (34), то при вырождении одной, двух или трех пластин в мембраны значение  $N$  соответственно будет равно 13, 11 и 9. При отсутствии верхнего основания (наличие свободной поверхности)  $N=11$ . Если отсутствует пластина, разделяющая жидкости разной плотности, то  $N=10$  ( $\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_2$ ,  $A_{2k}^0 = 0$ ). В этом случае можно рассмотреть задачу о влиянии стратификации (разделение жидкости на слои различной плотности) на собственные частоты колебаний упругих оснований. Как было отмечено ранее, наибольшее упрощение рассматриваемой задачи и соответственно частотного уравнения (34) происходит, когда одна из пластин становится жесткой. В этом случае отпадает необходимость в решении статической задачи ( $W_{is} \equiv 0$ ), отсутствуют вертикальные колебания столба жидкости как одного целого ( $a_{0i} \equiv 0$ ,  $a_{1i} \equiv 0$ ), функции  $Q_1(t)$  и  $Q_2(t)$  можно считать равными нулю и порядок определителя частотного уравнения  $N=8$ .

### НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ

**Нижнее основание абсолютно жесткое** ( $T_3 = \infty$  или  $D_3 = \infty$ ). Переходя к пределу в формулах (29) при  $T_3 \rightarrow \infty$ , получим

$$\begin{aligned} a_{11n} &= \frac{1}{\Delta_n} (\tilde{T}_{2n} a_{1n} + b_{1n}^2), & a_{12n} &= -\frac{1}{\Delta_n} T_{2n} b_{1n}, & a_{13n} &= \frac{1}{\Delta_n} b_{1n} b_{2n}, \\ a_{21n} &= -\frac{1}{\Delta_n} T_{1n} b_{1n}, & a_{22n} &= \frac{1}{\Delta_n} (\tilde{T}_{1n} a_{2n} + b_{1n}^2), & a_{23n} &= -\frac{1}{\Delta_n} T_{1n} b_{2n}, \\ a_{31n} &= 0, & a_{32n} &= 0, & a_{33n} &= 0, & \Delta_n &= \tilde{T}_{1n} \tilde{T}_{2n} - b_{1n}^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Из соотношений (28) и (36) будем иметь

$$\begin{aligned} w_1 &= \sum_{k=1}^4 \left[ \left( w_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E_{1kn}^0 \psi_n \right) A_{1k}^0 + \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{1kn}^0 \psi_n \right) A_{2k}^0 \right], \\ w_2 &= \sum_{k=1}^4 \left[ \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{2kn}^0 \psi_n \right) A_{1k}^0 + \left( w_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{2kn}^0 \psi_n \right) A_{2k}^0 \right], \\ w_3 &\equiv 0. \end{aligned} \quad (37)$$

В этом случае в определителе уравнения (34) нужно вычеркнуть 9–15 строки и 9–15 столбцы.

**Верхнее основание абсолютно жесткое** ( $T_1 = \infty$  или  $D_1 = \infty$ ). Переходя к пределу в формулах (29) при  $T_1 \rightarrow \infty$ , получим

$$\begin{aligned} a_{11n} &= 0, & a_{12n} &= 0, & a_{13n} &= 0, \\ a_{21n} &= -\frac{1}{\Delta_n} \tilde{T}_{3n} b_{1n}, & a_{22n} &= \frac{1}{\Delta_n} (\tilde{T}_{3n} a_{2n} + b_{2n}^2), & a_{23n} &= -\frac{1}{\Delta_n} T_{3n} b_{2n}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$a_{31n} = \frac{1}{\Delta_n} b_{1n} b_{2n}, \quad a_{32n} = -\frac{1}{\Delta_n} T_{2n} b_{2n}, \quad a_{33n} = \frac{1}{\Delta_n} (\tilde{T}_{2n} a_{3n} + b_{2n}^2),$$

$$\Delta_n = \tilde{T}_{2n} \tilde{T}_{3n} - b_{2n}^2.$$

Из формул (28) и (38) следует, что

$$w_1 \equiv 0,$$

$$w_2 = \sum_{k=1}^4 \left[ \left( w_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{2kn}^0 \psi_n \right) A_{2k}^0 + \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{2kn}^0 \psi_n \right) A_{3k}^0 \right], \quad (39)$$

$$w_3 = \sum_{k=1}^4 \left[ \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_{32n} E_{2kn}^0 \psi_n \right) A_{2k}^0 + \left( w_{3k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{33n} E_{3kn}^0 \psi_n \right) A_{3k}^0 \right].$$

В этом случае в определителе уравнения (34) нужно вычеркнуть 1–4, 13–15 строки и 1–4, 13–15 столбцы.

Как и следовало ожидать, формулы (36)-(37) и (38)-(39) совпадают с соответствующими формулами статьи [9], а если будут жесткими и верхнее и нижнее основания ( $T_1 = \infty$  и  $T_3 = \infty$ ), то эти формулы совпадают с соответствующими формулами статьи [7].

**Случай отсутствия нижней жидкости ( $\rho_2 = 0$ ).** Из соотношений (28) будем иметь

$$w_1 = \sum_{k=1}^4 \left[ \left( w_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E_{1kn}^0 \psi_n \right) A_{1k}^0 + \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{1kn}^0 \psi_n \right) A_{2k}^0 \right] + \rho_1 \tilde{k}_{01} \tilde{Q}_1 + \rho_1 h_1 \tilde{k}_{01} w,$$

$$w_2 = \sum_{k=1}^4 \left[ \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{2kn}^0 \psi_n \right) A_{1k}^0 + \left( w_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{2kn}^0 \psi_n \right) A_{2k}^0 \right] - \rho_1 \tilde{k}_{02} \tilde{Q}_1.$$

В этом случае в определителе уравнения (34) нужно вычеркнуть 9–12, 14 строки и 9–12, 14 столбцы, а в соотношениях (35) положить  $\rho_2 = 0$ . Частотное уравнение запишется так

$$\left\| \left\| C_{qr} \right\|_{q,r=1}^{10} \right\| = 0. \quad (40)$$

$$C_{qk} = \mathfrak{L}_{ijk}^0 \delta_{i1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathfrak{L}_{jpn}, \quad C_{q,k+4} = \mathfrak{L}_{ijk}^0 \delta_{i2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathfrak{L}_{jpn}, \quad C_{q,9} = (-1)^{i+1} \rho_1 \tilde{k}_{0i} \tilde{\mathfrak{L}}_{jp},$$

$$C_{q,10} = (2-i) \rho_1 h_1 \tilde{k}_{01} \tilde{\mathfrak{L}}_{jp}, \quad (q = \overline{1, i \cdot p \cdot j}; i, j, p = 1, 2; k = \overline{1, 4}), \quad (41)$$

$$C_{9,k} = \tilde{w}_{1k}^0, \quad C_{9,k+4} = -\tilde{w}_{2k}^0, \quad C_{9,9} = \rho_1 (\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02}), \quad C_{9,10} = \rho_1 h_1 \tilde{k}_{01} C_{10,k} = \tilde{w}_{1k}^0,$$

$$C_{10,k+4} = 0, \quad C_{9,9} = \rho_1 \tilde{k}_{01}, \quad C_{10,10} = \rho_1 h_1 \tilde{k}_{01} - 1, \quad (k = \overline{1, 4}).$$

В случае отсутствия верхней жидкости ( $\rho_1 = 0$ ) следует провести аналогичные преобразования в определителе уравнения (34).

Операторы  $\mathfrak{L}_{jp}$  и значения функций  $\mathfrak{L}_{jpn}$  для заземленного, опертого и свободного края имеют вид [7]:

защемленный край –

$$\mathcal{L}_{j1} \equiv 1, \mathcal{L}_{j2} = \frac{d}{dx}, \mathcal{L}_{11n} = 1, \mathcal{L}_{21n} = (-1)^n, \mathcal{L}_{12n} = 0, \mathcal{L}_{22n} = 0;$$

опертый край –

$$\mathcal{L}_{j1} \equiv 1, \mathcal{L}_{j2} = \frac{d^2}{dx^2}, \mathcal{L}_{11n} = 1, \mathcal{L}_{21n} = (-1)^n, \mathcal{L}_{12n} = -k_n^2, \mathcal{L}_{22n} = (-1)^{n+1} k_n^2;$$

свободный край –

$$\mathcal{L}_{j1} = \frac{d^2}{dx^2}, \mathcal{L}_{j2} = \frac{d^3}{dx^3}, \mathcal{L}_{11n} = -k_n^2, \mathcal{L}_{21n} = (-1)^{n+1} k_n^2, \mathcal{L}_{12n} = 0, \mathcal{L}_{22n} = 0.$$

$$\text{Таким образом, } \mathcal{L}_{j1}[1] = \begin{cases} 1, \text{ защемленный,} \\ 1, \text{ опертый,} \\ 0, \text{ свободный,} \end{cases}, \mathcal{L}_{j2}[1] \equiv 0.$$

В дальнейшем наибольший интерес будет представлять случай защемленных контуров, т.к. на практике он наиболее часто используется. В этом случае  $\mathcal{L}_{11n} = 1$ ,  $\mathcal{L}_{21n} = (-1)^n$ ,  $\mathcal{L}_{j2n} = 0$ ,  $\tilde{\mathcal{L}}_{j1} = 1$ ,  $\tilde{\mathcal{L}}_{j2} = 0$ , а коэффициенты (35) для нечетных ( $q=1,3,\dots,11$ ) и четных ( $q=2,4,\dots,12$ ) рядов соответственно примут вид

$$\begin{aligned} C_{qk} &= B_{ijk} \delta_{i1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 B_{jn}^*, \quad C_{q,k+4} = B_{ijk} \delta_{i2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 B_{jn}^*, \\ C_{q,k+8} &= B_{ijk} \delta_{i3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i3n} E_{3kn}^0 B_{jn}^*, \quad C_{q,13} = \rho_{1i} \tilde{k}_{0i}, \quad C_{q,14} = \rho_{2i} \tilde{k}_{0i}, \\ C_{q,15} &= \delta_{i,1,3} \tilde{k}_{0i}, \quad (i = \overline{1,3}; j = 1,2; k = \overline{1,4}), \\ C_{2,k} &= C_{11k}, \quad C_{2,k+4} = 0, \quad C_{2,k+8} = 0, \quad C_{2,13} = C_{2,14} = C_{2,15} = 0, \\ C_{4,k} &= C_{12k}, \quad C_{4,k+4} = 0, \quad C_{4,k+8} = 0, \quad C_{4,13} = C_{4,14} = C_{4,15} = 0, \\ C_{6,k} &= 0, \quad C_{6,k+4} = C_{21k}, \quad C_{6,k+8} = 0, \quad C_{6,13} = C_{6,14} = C_{6,15} = 0, \\ C_{8,k} &= 0, \quad C_{8,k+4} = C_{22k}, \quad C_{8,k+8} = 0, \quad C_{8,13} = C_{8,14} = C_{8,15} = 0, \\ C_{10,k} &= 0, \quad C_{10,k+4} = 0, \quad C_{10,k+8} = C_{31k}, \quad C_{10,13} = C_{10,14} = C_{10,15} = 0, \\ C_{12,k} &= 0, \quad C_{12,k+4} = 0, \quad C_{12,k+8} = C_{32k}, \quad C_{12,13} = C_{12,14} = C_{12,15} = 0, \quad k = \overline{1,4}. \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь

$$B_{ijk} = w_{ik}^0 \Big|_{\gamma_j}, \quad C_{ijk} = \frac{dw_{ik}^0}{dx} \Big|_{\gamma_j}, \quad B_{jn}^* = \psi_n \Big|_{\gamma_j} = \begin{cases} 1, & j=1, \\ (-1)^n, & j=2. \end{cases} \quad (43)$$

Для защемленных контуров коэффициенты (41) для нечетных ( $q=1,3,\dots,7$ ) и четных ( $q=2,4,\dots,8$ ) рядов, с учетом (43), запишутся так:

$$C_{qk} = B_{ijk} \delta_{i1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 B_{jn}^*, \quad C_{q,k+4} = B_{ijk} \delta_{i2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 B_{jn}^*,$$



$$\begin{aligned}
 C_{q,9} &= (-1)^{i+1} \rho_1 \tilde{k}_{0i}, \quad C_{q,10} = (2-i) \rho_1 h_1 \tilde{k}_{01}, \quad (i, j = 1, 2; k = \overline{1, 4}), \\
 C_{2,k} &= C_{11k}, \quad C_{2,k+4} = 0, \quad C_{2,9} = C_{2,10} = 0, \quad C_{4,k} = C_{12k}, \quad C_{4,k+4} = 0, \quad C_{4,9} = C_{4,10} = 0, \\
 C_{6,k} &= 0, \quad C_{6,k+4} = C_{21k}, \quad C_{6,9} = C_{6,10} = 0, \quad C_{8,k} = 0, \quad C_{8,k+4} = C_{22k}, \quad C_{6,9} = C_{6,10} = 0, \\
 C_{9,k} &= \tilde{w}_{1k}^0, \quad C_{9,k+4} = -\tilde{w}_{2k}^0, \quad C_{9,9} = \rho_1 (\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02}), \quad C_{9,10} = \rho_1 h_1 \tilde{k}_{01}, \\
 C_{10,k} &= \tilde{w}_{1k}^0, \quad C_{10,k+4} = 0, \quad C_{9,9} = \rho_1 \tilde{k}_{01}, \quad C_{10,10} = \rho_1 h_1 \tilde{k}_{01} - 1, \quad (k = \overline{1, 4}).
 \end{aligned} \tag{44}$$

В случае двух мембран ( $D_1 = D_2 = 0$ ) частотное уравнение (40) и коэффициенты (44) примут вид:

$$\left\| \|C_{qr}\|_{q,r=1}^6 \right\| = 0. \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
 C_{1k} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{11n} E_{1kn}^0, \quad C_{1,k+2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E_{2kn}^0, \quad C_{15} = \rho_1 \tilde{k}_{01}, \quad C_{16} = \rho_1 h_1 \tilde{k}_{01}, \\
 C_{2k} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{11n} E_{1kn}^0 (-1)^n, \quad C_{2,k+2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E_{2kn}^0 (-1)^n, \quad C_{25} = \rho_1 \tilde{k}_{01}, \quad C_{26} = \rho_1 h_1 \tilde{k}_{01}, \\
 C_{3k} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{21n} E_{1kn}^0, \quad C_{3,k+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{22n} E_{2kn}^0, \quad C_{35} = -\rho_1 \tilde{k}_{02}, \quad C_{36} = 0, \\
 C_{4k} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{21n} E_{1kn}^0 (-1)^n, \quad C_{4,k+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{22n} E_{2kn}^0 (-1)^n, \quad C_{45} = -\rho_1 \tilde{k}_{02}, \quad C_{46} = 0, \\
 C_{5k} &= \tilde{w}_{1k}^0, \quad C_{5,k+4} = -\tilde{w}_{2k}^0, \quad C_{55} = \rho_1 (\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02}), \quad C_{56} = \rho_1 h_1 \tilde{k}_{01}, \\
 C_{6k} &= \tilde{w}_{1k}^0, \quad C_{6,k+4} = 0, \quad C_{65} = \rho_1 \tilde{k}_{01}, \quad C_{66} = \rho_1 h_1 \tilde{k}_{01} - 1, \quad (k = \overline{1, 2}).
 \end{aligned} \tag{46}$$

Здесь для упрощения уравнения (45) функции  $w_{ik}^0$ , согласно (27), были разложены в ряд по собственным функциям  $\psi_n(x) = \cos k_n(x+a)$  и поэтому коэффициент  $\tilde{a}_{ijn} = 1 + a_{ijn}$ . Этот прием будет и далее использоваться для упрощения частотных уравнений. Он был ранее использован в работах [6-9].

Пусть  $p_1^2 = \frac{k_{01}\omega^2 - g\rho_1}{T_1}$ ,  $p_2^2 = \frac{k_{02}\omega^2 + g\rho_1}{T_2}$ . Так как  $k_{02}\omega^2 + g\rho_1 > 0$ , то будем считать, что и  $k_{01}\omega^2 - g\rho_1 > 0$  (в противном случае, все рассуждения повторяются аналогично). В этом случае решения, соответствующего уравнению (20), однородного уравнения, и выражения для формул (27) и (32) будут иметь вид:

$$w_{ik}^0 = \{ \sin p_i x, \cos p_i x \}, \quad \tilde{w}_{ik}^0 = \left\{ 0, \frac{\sin p_i a}{p_i a} \right\}, \tag{47}$$

$$E_{ikn}^0 = \frac{T_i p_i}{ad_{in}} \left\{ [(-1)^n - 1] \cos p_i a, [(-1)^n + 1] \sin p_i a \right\}. \tag{48}$$

Подставим выражения (47) и (48) в (46) и произведем со строками и столбцами определителя уравнения (45) преобразования, аналогичные работам [6-7]: из первой строки вычтем вторую, а из третьей четвертую; ко второй строке прибавим первую, а к четвертой третью;

далее меняем местами вторую и третью строки, и второй и третий столбцы и приводим определитель к блочному виду с нулевыми диагональными элементами. В этом случае определитель представляется в виде произведения двух определителей. Воспользовавшись тем, что в рядах с множителем  $\left[(-1)^n - 1\right]^2$  остаются только нечетные члены, а в рядах с множителем  $\left[(-1)^n + 1\right]^2$  только нечетные члены замечаем, что уравнение (45) распадается на два уравнения, описывающие нечетные и четные частоты

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{a}_{11,2m-1}}{d_{1,2m-1}}\right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{a}_{22,2m-1}}{d_{2,2m-1}}\right) - \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{12,2m-1}}{d_{2,2m-1}}\right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{21,2m-1}}{d_{1,2m-1}}\right) = 0$$

или

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega^2 a_{2m-1} - k_{2m-1} d_{1,2m-1}}{\tilde{\Delta}_{2m-1}}\right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega^2 a_{2m-1} - k_{2m-1} d_{2,2m-1}}{\tilde{\Delta}_{2m-1}}\right) - \omega^4 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{2m-1} b_{2m-1}}{\tilde{\Delta}_{2m-1}}\right)^2 = 0 \quad (49)$$

и

$$4(C_{33}C_{44} - C_{34}C_{43})(b\tilde{k}_{01}\tilde{k}_{02} - \tilde{k}_{01} - \tilde{k}_{02}) + \\ + 2\tilde{k}_{01}(b\tilde{k}_{02} - 1)C_{34} + 2\tilde{k}_{02}(b\tilde{k}_{01} - 1)C_{43} - 2\tilde{k}_{01}C_{33} - 2\tilde{k}_{02}C_{44} = 0, \quad (50)$$

где

$$C_{33} = T_1 p_1^2 a \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{21,2m}}{d_{1,2m}}, \quad C_{34} = T_2 p_2^2 a \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{a}_{22,2m}}{d_{1,2m}}, \quad C_{43} = T_1 p_1^2 a \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{a}_{11,2m}}{d_{1,2m}}, \quad C_{44} = T_2 p_2^2 a \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{12,2m}}{d_{2,2m}}, \\ \tilde{\Delta}_{2m-1} = \omega^4 b_{2m-1}^2 - (\omega^2 a_{2m-1} - k_{2m-1} d_{1,2m-1})(\omega^2 a_{2m-1} - k_{2m-1} d_{2,2m-1}), \\ b = \rho_1 h_1, \quad a_{2m-1} = a_{1,2m-1}, \quad b_{2m-1} = b_{1,2m-1}.$$

Следует заметить, что уравнение (49), описывающее несимметричные частоты, не зависит от  $p_1^2$ , т.е. от знака величины  $k_{01}\omega^2 - g\rho_1$  и совпадает с соответствующим уравнением для случая абсолютно жесткого нижнего основания. В этом случае, как известно [4-7], частотный спектр для несимметричных колебаний будет состоять из двух наборов частот, отвечающих колебаниям верхнего и нижнего оснований.

Уравнение (50), описывающее симметричные частоты, более сложное. Оно зависит от  $p_1^2$ , т.е. от знака величины  $k_{01}\omega^2 - g\rho_1$ , включает в себя составляющую уравнения (49) для четных индексов, а также описание колебания столба жидкости как одного целого. В этом случае частотный спектр для симметричных колебаний будет состоять из трех наборов частот, отвечающих колебаниям верхнего и нижнего оснований, и колебаниям столба жидкости как одного целого. В этом проявляется особенность совместных осесимметричных колебаний упругих оснований и жидкости.

Проведя аналогичные вычисления для одной мембраны ( $D_i = 0$ ) и одной пластины ( $D_i \neq 0$ ) или двух пластин ( $D_1 \neq 0, D_2 \neq 0$ ), можно утверждать, что для защемления контуров частотное уравнение (40) вновь распадается на нечетные и четные частоты с сохранением основных свойств, которые были отмечены ранее для двух мембран.

Также можно показать, что и в случае трех защемленных пластин или различных комбинаций пластин и мембран частотное уравнение (34) распадается на нечетные и четные

частоты. Уравнение, описывающее несимметричные частоты, не зависит от знака величины  $k_{0i}\omega^2 - g\Delta\rho_i$ . Частотный спектр для несимметричных колебаний будет состоять из трех наборов частот, отвечающих колебаниям верхнего и нижнего оснований, и пластины, разделяющей жидкости. Уравнение, описывающее симметричные частоты, более сложное. Оно зависит от знака величины  $k_{0i}\omega^2 - g\Delta\rho_i$ , включает в себя основную часть уравнения для нечетных частот, записанную для четных индексов, а также описание колебания столба жидкости как одного целого. Частотный спектр для симметричных колебаний будет состоять из четырех наборов частот, отвечающих колебаниям верхнего, нижнего оснований, колебаниям пластины, разделяющей жидкости и колебаниям столба жидкости как одного целого.

На основании проведенных аналитических исследований можно сделать следующие выводы:

1. Для заземленных пластин или мембран частотное уравнение распадается на нечетные и четные частоты.
2. Уравнение, описывающее несимметричные частоты, не зависит от знака величины  $k_{0i}\omega^2 - g\Delta\rho_i$ .
3. Уравнение для четных частот более сложное. Оно зависит от знака величины  $k_{0i}\omega^2 - g\Delta\rho_i$  и включает в себя основную часть уравнения для нечетных частот, записанную для четных индексов, а также описание колебания столба жидкости как одного целого.
4. Частотный спектр несимметричных колебаний состоит из трех наборов частот, отвечающих колебаниям трех пластины.
5. Частотный спектр симметричных колебаний состоит из четырех наборов частот, отвечающих колебаниям трех пластины и колебаниям столба жидкости как одного целого.

Исследования проведены в рамках программы фундаментальных исследований Министерства образования и науки Украины (проект № 0116U002522).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ильгамов М. А., Сахабутдинов Ж. М. Об устойчивости упругой пластины между жидкостями разной плотности. *Изб. проблемы прикл. механики. Сб. статей к шестидесятилетию акад. Н. Челомея*. Москва: Машиностроение, 1974. С. 341–346.
2. Кононов Ю. Н., Татаренко Е. А. Свободные колебания двухслойной жидкости, разделенной упругой пластинкой в прямоугольном канале. *Теор. и прикл. механика*. 2002. Вып. 36. С. 170–176.
3. Троценко В. А. Свободные колебания жидкости в прямоугольном канале с упругой мембраной на свободной поверхности. *Прикл. механика*. 1995. Т. 31, №8. С. 74–80.
4. Кононов Ю. Н., Татаренко Е. А. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на «свободной» и внутренней поверхностях. *Акустичний вісник*. 2003. Т. 6, № 4. С. 44–52.
5. Кононов Ю. Н., Татаренко Е. А. Свободные колебания упругих мембран и двухслойной жидкости в прямоугольном канале с упругим дном. *Прикл. гідромеханіка*. 2008. № 1. С. 33–38.
6. Кононов Ю. Н., Лимарь А. А. Колебания прямоугольной мембраны, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жесткими основаниями. *Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки*. 2015. № 1–2. С. 97–108.
7. Кононов Ю. Н., Лимарь А. А. Об устойчивости колебания прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жесткими основаниями. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2016. Том 25. С. 69–84.
8. Кононов Ю. М., Лимарь А. А. Стійкість коливань пластины, яка розділяє ідеальні рідини різною густини у прямокутному каналі. Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2016». URL: <http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Lymar.pdf>.
9. Kononov Yu. M., Lymar A. Stability of elastic plate, dividing the two-layer ideal liquid in the rectangular channel. Book of Abstracts 5<sup>th</sup> International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky, Kyiv, Ukraine. Vinnytsa, 2016. P. 79–80.

10. Кононов Ю. Н., Джуха Ю. А. Осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре. *Вісн. Запорізького національного ун-ту. Сер. Фіз.-мат. наук.* 2016. № 1. С. 103–115.
11. Карнаух А. Ю. Колебания упругой пластинки, разделяющей жидкости в цилиндрическом сосуде с упругими основаниями. *Изв. вузов Сев.-Кав. регион. Естество. науки.* 2013. № 2. С. 33–36.
12. Гончаров Д. А. Осесимметричные колебания двухплотностной жидкости в цилиндрическом баке. Электронное научно-техническое издание: Наука и образование. 2012. № 4. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/362856.html>. (Дата обращения: 19.02.2014).
13. Гончаров Д. А. Динамика двухслойной жидкости, разделенной упругой перегородкой с учетом сил поверхностного натяжения. Электронное научно-техническое издание: Наука и образование. 2013. № 11. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/619258.html>. (Дата обращения: 19.02.2014).
14. Пожалостин А. А., Гончаров Д. А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения. *Инженерный журнал: Наука и инновации.* 2013. Вып. 12. URL: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html>. (Дата обращения: 19.02.2014).

## REFERENCES

1. P'gamov, M. A. & Sahabutdinov, J. M. (1974). On the stability of elastic plates between liquids of different density, *Izbrannie problemi prikladnoy mekhaniki. Sbornik statiy k shistidesyatiletiju Acad. Chelomei, Mashinostroenie, Moskau*, pp. 341-346.
2. Kononov, Yu. N. & Tatarenko, K. A. (2002). Free oscillations of a two-layer fluid divided elastic plate in a rectangular channel, *Teoret. i prikladnaya mekhanika*, No. 36, pp. 170-176.
3. Trotsenko, V. A. (1995). Free oscillations fluid in a rectangular channel with an elastic membrane on the free surface, *Prikladnaya mekhanika*, Vol. 31, No. 8, pp. 74-80.
4. Kononov, Yu. N. & Tatarenko, K. A. (2003). Free oscillations of a two-layer fluid with elastic membranes on the “free” and the inner surfaces, *Akustichesky vestnik*, Vol. 6, No. 4, pp. 44-52.
5. Kononov, Yu. N. & Tatarenko, K. A. (2008). Free oscillations of elastic membranes and two-layer liquid in a rectangular channel with elastic bottom, *Prikladnaya gidromekhanika*, No. 1, pp. 33-38.
6. Kononov, Yu. N. & Lymar, A. A. (2015). Oscillations of a rectangular membrane separating the ideal fluid of different density in a rectangular channel with rigid bases, *Visnik Donetskogo natsionalnogo universitetu. Ser. A*, No. 1-2, pp. 97-108.
7. Kononov, Yu. N. & Lymar, A. A. (2016). On the stability of oscillations of a rectangular plate that separates the ideal liquid of different density in a rectangular channel with rigid bases, *Problemu obchislyvalnoi mehaniki i mitsnosti konstruktsiy*, Vol. 25, pp. 69-84.
8. Kononov, Yu. M. & Lymar, O. O. (2016). Stability oscillation plate that separates the ideal fluid varying density in a rectangular channel. Conference of Young Scientists “Pidstryhachivski chitannia”. Retrieved from <http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Lymar.pdf>.
9. Kononov, Yu. M. & Lymar, A.A. (2016). Stability of elastic plate, dividing the two-layer ideal liquid in the rectangular channel. Book of Abstracts 5<sup>th</sup> International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky, (pp. 79-80), Kyiv.
10. Kononov, Yu. N. & Dzhukha, Yu. A. (2016). Axisymmetric oscillations of elastic bases and an ideal fluid in a rigid circular cylindrical tank, *Visnik Zaporizkogo natsionalnogo universitetu. Ser. Phiz.-math. nauk*, No. 1, pp. 103-115.
11. Karnaukh, A. Yu. (2013). Vibrations of an elastic plate, separating a liquid in a cylindrical vessel with elastic foundation. *Izv. vuzov Sev.-Kav. region. Estestv. Nauki*, 2, Russian, pp. 33-36.
12. Goncharov, D. A. (2012). Axisymmetric vibrations of two-density liquid in a cylindrical tank. *Elektronnoe nauchno-tehnicheskoe izdanie: Nauka i obrazovanie*, 4. Retrieved from <http://technomag.bmstu.ru/doc/362856.html>.
13. Goncharov, D. A. (2013). Dynamics of a two-layer liquid divided with elastic baffle with allowance for surface tension. *Elektronnoe nauchno-tehnicheskoe izdanie: Nauka i obrazovanie*, 11. Retrieved from <http://technomag.bmstu.ru/doc/619258.html>.
14. Pozhalostin, A. A. (2013). Free axisymmetrical vibrations of a two-layer liquid with an elastic separator between the layers in the presence of surface tension. *Inzhenernyy zhurnal: Nauka i innovatsii*, Iss. 12. Retrieved from <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html>.

УДК 539.3

## ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЭЛАСТИЧНОГО ЦИЛИНДРА С КОЛЬЦЕВЫМИ ВОЛОКНАМИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВРАЩЕНИЯ ПРИ СВОБОДНОЙ ПОСАДКЕ

Кострова М. М., аспирант, Ахундов В. М., д. ф.-м. н., профессор

*Національна металургічна академія України,  
просп. Гагарина, 4, г. Дніпр, 49005, Україна*

akhundov@ua.fm

Изучали деформирование свободно вращающегося цилиндра, эластичная матрица которого двоякопериодически армирована кольцевыми волокнами квадратного сечения из более жесткого эластичного материала. Решение задачи осуществляли на основе модели кусочно-однородной среды, исходя из общих уравнений нелинейной теории упругости. Для решения задачи применяли метод конечных разностей с использованием конечно-разностных соотношений второго порядка точности и метод продолжения решения по скорости вращения цилиндра.

*Ключевые слова: цилиндр кусочно-однородный, волокна кольцевые, силы центробежные, вращение свободное, деформирование нелинейное, метод конечных разностей.*

## ДЕФОРМУВАННЯ ЕЛАСТИЧНОГО ЦИЛІНДРУ З КІЛЬЦЕВИМИ ВОЛОКНАМИ ПІД ВПЛИВОМ ОБЕРТАННЯ ЗА ВІЛЬНОЇ ПОСАДКИ

Кострова М. М., аспірант, Ахундов В. М., д. ф.-м. н., професор

*Національна металургійна академія України,  
просп. Гагаріна, 4, м. Дніпро, 49005, Україна*

akhundov@ua.fm

Вивчали деформування вільно обертового циліндра, еластична матриця якого двоякоперіодично армована кільцевими волокнами квадратного перетину з більш жорсткого еластичного матеріалу. Рішення задачі здійснювали на основі моделі кусково-однорідного середовища, виходячи із загальних рівнянь нелінійної теорії пружності. Для вирішення задачі застосовували метод кінцевих різниць з використанням кінцево-різницевої співвідношень другого порядку точності і метод продовження рішення за швидкістю обертання циліндра.

*Ключові слова: циліндр кусково-однорідний, волокна кільцеві, сили відцентрові, обертання вільне, деформування нелінійне, метод кінцевих різниць.*

## DEFORMING THE ELASTIC CYLINDER WITH RING FIBERS UNDER THE ACTION OF ROTATION AT FREE SITE

Kostrova M. M., Graduate student, Akhundov V. M., D.Sc. in Physics and Maths, Professor

*National Metallurgical Academy of Ukraine,  
Gagarin ave., 4, Dnepr, Ukraine*

akhundov@ua.fm

The deformation of a freely rotating cylinder was studied, the elastic matrix of which was doubly repetitively reinforced with circular fibers of square section made of a more rigid elastic material. The solution of the problem was carried out on the basis of a model of a piecewise homogeneous medium, starting from the general equations of the nonlinear theory of elasticity. To solve the problem, the finite difference method was used with the use of finite-difference relations of the second order of accuracy and the method of continuation of the solution with respect to the rotation speed of the cylinder.

*Key words: piecewise homogeneous cylinder, circular fibers, centrifugal forces, free rotation, nonlinear deformation, finite difference method.*

## ВВЕДЕНИЕ

Деформация круглых цилиндров из однородных материалов под воздействием вращения вокруг оси симметрии подробно изучена в линейной механике деформирования. Библиография данных исследований достаточно полно представлена в [1]. В [2] рассмотрены инерционные накопители энергии (маховики) из жестких композитных материалов с цилиндрической ортотропией упругих свойств. В [3] с помощью уравнений линейной теории упругости решена задача о напряжениях во вращающейся цилиндрически ортотропной трубе. Приведены результаты при свободной и жесткой посадках трубы для случаев осевого и окружного армирования. В [4] рассмотрено перераспределение напряжений в диске с эластомерной матрицей в условиях релаксации напряжений при ползучести материала. Решение задачи производится при геометрически и физически линейной постановке. Состояние вращающихся дисков по модели упруго-пластического материала описано в работе [5]. Расчет вращающегося диска по полученным экспериментальным диаграммам растяжения материала без их упрощающей схематизации с помощью метода переменных параметров упругости приведен в [6].

Исследование больших деформаций цилиндров под воздействием центробежных сил вращательного движения представлено в работах [7-9]. Описания другими авторами больших деформаций цилиндров под воздействием центробежных сил в литературе и других источниках не выявили. В [7] решены задачи в плоской постановке для однородных цилиндров и цилиндров, слабо армированных нитями по осевым, окружным и радиальным направлениям. Исследование производили по прикладной теории волокнистых сред [10], основанной на модели материала, в которой макроскопические напряжения определяются аддитивными вкладами напряжений матрицы и усилий осевого растяжения или стесненного сжатия волокон. В [8] рассмотрели также по прикладной теории осесимметричное деформирование цилиндров с расположением волокон по окружным и радиальным направлениям при разных посадках по внутренней поверхности.

В [9] на базе одноуровневой прикладной и двухуровневой каркасной теорий решены задачи о цилиндрах с двух- и трехортогональными схемами армирования. Каркасная теория [11] включает макромеханический уровень, на котором для тела в целом решается макрокраявая задача. На микромеханическом уровне для узловых блоков представления армированного материала тела решаются микрокраевые задачи по модели кусочно-однородной среды и условиям из макромеханического уровня в итерационной процедуре взаимодействия уровней анализа.

Модель кусочно-однородной среды методологически наиболее точно отражает поведение тела волокнистого строения. В данном подходе матрица и волокна рассматриваются как контактно взаимодействующие тела на базе уравнений механики деформируемого твердого тела (МДТТ) для матрицы и каждого из волокон систем армирования. Но из-за ограниченности вычислительных ресурсов модель кусочно-однородной среды в "чистом" виде может быть применена лишь для небольшого перечня тел с однонаправленным армированием при частных нагружениях. В качестве такого объекта по данной модели исследовали цилиндр под воздействием вращения, эластичная матрица которого армирована кольцевыми волокнами квадратного сечения из более жесткого эластичного материала.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Решали задачу о деформации эластичного цилиндра из матрицы и кольцевых волокон под воздействием сил инерции вращения вокруг его оси симметрии. Волокна квадратного сечения располагаются в матрице цилиндра двоякопериодически с одинаковыми периодами армирования по осевому и радиальному направлениям. Цилиндр моделировали как сборку кольцевых элементов. Кольцевые элементы представляли в виде колец квадратного сечения из матричного материала, включающих кольцевые волокна квадратного сечения в качестве их армирующей сердцевин.

На рис. 1 показано осевое сечение недеформированного цилиндра с внутренним радиусом  $r = a$  и внешним  $r = b$ . Цилиндр включает цилиндрические слои с одинаковой толщиной  $h$ , армированные кольцевыми волокнами одинакового квадратного сечения с длиной сторон  $\delta$ . Цилиндр также рассматривали как совокупность дисковых слоев толщиной  $h$ , в которых concentрически располагаются кольцевые волокна по одному от каждого цилиндрического слоя (квадратная упаковка).

Изучали осесимметричную деформацию цилиндра, отвечающую макроскопически плоскому деформированию, когда длина цилиндра оставалась неизменяемой. В силу условий симметрии задачу решали для половинного дискового слоя толщиной  $h/2$ . Такой слой заключен между поперечными сечениями цилиндра, одно из которых проходит через осевые линии волокон, а другое – через матрицу между волокнами, при расстоянии между сечениями, равном половине периода армирования по осевому направлению (см. также рис. 2).

Применяли лагранжевую систему цилиндрических координат  $\hat{\theta}^1, \hat{\theta}^2, \hat{\theta}^3$ , из которых  $\hat{\theta}^1$  – осевая,  $\hat{\theta}^2$  – окружная,  $\hat{\theta}^3$  – радиальная координаты. В отсчетной конфигурации цилиндра данные координаты обозначаем как  $t, \varphi, r$  соответственно. Осевую координату  $t$  отсчитывали от центрального сечения, проходящего через осевые линии волокон в дисковом слое. Наряду с радиальной координатой  $r$  использовали «толщинную» координату  $z = r - a$ , отсчитываемую от внутренней поверхности цилиндра. Физические компоненты векторных и тензорных величин относительно отсчетной системы координат сопровождаем координатными индексами, заключенными в круглые скобки.

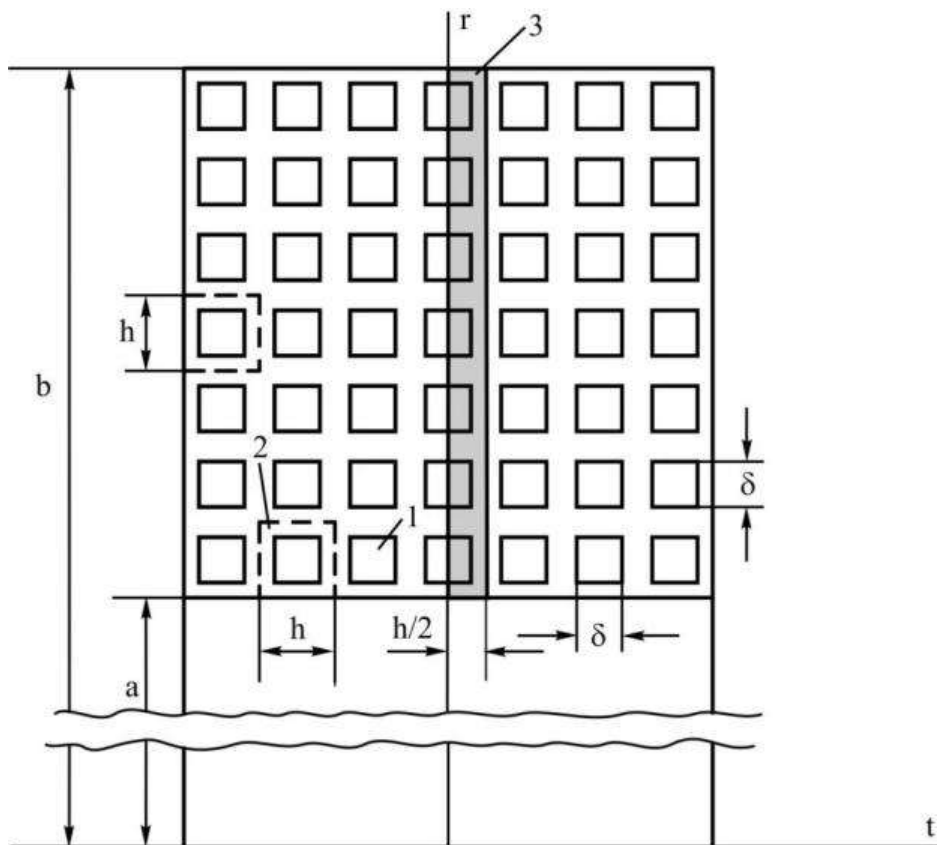


Рис. 1. Осевое сечение цилиндра в исходном состоянии: 1 – волокно квадратного сечения, 2 – кольцевой элемент, 3 – половина дискового слоя справа от центрального сечения

Исходили из общих геометрических и физических уравнений и уравнений равновесия в нелинейной теории упругости [12] для описания на их основе осесимметричного деформирования рассматриваемого кусочно-однородного цилиндра. Отличительной особенностью решаемой задачи является влияние на центробежные силы, действующие на матрицу и волокна, изменений расстояний от их материальных точек до оси вращения

цилиндра. В используемых уравнениях задавали радиальную компоненту плотности массовых сил, действующих на составляющие цилиндра при его вращении, в виде

$$F_{(3)} = (r + u_{(3)})\omega^2,$$

где  $u_{(3)}$  – радиальная компонента вектора перемещения;  $\omega = 2\pi \cdot f$  – угловая скорость вращения;  $f$  – число оборотов вращения в секунду.

Производные первого порядка от искомым величин по осевой и радиальной координатам  $t$  и  $r$  в уравнениях задачи аппроксимировали с помощью конечно-разностных соотношений второго порядка точности [13]. Вместе с привлечением граничных условий и условий совместного деформирования матрицы и волокон формируется система нелинейных уравнений относительно основных искомым величин в узловых точках двумерной области  $0 \leq t \leq h/2$ ,  $a \leq r \leq b$ . Данную систему уравнений решали на основе процедуры дискретного метода Ньютона [14]. Единственность решения краевой задачи обеспечивали на основе продолжения решения по угловой скорости вращения цилиндра.

### ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Представляем результаты для цилиндра, включающего 100 цилиндрических слоев с кольцевыми волокнами в них. Цилиндр рассматриваем как совокупность дисковых слоев, в сборках каждого из которых по 100 кольцевых элементов. Внутренний радиус цилиндра  $a = 100$  мм, внешний радиус  $b = 200$  мм. Волокна в кольцевых элементах с длиной стороны квадратного сечения  $\delta = 0,6$  мм, квадратная упаковка волокон с расстояниями между осевыми линиями смежных волокон  $h = 1$  мм, коэффициент наполнения волокнами  $k_f = \delta^2/h^2 = 0,36$ . Материалы матрицы и волокон задавали с помощью трехконстантного потенциала Левинсона-Буржеса и двухконстантного потенциала Блейтца соответственно [15]. Для матрицы принимали значения упругих параметров  $E_m = 4$  МПа,  $\nu_m = 0,46$ ,  $\beta_m = 1$ ; для волокон –  $E_f = 68$  МПа,  $\nu_f = 0,4$ . Плотность материалов матрицы и волокон принимали одинаковой  $\rho = 1,1 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

Приводим результаты на основе сетки узловых точек конечно-разностной схемы, для которой на отрезках  $0 \leq t \leq 0,3$  мм и  $0,3$  мм  $\leq t \leq 0,5$  мм по 7-мь равноотстоящих узловых точек, две из которых на границах раздела совпадают между собой. На протяжениях по  $z$  во внутреннем  $0 \leq z \leq 0,2$  мм и внешнем  $99,8$  мм  $\leq z \leq 100$  мм покровных слоях и в волокнах и между волокнами также по 7-мь узловых точек. На рис. 3 показаны координатные линии, отвечающие данной сетке узловых точек. Исключением являются покровные слои, в которых координатные линии  $z = z_i$  проведены через одну из применяемых узловых точек.

На рис. 2 представлены контурные линии цилиндра в исходном состоянии и при угловой скорости  $\omega = 2\pi \cdot 80$  с<sup>-1</sup> и график изменения радиальных перемещений  $u_{(3)}$  в поперечных сечениях цилиндра в зависимости от радиальной координаты  $r$ . Образующие внутренней и внешней граничных поверхностей деформированного цилиндра в пределах погрешности изображения представляют собой прямые линии, параллельные его оси. Радиальное перемещение для центрального сечения  $t = 0$  изменяется от значения  $u_{(3)} = 66,1$  мм при  $r = a = 100$  мм до  $u_{(3)} = 45,6$  мм при  $r = b = 200$  мм. Внутренний и внешний его радиусы в деформированном состоянии становятся

$$a^* = a + u_{(3)} \Big|_{t=0, r=a} = 166,1 \text{ мм}, \quad b^* = b + u_{(3)} \Big|_{t=0, r=b} = 245,6 \text{ мм}.$$



Толщина цилиндра по месту центрального сечения при этом  $H^*|_{t=0} = b^* - a^* = 79,5$  мм вместо прежней  $H = b - a = 100$  мм.

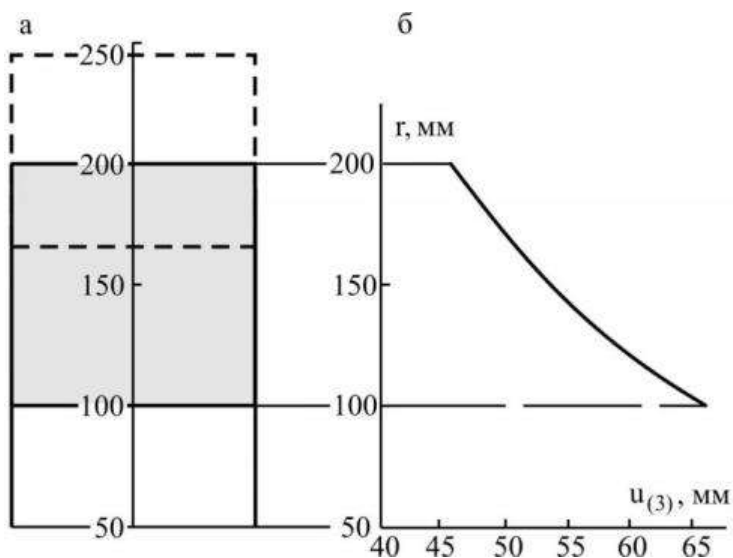


Рис. 2. Контур осевого сечения цилиндра в исходном ( — ) и при вращении  $\omega = 2\pi \cdot 80c^{-1}$  ( - - - ) состояниях (а) и распределение радиальных перемещений в поперечных сечениях цилиндра (б)

На рис. 3 представлены зависимости радиальных перемещений во внутренней и внешней поверхностях цилиндра от скорости вращения  $\omega/2\pi$ . При используемом масштабе изображения кривые зависимостей отражают изменения внутреннего и внешнего радиусов поперечных сечений цилиндра для всего интервала их положений  $0 \leq t \leq h/2$ . Расстояния между данными кривыми вдоль вертикального направления определяют уменьшения толщины стенки цилиндра с увеличением скорости его вращения.

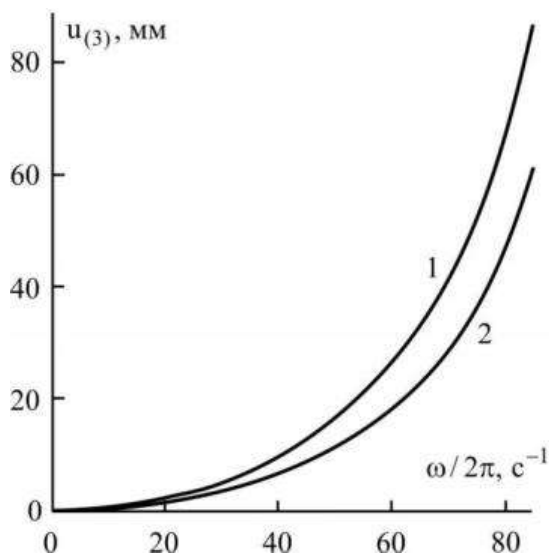


Рис. 3. Зависимости радиальных перемещений  $u_{(3)}$  во внутренней (1) и внешней (2) поверхностях цилиндра от скорости вращения  $\omega/2\pi$

На рис. 4 изображены конфигурации осевых сечений для четырех половин сборок кольцевых элементов, расположенных в цилиндре справа от центрального сечения. Каждая из данных сборок включает три концентрически расположенных кольцевых элемента. Первая сборка выделена из недеформированного цилиндра, конфигурация ее осевого сечения не зависят от места сборки в цилиндре, приведена для сопоставления с ней деформированных сборок.

Остальные сборки выделены из деформированного цилиндра при  $\omega = 2\pi \cdot 80c^{-1}$ . Вторая сборка включает 1-й, 2-й и 3-й кольцевые элементы, примыкающие к внутренней поверхности цилиндра, ограничена поверхностями  $z = 0$  и  $z = 3h$ . Третья сборка образована из внешней половины 49-го элемента, 50-го, 51-го элементов и внутренней половины 52-го элемента, расположена между поверхностями  $z = 48,5h$  и  $z = 51,5h$ . Четвертая сборка из примыкающих к внешней поверхности цилиндра 98-го, 99-го и 100-го элементов между поверхностями  $z = 97h$  и  $z = 100h$ .

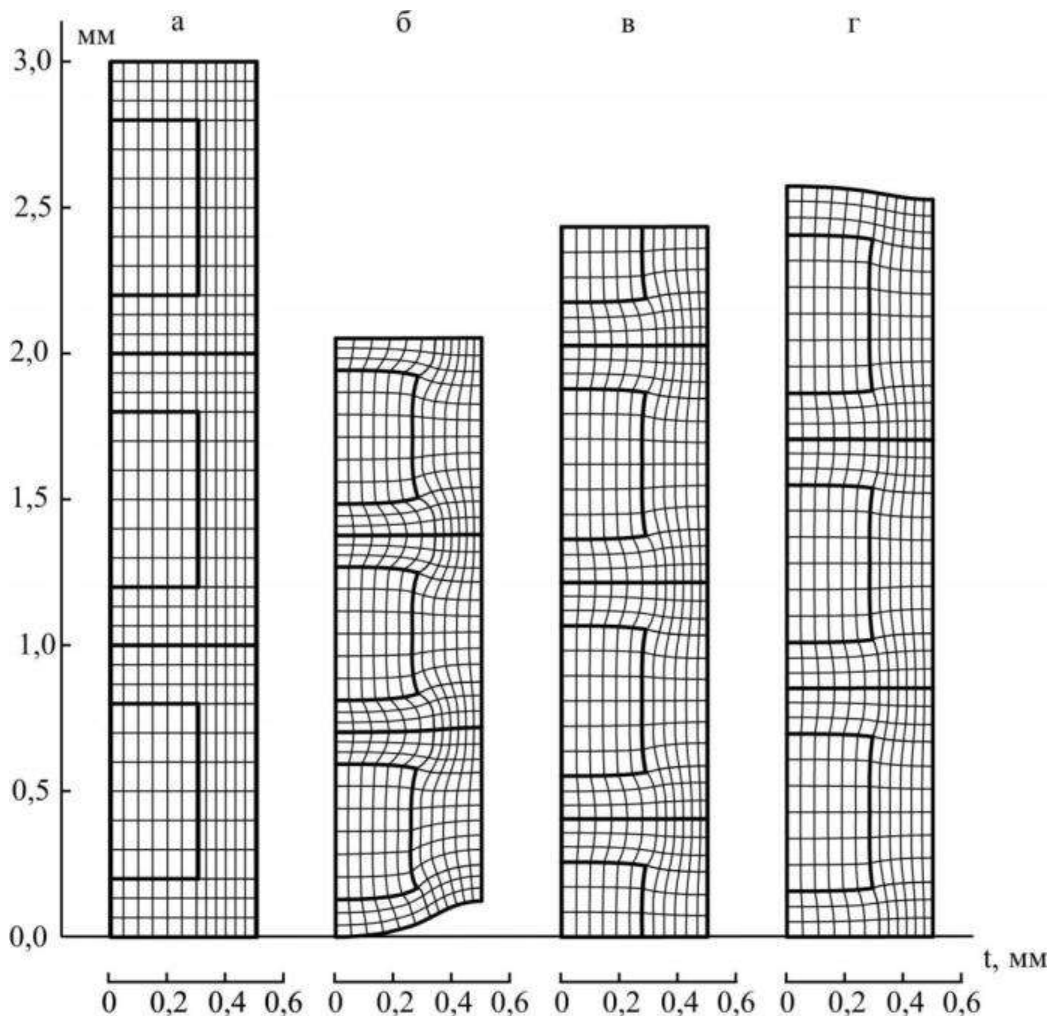


Рис. 4. Конфигурации осевых сечений сборок кольцевых элементов цилиндра: а) – сборка из трех элементов без вращения цилиндра; б), в) и г) – сборки при вращении  $\omega = 2\pi \cdot 80c^{-1}$ , включающие 1-й, 2-й, 3-й элементы, половину 49-го, 50-й, 51-й, половину 52-го элемента и 98-й, 99-й, 100-й элементы соответственно

Конфигурации осевых сечений кольцевых элементов в сборках представлены сетками координатных линий  $t = t_i$ ,  $z = z_i$ , проходящих через узловые точки  $(t_i, z_i)$  конечно-разностной схемы решения задачи. Они демонстрируют насколько более интенсивно деформируются кольцевые элементы, расположенные ближе к внутренней поверхности цилиндра по сравнению с более удаленными от нее элементами. Отметим при этом отражение конфигурациями вытеснения связующего между волокнами в дисковом слое в область слоя за волокнами.

Деформированные конфигурации осевых сечений 1-го и 2-го кольцевых элементов значительно различаются между собой. Для 2-го и 3-го элементов различия в их конфигурациях выражены менее существенно. Что касается 3-го и 4-го и последующих пар смежных элементов, то их конфигурации близки между собой в пределах погрешности представления графического материала. Это продолжается включительно до пары 98-го и 99-

го элементов. И только конфигурация 99-го элемента заметно отличается от конфигурации 100-го. Приходим к заключению, что приповерхностный эффект возле внутренней поверхности цилиндра проникает на глубину одного или двух периодов армирования кольцевыми волокнами в зависимости от применяемого критерия (данный вопрос здесь оставляем без внимания), а возле его внешней поверхности – на глубину одного периода армирования.

На рис. 5 представлены распределения окружных напряжений  $p_{22}$  в центральном сечении  $t = 0$ . Распределения напряжений показаны на протяжениях в цилиндре  $0 \leq z \leq 3h$ ,  $48,5h \leq z \leq 51,5h$ ,  $97h \leq z \leq 100h$  трех сборок кольцевых элементов, которые изображены на рис. 3, б, в, г. Эти напряжения претерпевают скачки на поверхностях раздела матрицы с волокнами. С переходом от одного кольцевого элемента к выше расположенному другому эти напряжения в матрице и волокнах убывают. Для матрицы напряжение уменьшается от значения  $p_{22} = 3,1$  МПа во внутренней поверхности  $z = 0$  до  $p_{22} = 1,2$  МПа во внешней  $z = 100$  мм. В срединной поверхности  $z = 0,5h$  первого волокна  $p_{22} = 47,1$  МПа, а в срединной поверхности  $z = 99,5h$  100-го волокна  $p_{22} = 15,8$  МПа. С переходом от матрицы к волокну данное напряжение для 1-го элемента увеличивается в 22 и 17 раз по месту его внутренней и внешней цилиндрических поверхностей раздела, для 100-го элемента – в 25 и 17 раз соответственно и в 14 раз для элементов возле срединной поверхности цилиндра в обеих для каждого из них поверхностей раздела.

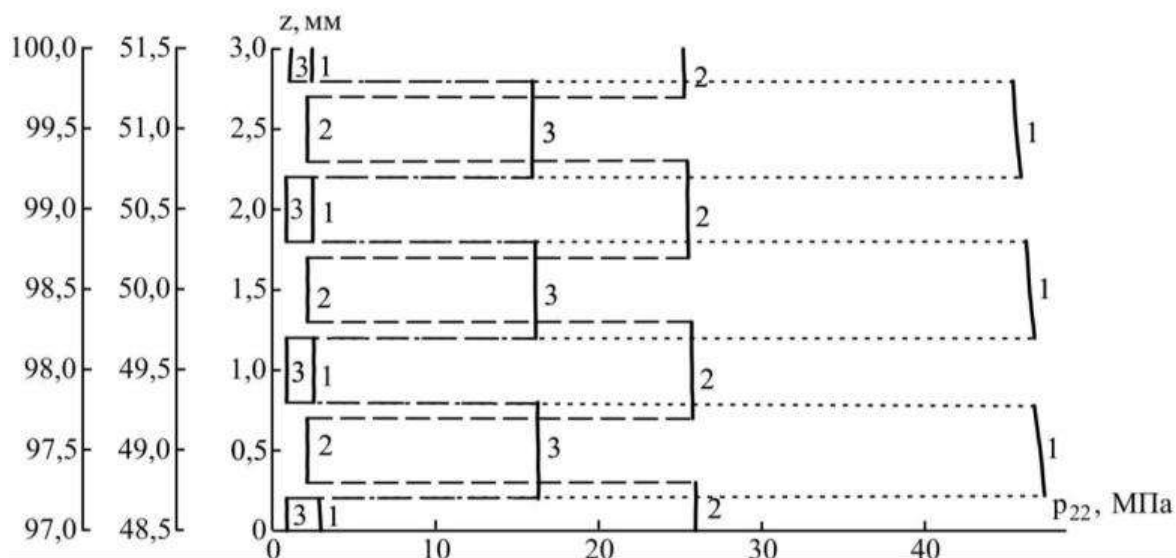


Рис. 5. Распределения окружных напряжений  $p_{22}$  в центральном сечении  $t = 0$  на протяжениях  $0 \leq z \leq 3h$ ,  $48,5h \leq z \leq 51,5h$ ,  $97h \leq z \leq 100h$  трех сборок кольцевых элементов цилиндра

### ВЫВОДЫ

Провели исследование эластичного цилиндра, периодически армированного кольцевыми волокнами квадратного сечения. Цилиндр изучали при макроскопически плоском деформировании под воздействием вращения вокруг его осевой линии на основе модели кусочно-однородной среды. Установили факт вытеснения матричного материала из областей между волокнами в дисковых слоях в области слоев за волокнами. Изучили приповерхностный эффект, выражающийся в существенно неперiodическом деформировании кольцевых элементов цилиндра, прилегающих к его внутренней и внешней поверхностям. При задаваемом развитии конфигурации цилиндра его скорость вращения, равно как и запас кинетической энергии, можно эффективно регулировать армированием волокнами по окружным направлениям.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Loffer K. Die berechnung von Rotierenden Scheiben und Schalen. Göttingen: Springer – Verlag OHG, 1961.
2. Композиционные материалы: Справочник: Васильев В. В., Тарнопольский Ю. М. (ред.). Москва: Машиностроение, 1990. 512 с.
3. Tervonen M., Pramila A. Stresses in a hollow rotating cylindrically orthotropic tube. *Mechanics of Composite Materials*. 1996. Vol. 32, No. 6. P. 835–841.
4. Portnov G. G., Bakis Ch. E. Estimation of limit strains in disk-type flywheels made of compliant elastomeric matrix composite undergoing radial creep. *Mechanics of Composite Materials*. 2000. Vol. 36, No. 1. P. 87–94.
5. Джонсон У., Меллор П. Б. Теория пластичности для инженеров. Москва: Машиностроение, 1979. 567 с.
6. Термopрочность деталей машин: Биргер И. А., Шор Б.Ф. (ред.). Москва: Машиностроение, 1975. 455 с.
7. Ахундов В. М., Скрипочка Т. А. Большие деформации однородных и армированных нитями цилиндров под воздействием центробежных сил. *Механика композит. материалов*. 2009. Т. 45, № 3. С. 347–366.
8. Ахундов В. М., Скрипочка Т. А. Осесимметричная деформация вращающихся цилиндров из однородных и армированных нитями эластичных материалов. *Механика композит. материалов*. 2011. Т. 47, № 2. С. 301–316.
9. Ахундов В. М. Моделирование больших деформаций волокнистых тел вращения на основе прикладной и каркасной теорий. 3. Вращательное движение. *Механика композит. материалов*. 2014. Т. 50, № 6. С. 1131–1142.
10. Ахундов В. М. Прикладная теория композитов с малыми наполнениями нитями при больших деформациях. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2001. Т. 7, № 1. С. 3–15.
11. Ахундов В. М. Каркасная теория волокнистых сред с неискривленными и локально искривленными волокнами при больших деформациях. *Механика композит. материалов*. 2015. Т. 51, № 6. С. 971–990.
12. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука, 1980. 512 с.
13. Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review*. New-York: General Publ. Company, 2000. 1151 p.
14. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. Москва: Мир, 1975. 558 с.
15. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Ленинград: Машиностроение, 1986. 336 с.

## REFERENCES

1. Loffer, K. (1961). Die berechnung von Rotierenden Scheiben und Schalen. Göttingen: Springer – Verlag OHG.
2. Vasil'ev, V. V., Tarnopol'skiy, Yu. M. (Eds.). (1990). *Composite Materials: Handbook*. Moscow: Mashinostroenie.
3. Tervonen, M. & Pramila, A. (1996). Stresses in a hollow rotating cylindrically orthotropic tube. *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 32, No. 6, pp. 835-841.
4. Portnov, G. G. & Bakis, Ch. E. (2000). Estimation of limit strains in disk-type flywheels made of compliant elastomeric matrix composite undergoing radial creep. *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 36, No. 1, pp. 87-94.
5. Dzhonson, U. & Mellor, P. B. (1979). *Teoriya plastichnosti dlya inzhenerov*. Mosvow: Mashinostroenie.
6. Birger, I. A., Shor, B. F. (Eds.). (1975). *Thermal strength of machine parts*. Moscow: Mashinostroenie.
7. Ahundov, V. M. & Skripochka, T. A. (2009). Large deformations of homogeneous and thread-reinforced cylinders under the influence of centrifugal forces. *Mekhanika kompozitnyh materialov*, Vol. 45, No. 3, pp. 347-366.
8. Ahundov, V. M. & Skripochka, T. A. (2011). Axisymmetric deformation of rotating cylinders from homogeneous and reinforced elastic materials. *Mekhanika kompozitnyh materialov*, Vol. 47, No. 2, pp. 301-316.
9. Ahundov, V. M. (2014). Modeling of large deformations of fibrous bodies of revolution on the basis of applied and framework theories. 3. Rotational motion. *Mekhanika kompozitnyh materialov*, Vol. 50, No. 6, pp. 1131-1142.
10. Ahundov, V. M. (2001). Applied theory of composites with small filament fillings at large deformations. *Mekhanika kompozitsionnyh materialov i konstrukcij*, Vol. 7, No. 1, pp. 3-15.
11. Ahundov, V. M. (2015). The framework theory of fibrous media with uncorrelated and locally curved fibers for large deformations. *Mekhanika kompozit. Materialov*, Vol. 51, No. 6, pp. 971-990.
12. Lur'e, A. I. (1980). *Nonlinear theory of elasticity*. Moscow: Nauka.
13. Korn, G. A. & Korn, T. M. (2000). *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review*. New-York: General Publ. Company.
14. Ortega, Dzh. & Rejnboldt, V. (1975). *Iterative methods for solving nonlinear systems of equations with many unknowns*. Moscow: Mir.
15. Chernyh, K. F. (1986). *Nonlinear theory of elasticity in machine-building calculations*. Leningrad: Mashinostroenie.

УДК 539.3

## МІЦНІСТЬ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИХ ПЛАСТИН З ДВОМА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИМИ РОЗРІЗАМИ (ТОНКИМИ ЖОРСТКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ) ЗА ВСЕБІЧНОГО РОЗТЯГУ

<sup>1</sup>Кузь І. С., к. ф.-м. н., доцент, <sup>2</sup>Кузь О. Н., к. т. н., доцент, <sup>1</sup>Пиз Н. Я., аспірант

<sup>1</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна

<sup>2</sup>Національний університет «Львівська політехніка»,  
вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна

ihorkuz24@gmail.com, olyakuzon@gmail.com, nazarpyz@gmail.com

Розвинуто застосування варіаційно-різницевого методу до розв'язування задач теорії малих пружно-пластичних деформацій для лінійно зміцнюваних пластин з розрізами (або такими самими за розмірами тонкими абсолютно жорсткими включеннями) з урахуванням розвантаження. Для розв'язування отриманих після дискретизації систем лінійних та нелінійних алгебричних рівнянь запропоновано використовувати ітераційний метод Ньютона-Канторовича та комбінований ітераційний процес, який містить градієнтний метод та метод з чебишевським набором ітераційних параметрів. Числово розв'язано низку задач про всебічний розтяг пружно-пластичних пластин з двома перпендикулярними розрізами (тонкими жорсткими включеннями). Побудовано зони еволюції пластичних деформацій за покрокового збільшення навантаження. З'ясовано напруження, за яких у пластинах досягаються межі текучості та міцності.

*Ключові слова:* пластина, розріз, тонке жорстке включення, теорія малих пружно-пластичних деформацій, лінійне зміцнення, розвантаження, варіаційно-різницевий метод.

## ПРОЧНОСТЬ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ПЛАСТИН С ДВУМЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ РАЗРЕЗАМИ (ТОНКИМИ ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ) ПРИ ВСЕСТОРОННЕМ РАСТЯЖЕНИИ

<sup>1</sup>Кузь И. С., к. ф.-м. н., доцент, <sup>2</sup>Кузь О. Н., к. т. н., доцент, <sup>1</sup>Пыз Н. Я., аспирант

<sup>1</sup>Львовский национальный университет имени Ивана Франко,  
ул. Университетская, 1, г. Львов, 79000, Украина

<sup>2</sup>Национальный университет «Львовская политехника»,  
ул. С. Бандеры, 12, г. Львов, 79013, Украина

ihorkuz24@gmail.com, olyakuzon@gmail.com, nazarpyz@gmail.com

Развито применение вариационно-разностного метода к решению задач теории малых упруго-пластических деформаций для линейно упрочняющихся пластин с разрезами (или такими же по размерам тонкими абсолютно жесткими включениями) с учетом их разгрузки. Для решения полученных после дискретизации систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений предложено использовать итерационный метод Ньютона-Канторовича и комбинированный итерационный процесс, который содержит градиентный метод и метод с чебышевским набором итерационных параметров. Численно решено несколько задач о всестороннем растяжении упруго-пластических пластин с двумя перпендикулярными разрезами (тонкими абсолютно жесткими включениями). Построены зоны развития пластических деформаций при пошаговом увеличении нагрузки. Определены нагрузки, при которых в пластинах достигаются пределы текучести и прочности.

*Ключевые слова:* пластина, разрез, тонкое жесткое включение, теория малых упруго-пластических деформаций, линейное упрочнение, разгрузка, вариационно-разностный метод.

## STRENGTH OF ELASTIC-PLASTIC PLATES WITH TWO PERPENDICULAR CUTS (THIN RIGID INCLUSIONS) UNDER ALL-ROUND STRETCHING

<sup>1</sup>Kuz I. S., PhD in Physics and Math., associate professor,

<sup>2</sup>Kuz O. N., PhD in Technical Sciences, associate professor, <sup>1</sup>Pyz N. Ya., postgraduate

<sup>1</sup>Ivan Franko National University of Lviv,  
1 Universitetska Str., 79000, Lviv, Ukraine

<sup>2</sup>National University "Lviv Polytechnic",  
12 S. Bandery Str., 79013, Lviv, Ukraine

ihorkuz24@gmail.com, olyakuzon@gmail.com, nazapyz@gmail.com

Effective numerical methods for solving 2D problems related to the theories of elasticity and plasticity have been worked out. The variation-difference method of building finite difference schemes is extended to disconnected domains. The application of the variation-difference method for solving problems of the theory of small elastic-plastic deformations relatively the plates with cuts (thin rigid inclusion), taking into account the linear strengthening of the material and unloading, has been developed. For solving the resultant systems of nonlinear and linear equation, the Newton-Kantorovich method and combined iterative method (gradient and cyclic Chebyshev's one) were proposed to be used. The choice of iteration parameters of the methods for solving the obtained systems of linear and nonlinear algebraic equations was made. The elaborated software ensures solving the problems with different boundary conditions, medium and domain parameters. A variety of problems concerning all-round stretching of the elastic-plastic plates with two perpendicular cuts (thin rigid inclusion) is numerically solved. The zones of evolution of plastic deformations for step enlarging of the loading are constructed. There are found the stresses under which the yield limit and the strength limit are achieved in the plates. On the base of numerical analysis the following main regularities are found: under the close mutual location of cuts in the plate, the plastic deformations first appear under the stress  $P^0$  which is 33% less than in the plate with the same cuts under the far mutual location; however, the strength limit in the plates in the both considered cases is achieved practically under the same stress  $P^0$ .

*Key words: plate, cut, thin rigid inclusion, theory of small elastic-plastic deformations, linear strengthening, unloading, variation-difference method.*

### ВСТУП

Концентратори напружень, зокрема розрізи, тонкі включення або тріщини, існують у конструкціях внаслідок конструкційних вимог, технологічних операцій при їхньому виготовленні або впливу експлуатаційних навантажень. Їхня наявність призводить до концентрації напружень, що може спричинити передчасне руйнування або появу недопустимих деформацій. У багатьох випадках за високого рівня навантажень елементи конструкцій з концентраторами напружень перебувають в умовах допустимого пластичного деформування. Це призводить до складних задач визначення напружено-деформованого стану, розв'язування яких неможливе без залучення ефективних числових методів розрахунку, оскільки застосування аналітичних методів у зв'язку зі складністю форми тіл (обмеженість розмірів, незв'язність) та фізичної нелінійності значно обмежене.

Одним із ефективних числових методів розв'язування крайових задач деформаційної теорії пластичності в незв'язних областях є варіаційно-різницевий метод із використанням відображення криволінійної (косокутної) сітки у вихідній області на рівномірну прямокутну сітку в області, складеній з прямокутників [1-3]. Проте врахування зміцнення матеріалу при пластичному деформуванні та побудова зон еволюції пластичних деформацій при покроковому збільшенні навантаження дали б змогу точніше з'ясувати напружено-деформований стан пластин з двома перпендикулярними розрізами (або такими самими за розмірами тонкими жорсткими включеннями) та їхню міцність. Наша робота є продовженням циклу праць [1-3].

### МЕТА РОБОТИ

З'ясувати вплив двох перпендикулярних розрізів, зокрема при їхньому зближенні, а також абсолютно тонких жорстких включень (АЖВ) замість розрізів, на напружено-деформований стан та міцність пружно-пластичних лінійно зміцнюваних пластин за всебічного розтягу.

### ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ТА ЧИСЛОВИЙ МЕТОД ЇЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Розглядаються плоскі задачі деформаційної теорії пластичності, зокрема теорії малих пружно-пластичних деформацій Ільюшина, за активного навантаження у незв'язній області  $V$  з межею  $\Sigma$ , які моделюють напружено-деформований стан у пластинах з двома перпендикулярними розрізами (рис. 2, 4). З математичного погляду вони полягають у розв'язуванні рівнянь рівноваги в пластині

$$(C_{ijkl}(\epsilon_u)u_{k,l})_{,j} = 0 \tag{1}$$

за використання мішаних крайових умов на її поверхні  $\Sigma (\Sigma_u \cup \Sigma_\sigma = \Sigma)$

$$u_i|_{\Sigma_u} = u_i^0, \quad C_{ijkl}(\epsilon_u)u_{k,l}n_j|_{\Sigma_\sigma} = P_i^0, \tag{2}$$

де

$$C_{ijkl} = \lambda(\epsilon_u)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\epsilon_u)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

$$\lambda(\epsilon_u) = K - (2/3)\mu(\epsilon_u), \quad \mu(\epsilon_u) = \mu(1 - \omega(\epsilon_u)). \tag{3}$$

Тут  $u_i, P_i^0, n_j$  – компоненти векторів переміщень та поверхневих сил, а також зовнішньої нормалі до поверхні  $\Sigma_\sigma$  відповідно;  $\epsilon_u$  – інтенсивність тензора деформацій ( $e_{ij} = \epsilon_{ij} - (1/3)\epsilon_{kk}\delta_{ij}$ ;  $\epsilon_u = \sqrt{e_{ij}e_{ij}}$ );  $K$  – модуль об'ємного стиску;  $\omega(\epsilon_u)$  – функція пластичності Ільюшина [4];  $u_{i,j} \equiv \partial u_i / \partial x_j$ . За однаковими індексами, які зустрічаються в одному виразі двічі, відбувається підсумовування від одиниці до двох.

У випадку плоскої деформації

$$v_1 = u_x(x, y), \quad v_2 = u_y(x, y), \quad v_3 = u_z \equiv 0. \tag{4}$$

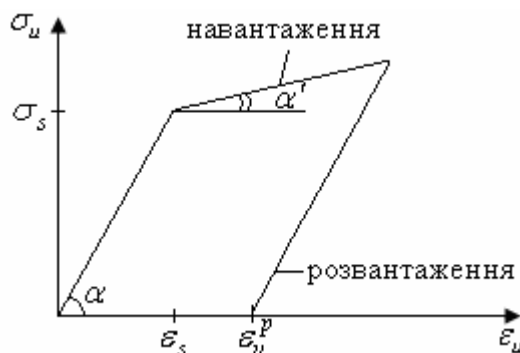


Рис. 1. Графік залежності  $\sigma_u \sim \epsilon_u$  для матеріалу з лінійним зміцненням

Для матеріалу з лінійним зміцненням (рис. 1), зокрема міді, алюмінію та їхніх сплавів, функція  $\omega(\epsilon_u)$  має вигляд

$$\omega(\epsilon_u) = \begin{cases} (1-\gamma)(\epsilon_u - \epsilon_s) / \epsilon_u, & \epsilon_u > \epsilon_s; \\ 0, & \epsilon_u \leq \epsilon_s, \end{cases} \tag{5}$$

де  $\gamma \equiv \mu'/\mu$  – параметр зміцнення;  $2\mu \equiv \text{tg } \alpha$ ;  $2\mu' \equiv \text{tg } \alpha'$ ;  $\sigma_s, \varepsilon_s$  – межі течіння за напруженнями та деформаціями відповідно.

Для процесу розвантаження визначальні співвідношення мають вигляд

$$\sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{ii}, \quad s_{ij} = s'_{ij} + 2\mu(e_{ij} - e'_{ij}), \quad (6)$$

де компоненти тензорів  $e'_{ij}$  і  $s'_{ij}$  відповідають початку процесу розвантаження.

Розглянемо дискретизацію задачі (1), (2), тобто побудуємо різницевий аналог цієї задачі, причому будемо виходити з її варіаційної постановки, тобто використовуватимемо варіаційно-різницевий метод побудови різницевої схеми [5].

Оскільки область  $V$  є незв'язною, то використовуємо такі координати  $\beta^1, \beta^2$ , що відображення

$$x^1 = x^1(\beta^1, \beta^2), \quad x^2 = x^2(\beta^1, \beta^2) \quad (7)$$

переводить її в модельну область  $V_0$  (прямокутник розмірами  $l_1 \times l_2$  або область, складену з прямокутників). У цій області лагранжіан матиме вигляд

$$L_0 = (1/2) \int_{V_0} \sqrt{g} D^{ijkl} v_{ij} v_{kl} d\beta^1 d\beta^2 - \int_{V_0} \sqrt{g} \vec{X} \cdot \vec{v} d\beta^1 d\beta^2 - \int_{\Sigma_0} g(\vec{\beta}) \vec{P}^0 \cdot \vec{v} d\Sigma, \quad (8)$$

де  $D^{ijkl} = C^{imkn}(\vec{\beta}) B_m^j B_n^l$ ,  $A_j^i = \partial x^i / \partial \beta^j$ ,  $B_j^i = \partial \beta^i / \partial x^j$ ,  $\sqrt{g} = \det \underline{A}$ ,

$$g(\vec{\beta}) = \begin{cases} \sqrt{g_{11}}, & \beta^2 = \{0, l_2\}; \\ \sqrt{g_{22}}, & \beta^1 = \{0, l_1\}. \end{cases}$$

Замінивши у (8) всі континуальні функції сітковими, інтеграли – скінченними сумами, похідні – різницевими похідними, отримаємо різницевий аналог лагранжіана  $L_0^h$  за допомогою дискретного аналога відображення (7), яке не мусить бути задане аналітично, зокрема бути конформним. Достатньо мати взаємно однозначну відповідність між вузлами сітки в областях  $V$  та  $V_0$ . Для визначення стаціонарної точки  $L_0^h$  матимемо систему нелінійних алгебричних рівнянь

$$\vec{P}(\vec{v}^h) + \vec{F}^h = 0, \quad (9)$$

яку доцільно розв'язувати ітераційним методом Ньютона – Канторовича, кожним кроком якого є дворівнева процедура розв'язування лінійної системи, яка реалізує схему градієнтного методу та методу з чебишевським набором ітераційних параметрів. Складністю її практичної реалізації є підбір ітераційних параметрів системи (9).

Описаний метод реалізований у вигляді пакету програм, який враховує різні крайові умови, геометрію області та параметри середовища.

## РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

За допомогою викладеного вище варіаційно-різницевого методу розв'язано низку плоских задач деформаційної теорії пластичності про деформування пластин, виготовлених з матеріалу з лінійним зміцненням (див. рис. 1), наприклад, плакованого алюмінієвого сплаву Д16АТ, який широко використовується в літакобудуванні.

**1. Пластина з двома перпендикулярними розрізами, відстань між якими дорівнює більшому розміру розрізу.** На рис. 2 подано геометрію пластини з двома перпендикулярно розташованими розрізами однакового розміру, відстань між якими дорівнює більшому



розміру розрізу, та крайові умови на зовнішній межі. Тут введено безрозмірні координати  $x^0 \equiv x/d$  та  $y^0 \equiv y/d$ , де  $d$  – менший розмір розрізу. Розрізи є вільними від навантажень ( $\sigma_{m\tau} = 0, \sigma_{n\tau} = 0$ ). До усіх країв пластини прикладене безрозмірне рівномірне нормальне напруження  $P^0 \equiv P/\sigma_s$ , де  $\sigma_s$  – межа течіння.

За допомогою діаграм розподілу безрозмірної інтенсивності тензора напружень  $\sigma_u^0 \equiv \sigma_u/\sigma_s$  можна з'ясувати області виникнення та розвитку пластичних деформацій, а також оцінити міцність пластини за тим чи іншим критерієм. Згідно з умовою течіння Губера-Мізеса пластичне деформування починається тоді, коли безрозмірна інтенсивність тензора напружень  $\sigma_u^0$  досягає безрозмірної межі течіння  $\sigma_s^0 = 1$ . Згідно з критерієм міцності (скажімо найбільшої інтенсивності дотичних напружень) небезпечний стан досягається, коли безрозмірна інтенсивність тензора напружень  $\sigma_u^0$  досягає безрозмірної величини  $\sqrt{2/3}\sigma_B^0$ , де  $\sigma_B^0 \equiv \sigma_B/\sigma_s$  – безрозмірна межа міцності [6].

На рис. 3 зображено розвиток зон пластичних деформацій зі збільшенням безрозмірного напруження  $P^0$  для зображеної на рис. 2 пластини (модуль пружності  $E = 7,31 \cdot 10^4$  МПа; коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,33$ ; параметр зміцнення  $\gamma = 0,1$ ; межа текучості  $\sigma_s = 324$  МПа; межа міцності  $\sigma_B = 469$  МПа). На рис. 3 зони 1 побудовані за  $P^0 = 0,37$ ; зони 2 – за  $P^0 = 0,56$ ; зони 3 – за  $P^0 = 0,8$ ; зона 4 – за  $P^0 = 0,92$ .

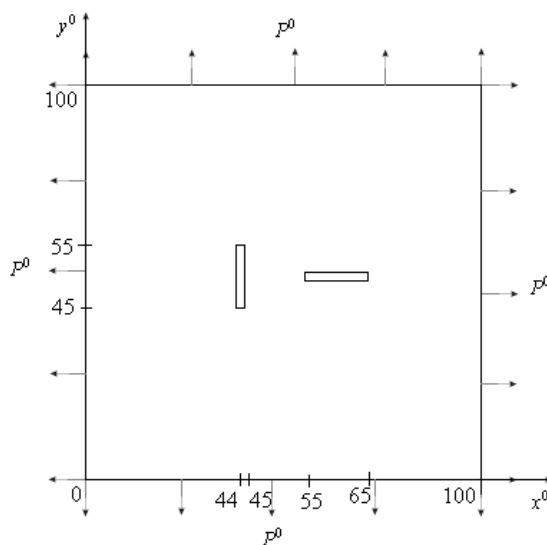


Рис. 2. Пластина з двома перпендикулярними розрізами, відстань між якими дорівнює більшому розміру розрізу, та крайовими умовами на зовнішній межі

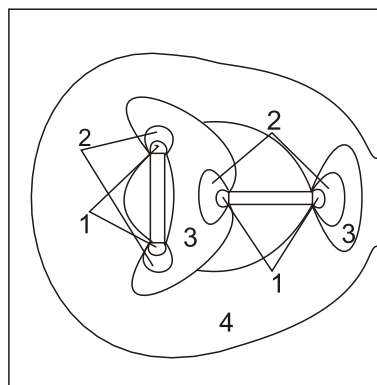


Рис. 3. Діаграма областей розвитку пластичних деформацій за покрокового збільшення  $P^0$  у пластині з двома перпендикулярними розрізами, відстань між якими дорівнює більшому розміру розрізу

Як видно з рис. 3, спочатку з'являються овальні області пластичних деформацій на торцях розрізів (зони 1), які далі розповсюджуються овалами навколо торців (зони 2). За напруження  $P^0 = 0,8$  області пластичних деформацій навколо торців лівого розрізу та лівого торця правого розрізу об'єднуються (зони 3). За напруження  $P^0 = 0,92$  уже дві зони 3 об'єднуються і виходять на правий край пластини (зона 4). За цього напруження у пружному стані всередині зони 4 залишаються лише овальна зона навколо лівого отвору і зона у вигляді півмісяця навколо правого. Вихід зони пластичності саме на правий край пластини пояснюється найбільшою близькістю до нього відповідного торця розрізу.

**2. Пластина з двома перпендикулярними розрізами, відстань між якими дорівнює меншому розміру розрізу.** На рис. 4 подано геометрію пластини з двома перпендикулярно розташованими розрізами, відстань між якими дорівнює меншому розміру розрізу, та крайові умови на зовнішній межі. Тут також введено безрозмірні координати  $x^0 \equiv x/d$  та  $y^0 \equiv y/d$ , де  $d$  – менший розмір розрізу. Розрізи є вільними від навантажень ( $\sigma_{nn} = 0, \sigma_{nt} = 0$ ). До усіх країв пластини також прикладене безрозмірне рівномірне нормальне напруження  $P^0 \equiv P/\sigma_s$ , де  $\sigma_s$  – межа течіння.

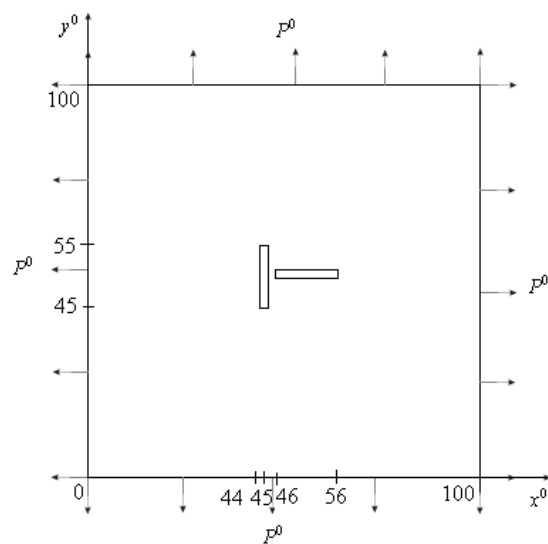


Рис. 4. Пластина з двома перпендикулярними розрізами, відстань між якими дорівнює меншому розміру розрізу, та крайовими умовами на зовнішній межі

На рис. 5 зображено розвиток зон пластичних деформацій зі збільшенням безрозмірного напруження  $P^0$  для поданої на рис. 4 пластини з такими ж характеристиками. На рис. 5 зони 1 побудовані за  $P^0 = 0,25$ ; зони 2 – за  $P^0 = 0,62$ ; зони 3 – за  $P^0 = 0,8$ ; зони 4 – за  $P^0 = 0,92$ .

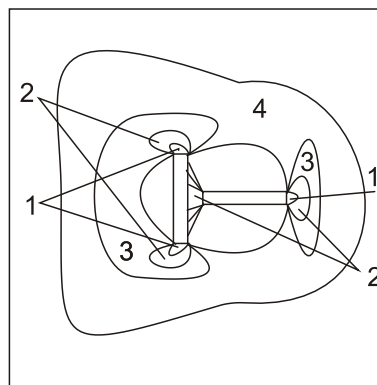


Рис. 5. Діаграма областей розвитку пластичних деформацій за покрокового збільшення  $P^0$  у пластині з двома перпендикулярними розрізами, відстань між якими дорівнює меншому розміру розрізу

Як видно з рис. 5, на відміну від рис. 3, області пластичних деформацій вперше з'являються не на усіх торцях розрізів (зони 1). За напруження  $P^0 = 0,62$  зони пластичних деформацій навколо лівого розрізу розвиваються зміщеними до лівого краю пластини овалами (зони 2), і за напруження  $P^0 = 0,8$  ці овали об'єднуються (зони 3).

На основі числового аналізу виявлено такі основні закономірності: при ближчому взаємному розташуванні розрізів у пластині пластичні деформації вперше виникають за напруження  $P^0$  на 33% меншого, ніж у пластині з такими ж розрізами при їхньому дальшому розташуванні; проте утримувальна здатність пластин в обох розглядуваних випадках втрачається практично за однакового напруження  $P^0$ .

**3. Пластина з розрізом та перпендикулярним до нього таким самим за розмірами АЖВ, відстань між якими дорівнює більшому розміру розрізу**

На рис. 6 подано геометрію пластини з розрізом та перпендикулярним до нього таким самим за розміром АЖВ, відстань між якими дорівнює більшій величині розрізу, та крайові умови на зовнішній межі. Тут введено безрозмірні координати  $x^0 \equiv x/d$  та  $y^0 \equiv y/d$ , де  $d$  – менший розмір розрізу. Розріз є вільним від навантажень ( $\sigma_{nn} = 0, \sigma_{\tau\tau} = 0$ ). Наявність АЖВ моделюємо крайовими умовами  $u_\tau = 0, u_n = 0$  на його межі. До усіх країв пластини прикладене безрозмірне рівномірне нормальне напруження  $P^0 \equiv P/\sigma_s$ , де  $\sigma_s$  – межа текучості.

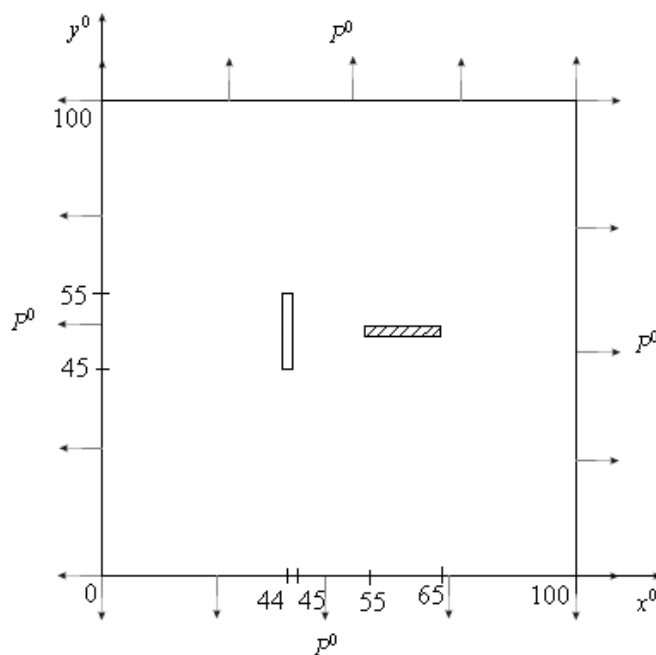


Рис. 6. Пластина з розрізом та перпендикулярним до нього таким самим за розміром АЖВ, відстань між якими дорівнює більшій величині розрізу, та крайові умови на зовнішній межі

На рис. 7 зображено розвиток зон пластичних деформацій зі збільшенням безрозмірного напруження  $P^0$  для зображеної на рис. 6 пластини (модуль пружності  $E = 7,31 \cdot 10^4$  МПа; коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,33$ ; параметр зміцнення  $\gamma = 0,1$ ; межа текучості  $\sigma_s = 324$  МПа; межа міцності  $\sigma_B = 469$  МПа). На рис. 3 зони 1 побудовані за  $P^0 = 0,4$ ; зони 2 – за  $P^0 = 0,68$ ; зони 3 – за  $P^0 = 0,93$ ; зона 4 – за  $P^0 = 0,96$ .

Як видно з рис. 7, спочатку з'являються овальні області пластичних деформацій на торцях розрізу (зони 1), які далі розповсюджуються овалами навколо нього та з'являються навколо торців АЖВ (зони 2). За напруження  $P^0 = 0,93$  області пластичних деформацій навколо

торців розрізу та АЖВ об'єднуються (зона 3). За напруження  $P^0 = 0,96$  у пружному стані всередині зони 4 залишаються лише овальна зона навколо розрізу.

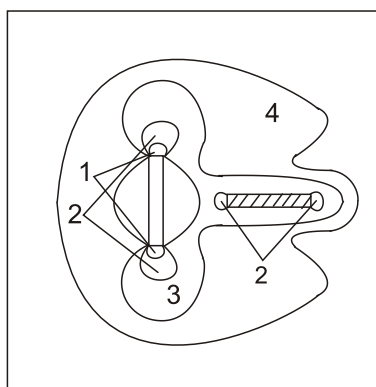


Рис. 7. Діаграма областей розвитку пластичних деформацій за покрокового збільшення  $P^0$  у пластині з розрізом та перпендикулярним до нього таким самим за розміром АЖВ, відстань між якими дорівнює більшій величині розрізу

**4. Пластина з двома перпендикулярними АЖВ, відстань між якими дорівнює більшому розміру АЖВ.** На рис. 8 подано геометрію пластини з двома перпендикулярними АЖВ, відстань між якими дорівнює більшому розміру АЖВ, та крайові умови на зовнішній межі. Тут також введено безрозмірні координати  $x^0 \equiv x/d$  та  $y^0 \equiv y/d$ , де  $d$  – менший розмір розрізу. Наявність АЖВ також моделюємо крайовими умовами  $u_\tau = 0, u_n = 0$  на їхніх межах. До усіх країв пластини також прикладене безрозмірне рівномірне нормальне напруження  $P^0 \equiv P/\sigma_s$ , де  $\sigma_s$  – межа течіння.

На рис. 9 зображено розвиток зон пластичних деформацій зі збільшенням безрозмірного напруження  $P^0$  для поданої на рис. 4 пластини з такими ж характеристиками. На рис. 5 зони 1 побудовані за  $P^0 = 0,46$ ; зони 2 – за  $P^0 = 0,77$ ; зони 3 – за  $P^0 = 0,93$ ; зони 4 – за  $P^0 = 0,99$ .

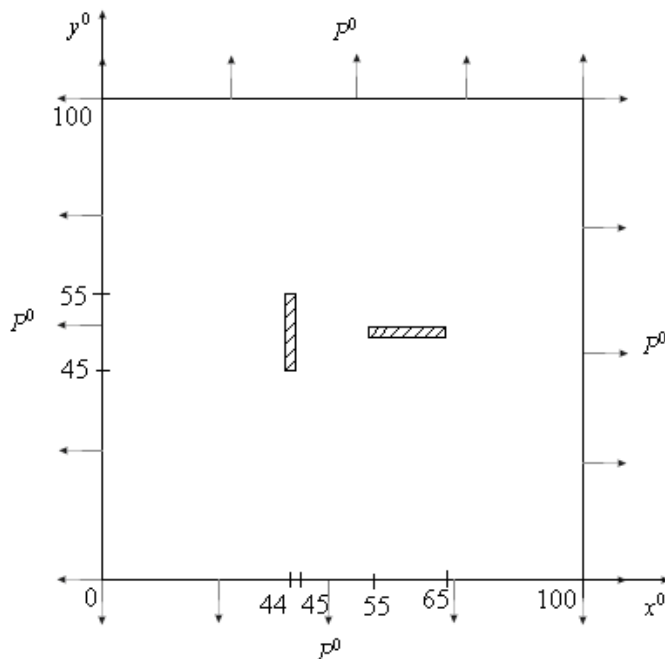


Рис .8. Пластина з двома перпендикулярними АЖВ, відстань між якими дорівнює більшому розміру АЖВ, та крайові умови на зовнішній межі

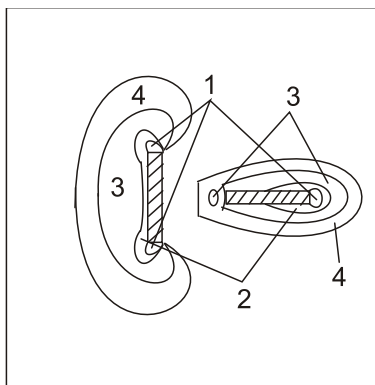


Рис. 9. Діаграма областей розвитку пластичних деформацій за покрокового збільшення  $P^0$  у пластині з двома перпендикулярними АЖВ, відстань між якими дорівнює більшому розміру АЖВ, та крайові умови на зовнішній межі

Як видно з рис.9, області пластичних деформацій вперше з'являються не на усіх торцях розрізів (зони 1). За напруження  $P^0 = 0,77$  зони пластичних деформацій навколо лівого АЖВ об'єднуються (зони 2), і за напруження  $P^0 = 0,93$  з'являється овальна зона біля лівого торця правого АЖВ (зони 3).

### ВИСНОВКИ

Побудовано зони еволюції пластичних деформацій у пластинах з двома перпендикулярними розрізами (тонкими АЖВ) за покрокового збільшення навантаження. З'ясовані напруження, за яких у пластинах досягаються межі текучості та міцності.

На основі числового аналізу виявлено такі основні закономірності: при ближчому взаємному розташуванні розрізів у пластині пластичні деформації вперше виникають за напруження  $P^0$  на 33% меншого, ніж у пластині з такими ж розрізами при їхньому дальшому розташуванні; проте утримувальна здатність пластин в обох розглянутих випадках втрачається практично за однакового напруження  $P^0$ . За наявності АЖВ замість розрізу пластина, очевидно, зміцнюється. Зокрема у пластині з розрізом та АЖВ пластичні деформації вперше виникають за напруження  $P^0$  на 15% меншого, ніж у пластині з двома АЖВ; проте утримувальна здатність пластин в обох розглянутих випадках також втрачається практично за однакового напруження  $P^0$ .

### ЛІТЕРАТУРА

1. Кузь І., Тімар І. Напружено-деформований стан пружно-пластичних пластин з розрізом або абсолютно жорстким включенням. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 2010. Вип. 73. С. 148–154.
2. Кузь І. Пластичне деформування пластин з двома співвісними або компланарними розрізами (абсолютно жорсткими включеннями). *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 2012. Вип. 76. С. 91–98.
3. Кузь І., Кузь О., Пиз Н. Напружено-деформований стан пружно-пластичних лінійно зміцнюваних пластин з двома перпендикулярними розрізами за всебічного розтягу. *Вісник ТНТУ.* 2015. № 2(78). С. 110–116.
4. Ильющин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. Москва: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.
5. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1981. 344 с.
6. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пластичності та міцності. Львів: Світ, 1999. Т.1. 532 с. 1999. Т.2. 419 с.

### REFERENCES

1. Kuz, I. & Timar, I. (2010). Stress-strain state of elastic-plastic plates with crack or the same thin rigid body. *Visnyk of Lviv University, Ser. Mech. et Math.*, Iss. 73, pp. 148-154.
2. Kuz, I. (2012). Plactical strain of plates with two cuts (the same thin rigid body). *Visnyk of Lviv University, Ser. Mech. et Math.*, Iss. 76, pp. 91-97.

3. Kuz, I., Kuz, O. & Pyz, N. (2015). Stress-strain state of elastic-plastic linearly strengthenable plates with two perpendicular cuts under all-round stretching. Visnyk of TNTU, No. 2(78), pp. 110-116.
4. Плушин, А. (1963). Plasticity. Bases of General Mathematical Theory. Moscow: Publishing House of the USSR Academy of Science.
5. Pobedria, B. E. (1981). Numerical Methods in Theory of Elasticity and Plasticity. Moscow: Publishing House of Moscow University.
6. Bozydarnyk, V. V. & Sulym, H. T. (1999). Elements of Theory of Plasticity and Strength. Vol. 1, 2. Lviv: Publishing House "Svit".

УДК 519.172

## СПЕКТР РЕБЕРНЫХ РАЗРЕЗОВ ГРАФА И ЗАДАЧА ИЗОМОРФИЗМА

Курапов С. В., к. ф.-м. н., доцент, Давидовский М. В.

*Запорожский национальный университет,  
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

[lilili5050@rambler.ru](mailto:lilili5050@rambler.ru)

Данная работа посвящена одной из основополагающих структур в графе – реберному разрезу графа. В статье приведены формальные определения центрального и реберного разрезов графа. Показана связь между центральными разрезами и квалиразрезами в графе. На основании понятия реберного разреза и операции порождения строится спектр реберных разрезов, характеризующийся множеством ребер определенного уровня. Показано, что спектр реберных разрезов графа может быть применен для задачи распознавания изоморфизма графов.

*Ключевые слова: граф, изоморфизм, центральные разрезы, реберные разрезы, квазициклы, спектр реберных разрезов.*

## СПЕКТР РЕБЕРНОГО РОЗРІЗУ ГРАФА ТА ЗАДАЧА ІЗОМОРФІЗМУ

Курапов С. В., к. ф.-м. н., доцент, Давидовський М. В.

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

[lilili5050@rambler.ru](mailto:lilili5050@rambler.ru)

Робота присвячена одній з основоположних структур у графі – реберному розрізу графа. У статті наведені формальні визначення центрального і реберного розрізів графа. Показано зв'язок між центральними розрізами і квалірозрізами у графі. На основі поняття реберного розрізу і операції породження будується спектр реберних розрізів, що характеризується множиною ребер визначеного рівня. Показано, що спектр реберних розрізів графа може бути застосований для задачі розпізнавання ізоморфізму графів.

*Ключові слова: граф, ізоморфізм, центральні розрізи, реберні розрізи, квазіцикли, спектр реберних розрізів.*

## GRAPH EDGE CUT AND THE GRAPH ISOMORPHISM PROBLEM

Kurapov S. V., PhD in Physics and Maths, associate professor, Davidovsky M. V.

*Zaporizhzhya National University,  
Zhukovsky st., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

[lilili5050@rambler.ru](mailto:lilili5050@rambler.ru)

The presented research is devoted to one of the fundamental structures in graphs – the edge cut of a graph. In this article the authors provide formal definitions of central and edge cuts of a graph and show the relation between central cuts and quasi-cycles in a graph. For that they use the notion of a ring sum of graphs and prove three special lemmas. The first lemma states that the ring sum of all central cuts of a

graph is an empty set. The second one establishes that the same statement holds also for all edge cuts of a graph. In turn, the third lemma states that the ring sum of the intersection of central cuts for the edges of any quasi-cycle of a graph is a quasi-cycle. Further, based on the notion of edge cut and the generation operation, the authors show the process of constructing a spectrum of edge cuts. The spectrum is basically characterized by a set of edges of a determined level. Moreover, it is shown that the spectrum of graph edge cuts can be applied to the graph isomorphism recognition problem. In addition, the authors consider the specificity of isomorphism recognition in a case of strongly regular graphs. The detailed examples of solving the problem of isomorphism recognition using the spectrum of graph edge cuts are given in the final part of the article.

*Keywords: graph, isomorphism, central cuts, edge cuts, quasicycles, spectrum of edge cuts.*

### ЦЕНТРАЛЬНЫЕ И РЕБЕРНЫЕ РАЗРЕЗЫ В ГРАФЕ

Любой суграф, принадлежащий подпространству разрезов  $S$ , в общем случае является квалиразрезом [2].

**Определение 1.** *Центральным разрезом* будем называть квалиразрез, состоящий из инцидентных ребер, принадлежащих данной вершине, и будем его обозначать  $s\{x_i\}$  для  $i$  – вершины (см. рис. 1,а).

**Определение 2.** *Реберным разрезом* будем называть квалиразрез, образованный из инцидентных ребер, принадлежащих двум конечным вершинам данного ребра, за исключением самого ребра, и будем его обозначать  $w(u_{ij})$  для ребра  $u_{ij}$  соединяющего вершины  $x_i$  и  $x_j$  (см. рис. 1,б).

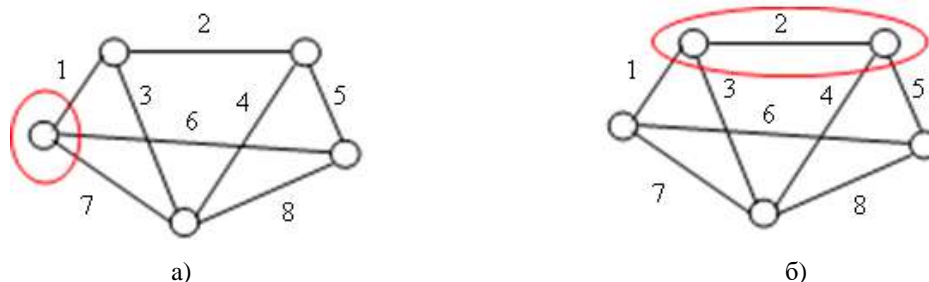


Рис.1. Центральный разрез  $\{u_1, u_6, u_7\}$  и реберный разрез  $\{u_1, u_3, u_4, u_5\}$

Количество ребер в реберном разрезе будем называть *длиной разреза*.

### СВЯЗЬ ЦЕНТРАЛЬНЫХ И РЕБЕРНЫХ РАЗРЕЗОВ С КВАЗИЦИКЛАМИ ГРАФА

Между центральными разрезами и квазициклами графа существует связь, устанавливаемая следующими леммами:

**Лемма 1.** Кольцевая сумма множества центральных разрезов графа есть пустое множество.

*Доказательство.* Этот факт следует из линейной независимости любых  $n-1$  вершин [3].

**Лемма 2.** Кольцевая сумма реберных разрезов для любого квазицикла графа есть пустое множество.

*Доказательство.* Пусть длина квазицикла равна  $p$  и реберный разрез равен кольцевой сумме единичных разрезов для концевых вершин ребра  $w(u_{ij}) = w(x_i) \oplus w(x_j)$ , тогда:

$$w(u_{12}) \oplus w(u_{23}) \oplus \dots \oplus w(u_{p1}) = (w(x_1) \oplus w(x_2)) \oplus (w(x_2) \oplus w(x_3)) \oplus \dots \oplus (w(x_p) \oplus w(x_1)) = \emptyset. \tag{1}$$

И кольцевая сумма есть пустое множество, так как центральные разрезы присутствуют в правой части выражения (1) дважды (см. рис. 2).

**Лемма 3.** Кольцевая сумма пересечения центральных разрезов для ребер любого квазицикла графа есть квазицикл.

Доказательство. Любое ребро графа можно представить в виде  $u_{ij} = w(x_i) \cap w(x_j)$ , а любой квазицикл можно представить как кольцевую сумму ребер, тогда:

$$c = u_{12} \oplus u_{23} \oplus \dots \oplus u_{p1} = (w(x_1) \cap w(x_2)) \oplus (w(x_2) \cap w(x_3)) \oplus \dots \oplus (w(x_p) \cap w(x_1)). \tag{2}$$

Отсюда следует:

$$c = \sum_{k=1}^p w(x_k) \cap w(x_{k+1}). \tag{3}$$

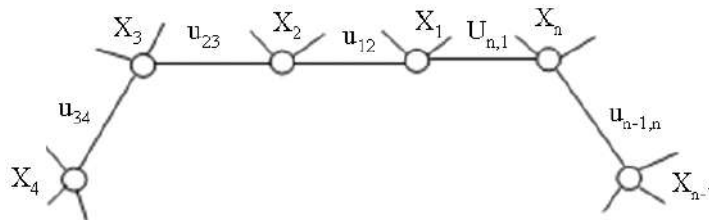


Рис. 2. Цикл графа

**Пример 1.** Для иллюстрации лемм рассмотрим следующий граф G, представленный на рис. 3.

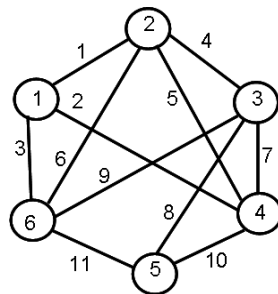


Рис. 3. Граф G

Множество центральных разрезов графа  $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ , где:

$$\begin{aligned} s_1 &= \{u_1, u_2, u_3\}; & s_2 &= \{u_1, u_4, u_5, u_6\}; & s_3 &= \{u_4, u_7, u_8, u_9\}; \\ s_4 &= \{u_2, u_5, u_7, u_{10}\}; & s_5 &= \{u_8, u_{10}, u_{11}\}; & s_6 &= \{u_3, u_6, u_9, u_{11}\}. \end{aligned}$$

Кольцевая сумма центральных разрезов графа равна:

$$\{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_1, u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_4, u_7, u_8, u_9\} \oplus \{u_2, u_5, u_7, u_{10}\} \oplus \{u_8, u_{10}, u_{11}\} \oplus \{u_3, u_6, u_9, u_{11}\} = \emptyset.$$

Выберем цикл  $\{u_4, u_6, u_9\}$ . Кольцевая сумма реберных разрезов равна:

$$\{u_1, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9\} \oplus \{u_1, u_3, u_4, u_5, u_9, u_{11}\} \oplus \{u_3, u_4, u_6, u_7, u_8, u_{11}\} = \emptyset.$$

Цикл представляется как сумма пересечений центральных разрезов:

$$c = (\{u_1, u_4, u_5, u_6\} \cap \{u_4, u_7, u_8, u_9\}) \oplus (\{u_1, u_4, u_5, u_6\} \cap \{u_3, u_6, u_9, u_{11}\}) \oplus (\{u_3, u_6, u_9, u_{11}\} \cap \{u_4, u_7, u_8, u_9\}) = \{u_4\} \oplus \{u_6\} \oplus \{u_9\} = \{u_4, u_6, u_9\}.$$

В свою очередь, реберный разрез для ребра  $u_i$  есть элемент множества разрезов графа  $S(G)$ . В классической теории графов ребра реберного графа  $L(G)$  порождают новый реберный граф  $L(L(G))$  и т.д. [1,4]. В общем случае можно определить итерированный реберный граф рекуррентным соотношением  $L^n(G) = L(L^{n-1}(G)), n \geq 2$ . Можно заметить, что количество ребер при переходе от реберного графа  $L^{n-1}(G)$  к графу  $L^n(G)$  увеличивается. В отличие от порождения итерированных реберных графов, мы будем рассматривать цепочку порождения итерированных графов квалиразрезов исходного графа, определяемых рекуррентным



соотношением  $W^k(G) = W(W^{k-1}(G)), k \geq 1$  по принципу – граф квалиразрезов  $n$ -го уровня  $W^k(G)$  порождает граф квалиразрезов  $k+1$  уровня  $W^{k+1}(G)$ . В отличие от цепочки структуры реберных графов, такая цепочка порождает разрезы всегда с количеством не более величины  $m$  – количества ребер, и такое порождение всегда конечно. И это свойство может использоваться для построения нового частично-ориентированного графа с петлями, характеризующего определенный уровень квалиразрезов  $W^k(G)$  с количеством вершин, равным  $m$ .

С другой стороны, порождение цепочек квалиразрезов  $k+1$  уровня графа  $G$  для каждого ребра осуществляется путем сложения по модулю 2 реберных разрезов  $k$ -го уровня этого ребра. Каждое новое подмножество ребер формируется рекурсивно, с помощью предыдущего множества:

$$w^{k+1}(G) = \theta(w^k(G)), \tag{4}$$

где количество слагаемых равно количеству ребер предыдущего подмножества, а  $\theta$  – оператор порождения разреза. Такое построение и определяет строку для ребра  $u_i$  матрицы смежностей графа  $W^k(G)$  разрезов уровня  $k$ .

Все уровневые подмножества также будут представлять собой квалиразрезы исходного графа  $G$ . Так, нулевой уровень будет состоять из реберных разрезов графа  $G$ , а все остальные порождаться им. При получении циклического повтора подмножества или подмножества нулевой мощности для ребра графа порождение прекращается.

На каждом уровне образуются  $m$  подмножеств, зависящих от ребер графа, что дает нам возможность построить квадратные матрицы размером  $m \times m$  на каждом уровне, которые можно представлять как матрицы смежностей графа разрезов определенного уровня.

Как видно, реберные разрезы графа состоят из подмножества ребер и порождают ярусные квалиразрезы графа, так, как каждое ребро можно представить в виде реберного разреза.

### СПЕКТР РЕБЕРНЫХ РАЗРЕЗОВ

Спектром реберных разрезов графа будем называть совокупность ярусных реберных разрезов.

**Пример 2.** В качестве примера выделения спектра реберных разрезов, рассмотрим следующий граф (см. рис. 4).

Множество единичных разрезов графа:

$$s(x_1) = s_1 = \{u_1, u_2, u_3\};$$

$$s(x_2) = s_2 = \{u_4, u_5, u_6\};$$

$$s(x_3) = s_3 = \{u_1, u_4, u_7\};$$

$$s(x_4) = s_4 = \{u_2, u_5, u_7\};$$

$$s(x_5) = s_5 = \{u_3, u_6\}.$$

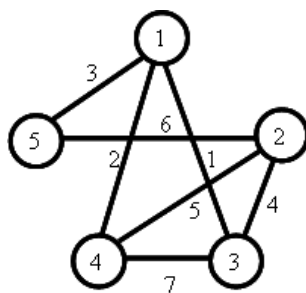


Рис. 4. Граф G

Множество реберных разрезов графа (0-уровень разрезов):

$$w_0(u_1) = s_1 \oplus s_3 = \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} = \{u_2, u_3, u_4, u_7\};$$

$$w_0(u_2) = s_1 \oplus s_4 = \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} = \{u_1, u_3, u_5, u_7\};$$

$$w_0(u_3) = s_1 \oplus s_5 = \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_1, u_2, u_6\};$$

$$w_0(u_4) = s_2 \oplus s_3 = \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} = \{u_1, u_5, u_6, u_7\};$$

$$w_0(u_5) = s_2 \oplus s_4 = \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} = \{u_2, u_4, u_6, u_7\};$$

$$w_0(u_6) = s_2 \oplus s_5 = \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_3, u_4, u_5\};$$

$$w_0(u_7) = s_3 \oplus s_4 = \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} = \{u_1, u_2, u_4, u_5\}.$$

Множество квалиразрезов 1-го уровня (яруса):

$$\begin{aligned} w_1(u_1) &= \theta(\{u_2, u_3, u_4, u_7\}) = s_1 \oplus s_4 \oplus s_1 \oplus s_5 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_3 \oplus s_4 = s_2 \oplus s_5 = \\ &= \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_3, u_4, u_5\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1(u_2) &= \theta(\{u_1, u_3, u_5, u_7\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_5 \oplus s_2 \oplus s_4 \oplus s_3 \oplus s_4 = s_2 \oplus s_5 = \\ &= \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_3, u_4, u_5\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1(u_3) &= \theta(\{u_1, u_2, u_6\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_5 = s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\ &= \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_3, u_6\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} = \{u_1, u_2, u_3\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1(u_4) &= \theta(\{u_1, u_5, u_6, u_7\}) s_1 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_5 \oplus s_3 \oplus s_4 = s_1 \oplus s_5 = \\ &= \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_1, u_2, u_6\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1(u_5) &= \theta(\{u_2, u_4, u_6, u_7\}) s_1 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_5 \oplus s_3 \oplus s_4 = s_1 \oplus s_5 = \\ &= \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_1, u_2, u_6\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1(u_6) &= \theta(\{u_3, u_4, u_5\}) = s_1 \oplus s_5 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_4 = s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\ &= \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_4, u_5, u_6\}; \end{aligned}$$

$$w_1(u_7) = \theta(\{u_1, u_2, u_4, u_5\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_4 = \emptyset.$$

Множество квалиразрезов 2-го уровня (яруса):

$$\begin{aligned} w_2(u_1) &= \theta(\{u_3, u_4, u_5\}) = s_1 \oplus s_5 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_4 = s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\ &= \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_4, u_5, u_6\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2(u_2) &= \theta(\{u_3, u_4, u_5\}) = s_1 \oplus s_5 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_4 = s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\ &= \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_4, u_5, u_6\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2(u_3) &= \theta(\{u_1, u_2, u_3\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_1 \oplus s_5 = s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\ &= \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_4, u_5, u_6\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2(u_4) &= \theta(\{u_1, u_2, u_6\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_5 = s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\ &= \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_3, u_6\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} = \{u_1, u_2, u_3\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2(u_5) &= \theta(\{u_1, u_2, u_6\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_5 = s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\ &= \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_3, u_6\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} = \{u_1, u_2, u_3\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2(u_6) &= \theta(\{u_4, u_5, u_6\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_5 = s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\ &= \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_3, u_6\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} = \emptyset; \end{aligned}$$

$$w_2(u_7) = \emptyset.$$

Множество квалиразрезов 3-го уровня (яруса):

$$\begin{aligned}
 w_3(u_1) &= \theta(\{u_4, u_5, u_6\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_5 = s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\
 &= \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_3, u_6\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} = \{u_1, u_2, u_3\}; \\
 w_3(u_2) &= \theta(\{u_4, u_5, u_6\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_5 = s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\
 &= \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_3, u_6\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} = \{u_1, u_2, u_3\}; \\
 w_3(u_3) &= \theta(\{u_4, u_5, u_6\}) = s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_5 \oplus s_2 \oplus s_6 = s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\
 &= \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_3, u_6\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} = \{u_1, u_2, u_3\} = w_1\{u_3\} = \emptyset \\
 w_3(u_4) &= \theta(\{u_1, u_2, u_3\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_1 \oplus s_5 = s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\
 &= \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_4, u_5, u_6\}; \\
 w_3(u_5) &= \theta(\{u_1, u_2, u_3\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_1 \oplus s_5 = s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\
 &= \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_4, u_5, u_6\}; \\
 w_3(u_6) &= \theta(\{u_1, u_2, u_3\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_1 \oplus s_5 = s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\
 &= \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_4, u_5, u_6\} = w_1\{u_6\} = \emptyset; \\
 w_3(u_7) &= \emptyset.
 \end{aligned}$$

Множество квалиразрезов 4-го уровня (яруса):

$$\begin{aligned}
 w_4(u_1) &= \theta(\{u_1, u_2, u_3\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_1 \oplus s_5 = s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\
 &= \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_4, u_5, u_6\} = w_2\{u_1\} = \emptyset; \\
 w_4(u_2) &= \theta(\{u_1, u_2, u_3\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_1 \oplus s_5 = s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\
 &= \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_4, u_5, u_6\} = w_2\{u_1\} = \emptyset; \\
 w_4(u_3) &= \emptyset; \\
 w_4(u_4) &= \theta(\{u_4, u_5, u_6\}) = s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_5 \oplus s_2 \oplus s_6 = s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\
 &= \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_3, u_6\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} = \{u_1, u_2, u_3\} = w_2\{u_4\} = \emptyset; \\
 w_4(u_5) &= \theta(\{u_4, u_5, u_6\}) = s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_5 \oplus s_2 \oplus s_6 = s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\
 &= \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_3, u_6\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} = \{u_1, u_2, u_3\} = w_2\{u_5\} = \emptyset; \\
 w_4(u_6) &= \emptyset; \\
 w_4(u_7) &= \emptyset.
 \end{aligned}$$

Результаты расчета спектра реберных разрезов по уровням можно свести в таблицу 1.

Таблица 1 – Результаты расчета спектра реберных разрезов по уровням

	0 уровень	1 уровень	2 уровень	3 уровень	4 уровень
для ребра $u_1$	$\{u_2, u_3, u_4, u_7\}$	$\{u_3, u_4, u_5\}$	$\{u_4, u_5, u_6\}$	$\{u_1, u_2, u_3\}$	$\{u_4, u_5, u_6\} = \emptyset$
для ребра $u_2$	$\{u_1, u_3, u_5, u_7\}$	$\{u_3, u_4, u_5\}$	$\{u_4, u_5, u_6\}$	$\{u_1, u_2, u_3\}$	$\{u_4, u_5, u_6\} = \emptyset$
для ребра $u_3$	$\{u_1, u_2, u_6\}$	$\{u_1, u_2, u_3\}$	$\{u_4, u_5, u_6\}$	$\{u_1, u_2, u_3\} = \emptyset$	$\emptyset$
для ребра $u_4$	$\{u_1, u_5, u_6, u_7\}$	$\{u_1, u_2, u_6\}$	$\{u_1, u_2, u_3\}$	$\{u_4, u_5, u_6\}$	$\{u_1, u_2, u_3\} = \emptyset$
для ребра $u_5$	$\{u_2, u_4, u_6, u_7\}$	$\{u_1, u_2, u_6\}$	$\{u_1, u_2, u_3\}$	$\{u_4, u_5, u_6\}$	$\{u_1, u_2, u_3\} = \emptyset$
для ребра $u_6$	$\{u_2, u_4, u_6, u_7\}$	$\{u_4, u_5, u_6\}$	$\{u_1, u_2, u_3\}$	$\{u_4, u_5, u_6\} = \emptyset$	$\emptyset$
для ребра $u_7$	$\{u_1, u_2, u_4, u_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Если все квалиразрезы суть пустые суграфы либо квалиразрезы начинают повторяться, то дальнейшее порождения ярусных квалиразрезов прекращается.

Порождение ярусных квалиразрезов можно представить в виде следующей цепочки преобразований:

$$W \rightarrow F_1\{W\} \rightarrow F_2\{W\} \rightarrow F_3\{W\} \rightarrow F_4\{W\} \rightarrow \emptyset.$$

Цепочку преобразования разрезов для каждого ребра можно представить в виде:

$$w_1 = s_1 \oplus s_3 \rightarrow s_2 \oplus s_5 \rightarrow s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \rightarrow s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \rightarrow s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \emptyset;$$

$$w_2 = s_1 \oplus s_4 \rightarrow s_2 \oplus s_5 \rightarrow s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \rightarrow s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \rightarrow s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \emptyset;$$

$$w_3 = s_1 \oplus s_5 \rightarrow s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \rightarrow s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \rightarrow s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \emptyset \rightarrow \emptyset;$$

$$w_4 = s_2 \oplus s_3 \rightarrow s_1 \oplus s_5 \rightarrow s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \rightarrow s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \rightarrow s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \emptyset;$$

$$w_5 = s_2 \oplus s_4 \rightarrow s_1 \oplus s_5 \rightarrow s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \rightarrow s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \rightarrow s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \emptyset;$$

$$w_6 = s_2 \oplus s_5 \rightarrow s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \rightarrow s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \rightarrow s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \emptyset \rightarrow \emptyset;$$

$$w_7 = s_3 \oplus s_4 \rightarrow \emptyset \rightarrow \emptyset \rightarrow \emptyset \rightarrow \emptyset.$$

### ЗАДАЧА ИЗОМОРФИЗМА

**Пример 3.** При распознавании изоморфизма сильно регулярные графы, имеющие одинаковые параметры, могут различаться мощностью множеств изометрических циклов и другими количественными параметрами. Например, два сильно регулярных графа с названиями Lattice graph и Shrikhande graph с параметрами  $\text{sr}(16,6,2,2)$  обладают мощностью множеств изометрических циклов  $\text{card}(C_\tau(G_1)) = 68$  и  $\text{card}(C_\tau(G_2)) = 44$ .

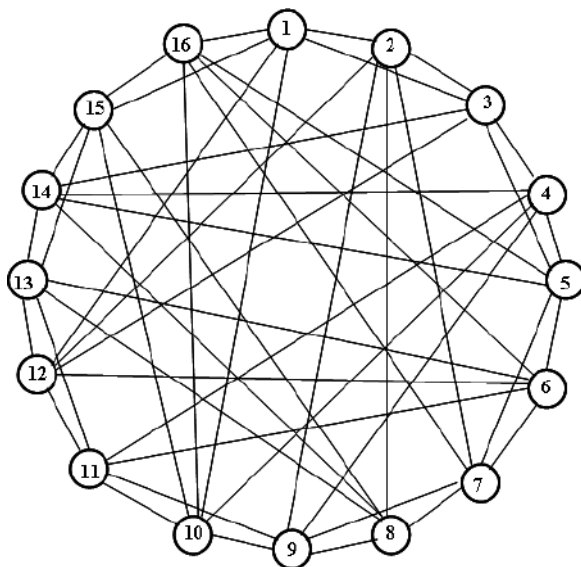


Рис. 5. Сильно регулярный граф  $G_1$  (lattice graph) с параметрами  $\text{sr}(16,6,2,2)$

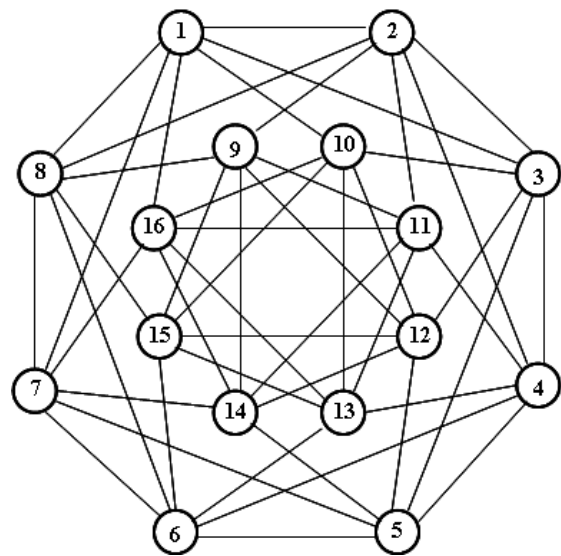


Рис. 6. Сильно регулярный граф  $G_2$  (shrikhande graph) с параметрами  $\text{sr}(16,6,2,2)$

Множество изометрических циклов для графа  $G_1$  (lattice graph) на рис. 5.

$$c_1 = \{u_1, u_2, u_7\} \rightarrow \{x_1, x_2, x_3\};$$

$$c_2 = \{u_1, u_3, u_{10}, u_{37}\} \rightarrow \{x_1, x_2, x_9, x_{10}\};$$

$$c_3 = \{u_1, u_4, u_{11}\} \rightarrow \{x_1, x_2, x_{12}\};$$

$$c_4 = \{u_1, u_5, u_9, u_{36}\} \rightarrow \{x_1, x_2, x_8, x_{15}\};$$

$$c_5 = \{u_1, u_6, u_8, u_{32}\} \rightarrow \{x_1, x_2, x_7, x_{16}\};$$

$$c_6 = \{u_2, u_3, u_{12}, u_{18}\} \rightarrow \{x_1, x_3, x_4, x_{10}\};$$

$$c_7 = \{u_2, u_4, u_{14}\} \rightarrow \{x_1, x_3, x_{12}\};$$

$$c_8 = \{u_2, u_5, u_{15}, u_{47}\} \rightarrow \{x_1, x_3, x_{14}, x_{15}\};$$

$$c_9 = \{u_2, u_6, u_{13}, u_{24}\} \rightarrow \{x_1, x_3, x_5, x_{16}\};$$

$$c_{10} = \{u_3, u_4, u_{39}, u_{42}\} \rightarrow \{x_1, x_{10}, x_{11}, x_{12}\};$$

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= \{u_3, u_5, u_{40}\} \rightarrow \{x_1, x_{10}, x_{15}\}; & c_{12} &= \{u_3, u_6, u_{41}\} \rightarrow \{x_1, x_{10}, x_{16}\}; \\
 c_{13} &= \{u_4, u_5, u_{44}, u_{46}\} \rightarrow \{x_1, x_{12}, x_{13}, x_{15}\}; & c_{14} &= \{u_4, u_6, u_{27}, u_{29}\} \rightarrow \{x_1, x_6, x_{12}, x_{16}\}; \\
 c_{15} &= \{u_5, u_6, u_{48}\} \rightarrow \{x_1, x_{15}, x_{16}\}; & c_{16} &= \{u_7, u_8, u_{13}, u_{22}\} \rightarrow \{x_2, x_3, x_5, x_7\}; \\
 c_{17} &= \{u_7, u_9, u_{15}, u_{35}\} \rightarrow \{x_2, x_3, x_8, x_{14}\}; & c_{18} &= \{u_7, u_{10}, u_{12}, u_{17}\} \rightarrow \{x_2, x_3, x_3, x_9\}; \\
 c_{19} &= \{u_7, u_{11}, u_{14}\} \rightarrow \{x_2, x_3, x_{12}\}; & c_{20} &= \{u_8, u_9, u_{30}\} \rightarrow \{x_2, x_7, x_8\}; \\
 c_{21} &= \{u_8, u_{10}, u_{31}\} \rightarrow \{x_2, x_7, x_9\}; & c_{22} &= \{u_8, u_{11}, u_{25}, u_{27}\} \rightarrow \{x_2, x_6, x_7, x_{12}\}; \\
 c_{23} &= \{u_9, u_{10}, u_{33}\} \rightarrow \{x_2, x_8, x_9\}; & c_{24} &= \{u_9, u_{11}, u_{34}, u_{44}\} \rightarrow \{x_2, x_8, x_{12}, x_{13}\}; \\
 c_{25} &= \{u_{10}, u_{11}, u_{38}, u_{42}\} \rightarrow \{x_2, x_9, x_{11}, x_{12}\}; & c_{26} &= \{u_{12}, u_{13}, u_{16}\} \rightarrow \{x_3, x_4, x_5\}; \\
 c_{27} &= \{u_{12}, u_{14}, u_{19}, u_{42}\} \rightarrow \{x_3, x_4, x_{11}, x_{12}\}; & c_{28} &= \{u_{12}, u_{15}, u_{20}\} \rightarrow \{x_3, x_4, x_{14}\}; \\
 c_{29} &= \{u_{13}, u_{14}, u_{21}, u_{27}\} \rightarrow \{x_3, x_5, x_6, x_{12}\}; & c_{30} &= \{u_{13}, u_{15}, u_{23}\} \rightarrow \{x_3, x_5, x_{14}\}; \\
 c_{31} &= \{u_{14}, u_{15}, u_{44}, u_{45}\} \rightarrow \{x_3, x_{12}, x_{13}, x_{14}\}; & c_{32} &= \{u_{16}, u_{17}, u_{22}, u_{31}\} \rightarrow \{x_4, x_5, x_7, x_9\}; \\
 c_{33} &= \{u_{16}, u_{18}, u_{24}, u_{41}\} \rightarrow \{x_4, x_5, x_{10}, x_{16}\}; & c_{34} &= \{u_{16}, u_{19}, u_{21}, u_{26}\} \rightarrow \{x_4, x_5, x_6, x_{11}\}; \\
 c_{35} &= \{u_{16}, u_{20}, u_{23}\} \rightarrow \{x_4, x_5, x_{14}\}; & c_{36} &= \{u_{17}, u_{18}, u_{37}\} \rightarrow \{x_4, x_9, x_{10}\}; \\
 c_{37} &= \{u_{17}, u_{19}, u_{38}\} \rightarrow \{x_4, x_9, x_{11}\}; & c_{38} &= \{u_{17}, u_{20}, u_{33}, u_{35}\} \rightarrow \{x_4, x_8, x_9, x_{14}\}; \\
 c_{39} &= \{u_{18}, u_{19}, u_{39}\} \rightarrow \{x_4, x_{10}, x_{11}\}; & c_{40} &= \{u_{18}, u_{20}, u_{40}, u_{47}\} \rightarrow \{x_4, x_{10}, x_{14}, x_{15}\}; \\
 c_{41} &= \{u_{19}, u_{20}, u_{43}, u_{45}\} \rightarrow \{x_4, x_{11}, x_{13}, x_{14}\}; & c_{42} &= \{u_{21}, u_{22}, u_{25}\} \rightarrow \{x_5, x_6, x_7\}; \\
 c_{43} &= \{u_{21}, u_{23}, u_{28}, u_{45}\} \rightarrow \{x_5, x_6, x_{13}, x_{14}\}; & c_{44} &= \{u_{21}, u_{24}, u_{29}\} \rightarrow \{x_5, x_5, x_{16}\}; \\
 c_{45} &= \{u_{22}, u_{23}, u_{30}, u_{35}\} \rightarrow \{x_5, x_7, x_8, x_{14}\}; & c_{46} &= \{u_{22}, u_{24}, u_{32}\} \rightarrow \{x_5, x_7, x_{16}\}; \\
 c_{47} &= \{u_{23}, u_{24}, u_{47}, u_{48}\} \rightarrow \{x_5, x_{14}, x_{15}, x_{16}\}; & c_{48} &= \{u_{25}, u_{26}, u_{31}, u_{38}\} \rightarrow \{x_6, x_7, x_9, x_{11}\}; \\
 c_{49} &= \{u_{25}, u_{28}, u_{30}, u_{34}\} \rightarrow \{x_6, x_7, x_8, x_{13}\}; & c_{50} &= \{u_{25}, u_{29}, u_{32}\} \rightarrow \{x_6, x_7, x_{16}\}; \\
 c_{51} &= \{u_{26}, u_{27}, u_{42}\} \rightarrow \{x_6, x_{11}, x_{12}\}; & c_{52} &= \{u_{26}, u_{28}, u_{43}\} \rightarrow \{x_6, x_{11}, x_{13}\}; \\
 c_{53} &= \{u_{26}, u_{29}, u_{39}, u_{41}\} \rightarrow \{x_6, x_{10}, x_{11}, x_{16}\}; & c_{54} &= \{u_{27}, u_{28}, u_{44}\} \rightarrow \{x_6, x_{12}, x_{13}\}; \\
 c_{55} &= \{u_{28}, u_{29}, u_{46}, u_{48}\} \rightarrow \{x_6, x_{13}, x_{15}, x_{16}\}; & c_{56} &= \{u_{30}, u_{31}, u_{33}\} \rightarrow \{x_7, x_8, x_9\}; \\
 c_{57} &= \{u_{30}, u_{32}, u_{36}, u_{48}\} \rightarrow \{x_7, x_8, x_{15}, x_{16}\}; & c_{58} &= \{u_{31}, u_{32}, u_{37}, u_{41}\} \rightarrow \{x_7, x_9, x_{10}, x_{16}\}; \\
 c_{59} &= \{u_{33}, u_{34}, u_{38}, u_{43}\} \rightarrow \{x_8, x_9, x_{11}, x_{13}\}; & c_{60} &= \{u_{33}, u_{36}, u_{37}, u_{40}\} \rightarrow \{x_8, x_9, x_{10}, x_{15}\}; \\
 c_{61} &= \{u_{34}, u_{35}, u_{45}\} \rightarrow \{x_8, x_{13}, x_{14}\}; & c_{62} &= \{u_{34}, u_{36}, u_{46}\} \rightarrow \{x_8, x_{13}, x_{15}\}; \\
 c_{63} &= \{u_{35}, u_{36}, u_{47}\} \rightarrow \{x_8, x_{14}, x_{15}\}; & c_{64} &= \{u_{37}, u_{38}, u_{39}\} \rightarrow \{x_8, x_{10}, x_{11}\}; \\
 c_{65} &= \{u_{39}, u_{40}, u_{43}, u_{46}\} \rightarrow \{x_{10}, x_{11}, x_{13}, x_{15}\}; & c_{66} &= \{u_{40}, u_{41}, u_{48}\} \rightarrow \{x_{10}, x_{15}, x_{16}\}; \\
 c_{67} &= \{u_{42}, u_{43}, u_{44}\} \rightarrow \{x_{11}, x_{12}, x_{13}\}; & c_{68} &= \{u_{45}, u_{45}, u_{47}\} \rightarrow \{x_{13}, x_{14}, x_{15}\}.
 \end{aligned}$$

Множество изометрических циклов для графа  $G_2$  (shrikhande) на рис. 6.

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \{u_1, u_2, u_7\} \rightarrow \{x_1, x_2, x_3\}; & c_2 &= \{u_1, u_4, u_9\} \rightarrow \{x_1, x_2, x_8\}; \\
 c_3 &= \{u_1, u_6, u_{11}, u_{43}\} \rightarrow \{x_1, x_2, x_{11}, x_{16}\}; & c_4 &= \{u_2, u_3, u_{13}, u_{21}\} \rightarrow \{x_1, x_3, x_5, x_7\}; \\
 c_5 &= \{u_2, u_5, u_{14}\} \rightarrow \{x_1, x_3, x_{10}\}; & c_6 &= \{u_3, u_4, u_{28}\} \rightarrow \{x_1, x_7, x_8\}; \\
 c_7 &= \{u_3, u_6, u_{30}\} \rightarrow \{x_1, x_7, x_{16}\}; & c_8 &= \{u_4, u_5, u_{32}, u_{39}\} \rightarrow \{x_1, x_8, x_{10}, x_{15}\}; \\
 c_9 &= \{u_5, u_6, u_{40}\} \rightarrow \{x_1, x_{10}, x_{16}\}; & c_{10} &= \{u_7, u_8, u_{12}\} \rightarrow \{x_2, x_3, x_4\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \{u_7, u_{10}, u_{15}, u_{34}\} \rightarrow \{X_2, X_3, X_9, X_{12}\}; & C_{12} &= \{u_8, u_9, u_{17}, u_{25}\} \rightarrow \{X_2, X_4, X_6, X_8\}; \\
C_{13} &= \{u_8, u_{11}, u_{18}\} \rightarrow \{X_2, X_4, X_{11}\}; & C_{14} &= \{u_9, u_{10}, u_{31}\} \rightarrow \{X_2, X_8, X_9\}; \\
C_{15} &= \{u_{10}, u_{11}, u_{33}\} \rightarrow \{X_2, X_9, X_{11}\}; & C_{16} &= \{u_{12}, u_{13}, u_{16}\} \rightarrow \{X_3, X_4, X_5\}; \\
C_{17} &= \{u_{12}, u_{14}, u_{19}, u_{38}\} \rightarrow \{X_3, X_4, X_{10}, X_{13}\}; & C_{18} &= \{u_{13}, u_{15}, u_{22}\} \rightarrow \{X_3, X_5, X_{12}\}; \\
C_{19} &= \{u_{14}, u_{15}, u_{37}\} \rightarrow \{X_3, X_{10}, X_{12}\}; & C_{20} &= \{u_{16}, u_{17}, u_{20}\} \rightarrow \{X_4, X_5, X_6\}; \\
C_{21} &= \{u_{16}, u_{18}, u_{23}, u_{42}\} \rightarrow \{X_4, X_5, X_{11}, X_{14}\}; & C_{22} &= \{u_{17}, u_{19}, u_{26}\} \rightarrow \{X_4, X_6, X_{13}\}; \\
C_{23} &= \{u_{18}, u_{19}, u_{41}\} \rightarrow \{X_4, X_{11}, X_{13}\}; & C_{24} &= \{u_{20}, u_{21}, u_{24}\} \rightarrow \{X_5, X_6, X_7\}; \\
C_{25} &= \{u_{20}, u_{22}, u_{27}, u_{45}\} \rightarrow \{X_5, X_6, X_{12}, X_{15}\}; & C_{26} &= \{u_{21}, u_{23}, u_{29}\} \rightarrow \{X_5, X_7, X_{14}\}; \\
C_{27} &= \{u_{22}, u_{23}, u_{44}\} \rightarrow \{X_5, X_{12}, X_{14}\}; & C_{28} &= \{u_{24}, u_{25}, u_{28}\} \rightarrow \{X_6, X_7, X_8\}; \\
C_{29} &= \{u_{24}, u_{26}, u_{30}, u_{47}\} \rightarrow \{X_6, X_7, X_{13}, X_{16}\}; & C_{30} &= \{u_{25}, u_{27}, u_{32}\} \rightarrow \{X_6, X_8, X_{15}\}; \\
C_{31} &= \{u_{26}, u_{27}, u_{46}\} \rightarrow \{X_6, X_{13}, X_{15}\}; & C_{32} &= \{u_{28}, u_{29}, u_{31}, u_{35}\} \rightarrow \{X_7, X_8, X_9, X_{14}\}; \\
C_{33} &= \{u_{29}, u_{30}, u_{48}\} \rightarrow \{X_7, X_{14}, X_{16}\}; & C_{34} &= \{u_{31}, u_{32}, u_{36}\} \rightarrow \{X_8, X_9, X_{15}\}; \\
C_{35} &= \{u_{33}, u_{35}, u_{42}\} \rightarrow \{X_9, X_{11}, X_{14}\}; & C_{36} &= \{u_{33}, u_{36}, u_{41}, u_{46}\} \rightarrow \{X_9, X_{11}, X_{13}, X_{15}\}; \\
C_{37} &= \{u_{34}, u_{35}, u_{44}\} \rightarrow \{X_9, X_{12}, X_{14}\}; & C_{38} &= \{u_{34}, u_{36}, u_{45}\} \rightarrow \{X_9, X_{12}, X_{15}\}; \\
C_{39} &= \{u_{37}, u_{39}, u_{45}\} \rightarrow \{X_{10}, X_{12}, X_{15}\}; & C_{40} &= \{u_{37}, u_{40}, u_{44}, u_{48}\} \rightarrow \{X_{10}, X_{12}, X_{14}, X_{16}\}; \\
C_{41} &= \{u_{38}, u_{39}, u_{46}\} \rightarrow \{X_{10}, X_{13}, X_{15}\}; & C_{42} &= \{u_{38}, u_{40}, u_{47}\} \rightarrow \{X_{10}, X_{13}, X_{16}\}; \\
C_{43} &= \{u_{41}, u_{43}, u_{47}\} \rightarrow \{X_{11}, X_{13}, X_{16}\}; & C_{44} &= \{u_{42}, u_{43}, u_{48}\} \rightarrow \{X_{11}, X_{13}, X_{16}\}.
\end{aligned}$$

Как видно, мощности множеств изометрических циклов для графа  $G_1$  и  $G_2$  не совпадают. Следовательно, графы  $G_1$  и  $G_2$  не изоморфны.

**Пример 4.** Для распознавания изоморфизма рассмотрим два графа, заданные матрицами смежностей (см. рис.7 и рис.8). Множество центральных разрезов и изометрических циклов для графов  $G_3$  и  $G_4$  представлено ниже:

Центральные разрезы графа  $G_3$ :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{u_1, u_2, u_3\}; \\
S_2 &= \{u_1, u_4, u_5\}; \\
S_3 &= \{u_2, u_4, u_6\}; \\
S_4 &= \{u_5, u_6, u_7, u_8\}; \\
S_5 &= \{u_3, u_7, u_9\}; \\
S_6 &= \{u_8, u_{10}, u_{11}, u_{12}\}; \\
S_7 &= \{u_9, u_{10}, u_{13}\}; \\
S_8 &= \{u_{11}, u_{14}, u_{15}\}; \\
S_9 &= \{u_{12}, u_{14}, u_{16}\}; \\
S_{10} &= \{u_{13}, u_{15}, u_{16}\}.
\end{aligned}$$

Изометрические циклы графа  $G_3$ :

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{u_1, u_2, u_4\}; \\
C_2 &= \{u_1, u_3, u_5, u_7\}; \\
C_3 &= \{u_2, u_3, u_6, u_7\};
\end{aligned}$$

Центральные разрезы графа  $G_4$ :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{u_1, u_2, u_3\}; \\
S_2 &= \{u_1, u_4, u_5\}; \\
S_3 &= \{u_2, u_4, u_6\}; \\
S_4 &= \{u_5, u_6, u_7, u_8\}; \\
S_5 &= \{u_3, u_7, u_9\}; \\
S_6 &= \{u_8, u_{10}, u_{11}\}; \\
S_7 &= \{u_9, u_{10}, u_{12}, u_{13}\}; \\
S_8 &= \{u_{12}, u_{14}, u_{15}\}; \\
S_9 &= \{u_{13}, u_{14}, u_{16}\}; \\
S_{10} &= \{u_{11}, u_{15}, u_{16}\}.
\end{aligned}$$

Изометрические циклы графа  $G_4$ :

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{u_1, u_2, u_4\}; \\
C_2 &= \{u_1, u_3, u_5, u_7\}; \\
C_3 &= \{u_2, u_3, u_6, u_7\};
\end{aligned}$$

$$c_4 = \{u_4, u_5, u_6\};$$

$$c_5 = \{u_7, u_8, u_9, u_{10}\};$$

$$c_6 = \{u_{10}, u_{11}, u_{13}, u_{15}\};$$

$$c_7 = \{u_{10}, u_{12}, u_{13}, u_{16}\};$$

$$c_8 = \{u_{11}, u_{12}, u_{14}\};$$

$$c_9 = \{u_{14}, u_{15}, u_{16}\}.$$

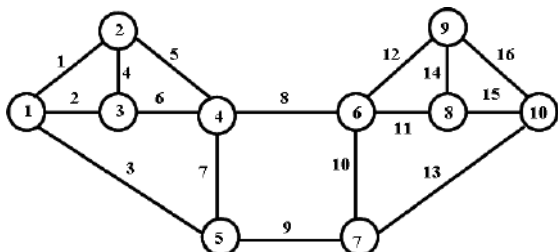


Рис. 7. Граф  $G_3$

$$c_4 = \{u_4, u_5, u_6\};$$

$$c_5 = \{u_7, u_8, u_9, u_{10}\};$$

$$c_6 = \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{15}\};$$

$$c_7 = \{u_{10}, u_{11}, u_{13}, u_{16}\};$$

$$c_8 = \{u_{12}, u_{13}, u_{14}\};$$

$$c_9 = \{u_{14}, u_{15}, u_{16}\}.$$

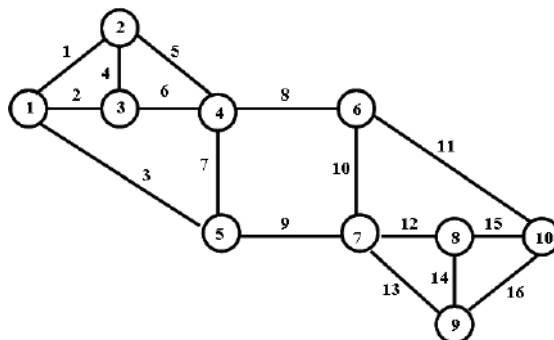


Рис. 8. Граф  $G_4$

В данном случае, применение таких инвариантов графа, как вектор центральных разрезов и вектора изометрических циклов, для определения изоморфизма графов, не позволяет получить однозначный ответ. Для получения однозначного ответа построим реберные разрезы графов.

0 ярус

Реберные разрезы 0-го яруса графа  $G_3$ :

$$w(u_1) = s_1 \oplus s_2 = \{u_2, u_3, u_4, u_5\};$$

$$w(u_2) = s_1 \oplus s_3 = \{u_1, u_3, u_4, u_6\};$$

$$w(u_3) = s_1 \oplus s_5 = \{u_1, u_2, u_7, u_9\};$$

$$w(u_4) = s_2 \oplus s_3 = \{u_1, u_2, u_5, u_6\};$$

$$w(u_5) = s_2 \oplus s_4 = \{u_1, u_4, u_6, u_7, u_8\};$$

$$w(u_6) = s_3 \oplus s_4 = \{u_2, u_4, u_5, u_7, u_8\};$$

$$w(u_7) = s_4 \oplus s_5 = \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_9\};$$

$$w(u_8) = s_4 \oplus s_6 = \{u_5, u_6, u_7, u_{10}, u_{11}, u_{12}\};$$

$$w(u_9) = s_5 \oplus s_7 = \{u_3, u_7, u_{10}, u_{13}\};$$

$$w(u_{10}) = s_6 \oplus s_7 = \{u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\};$$

$$w(u_{11}) = s_6 \oplus s_8 = \{u_8, u_{10}, u_{12}, u_{14}, u_{15}\};$$

$$w(u_{12}) = s_6 \oplus s_9 = \{u_8, u_{10}, u_{11}, u_{14}, u_{16}\};$$

$$w(u_{13}) = s_7 \oplus s_{10} = \{u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\};$$

$$w(u_{14}) = s_8 \oplus s_9 = \{u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\};$$

$$w(u_{15}) = s_8 \oplus s_{10} = \{u_{11}, u_{13}, u_{14}, u_{16}\};$$

$$w(u_{16}) = s_9 \oplus s_{10} = \{u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}\}.$$

Реберные разрезы 0-го яруса графа  $G_4$ :

$$w(u_1) = s_1 \oplus s_2 = \{u_2, u_3, u_4, u_5\};$$

$$w(u_2) = s_1 \oplus s_3 = \{u_1, u_3, u_4, u_6\};$$

$$w(u_3) = s_1 \oplus s_5 = \{u_1, u_2, u_7, u_9\};$$

$$w(u_4) = s_2 \oplus s_3 = \{u_1, u_2, u_5, u_6\};$$

$$w(u_5) = s_2 \oplus s_4 = \{u_1, u_4, u_6, u_7, u_8\};$$

$$w(u_6) = s_3 \oplus s_4 = \{u_2, u_4, u_5, u_7, u_8\};$$

$$w(u_7) = s_4 \oplus s_5 = \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_9\};$$

$$w(u_8) = s_4 \oplus s_6 = \{u_5, u_6, u_7, u_{10}, u_{11}\};$$

$$w(u_9) = s_5 \oplus s_7 = \{u_3, u_7, u_{10}, u_{12}, u_{13}\};$$

$$w(u_{10}) = s_6 \oplus s_7 = \{u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\};$$

$$w(u_{11}) = s_6 \oplus s_{10} = \{u_8, u_{10}, u_{15}, u_{16}\};$$

$$w(u_{12}) = s_7 \oplus s_8 = \{u_9, u_{10}, u_{13}, u_{14}, u_{15}\};$$

$$w(u_{13}) = s_7 \oplus s_9 = \{u_9, u_{10}, u_{12}, u_{14}, u_{16}\};$$

$$w(u_{14}) = s_8 \oplus s_9 = \{u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\};$$

$$w(u_{15}) = s_8 \oplus s_{10} = \{u_{11}, u_{12}, u_{14}, u_{16}\};$$

$$w(u_{16}) = s_9 \oplus s_{10} = \{u_{11}, u_{13}, u_{14}, u_{15}\}.$$

## 1 ярус

Реберные разрезы 1-го яруса графа  $G_3$ :

$$\begin{aligned}w(u_1) &= \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_9\}; \\w(u_2) &= \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_9\}; \\w(u_3) &= \{u_1, u_2, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{13}\}; \\w(u_4) &= \emptyset; \\w(u_5) &= \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}\}; \\w(u_6) &= \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}\}; \\w(u_7) &= \{u_3, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}; \\w(u_8) &= \{u_1, u_2, u_3, u_{13}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_9) &= \{u_1, u_2, u_3, u_5, u_6, u_7, u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_{10}) &= \{u_3, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{13}\}; \\w(u_{11}) &= \{u_5, u_6, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_{12}) &= \{u_5, u_6, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_{13}) &= \{u_3, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_{14}) &= \emptyset; \\w(u_{15}) &= \{u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}; \\w(u_{16}) &= \{u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}.\end{aligned}$$

Реберные разрезы 1-го яруса графа  $G_4$ :

$$\begin{aligned}w(u_1) &= \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_9\}; \\w(u_2) &= \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_9\}; \\w(u_3) &= \{u_1, u_2, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{12}, u_{13}\}; \\w(u_4) &= \emptyset; \\w(u_5) &= \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{11}\}; \\w(u_6) &= \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{11}\}; \\w(u_7) &= \{u_3, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}; \\w(u_8) &= \{u_1, u_2, u_3, u_8, u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_9) &= \{u_1, u_2, u_3, u_5, u_6, u_7, u_9, u_{11}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_{10}) &= \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_{10}, u_{11}\}; \\w(u_{11}) &= \{u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_{12}) &= \{u_3, u_7, u_8, u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_{13}) &= \{u_3, u_7, u_8, u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_{14}) &= \emptyset; \\w(u_{15}) &= \{u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}; \\w(u_{16}) &= \{u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}.\end{aligned}$$

## 2 ярус

Разрезы 2-го яруса графа  $G_3$ :

$$\begin{aligned}w(u_1) &= \{u_3, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}; \\w(u_2) &= \{u_3, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}; \\w(u_3) &= \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_4) &= \emptyset; \\w(u_5) &= \{u_3, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_6) &= \{u_3, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_7) &= \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}; \\w(u_8) &= \emptyset; \\w(u_9) &= \emptyset; \\w(u_{10}) &= \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_{11}) &= \{u_1, u_2, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{13}\}; \\w(u_{12}) &= \{u_1, u_2, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{13}\}; \\w(u_{13}) &= \{u_1, u_2, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_{14}) &= \emptyset; \\w(u_{15}) &= \{u_3, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{13}\}; \\w(u_{16}) &= \{u_3, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{13}\}.\end{aligned}$$

Разрезы 2-го яруса графа  $G_4$ :

$$\begin{aligned}w(u_1) &= \{u_3, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}; \\w(u_2) &= \{u_3, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}; \\w(u_3) &= \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_4) &= \emptyset; \\w(u_5) &= \{u_3, u_7, u_9, u_{11}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_6) &= \{u_3, u_7, u_9, u_{11}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_7) &= \{u_1, u_2, u_5, u_6\}; \\w(u_8) &= \{u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_9) &= \{u_1, u_2, u_5, u_6\}; \\w(u_{10}) &= \{u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_{11}) &= \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_{12}) &= \{u_1, u_2, u_3, u_8, u_{10}, u_{11}\}; \\w(u_{13}) &= \{u_1, u_2, u_3, u_8, u_{10}, u_{11}\}; \\w(u_{14}) &= \emptyset; \\w(u_{15}) &= \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_{10}, u_{11}\}; \\w(u_{16}) &= \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_{10}, u_{11}\}.\end{aligned}$$



3 ярус

Реберные разрезы 3-го яруса графа  $G_3$ :

- $w(u_1) = \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\};$
- $w(u_2) = \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\};$
- $w(u_3) = \{u_3, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_4) = \emptyset;$
- $w(u_5) = \{u_1, u_2, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_6) = \{u_1, u_2, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_7) = \{u_3, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{13}\};$
- $w(u_8) = \emptyset;$
- $w(u_9) = \emptyset;$
- $w(u_{10}) = \{u_3, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\};$
- $w(u_{11}) = \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_{12}) = \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_{13}) = \{u_1, u_2, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{13}\};$
- $w(u_{14}) = \emptyset;$
- $w(u_{15}) = \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_{16}) = \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\}.$

Реберные разрезы 3-го яруса графа  $G_4$ :

- $w(u_1) = \{u_1, u_2, u_5, u_6\};$
- $w(u_2) = \{u_1, u_2, u_5, u_6\};$
- $w(u_3) = \emptyset;$
- $w(u_4) = \emptyset;$
- $w(u_5) = \{u_1, u_2, u_5, u_6\};$
- $w(u_6) = \{u_1, u_2, u_5, u_6\};$
- $w(u_7) = \emptyset;$
- $w(u_8) = \emptyset;$
- $w(u_9) = \emptyset;$
- $w(u_{10}) = \emptyset;$
- $w(u_{11}) = \emptyset;$
- $w(u_{12}) = \{u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_{13}) = \{u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_{14}) = \emptyset;$
- $w(u_{15}) = \{u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_{16}) = \{u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\}.$

4 ярус

Реберные разрезы 4-го яруса графа  $G_3$ :

- $w(u_1) = \{u_3, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{13}\};$
- $w(u_2) = \{u_3, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{13}\};$
- $w(u_3) = \{u_1, u_2, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_4) = \emptyset;$
- $w(u_5) = \{u_1, u_2, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{13}\};$
- $w(u_6) = \{u_1, u_2, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{13}\};$
- $w(u_7) = \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_8) = \emptyset;$
- $w(u_9) = \emptyset;$
- $w(u_{10}) = \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\};$
- $w(u_{11}) = \{u_3, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_{12}) = \{u_3, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_{13}) = \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_{14}) = \emptyset;$
- $w(u_{15}) = \{u_3, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\};$
- $w(u_{16}) = \{u_3, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}.$

Реберные разрезы 4-го яруса графа  $G_4$ :

- $w(u_1) = \emptyset;$
- $w(u_2) = \emptyset;$
- $w(u_3) = \emptyset;$
- $w(u_4) = \emptyset;$
- $w(u_5) = \emptyset;$
- $w(u_6) = \emptyset;$
- $w(u_7) = \emptyset;$
- $w(u_8) = \emptyset;$
- $w(u_9) = \emptyset;$
- $w(u_{10}) = \emptyset;$
- $w(u_{11}) = \emptyset;$
- $w(u_{12}) = \emptyset;$
- $w(u_{13}) = \emptyset;$
- $w(u_{14}) = \emptyset;$
- $w(u_{15}) = \emptyset;$
- $w(u_{16}) = \emptyset.$

5 и 6 ярусы графа  $G_3$ Реберные разрезы 5-го яруса графа  $G_3$ :

$$w(u_1) = \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\};$$

$$w(u_2) = \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\};$$

$$w(u_3) = \emptyset;$$

$$w(u_4) = \emptyset;$$

$$w(u_5) = \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\};$$

$$w(u_6) = \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\};$$

$$w(u_7) = \emptyset;$$

$$w(u_8) = \emptyset;$$

$$w(u_9) = \emptyset;$$

$$w(u_{10}) = \emptyset;$$

$$w(u_{11}) = \{u_1, u_2, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\};$$

$$w(u_{12}) = \{u_1, u_2, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\};$$

$$w(u_{13}) = \emptyset;$$

$$w(u_{14}) = \emptyset;$$

$$w(u_{15}) = \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\};$$

$$w(u_{16}) = \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}.$$

Реберные разрезы 6-го яруса графа  $G_3$ :

$$w(u_1) = \emptyset;$$

$$w(u_2) = \emptyset;$$

$$w(u_3) = \emptyset;$$

$$w(u_4) = \emptyset;$$

$$w(u_5) = \emptyset;$$

$$w(u_6) = \emptyset;$$

$$w(u_7) = \emptyset;$$

$$w(u_8) = \emptyset;$$

$$w(u_9) = \emptyset;$$

$$w(u_{10}) = \emptyset;$$

$$w(u_{11}) = \emptyset;$$

$$w(u_{12}) = \emptyset;$$

$$w(u_{13}) = \emptyset;$$

$$w(u_{14}) = \emptyset;$$

$$w(u_{15}) = \emptyset;$$

$$w(u_{16}) = \emptyset.$$

Как видно из приведенного выше, спектр реберных разрезов для графа  $G_4$  состоит из трех уровней, а спектр разрезов графа  $G_3$  состоит из пяти уровней. Поэтому можно сразу предположить, что данные графы не изоморфны.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В работе рассмотрены вопросы описания и построения реберного разреза графа, являющегося одной из основополагающих структур графа. На основании понятия реберного разреза и операции порождения строится спектр реберных разрезов, характеризующийся множеством ребер определенного уровня. Показано, что спектр реберных разрезов графа может быть применен для задачи распознавания изоморфизма.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. Москва: Наука, 1990. 384 с.
2. Зыков А. А. Основы теории графов. Москва: Наука, 1987. 384с.
3. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. Москва: Мир, 1984. 455 с.
4. Харари Ф. Теория графов. Москва: Мир, 1973. 300 с.

**REFERENCES**

1. Emelichev, V. A., Melnikov, O. I., Sarvanov, V. I. & Tyshkevich, R. I. (1990). Lectures on graph theory. Moscow: Nauka.
2. Zykov, A. A. (1987). Fundamentals of graph theory. Moscow: Nauka.
3. Svami, M. & Tkulasiraman, K. (1984). Graphs, networks and algorithms. Moscow: Mir.
4. Kharari, F. (1973). Graph theory. Moscow: Mir.

УДК 624.072.45: 539.384

## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ НАХЛЕСТОЧНОГО СОЕДИНЕНИЯ ПЛАСТИНОК РАЗНОЙ ШИРИНЫ. ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

Куреннов С. С., д. т. н., доцент

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»,  
ул. Чкалова, 17, Харьков, 61070, Украина*

*ss.kurennov@gmail.com*

Предложена упрощенная двумерная модель клеевого соединения, основанная на гипотезе о высокой жесткости несущих слоев в поперечном направлении. Построено аналитическое решение задачи о напряженном состоянии симметричного соединения пластинок различных размеров. Решена модельная задача и проведен эксперимент, который показал высокую точность предложенной упрощенной математической модели.

*Ключевые слова: клеевое соединение, модель Фолькерсена, двумерная модель, аналитическое решение.*

## НАПРУЖЕНИЙ СТАН З'ЄДНАННЯ ВНАПУСК ПЛАСТИНОК РІЗНОЇ ШИРИНИ. НАБЛИЖЕНА ТЕОРІЯ Й ЕКСПЕРИМЕНТ

Куреннов С. С., д. т. н., доцент

*Національний аерокосмічний університет ім. Н. Є. Жуковського «ХАІ»,  
вул. Чкалова, 17, Харків, 61070, Україна*

*ss.kurennov@gmail.com*

Запропоновано спрощену двовимірну модель клейового з'єднання, яка ґрунтується на гіпотезі про високу жорсткість несучих шарів у поперечному напрямку. Побудовано аналітичний розв'язок задачі про напружений стан симетричного з'єднання пластинок різних розмірів. Розв'язано модельну задачу та проведено експеримент, який показав високу точність запропонованої спрощеної математичної моделі.

*Ключові слова: клейове з'єднання, модель Фолькерсена, двовимірна модель, аналітичний розв'язок.*

## ON THE STRESSED STATE OF THE LAP JOINT OF THE DIFFERENT WIDTH PLATES. APPROXIMATIVE THEORY AND EXPERIMENT

Kurennov S. S., Dr. sc. nat., docent

*National Aerospace University, "Kharkiv Aviation Institute",  
Street Chkalov, 17, Kharkiv, 61070, Ukraine*

*ss.kurennov@gmail.com*

A simplified two-dimensional model of an adhesive joint is proposed. This model is based on the hypothesis of high rigidity of the carrier layers in the transverse direction. An analytical solution of the stressed state problem for a symmetrical connection of the different sized plates is constructed. A model problem was solved and an experiment, which has shown us the high accuracy for the proposed simplified mathematical model, was performed.

*Key words: adhesive joint, Volkersen model, two-dimensional model, analytical solution.*

### ВВЕДЕНИЕ

При расчете напряженно-деформированного состояния (НДС) нахлесточных клеевых соединений в ряде случаев необходимо учитывать неравномерность напряжений и деформаций по ширине соединения. Необходимость в этом возникает, например, при расчете НДС соединений накладок или силовых элементов конструкции с обшивкой. Точное аналитическое решение задачи о НДС соединения пластинок, которое учитывает неравномерность деформаций по ширине соединения, пока неизвестно. Существуют различные численные и приближенные методики численного решения данной задачи [1-5].

Обычно конструкция и прилагаемые к ней нагрузки симметричны относительно продольной оси. В этом случае допустимо применение упрощенной модели, согласно которой поперечные деформации и перемещения в плоскости соединения полагаются равными нулю. Ранее эта гипотеза была использована в работе [6] при построении уточненной теории балок. В работе [7] этот подход был использован для обобщения модели соединения Фолькерсена (которая описана, например, в обзорах [8, 9]) на двумерную постановку и получено аналитическое решение задачи о НДС соединения двух одинаковых прямоугольных пластинок. Данная статья развивает результаты работы [10], в которой решена задача о соединении пластинок разной ширины. Целью данной работы является построение аналитического решения задачи о напряженном состоянии симметричного нахлесточного соединения прямоугольных пластинок и экспериментальная проверка предложенной модели.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим симметричное клеевое соединение двух прямоугольных пластинок, имеющих размеры  $l \times 2h$  и  $L \times 2H$ , показанное на рис. 1. Меньшую пластинку назовем накладкой.

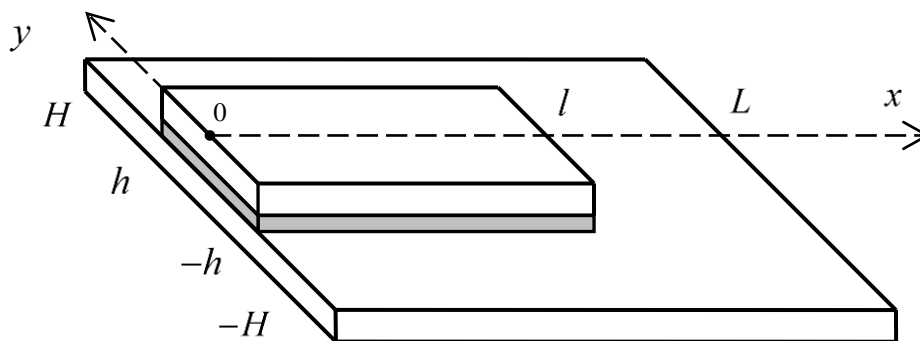


Рис. 1. Схема соединения

Положим, что краевые условия на торцах соединения ( $x=0$  и  $x=L$ ) симметричны относительно оси  $x$ , а боковые стороны обеих пластинок свободны от нагрузки. Для описания НДС соединения используем гипотезы модели соединения Фолькерсена [8, 9]: несущие слои деформируются только в плоскости соединения; клеевой слой работает только на сдвиг; напряжения равномерно распределены по толщине слоев. Будем считать, что обе пластинки являются абсолютно жесткими в направлении оси  $y$ .

В силу симметрии выделим три подобласти в задаче. Продольные перемещения в области склейки обозначим  $U_1$  (накладка) и  $U_2$  (широкая пластинка). Перемещения основной пластинки в области  $x \in [0; l]$ ;  $y \in [h; H]$  обозначим  $U_3$ , а в области  $x \in [L-l; L]$ ;  $y \in [0; H]$  –  $U_4$ . Соответствующие продольные и касательные усилия в пластинках обозначим  $N_k = E_k \delta_k \frac{\partial U_k}{\partial x}$  и  $q_k = G_k \delta_k \frac{\partial U_k}{\partial y}$  ( $k=1, \dots, 4$ ). Толщину накладки обозначим  $\delta_1$ , толщину основной пластинки –  $\delta_2$ , а толщину соединительного (клеявого) слоя –  $\delta_0$ . Модули упругости накладки и основной пластинки вдоль оси  $x$  обозначим соответственно  $E_1$  и  $E_2$ , модули сдвига –  $G_1$  и  $G_2$ , модуль сдвига клея –  $G_0$ .

В работе [7] показано, что в области склейки продольные перемещения несущих слоев описываются системой уравнений

$$\alpha_k \left( \frac{\partial^2 U_k}{\partial x^2} + \mu_k \frac{\partial^2 U_k}{\partial y^2} \right) + (-1)^k (U_1 - U_2) = 0; \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

где  $\alpha_k = E_k \delta_k \delta_0 G_0^{-1}$ ,  $\mu_k = G_k E_k^{-1}$ .

Касательные напряжения в клее пропорциональны разности перемещений пластинок [8, 9]

$$\tau = \frac{G_0}{\delta_0} (U_2 - U_1). \quad (2)$$

Вне области склейки перемещения пластинки (при условии высокой поперечной жесткости [6]) описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 U_m}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 U_m}{\partial y^2} = 0, \quad m = 3; 4. \quad (3)$$

Краевые условия: положим, что к торцу пластинки ( $x = L$ ) приложено усилие  $P(y)$ , а противоположный торец накладки ( $x = 0$ ) жестко зафиксирован:

$$U_1|_{x=0} = 0; \quad N_4|_{x=L} = E_2 \delta_2 \frac{\partial U_4}{\partial x} \Big|_{x=L} = P(y). \quad (4)$$

На боковых сторонах обеих пластинок и вдоль оси симметрии соединения касательные усилия в пластинках равны нулю:

$$q_1|_{y=0} = q_2|_{y=0} = q_1|_{y=h} = q_3|_{y=H} = q_4|_{y=H} = q_4|_{y=0} = 0. \quad (5)$$

Прочие торцы обеих пластинок свободны от усилий:

$$N_2|_{x=0} = N_3|_{x=0} = N_1|_{x=L} = 0. \quad (6)$$

На этих же краях пластинок касательные усилия также должны быть равны нулю. Однако это условие не может быть выполнено, поскольку в предлагаемой упрощенной модели учитывается только продольный сдвиг. Расчет НДС клеевого слоя по формуле (2), которая не учитывает обжатие, приводит к аналогичному эффекту – касательные напряжения в клее достигают максимальных значений на краях клеевого шва. Это противоречит закону парности касательных напряжений, поскольку внешний край клеевого слоя свободен от нагрузки и касательные напряжения на краю шва должны быть равны нулю. Данная особенность некоторых математических моделей НДС клеевого слоя хорошо известна [9]. Более точные модели показывают, что максимальных значений касательные напряжения в клее достигают на расстоянии порядка толщины клея от края шва, но мало отличаются от значений, вычисляемых по простым моделям. То же самое наблюдается и в данном случае.

Условия сопряжения вдоль боковой стороны области склейки имеют вид:

$$q_2|_{y=h} = q_3|_{y=h}, \quad U_2|_{y=h} = U_3|_{y=h}. \quad (7)$$

Условия сопряжения вдоль линии  $x = l$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} U_2|_{x=l} = U_4|_{x=l}, \quad (y \in [0, h]); \quad U_3|_{x=l} = U_4|_{x=l}, \quad (y \in [h, H]); \\ q_2|_{x=l} = q_4|_{x=l}, \quad (y \in [0, h]); \quad q_3|_{x=l} = q_4|_{x=l}, \quad (y \in [h, H]); \\ N_2|_{x=l} = N_4|_{x=l}, \quad (y \in [0, h]); \quad N_3|_{x=l} = N_4|_{x=l}, \quad (y \in [h, H]). \end{aligned} \quad (8)$$

## ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим область склейки. Из системы (1) следует

$$U_2 = U_1 - \alpha_1 \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right), \quad (9)$$

$$\beta_1 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_3 \frac{\partial^4 U_1}{\partial y^4} - \beta_4 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \beta_5 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0, \quad (10)$$

где  $\beta_1 = \alpha_1 \alpha_2$ ;  $\beta_2 = (\mu_1 + \mu_2) \alpha_1 \alpha_2$ ;  $\beta_3 = \mu_1 \mu_2 \alpha_1 \alpha_2$ ;  $\beta_4 = \alpha_1 + \alpha_2$ ;  $\beta_5 = \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2$ .

В работе [7] при помощи метода разделения переменных получено и общее решение уравнения (10) при однородных краевых условиях на боковых сторонах соединения и условия  $\mu_1 = \mu_2$ . Полученное решение имеет вид суперпозиции линейной функции от  $x$  и частных решений уравнения (10), имеющих вид  $e^{\pm \lambda x \pm i \xi y}$ , где  $i$  - мнимая единица.

Решение рассматриваемой задачи строим в аналогичной форме. Подставив, например,  $e^{\pm \lambda x} \sin \xi y$  в (10), получим алгебраическое уравнение, связывающее параметры  $\lambda$  и  $\xi$ :

$$\beta_3 \xi^4 + (\beta_5 - \beta_2 \lambda^2) \xi^2 + \beta_1 \lambda^4 - \beta_4 \lambda^2 = 0,$$

из которого следует, что каждому значению параметра  $\pm \lambda$  соответствуют четыре значения  $\xi$ , которые можно записать в форме  $\pm \xi_1(\lambda)$  и  $\pm \xi_2(\lambda)$ . Следовательно, частное решение уравнения (10), соответствующее, например, некоторому положительному значению  $\lambda$ , имеет вид

$$V_1^* = e^{\lambda x} (S_1 \sin \xi_1 y + C_1 \cos \xi_1 y + S_2 \sin \xi_2 y + C_2 \cos \xi_2 y),$$

где  $C_k, S_k$  - произвольные константы.

Положим, что все частные решения  $V_1^*$  и соответствующие им  $V_2^*$ , получаемые из (9), удовлетворяют однородным краевым условиям (5). Отсюда следует  $S_1 = S_2 = 0$ . Учитывая, что полученные частные решения справедливы и для  $-\lambda$ , частные решения уравнений (9) и (10) можно записать в виде

$$V_k^* = A \cdot Y^{(k)}(y) \operatorname{ch} \lambda x + B \cdot Y^{(k)}(y) \operatorname{ch} \lambda (x-l);$$

$$Y^{(1)}(y) = C_1 \cos \xi_1 y + C_2 \cos \xi_2 y, \quad Y^{(2)}(y) = C_1 \gamma_1 \cos \xi_1 y + C_2 \gamma_2 \cos \xi_2 y;$$

$$\gamma_k = 1 - \alpha_1 \lambda^2 + \alpha_1 \mu_1 \xi_k^2(\lambda),$$

где  $A, B$  - произвольные константы.

Перемещения  $U_3$  также можно представить в виде  $U_3 = W_3(x) + V_3(x, y)$  [6, 10], где  $W_3(x)$  - линейная функция. Частные решения уравнения (3), удовлетворяющие условию  $q_3|_{y=H} = 0$  (5), имеют вид

$$V_3^* = A^{(3)} Y^{(3)}(y) \operatorname{ch} \lambda x + B^{(3)} Y^{(3)}(y) \operatorname{ch} \lambda (x-l),$$

где  $Y^{(3)}(y) = C_3 \cos \xi_3 (y-H)$ ;  $\xi_3 = \lambda / \sqrt{\mu_2}$ .

Вдоль границы области склейки  $y = h$  перемещения  $U_2$  и  $U_3$ , а также соответствующие касательные напряжения одинаковы (7). Положим, что это условие выполняется точно. Отсюда следует, что линейные компоненты перемещений  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$  - одинаковы. Кроме того, условия сопряжения (7) и условие отсутствия касательных напряжений на боковой стороне накладки (5), записанные для частных решений  $V_1^*$ ,  $V_2^*$ ,  $V_3^*$ , приводят к системе

$$M \cdot \vec{C} = 0, \tag{11}$$

$$M = \begin{pmatrix} \gamma_1 \xi_1 \sin k_1 h & \gamma_2 \xi_2 \sin \xi_2 h & -\xi_3 \sin \xi_3 (h-H) \\ \gamma_1 \cos \xi_1 h & \gamma_2 \cos \xi_2 h & -\cos \xi_3 (h-H) \\ \xi_1 \sin \xi_1 h & \xi_2 \sin \xi_2 h & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Система (11) имеет нетривиальное решение, если

$$\det M(\lambda) = 0. \tag{12}$$

Трансцендентное уравнение (12) имеет бесконечное число действительных корней  $\lambda_n$ . Обозначим  $\xi_{k,n} = \xi_k(\lambda_n)$ ,  $\gamma_{k,n} = \gamma_k(\lambda_n)$ . Решение системы (11), а именно коэффициенты  $C_{1,n}$ ,  $C_{2,n}$  и  $C_{3,n}$ , соответствующие некоторому собственному числу  $\lambda_n$ , определяются с точностью до произвольного множителя. Для определенности и для облегчения анализа сходимости решения введем условие нормировки

$$\int_0^h [Y_n^{(1)}]^2 dx + \int_0^h [Y_n^{(2)}]^2 dx + \int_h^H [Y_n^{(3)}]^2 dx = 1. \tag{13}$$

Таким образом, общие решения уравнений (1) и (3) могут быть записаны в виде

$$U_k = A_0 x + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n X_n^{(1)}(x) + B_n X_n^{(2)}(x)] Y_n^{(k)}(y), \tag{14}$$

$$Y_n^{(1)} = C_{1,n} \cos \xi_{1,n} y + C_{2,n} \cos \xi_{2,n} y; \quad X_n^{(2)} = \frac{\text{ch } \lambda_n (x-l)}{\lambda_n \text{sh } \lambda_n l}; \quad X_n^{(1)} = \frac{\text{ch } \lambda_n x}{\lambda_n \text{sh } \lambda_n l};$$

$$Y_n^{(3)} = C_{3,n} \cos [\lambda_n \mu_2^{-0.5} (y-H)]; \quad Y_n^{(2)} = C_{1,n} \gamma_{1,n} \cos \xi_{1,n} y + C_{2,n} \gamma_{2,n} \cos \xi_{2,n} y.$$

Здесь  $\lambda_n \text{sh } \lambda_n l$  в знаменателе - нормирующие множители;  $A_n$  и  $B_n$  - произвольные коэффициенты; коэффициенты  $C_{k,n}$  определяются из системы (12) и соотношения (13).

Перемещения на участке 4 описываются уравнением (3). Поскольку на боковых сторонах этого участка краевые условия однородны (4), метод разделения переменных позволяет получить решение в виде

$$U_4 = a_0 x + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n X_n^{(3)}(x) + b_n X_n^{(4)}(x)] Y_n^{(4)}(y), \tag{15}$$

$$X_n^{(3)} = \frac{\text{ch } v_n (x-l)}{v_n \text{ch } v_n (L-l)}, \quad X_n^{(4)} = \frac{\text{ch } v_n (x-L)}{v_n \text{ch } v_n (L-l)}, \quad Y_n^{(4)} = \cos \frac{\pi n y}{H},$$

где  $a_0, b_0, a_n, b_n$  - произвольные коэффициенты;  $v_n = \pi \sqrt{\mu_2} H^{-1} n$ .

Перемещения (14) и (15) точно удовлетворяют краевым условиям вдоль боковых сторон областей. А условия (4), (6), (8) на торцах областей удовлетворяются приближенно, при помощи соответствующего выбора коэффициентов  $a_0, b_0, a_n, b_n$  и  $A_0, B_0, A_n, B_n$ .

Нормальные и касательные усилия в несущих слоях:

$$N_k = E_k \delta_k \left[ A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n Z_n^{(1)} + B_n Z_n^{(2)} \right) Y_n^{(k)} \right], \quad q_k = G_k \delta_k \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n X_n^{(1)} + B_n X_n^{(2)} \right) \Psi_n^{(k)},$$

$$N_4 = E_2 \delta_2 \left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n Z_n^{(3)} + b_n Z_n^{(4)} \right) Y_n^{(4)} \right], \quad Z_n^{(m)} = \frac{dX_n^{(m)}}{dx}, \quad m=1, \dots, 4; \quad k=1, 2, 3;$$

$$q_4 = G_2 \delta_2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n X_n^{(3)} + b_n X_n^{(4)} \right) \Psi_n^{(4)}, \quad \Psi_n^{(m)} = \frac{dY_n^{(m)}}{dy}.$$

Ограничим количество слагаемых в бесконечных суммах некоторым числом  $N$ , одинаковым для всех сумм (впрочем, это условие не является обязательным). Краевые условия (4), (6), (8) представляют собой систему из одиннадцати уравнений, которые можно записать в векторной форме:

$$A_0 \vec{H}_1 + B_0 \vec{H}_2 + a_0 \vec{H}_3 + b_0 \vec{H}_4 + \sum_{n=1}^N A_n \vec{f}_n^{(1)} + \sum_{n=1}^N B_n \vec{f}_n^{(2)} + \sum_{n=1}^N a_n \vec{f}_n^{(3)} + \sum_{n=1}^N b_n \vec{f}_n^{(4)} - \vec{R} = 0, \quad (16)$$

где

$$\kappa_n = \frac{1}{\lambda_n \operatorname{sh}(\lambda_n l)}, \quad \eta_n = \frac{1}{v_n \operatorname{sh} v_n (L-l)}, \quad \theta_n = \kappa_n \operatorname{ch}(\lambda_n l), \quad \chi_n = \eta_n \operatorname{ch} v_n (L-l);$$

$$\vec{H}_1 = (0; 0; 1; 1; 1; l; l; 1; 1; 0; 0)^T,$$

$$\vec{H}_2 = (0; 1; 0; 0; 0; 1; 1; 0; 0; 0; 0)^T,$$

$$\vec{H}_3 = (1; 0; 0; 0; 0; -l; -l; -1; -1; 0; 0)^T,$$

$$\vec{H}_4 = (0; 0; 0; 0; 0; -1; -1; 0; 0; 0; 0)^T,$$

$$\vec{R} = \left( \frac{P(y)}{E_2 \delta_2}; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0 \right)^T.$$

$$\vec{f}_n^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa_n Y_n^{(1)} \\ Y_n^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ \theta_n Y_n^{(2)} \\ \theta_n Y_n^{(3)} \\ Y_n^{(2)} \\ Y_n^{(3)} \\ \theta_n \Psi_n^{(2)} \\ \theta_n \Psi_n^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_n^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_n Y_n^{(1)} \\ 0 \\ -Y_n^{(2)} \\ -Y_n^{(3)} \\ \kappa_n Y_n^{(2)} \\ \kappa_n Y_n^{(3)} \\ 0 \\ 0 \\ \kappa_n \Psi_n^{(2)} \\ \kappa_n \Psi_n^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_n^{(3)} = \begin{pmatrix} Y_n^{(4)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\eta_n Y_n^{(4)} \\ -\eta_n Y_n^{(4)} \\ 0 \\ 0 \\ -\eta_n \Psi_n^{(4)} \\ -\eta_n \Psi_n^{(4)} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_n^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\chi_n Y_n^{(4)} \\ -\chi_n Y_n^{(4)} \\ Y_n^{(4)} \\ Y_n^{(4)} \\ -\chi_n \Psi_n^{(4)} \\ -\chi_n \Psi_n^{(4)} \end{pmatrix};$$



Для поиска решения системы (16) используем метод ортогонализации невязки вектор-функциям  $\vec{H}_m$  и  $\vec{f}_n^{(m)}$ ,  $m=1, \dots, 4$ ;  $n=1, \dots, N$ . Скалярное произведение векторов представляет собой сумму интегралов от произведений компонент векторов, взятых на соответствующих интервалах:

$$(\vec{f}, \vec{g}) = \int_0^H f_1 g_1 dy + \int_0^h f_2 g_2 dy + \int_0^h f_3 g_3 dy + \int_0^h f_4 g_4 dy + \int_h^H f_5 g_5 dy + \\ + \int_0^h f_6 g_6 dy + \int_h^H f_7 g_7 dy + \int_0^h f_8 g_8 dy + \int_h^H f_9 g_9 dy + \int_0^h f_{10} g_{10} dy + \int_h^H f_{11} g_{11} dy,$$

где  $f_j, g_j$  – соответствующие компоненты некоторых вектор-функций  $\vec{f}$  и  $\vec{g}$ .

Ортогонализация (16) векторам  $\vec{H}_m$  и  $\vec{f}_n^{(m)}$  приводит к системе линейных уравнений относительно коэффициентов  $A_0, B_0, a_0, b_0, A_n, B_n$  и  $a_n, b_n$ . Абсолютные значения внедиагональных элементов матрицы полученной системы убывают и стремятся к нулю при удалении от главной диагонали. Численные расчеты показали, что для решения полученной системы допустим метод редукции, а найденные коэффициенты при увеличении  $N$  стабилизируются, и стремятся к соответствующим предельным значениям.

### ЭКСПЕРИМЕНТ И МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Для проверки адекватности предложенной математической модели в лаборатории «Прочность» Национального аэрокосмического университета им. Н. Е. Жуковского «ХАИ» проведены тензометрические испытания склеенных алюминиевых пластинок. Размеры образцов, точки приклейки тензодатчиков, а также фотография одного из образцов показаны на рис. 2.

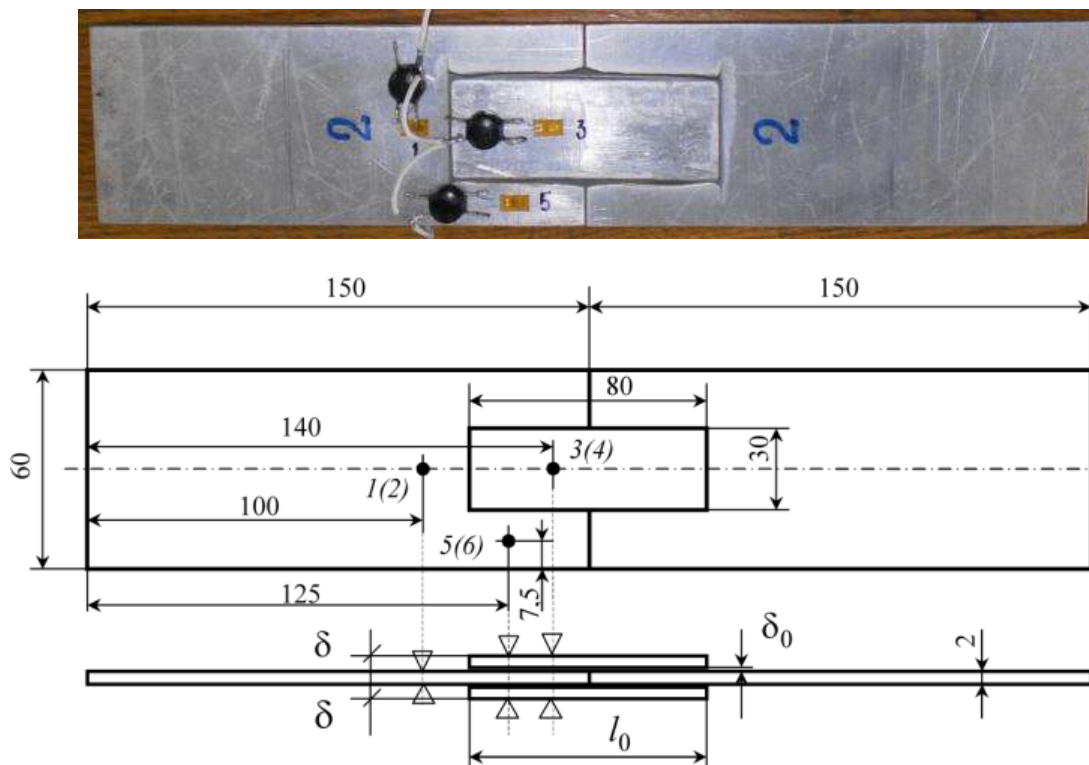


Рис. 2. Фотография и схема образца для испытаний

Было изготовлено три образца. Пластины для изготовления образцов вырезаны из листового материала АМг-6 толщиной 2 мм. Пластинки склеивались пленочным клеем ВК-36. Перед склеиванием проведены измерения толщины пластинок в нескольких местах, а после склеивания – измерения суммарной толщины пакета и определена толщина клея. Средние величины толщин пластинок  $\delta = 1,856$  мм, толщина клея  $\delta_0 = 0,076$  мм, длина клеевого слоя  $2l = 79,67$  мм, ширина приклеенной накладки  $2h = 29$  мм. На образцы с двух сторон в точках 1(2), 3(4), 5(6) приклеены тензорезисторы.

Для расчета НДС соединения использованы следующие параметры:  $\delta_1 = 1,856$  мм,  $\delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0,5\delta = 0,928$  мм,  $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 71$  ГПа,  $G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = 25$  ГПа,  $\delta_0 = 0,0813$  мм (толщина клея),  $G_0 = 0,6$  ГПа (модуль сдвига клея ВК-36),  $h = 14,5$  мм,  $H = 30$  мм,  $l = 39,835$  мм,  $L = 70$  мм (часть пластинки входит в губки разрывной машины).

Зависимость деформаций от нагрузки близка к линейной при нагрузке до 2000 кгс. Обусловлено это тем, что использованный для изготовления образцов алюминиевый сплав АМг-6 является высокопластичным, и при нагрузке около 2000 кгс напряжения в накладках достигают предела текучести.

На рис. 3 показаны графики зависимости напряжений в точках наклейки тензодатчиков, полученные с помощью предложенной математической модели (пунктирные линии) и полученные в результате проведенных экспериментов (сплошные линии). Для построения этих графиков использованы средние значения напряжений, определенных в результате проведенных экспериментов.

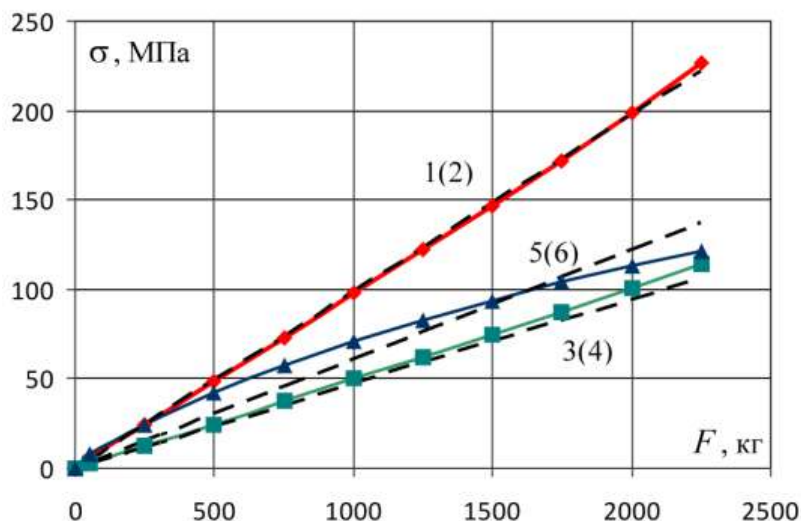


Рис. 3. Зависимость напряжений в местах наклейки тензорезисторов от нагрузки

Графики, изображенные на рис. 3, показывают, что полученные в результате теоретических расчетов и определенные экспериментально напряжения в местах наклейки тензодатчиков весьма близки. Это подтверждает адекватность предложенной математической модели и правильность построенного решения.

На рис. 4 показаны графики нормальных напряжений в широкой пластинке вдоль боковых сторон ( $y = \pm H$ ) и вдоль оси  $y = 0$  при растягивающей нагрузке  $F = 1500$  кг, полученные с помощью предложенной модели.

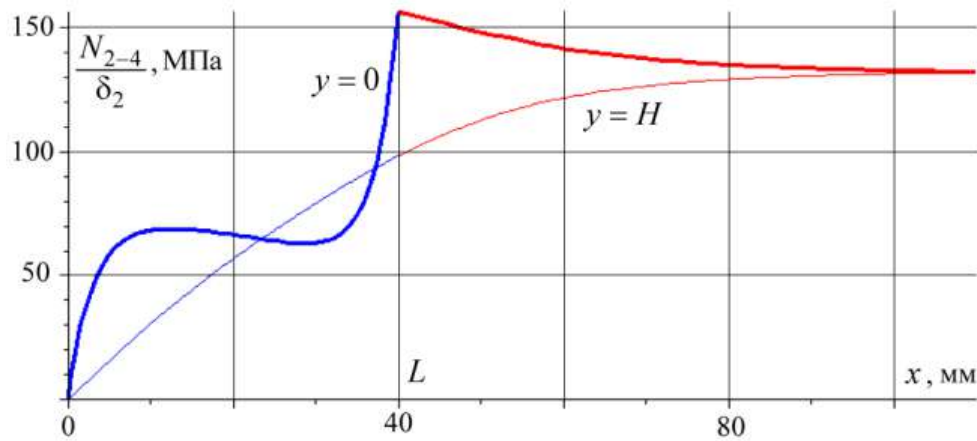


Рис. 4. Нормальные напряжения в широкой пластинке вдоль продольной оси и вдоль боковых сторон

Соответствующие касательные напряжения в клеевом слое (2) показаны на рис. 5. Поскольку соединение симметрично относительно продольной оси, на рисунке изображена половина области склейки,  $y \geq 0$ .

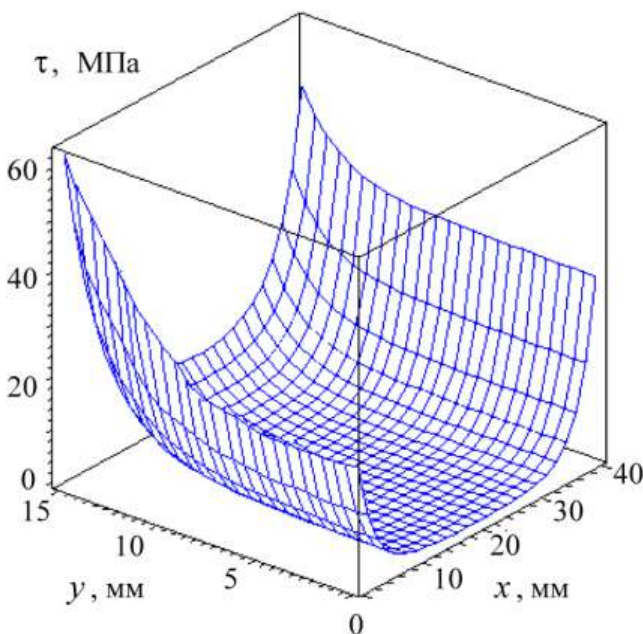


Рис. 5. Касательные напряжения в клее ( $y \geq 0$ ) при нагрузке  $F = 1500$  кгс

### Выводы

Предложенная математическая модель соединения позволяет построить аналитические решения ряда новых задач о двумерном НДС склеенных пластинок различных линейных размеров при продольной нагрузке (например, задачи о НДС ремонтной накладки, НДС соединения с дефектом и т.д.).

Экспериментальные исследования показали высокую точность предложенной модели.

Классические одномерные модели не могут быть применены для расчета НДС соединения в случае существенного отличия ширины соединяемых слоев ввиду того, что напряжения в клее у бокового края склейки значительно превышают напряжения на продольной оси соединения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Рябенков Н. Г., Артюхин Ю. П. Определение напряжений клея в соединении двух полубесконечных пластин. *Исслед. по теор. пластин и оболочек*. Изд-во Казанского ун-та, 1981. № 16. С. 82–90.
2. Kim H. S., Cho M., Lee J., Deheeger A., Grédiac M., Mathias J. D. Three dimensional stress analysis of a composite patch using stress functions. *Int. J. of Mechanical Sciences*. 2010. V. 52. P. 1646–1659.
3. Andruet R. H., Dillard D. A., Holzer S. M. Two- and three-dimensional geometrical nonlinear finite elements for analysis of adhesive joints. *Int. J. of Adhesion & Adhesives*. 2001. V. 21. P. 17–34.
4. Mortensen F., Thomsen O. T. Simplified linear and non-linear analysis of stepped and scarfed adhesive-bonded lap-joints between composite laminates. *Composite Structures*. 1997. Vol. 38, No. 1–4. P. 281–294.
5. Rapp P. Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. Part II: Displacement formulation for orthotropic adherends. *Archives of civil and mechanical engineering*. 2015. № 15. P. 603–619.
6. Васильев В. В., Лурье С. А. О сингулярности решения в плоской задаче теории упругости для консольной полосы. *Изв. РАН. МТТ*. 2013. № 4. С. 40–49.
7. Kurenov S. S. A Simplified Two-Dimensional Model Of Adhesive Joints Nonuniform Load. *Mechanics of Composite Materials*. 2015. Vol. 51, Issue 4. P. 479–488.

8. Артюхин Ю. П. Напряжения в клеевых соединениях. *Исследования по теории пластин и оболочек*. К.: Изд-во КГУ, 1973. Вып. 10. С. 3–27.
9. da Silva L. F. M., das Neves P. J. C., Adams R. D., Spelt J. K. Analysis of Mixed Adhesive Bonded Joints Part I: Theoretical Formulation. *J. of Adhesion Science and Technology*. 2009. V. 23. Pp. 1–34.
10. Куреннов С. С., Танчик Е. В. Расчет напряженного состояния клеевого соединения прямоугольных пластинок разной ширины. *Вестник Московского авиационного института*. 2015. Т. 22, № 2. С. 162–169.

#### REFERENCES

1. Ryabenkov, N. G. & Artyuxin, Yu. P. (1981). Opredelenie napryazhenij kleya v soedinenii dvux polubeskonechnyx plastin. Issled. po teor. plastin i obolochek. Izd-vo Kazanskogo un-ta, No. 16, pp. 82-90.
2. Kim, H. S., Cho, M., Lee, J., Deheeger, A., Grédiac, M. & Mathias, J. D. (2010). Three dimensional stress analysis of a composite patch using stress functions. *Int. J. of Mech. Sc.*, Vol. 52, pp. 1646-1659.
3. Andruet, R. H., Dillard, D. A. & Holzer, S. M. (2001). Two- and three-dimensional geometrical nonlinear finite elements for analysis of adhesive joints. *Int. J. of Adhesion & Adhesives*, Vol. 21, pp. 17-34.
4. Mortensen, F. & Thomsen, O. T. (1997). Simplified linear and non-linear analysis of stepped and scarfed adhesive-bonded lap-joints between composite laminates. *Composite Structures*, Vol. 38, No. 1-4, pp. 281-294.
5. Rapp, P. (2015). Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. Part II: Displacement formulation for orthotropic adherends. *Archives of civil and mechanical engineering*, No. 15, pp. 603-619.
6. Vasilev, V. V. & Lure, S. A. (2013). O singulyarnosti resheniya v ploskoj zadache teorii uprugosti dlya konsolnoj polosy. *Izv. RAN. MTT*, No. 4, pp. 40-49.
7. Kurennov, S. S. (2015). A Simplified Two-Dimensional Model Of Adhesive Joints Nonuniform Load. *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 51, Issue 4, pp. 479-488.
8. Artyuxin, Yu. P. (1973). Napryazheniya v kleevyx soedineniyax. Issledovaniya po teorii plastin i obolochek. Kazan: Izd-vo KGU. No. 10, pp. 3-27.
9. da Silva, L. F. M., das Neves, P. J. C., Adams, R. D. & Spelt, J. K. (2009). Analysis of Mixed Adhesive Bonded Joints Part I: Theoretical Formulation. *J. of Adhesion Science and Technology*, Vol. 23, pp. 1-34.
10. Kurennov, S. S. & Tanchik, E. V. (2015). Raschet napryazhennogo sostoyaniya kleeвого soedineniya pryamougolnyx plastinok raznoj shiriny. *Vestnik Moskovskogo aviacionnogo institute*, Issue. 22, No. 2, pp. 162-169.

УДК 539.3

## СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УСИЛЕННЫХ ПЕРЕКРЕСТНЫМИ СИСТЕМАМИ РЕБЕР И НАГРУЖЕННОЙ ОСЕВЫМИ СЖИМАЮЩИМИ СИЛАМИ ОРТОТРОПНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПРОТЕКАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

Латифов Ф. С., д. ф.-м. н., профессор, Гулиева З. М., докторант

*Азербайджанский архитектурно-строительный Университет,  
ул. А. Султанова, 5, г. Баку, Аз. 1073/1, Азербайджан*

flatifov@mail.ru

В данной работе исследуется свободное колебание усиленных перекрестными системами ребер и нагруженные осевыми сжимающими силами ортотропной вязкоупругой цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью. Уравнение движения подкрепленной перекрестными системами ребер, нагруженной осевыми сжимающими силами ортотропной оболочки с движущейся жидкостью, получены на основе принципа стационарности действия Остроградского-Гамильтона. Построено частотное уравнение свободных колебаний, подкрепленное перекрестными системами ребер, нагруженной осевыми сжимающими силами ортотропной цилиндрической оболочки, заполненной покоящейся жидкостью и реализовано численно.

*Ключевые слова: свободные колебания, оболочка, идеальная жидкость, напряжение, подкрепление, принцип вариации.*

**ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ПОСИЛЕНИХ ПЕРЕХРЕСНИМИ СИСТЕМАМИ РЕБЕР І НАВАНТАЖЕНИХ ОСЬОВИМИ СТИСКАЮЧИМИ СИЛАМИ ОРТОТРОПНОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПРОТІКАЮЧОЮ РІДИНОЮ**

Латіфов Ф. С., д. ф.-м. н., професор, Гулієва З. М., докторант

*Азербайджанський архітектурно-будівельний університет,  
вул. А. Султанова, 5, м. Баку, Аз. 1073 / 1, Азербайджан*

flatifov@mail.ru

У роботі досліджується вільне коливання посилені перехресними системами ребер і навантажені осьовими стискаючими силами ортотропної в'язкопружної циліндричної оболонки з протікаючою рідиною. Рівняння руху підкріпленої перехресними системами ребер, навантаженої осьовими стискаючими силами ортотропної оболонки з рухомою рідиною, отримані на основі принципу стаціонарності дії Остроградського-Гамільтона. Побудовано частотне рівняння вільних коливань, підкріплених перехресними системами ребер, навантажених осьовими стискаючими силами ортотропної циліндричної оболонки, заповненої спочиваючою рідиною і реалізовані чисельно.

*Ключові слова: вільні коливання, оболонка, ідеальна рідина, напруга, підкріплення, принцип варіації.*

**FREE VIBRATIONS OF RIBS REINFORCED BY CROSS SYSTEMS AND AN ORTHOTROPIC VISCOELASTIC CYLINDRICAL SHELL LOADED WITH AXIAL COMPRESSIVE FORCES, WITH A FLOWING LIQUID**

Latifov F. S., Doctor of physical and mathematical sciences, professor,  
Guliyeva Z. M., doctoral student

<sup>1</sup>*Azerbaijan Architecture and Construction University,  
Str. A. Sultanova, 5, Baku, Az. 1073/1, Azerbaijan*

flatifov@mail.ru

In this paper we study the free oscillation of ribs reinforced by cross systems and axially compressive forces of an orthotropic viscoelastic cylindrical shell with a flowing liquid. The equation of motion of ribs reinforced by cross systems loaded with axial compressive forces of an orthotropic shell with a moving fluid is obtained on the basis of the stationarity principle of the Ostrogradskii-Hamilton action. A frequency equation of free oscillations is supported by reinforced cross systems of edges loaded with axial compressive forces of an orthotropic cylindrical shell filled with a resting liquid and realized numerically.

*Key words: free oscillations, shell, ideal fluid, stress, reinforcement, principle of variation.*

**ВВЕДЕНИЕ**

Расчеты на прочность, колебания и устойчивость тонкостенных оболочечных конструкций играют важную роль при проектировании современных аппаратов, машин и сооружений. В рабочих условиях эти конструкции находятся в контакте с внешней средой. Во многих случаях для придания большей жесткости тонкостенная часть оболочки подкрепляется ребрами, что существенно повышает ее прочность при незначительном увеличении массы конструкции. Кроме того, учесть реальные свойства материала конструкций является принципиальным при расчете таких конструкций на колебание и на прочность.

Исследованиям устойчивости и колебаний подкрепленных продольными и поперечными ребрами изотропных оболочек без среды при статическом и динамическом нагружении посвящена монография [1]. Асимптотический анализ собственных частот неосесимметричных и осесимметрических колебаний неподкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек в бесконечной упругой среде, заполненной жидкостью, проведен в работах [2, 3]. Собственные колебания в бесконечной упругой среде, усиленные продольной и перекрестной системой ребер изотропной цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью, рассмотрены в работах [4, 5]. В работах [6, 7] исследована задача о свободных колебаниях усиленных продольной и перекрестной системой ребер и нагруженной осевыми сжимающими силами изотропных цилиндрических оболочек,

заполненной средой. Параметрические колебания нелинейной и неоднородной по толщине вязкоупругой цилиндрической оболочки и стержней, контактирующих с вязкоупругой средой, исследованы в работах [8, 9]. Свободные колебания усиленных перекрестными системами ребер и нагруженной осевыми сжимающими силами ортотропной вязкоупругой цилиндрической оболочки с наполнителем исследованы в работе [11]. В работе [12] рассмотрены свободные колебания усиленных поперечными системами ребер и нагруженной осевыми сжимающими силами ортотропной вязкоупругой цилиндрической оболочки, с протекающей жидкостью. Работа [13] посвящена исследованию свободных колебаний усиленных продольными системами ребер и нагруженной осевыми сжимающими силами ортотропной цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью.

В данной работе исследуется свободное колебание усиленных перекрестными системами ребер и нагруженные осевыми сжимающими силами ортотропной вязкоупругой цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Полная энергия упругой деформации подкрепленной перекрестными системами ребер, нагруженной осевыми сжимающими силами ортотропной вязкоупругой цилиндрической оболочки имеет вид:

$$\begin{aligned}
 J = & \frac{1}{2} R^2 \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \{N_{11} \varepsilon_{11} + N_{22} \varepsilon_{22} + N_{12} \varepsilon_{12} - M_{11} \chi_{11} - M_{22} \chi_{22} - M_{12} \chi_{12}\} dx dy + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k_1} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \tilde{E}_i F_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + E_i J_{y_i} \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{z_i} \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{G}_i J_{kpi} \left( \frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial x} \right)^2 \right] dx + \\
 & + \rho_0 h \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy + \\
 & + \sum_{i=1}^{k_1} \rho_i F_i \int_{x_1}^{x_2} \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpi}}{F_i} \left( \frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial t} \right)^2 \right] dx - \\
 & - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} (q_x u + q_y v + q_z w) dx dy - \frac{\sigma_x h}{2} \int_0^{x_1} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy - \frac{\sigma_x F_c}{2R} \sum_{i=1}^{k_1} \int_0^{x_1} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \Big|_{y=y_i} dx + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[ \tilde{E}_j F_j \left( \frac{\partial v_j}{\partial y} - \frac{w_j}{R} \right)^2 + \tilde{E}_j J_{x_j} \left( \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{w_j}{R^2} \right)^2 + \tilde{E}_j J_{z_j} \left( \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} - \frac{\varphi_{kpi}}{R} \right)^2 \right] dx + \\
 & + \sum_{j=1}^{k_1} \rho_j F_j \int_{y_1}^{y_2} \left[ \left( \frac{\partial u_j}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_j}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_j}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpi}}{F_j} \left( \frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial t} \right)^2 \right] dy.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $F_j, J_{zj}, J_{yj}, J_{kpi}$  – площадь и моменты инерции поперечного сечения  $j$ -го поперечного стержня соответственно относительно оси  $Oz$  и оси, параллельной оси  $Oy$  и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении;  $\tilde{E}_j, \tilde{G}_j$  – модули упругости и сдвига материала  $j$ -го поперечного стержня, соответственно,  $R$  – радиус срединной поверхности оболочки,  $h$  – толщина оболочки,  $u, v, w$  – составляющие перемещений точек срединной поверхности оболочки,  $x_1, x_2$  – координаты криволинейных краев оболочки;  $F_i, J_{zi}, J_{yi}, J_{kpi}$  – площадь и моменты инерции поперечного сечения  $i$ -го

продольного стержня относительно оси  $Oz$ , и оси, параллельной оси  $Oy$  и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении;  $\bar{E}_i, \bar{G}_i$  – модули упругости и сдвига материала  $i$ -го продольного стержня,  $t$  – временная координата,  $\rho_0, \rho_i, \rho_j$  – плотности материалов, из которых изготовлены оболочка,  $i$ -й продольный,  $j$ -ый поперечный стержень, соответственно,  $q_x, q_y, q_z$  – компоненты вектора давлений, действующего со стороны жидкости. В случае идеальной жидкости  $q_x = q_y = 0$ .

Выражения для внутренних сил и моментов представим следующим образом:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} + zw_{ij})dz; \quad M_{ij} = - \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} + zw_{ij})zdz; \quad (2)$$

$$w_{11} = b_{11}\chi_{11} + b_{12}\chi_{22}; \quad w_{22} = b_{12}\chi_{11} + b_{22}\chi_{22}; \quad w_{21} = w_{12} = b_{66} \chi_{12}.$$

Напряжения  $\sigma_{ij}$  и деформации  $\varepsilon_{ij}$  в срединной поверхности в соотношениях (2) определяются следующим образом:

$$\sigma_{11} = b_{11}\varepsilon_{11} + b_{12}\varepsilon_{22}; \quad \sigma_{22} = b_{12}\varepsilon_{11} + b_{22}\varepsilon_{22}; \quad \sigma_{12} = b_{66}\varepsilon_{12}; \quad (3)$$

$$\varepsilon_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij} + \int_{-\infty}^t \Gamma(t - \tau) \bar{\varepsilon}_{ij}(\tau) d\tau; \quad (4)$$

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \bar{\varepsilon}_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} + w; \quad \bar{\varepsilon}_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\chi_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi_{12} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad \Gamma(t) = Ae^{-\psi t},$$

где  $b_{11}, b_{22}, b_{12}$  и  $b_{66}$  – основные модули упругости ортотропного материала, которые выражаются через модули упругости  $E_1, E_2$  в координатных направлениях, модуль упругости при сдвиге  $G$  и коэффициенты Пуассона  $\nu_1, \nu_2$  по формулам

$$b_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2}; \quad b_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1\nu_2}; \quad b_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1\nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1\nu_2}; \quad b_{66} = G_{12} = G.$$

Уравнение движения подкрепленной перекрестными системами ребер, нагруженной осевыми сжимающими силами ортотропной вязкоупругой оболочки с движущейся жидкостью, получены на основе принципа стационарности действия Остроградского-Гамильтона:

$$\delta W = 0, \quad (5)$$

где  $W = \int_{t'}^{t''} L dt$  – действие по Гамильтону,  $L$  – функция Лагранжа,  $t'$  и  $t''$  – заданные произвольные моменты времени.

Предполагая, что основная скорость потока равна  $U$  и отклонения от этой скорости малы, воспользуемся волновым уравнением для потенциала возмущенных скоростей  $\varphi$  по [10]:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{a_0^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 \varphi}{R \partial \xi \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 \varphi}{R^2 \partial \xi^2} \right) = 0. \quad (6)$$

На контактной поверхности оболочка-жидкость соблюдается непрерывность радиальных скоростей и давлений. Условие непроницаемости или плавности обтекания у стенки оболочки имеет вид [10, 14]:

$$\vartheta_r|_{r=R} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\bigg|_{r=R} = -\left(\omega_0 \frac{\partial w}{\partial t_1} + U \frac{\partial w}{R \partial \xi}\right). \quad (7)$$

Равенство радиальных давлений со стороны жидкости на оболочку

$$q_z = -p|_{r=R}. \quad (8)$$

Дополняя контактными условиями (7), (8) выражение для полной энергии оболочки (1), уравнение движения жидкости (6), приходим к задаче о собственных колебаниях подкрепленной продольными системами ребер, нагруженной осевыми сжимающими силами ортотропной цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью.

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Перемещения оболочки будем искать в виде:

$$\begin{aligned} u &= u_0 \sin \chi \xi \cos n\theta \sin \omega_1 t_1, \\ \vartheta &= \vartheta_0 \cos \chi \xi \sin n\theta \sin \omega_1 t_1, \\ w &= w_0 \cos \chi \xi \sin n\theta \sin \omega_1 t_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $u_0, \vartheta_0, w_0$  – неизвестные постоянные;  $\chi, n$  – волновые числа в продольном и окружном направлениях соответственно,  $\omega_1 = \tilde{\omega}_1 + i\tilde{\omega}_2$  – комплексная частота,  $t_1 = \omega_0 t$ ,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{E_1}{(1-\nu^2)\rho_0 R^2}}, \quad \xi = \frac{x}{R}.$$

Потенциал возмущенных скоростей  $\varphi$  ищем в виде:

$$\varphi(\xi, r, \theta, t_1) = f(r) \cos n\theta \sin \chi \xi \sin \omega_1 t_1. \quad (10)$$

Используя (10), из условия (7) и (6), имеем:

$$\begin{aligned} \varphi &= -\Phi_{an} \left( \omega_0 \frac{\partial w}{\partial t_1} + U \frac{\partial w}{R \partial \xi} \right), \\ p &= \Phi_{an} \rho_m \left( \omega_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} + 2U\omega_0 \frac{\partial^2 w}{R \partial \xi \partial t_1} + U^2 \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \xi^2} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\Phi_{an} = \begin{cases} I_n(\beta r)/I'_n(\beta r), & M_1 < 1, \\ J_n(\beta_1 r)/J'_n(\beta_1 r), & M_1 > 1, \\ \frac{R^n}{nR^{n-1}}, & M_1 = 1. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь  $M_1 = \frac{U + \omega_0 R \omega_1 / \alpha}{a_0}$ ,  $\beta^2 = R^{-2}(1 - M_1^2)\chi^2$ ,  $\beta_1^2 = R^{-2}(M_1^2 - 1)\chi^2$ ,  $I_n$  – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка  $n$ ,  $J_n$  – функции Бесселя первого рода порядка  $n$ .

Далее в (8) в качестве  $q_z$  должна быть взята величина  $q_z = -p$ , где  $p$  – давление по (11). С учетом (9), давление  $p$  можно представить в виде:

$$p = \frac{\rho_m \Phi_{an}}{\rho_0 \omega_0^2 h} (\omega_0^2 \omega_1^2 + 2\omega_0 \omega_1 \chi U + \chi^2 U^2) w. \quad (13)$$

После подстановки (13), (9) в (5), задача сводится к однородной системе линейных алгебраических уравнений третьего порядка

$$a_{i1} u_0 + a_{i2} v_0 + a_{i3} w_0 = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (14)$$

Элементы  $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) имеют громоздкий вид, поэтому здесь не приводятся. Нетривиальное решение системы линейных алгебраических уравнений (14) третьего порядка



возможно лишь в случае, когда  $\omega_1$  – корень ее определителя. Определение  $\omega_1$  сводится к трансцендентному уравнению, так как  $\omega_1$  входит в аргументы функции Бесселя  $J_n$ :

$$\begin{vmatrix} 2(\check{\varphi}_{11} - \psi_{11}\omega_1^2) & \check{\varphi}_{44} & \check{\varphi}_{55} \\ \check{\varphi}_{44} & 2(\check{\varphi}_{22} - \psi_{22}\omega_1^2) & \check{\varphi}_{66} \\ \check{\varphi}_{55} & \check{\varphi}_{66} & 2(\check{\varphi}_{33} - \psi_{22}\omega_1^2 + l_1\sigma_x + q_z^{(0)}\psi_2) \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

Отметим, что при  $U = 0$  уравнение (15) переходит к частотному уравнению свободных колебаний подкрепленными перекрёстными системами ребер, нагруженной осевыми сжимающими силами ортотропной цилиндрической оболочки, заполненной покоящейся жидкостью.

### ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим некоторые результаты вычислений, выполненных численно, исходя из приведенных выше зависимостей.

Для геометрических и физических параметров, характеризующих материалы оболочки, среды были приняты:

$$F_i = 3,4 \text{ мм}^2; J_{yi} = 5,1 \text{ мм}^4; \rho_0/\rho_m = 0,105; \tilde{E}_i = 6,67 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2; h_j = 1,3 \text{ мм};$$

$$\rho_0 = \rho_i = \rho_j = 0,26 \cdot 10^4 \text{ Нс}^2/\text{м}^4; J_{yj} = 5,1 \text{ мм}^4; h_i = 1,39 \text{ мм}; h = 0,45 \text{ мм};$$

$$A = 0,1615; \psi = 0,05; b_{11} = 18,3 \text{ ГПа}; b_{12} = 2,77 \text{ ГПа}; b_{22} = 25,2 \text{ ГПа}; F_j = 5,75 \text{ мм}^2;$$

$$\frac{I_{kp.i}}{2\pi R^3 h} = 0,5305 \cdot 10^{-6}; J_{xj} = 19,9 \text{ мм}^4; L = 800 \text{ мм}; \tilde{E}_j = 6,67 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2;$$

$$\frac{J_{zj}}{2\pi R^3 h} = 0,23 \cdot 10^{-6}; J_{kp.j} = 0,48 \text{ мм}^4; U^* = 0,005; k_1 = 8; k_2 = 4.$$

На рис. 1 показаны зависимости параметра частоты  $\omega_1$  от относительной скорости потока  $U^* = U/c, c = \omega_0 R$  при различных значениях  $\chi$  и  $n$ .

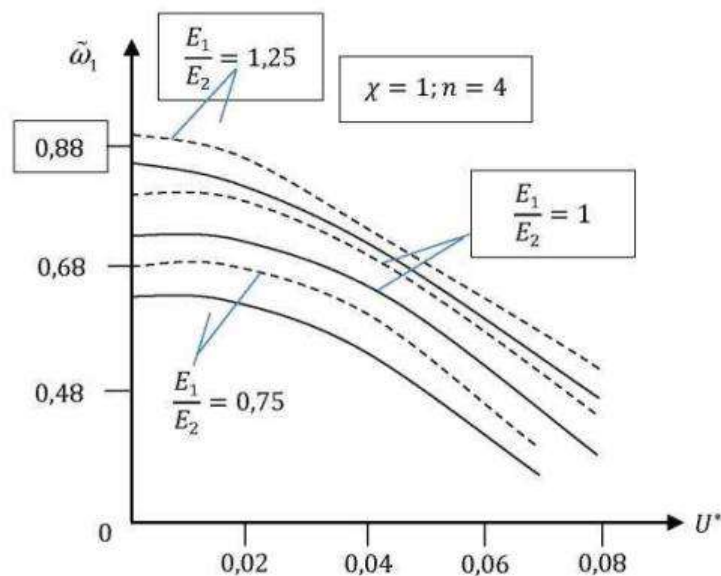


Рис. 1. Зависимость параметра частоты от скорости потока для подкрепленной перекрестными системами ребер цилиндрической оболочки с движущейся жидкостью

В графиках штриховым линиям соответствуют колебания подкрепленной перекрестными системами ребер, нагруженной осевыми сжимающими силами упругой ортотропной цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью, а сплошным – колебания подкрепленной перекрестными системами ребер, нагруженной осевыми сжимающими

силами вязкоупругой ортотропной цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью. Видно, что увеличение скорости и учет вязкости материала оболочки приводит к снижению частоты. Важно отметить значения  $U^*$ , при которых частота колебаний обращается в нуль. Очевидно, здесь должна произойти потеря устойчивости оболочки. Кроме того, с увеличением отношений  $E_1/E_2$  частоты колебаний системы увеличиваются.

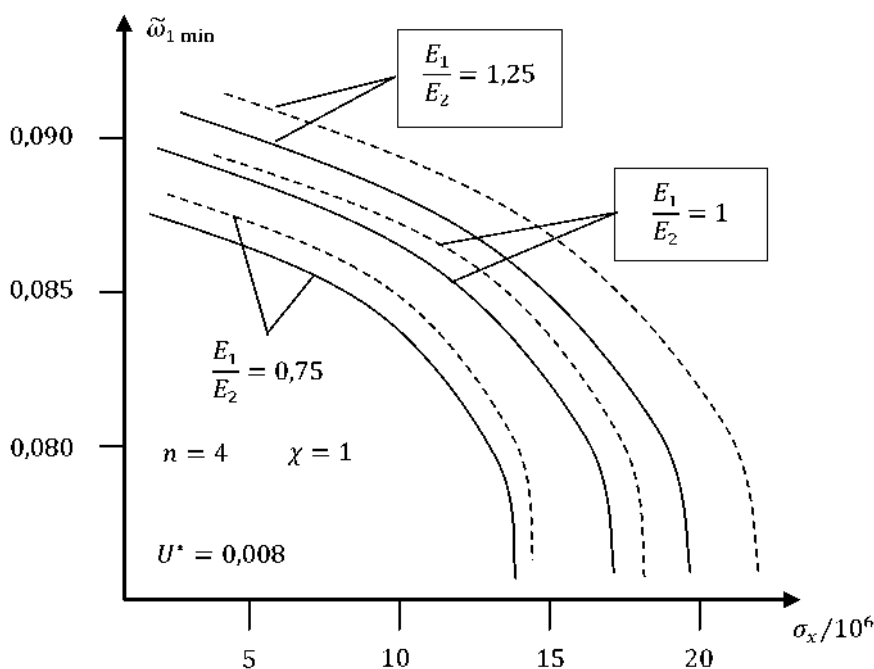


Рис. 2. Зависимость параметра частоты подкрепленной перекрестными системами ребер цилиндрической оболочки с движущейся жидкости от сжимающих напряжений

Наконец, рис. 2 иллюстрирует влияние сжимающих напряжений на параметр минимальной частоты колебаний подкрепленной перекрестными системами ребер цилиндрической оболочки с движущейся жидкостью. Видно, что с увеличением сжимающих напряжений параметр частоты колебаний рассмотренной системы сначала плавно, а затем при определенном значении сжимающих напряжений резко уменьшается.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Поляков П. С. Ребристые цилиндрические оболочки. Киев: Наук. думка, 1973. 248 с.
2. Latifov F. S., Seyfullayev F. A. Asymptotic analysis of oscillation eigenfrequency of orthotropic cylindrical shells in infinite elastic medium filled with liquid. *Trans. of NAS.Acad. of Azerb. ser. of physical-technical and mathematical sciences volume XIV clid.* 2004. № 1. P. 227–230.
3. Сейфуллаев Ф. А. Асимптотический анализ собственных частот осесимметрических колебаний ортотропных цилиндрической оболочек в бесконечной упругой среде, заполненной жидкостью. *Механика и машиностроение.* 2004. № 4. С. 33–34.
4. Алиев Ф. Ф. Собственные колебания в бесконечной упругой среде продольно подкрепленной цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью. *Механика и машиностроение.* 2006. № 1. С. 3–5.
5. Алиев Ф. Ф. Собственные колебания в бесконечной упругой среде, усиленные перекрестной системой ребер цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью. *Механика и машиностроение.* 2007. № 2. С. 10–12.
6. Латифов Ф. С., Сулейманова С. Г. Задача о свободных колебаниях усиленных перекрестной системой ребер и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрических оболочек, заполненной средой. *Механика Машии, Механизмов и Материалов.* 2009. № 1. С. 59–62.
7. Сулейманова С. Г. Свободные колебания продольно подкрепленной и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрической оболочки с наполнителем. *Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan.* 2007. XXVII. С. 135–140.

8. Пирмамедов И. Т. Параметрические колебания нелинейной и неоднородной по толщине вязкоупругой цилиндрической оболочки, контактирующей с вязкоупругой средой с учетом трения. *Доклад НАНА*. 2008. № 2. С. 35–42.
9. Пирмамедов И. Т. Расчет параметрических колебаний неоднородного по толщине вязкоупругого стержня в вязкоупругом грунте. *Международный научно-технический журнал*. Объединенный институт машиностроения НАН Белоруси. 2009. № 3(8). С. 52–56.
10. Вольмир С. А. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. Москва: Наука, 1976. 416 с.
11. Quliyeva Z. M. Şəbəkə əmələ gətirən çubuqlarla möhkəmləndirilmiş, sıxıcı qüvvənin təsirinə məruz qalan özlü-elastic ortotrop silindrik örtüyün mühitlə birlikdə rəqsləri. *Journal of Qafqaz University, Mechanical and industrial engineering*. Bakı. 2015. Vol. 2, N 1. Səh. 48–53.
12. Гулиева З. М. Свободные колебания усиленных поперечными системами ребер и нагруженной осевыми сжимающими силами ортотропной вязкоупругой цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью. *Актуальные проблемы математики и механики*. Материалы Международной конференции, посвященной 55-летию Института Математики и Механики НАН Азербайджана. 2014. С. 129–131.
13. Латифов Ф. С., Искендеров Р. А., Гулиева З. М. Свободные колебания усиленных продольными системами ребер и нагруженной осевыми сжимающими силами ортотропной цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью. *Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций*. 2015. Вып. 24. С. 132–139.
14. Латифов Ф. С. Колебания оболочек с упругой и жидкой средой. Баку: Элм, 1999. 164 с.

### REFERENCES

1. Amiro, I. Ya., Zarutskiy, V. A. & Polyakov, P. S. (1973). Ribbed cylindrical shells. Kiev: Nauk. dumka.
2. Latifov, F.S. & Seyfullayev, F. A. (2004). Asymptotic analysis of oscillation eigenfrequency of orthotropic cylindrical shells in infinite elastic medium filled with liquid. Trans. of NAS.Acad. of Azerb. ser. of physical-technical and mathematical sciences volume XVIV clid., No. 1, pp. 227-230.
3. Seyfullaev, F. A. (2004). Asymptotic analysis of the eigenfrequencies of axisymmetric oscillations of orthotropic cylindrical shells in an infinite elastic medium filled with a liquid. *Mehanika i mashinostroenie*, No. 4, pp. 33-34.
4. Aliev, F. F. (2006). The actual oscillations in an infinite elastic medium of a longitudinally supported cylindrical shell with a flowing liquid. *Mehanika i mashinostroenie*, No. 1, pp. 3-5.
5. Aliev, F. F. (2007). The actual oscillations in an infinite elastic medium reinforced by a cross-sectional system of ribs of a cylindrical shell with a flowing liquid. *Mehanika i mashinostroenie*, No. 2, pp. 10-12.
6. Latifov, F. S. & Suleymanova, S. G. (2009). The problem of free vibrations of ribs reinforced by a crosstern system and cylindrical shells loaded with axial compressive forces filled with medium. *Mehanika Mashin, Mehanizmov i Materialov*, No. 1, pp. 59-62.
7. Suleymanova, S. G. (2007). Free oscillations longitudinally reinforced and loaded with axial compressive forces of a cylindrical shell with a filler. *Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan*, XXVII, pp. 135-140.
8. Pirmamedov, I. T. (2008). Parametric oscillations of a viscoelastic cylindrical shell non-linear and inhomogeneous in thickness, in contact with a viscoelastic medium with allowance for friction. *Doklad NANA*, No. 2, pp. 35-42.
9. Pirmamedov, I. T. (2009). Calculation of parametric oscillations of a viscoelastic rod inhomogeneous in thickness in viscoelastic soil. *Mezhdunarodnyiy nauchno-tehnicheskiy zhurnal. Ob'edinennyiy institut mashinostroeniya NAN Belorusi*, No. 3(8), pp. 52-56.
10. Volmir, S. A. (1976). Shells in the flow of liquid and gas. The problems of aeroelasticity. Moscow: Nauka.
11. Gulieva, Z. M. (2015). The network is experiencing brings with chopsticks reinforced closure forces are exposed to on a viscous-elastic ortotrop cylindrical coating environment dance together. *Journal of Qafqaz University, Mechanical and industrial engineering*. Baku, Vol. 2, No. 1, pp. 48-53.
12. Gulieva, Z. M. (2014). Free vibrations of ribs reinforced by transverse systems and an orthotropic, viscoelastic cylindrical shell loaded with axial compressive forces, with a flowing liquid. *Actual problems of mathematics and mechanics. Materials of the International Conference dedicated to the 55th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Azerbaijan*, (pp. 129-131).
13. Latifov, F. S., Iskenderov, R. A. & Gulieva, Z. M. (2015). Free oscillations of ribs reinforced by longitudinal systems and an orthotropic cylindrical shell loaded with axial compressive forces, with a flowing liquid. *Problemyi vyichislitelnoy mehaniki i prochnosti konstruksiy*, Iss. 24, pp. 132-139.
14. Latifov, F. S. (1999). Oscillations of shells with elastic and liquid media. Baku: Elm.

УДК 539.3

## ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ОБОБЩЕННОЕ ПЛОСКОЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ

Левада В. С., к. т. н., доцент, Левицкая Т. И., к. т. н., доцент,  
Пожуева И. С., к. т. н., доцент, Хижняк В. К., к. ф.-м. н., доцент

*Запорожский национальный технический университет,  
ул. Жуковского, 64, м. Запорожье, 69063, Украина*

tigr\_lev@ukr.net

С применением преобразования Фурье обобщенных функций медленного роста, получена матрица фундаментальных решений системы уравнений, описывающих обобщенное плоское напряженное состояние пьезоэлектрической пластины. Элементы матрицы, представленные в замкнутом виде, выражены через элементарные функции.

*Ключевые слова:* пластина, матрица фундаментальных решений, обобщенные функции, электроупругость, пьезоэлектрическое напряжение, преобразование Фурье.

## ПОБУДОВА МАТРИЦІ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ, ЩО ОПИСУЮТЬ УЗАГАЛЬНЕНИЙ ПЛОСКИЙ ЕЛЕКТРОПРУЖНИЙ СТАН П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОЇ ПЛАСТИНИ

Левада В. С., к. т. н., доцент, Левицька Т. І., к. т. н., доцент,  
Пожуєва І. С., к. т. н., доцент, Хижняк В. К., к. ф.-м. н., доцент

*Запорізький національний технічний університет,  
буль. Жуковського, 64, м. Запоріжжя, 69063, Україна*

tigr\_lev@ukr.net

Із застосуванням перетворення Фур'є узагальнених функцій повільного росту, отримана матриця фундаментальних розв'язків системи рівнянь, що описують узагальнений плоский напружений стан п'єзоелектричної пластини. Елементи матриці, представлені в замкнутому вигляді, виражені через елементарні функції.

*Ключові слова:* пластина, матриця фундаментальних розв'язків, узагальнені функції, електропружність, п'єзоелектрична напруга, перетворення Фур'є.

## CONSTRUCTION OF THE MATRIX OF FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF THE SYSTEM OF EQUATIONS DESCRIBING THE GENERALIZED PLANE ELECTRICAL ELASTIC STATE OF THE PIEZOELECTRIC PLATE

Levada V. S., Ph.D. of Technical Science, Associate Professor,  
Levitskaya T. I., Ph.D. of Technical Science, Associate Professor,  
Pozhueva I. S., Ph.D. of Technical Science, Associate Professor,  
Khizhnyak V. K., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor

*Zaporizhzhya National Technical University,  
Zhukovsky str., 64, Zaporozhye, 69063, Ukraine*

tigr\_lev@ukr.net

In constructing the matrix of fundamental solutions, the Fourier transform of the generalized slow growth functions is applied for both variables. Solving the obtained system of linear algebraic equations, we arrive at the need to solve an algebraic equation of sixth degree with real coefficients. This equation can have three variants of roots. Assuming that this solution is found, we obtain a solution of the original problem in Fourier images. When finding the inverse transformation with respect to one of the variables, the usual inverse Fourier transform is used. In order to obtain an inverse transformation with respect to another variable, it was necessary to regularize the resulting generalized functions. An exact solution of the problem is obtained. This solution is expressed in a closed form through elementary functions, which makes it possible to use it effectively.

*Key words:* plate, matrix of fundamental solutions, generalized functions, electroelasticity, piezoelectric stress, Fourier transform.

### ВВЕДЕНИЕ

Пьезоэлектрические материалы, благодаря своим физико-механическим свойствам, нашли широкое применение в различных областях науки и техники. В работах [1, 2] изложены основы электроупругости. Рассмотрены методы решения отдельных задач. В плоских задачах электроупругости чаще всего используются методы ТФКП. Знание матрицы фундаментальных решений соответствующих уравнений позволяет свести краевые задачи к ГИУ, с последующим применением МГЭ. Построению этой матрицы с помощью интегрального преобразования Фурье посвящена данная работа.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается бесконечная пьезоэлектрическая пластина со срединной плоскостью ХОУ, которая является плоскостью упругоэлектрической симметрии. Пластина находится в обобщенном плоском электроупругом состоянии.

Зависимость между компонентами тензора напряжений, тензора деформаций, вектора напряженности электрического поля и вектора электрической индукции выражается следующим равенством:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ D_x \\ D_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} & -b_{11} & -b_{12} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} & -b_{21} & -b_{22} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} & -b_{31} & -b_{32} \\ b_{11} & b_{21} & b_{31} & a_{11} & a_{12} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ E_x \\ E_y \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где  $(E_x, E_y)$  – напряженность электрического поля;  $(D_x, D_y)$  – вектор электрической индукции;  $c_{ij}$  – коэффициенты упругости;  $b_{ij}$  – коэффициенты пьезоэлектричности;  $a_{ij}$  – коэффициенты диэлектрической проницаемости.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

где  $\varphi$  – потенциал электрического поля;  $u, v$  – перемещения в направлениях  $Ox$  и  $Oy$ .

Приходим к следующей задаче: найти решение матричного уравнения

$$A \cdot G = E \cdot \delta(x) \cdot \delta(y), \quad (2)$$

где

$$A \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix};$$

$$A_{11} = c_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2c_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad A_{12} = A_{21} = c_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$A_{13} = A_{31} = b_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (b_{12} + b_{31}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + b_{32} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad A_{22} = c_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2c_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad (3)$$

$$A_{23} = A_{32} = b_{31} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (b_{32} + b_{21}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + b_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad A_{33} = -a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2a_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - a_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$G(x, y) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} - \text{матрица фундаментальных решений}; E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \delta(x), \delta(y)$$

– дельта-функции Дирака.

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

На первом этапе будем искать решение следующей задачи:

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \cdot \delta(x) \cdot \delta(y). \quad (4)$$

Это уравнение описывает электроупругое состояние пластины, если в точке  $(0,0)$  заданы сосредоточенная объемная сила и сосредоточенный свободный электрический заряд.

Систему (4) будем рассматривать в пространстве  $\dot{S}$  (обобщенных функций медленного роста), считая оператор  $A\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$  эллиптическим. Применим к (4) преобразование Фурье:

$$A(-i\lambda, -i\mu) \begin{bmatrix} \bar{u}(\lambda, \mu) \\ \bar{v}(\lambda, \mu) \\ \bar{\varphi}(\lambda, \mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где

$$\left(\bar{u}(\lambda, \mu), \bar{v}(\lambda, \mu), \bar{\varphi}(\lambda, \mu)\right) = \left(F[u(x, y)], F[v(x, y)], F[\varphi(x, y)]\right);$$

$$\Delta = \det A(-i\lambda, -i\mu) = N_1\mu^6 + N_2\lambda\mu^5 + N_3\lambda^2\mu^4 + N_4\lambda^3\mu^3 + N_5\lambda^4\mu^2 + N_6\lambda^5\mu + N_7\lambda^6;$$

$$N_1 = c_{66}c_{22}a_{22} + c_{66}b_{22}^2 + c_{22}b_{32}^2 - c_{26}^2a_{22} - 2c_{26}b_{32}b_{22}.$$

Выражения для остальных коэффициентов  $N_i$  не приводим из-за громоздкости.

Далее находим определители

$$\Delta_1(\lambda, \mu) = \begin{vmatrix} F_1 & A_{12} & A_{13} \\ F_2 & A_{22} & A_{23} \\ F_3 & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2(\lambda, \mu) = \begin{vmatrix} A_{11} & F_1 & A_{13} \\ A_{21} & F_2 & A_{23} \\ A_{31} & F_3 & A_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3(\lambda, \mu) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & F_1 \\ A_{21} & A_{22} & F_2 \\ A_{31} & A_{32} & F_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = M_{11}\mu^4 + M_{12}\lambda\mu^3 + M_{13}\lambda^2\mu^2 + M_{14}\lambda^3\mu + M_{15};$$

$$\Delta_2 = M_{21}\mu^4 + M_{22}\lambda\mu^3 + M_{23}\lambda^2\mu^2 + M_{24}\lambda^3\mu + M_{25};$$

$$\Delta_3 = M_{31}\mu^4 + M_{32}\lambda\mu^3 + M_{33}\lambda^2\mu^2 + M_{34}\lambda^3\mu + M_{35}, \quad (6)$$

где

$$M_{11} = F_1(-c_{22}a_{22} - b_{22}^2) + F_2(c_{26}a_{22} + b_{32}b_{22}) + F_3(c_{26}b_{22} - c_{22}b_{32});$$

$$M_{12} = F_1(-2c_{26}a_{22} - 2c_{22}a_{12} - 2b_{21}b_{22} - 2b_{32}b_{22}) +$$

$$+ F_2(2c_{26}a_{12} + c_{12}a_{22} + c_{66}a_{22} + b_{12}b_{22} + b_{31}b_{22} + b_{32}b_{21} + b_{32}^2) +$$

$$+ F_3(-c_{26}b_{32} + c_{26}b_{21} + c_{12}b_{22} + c_{66}b_{22} - c_{22}b_{12} - c_{22}b_{31});$$

$$\begin{aligned}
 M_{13} &= F_1(-c_{66}a_{22} - 4c_{26}a_{12} - c_{22}a_{11} - 2b_{31}b_{22} - 2b_{21}b_{32} - 2b_{21}b_{32} - b_{21}^2 - b_{32}^2) + \\
 &+ F_2(c_{26}a_{11} + 2c_{12}a_{12} + 2c_{66}a_{12} + c_{16}a_{22} + b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21} + b_{12}b_{32} + b_{31}b_{21} + 2b_{31}b_{32}) + \\
 &+ F_3(-c_{26}b_{31} + c_{12}b_{32} + c_{12}b_{21} + c_{66}b_{21} + c_{16}b_{22} - 2c_{26}b_{12} - c_{22}b_{11}); \\
 M_{14} &= F_1(-2c_{66}a_{12} - 2c_{26}a_{11} - 2b_{31}b_{32} - 2b_{31}b_{21}) + \\
 &+ F_2(c_{12}a_{11} + c_{66}a_{11} + 2c_{16}a_{12} + b_{11}b_{21} + b_{11}b_{32} + b_{12}b_{31} + b_{31}^2) + \\
 &+ F_3(c_{12}b_{31} + c_{16}b_{32} + c_{16}b_{21} - c_{66}b_{12} - 2c_{26}b_{11}); \\
 M_{15} &= F_1(-c_{66}a_{11} - b_{31}^2) + F_2(c_{16}a_{11} + b_{11}b_{31}) + F_3(c_{16}b_{31} - c_{66}b_{11}); \\
 M_{21} &= F_1(c_{26}a_{22}b_{32}b_{22}) + F_2(-c_{66}a_{22} - b_{32}^2) + F_3(-c_{66}b_{22} + c_{26}b_{32}); \\
 M_{22} &= F_1(c_{12}a_{22} + c_{66}a_{22} + 2c_{26}a_{12} + b_{31}b_{22} + b_{12}b_{22} + b_{32}^2 + b_{32}b_{21}) + \\
 &+ F_2(-2c_{16}a_{22} - 2c_{66}a_{12} - 2b_{12}b_{32} - 2b_{31}b_{32}) + F_3(-2c_{16}b_{22} - c_{66}b_{21} + c_{12}b_{32} + c_{26}b_{12} + c_{26}b_{31}); \\
 M_{23} &= F_1(c_{16}a_{22} + 2c_{12}a_{12} + 2c_{66}a_{12} + c_{26}a_{11} + b_{11}b_{22} + 2b_{31}b_{32} + b_{31}b_{21} + b_{12}b_{32} + b_{12}b_{21}) + \\
 &+ F_2(-c_{11}a_{22} - 4c_{16}a_{12} - c_{66}a_{11} - b_{12}^2 - b_{31}^2 - 2b_{11}b_{32} - 2b_{12}b_{31}) + \\
 &+ F_3(-c_{11}b_{22} - c_{16}b_{32} - 2c_{16}b_{21} + c_{12}b_{12} + c_{12}b_{31} + c_{66}b_{12} + c_{26}b_{11}); \\
 M_{24} &= F_1(2c_{16}a_{12} + c_{12}a_{11} + c_{66}a_{11} + b_{11}b_{32} + b_{11}b_{21} + b_{31}^2 + b_{12}b_{31}) + \\
 &+ F_2(-2c_{11}a_{12} - 2c_{16}a_{11} - 2b_{11}b_{12} - 2b_{11}b_{31}) + \\
 &+ F_3(-c_{11}b_{32} - c_{11}b_{21} - c_{16}b_{31} + c_{16}b_{12} + c_{12}b_{11} + c_{66}b_{11}); \\
 M_{25} &= F_1(c_{16}a_{11} + b_{11}b_{31}) + F_2(-c_{11}a_{11} - b_{11}^2) + F_3(-c_{11}b_{31} + c_{16}b_{11}); \\
 M_{31} &= F_1(c_{26}b_{22} - c_{22}b_{32}) + F_2(-c_{66}b_{22} + c_{26}b_{32}) + F_3(c_{66}c_{22} - c_{26}^2); \\
 M_{32} &= F_1(c_{12}b_{22} + c_{66}b_{22} + c_{26}b_{21} - c_{26}b_{32} - c_{22}b_{31} - c_{22}b_{12}) + \\
 &+ F_2(-c_{66}b_{21} - 2c_{16}b_{22} + c_{26}b_{31} + c_{12}b_{32} + c_{26}b_{12}) + F_3(2c_{16}c_{22} - 2c_{12}c_{26}); \\
 M_{33} &= F_1(c_{16}b_{22} + c_{12}b_{21} + c_{12}b_{32} + c_{66}b_{21} - c_{26}b_{31} - c_{22}b_{11} - 2c_{26}b_{12}) + \\
 &+ F_2(-2c_{16}b_{21} - c_{16}b_{32} - c_{11}b_{22} + c_{12}b_{31} + c_{13}b_{12} + c_{66}b_{12} + c_{26}b_{11}) + \\
 &+ F_3(c_{11}c_{22} + 2c_{16}c_{26} - 2c_{12}c_{66} - c_{12}^2); \\
 M_{34} &= F_1(c_{16}b_{21} + c_{16}b_{32} + c_{12}b_{31} - 2c_{26}b_{11} - c_{66}b_{12}) + \\
 &+ F_2(-c_{11}b_{21} - c_{12}b_{32} - c_{16}b_{31} + c_{16}b_{12} + c_{12}b_{11} + c_{66}b_{11}) + F_3(2c_{11}c_{26} - 2c_{16}c_{12}); \\
 M_{35} &= F_1(c_{16}b_{31} - c_{66}b_{11}) + F_2(-c_{11}b_{31} + c_{16}b_{11}) + F_3(c_{11}c_{66} - c_{16}^2). \tag{7}
 \end{aligned}$$

Решение уравнения (5) представляется в виде:

$$\bar{u}(\lambda, \mu) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \bar{v}(\lambda, \mu) = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \bar{\varphi}(\lambda, \mu) = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{8}$$

Выполняем обычное обратное преобразование Фурье по  $\mu$  :

$$\left(\bar{u}(\lambda, y), \bar{v}(\lambda, y), \bar{\varphi}(\lambda, y)\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\bar{u}(\lambda, \mu), \bar{v}(\lambda, \mu), \bar{\varphi}(\lambda, \mu)\right) \cdot e^{i\mu y} d\mu.$$

При этом, если

$$\left(g_1(\lambda, y), g_2(\lambda, y), g_3(\lambda, y)\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\bar{u}(\lambda, \mu), \bar{v}(\lambda, \mu), \bar{\varphi}(\lambda, \mu)\right) \cdot e^{i\mu|y|} d\mu, \quad (9)$$

то

$$\left(\bar{u}(\lambda, y), \bar{v}(\lambda, y), \bar{\varphi}(\lambda, y)\right) = \left(g_1(-\lambda \operatorname{sign} y, y), g_2(-\lambda \operatorname{sign} y, y), g_3(-\lambda \operatorname{sign} y, y)\right).$$

Интеграл  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\bar{u}(\lambda, \mu), \bar{v}(\lambda, \mu), \bar{\varphi}(\lambda, \mu)\right) \cdot e^{i\mu|y|} d\mu$  вычисляется с помощью вычетов.

Уравнение  $\Delta = 0$  относительно  $\mu$  может иметь следующие выражения корней:

1.  $\mu_{1,2} = \lambda\alpha_1 \pm i|\lambda|\beta_1$ ,  $\mu_{3,4} = \lambda\alpha_2 \pm i|\lambda|\beta_2$ ,  $\mu_{5,6} = \lambda\alpha_3 \pm i|\lambda|\beta_3$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 > 0$ .
2.  $\mu_{1,2} = \lambda\alpha_1 + i|\lambda|\beta_1$ ,  $\mu_{3,4} = \lambda\alpha_1 - i|\lambda|\beta_1$ ,  $\mu_{5,6} = \lambda\alpha_2 \pm i|\lambda|\beta_2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\beta_1, \beta_2 > 0$ .
3.  $\mu_{1,2,3} = \lambda\alpha + i|\lambda|\beta$ ,  $\mu_{4,5,6} = \lambda\alpha - i|\lambda|\beta$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$ . (10)

Для первого варианта корней получаем:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\lambda, y) = & \frac{1}{2|\lambda|N_1} \sum_{k=1}^3 \frac{e^{-i\lambda y \alpha_k} e^{-|\lambda||y|\beta_k}}{\beta_k T_k} \left[ M_{11} \left( (\alpha_k^4 - 6\alpha_k^2 \beta_k^2 + \beta_k^4) Q_k + 4(\alpha_k^3 \beta_k - \alpha_k \beta_k^3) P_k \right) + \right. \\ & + M_{12} \left( (\alpha_k^3 - 3\alpha_k \beta_k^2) Q_k + (3\alpha_k^2 \beta_k - \beta_k^3) P_k \right) + M_{13} \left( (\alpha_k^2 - \beta_k^2) Q_k + 2\alpha_k \beta_k P_k \right) + M_{14} (\alpha_k Q_k + \beta_k P_k) + M_{15} Q_k \left. \right] + \\ & + \frac{1}{2|\lambda|^2 N_1} \sum_{k=1}^3 \frac{e^{-i\lambda y \alpha_k} e^{-|\lambda||y|\beta_k} (-i\lambda) \operatorname{sign}(y)}{\beta_k T_k} \left[ M_{11} \left( (-\alpha_k^4 + 6\alpha_k^2 \beta_k^2 - \beta_k^4) P_k + 4(\alpha_k^3 \beta_k - \alpha_k \beta_k^3) Q_k \right) + \right. \\ & + M_{12} \left( (3\alpha_k \beta_k^2 - \alpha_k^3) P_k + (3\alpha_k^2 \beta_k - \beta_k^3) Q_k \right) + M_{13} \left( (\beta_k^2 - \alpha_k^2) P_k + 2\alpha_k \beta_k Q_k \right) + \\ & \left. + M_{14} (\beta_k Q_k - \alpha_k P_k) - M_{15} P_k \right], \quad (11) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = & 2(2\alpha_1^3 \beta_1 - 3\alpha_1^2 \alpha_2 \beta_1 + \alpha_1 \alpha_2^2 \beta_1 - 2\alpha_1 \beta_1^3 + \alpha_1 \beta_1 \beta_2^2 - 3\alpha_1^2 \alpha_3 \beta_1 + \\ & + 4\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta_1 - \alpha_2^2 \alpha_3 \beta_1 + \alpha_3 \beta_1^3 - \alpha_3 \beta_1 \beta_2^2 + \alpha_1 \alpha_3^2 \beta_1 + \alpha_1 \beta_1 \beta_3^2 - \alpha_2 \alpha_3^2 \beta_1 + \alpha_2 \beta_1^2 - \alpha_2 \beta_1 \beta_3^2); \\ Q(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = & \alpha_1^4 - 2\alpha_1^3 \alpha_3 + \alpha_1^2 \alpha_3^2 - 6\alpha_1^2 \beta_1^2 + \alpha_1^2 \beta_3^2 - 2\alpha_1^3 \alpha_2 + 4\alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3 - 2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3^2 + \\ & + 6\alpha_1 \alpha_2 \beta_1^2 - 2\alpha_1 \alpha_2 \beta_3^2 + \alpha_1^2 \alpha_2^2 - 2\alpha_1 \alpha_2^2 \alpha_3 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 - \alpha_2^2 \beta_1^2 + \alpha_2^2 \beta_3^2 + 6\alpha_1 \alpha_3 \beta_1^2 - \alpha_3^2 \beta_1^2 + \\ & + \beta_1^4 - \beta_1^2 \beta_3^2 + \alpha_1^2 \beta_2^2 - 2\alpha_1 \alpha_3 \beta_2^2 + \alpha_3^2 \beta_2^2 - \beta_1^3 \beta_2^2 + \beta_2^2 \beta_3^2 - 4\alpha_2 \alpha_3 \beta_1^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1 = P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3); \quad P_2 = P(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3, \beta_2, \beta_1, \beta_3); \quad P_3 = P(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_3, \beta_2, \beta_1); \\ P_4 = P(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_1, \beta_2, \beta_1, \beta_1); \quad Q_1 = Q(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3); \quad Q_2 = Q(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3, \beta_2, \beta_2, \beta_3); \\ Q_3 = Q(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_3, \beta_2, \beta_1); \quad Q_4 = Q(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_1, \beta_2, \beta_1, \beta_1); \end{aligned}$$

$$T_k = P_k^2 + Q_k^2.$$



Для второго варианта корней:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\lambda, y) = & \frac{e^{-i\lambda y \alpha_1} e^{-|\lambda||y|\beta_1}}{4|\lambda|\beta_1^3 HN_1} [M_{11}(f_1 R + f_2 S) + M_{12}(f_3 R + f_4 S) + M_{13}(f_5 R + f_6 S) + M_{14}(f_7 R + f_8 S) + \\ & + M_{15}(f_9 R + f_{10} S)] - \frac{e^{-i\lambda y \alpha_1} e^{-|\lambda||y|\beta_1} (-i\lambda) \text{sign}(y)}{4|\lambda|^2 \beta_1^3 HN_1} [M_{11}(-f_1 S + f_2 R) + M_{12}(-f_3 S + f_4 R) + \\ & + M_{13}(-f_5 S + f_6 R) + M_{14}(-f_7 S + f_8 R) + M_{15}(-f_9 S + f_{10} R)] - \frac{e^{-i\lambda y \alpha_1} e^{-|\lambda||y|\beta_1} |y|}{4\beta_1^2 HN_1} [M_{11}(f_{11} R + f_{12} S) + \\ & + M_{12}(f_{13} R + f_{14} S) + M_{13}(f_{15} R + f_{16} S) + M_{14}(f_{17} R + f_{18} S) + M_{15}(f_{19} R + f_{20} S)] - \\ & - \frac{e^{-i\lambda y \alpha_1} e^{-|\lambda||y|\beta_1} (-i\lambda) y}{4|\lambda|\beta_1^2 HN_1} [M_{11}(-f_{11} S + f_{12} R) + M_{12}(-f_{13} S + f_{14} R) + M_{13}(-f_{15} S + f_{16} R) + \\ & + M_{14}(-f_{17} S + f_{18} R) + M_{15}(-f_{19} S + f_{20} R)] + \\ & + \frac{e^{-i\lambda y \alpha_2} e^{-|\lambda||y|\beta_2}}{2|\lambda|\beta_2 T_4} [M_{11}((\alpha_2^4 - 6\alpha_2^2 \beta_2^2 + \beta_2^4) Q_4 + 4(\alpha_2^3 \beta_2 - \alpha_2 \beta_2^3) P_4) + \\ & + M_{12}((\alpha_2^3 - 3\alpha_2 \beta_2^2) Q_4 + (3\alpha_2^2 \beta_2 - \beta_2^3) P_4) + M_{13}((\alpha_2^2 - \beta_2^2) Q_4 + 2\alpha_2 \beta_2 P_4) + \\ & + M_{14}(\alpha_2 Q_4 + \beta_2 P_4) + M_{15} Q_4] + \\ & + \frac{e^{-i\lambda y \alpha_2} e^{-|\lambda||y|\beta_2} (-i\lambda) \text{sign}(y)}{2|\lambda|^2 \beta_2 T_4 N_1} [M_{11}((-\alpha_2^4 + 6\alpha_2^2 \beta_2^2 - \beta_2^4) P_4 + 4(\alpha_2^3 \beta_2 - \alpha_2 \beta_2^3) Q_4) + \\ & + M_{12}((3\alpha_2 \beta_2^2 - \alpha_2^3) P_4 + (3\alpha_2^2 \beta_2 - \beta_2^3) Q_4) + M_{13}((\beta_2^2 - \alpha_2^2) P_4 + 2\alpha_2 \beta_2 Q_4) + \\ & + M_{14}(-\alpha_2 P_4 + \beta_2 Q_4) - M_{15} P_4]. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$R = \alpha_1^4 + 6\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^4 + \beta_1^4 + \beta_2^4 - 4\alpha_1^3 \alpha_2 - 6\alpha_1^2 \beta_1^2 + 2\alpha_1^2 \beta_2^2 - 4\alpha_1 \alpha_2^3 + 12\alpha_1 \alpha_2 \beta_1^2 - 4\alpha_1 \alpha_2 \beta_2^2 - 6\alpha_2^2 \beta_1^2 + 2\alpha_2^2 \beta_2^2 - 2\beta_1^2 \beta_2^2;$$

$$S = 4(\alpha_1^3 \beta_1 - 3\alpha_1^2 \alpha_2 \beta_1 + 3\alpha_1 \alpha_2^2 \beta_1 - \alpha_2^3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_1^3 + \alpha_2 \beta_1^3 + \alpha_1 \beta_1 \beta_2^2 - \alpha_2 \beta_1 \beta_2^2);$$

$$H = R^2 + S^2;$$

$$f_1 = 5\alpha_1^4 \beta_1^2 + 5\alpha_1^2 \beta_1^4 + 4\alpha_1^3 \alpha_2 \beta_1^2 - 14\alpha_1 \alpha_2 \beta_1^4 - 6\alpha_1^2 \alpha_2^2 \beta_1^2 + 3\alpha_2^2 \beta_1^4 - \beta_1^6 - 6\alpha_1^2 \beta_1^2 \beta_2^2 + 3\beta_1^4 \beta_2^2 - \alpha_1^6 + 2\alpha_1^5 \alpha_2 - \alpha_1^4 \alpha_2^2 - \alpha_1^4 \beta_2^2;$$

$$f_2 = -4\alpha_1^5 \beta_1 + 4\alpha_1^4 \alpha_2 \beta_1 + 16\alpha_1^2 \alpha_2 \beta_1^3 - 8\alpha_1 \alpha_2^2 \beta_1^3 + 4\alpha_1 \beta_1^4 + 4\alpha_1^3 \beta_2^3 - 8\alpha_1 \beta_1^3 \beta_2^2 - 4\alpha_2 \beta_1^5 - 4\alpha_1^3 \beta_1 \beta_2^2;$$

$$f_3 = 6\alpha_1^3 \beta_1^2 - 3\alpha_1 \alpha_2^2 \beta_1^2 - \alpha_1 \beta_1^4 - 3\alpha_1 \beta_1^2 \beta_2^2 - 2\alpha_2 \beta_1^4 - \alpha_1^5 + 2\alpha_1^4 \alpha_2 - \alpha_1^3 \alpha_2^2 - \alpha_1^3 \beta_2^2;$$

$$f_4 = -4\alpha_1^4 \beta_1 + 4\alpha_1^2 \beta_1^3 + 4\alpha_1^3 \alpha_2 \beta_1 + 4\alpha_1 \alpha_2 \beta_1^3 - 2\alpha_2^2 \beta_1^3 - 2\beta_1^3 \beta_2^2;$$

$$f_5 = 6\alpha_1^2 \beta_1^2 - 2\alpha_1 \alpha_2 \beta_1^2 - \alpha_2^2 \beta_1^2 - \beta_1^4 - \beta_1^2 \beta_2^2 - \alpha_1^4 + 2\alpha_1^3 \alpha_2 - \alpha_1^2 \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \beta_2^2;$$

$$f_6 = -4\alpha_1^3 \beta_1 + 4\alpha_1^2 \alpha_2 \beta_1 + 4\alpha_1 \beta_1^3; \quad f_7 = 5\alpha_1 \beta_1^2 - 2\alpha_2 \beta_1^2 - \alpha_1^3 + 2\alpha_1^2 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2^2 - \alpha_1 \beta_2^2;$$

$$\begin{aligned}
f_8 &= -4\alpha_1^2\beta_1 + 4\alpha_1\alpha_2\beta_1 + 2\beta_1^3; & f_9 &= -\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2^2 + 3\beta_1^2 - \beta_2^2; & f_{10} &= -4\alpha_1\beta_1 + 4\alpha_2\beta_1; \\
f_{11} &= -\alpha_1^6 + 15\alpha_1^4\beta_1^2 - 15\alpha_1^2\beta_1^4 + 2\alpha_1^5\alpha_2 - 20\alpha_1^3\alpha_2\beta_1^2 + 10\alpha_1\alpha_2\beta_1^4 - \alpha_1^4\alpha_2^2 + \\
&\quad + 6\alpha_1^2\alpha_2^2\beta_1^2 - \alpha_2^2\beta_1^4 + \beta_1^6 - \alpha_1^4\beta_2^2 + 6\alpha_1^2\beta_1^2\beta_2^2 - \beta_1^4\beta_2^2; \\
f_{12} &= -6\alpha_1^5\beta_1^2 + 20\alpha_1^3\beta_1^3 + 10\alpha_1^4\alpha_2\beta_1 - 20\alpha_1^2\alpha_2\beta_1^3 - 4\alpha_1^3\alpha_2^2\beta_1 + 4\alpha_1\alpha_2^2\beta_1^3 - 6\alpha_1\beta_1^5 - 4\alpha_1^3\beta_1\beta_2^2 + \\
&\quad + 4\alpha_1\beta_1^2\beta_2^2 + 2\alpha_2\beta_1^5; \\
f_{13} &= -\alpha_1^5 + 10\alpha_1^3\beta_1^2 + 2\alpha_1^4\alpha_2 - 12\alpha_1^2\alpha_2\beta_1^2 - \alpha_1^3\alpha_2^2 + \\
&\quad + 3\alpha_1\alpha_2^2\beta_1^2 - 5\alpha_1\beta_1^4 - \alpha_1^3\beta_2^2 + 3\alpha_1\beta_1^2\beta_2^2 + 2\alpha_2\beta_1^4; \\
f_{14} &= -5\alpha_1^4\beta_1 + \alpha_1^2\beta_1^3 + 8\alpha_1^3\alpha_2\beta_1 - 8\alpha_1\alpha_2\beta_1^3 - \\
&\quad - 3\alpha_1^2\alpha_2^2\beta_1 + \alpha_2^2\beta_1^3 + 9\alpha_1^2\beta_1^3 - \beta_1^5 - 3\alpha_1^2\beta_1\beta_2^2 + \beta_1^3\beta_2^2; \\
f_{15} &= -\alpha_1^4 + 6\alpha_1^2\beta_1^2 + 2\alpha_1^3\alpha_2 - 6\alpha_1\alpha_2\beta_1^2 - \alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\beta_1^2 - \beta_1^4 - \alpha_1^2\beta_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2; \\
f_{16} &= -4\alpha_1^3\beta_1 + 6\alpha_1^2\alpha_2\beta_1 - 2\alpha_1\alpha_2^2\beta_1 + 4\alpha_1\beta_1^3 - 2\alpha_1\beta_1\beta_2^2 - 2\alpha_2\beta_1^3; \\
f_{17} &= -\alpha_1^3 + 2\alpha_1^2\alpha_2 - \alpha_1\alpha_2^2 + 3\alpha_1\beta_1^2 - \alpha_1\beta_2^2 - 2\alpha_2\beta_1^2; \\
f_{18} &= -\alpha_1^2\beta_1 + 2\alpha_1\alpha_2\beta_1 - \alpha_2^2\beta_1 + \beta_1^3 - \beta_1\beta_2^2 + 2\alpha_1\beta_1^2 - 2\alpha_2\beta_1^2; \\
f_{19} &= -\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2^2 + \beta_1^2 - \beta_2^2; & f_{20} &= 2(-\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_1).
\end{aligned}$$

Для третьего варианта корней получаем:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\lambda, y) &= \frac{e^{-i\lambda y \alpha} e^{-|\lambda||y|\beta} |y|}{16\beta^4 N_1} \left[ M_{11} (30\alpha^2\beta^2 - 9\beta^4 - \alpha^4) + \right. \\
&\quad \left. + M_{12} (15\alpha\beta^2 - \alpha^3) + M_{13} (5\beta^2 - \alpha^2) + M_{14}\alpha - M_{15} \right] + \\
&\quad + \frac{e^{-i\lambda y \alpha} e^{-|\lambda||y|\beta} y (-i\lambda)}{16|\lambda|\beta^3 N_1} \left[ M_{11} (-12\alpha^3 + 28\alpha\beta^2) + M_{12} (-9\alpha^2 + 7\beta^2) + 6M_{13}\alpha - 3M_{14} \right] + \\
&\quad + \frac{e^{-i\lambda y \alpha} e^{-|\lambda||y|\beta} |\lambda| y^2}{16\beta^3 N_1} \left[ M_{11} (\alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4) + M_{12} (\alpha^3 - 3\alpha\beta^2) + M_{13} (\alpha^2 - \beta^2) + M_{14}\alpha + M_{15} \right] + \\
&\quad + \frac{e^{-i\lambda y \alpha} e^{-|\lambda||y|\beta} y |y| (-i\lambda)}{16\beta^2 N_1} \left[ M_{11} (4\alpha^3 - 4\alpha\beta^2) + M_{12} (3\alpha^2 - \beta^2) + 2M_{13}\alpha + M_{14} \right] + \\
&\quad + \frac{e^{-i\lambda y \alpha} e^{-|\lambda||y|\beta}}{16|\lambda|\beta^5 N_1} \left[ M_{11} (37\alpha^2\beta^2 - 3\beta^4 - 3\alpha^4) + \right. \\
&\quad \left. + M_{12} (21\alpha\beta^2 - 3\alpha^3) + M_{13} (7\beta^2 - 3\alpha^2) - 3M_{14}\alpha - 3M_{15} \right] + \\
&\quad + \frac{e^{-i\lambda y \alpha} e^{-|\lambda||y|\beta} (-i\lambda) \operatorname{sign}(y)}{8|\lambda|^2 \beta^4 N_1} \left[ M_{11} 12(\alpha\beta^2 - \alpha^3) + 3M_{12} (\beta^2 - 3\alpha^2) - 6M_{13}\alpha - 3M_{14} \right]. \quad (13)
\end{aligned}$$

Для нахождения  $u(x, y)$  используем результаты [3]:

$$F^{-1} \left[ \frac{e^{-a|\lambda|}}{|\lambda|} \right]_{(x)} = -\frac{1}{\pi} \ln \sqrt{a^2 + x^2}; \quad F^{-1} \left[ \frac{e^{-a|\lambda|}}{|\lambda|^2} \right] = -\frac{1}{\pi} a \ln \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a}{\pi} - \frac{x}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{a};$$

$$\begin{aligned}
 F^{-1}\left[-i\lambda\frac{e^{-a|\lambda|}}{|\lambda|^2}\right] &= -\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}; & F^{-1}\left[-i\lambda\frac{e^{-a|\lambda|}}{|\lambda|}\right] &= -\frac{x}{\pi(a^2+x^2)}; \\
 F^{-1}\left[e^{-a|\lambda|}\right] &= \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}; & F^{-1}\left[e^{-a|\lambda|}|\lambda|\right] &= \frac{a^2-x^2}{\pi(a^2+x^2)^2}; \\
 F^{-1}\left[-i\lambda e^{-a|\lambda|}\right] &= -\frac{2ax}{\pi(a^2+x^2)^2}.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Используя (14), получаем:

– первый вариант корней

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= -\frac{1}{4\pi N_1} \sum_{i=1}^3 \frac{\ln\left(y^2\beta_i^2 + (x + \alpha_i y)^2\right)}{\beta_i T_i} \left[ M_{11}\left((\alpha_i^4 - 6\alpha_i^2\beta_i^2 + \beta_i^4)Q_i + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 4(\alpha_i^3\beta_i - \alpha_i\beta_i^3)P_i\right) + M_{12}\left((\alpha_i^3 - 3\alpha_i\beta_i^2)Q_i + (3\alpha_i^2\beta_i - \beta_i^3)P_i\right) + \right. \\
 &\quad \left. + M_{13}\left((\alpha_i^2 - \beta_i^2)Q_i + 2\alpha_i\beta_i P_i\right) + M_{14}\left(\alpha_i Q_i + \beta_i P_i\right) + M_{15}Q_i \right] - \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi N_1} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\beta_i T_i} \operatorname{arctg}\frac{x + \alpha_i y}{\beta_i y} \left[ M_{11}\left((-\alpha_i^4 + 6\alpha_i^2\beta_i^2 - \beta_i^4)P_i + 4(\alpha_i^3\beta_i - \alpha_i\beta_i^3)Q_i\right) + \right. \\
 &\quad \left. + M_{12}\left((3\alpha_i\beta_i - \alpha_i^3)P_i + (3\alpha_i^2\beta_i - \beta_i^3)Q_i\right) + M_{13}\left((3\beta_i^2 - \alpha_i^2)P_i + 2\alpha_i\beta_i Q_i\right) + \right. \\
 &\quad \left. + M_{14}\left(-\alpha_i P_i + \beta_i Q_i\right) - M_{15}P_i \right];
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

– второй вариант корней

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= -\frac{\ln\left(y^2\beta_2^2 + (x + \alpha_2 y)^2\right)}{4\pi N_1\beta_2 T_4} \left[ M_{11}\left((\alpha_2^4 - 6\alpha_2^2\beta_2^2 + \beta_2^4)Q_4 + 4(\alpha_2^3\beta_2 - \alpha_2\beta_2^3)P_4\right) + \right. \\
 &\quad \left. + M_{12}\left((\alpha_2^3 - 3\alpha_2\beta_2^2)Q_4 + (3\alpha_2^2\beta_2 - \beta_2^3)P_4\right) + M_{13}\left((\alpha_2^3 - \beta_2^2)Q_4 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2\alpha_2\beta_2 P_4\right) + M_{14}\left(\alpha_2 Q_4 + \beta_2 P_4\right) + M_{15}Q_4 \right] - \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi N_1\beta_2 T_4} \operatorname{arctg}\frac{x + \alpha_2 y}{\beta_2 y} \left[ M_{11}\left((-\alpha_2^4 + 6\alpha_2^2\beta_2^2 - \beta_2^4)P_4 + 4(\alpha_2^3\beta_2 - \alpha_2\beta_2^3)Q_4\right) + \right. \\
 &\quad \left. + M_{12}\left((3\alpha_2\beta_2^2 - \alpha_2^3)P_4 + (3\alpha_2^2\beta_2 - \beta_2^3)Q_4\right) + M_{13}\left((\beta_2^2 - \alpha_2^2)P_4 + 2\alpha_2\beta_2 Q_4\right) + \right. \\
 &\quad \left. + M_{14}\left(-\alpha_2 P_4 + \beta_2 Q_4\right) - M_{15}P_4 \right] + \\
 &\quad + \frac{\ln\left(y^2\beta_1^2 + (x + \alpha_1 y)^2\right)}{8\pi N_1\beta_1^3 H} \left[ M_{11}(f_1 R + f_2 S) + M_{12}(f_3 R + f_4 S) + M_{13}(f_5 R + f_6 S) + \right. \\
 &\quad \left. + M_{14}(f_7 R + f_8 S) + M_{15}(f_9 R + f_{10} S) \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi N_1\beta_1^3 H} \operatorname{arctg}\frac{x + \alpha_1 y}{\beta_1 y} \left[ M_{11}(-f_1 S + f_2 R) + M_{12}(-f_3 S + f_4 R) + M_{13}(-f_5 S + f_6 R) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +M_{14}(-f_7S + f_8R) + M_{15}(-f_9S + f_{10}R)] - \\
& - \frac{y^2}{4\pi N_1 \beta_1 H(\beta_1^2 y^2 + (x + \alpha_1 y)^2)} [M_{11}(f_{11}R + f_{12}S) + M_{12}(f_{13}R + f_{14}S) + M_{13}(f_{15}R + f_{16}S) + \\
& + M_{14}(f_{17}R + f_{18}S) + M_{15}(f_{19}R + f_{20}S)] + \frac{y(x + \alpha_1 y)}{4\pi N_1 \beta_1^2 H(\beta_1^2 y^2 + (x + \alpha_1 y)^2)} [M_{11}(-f_{11}S + f_{12}R) + \\
& + M_{12}(-f_{13}S + f_{14}R) + M_{13}(-f_{15}S + f_{16}R) + M_{14}(-f_{17}S + f_{18}R) + M_{15}(-f_{19}S + f_{20}R)]; \quad (16)
\end{aligned}$$

– третий вариант корней

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \frac{y^2}{16\pi N_1 \beta^3 (\beta^2 y^2 + (x + \alpha y)^2)} [M_{11}(30\alpha^2 \beta^2 - \\
& - 9\beta^4 - \alpha^4) + M_{12}(15\alpha\beta^2 - \alpha^3) + M_{13}(5\beta^2 - \alpha^2) - M_{14}\alpha - M_{15}] - \\
& - \frac{y(x + \alpha y)}{16\pi N_1 \beta^3 (\beta^2 y^2 + (x + \alpha y)^2)} [M_{11}(-12\alpha^3 + 28\alpha\beta^2) + M_{12}(-9\alpha^2 + 7\beta^2) - 6M_{13}\alpha - 3M_{14}] + \\
& + \frac{y^2(\beta^2 y^2 - (x + \alpha y)^2)}{16\pi N_1 \beta^3 (\beta^2 y^2 + (x + \alpha y)^2)^2} [M_{11}(\alpha^4 - 6\alpha^2 \beta^2 + \beta^4) + \\
& + M_{12}(\alpha^3 - 3\alpha\beta^2) + M_{13}(\alpha^2 - \beta^2) + M_{14}\alpha + M_{15}] - \\
& - \frac{y^3(x + \alpha y)}{8\pi N_1 \beta (\beta^2 y^2 + (x + \alpha y)^2)^2} [M_{11}(4\alpha^3 - 4\alpha\beta^2) + M_{12}(3\alpha^2 - \beta^2) + 2M_{13}\alpha + M_{14}] - \\
& - \frac{\ln(y^2 \beta^2 + (x + \alpha y)^2)}{32\pi N_1 \beta^5} [M_{11}(37\alpha^2 \beta^2 - 3\beta^4 - 3\alpha^4) + \\
& + M_{12}(21\alpha\beta^2 - 3\alpha^3) + 2M_{13}(7\beta^2 - 3\alpha^2) - 3M_{14}\alpha - 3M_{15}] - \\
& - \frac{1}{8\pi N_1 \beta^4} \arctg \frac{x + \alpha y}{\beta y} [M_{11}12(\alpha\beta^2 - \alpha^3) + 3M_{12}(\beta^2 - 3\alpha^2) - 6M_{13}\alpha - 3M_{14}]. \quad (17)
\end{aligned}$$

Выражение для  $v(x, y)$  получается из (15-17) заменой  $M_{11}, M_{12}, M_{14}, M_{15}$  на  $M_{21}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, M_{25}$ , соответственно. А выражение  $\varphi(x, y)$  получается из (15-17) заменой  $M_{11}, M_{12}, M_{14}, M_{15}$  на  $M_{31}, M_{32}, M_{33}, M_{34}, M_{35}$ , соответственно.

Теперь можно получить решение (2):

$$\begin{aligned}
G_{11} &= u(x, y)|_{F_1=1, F_2=0, F_3=0}, & G_{21} &= v(x, y)|_{F_1=1, F_2=0, F_3=0}, & G_{31} &= \varphi(x, y)|_{F_1=1, F_2=0, F_3=0}, \\
G_{12} &= u(x, y)|_{F_1=0, F_2=1, F_3=0}, & G_{22} &= v(x, y)|_{F_1=0, F_2=1, F_3=0}, & G_{32} &= \varphi(x, y)|_{F_1=0, F_2=1, F_3=0}, \\
G_{31} &= u(x, y)|_{F_1=0, F_2=0, F_3=1}, & G_{32} &= v(x, y)|_{F_1=0, F_2=0, F_3=1}, & G_{33} &= \varphi(x, y)|_{F_1=0, F_2=0, F_3=1}.
\end{aligned}$$

При этом  $G_{12} = G_{21}, G_{13} = G_{31}, G_{23} = G_{32}$ .

## ВЫВОДЫ

При нахождении матрицы фундаментальных решений было применено преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста по обоим переменным. В процессе исследования возникла необходимость решения алгебраического уравнения шестой степени с действительными коэффициентами. Это уравнение может иметь три варианта корней. Предполагая, что его решение найдено, было получено решение исходной задачи в изображениях Фурье. При нахождении обратного преобразования по одной из переменных применялось обычное обратное преобразование Фурье. Для получения обратного преобразования по другой переменной потребовалась регуляризация полученных обобщенных функций. Получено точное решение поставленной задачи. Это решение выражено в замкнутом виде через элементарные функции, что позволяет эффективно его использовать.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Механика связанных полей в элементах конструкций: Электроупругость. Киев: Наук. думка, 1989. 280 с.
2. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. Москва: Наука, 1988. 472 с.
3. Левада В. С. К применению преобразования Фурье для построения фундаментального решения эллиптического дифференциального оператора. Запорожье, 1987. Деп. в Укр. НИИНТИ, № 706. Ук-87.

## REFERENCES

1. Grinchenko, V. T., Ulitko, A. F. & Shulga, N. A. (1989). Mechanics of coupled fields in structural elements: Electroelasticity. Kiev: Naukova dumka.
2. Parton, V. Z. & Kudryavtsev, B. A. (1988). Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electrically conductive bodies. Moscow: Nauka.
3. Levada, V. S. (1987). To the application of the Fourier transform for constructing a fundamental solution of an elliptic differential operator. Manuscript. Zaporozhye. Dep. in the NIINTI, no. 706, Uk-87.

УДК 519.71

## ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ОТДЕЛЬНОГО КЛАССА СЛОЖНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ. НЕПРЕРЫВНЫЙ СЛУЧАЙ

Леонтьева В. В., к. ф.-м. н., доцент, Кондратьева Н. А., к. ф.-м. н., доцент

*Запорожский национальный университет,  
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

vleonteva15@gmail.com, n-kondr@mail.ru

В работе осуществляется анализ и определение программных управлений движением отдельного класса сложных динамических систем, поведение которых описывается разомкнутыми непрерывными математическими моделями с ограничениями, обеспечивающими получение неотрицательных решений на бесконечном интервале времени. Для исследуемых систем решена обратная задача динамики и получены программные управления движением систем, определяющие желаемые состояния объекта. По результатам исследования проведен вычислительный эксперимент, результаты которого соответствуют результатам проведенных в работе теоретических исследований.

*Ключевые слова: программное управление, позитивная динамическая система балансового типа, позитивные переменные, разомкнутая непрерывная динамическая модель, векторно-матричное дифференциальное уравнение, продуктивность матрицы, асимптотическая устойчивость решений.*

## ПРОГРАМНЕ КЕРУВАННЯ РУХОМ ОКРЕМОГО КЛАСУ СКЛАДНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ. НЕПЕРЕРВНИЙ ВИПАДОК

Леонтьєва В. В., к. ф.-м. н., доцент, Кондрат'єва Н. О., к. ф.-м. н., доцент

Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

vleonteva15@gmail.com, n-kondr@mail.ru

У роботі здійснюється аналіз і визначення програмних керувань рухом окремого класу складних динамічних систем, поведінка яких описується розімкненими неперервними математичними моделями з обмеженнями, що забезпечують отримання невід'ємних розв'язків на нескінченному інтервалі часу. Для досліджуваних систем розв'язана зворотна задача динаміки і отримані програмні керування рухом систем, що визначають бажані стани об'єкта. За результатами дослідження проведено обчислювальний експеримент, результати якого відповідають результатам проведених у роботі теоретичних досліджень.

*Ключові слова:* програмне керування, позитивна динамічна система балансового типу, позитивні змінні, розімкнена неперервна динамічна модель, векторно-матричне диференціальне рівняння, продуктивність матриці, асимптотична стійкість розв'язків.

## PROGRAM CONTROL OF THE MOVEMENT OF A CERTAIN CLASS OF COMPLEX DYNAMICAL SYSTEMS. CONTINUOUS CASE

Leontieva V. V., PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor,  
Kondratieva N. A., PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor

Zaporizhzhya National University,  
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine

vleonteva15@gmail.com, n-kondr@mail.ru

This article is devoted to the disclosure of the essence and presentation of the main stages of the construction the program controls by the movement of a complex dynamical system, the behavior of which is described by opened continuous mathematical model with certain constraints that ensure the obtaining of non-negative and asymptotically stable (by Lyapunov) solutions on an infinite intervals of time. The research for this type of complex systems is aimed at solving the inverse problem of dynamics in order to identify a range of possible program control actions on the investigated system which could provide this system with achieving its desired state.

The problem is formulated as follows. Let the movement of a complex controlled dynamical system obey a vector-matrix differential equation. In the state space, a certain (desired) trajectory of the movement of the investigated system is given. It is necessary to find such program controls that allow the movement of the system exactly or approximately took place along a given trajectory. The problem of this type in the formulation and procedure of solving is the inverse problem of dynamics. In contrast to the classical formulation of the inverse control problem, the particularity of the posed problem is the necessity of preserving the positivity property of variables, the asymptotical stability of the obtained solutions, and the complete controllability of the investigated control system.

In this formulation we propose the methodology of controlling the motion of the studied system that is based on the concept of the inverse problem of dynamics and allows, firstly, to investigate unknown and inaccessible (using direct mathematical modeling) properties of a control object, and secondly, to carry out the construction of a program trajectory (that takes the control system from a given initial position to a prescribed (desired) final position) and the construction of the program control that implements it, and, thirdly, to synthesize a control algorithm that ensures the preservation of the desired properties and the achievement of the required characteristics of a complex dynamic system under investigation. The proposed methodology allows to systematize the main stages, methods and approaches for obtaining an effective algorithm for the complex investigation and regulation of a complex positive dynamical system in terms of its functioning along an open-loop contour with given desired states (trajectories) of the system.

According to the proposed approach, the object was analyzed for the possibility of constructing program controls of the movement of the complex dynamical system, that resulted in solving the problem of implementing the assigned trajectory of movement and constructing program controls leading out the system to the desired trajectory.

In order to carrying out a more detailed analysis of the conducted research and approbation of the proposed methodology for solving inverse problems of the dynamics of positive systems, a computational experiment determining program controls of the movement of the complex dynamical system with three subsystems was performed. The results of the computational experiment correspond to the results of the theoretical researches carried out in this work, and the proposed approach for determining the vector-function of program controls can be used in the practice of modeling of complex positive dynamical systems of various physical nature.

*Key words:* program control, positive dynamic system of balanced type, positive variables, opened continuous dynamical model, vector-matrix differential equation, productivity of matrix, asymptotic stability of solutions.

## ВВЕДЕНИЕ

Вопросам исследования и разработки методов исследования сложных динамических систем управления, имеющих в своей структуре  $n$  конечных взаимосвязанных между собой

элементов, в последнее время уделяется все большее внимание [1-10]. Причем особую актуальность данная проблема приобретает в тех случаях, когда характеристики исследуемых систем изменяются во времени под влиянием управлений и при этом не всегда возможно определить вид управления, поступающего на вход исследуемого объекта, обеспечивающий получение желаемого (в соответствии с поставленной целью) состояния выхода объекта управления и регулирования [1-7, 9].

Кроме того, необходимость в управлении и регулировании таких систем возникает при отсутствии возможности корректировать входные параметры моделей, описывающих поведение сложных систем, стабилизировать неустойчивые системы, улучшать динамические свойства систем и др., то есть в случаях, когда нужно изменить исследуемый процесс таким образом, чтобы характеризующие его показатели удовлетворяли определенным требованиям. При этом часто возникает задача, когда необходимо определить такое управление, которое бы позволило осуществить движение исследуемых систем управления по заранее заданному закону с сохранением требуемых свойств. Одним из подходов, позволяющих реализовать подобное управление, является подход к определению программного управления, основная идея которого основана на концепции обратных задач динамики, исторически возникших в рамках теоретической механики и применяющихся для вычисления сил, действующих на объект, по известной траектории его движения [1, 4, 5, 7].

При этом в процессе решения задачи управления для объекта  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $x \in R^n$ ,  $u \in R^m$  стандартная схема концепции обратной задачи динамики реализуется в следующем виде: осуществляется формирование эталонной траектории  $x = x^*(t)$  движения объекта и определяются управления, реализующие данные траектории.

Именно в такой постановке в работе предлагается сформулировать методику управления движением исследуемой системы, базирующуюся на концепции обратных задач динамики и позволяющую, во-первых, исследовать неизвестные и недоступные при использовании прямого моделирования свойства объекта управления, во-вторых, осуществить построение программной траектории, переводящей исследуемую систему управления из заданного начального положения в предписанное (желаемое) конечное положение и реализующего ее программного управления, и, в-третьих, синтезировать алгоритм управления, обеспечивающий работу системы управления с сохранением заданных свойств и достижением требуемых характеристик исследуемой сложной динамической системы.

### ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

*Целью данной работы* является построение и анализ программных управлений в разомкнутой непрерывной математической модели позитивной динамической системы балансового типа, которые выводят систему на желаемую траекторию движения.

*Задачей исследования* является решение обратной задачи динамики с использованием методов теории программного управления с целью определения вектор-функции управления, задающей программу движения объекта исследования, а также разработка методики определения программных управлений, поступающих на вход объекта управления и обеспечивающих осуществление движения исследуемого объекта по заранее заданному закону с целью систематизации основных этапов, методов и подходов к получению эффективного алгоритма комплексного исследования и регулирования сложной позитивной динамической системы балансового типа в условиях ее функционирования по разомкнутому контуру при заданных желаемых состояниях (траекториях) системы.

Для достижения сформулированной цели были поставлены следующие задачи:

- а) провести анализ исследуемого объекта на предмет возможности осуществления программного управления его движением;
- б) установить задающие воздействия исследуемой системы управления, определяющие желаемые состояния объекта исследования;

- в) получить ограничения на задающие воздействия исследуемой системы управления, обеспечивающие сохранение позитивности и полной управляемости объекта исследования, а также обеспечивающие получение асимптотически устойчивых решений по модели, описывающей его поведение;
- г) определить функции программного управления движением исследуемого класса сложных систем;
- д) провести анализ полученных программных управлений и сформулировать выводы по результатам проведенного исследования;
- е) разработать общую методику определения программных управлений, обеспечивающих движение исследуемого объекта по заранее заданному закону.

### ОБЪЕКТ И ПРЕДМЕТ ИССЛЕДОВАНИЯ

*Объектом исследования* выступает сложная динамическая система, представляющая собой множество взаимосвязанных и взаимодействующих между собой элементов и подсистем различной физической природы, составляющих нераздельное целое и обеспечивающих выполнение системой некоторой сложной функции. Особенность объекта исследования состоит в том, что он характеризуется свойством позитивности [11]: любые неотрицательные вход и начальное состояние системы генерируют неотрицательные фазовую траекторию и выход в течение всего времени. Класс таких систем выделен в работах [11-14].

Динамика исследуемой управляемой динамической системы описывается линейным неоднородным векторно-матричным дифференциальным уравнением первого порядка с матрицами постоянных коэффициентов вида [12]

$$\dot{X}(t) = (I - B)^{-1}((A - I)X(t) + C(t)), \quad (1)$$

или

$$\dot{X} = \tilde{A}X(t) + \tilde{B}C(t), \quad (2)$$

где  $X(t)$  –  $n$ -мерный вектор состояния системы;  $C(t)$  –  $n$ -мерный вектор управления системы;  $A$ ,  $B$ ,  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  – постоянные матрицы размерностей  $n \times n$ ;  $\tilde{A} = (I - B)^{-1}(A - I)$ ;  $\tilde{B} = (I - B)^{-1}$ ;  $I$  – единичная матрица размерности  $n \times n$ .

К исследуемой системе и описывающей ее поведение непрерывной математической модели выдвигается ряд требований, обеспечивающих выполнение заранее заданных свойств:

1. Обеспечение выполнения свойства позитивности исследуемой системы.

Данные требования выполняются путем наложения определенных ограничений на входные характеристики и матрицы коэффициентов математической модели. Так, на входные характеристики модели накладываются следующие ограничения:  $n$  – мерный вектор-столбец начальных состояний системы  $X(0) = X_0 = (X_0^1, X_0^2, \dots, X_0^n)^T \geq 0$ ;  $n$ -мерный вектор управления  $C(t) = (C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t))^T \geq 0$ . На матрицы  $A$  и  $B$  накладываются условия неотрицательности и продуктивности [11, 13], а матрица  $(I - B)^{-1}(A - I) \leq 0$  [11, 12]. В случае невыполнения одного из указанных требований необходимо осуществлять модальное управление путем перехода от разомкнутой модели, описывающей поведение исследуемой системы, к замкнутой, вводя в структуру модели обратную связь, обеспечивающую функционирование системы по принципу замкнутого управления.

2. Обеспечение сохранения свойства полной управляемости (по Калману) исследуемой системы с тем, чтобы объект (систему) управления можно было перевести из одного состояния в другое с использованием информации обо всех его переменных состояниях.



Согласно [14], объект управления, для которого справедливы ограничения на матрицы  $A$ ,  $B$  и  $(I - B)^{-1}(A - I)$  математической модели объекта (см. требование 1), обладает свойствами, удовлетворяющими следующей теореме.

*Теорема 1.* Пусть линейный стационарный объект управления описывается векторно-матричным уравнением  $\dot{X} = \tilde{A}X(t) + \tilde{B}C(t)$ , где  $X \in R^{n \times 1}$ ,  $C(t) \in R^{n \times 1}$ ,  $\tilde{A} = (I - B)^{-1}(A - I)$ ,  $\tilde{B} = (I - B)^{-1}$ . Тогда  $\text{rang} \left[ \tilde{B} : (\tilde{A}\tilde{B}) : (\tilde{A}^2\tilde{B}) : \dots : (\tilde{A}^{n-1}\tilde{B}) \right]_{n \times mn} = n$ , если матрица  $B$  является продуктивной.

При этом в указанном ранговом условии определяющим является свойство линейной независимости столбцов матрицы  $\tilde{B}$ , которая с учетом продуктивности матрицы  $B$  (см. требование 1) является матрицей полного ранга, и, следовательно, ранг блочной матрицы  $\left[ \tilde{B} : (\tilde{A}\tilde{B}) : (\tilde{A}^2\tilde{B}) : \dots : (\tilde{A}^{n-1}\tilde{B}) \right]$  совпадает с рангом матрицы  $\tilde{B}$ .

Таким образом, требование сохранения свойства полной управляемости исследуемой системы выполняется путем наложения условий неотрицательности и продуктивности на матрицу  $B$  математической модели объекта.

3. Обеспечение выполнения одного из важнейших принципов проектирования [11, 13], согласно которому система управления должна быть асимптотически устойчивой.

Важность данного принципа определяется тем, что непрерывные системы управления характеризуются такой особенностью, что неустойчивый объект управления может быть стабилизирован с помощью замкнутого управления и не может быть стабилизирован при разомкнутом управлении, что в условиях функционирования исследуемой системы по разомкнутому контуру имеет определяющее значение для проведения исследований.

В данном случае для обеспечения выполнения указанного принципа проектирования матрицы  $A$  и  $B$  математической модели объекта должны характеризоваться свойствами неотрицательности и продуктивности, а матрица  $\tilde{A}$  должна быть неположительной (см. требование 1) при любом виде вектор-функции  $D(t) = (I - B)^{-1}C(t) \geq 0$ . Кроме того, исходя из того, что продуктивные матрицы  $A$  и  $B$  входят в класс  $M$ -матриц [11], выполнение требования 1 является обязательным для обеспечения асимптотической устойчивости (по Ляпунову) математической модели, описываемой уравнением (1) или (2).

Если все перечисленные условия в модели выполняются, то система, описываемая уравнением (1) или (2), является асимптотически устойчивой, а определяемый на выходе модели вектор состояния  $X(t)$  исследуемого объекта сходится при  $t \rightarrow \infty$  к равновесному (стационарному) значению  $X^* = (I - A)^{-1}C^0 \geq 0$ , который отображает максимальные (реально достижимые) возможности объекта при имеющихся исходных данных модели и является решением статической модели, описываемой уравнением  $X = AX + C^0$ , где  $C^0 = (C_0^1, C_0^2, \dots, C_0^n)^T \geq 0$ . Причем, если в наличии  $X(0) = X_0$  меньше, то получаемые решения сходятся снизу, а если больше – сверху. Отрицательных решений не будет в силу выполнения условий требования 1.

Исследуемая система, согласно (1), (2), функционирует по принципу разомкнутого управления и, таким образом, является разомкнутой системой управления, то есть системой, которая непосредственно не использует конечные результаты управления объектом. При этом ее особенностью является то, что алгоритм управления вырабатывается только на основе заданного алгоритма функционирования и в процессе работы никак не корректируется при изменениях характеристик или параметров объекта управления.

Схема функционирования исследуемой динамической системы для разомкнутой модели, описываемой векторно-матричным уравнением (1) или (2), предоставляется на рис. 1, где  $C(t)$  – входная характеристика (вход) системы,  $X(t)$  – выходная характеристика (выход) системы,  $e^{\tilde{A}t}$  – экспоненциальная функция матричного аргумента,  $\tau$  – параметр интегрирования, имеющий размерность времени.

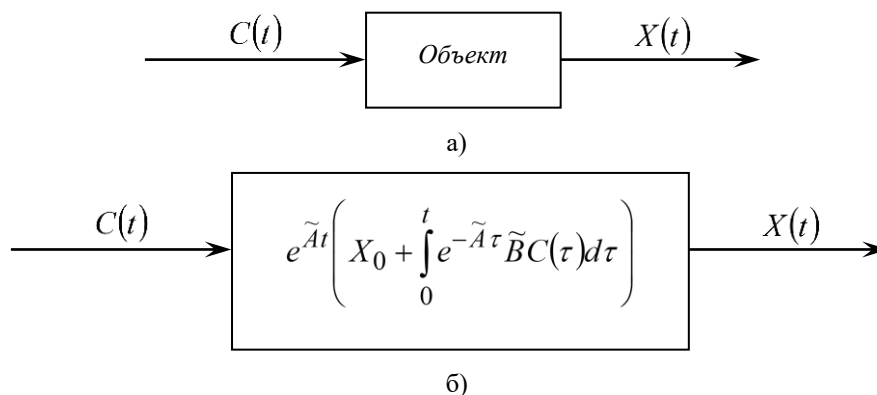


Рис. 1. Схема функционирования объекта исследования по разомкнутому контуру: а) кибернетическая модель «черный ящик»; б) кибернетическая модель «белый ящик»

В исходной модели (при рассмотрении прямой задачи динамики), описываемой уравнением (1) или (2), входная характеристика  $C(t)$  является либо заданной вектор-функцией, либо функционально установленной в результате использования методов регрессионного анализа данных.

В данной работе будет применен подход, в соответствии с которым указанная вектор-функция будет определена в результате решения обратной задачи динамики (по эмпирическим данным) с использованием методов теории программного управления и задавать, таким образом, программу движения объекта исследования.

Таким образом, предметом исследования в работе выступает  $n$  – мерный вектор управления исследуемой динамической системы управления, поведение которой описывается непрерывной математической моделью (1) или (2), а также желаемые состояния объекта исследования, определяющие непосредственным образом программные управления движением исследуемого класса сложных систем.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В соответствии с поставленной в работе целью исследования сформулируем задачу исследования сложной позитивной динамической системы управления, в случае, когда желаемые состояния (траектории) изучаемой системы являются заданными.

С практической точки зрения такой случай соответствует ситуации, когда исследователь знает, какие результаты он хочет получить, но при этом не знает, как этого добиться. Задача состоит в том, что необходимо найти такую вектор-функцию управления  $C(t)$ , которая бы реализовывала движение исследуемой системы по назначенной траектории.

Задача этого типа по формулировке и процедуре решения представляет собой обратную задачу динамики и в наиболее полной форме сформулирована Е. А. Барбашиным в монографии [15].

Сформулируем обратную задачу динамики позитивной динамической управляемой системы балансового типа с непрерывным временем.

Пусть движение управляемой системы подчиняется векторно-матричному дифференциальному уравнению ( $t$  предполагается непрерывным) вида [12]

$$\dot{X}(t) = (I - B)^{-1}(A - I)X(t) + (I - B)^{-1}C(t), \quad (3)$$

где  $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))^T$  –  $n$ -мерный вектор состояния системы с непрерывным временем  $t$ ;  $C(t) = (C_1(t), \dots, C_n(t))^T$  –  $n$ -мерный вектор управления с непрерывным временем  $t$ ;  $A, B$  – заданные матрицы размерностей  $n \times n$ .

В пространстве состояний задана некоторая (желаемая) траектория движения системы с непрерывным временем вида

$$X^*(t) = \varphi(t), \quad 0 < t < T, \quad 0 < T < \infty. \quad (4)$$

Необходимо найти такие управления  $C(t)$ , при которых движение системы (3) точно или приближенно проходит по траектории  $\varphi(t)$ .

В отличие от классической постановки задачи обратного управления, особенность поставленной задачи заключается в следующем. Поскольку объектом управления является позитивная динамическая система балансового типа, то для сохранения свойственной ей позитивности входных и выходных характеристик, кроме неотрицательной вектор-функции  $X(t)$ , начальных условий  $X(t_0) = X_0$ , где  $X_0 = (X_0^1, \dots, X_0^n)^T$ , и специального вида (неотрицательного и продуктивного) матриц  $A, B$ , должны неотрицательными задаваться и желаемые траектории  $\varphi(t)$  движения системы. Таким образом, при  $X^*(t) = \varphi(t) \geq 0$  искомая вектор-функция  $C(t)$  будет также неотрицательной, а, следовательно, и вся исследуемая система, описываемая векторно-матричным дифференциальным уравнением (3), будет позитивной.

### ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЭТАПОВ РЕШЕНИЯ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

Для решения поставленной задачи сформулируем методику определения программных управлений, обеспечивающих движение исследуемого объекта по заранее заданному закону.

Исходными данными при использовании предлагаемой методики является формализованная разомкнутая модель объекта исследования с непрерывным временем, описываемая векторно-матричным дифференциальным уравнением вида (3).

Согласно предлагаемой методике решение поставленной задачи состоит в реализации следующих этапов.

**I этап:** *Анализ компонентов формализованной модели объекта исследования.*

Данный этап включает в себя:

а) *исследование на неотрицательность входных характеристик модели*, а именно векторов  $X(0) = X_0 = (X_0^1, X_0^2, \dots, X_0^n)^T$  и  $C(t) = (C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t))^T$ ;

б) *исследование на неотрицательность и продуктивность входных параметров формализованной модели*, а именно матриц коэффициентов модели  $A, B$ , а также *исследование на неположительность* матрицы  $\tilde{A} = (I - B)^{-1}(A - I)$ . Проверка продуктивности матриц осуществляется путем использования необходимых и достаточных условий продуктивности, сформулированных В. В. Леонтьевым и представленных в работах [11, 13].

Выполнение всех указанных ограничений обеспечивает позитивность системы, асимптотическую устойчивость получаемых решений, а также полную управляемость исследуемой системы [14].

**II этап:** *Выбор вида желаемого состояния объекта исследования и его анализ.*

На данном этапе производится выбор из множества возможных одного или нескольких желаемых состояний  $X^*(t)$  объекта исследования в зависимости от цели управления. Более детально виды желаемых состояний объекта, а также степень их влияния на вырабатываемые управляющие воздействия в системе будут рассмотрены в следующем разделе работы.

Кроме того, на данном этапе производится проверка выбранного желаемого состояния  $X^*(t)$  объекта на неотрицательность, и, в дальнейшем, в случае его неотрицательности, осуществляется переход к III этапу методики.

**III этап:** *Определение программных управлений  $C(t)$ , которые бы реализовывали движение исследуемой системы по назначенной на II этапе траектории.*

На данном этапе путем применения предлагаемого в работе подхода решается задача определения программных управлений  $C(t)$ , выводящих систему на желаемую траекторию движения, после чего осуществляется переход к IV этапу.

Остановимся на данном этапе детальнее.

При условии, что поставленная задача имеет точное решение и  $X^*(t) = \varphi(t) \geq 0$ , искомый вектор управлений  $C(t)$  определяется из уравнения

$$(I - B)^{-1}C(t) = \dot{\varphi}(t) - (I - B)^{-1}(A - I)\varphi(t), \quad (5)$$

которое получается путем подстановки выражения для  $\varphi(t)$  в векторно-матричное уравнение движения системы (3) вместо  $X(t)$ .

Таким образом, искомый вектор управлений  $C(t)$  имеет вид

$$C(t) = (I - B)\dot{\varphi}(t) - (A - I)\varphi(t) \geq 0. \quad (6)$$

Найденные таким образом управляющие функции  $C_1(t), \dots, C_n(t)$  являются программными, поскольку они изменяются в соответствии с заданной вектор-функцией (4).

Система управления в таком случае является разомкнутой, ее структурная схема состоит из последовательного соединения регулятора, вводящегося в систему для обеспечения заданного качества управления, и управляемого объекта и представляется на рис. 2.

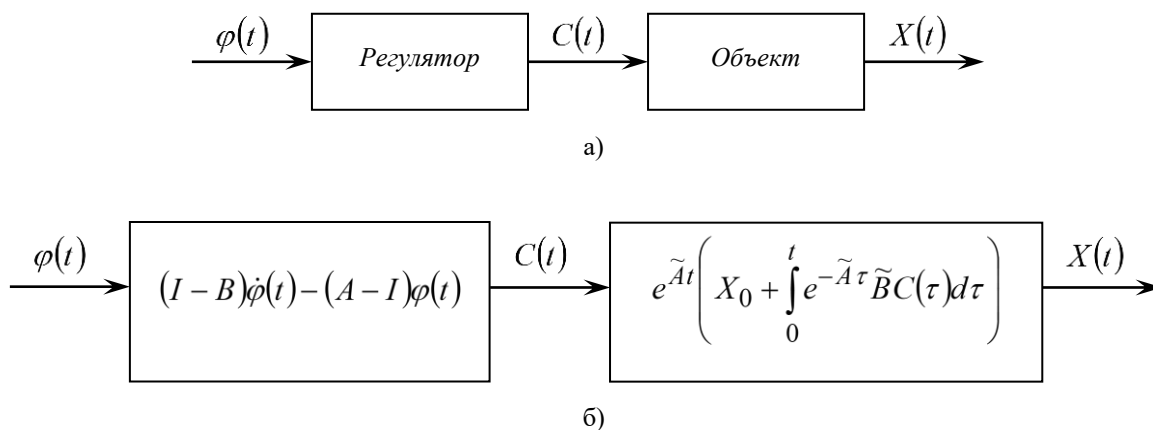


Рис. 2. Структурная схема разомкнутой системы программного управления: а) кибернетическая модель «черный ящик»; б) кибернетическая модель «белый ящик»

В данном случае особенностью регулирования исследуемой системы является то, что с помощью регулятора вырабатывается такая программа действий, которая сводит рассогласование (ошибку регулирования)  $\varepsilon(t) = X^*(t) - X(t)$  между требуемым значением

регулируемой величины  $X^*(t)$  (заданным состоянием объекта управления) и текущим её значением  $X(t)$  (фактическим состоянием объекта управления) к нулю. И, таким образом, цель осуществляемого регулирования заключается в поддержании на заданном уровне  $X^*(t)$  выхода объекта управления. Поскольку исследуемая система управления является разомкнутой (информация о состоянии объекта передается по разомкнутому контуру), регулирование осуществляется путем выработки управляющего воздействия  $C(t)$  (программного управления), поступающего на вход объекта управления, не получая при этом информацию о реальном состоянии объекта на основании каких-либо признаков, но в то же время имея полную информацию о его поведении. В этом случае построение программы управления, подающейся на вход регулятора, производится в соответствии с требованием, чтобы  $\varepsilon(t) = 0$ .

В рассматриваемом случае задающее воздействие  $X^*(t) = \varphi(t)$  определяется тем законом, по которому должна изменяться управляемая система и является постоянным, устанавливается задающим устройством.

С учетом найденного управления  $C(t)$  процесс в рассматриваемой системе описывается векторно-матричным дифференциальным уравнением вида

$$\dot{X}(t) = (I - B)^{-1}(A - I)X(t) + f(t), \quad (7)$$

где  $f(t)$  определяется в зависимости от заданных траекторий  $\varphi(t)$  в виде

$$f(t) = \dot{\varphi}(t) - (I - B)^{-1}(A - I)\varphi(t).$$

Решение уравнения (7) при заданных начальных условиях  $X(0) = X_0$  в точности совпадает с заданными траекториями движения системы  $\varphi(t) \geq 0$ .

Таким образом, основная задача осуществляемого регулирования, состоящая в том, чтобы свести к нулю рассогласование  $\varepsilon(t)$  между требуемым и текущим значениями регулируемой величины, является выполненной в полном объеме. При этом важно отметить, что предложенный подход обеспечивает также и позитивность получаемых программных управлений при условии выполнения всех ограничений и требований к исходной системе и математической модели, описывающей ее поведение.

#### **IV этап: Получение и графическое представление численных результатов.**

Таким образом, по результатам проведенного исследования в работе представлена методика определения вектор-функции программных управлений, поступающей на вход объекта управления и обеспечивающей осуществление движения исследуемого объекта по заранее заданному закону (как постоянному, так и переменному). Необходимость в предлагаемой методике обусловлена необходимостью систематизации основных этапов, методов и подходов к получению эффективного алгоритма комплексного исследования и регулирования сложной позитивной динамической системы балансового типа в условиях ее функционирования по разомкнутому контуру при заданных желаемых состояниях (траекториях) системы.

### **ОТДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ ЗАДАЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА УПРАВЛЯЮЩУЮ ПРОГРАММНУЮ ВЕКТОР-ФУНКЦИЮ**

Как уже отмечалось выше, задающее воздействие  $X^*(t) = \varphi(t)$  определяется тем законом, по которому должна изменяться исследуемая управляемая система. Такое воздействие

устанавливается задающим устройством и является постоянным. При этом, как показывает практика проектирования систем автоматического управления различных по своему назначению и функциональным возможностям, часто является довольно затруднительной выработка общих рекомендаций по заданию желаемого программного движения исследуемых систем [3-5, 7]. В то же время, учитывая специфику работы проектируемой системы, можно задавать такие воздействия  $X^*(t) = \varphi(t)$ , характер которых наиболее полно соответствует изучаемому процессу или явлению [1, 7].

В данной работе задающие воздействия  $\varphi(t)$  выбирались в следующих видах:

$$\varphi(t) = \varphi_0 t^0, \quad \varphi(t) = \varphi_0 t, \quad \varphi(t) = \varphi_0 t^2, \quad \varphi(t) = \varphi_0 + d_0 t^2, \quad \varphi(t) = \varphi_0 + d_0 \sin \omega t,$$

где  $\varphi_0, d_0, \omega$  – известные параметры;  $d_0 \ll \varphi_0$ .

Вид вектор-функции  $\varphi(t)$  существенным образом влияет на получаемую в соответствии с предложенным подходом вектор-функцию программного управления  $C(t)$ , поступающую на вход объекта управления, и, следовательно, обеспечивающую устранение рассогласования (ошибки регулирования):  $\varepsilon(t) = 0$ .

Рассмотрим, как изменяется вектор-функция программного управления  $C(t)$  в зависимости от различных видов задания вектор-функции  $\varphi(t)$ :

а) если

$$\varphi(t) = \varphi_0 t^0 = X_0 t^0 \geq 0, \quad (8)$$

где  $\varphi_0 = (\varphi_0^1, \varphi_0^2, \dots, \varphi_0^n)^T$  – вектор-столбец постоянных коэффициентов;  $X_0 = (X_0^1, X_0^2, \dots, X_0^n)^T$  – вектор-столбец начальных условий системы (3), то управляющая программная вектор-функция имеет вид:

$$C(t) = (I - A)\varphi_0 t^0 = (I - A)X_0 t^0; \quad (9)$$

б) при

$$\varphi(t) = \varphi_0 t = X_0 t \geq 0 \quad (10)$$

управляющая программная вектор-функция определяется в виде:

$$C(t) = (I - B)\varphi_0 + (I - A)\varphi_0 t = (I - B)X_0 + (I - A)X_0 t; \quad (11)$$

в) при

$$\varphi(t) = \varphi_0 t^2 = X_0 t^2 \geq 0, \quad (12)$$

функция  $C(t)$  принимает вид:

$$C(t) = 2(I - B)\varphi_0 t + (I - A)\varphi_0 t^2 = 2(I - B)X_0 t + (I - A)X_0 t^2; \quad (13)$$

г) если

$$\varphi(t) = \varphi_0 + d_0 t^2 = X_0 + d_0 t^2 \geq 0, \quad (14)$$

где  $d_0 = (d_0^1, d_0^2, \dots, d_0^n)^T$  – вектор-столбец постоянных коэффициентов, причем  $d_0^i \ll \varphi_0^i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), то

$$C(t) = 2(I - B)d_0 t + (I - A)(\varphi_0 + d_0 t^2) = 2(I - B)X_0 t + (I - A)(X_0 + d_0 t^2); \quad (15)$$

д) если

$$\varphi(t) = \varphi_0 + d_0 \sin \omega t = X_0 + d_0 \sin \omega t \geq 0, \quad (16)$$

где  $\omega$  – частота колебаний, то

$$\begin{aligned} C(t) &= (I - B)d_0\omega \cos \omega t + (I - A)(\varphi_0 + d_0 \sin \omega t) = \\ &= (I - B)d_0\omega \cos \omega t + (I - A)(X_0 + d_0 \sin \omega t). \end{aligned} \quad (17)$$

При этом в данном конкретном случае виды задания вектор-функции  $\varphi(t)$  выбирались на основе анализа сложных систем различной физической природы. В общем случае, в зависимости от выбираемого объекта исследования (при сохранении его позитивной «природы») вектор-функция  $\varphi(t)$ , определяющая желаемые состояния объекта исследования, может быть выбрана в соответствии с поставленной целью управления.

### ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ. ЧИСЛОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для осуществления более детального анализа полученных в результате проведенного в работе исследования расчетов проведем вычислительный эксперимент для случая, когда позитивная динамическая система состоит из трех подсистем ( $n = 3$ ) при следующих исходных параметрах и начальных условиях:

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,15 \\ 0,15 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,3 \\ 0,14 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,25 & 0,15 \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad d_0 = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,28 \\ 0,19 \end{pmatrix}, \quad \omega = 30, \quad t \in [0,1]. \quad (18)$$

На I этапе исследований, следуя изложенной методике, проверяем выполнимость всех ограничений на входные характеристики и матрицы коэффициентов математической модели, описывающей поведение исследуемого объекта, и, далее, в виду их выполнения, переходим к математической модели, описываемой векторно-матричным уравнением вида (3), которое с учетом (18) принимает вид:

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,06 & -0,13 \\ 0,165 & -0,88 & 0,032 \\ 0,155 & -0,02 & -1,06 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 1,208 & 0,295 & 0,461 \\ 0,238 & 1,356 & 0,243 \\ 0,212 & 0,433 & 1,302 \end{pmatrix} C(t), \quad (19)$$

где  $\dot{X}(t) = (\dot{X}_1(t), \dot{X}_2(t), \dot{X}_3(t))^T$ ;  $X(t) = (X_1(t), X_2(t), X_3(t))^T$ ;  $C(t) = (C_1(t), C_2(t), C_3(t))^T$ .

Ограничения на матрицы постоянных коэффициентов  $A$ ,  $B$ ,  $(I - B)^{-1}(A - I)$  для модели, описываемой уравнением (19), выполняются, что обеспечивает выполнение свойства позитивности всех переменных математической модели и получение асимптотически устойчивых решений на бесконечном интервале времени.

Кроме того, согласно [11, 14], продуктивность матрицы  $B$  обеспечивает полную управляемость (по Калману) исследуемой системы, что означает существование принципиальной возможности ее перевода из любого начального состояния  $X(0) = X_0$  в любое конечное состояние  $X(T) = X_T$  за конечное время  $T$  при соблюдении заданных ограничений. Данное свойство объекта подтверждается выполнением рангового условия, которое для модели, описываемой уравнением (19), принимает вид:

$$\text{rang} \begin{bmatrix} 1,208 & 0,295 & 0,461 & -0,747 & -0,223 & -0,442 & 0,451 & 0,184 & 0,433 \\ 0,238 & 1,356 & 0,243 & -0,003 & -1,126 & -0,096 & -0,122 & 0,936 & -0,031 \\ 0,212 & 0,433 & 1,302 & -0,044 & -0,445 & -1,32 & -0,069 & 0,464 & 1,34 \end{bmatrix} = \text{rang } \tilde{B} = 3.$$

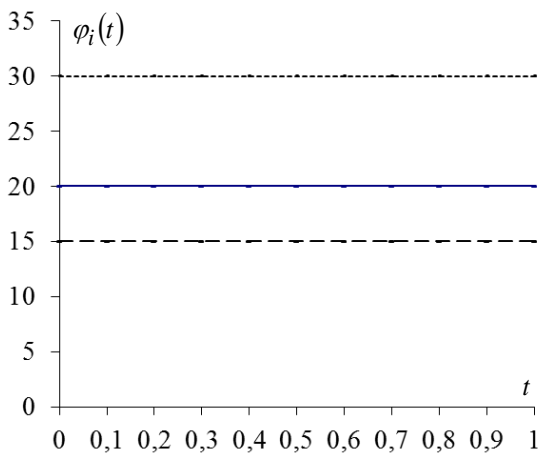
Далее осуществляется переход ко II этапу методики проведения исследования, на котором производится выбор из множества возможных одного или нескольких желаемых состояний  $X^*(t)$  объекта исследования в зависимости от цели управления, а также производится

проверка выбранного желаемого состояния  $X^*(t)$  объекта на неотрицательность. В данном случае желаемые состояния объекта выбираются в видах (8), (10), (12), (14), (16) и с учетом (18) принимают соответственно вид:

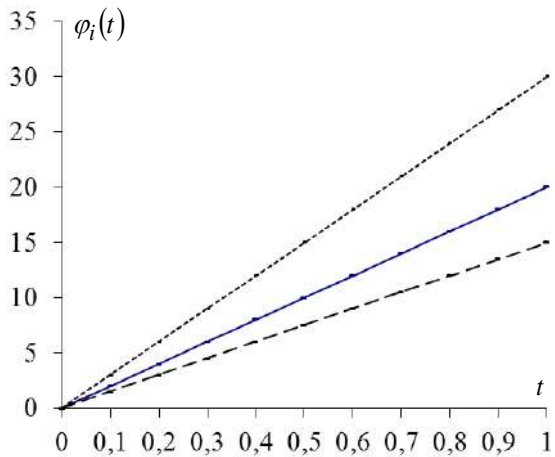
$$\varphi(t) = X_0 t^0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} \cdot t^0 \geq 0; \quad \varphi(t) = X_0 t = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} \cdot t \geq 0; \quad \varphi(t) = X_0 t^2 = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} \cdot t^2 \geq 0;$$

$$\varphi(t) = X_0 + d_0 t^2 = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,28 \\ 0,19 \end{pmatrix} \cdot t^2 \geq 0; \quad \varphi(t) = X_0 + d_0 \sin \omega t = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,28 \\ 0,19 \end{pmatrix} \cdot \sin 30t \geq 0.$$

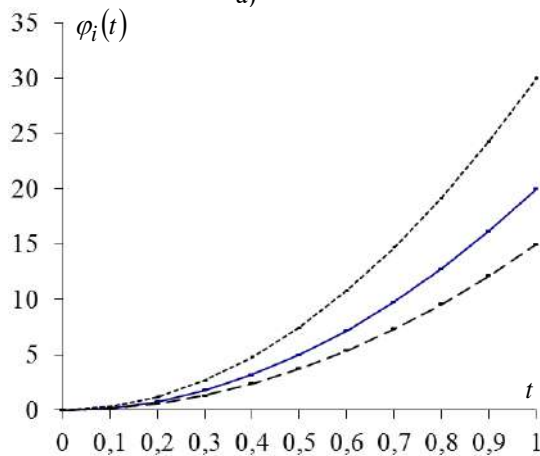
Графическое изображение указанных задающих воздействий  $\varphi(t) \geq 0$ , определяющих движение управляемой системы по заданному закону, представлено на рис. 3, где введены следующие обозначения: — — — — — функция  $\varphi_1(t)$ ; - - - - - функция  $\varphi_2(t)$ ; - - - - - функция  $\varphi_3(t)$ .



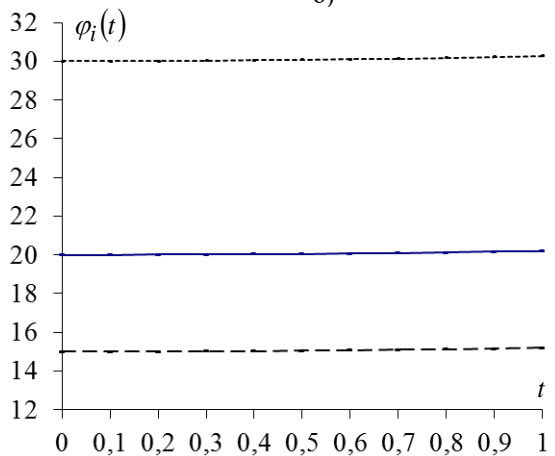
а)



б)



в)



г)



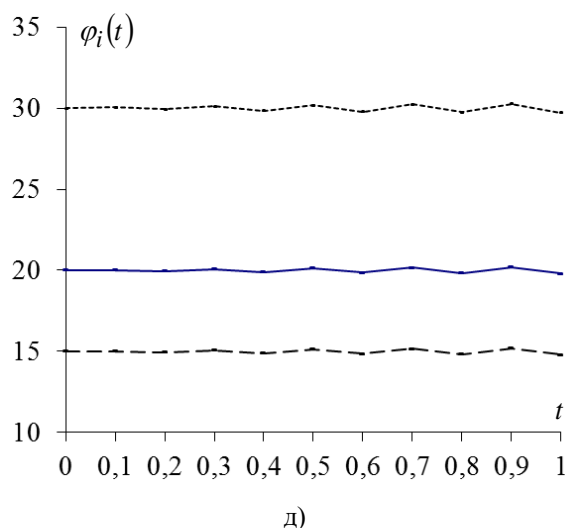


Рис. 3. Графическое изображение задающих воздействий  $\varphi_i(t)$ ,  $i = \overline{1,3}$ :

а)  $\varphi(t) = X_0 t^0$ ; б)  $\varphi(t) = X_0 t$ ; в)  $\varphi(t) = X_0 t^2$ ; г)  $\varphi(t) = X_0 + d_0 t^2$ ; д)  $\varphi(t) = X_0 + d_0 \sin \omega t$

В виду неотрицательности представленных выше желаемых состояний  $X^*(t) = \varphi(t)$  объекта осуществляется переход к III этапу методики, на котором производится определение вектор-функции  $C(t)$  программных управлений, выводящих систему на желаемую траекторию движения.

Следуя III этапу представленной в работе методики, определяем соответствующие указанным задающим воздействиям  $\varphi(t)$  программные управляющие вектор-функции соответственно в виде:

$$C(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 14,75 \\ 4,5 \end{pmatrix} \cdot t^0; \quad C(t) = \begin{pmatrix} 10,5 \\ 19,7 \\ 3,25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 14,75 \\ 4,5 \end{pmatrix} \cdot t; \quad C(t) = \begin{pmatrix} 21 \\ 39,4 \\ 6,5 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 6 \\ 14,75 \\ 4,5 \end{pmatrix} \cdot t^2;$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 14,75 \\ 4,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,095 \\ 0,177 \\ 0,072 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 0,054 \\ 0,128 \\ 0,085 \end{pmatrix} \cdot t^2; \quad C(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 14,75 \\ 4,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,095 \\ 0,177 \\ 0,072 \end{pmatrix} \cdot 30 \cdot \cos 30t + \begin{pmatrix} 0,05 \\ 0,13 \\ 0,09 \end{pmatrix} \cdot \sin 30t .$$

Графическое изображение полученных программных управляющих вектор-функций  $C(t)$ , осуществляющих движение управляемой системы по заданной траектории  $\varphi(t) \geq 0$ , представлено на рис. 4, где введены следующие обозначения:  $\text{—}$  – функция  $C_1(t)$ ;  $\text{---}$  – функция  $C_2(t)$ ;  $\text{- - -}$  – функция  $C_3(t)$ .

Построение графических зависимостей на рис. 3,4 определяет выполнение IV этапа предлагаемой в работе методики определения вектор-функции программных управлений, поступающей на вход объекта управления и обеспечивающей осуществление движения исследуемого объекта по заранее заданному закону. Из рис. 3,4 видно, что характер искомого управления существенным образом зависит от вида задающего воздействия, поступающего на вход объекта управления. Таким образом, изменяя задающее воздействие  $\varphi(t)$ , изменяется и программная управляющая функция  $C(t)$ , сохраняя при этом позитивность исследуемой системы. Кроме того, по рис. 3,4 можно отметить, что соответствующие зависимости задающих воздействий и программных управлений являются схожими.

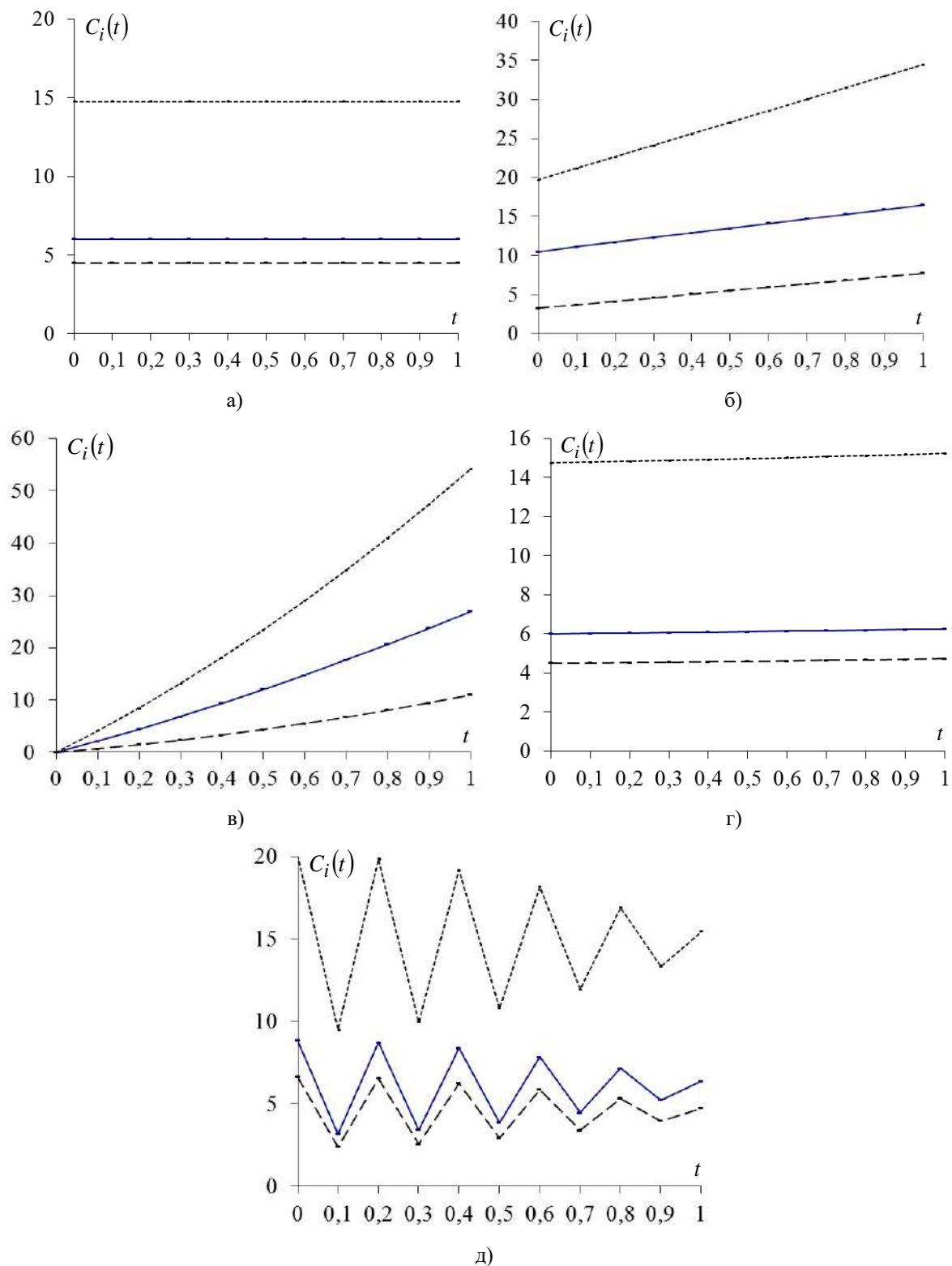


Рис. 4. Графическое изображение программных управляющих вектор-функций  $C_i(t)$ ,  $i = \overline{1,3}$ :  
 а)  $C(t) = (I - A)X_0 t^0$ ; б)  $C(t) = (I - B)X_0 + (I - A)X_0 t$ ; в)  $C(t) = 2(I - B)X_0 t + (I - A)X_0 t^2$ ;  
 г)  $C(t) = 2(I - B)X_0 t + (I - A)(X_0 + d_0 t^2)$ ; д)  $C(t) = (I - B)d_0 \omega \cos \omega t + (I - A)(X_0 + d_0 \sin \omega t)$

Таким образом, результаты проведенного вычислительного эксперимента соответствуют результатам проведенных в работе теоретических исследований, а предложенная методика определения вектор-функции программных управлений может быть использована в практике моделирования сложных позитивных динамических систем различной физической природы.

## ВЫВОДЫ

Подводя итог проведенному исследованию, можно выделить следующие результаты.

В работе рассмотрена разомкнутая непрерывная математическая модель позитивной динамической системы, описываемая линейным неоднородным векторно-матричным дифференциальным уравнением первого порядка с матрицами постоянных коэффициентов. Для данной модели проведен анализ на предмет возможности построения программных управлений движением исследуемой сложной динамической системы, по результатам которого с использованием подхода Е. А. Барбашина решена задача осуществления назначенной траектории движения и построены программные управления, выводящие систему на желаемую траекторию.

На основе предложенного подхода к определению программных управлений движением исследуемой сложной системы разработана и представлена в работе методика использования указанного подхода для решения обратных задач динамики позитивных систем, которая позволяет систематизировать основные этапы, методы и подходы к получению эффективного алгоритма комплексного исследования и регулирования сложной позитивной динамической системы балансового типа в условиях ее функционирования по разомкнутому контуру при заданных желаемых состояниях (траекториях) системы.

С целью осуществления более детального анализа полученных в результате проведенного в работе исследования расчетов и апробации предлагаемой методики решения обратных задач динамики позитивных систем в работе проведен вычислительный эксперимент определения программных управлений движением позитивной динамической системы с тремя подсистемами. Результаты проведенного вычислительного эксперимента соответствуют результатам проведенных в работе теоретических исследований, а предложенная методика определения вектор-функции программных управлений может быть использована в практике моделирования сложных позитивных динамических систем различной физической природы. Кроме того, перечень задач, решаемых с помощью предложенного в работе подхода, не ограничивается приведенным примером, а распространяется на достаточно широкую область задач автоматического регулирования позитивных динамических систем.

Достоверность предложенного подхода подтверждается точностью используемого аналитического метода решения обратных задач динамики Е. А. Барбашина, а также сведением к нулю рассогласования между требуемым и текущим значениями регулируемой величины исследуемого объекта.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Галиуллин А. С. Обратные задачи динамики. Москва: Наука, 1981. 144 с.
2. Жевнин А. А., Колесников К. С., Крищенко А. П., Толокнов В. И. Синтез алгоритмов терминального управления на основе концепции обратных задач динамики (обзор). *Изв. АН СССР. Техническая кибернетика*. 1985. № 4. С. 178–188.
3. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: Линейные модели. Москва: Наука, 1987. 304 с.
4. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики в теории автоматического управления. Цикл лекций: учебное пособие для втузов. Москва: Машиностроение, 2004. 576 с.
5. Петров Б. Н., Крутько П. Д., Попов Е. П. Построение алгоритмов управления как обратная задача динамики. *Доклады АН СССР*. 1979. Т. 247. №5. С. 1078–1081.
6. Ермошина О. В., Крищенко А. П. Синтез программных управлений ориентацией космического аппарата методом обратных задач динамики. *Известия РАН Теория и системы управления*. 2000. № 2. С. 155–162.
7. Крищенко А. П. Метод обратной задачи динамики в теории управления. *XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014*: Труды (Москва, 16-19 июня 2014). Москва, 2014. С. 431–437.
8. Быстров Л. Г. Идентификация линейных динамических систем по измеряемым координатам переменных состояния. *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2014. №1 (154). С. 3–6.

9. Горошко А. В., Ройзман В. П. Исследование динамики и снижение виброактивности турбонасосного агрегата путем решения обратных задач. *Машиностроение и инженерное образование*. 2014. №1. С. 29–35.
10. Тихонов А. Н., Кальнер В. Д., Гласко В. Б. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. Москва: Машиностроение, 1990. 264 с.
11. Леонтьева В. В. Математичне моделювання позитивних динамічних систем балансового типу: дис... канд. фіз.-матем. наук / Запорізький національний університет. Запоріжжя, 2008.
12. Леонтьева В. В., Кондратьева Н. А. Построение и анализ разомкнутой непрерывной математической модели позитивной динамической системы балансового типа. *Зб. наук. праць. Вісник ЗНУ*. Запоріжжя: ЗНУ. 2010. №1. С. 81–88.
13. Леонтьева В. В., Кондратьева Н. А. Управление в непрерывной математической модели позитивной динамической системы балансового типа. *Вестник Херсонского национального технического университета: Сб. научных статей*. Херсон: ХНТУ, 2009. Вып. 2 (35). С. 273–278.
14. Леонтьева В. В., Кондратьева Н. А. Управляемость позитивной динамической системы балансового типа. *Зб. наук. праць. Вісник ЗНУ*. Запоріжжя: ЗНУ. 2011. №1. С. 58–66.
15. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. Москва: Наука, 1967. 223 с.

### REFERENCES

1. Galiullin, A. S. (1981). Inverse problems of dynamics. Moscow: Nauka.
2. Zhevnin, A. A., Kolesnikov, K. S., Krishchenko, A. P. & Toloknov, V. I. (1985). Synthesis of algorithms for terminal control based on the concept of inverse dynamical problems (review). *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, No. 4., pp. 178-188.
3. Krutko, P. D. (1987). Inverse problems of the dynamics of controllable systems: Linear models. Moscow: Nauka.
4. Krutko, P. D. (2004). Inverse problems of dynamics in the theory of automatic control. A series of lectures: a textbook for high schools. Moscow: Mechanical engineering.
5. Petrov, B. H., Krutko, P. D. & Popov, E. P. (1979). Construction of control algorithms as the inverse problem of dynamics. *Doklady AN SSSR*, Vol. 247, No. 5, pp. 1078-1081.
6. Ermoshina, O. V. & Krishchenko, A. P. (2000). Synthesis of software controls by the orientation of the spacecraft by the method of inverse problems of dynamics. *Izvestiya RAN Teoriya i sistemy upravleniya*, No. 2., pp. 155-162.
7. Krischenko, A. P. (2014, June). The method of the inverse problem of dynamics in control theory. Proceedings of the XII All-Russian Meeting on the Control Problems ARMCP-2014, (pp. 431-437), Moscow.
8. Bystrov, L. G. (2014). Identification of linear dynamic systems from the measured coordinates of state variables. *Mechatronics, automation, control*. No. 1 (154), pp. 3-6.
9. Goroshko, A. V. & Roizman, V. P. (2014). Investigation of the dynamics and reduction of the vibroactivity of the turbo-pump aggregate by solving inverse problems. *Mechanical engineering and engineering education*, No. 1, pp. 29-35.
10. Tikhonov, A. N., Kalner, V. D. & Glasko, V. B. (1990). Mathematical modeling of technological processes and the method of inverse problems in engineering. Moscow: Mechanical Engineering.
11. Leontieva, V. V. (2008). Mathematical modeling of positive dynamical systems of balanced type (Unpublished candidate thesis). Zaporizhzhya National University, Zaporizhzhya, Ukraine.
12. Leontieva, V. V. & Kondratieva, N. A. (2010). Construction and analysis of an open continuous mathematical model of a positive dynamical system of balanced type. *Zb. nauk. prats'. Visnik ZNU*. Zaporizhzhya: ZNU, No. 1, pp. 81-88.
13. Leontieva, V. V. & Kondratieva, N. A. (2009). Control in the continuous mathematical model of a positive dynamical system of balanced type. *Vestnik Khersonskogo natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta: Sb. nauchnykh statey*. Kherson: KHNTU, Iss. 2 (35), pp. 273-278.
14. Leontieva, V. V. & Kondratieva, N. A. (2011). Controllability of a positive dynamical system of balanced type. *Zb. nauk. prats'. Visnik ZNU*. Zaporizhzhya: ZNU, No. 1, pp. 58-66.
15. Barbashin, E. A. (1967). Introduction to the theory of stability. Moscow: Nauka.

УДК 517.95+518.517

## **R-ФУНКЦИИ, ТВЭЛ С ПОЛИЗОНАЛЬНЫМ ОРЕБРЕНИЕМ ОБОЛОЧКИ И ТЕПЛООБМЕН ПРИ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ**

<sup>1,2</sup>Максименко-Шейко К. В., <sup>1</sup>Шейко Т. И.

<sup>1</sup>*Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,  
ул. Пожарского, 2/10, Харьков, 61000, Украина*

<sup>2</sup>*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина,  
пл. Свободы, 4, Харьков, 61000, Украина*

sheyko@ipmach.kharkov.ua

Для увеличения поверхности теплообмена в технике широко используется оребрение теплопередающих поверхностей. В ходе экспериментов с различными методами оребрения оболочек ТВЭЛов были разработаны более выгодные формы оребрения, так называемые полизональное и шевронное, реализацию которых предлагается выполнять на 3D-принтере. С точки зрения универсальности одним из наиболее перспективных выглядит функциональное представление с конструктивными возможностями теории R-функций. В статье приведены разработанные методики построения уравнений различных поверхностей оребрения на основе теории R-функций с их последующей реализацией на 3D-принтере и исследование гидродинамических и температурных полей при полизональном оребрении оболочки ТВЭЛа. Приведены результаты исследования поля скоростей и температурного поля для различных значений параметра закрутки.

*Ключевые слова: теория R-функций, метод Ритца, теплообмен, оболочка ТВЭЛа, полизональное и шевронное оребрение, 3D-принтер.*

## **R-ФУНКЦІЇ, ТВЕЛ З ПОЛІЗОНАЛЬНИМ ОРЕБРЕННЯМ ОБОЛОНКИ ТА ТЕПЛООБМІН ПРИ РУСІ РІДИНИ**

<sup>1,2</sup>Максименко-Шейко К. В., <sup>1</sup>Шейко Т. І.

<sup>1</sup>*Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України,  
вул. Пожарського, 2/10, Харків, 61000, Україна*

<sup>2</sup>*Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна,  
майдан Свободи, 4, Харків, 61000, Україна*

sheyko@ipmach.kharkov.ua

Для збільшення поверхні теплообміну в техніці широко використовується оребрення теплопередавальних поверхонь. Під час експериментів з різними методами оребрення оболонок ТВЕЛів були розроблені найбільш вигідні форми оребрення, так звані полізональне і шевронне, реалізацію яких пропонується виконувати на 3D-принтері. З погляду універсальності, одним з найбільш перспективних є функціональне представлення з конструктивними можливостями теорії R-функцій. У статті наведено розроблені методики побудови рівнянь різних поверхонь оребрення на основі теорії R-функцій з подальшою реалізацією на 3D-принтері та дослідження гідродинамічних і температурних полів при полізональному оребренні оболонки ТВЕЛа. Наведено результати дослідження поля швидкостей і температурного поля для різних значень параметра закрутки.

*Ключові слова: теорія R-функцій, метод Рітца, теплообмін, оболонка ТВЕЛа, полізональне і шевронне оребрення, 3D-принтер.*

## **R-FUNCTIONS, FUEL ELEMENT WITH POLYZONAL FINNING OF CLADDING AND HEAT TRANSFER AT LIQUID MOVING**

<sup>1,2</sup>Maksymenko-Sheiko K. V., <sup>1</sup>Sheiko T. I.

<sup>1</sup>*A. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of NAS of Ukraine,  
Pozharsky str., 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine*

<sup>2</sup>*V.N. Karazin Kharkiv National University,  
Svobody sq., 4, Kharkiv, 61022, Ukraine*

sheyko@ipmach.kharkov.ua

The finning of heat-transmitting surfaces is widely used in technics for heat-exchange surface increasing. The finning forms are rather various. The finning not only increases a heat-exchange surface, but also renders the big influence at hydrodynamics of a stream, and thus at heat-emission factor. The

more favourable finning forms (so-called polyzonal and herring-bone) have been developed during experiments with various finning methods of fuel element claddings. The lacks of herring-bone surfaces are the high labour input and the cost price of manufacturing. These lacks can be removed due to the 3D-printing technology, since the advantages of 3D-printers using are the decrease of the cost price of production manufacturing, the reduction of terms of its occurrence in the market, modeling of objects of any form and complexity, the speed and high accuracy of manufacturing, the possibility of use of the various materials maintaining high temperature, intensive mechanical loadings and influence of harmful chemical substances. It is necessary to create the computer 3D-model of desirable object during preparation for 3D-printing. The analysis of classical representations has shown that their practical application is limited or demands significant efforts for construction of models of complex geometrical objects. One of the most perspective is the functional representation in which basis is the use of implicit mathematical functions language with constructive opportunities of the R-functions theory developed by academician V.L. Rvachev.

The developed techniques of construction of the equations of various finning surfaces at the R-functions theory basis and their subsequent 3D-realization are shown. The research of hydrodynamical and temperature fields at polyzonal finning of fuel element cladding are resulted.

The consecutive construction of the longitudinal, polyzonal and herring-bone finnings equations of the fuel element claddings allows to track the algorithm complication process due to corresponding superpositions in the initial equation which kind does not change. It is one of examples of advantage of the geometrical objects' analytical identification realized with the help of R-functions.

The results of the velocity and temperature fields research for various values of twisting parameter, testifying that the warming up in the intercostal zone increases with increase in value of twisting parameter, are shown.

*Keywords: R-functions theory, Ritz method, heat transfer, fuel element cladding, polyzonal and herring-bone finning, 3D-printer.*

## ВВЕДЕНИЕ

Для увеличения эффективного коэффициента теплопередачи в технике широко используется оребрение теплопередающих поверхностей. Форма оребрения весьма разнообразна. Применяют продольные, поперечные, спиральные ребра, ребра в виде шипов и т.д. Подробные сведения о различных способах оребрения и технологии изготовления ребристых поверхностей можно найти в работах [1-3]. Оребрение не только увеличивает поверхность теплообмена, но и оказывает большое влияние на гидродинамику потока, а тем самым и на коэффициент теплоотдачи. В ходе экспериментов с различными методами оребрения оболочек ТВЭЛов были разработаны более выгодные формы оребрения, так называемые полизональное и шевронное. При шевронном оребрении вся поверхность оболочки делится на четыре, шесть или восемь секторов, и на соседних секторах спирали расположены симметрично относительно продольной оси.

Недостатком шевронных поверхностей является высокая трудоемкость и себестоимость изготовления. Благодаря технологии 3D-печати, эти недостатки можно устранить, т.к. преимущества использования 3D-принтеров – это снижение себестоимости изготовления продукции, сокращение сроков ее появления на рынке, моделирование объектов любой формы и сложности, быстрота и высокая точность изготовления, возможность использования различных материалов, среди которых бетон, гидрогель, дерево, металл, термопластики, выдерживающие высокую температуру, интенсивные механические нагрузки и воздействие вредных химических веществ, шоколад, и даже живые клетки. Существует много технологий 3D-печати: стереолитография, ламинирование, селективное лазерное спекание, послойное наплавление FDM (Fused Deposition Modeling). Печать в формате 3D уже получила широкое распространение: автомобилестроение с оригинальным дизайном, авиамоделирование, машиностроение, строительство, оружие, медицина.

В процессе подготовки к печати на 3D-принтере необходимо создать компьютерную 3D-модель желаемого объекта [4-7]. Анализ классических представлений показал, что их практическое применение ограничено или требует значительных усилий для построения моделей сложных геометрических объектов. С точки зрения универсальности, одним из наиболее перспективных выглядит функциональное представление, в основе которого лежит

использование языка неявных математических функций с конструктивными возможностями теории R-функций, разработанной академиком В. Л. Рвачевым [4].

**Целью работы** является разработка методик и построение уравнений различных поверхностей оребрения на основе теории R-функций с их последующей реализацией на 3D-принтере и исследование гидродинамических и температурных полей при полизональном оребрении оболочки ТВЭЛа.

### ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В работе были использованы R-операции систем  $\{R_0\}$  и суперпозиции с периодическими

функциями  $\mu(x, h) = \frac{4h}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin \frac{(2i-1)x\pi}{h}$  для построения уравнений,

соответствующих геометрическим объектам с симметрией трансляции вдоль прямой, и

$\mu(n\theta) = \frac{8}{n\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[ (2k-1) \frac{n\theta}{2} \right]}{(2k-1)^2}$  для построения уравнений, соответствующих

геометрическим объектам с точечной симметрией циклического типа [6].

#### Математические модели оболочек ТВЭЛов с оребрением

1. Оболочка ТВЭЛа с продольным оребрением (рис. 1, а).

$$\omega = \left( 1 - \frac{(sx-2)^2}{0,56^2} - \frac{sy^2}{0,2^2} \vee_0 4 - x^2 - y^2 \right) \wedge_0 7,5^2 - z^2 \geq 0, \quad (1)$$

$$\begin{cases} sx = r \cos \mu, \\ sy = r \sin \mu; \end{cases} \quad \mu = \frac{8}{\pi n o 1} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin(2k-1) \frac{\theta n o 1}{2}}{(2k-1)^2}; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \theta = \arctg \frac{y}{x};$$

$n o 1 = 20$  – количество ребер в оболочке.

2. Оболочка ТВЭЛа с полизональным оребрением (рис. 1, б).

$$\omega = \left( 1 - \frac{(sx-2)^2}{0,56^2} - \frac{sy^2}{0,2^2} \vee_0 4 - x^2 - y^2 \right) \wedge_0 7,5^2 - z^2 \geq 0, \quad \begin{cases} sx = rs \cos \mu s, \\ sy = rs \sin \mu s; \end{cases}$$

$$\mu s = \frac{8}{\pi n o 1} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin(2k-1) \frac{\theta s n o 1}{2}}{(2k-1)^2}; \quad rs = \sqrt{xs^2 + ys^2}; \quad \theta s = \arctg \frac{ys}{xs};$$

$$\begin{cases} xs = x \cos \frac{f\bar{i}}{n} + y \sin \frac{f\bar{i}}{n}, \\ ys = y \cos \frac{f\bar{i}}{n} - x \sin \frac{f\bar{i}}{n}; \end{cases} \quad f\bar{i} = \frac{2\pi z}{10}, \quad n = 3.$$

3. Оболочка ТВЭЛа с горизонтальным шевронным оребрением (рис. 1, в).

$$\omega = \left( 1 - \frac{(sx-2)^2}{0,56^2} - \frac{sy^2}{0,2^2} \vee_0 4 - x^2 - y^2 \right) \wedge_0 7,5^2 - z^2 \geq 0, \quad \begin{cases} sx = rs \cos \mu s, \\ sy = rs \sin \mu s; \end{cases}$$

$$\mu s = \frac{8}{\pi n o 1} \sum_k (-1)^{k-1} \frac{\sin(2k-1) \frac{\theta s n o 1}{2}}{(2k-1)^2}; \quad r s = \sqrt{x s^2 + y s^2}; \quad \theta s = \arctg \frac{y s}{x s};$$

$$\begin{cases} x s = x \cos \frac{f i}{n l} + y \sin \frac{f i}{n l}, \\ y s = y \cos \frac{f i}{n l} - x \sin \frac{f i}{n l}; \end{cases} \quad f i = \frac{4 h}{\pi^2} \sum_k (-1)^{k-1} \frac{\sin(2k-1) \frac{\pi z}{h}}{(2k-1)^2}, \quad h = 3, \quad n l = 3.$$

4. Оболочка ТВЭЛа с вертикальным шевронным оребрением (рис. 1, г).

$$\omega = \left( 1 - \frac{(s x - 2)^2}{0,56^2} - \frac{s y^2}{0,2^2} \vee_0 4 - x^2 - y^2 \right) \wedge_0 7,5^2 - z^2 \geq 0, \quad \begin{cases} s x = r o s \cos \mu 1, \\ s y = r o s \sin \mu 1; \end{cases}$$

$$r o s = \sqrt{x s^2 + y s^2}; \quad \theta s = \arctg \frac{y s}{x s}; \quad \mu 1 = \frac{8}{\pi n o 1} \sum_k (-1)^{k-1} \frac{\sin(2k-1) \frac{\theta s n o 1}{2}}{(2k-1)^2};$$

$$\begin{cases} x s = x x \cos \frac{f i}{n} + y y \sin \frac{f i}{n}, \\ y s = y y \cos \frac{f i}{n} - x x \sin \frac{f i}{n}; \end{cases} \quad \begin{cases} x x = r \cos \mu 2, \\ y y = r \sin \mu 2; \end{cases} \quad \mu 2 = \frac{8}{\pi n o 2} \sum_k (-1)^{k-1} \frac{\sin(2k-1) \frac{\theta n o 2}{2}}{(2k-1)^2};$$

$$f i = \frac{2 \pi z}{20}; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \theta = \arctg \frac{y}{x};$$

$n o 2 = 6$  – количество секторов.

На рис. 1, а-г представлена визуализация построенных уравнений оболочек ТВЭЛов с оребрениями в RFPreview [5].

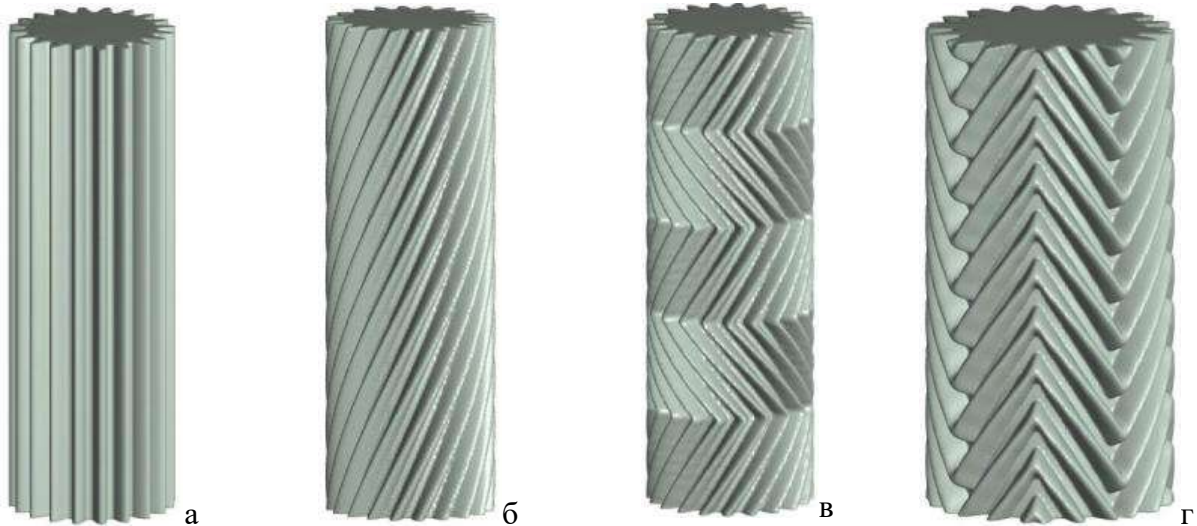


Рис. 1. Оболочки ТВЭЛов с оребрениями: а – продольное, б – полизональное ; в, г – шевронное оребрение

На рис. 2 представлена реализация на 3D-принтере построенного уравнения оболочки ТВЭЛа с шевронным оребрением.

Последовательное построение уравнений продольного, полизонального и шевронного оребрений оболочек ТВЭЛов позволяет проследить процесс усложнения алгоритма за счет



соответствующих суперпозиций в уравнении (1), вид которого не изменяется. Это является одним из примеров преимущества аналитической идентификации геометрических объектов, реализованной с использованием R-функций.



Рис. 2. Модель оболочки ТВЭЛа с шевронным оребрением, изготовленная на 3D-принтере

Рассмотрим задачу теплообмена при ламинарном течении жидкости для ТВЭЛа с полизональным оребрением оболочки (рис. 3).

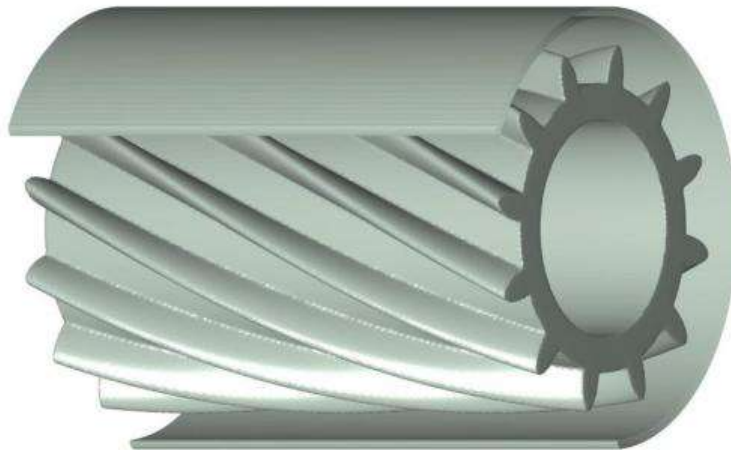


Рис. 3. ТВЭЛ с полизональным оребрением оболочки

Основная система уравнений, описывающая процесс теплообмена в потоке вязкой жидкости, при постоянных физических свойствах жидкости и температуры имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{DT}{D\tau} = a\Delta T + \frac{q_v}{\rho c_p} + \frac{\mu\Phi}{\rho c_p}, \\ \frac{D\vec{V}}{D\tau} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\Delta\vec{V}, \\ \operatorname{div}\vec{V} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\frac{D}{D\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + (\vec{V} \cdot \nabla)$  – субстанциальная (или полная) производная;  $\mu\Phi$  – диссипативная функция;  $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$  – коэффициент температуропроводности;  $c_p$  – теплоемкость среды;  $q_V$  – мощность внутренних источников тепла.

Инвариантная форма записи уравнений (2) позволяет, используя аппарат тензорного анализа, переходить в новую систему координат, в нашем случае – в криволинейную неортогональную систему

$$\begin{cases} x = \hat{x} \cos \alpha z - \hat{y} \sin \alpha z, \\ y = \hat{x} \sin \alpha z + \hat{y} \cos \alpha z, \\ z = z. \end{cases}$$

В винтовой системе координат получим (2) в виде [6]

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \tau} + (\vec{V} \nabla) T &= a \Delta T + \frac{q_V}{\rho c_p} + \frac{\mu \Phi}{\rho c_p}; \\ \frac{\partial V^1}{\partial \tau} + (\vec{V} \nabla) V^1 - 2\alpha V^2 \frac{V^3}{\sqrt{f}} - \alpha^2 \hat{x} \frac{V^{32}}{f} &= \frac{1}{\rho} \left( -(1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial p}{\partial \hat{x}} + \alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial p}{\partial \hat{y}} - \alpha \hat{y} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \\ &+ \nu \left[ \Delta V^1 - 2\alpha^2 \left( \hat{y} \frac{\partial V^2}{\partial \hat{x}} - \hat{x} \frac{\partial V^2}{\partial \hat{y}} \right) - 2\alpha \left( \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial V^2}{\partial z} \right) - \alpha^2 V^1 + 2 \frac{\alpha^3 \hat{y} V^3}{f^{3/2}} \right]; \\ \frac{\partial V^2}{\partial \tau} + (\vec{V} \nabla) V^2 + 2\alpha V^1 \frac{V^3}{\sqrt{f}} - \alpha^2 \hat{y} \frac{V^{32}}{f} &= \frac{1}{\rho} \left( \alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial p}{\partial \hat{x}} - (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial p}{\partial \hat{y}} + \alpha \hat{x} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \\ &+ \nu \left[ \Delta V^2 + 2\alpha^2 \left( \hat{y} \frac{\partial V^1}{\partial \hat{x}} - \hat{x} \frac{\partial V^1}{\partial \hat{y}} \right) + 2\alpha \left( \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial V^1}{\partial z} \right) - \alpha^2 V^2 - 2 \frac{\alpha^3 \hat{x} V^3}{f^{3/2}} \right]; \\ \frac{\partial V^3}{\partial \tau} + (\vec{V} \nabla) V^3 - \frac{\alpha^2 V^3}{f} (\hat{x} V^1 + \hat{y} V^2) &= \frac{\sqrt{f}}{\rho} \left( -\alpha \hat{y} \frac{\partial p}{\partial \hat{x}} + \alpha \hat{x} \frac{\partial p}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \\ &+ \nu \left[ \Delta V^3 - \frac{2\alpha^2}{f} \left( \hat{x} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{x}} + \hat{y} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{y}} \right) - \frac{\alpha^2 (2 - \alpha^2 \hat{x}^2 - \alpha^2 \hat{y}^2)}{f^2} V^3 \right]; \\ \frac{\partial V^1}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial V^2}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial V^3}{\partial z} &= 0; \end{aligned} \right.$$

где

$$f = 1 + \alpha^2 \hat{x}^2 + \alpha^2 \hat{y}^2, \quad (\vec{V} \nabla) = V^1 \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + V^2 \frac{\partial}{\partial \hat{y}} + \frac{V^3}{\sqrt{f}} \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\Delta = (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2\alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial^2}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + 2\alpha \hat{y} \frac{\partial^2}{\partial \hat{x} \partial z} - 2\alpha \hat{x} \frac{\partial^2}{\partial \hat{y} \partial z} - \alpha^2 \left( \hat{x} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \right).$$

Граничное условие для скорости формулируется как условие прилипания частиц жидкости к твердой стенке:  $\vec{V}|_{\partial\Omega} = 0$ . Граничные условия для поля температуры на стенке могут быть заданы различным образом:

$$T|_{\partial\Omega_i} = T_i, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = -\frac{q}{\lambda}, \quad \left. \left( \frac{\partial T}{\partial n} + hT \right) \right|_{\partial\Omega} = q_c, \quad \begin{cases} T|_{\partial\Omega+0} = T|_{\partial\Omega-0}; \\ \lambda_{жс} \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\partial\Omega+0} = \lambda_{см} \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\partial\Omega-0}. \end{cases}$$

В криволинейной неортогональной системе координат входящие в граничные условия производные по нормали с учетом нормализованности функции  $\omega_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$  имеют вид

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = (1 + \alpha^2 \hat{x}_2^2) \frac{\partial u}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial \hat{x}_1} + (1 + \alpha^2 \hat{x}_1^2) \frac{\partial u}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial \omega_1}{\partial \hat{x}_2} - \alpha^2 \hat{x}_1 \hat{x}_2 \left( \frac{\partial u}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial u}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial \omega_1}{\partial \hat{x}_1} \right) \Big|_{\partial\Omega}. \quad (3)$$

А полученные в работе [6] уравнения

$$\begin{aligned} (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial^2 V^3}{\partial \hat{x}^2} + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial^2 V^3}{\partial \hat{y}^2} - 2\alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial^2 V^3}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} - \alpha^2 \left( \hat{x} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{x}} + \hat{y} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{y}} \right) - \\ - \frac{\alpha^2 (2 + \alpha^2 \hat{x}^2 + \alpha^2 \hat{y}^2)}{f^2} V^3 = -\frac{1}{\mu \sqrt{f}} \frac{\partial p}{\partial z}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$-\left[ (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial^2 T}{\partial \hat{x}^2} + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial^2 T}{\partial \hat{y}^2} - 2\alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial^2 T}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} - \alpha^2 \left( \hat{x} \frac{\partial T}{\partial \hat{x}} + \hat{y} \frac{\partial T}{\partial \hat{y}} \right) \right] = -\frac{V^3}{a\sqrt{f}} C. \quad (5)$$

Таким образом, от трехмерных краевых задач приходим к двумерным задачам, для решения которых может быть применен метод Ритца в сочетании с методом R-функций [4, 6]. Положительная определенность операторов задач (4), (5) доказана в [6].

Минимизируем функционалы, эквивалентные краевым задачам (4) и (5),

$$I_1 = \int_{\Omega} \left[ (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \left( \frac{\partial V}{\partial \hat{x}} \right)^2 + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \left( \frac{\partial V}{\partial \hat{y}} \right)^2 - 2\alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial V}{\partial \hat{x}} \frac{\partial V}{\partial \hat{y}} + KV^2 - 2FV \right] d\hat{x} d\hat{y},$$

где

$$K = \frac{\alpha^2 (2 + \alpha^2 \hat{x}^2 + \alpha^2 \hat{y}^2)}{f^2}; \quad F = -\frac{1}{\mu \sqrt{f}} \frac{\partial p}{\partial z}; \quad f = \sqrt{1 + \alpha^2 \hat{x}^2 + \alpha^2 \hat{y}^2};$$

$$\begin{aligned} I_2 = \int_{\Omega} \left[ (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \left( \frac{\partial T_1}{\partial \hat{x}} \right)^2 + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \left( \frac{\partial T_1}{\partial \hat{y}} \right)^2 - 2\alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial T_1}{\partial \hat{x}} \frac{\partial T_1}{\partial \hat{y}} - 2GT_1 \right] d\hat{x} d\hat{y} + \\ + 2 \int_{\Omega} \left[ (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial T_1}{\partial \hat{x}} \frac{\partial T_0}{\partial \hat{x}} + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial T_1}{\partial \hat{y}} \frac{\partial T_0}{\partial \hat{y}} - \alpha^2 \hat{x} \hat{y} \left( \frac{\partial T_0}{\partial \hat{x}} \frac{\partial T_1}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial T_1}{\partial \hat{x}} \frac{\partial T_0}{\partial \hat{y}} \right) \right] d\hat{x} d\hat{y}, \end{aligned}$$

где  $G = -\frac{V^3}{a\sqrt{f}} C$ . На внешней стенке ( $f_1 = (R^2 - x^2 - y^2)/2R = 0$ )  $T|_{\partial\Omega_1} = 0$ , на внутренней –

( $\omega=0$ )  $T|_{\partial\Omega_2} = 1$ . Структура решения задачи (4) имеет вид  $V^3 = \omega_1 \Phi_1$ , а задачи (5) –

$T = T_0 + T_1$ ;  $T_0 = \frac{f_1}{f_1 + \omega_2}$ ;  $T_1 = \omega_1 \Phi_2$ , где  $\omega_1 = f_1 \wedge_0 \omega_2$ . При различных значениях параметра

закрутки  $\alpha$ , получаем результаты, приведенные на рис. 4.

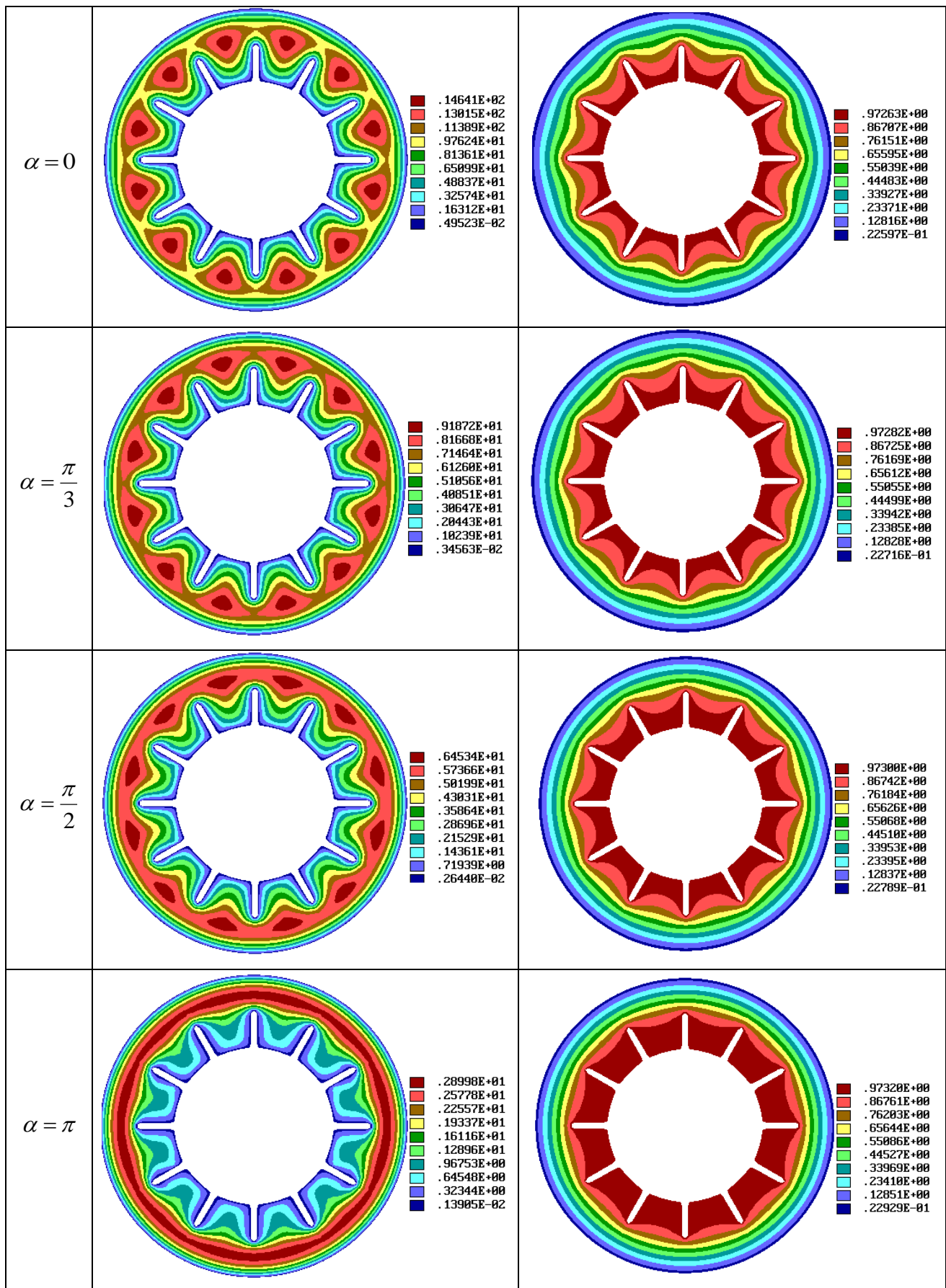


Рис. 4. Распределения поля скоростей (слева) и температур (справа) при различных значениях параметра закрутки

Результаты, представленные на рис. 4, свидетельствуют о том, что с увеличением значения параметра закрутки  $\alpha$  увеличивается прогревание в межреберной зоне.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Петухов Б. С., Генин Л. Г., Ковалев С. А. Теплообмен в ядерных энергетических установках. Москва: Атомиздат, 1974. 367 с.
2. Андреев П. А., Гремилов Д. И., Федорович Е. Д. Теплообменные аппараты ядерных энергетических установок. Н.М. Синева (ред.). Ленинград: Судостроение, 1969. 352 с.
3. Антуфьев В. М. Эффективность различных форм конвективных поверхностей нагрева. Москва-Ленинград: Энергия, 1966. 184 с.
4. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. Думка, 1982. 552 с.
5. Лісін Д. О. Комп'ютерна програма «Система візуалізації та побудови сітки на поверхні геометричних об'єктів, які описані за допомогою математичних засобів теорії R-функцій «RFPreview»: Свідчення про реєстрацію авторського права на твір № 45951. 2012.
6. Максименко-Шейко К. В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. 306 с.
7. Чопоров С. В., Гоменюк С. И., Лисняк А. А., Аль-Омари М. А. В., Алатамнех Х. Х. Триангуляция поверхностей при гибридном параметрическом и неявном представлении. *Вестник Херсонского национального технического университета*. 2016. № 3(58). С. 542–549.

### REFERENCES

1. Petukhov, B. S., Genin, L. G. & Kovalev, S. A. (1974). A heat exchange is in nuclear power installations. Moscow: Atomizdat.
2. Andreyev, P. A., Gremilov, D. I. & Fedorovich, Ye. D. (1969). Heat-exchange vehicles of nuclear power installations. Leningrad: Sudostroyeniye.
3. Antufyev, V. M. (1966). Efficiency of various forms of convective heating surfaces. Moscow-Leningrad: Energiya.
4. Rvachev, V. L. (1982). Theory of R-functions and some of its applications. Kiev: Nauk. dumka.
5. Svidotstvo pro reyeestratsiyu avtorskogo prava na tvir № 45951. Computer program "Visualization System and building a grid on the surface of geometric objects that are described by means of mathematical theory of R-functions "RFPreview", Lisin, D. O., 2012.
6. Maksimenko-Sheyko, K. V. (2009). R-functions in mathematical modeling of geometric objects and physical fields. Kharkov: IPMash NAN Ukrainy.
7. Choporov, S. V., Gomenyuk, S. I., Lisnyak, A. A., Al-Omari, M. A. V. & Alathamneh, H. H. (2016). Triangulation of surfaces under a hybrid parametric and implicit representation. *Vestnik Khersonskogo natsionalnogo tekhnicheskogo universiteta*, No. 3(58), pp. 542-549.

УДК 539.3

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЯЮЩЕГО СЛОЯ В ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ

Ободан Н. И., д. т. н., Адлуцкий В. Я., к. ф.-м. н., Козакова Н. Л.

*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,  
просп. Гагарина, 72, г. Днепр, 49010, Украина*

kkt\_fpm@ukr.net

В постановке плоской геометрически нелинейной теории упругости рассмотрена задача устойчивости двухслойной арочной системы под действием нормальной нагрузки, равномерно распределенной по границе верхнего слоя. На линии раздела слоев реализуются условия полного сцепления, гладкого контакта и отставания. Задача сформулирована в вариационной постановке. Проведен численный анализ критических нагрузок и возможных равновесных конфигураций системы в зависимости от значений ее геометрических и физических параметров. Основное внимание уделено изучению равновесных форм с выщелкнутым нижним слоем.

*Ключевые слова: плоская геометрически нелинейная задача теории упругости, двухслойная система, контактное взаимодействие, потеря устойчивости, выщелкивание.*

## СТІЙКІСТЬ ПІДКРІПЛЮЮЧОГО ШАРУ У ДВОШАРОВІЙ СИСТЕМІ

Ободан Н. І., д. т. н., Адлущкий В. Я., к. ф.-м. н., Козакова Н. Л.

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,  
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49010, Україна*

kkt\_fpm@ukr.net

У постановці плоскої геометрично нелінійної теорії пружності розглянуто задачу стійкості двошарової аркової системи під дією нормального навантаження, рівномірно розподіленого по границі верхнього шару. На лінії розділення шарів реалізуються умови повного зчеплення, гладкого контакту й відшарування. Задачу сформульовано у варіаційній постановці. Проведено чисельний аналіз критичних навантажень і можливих рівноважних конфігурацій системи залежно від значень її геометричних і фізичних параметрів. Основну увагу приділено вивченню рівноважних форм із відшаруванням нижнього шару.

*Ключові слова: плоска геометрично нелінійна задача теорії пружності, двошарова система, контактна взаємодія, втрата стійкості, відшарування.*

## STABILITY OF THE SUPPORT LAYER IN TWO-LAYER SYSTEM

Obodan N. I., Dr. Sci. (Tech.), Adlucky V. J., PhD (Phys.-Math.), Kozakova N. L.

*Oles Honchar Dnipro National University,  
Gagarin av., 72, Dnipro, 49005, Ukraine*

kkt\_fpm@ukr.net

Elastic circular arch system consisting of two layers generally with different mechanical characteristics is considered. The top layer is loaded by uniformly distributed normal load which does not change its direction during process of deformation. Rectilinear borders of both layers are clamped. At the initial state there are zones of coupling –  $\Gamma_c$  and of smooth contact –  $\Gamma_d$  on the common border  $\Gamma$  of layers, where  $\Gamma_c \cup \Gamma_d = \Gamma$ . It is supposed that zones of coupling remain unchanged during the process of deformation. In particular, zones  $\Gamma_c$  may not exist. During the process of deformation, the buckling of layers may occur caused by local loss of stability.

The purpose of the investigation is to assess the critical loads and to obtain possible equilibrium configurations of the system depending on values of its geometrical and physical parameters. The problem is considered within the framework of plane geometrically nonlinear theory of elasticity with use of Lagrangian formalism. Numerical results were obtained with use of FEM technique.

The phenomenon of local buckling of the bottom layer in curvilinear two-layer system at presence of unilateral constraints is caused by existence of isolated equilibrium branches of nonlinear solutions. It makes the linearized approach unacceptable in these cases for the estimation of the real state.

Depending on geometry of system the general, local, and mixed forms of buckling are possible which have various levels of critical loads. For the certain system parameters the possibility of buckling vanishes.

The area of existence of local buckling is mainly determined only by the size of zone with unilateral constraints and by the thickness of the bottom layer. It slightly depends on geometry and physical characteristics of the system.

*Key words: plane geometrically nonlinear theory of elasticity, two-layer system, contact interaction, loss of stability, buckling.*

## ВВЕДЕНИЕ

Существующие исследования задачи о взаимодействии относительно тонкого металлического и «мягкого» упругих слоев посвящены определению напряженно-деформированного состояния системы [1, 4, 5]. Между тем, исчерпание работоспособности покрытий зачастую связывают с появлением приповерхностной неустойчивости в зоне действия сжимающих напряжений при отсутствии или ослабевании межслоевых связей [2, 8-10, 12, 13]. Наиболее существенен этот фактор в тех случаях, когда в конструкции возникают преобладающие сжимающие напряжения, приводящие к явлению потери устойчивости конструкции в целом. Кроме того, процесс разрушения описываемых систем может состоять из двух фаз – потери устойчивости слоя с последующим ростом участка, где отсутствуют связи, а затем – общей потери устойчивости, либо разрушения. Представляет интерес

исследование нелинейного поведения указанных систем, изучение их устойчивости, возможных равновесных состояний и уровней критических нагрузок.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается упругая круговая арочная система, состоящая из двух слоев, в общем случае с отличающимися механическими характеристиками (рис. 1). Верхний слой нагружен равномерно распределенной нормальной нагрузкой интенсивности  $q$ , направление действия которой в процессе деформирования не изменяется. Прямолинейные границы обоих слоев жестко зашпелены. В исходном (недеформированном) состоянии на общей границе слоев  $\Gamma$  заданы зоны сцепления  $\Gamma_c$  и зоны гладкого контакта  $\Gamma_d$ , где  $\Gamma_c \cup \Gamma_d = \Gamma$ . В частном случае зоны  $\Gamma_c$  могут отсутствовать. В процессе деформирования может возникнуть отставание слоев, обусловленное выпучиванием вследствие локальной или общей потери устойчивости. При этом, помимо зон гладкого контакта  $\Gamma_d^{(k)}$ ,  $k=1,2$  образуются подлежащие отысканию зоны отставания  $\Gamma_s^{(k)}$ ,  $k=1,2$ , где  $k$  – номер слоя (штрихом обозначена текущая конфигурация системы). Предполагается, что зоны сцепления остаются таковыми в процессе деформирования, т.е.  $\Gamma'_c$  является образом  $\Gamma_c$ .

Целью исследования является определение критических нагрузок и возможных равновесных конфигураций системы в зависимости от значений ее геометрических и физических параметров.

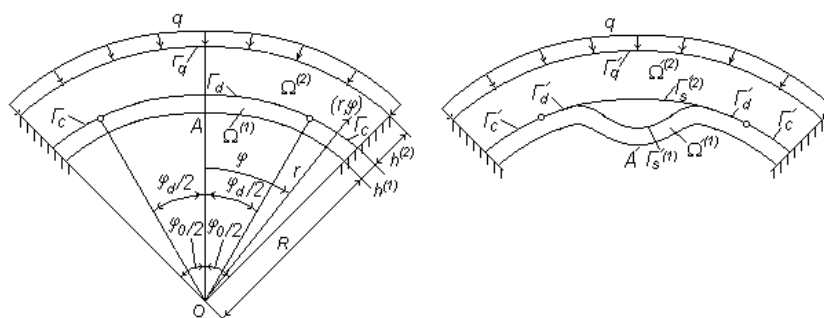


Рис. 1. Исходное и деформированное состояние двухслойной арочной системы

Задача рассматривается как задача теории упругости об обобщенном плоском напряженном состоянии в геометрически нелинейной постановке с использованием Лагранжева формализма.

В исходном состоянии система занимает плоскую область

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^2 \Omega^{(k)}, \quad \Omega^{(1)} = \left\{ (r, \varphi) : r \in [R, R+h^{(1)}], \varphi \in \left[ -\frac{1}{2}\varphi_0, \frac{1}{2}\varphi_0 \right] \right\},$$

$$\Omega^{(2)} = \left\{ (r, \varphi) : r \in [R+h^{(1)}, R+h] \right\}, \quad \varphi \in \left[ -\frac{1}{2}\varphi_0, \frac{1}{2}\varphi_0 \right],$$

где  $\{r, \varphi\}$  – полярные координаты точки области  $\Omega$ , используемые в качестве лагранжевых координат, отнесенных к исходной конфигурации упругой системы;  $\varphi_0$  – угол раствора арки;  $R$  – радиус кривизны основания нижнего слоя;  $h^{(k)}$ ,  $k=1,2$  – толщина  $k$ -го слоя,  $h = h^{(1)} + h^{(2)}$  – толщина двухслойной арки.

Геометрические соотношения, определяющие тензор конечных деформаций Грина-Лагранжа, в предположении о малости удлинений и сдвигов по сравнению с углами поворота заданы в следующем виде [6] (номера слоев опущены):

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= e_r + \frac{1}{2} \omega^2; \quad \varepsilon_\varphi = e_\varphi + \frac{1}{2} \omega^2; \quad \varepsilon_{r\varphi} = e_{r\varphi}; \\ \omega &= \frac{1}{2} \left( \frac{u_\varphi}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right); \quad e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad e_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}; \\ e_{r\varphi} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\bar{u} = \{u_r, u_\varphi\}$  – вектор перемещений.

Уравнения равновесия имеют вид [6]:

$$\frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{s_r - s_\varphi}{r} = 0; \quad \frac{\partial s_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{s_{r\varphi} + s_{\varphi r}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_\varphi}{\partial \varphi} = 0; \quad (2)$$

$s_r = \sigma_r - \sigma_{r\varphi} \omega$ ;  $s_\varphi = \sigma_\varphi + \sigma_{r\varphi} \omega$ ;  $s_{r\varphi} = \sigma_r \omega + \sigma_{r\varphi}$ ;  $s_{\varphi r} = -\sigma_r \omega + \sigma_{r\varphi}$ , где  $\sigma_r$ ,  $\sigma_{r\varphi}$ ,  $\sigma_{\varphi r}$ ,  $\sigma_\varphi$  – компоненты симметричного тензора напряжений Коши  $T$  для деформированной конфигурации.

В качестве физических соотношений для  $k$ -го слоя приняты соотношения закона Гука

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(k)} &= \frac{E^{(k)}}{1 + \nu^{(k)}} \left( \varepsilon_r^{(k)} + \frac{\nu^{(k)}}{1 - 2\nu^{(k)}} \mathcal{G}^{(k)} \right); \quad \sigma_\varphi^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{1 + \nu^{(k)}} \left( \varepsilon_\varphi^{(k)} + \frac{\nu^{(k)}}{1 - 2\nu^{(k)}} \mathcal{G}^{(k)} \right); \quad \sigma_{r\varphi}^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{2(1 + \nu^{(k)})} \varepsilon_{r\varphi}^{(k)}; \\ \mathcal{G}^{(k)} &= \varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $E^{(k)}$  и  $\nu^{(k)}$  – соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона  $k$ -го слоя.

Граничные условия имеют следующий вид:

1) на боковых границах

$$\begin{aligned} u_r^{(1)}(r, \pm \frac{1}{2} \varphi_0) &= 0; \quad u_\varphi^{(1)}(r, \pm \frac{1}{2} \varphi_0) = 0, \quad r \in [R, R + h^{(1)}]; \\ u_r^{(2)}(r, \pm \frac{1}{2} \varphi_0) &= 0; \quad u_\varphi^{(2)}(r, \pm \frac{1}{2} \varphi_0) = 0, \quad r \in [R + h^{(1)}, R + h]; \end{aligned} \quad (4)$$

2) на нижней границе

$$\bar{p}_{n'}^{(1)} = T^{(1)} \cdot \bar{n}'^{(1)} = 0, \quad (5)$$

где  $\bar{p}_{n'}^{(1)}$  – вектор усилий на площадке границы с нормалью  $\bar{n}'^{(1)}$  в деформированном состоянии;

3) на верхней границе  $\Gamma'_q$

$$\bar{p}_{n'}^{(2)} = T^{(2)} \cdot \bar{n}'^{(2)} = \bar{q}, \quad (6)$$

где  $\bar{q}$  – вектор текущей нагрузки, направление которого в процессе нагружения остается постоянным («мертвая» нагрузка).

Условия на границе раздела слоев:

1) в зонах полного сцепления  $\Gamma'_c$

$$\bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(2)}; \quad (7)$$



2) в зонах гладкого контакта  $\Gamma_d^{(k)}$

$$\forall s' \in \Gamma_d^{(2)} \exists t' \in \Gamma_d^{(1)} : |\vec{r}^{(2)}(s') - \vec{r}^{(1)}(t')| = 0;$$

$$\vec{p}_{n^{(k)}}^{(k)} - (\vec{p}_{n^{(k)}}^{(k)} \cdot \vec{n}^{(k)}) \vec{n}^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2, \quad (8)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор соответствующей точки границы в деформированном состоянии;

3) в зонах отставания  $\Gamma_s^{(k)}$

$$\vec{p}_{n^{(k)}}^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2;$$

$$\forall s' \in \Gamma_s^{(2)} : (\vec{r}^{(2)}(s') - \vec{r}^{(1)}(t^*(s'))) \cdot \vec{n}^{*(1)}(s') > 0, \quad (9)$$

где  $t^*(s') = \arg \min_{t' \in \Gamma_s^{(1)}} |\vec{r}^{(2)}(s') - \vec{r}^{(1)}(t')|$ ,  $t^*(s') \in \Gamma_s^{(1)}$ ;  $\vec{n}^{*(1)}(s')$  – вектор нормали к  $\Gamma_s^{(1)}$  в точке  $t^*(s')$ .

### МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для описания неизвестных контактных усилий и зон контакта и отставания на множестве  $\Gamma_d^{(2)} \cup \Gamma_s^{(2)}$  вводится функция зазора  $g$  и контактных усилий  $\gamma$  [11, 15], где

$$g(s') = (\vec{r}^{(2)}(s') - \vec{r}^{(1)}(t^*(s'))) \cdot \vec{n}^*(s') \geq 0; \quad \gamma(s') = \vec{p}_{n^{(2)}}^{(2)}(s') \cdot \vec{n}^{*(1)}(s') \geq 0;$$

$$g(s')\gamma(s') = 0, \quad s' \in \Gamma_d^{(2)} \cup \Gamma_s^{(2)};$$

$$t^*(s') = \arg \min_{t' \in \Gamma_d^{(1)} \cup \Gamma_s^{(1)}} |\vec{r}^{(2)}(s') - \vec{r}^{(1)}(t')|,$$

$$t^*(s') \in \Gamma_d^{(1)} \cup \Gamma_s^{(1)}, \quad s' \in \Gamma_d^{(2)} \cup \Gamma_s^{(2)}; \quad (10)$$

$\vec{n}^*(s')$  – вектор нормали к  $\Gamma_d^{(1)} \cup \Gamma_s^{(1)}$  в точке  $t^*(s')$ .

Вариационная постановка краевой задачи (1)-(9) имеет вид

$$W = \arg \min_{W \in \bar{W}} \mathcal{E}(u, \gamma), \quad W = \{u, \gamma\}^T. \quad (11)$$

При этом условие стационарности для расширенного функционала  $\mathcal{E}(u, \gamma)$  определяется равенством

$$\delta \mathcal{E}(u, \gamma) = \sum_{k=1}^2 \iint_{\Omega^{(k)}} \frac{1}{2} (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \varepsilon_c^{(k)} + \sigma_{r\varphi}^{(k)} \delta \varepsilon_{r\varphi}^{(k)}) d\Omega -$$

$$- \int_{\Gamma_d^{(2)} \cup \Gamma_s^{(2)}} (\delta \bar{u}^{(2)} - \delta \bar{u}^{(1)}) \cdot \vec{p}_{n^{(2)}}^{(2)} ds' - \bar{q} \cdot \int_{\Gamma_q} \delta \bar{u}^{(2)} ds' + \int_{\Gamma_d^{(2)} \cup \Gamma_s^{(2)}} \delta \gamma w(g, \gamma) ds' = 0, \quad (12)$$

где  $w(g, \gamma)$  – функция, аппроксимирующая условия (10). Решение осуществляется для случая простого нагружения  $q = q_0 t$ , где  $t$  – параметр нагружения,  $q_0$  – фиксированное значение.

Для построения решения задачи (12) осуществляется переход к дискретной модели с использованием конечно-элементной аппроксимации. Для этого на области  $\Omega$  вводится

конечно-элементная сетка с узлами в точках с координатами  $\{r_i, \varphi_i\}$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Неизвестные перемещения представляются в виде вектора  $\bar{u} = \{u_i\}$ ,  $i = \overline{1, 2N}$ , компонентами которого являются узловые значения перемещений  $u_{r,i}$ ,  $u_{\varphi,i}$ ,  $i = \overline{1, N}$ . В пределах каждого элемента используется изопараметрическая аппроксимация перемещений с помощью линейных функций формы. Узлы, лежащие на границе  $\Gamma \setminus \Gamma_c$ , нумеруются как  $P = \{P_1, \dots, P_M\}$ . На множестве узлов  $P$  формируется вектор узловых значений функции  $\gamma$ ,  $\bar{\gamma} = \{\gamma_i\}$ ,  $i = \overline{1, M}$ . В соответствии с условиями (10) из элементов вектора  $P$  формируются векторы  $P^d = \{P_1^d, \dots, P_{M_d}^d\}$ ,  $P^s = \{P_1^s, \dots, P_{M_s}^s\}$ , определяющие узлы сетки, соответствующие зонам гладкого контакта и отставания соответственно. В исходном состоянии  $P \equiv P^d$ . После подстановки конечно-элементной аппроксимации в функционал  $\mathcal{E}(u, \gamma)$ , интегрирования и выполнения процедуры (11) получается разрешающая система нелинейных алгебраических уравнений порядка  $2N + M$ , имеющая следующую структуру

$$\begin{cases} Q(\bar{u}) + Q_1(\bar{u}, \bar{\gamma}) = F(q), \\ Q_2(\bar{u}, \bar{\gamma}) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

и эквивалентная условиям  $\partial \tilde{\mathcal{E}} / \partial u_i = 0$ ,  $i = \overline{1, 2N}$ ;  $\partial \tilde{\mathcal{E}} / \partial \gamma_i = 0$ ,  $i = \overline{1, M}$ , где  $\tilde{\mathcal{E}}$  – значение функционала  $\mathcal{E}$  после подстановки конечно-элементной аппроксимации и выполнения процедуры интегрирования.

Для решения системы (13) производится ее линеаризация и используется метод продолжения по параметру  $q^{(n)} = q^{(n-1)} + \Delta q$ . При этом разрешающая система линейных алгебраических уравнений относительно соответствующих приращений  $\Delta \bar{u}^{(n)} = \bar{u}^{(n)} - \bar{u}^{(n-1)}$  и  $\Delta \bar{\gamma}^{(n)} = \bar{\gamma}^{(n)} - \bar{\gamma}^{(n-1)}$  приобретает вид

$$\begin{aligned} & \left( K(\bar{u}^{(n-1)}) + \frac{\partial Q_1(\bar{u}^{(n-1)}, \bar{\gamma}^{(n-1)})}{\partial \bar{u}} \right) \Delta \bar{u}^{(n)} + \frac{\partial Q_1(\bar{u}^{(n-1)}, \bar{\gamma}^{(n-1)})}{\partial \bar{\gamma}} \Delta \bar{\gamma}^{(n)} = \\ & = F(q^{(n)}) - Q(\bar{u}^{(n-1)}) - Q_1(\bar{u}^{(n-1)}, \bar{\gamma}^{(n-1)}); \\ & \frac{\partial Q_2(\bar{u}^{(n-1)}, \bar{\gamma}^{(n-1)})}{\partial \bar{u}} \Delta \bar{u}^{(n)} + \frac{\partial Q_2(\bar{u}^{(n-1)}, \bar{\gamma}^{(n-1)})}{\partial \bar{\gamma}} \Delta \bar{\gamma}^{(n)} = -Q_2(\bar{u}^{(n-1)}, \bar{\gamma}^{(n-1)}), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $K(\bar{u}^{(n-1)}) = \frac{\partial Q(\bar{u}^{(n-1)})}{\partial \bar{u}}$  – тангенциальная матрица жесткости [15].

В пределах каждого шага  $n$  осуществляется уточнение решения методом Ньютона-Рафсона [11] по итерационной схеме

$$\begin{aligned} & \left( K(\bar{u}_{(j-1)}^{(n-1)}) + \frac{\partial Q_1(\bar{u}_{(j-1)}^{(n-1)}, \bar{\gamma}_{(j-1)}^{(n-1)})}{\partial \bar{u}} \right) \bar{v}_{(j)} + \frac{\partial Q_1(\bar{u}_{(j-1)}^{(n-1)}, \bar{\gamma}_{(j-1)}^{(n-1)})}{\partial \bar{\gamma}} \zeta_{(j)} = \\ & = F(q^{(n)}) - Q(\bar{u}_{(j-1)}^{(n-1)}) - Q_1(\bar{u}_{(j-1)}^{(n-1)}, \bar{\gamma}_{(j-1)}^{(n-1)}); \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q_2(\bar{u}_{(j-1)}^{(n-1)}, \bar{\gamma}_{(j-1)}^{(n-1)})}{\partial \bar{u}} \bar{v}_{(j)} + \frac{\partial Q_2(\bar{u}_{(j-1)}^{(n-1)}, \bar{\gamma}_{(j-1)}^{(n-1)})}{\partial \bar{\gamma}} \bar{\zeta}_{(j)} = -Q_2(\bar{u}_{(j-1)}^{(n-1)}, \bar{\gamma}_{(j-1)}^{(n-1)}),$$

$$\bar{v}_{(j)} = \Delta \bar{u}_{(j)}^{(n)} - \Delta \bar{u}_{(j-1)}^{(n)}, \quad \bar{\zeta}_{(j)} = \Delta \bar{\gamma}_{(j)}^{(n)} - \Delta \bar{\gamma}_{(j-1)}^{(n)}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$\bar{v}_{(0)} = \Delta \bar{u}^{(n-1)}, \quad \bar{\zeta}_{(0)} = \Delta \bar{\gamma}^{(n-1)}.$$
(15)

Итерационный процесс продолжается до достижения заданной точности решения  $\|\bar{v}\| < \varepsilon$ ,  $\|\bar{\zeta}\| < \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$ .

### ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численное моделирование процесса деформирования рассматриваемой двухслойной системы осуществлялось в широком диапазоне изменения характерных параметров  $\varphi_0$ ,  $\rho = \frac{R}{h}$ ,  $\eta = \frac{h^{(1)}}{h}$ ,  $\zeta_d = \frac{\varphi_d}{\varphi_0}$ ,  $e = \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$ . Целью исследования было выяснение влияния указанных параметров на характер локальной и общей потери устойчивости системы, в частности – на возможность существования равновесных форм с отщелкнутым нижним слоем.

Равновесные формы, соответствующие случаю  $\Gamma'_s = \emptyset$ , существуют во всем диапазоне значений параметров задачи. Они соответствуют совместному деформированию слоев в сомкнутом состоянии с гладким проскальзыванием друг относительно друга в зоне  $\Gamma_d$ . На рис. 2, а) приведена типичная кривая «нагрузка-прогиб», где  $w_A$  – радиальное перемещение центральной точки  $A$  границы нижнего слоя (рис.1);  $\lambda = q/q^*$ ,  $q^*$  – критическая нагрузка потери устойчивости системы для случая  $\zeta_d = 0$ , т.е. для полностью скрепленных слоев. Пунктиром обозначена исходящая из нуля ветвь равновесных состояний, соответствующая  $\Gamma'_s = \emptyset$ , т.е. случаю деформирования слоев в сомкнутом состоянии. Сплошной линией представлена изолированная ветвь, соответствующая форме с отщелкнутым нижним слоем. Характерной особенностью таких форм является невозможность их реализации при нагрузке, меньшей  $\lambda_{\min}$ , поскольку при этой нагрузке происходит потеря устойчивости нижнего слоя, обуславливающая его выщелкивание. Как показали расчеты, при реализации этих форм верхняя критическая нагрузка  $\lambda_{\max}$  практически не изменяется по сравнению со случаем деформирования слоев в сомкнутом состоянии. При достижении этой нагрузки происходит общая потеря устойчивости системы, причем для достаточно больших значений параметров  $\varphi_0$  и  $\rho$  реализуется кососимметричная форма потери устойчивости, а при сравнительно малых – симметричная.

На рис. 2, б) для случая  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $\rho = 50$ ,  $\zeta_d = 1$ ,  $e = 1$ ,  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0,3$  приведены графики, характеризующие влияние параметра  $\eta$ , т.е. относительной толщины нижнего слоя, на уровень критических нагрузок. В данном случае  $q^*$  практически совпало с критическим значением для бесшарнирной арки толщиной  $h$  [3]:  $q_{cr} = 2,7E(\rho + 0,5)^{-3}$ . Как следует из приведенных данных, с ростом  $\eta$  величина  $\lambda_{\max}$  убывает вследствие уменьшения суммарной изгибной жесткости системы, а величина  $\lambda_{\min}$  возрастает в силу увеличения изгибной жесткости нижнего слоя. При  $\eta > 0,12$  для данного набора параметров форма с отщелкнутым нижним слоем не реализуется.

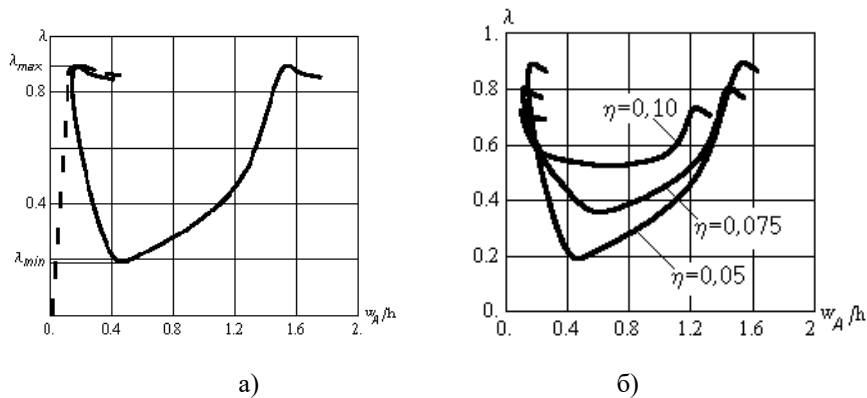


Рис. 2. Графики зависимости «нагрузка-прогиб» для случая  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $\rho = 50$ ,  $\zeta_d = 1$ ,  $e = 1$ ,  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0,3$

На рис. 3 для случая  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $\rho = 50$ ,  $\eta = 0,05$ ,  $e = 1$ ,  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0,3$  приведены графики, описывающие влияние на уровень критических нагрузок параметра  $\zeta_d$ , характеризующего размер зон полного сцепления. Из приведенных данных следует, что с увеличением размера зон полного сцепления возрастает как нижняя, так и верхняя критические нагрузки. При этом величина зазора в зоне отставания  $\Gamma'_s$  уменьшается (как и размер этой зоны). Очевидно, что при  $\zeta_d \rightarrow 0$   $\lambda_{\min} \rightarrow \lambda_{\max}$ , а  $\lambda_{\max} \rightarrow 1$ .

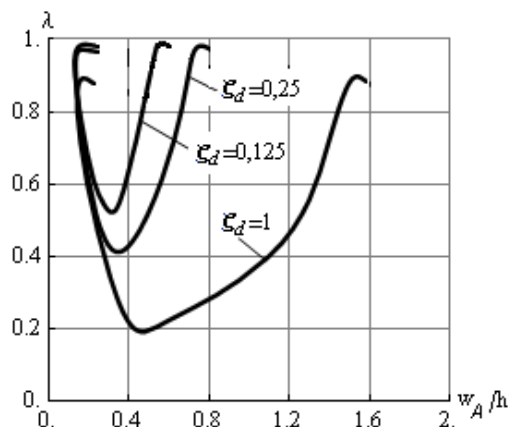


Рис. 3. Графики зависимости «нагрузка-прогиб» для случая  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $\rho = 50$ ,  $\eta = 0,05$ ,  $e = 1$ ,  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0,3$

На рис. 4 для случая  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $\rho = 50$ ,  $\eta = 0,05$ ,  $e = 1$ ,  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0,3$  приведены графики радиальных перемещений точек границы  $\Gamma$  для двух значений параметра  $\zeta_d$ , соответствующие локальной ( $\lambda = \lambda_{\min}$ ) и общей ( $\lambda = \lambda_{\max}$ ) формам потери устойчивости. Сплошной линией изображены перемещения  $u_r^{(1)}(R+h^{(1)}, \varphi)$ , пунктиром –  $u_r^{(2)}(R+h^{(1)}, \varphi)$ , кружками – границы зон полного сцепления. Как следует из рис. 4, форма локальной потери устойчивости является симметричной, а общей – косимметричной. Размеры зоны отставания в случае  $\zeta_d = 1$  (т.е. при полном отсутствии сцепления) не слишком отличаются от случая  $\zeta_d = 0,125$  (т.е. для сравнительно узкой зоны возможного отставания). Это свидетельствует о том, что отставание реализуется в довольно небольшой зоне области контакта даже при полностью несвязанных слоях.

На рис. 5 для случая  $\rho = 50$ ,  $\zeta_d = 1$ ,  $\eta = 0,05$ ,  $e = 1$ ,  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0,3$  приведены графики, характеризующие влияние параметра  $\varphi_0$  на уровень критических нагрузок. В данном случае в качестве  $q^*$  выбрано критическое значение для бесшарнирной арки

толщиной  $h$  с углом раствора  $\varphi_0 = 2\pi/3$  [3]:  $q_{cr} = 1,59E(\rho + 0,5)^{-3}$ . Как следует из приведенных данных, с уменьшением угла раствора значения верхней критической нагрузки существенно возрастают, тогда как для нижней критической нагрузки они возрастают незначительно.

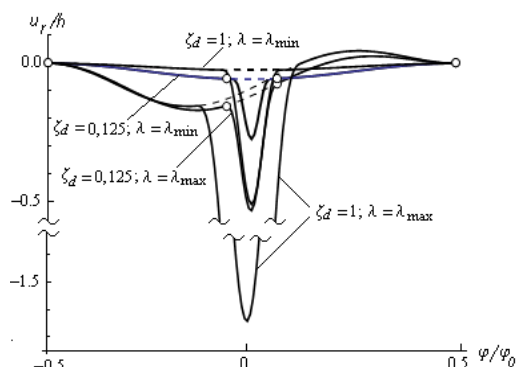


Рис. 4. Графики радиальных перемещений точек границы  $\Gamma$

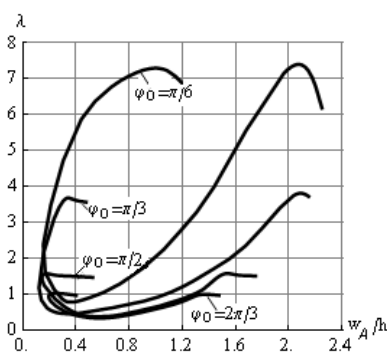


Рис. 5. Графики зависимости «нагрузка-прогиб» для случая  $\rho = 50, \zeta_d = 1, \eta = 0,05, e = 1, E = 200 ГПа, \nu = 0,3$

На рис. 6 приведены результаты для двухслойной системы с существенно большей относительной толщиной  $\rho = 15$  для случая  $\varphi_0 = \pi/2, \zeta_d = 1, e = 1, E = 200 ГПа, \nu = 0,3$ . В отличие от рассмотренной ранее сравнительно тонкой двухслойной системы, для которой верхней критической нагрузке соответствовала точка бифуркации диаграммы «нагрузка-прогиб» и общая потеря устойчивости осуществлялась по кососимметричной форме, в данном случае верхней критической нагрузке соответствует предельная точка, и форма общей потери устойчивости является симметричной. При этом значения  $\lambda_{max}$  при малых значениях  $\eta$  приближаются к величине предела пропорциональности. Влияние параметра  $\eta$  на величины критических нагрузок аналогично результатам рис. 2, б), но при этом предельное значение  $\eta$ , при котором еще возможно выщелкивание, в данном случае в два раза выше.

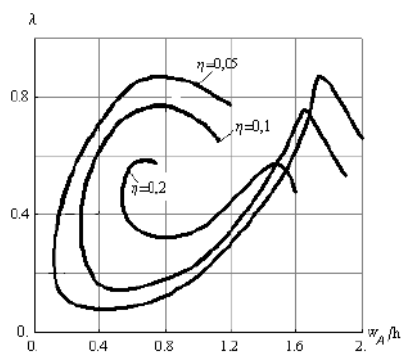


Рис. 6. Графики зависимости «нагрузка-прогиб» для случая  $\varphi_0 = \pi/2, \rho = 15, \zeta_d = 1, e = 1, E = 200 ГПа, \nu = 0,3$

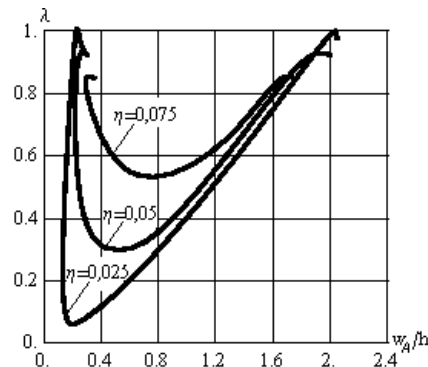


Рис. 7. Графики зависимости «нагрузка-прогиб» для случая  $\varphi_0 = \pi/2, \rho = 50, \zeta_d = 1, e = 0,1, E = 200 ГПа, \nu = 0,3$

До сих пор рассматривалось поведение однородной двухслойной системы. Представляет интерес исследование влияния разномодульности материалов слоев. На рис. 7 приведены результаты, соответствующие случаю  $e = E^{(2)}/E^{(1)} = 0,1, E = 200 ГПа, \nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0,3$ . При этом  $\varphi_0 = \pi/2, \rho = 50, \zeta_d = 1$ .

В данном случае при вычислении  $\lambda = q/q^*$  использовалась верхняя критическая нагрузка  $q^* = 0,4 МПа$ , полученная для случая  $\eta = 0,025$ . Из приведенных данных следует, что

влияние параметра  $\eta$  на величины критических нагрузок аналогично результатам рис. 2, б). При  $\eta > 0,09$  выщелкивание нижнего слоя становится невозможным.

На рис. 8 приведены результаты, соответствующие случаю  $e = E^{(2)}/E^{(1)} = 0,1$ ,  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0,3$ . При этом  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $\rho = 15$ ,  $\zeta_d = 1$ . В данном случае при вычислении  $\lambda = q/q^*$  использовалась верхняя критическая нагрузка  $q^* = 11 \text{ МПа}$ , полученная для случая  $\eta = 0,05$ . При  $\eta > 0,16$  выщелкивание нижнего слоя становится невозможным.

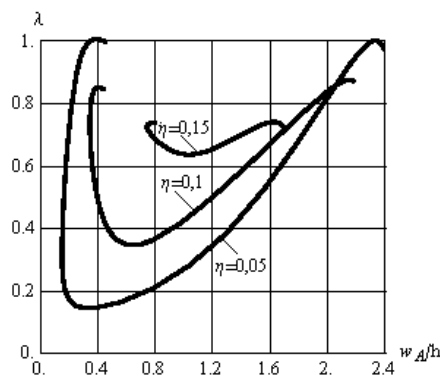


Рис. 8. Графики зависимости «нагрузка-прогиб» для случая  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $\rho = 15$ ,  $\zeta_d = 1$ ,  $e = 0,1$ ,  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0,3$

## ВЫВОДЫ

1. Явление локального выщелкивания нижнего слоя в криволинейной двухслойной системе при наличии односторонних связей обусловлено существованием изолированных равновесных ветвей нелинейных решений, что делает неприемлемым в этих случаях линеаризованный подход для оценки реального состояния.
2. В зависимости от геометрии системы возможны общие и локальные, и смешанные формы выщелкивания, которым соответствуют различные уровни критических нагрузок. При этом при определенных параметрах системы возможность локального выщелкивания исчезает.
3. Область существования локального выщелкивания преимущественно определяется только размером участка с односторонними связями и толщиной нижнего слоя и мало зависит от геометрии и физических характеристик конструкции.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М., Ворович И. И. Механика контактных взаимодействий. Москва: Наука, 2001. 670 с.
2. Гузь А. Н. О построении основ механики разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор). *Прикладная механика*. 2014. Т. 50, № 1. С. 5–88.
3. Динник А. Н. Устойчивость арок. Москва-Ленинград: ОГИЗ, 1946. 128 с.
4. Зернин М. В., Бабин А. П., Мишин А. В., Буряк В. Ю. Моделирование контактного взаимодействия с использованием положений механики «контактной псевдосреды». *Вестн. Брянского гос. техн. ун-та*. 2007. № 4(16). С. 62–73.
5. Лукашевич А. А., Розин Л. А. О решении контактных задач строительной механики с односторонними связями и трением методом пошагового анализа. *Инженерно-строительный журнал*. 2013. № 1. С. 75–81.
6. Новожилов В. В. Теория упругости. СУДПРОМ ГИЗ, 1958. 374 с.
7. Ободан Н. И., Гук Н. А., Козакова Н. Л. Нелинейное поведение слоя, лежащего на упругом полупространстве. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. Дніпропетровськ: Ліра, 2016. Вип. 25. С. 146–157.*
8. Парцевский В. В. Расслоение в полимерных композитах (обзор). *Изв. РАН МТТ*. 2003. № 5. С. 62–94.

9. Чернякин С. А., Скворцов Ю. В. Анализ роста расслоений в композитных конструкциях. *Вестник Сиб. ГАУ им. акад. Ревякина*. 2014. Вып. 4(56). С. 249–258.
10. Akbarov S. D. Stability loss and buckling delamination. Berlin: Springer, 2012. 450 p.
11. Bathe K.-J. Finite element procedures. Prentice-Hall, 1996. 1038 p.
12. Jun L., Lui X. Y., Nan Y. Y., Xuefeng Y. Numerical and experimental analysis of delamination in the T-stiffer integrated composite structure. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2016. V. 23(10). P. 1188–1196.
13. Liu P. F., Islam M. M. A nonlinear cohesive model for mixed-mode delamination of composites laminates. *Composite Struct.* 2013. Iss. 106. P. 47–56.
14. Obodan N. I., Lebedeyev O. G., Gromov V. A. Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells. New-York: Springer, 2013. 178 p.
15. Wriggers P. Nonlinear finite element methods. Springer-Verlag, 2008. 560 p.

## REFERENCES

1. Alexandrov, V. M. & Vorovic, I. I. (2001). Mechanics of contact interactions. Moscow: Nauka.
2. Guz, A. N. (2014). About construction of bases of failure mechanics of materials at compression along cracks (review). *Appl. Mech.*, Vol. 50, No. 1, pp. 5-88.
3. Dinnik, A. N. (1946). Stability of arches. Moscow-Leningrad: OGIZ.
4. Zernin, M. V., Babin, A. P., Mishin, A. V. & Burack, V. Yu. (2007). Modeling of the contact interaction with use of statements of the “contact pseudo-environment” mechanics. *Bul. of Bryansk state tech. univ.*, No. 4(16), pp. 62-73.
5. Lukashevich, A. A. & Rozin, L. A. (2013). About the solution of contact problems of building mechanics with unilateral constraints and friction by the step-by-step analysis method. *Constr. J.*, No. 1, pp. 75-81.
6. Novozhylov, V. V. (1958). Theory of elasticity. SUDPROM GIZ.
7. Obodan, N. I., Guk, N. A. & Kozakova, N. L. (2016). Nonlinear behavior of the elastic layer lying on an elastic semi space. *Problems of computation mechanics and strength of structures*. Dnepropetrovsk: Lyra. Vol. 25, pp. 146-157.
8. Parcevskiy, V. V. (2003). Delamination in polymeric composites (review). *Rep. RAN. Solid mech.*, No. 5, pp. 62-94.
9. Chernyakin, S. A. & Skvortsov, Yu. V. (2014). Analysis of delamination grows in composite structures. *H. of Sib. GAU*, Iss. 4(56), pp. 249-258.
10. Akbarov, S. D. (2012). Stability loss and buckling delamination. Berlin: Springer.
11. Bathe, K.-J. (1996). Finite element procedures. Prentice-Hall.
12. Jun, L., Lui, X. Y., Nan, Y. Y. & Xuefeng, Y. (2016). Numerical and experimental analysis of delamination in the T-stiffer integrated composite structure. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, V. 23(10), pp. 1188-1196.
13. Liu, P. F. & Islam, M. M. (2013). A nonlinear cohesive model for mixed-mode delamination of composites laminates. *Composite Struct.*, Iss. 106, pp. 47-56.
14. Obodan, N. I., Lebedeyev, O. G. & Gromov, V. A. (2013). Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells. New-York: Springer.
15. Wriggers, P. (2008). Nonlinear finite element methods. Springer-Verlag.

УДК 393.3

## ДВОВІСНИЙ РОЗТЯГ ПЛАСТИНИ З ДВОМА РІВНИМИ КОЛІНЕАРНИМИ ТРІЩИНАМИ З УРАХУВАННЯМ ЗМІЦНЕННЯ МАТЕРІАЛУ ТА ЗЛИТИХ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН МІЖ НИМИ

<sup>1</sup>Опанасович В. К., д. ф.-м. н., професор, <sup>2</sup>Николишин М. М. д. ф.-м. н., професор,  
<sup>1</sup>Слободян М. С., к. ф.-м. н., доцент, <sup>2</sup>Альфавіцька С. О., аспірант

<sup>1</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна

<sup>2</sup>Інститут прикладних проблем механіки та математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України  
вул. Наукова, 3-б, м. Львів, 79060, Україна

kafmech@franko.lviv.ua, alfavitska\_solomiya@i.ua, slobkolia@gmail.com

Сформульовано і розв'язано задачу про двовісний розтяг зусиллями на нескінченності ізотропної пластини з двома рівними колінеарними наскрізними тріщинами, береги яких вільні від зовнішнього навантаження. Припускається, що під дією зовнішнього навантаження у вершинах тріщин утворюються вузькі пластичні зони з урахуванням лінійного зміцнення матеріалу, причому між тріщинами пластичні зони злилися в одну. З використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язування задач зведено до задачі лінійного спряження, на основі яких отримано аналітичний розв'язок задачі в класі функцій обмежених у вершинах пластичних зон. Чисельно визначено довжину пластичних зон та розкриття берегів тріщин. Результати числового аналізу подано графічно.

*Ключові слова:* тріщини, розтяг, ізотропна пластина, комплексні потенціали, пластичні зони, зміцнення матеріалу.

## ДВУХОСНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ПЛАСТИНЫ С ДВУМЯ РАВНЫМИ КОЛЛИНЕАРНЫМИ ТРЕЩИНАМИ С УЧЕТОМ УПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА И СЛИВШИХСЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗОН МЕЖДУ НИМИ

<sup>1</sup>Опанасович В. К., д. ф.-м. н., профессор, <sup>2</sup>Николишин М. М. д. ф.-м. н., профессор,  
<sup>1</sup>Слободян Н. С., к. ф.-м. н., доцент, <sup>2</sup>Альфавитская С. О., аспирант

<sup>1</sup>Львовский национальный университет им. Ивана Франко,  
ул. Университетская, 1, г. Львов, 79000, Украина

<sup>2</sup>Институт прикладных проблем механики и математики  
им. Я. С. Подстригача НАН Украины,  
ул. Научная, 3-б, г. Львов, 79060, Украина

kafmech@franko.lviv.ua, alfavitska\_solomiya@i.ua, slobkolia@gmail.com

Сформулирована и решена задача о двухосном растяжении усилиями на бесконечности изотропной пластины с двумя равными коллинеарными сквозными трещинами, края которых свободны от внешней нагрузки. Предполагается, что под действием внешней нагрузки в вершинах трещин образуются узкие пластические зоны с учетом линейного упрочнения материала, причем между трещинами пластические зоны слились в одну. С использованием методов теории функций комплексного переменного и комплексных потенциалов решение задач сведено к задаче линейного сопряжения, на основе которых получено аналитическое решение задачи в классе функций ограниченных в вершинах пластических зон. Численно определена длина пластических зон и раскрытия краев трещин. Результаты численного анализа представлены графически.

*Ключевые слова:* трещины, растяжение, изотропная пластина, комплексные потенциалы, пластические зоны, укрепления материала.



## BIAXIAL TENSION OF A PLATE WITH TWO EQUAL COLLINEAR CRACKS WITH REGARD FOR STRENGTHENING OF THE MATERIAL AND MERGERS PLASTIC ZONES BETWEEN THEM

<sup>1</sup>Opanasovych V. K., D.Sc. in Physics and Maths, professor,

<sup>2</sup>Nykolyshyn M. M., D.Sc. in Physics and Maths, professor,

<sup>1</sup>Slobodyan M. S., Ph. D. in Physics and Maths, associate professor,

<sup>2</sup>Alfavitska S.O., postgraduate

<sup>1</sup>Ivan Franko National University of Lviv,  
1, Universytetska St., Lviv, 79000, Ukraine

<sup>2</sup>Pidstrygach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,  
National Academy of Sciences of Ukraine,  
3b, Naukova St., Lviv, 79060, Ukraine

kafmech@franko.lviv.ua, alfavitska\_solomiya@i.ua, slobkolia@gmail.com

We investigate the problem of biaxial tension of isotropic plate with two equal collinear through cracks, banks of the cracks are free of load. It is assumed that under the action external load in tops of the cracks will be formed narrow plastic zones taking into account linear strengthening of material, moreover the plastic zones merged into one between cracks. Using methods of theory of complex variable and complex potentials of plane problem of theory elasticity solving the problem is reduced to the problem of linear conjugation. We obtained a solution of the problem in the class of functions bounded at the tips of the plastic zones. We performed a numerical analysis of the problem and construct graphs of dependences of the lengths of plastic zones and opening of crack tip on different parameters of problem.

*Key words: cracks, tension, isotropic plate, complex potentials, plastic zones, strengthening of material.*

### ВСТУП

Пластинчасті елементи конструкцій широко використовуються в різних галузях техніки та промисловості, а за дії зовнішнього навантаження або в процесі їх експлуатації чи виготовлення в них можуть виникнути тріщиноподібні дефекти, що призводять до зниження міцнісних і надійнісних характеристик конструкцій.

У працях [1-3] наведено критерії руйнування та зроблено огляд досліджень, пов'язаних з розтягом пружно-пластичних тіл з тріщинами. У роботі [4] ураховано вплив зміцнення матеріалу на напружений стан пластини з тріщиною. Напружено-деформований стан кусково-однорідної пластини з наскрізною тріщиною у пружно-пластичному формулюванні досліджено у працях [5, 6], з ненаскрізною тріщиною – у статті [7].

У нащій роботі з використанням апарату теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів досліджена задача двовісного розтягу ізотропної пластини з колінеарними наскрізними тріщинами за дії однорідного поля зусиль на нескінченності, у вершинах яких наявні пластичні зони з урахуванням лінійного зміцнення матеріалу, причому пластичні зони між тріщинами злилися.

### ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо однорідну ізотропну пластину, яка містить дві рівні співвісні наскрізні тріщини завдовжки  $2l$ , розміщені вздовж однієї прямої. Пластина знаходиться під дією однорідного поля зусиль на нескінченності  $P$ ,  $q$ , завдяки яким у вершинах тріщин утворилися вузькі пластичні зони з урахуванням лінійного зміцнення матеріалу, причому у внутрішніх вони злилися. Щоб дослідити цю задачу розпишемо спочатку випадок, коли пластичні зони у внутрішніх вершинах тріщин не злилися. Береги тріщини вільні від зовнішнього навантаження. Виберемо декартову систему координат  $Oxy$ , направивши вісь  $Ox$  по прямій, на якій розміщені тріщини, а початок координат розташуємо так, щоб тріщини відносно нього були симетричними. Довжини пластичних зон між тріщинами позначимо через  $w_1$ , зовні тріщин – через  $w_2$ . Лінію, де розміщені тріщини, позначимо через  $L$ , пластичні зони між

тріщинами – через  $L_1$ , зовні – через  $L_2$ , координати кінців тріщин і пластичних зон відповідно – через  $a, b, -a, -b$  і  $c, d, -c, -d$ . Граничне значення відповідних величин при  $y \rightarrow \pm 0$  будемо позначати значками «+» і «-».

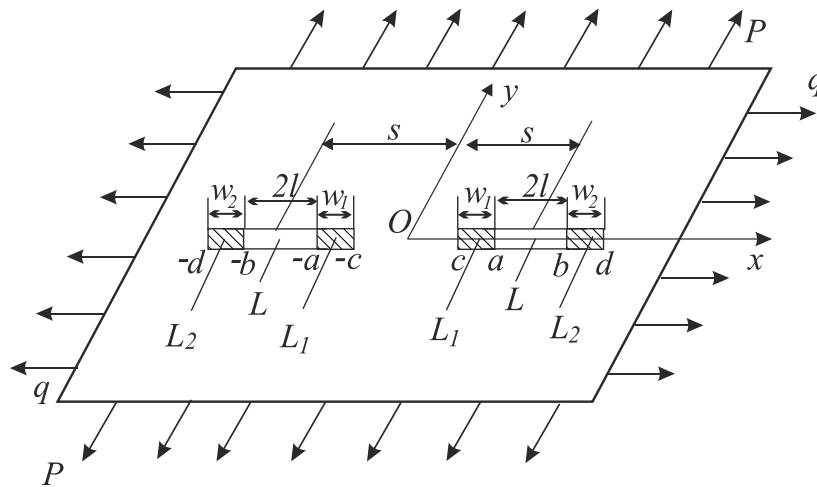


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщин

Крайові умови задачі:

$$\sigma_{yy}^{\pm} = 0, \quad \sigma_{xy}^{\pm} = 0, \quad x \in L, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{\pm} &= \sigma_T \sigma_1^*(x), \quad \sigma_{xy}^{\pm} = 0, \quad x \in L_1, \\ \sigma_{yy}^{\pm} &= \sigma_T \sigma_2^*(x), \quad \sigma_{xy}^{\pm} = 0, \quad x \in L_2, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\sigma_{yy}$  і  $\sigma_{xy}$  – компоненти тензора напружень;

$$\sigma_j^*(x) = a_j |x| + b_j, \quad (j=1,2),$$

де

$$a_1 = -\frac{1-m^*}{a-c}, \quad b_1 = m^* + \frac{(1-m^*)a}{a-c}, \quad a_2 = \frac{1-m^*}{d-b}, \quad b_2 = m^* - \frac{(1-m^*)b}{d-b}, \quad m^* = \frac{\sigma_B}{\sigma_T},$$

$\sigma_B$  і  $\sigma_T$  – границя міцності та границя текучості матеріалу пластини.

### ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ

Введемо комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі  $\Phi(z)$  і  $\Omega(z)$  [8], та скористаємося залежностями:

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (3)$$

$$2\mu\partial_x(u + iv) = \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\Phi'(z), \quad (4)$$

$$z = x + iy, \quad i^2 = -1, \quad \kappa = (3-\nu)/(1+\nu), \quad \partial_\alpha f = \partial f / \partial \alpha,$$

де  $\mu = 0.5E/(1+\nu)$  – модуль зсуву,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона матеріала пластини,  $u$  і  $v$  – компоненти вектора переміщення по осях  $Ox$  і  $Oy$ .

Комплексні потенціали при великих  $|z|$  можна подати у вигляді [8]

$$\Phi(z) = \Gamma + O(1/z^2), \quad \Omega(z) = \Gamma + \Gamma' + O(1/z^2), \quad (5)$$

де

$$\Gamma = \frac{1}{4}(P+q), \quad \Gamma' = \frac{1}{2}(P-q).$$

З крайових умов (1), (2) маємо

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^+ - (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^- = 0, \quad x \in \tilde{\gamma}, \quad \tilde{\gamma} = L + L_1 + L_2, \quad (6)$$

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^+ + (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^- = \begin{cases} 0, & x \in L, \\ 2\sigma_T\sigma_1^*(x), & x \in L_1, \\ 2\sigma_T\sigma_2^*(x), & x \in L_2. \end{cases} \quad (7)$$

Якщо врахувати (3), то крайові умови (6), (7) набудуть вигляду

$$(\Phi(x) - \Omega(x))^+ - (\Phi(x) - \Omega(x))^- = 0, \quad x \in \tilde{\gamma}, \quad (8)$$

$$(\Phi(x) - \Omega(x))^+ + (\Phi(x) - \Omega(x))^- = f_1(x) = 2 \begin{cases} 0, & x \in L, \\ \sigma_T\sigma_1^*(x), & x \in L_1, \\ 2\sigma_T\sigma_2^*(x), & x \in L_2. \end{cases} \quad (9)$$

Урахувавши (5) та розв'язавши задачу лінійного спряження (8), одержимо

$$\Phi(z) - \Omega(z) = -\Gamma'. \quad (10)$$

Розв'язок задачі лінійного спряження (9) шукатимемо у вигляді, обмеженому у вершинах пластичних зон функцій

$$\Phi(z) + \Omega(z) = \frac{X_1(z)}{\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{f_1(t) dt}{X_1^+(t)(t-z)}, \quad (11)$$

де

$$X_1(z) = \sqrt{(z^2 - d^2)(z^2 - c^2)}.$$

Урахувавши (5), на основі (11) можемо записати

$$P = -\frac{1}{\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{tf_1(t) dt}{X_1^+(t)}. \quad (12)$$

Після обчислення інтегралів у (12) [9] отримаємо

$$P = \frac{2\sigma_T a_2}{\pi} dE(\lambda, q) + \frac{2\sigma_T a_1}{\pi} \left( dE(\beta, q) - \frac{1}{a} \sqrt{(d^2 - a^2)(a^2 - c^2)} \right) + \frac{\sigma_T b_2}{\pi} \arccos\left(\frac{2b^2 - d^2 - c^2}{d^2 - c^2}\right) + \frac{\sigma_T b_1}{\pi} \arccos\left(\frac{d^2 - c^2 - 2a^2}{d^2 - c^2}\right), \quad (13)$$

де

$$\lambda = \sqrt{\frac{d^2 - b^2}{d^2 - c^2}}, \quad \beta = \arcsin\left(\frac{d}{a} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{d^2 - c^2}}\right), \quad q = \frac{\sqrt{d^2 - c^2}}{d}.$$

Розв'язавши систему алгебричних рівнянь (10) і (11) відносно  $\Phi(z)$ , матимемо

$$\Phi(z) = -\frac{\Gamma'}{2} + \frac{X_1(z)}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{f_1(t) dt}{X_1^+(t)(t-z)}. \quad (14)$$

Умова однозначності переміщень при обході контуру тріщини з пластичними зонами має вигляд

$$\int_c^d \left( (u+iv)'_x^+ - (u+iv)'_x^- \right) dx = 0, \quad (15)$$

де

$$(u+iv)'_x^+ - (u+iv)'_x^- = \frac{(1+\kappa)}{2\mu} \frac{X_1^+(x)}{\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{f_1(t) dt}{X_1^+(t)(t-x)}, \quad x \in [c, d]. \quad (16)$$

Розглянемо випадок двовісного розтягу пластини з двома рівними співвісними тріщинами, коли внутрішні пластичні зони злилися, тобто  $c=0$  (див. рис. 2).

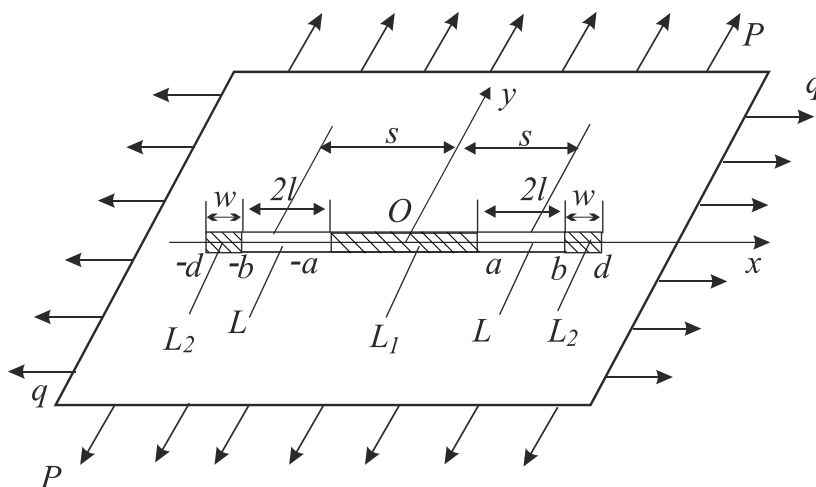


Рис. 2. Схема навантаження пластини та розміщення тріщин, коли пластичні зони злилися

Функція  $\sigma_1^*$  набуде вигляду

$$\sigma_1^*(x) = m^* + (1-m^*)(a-|x|)/a, \quad x \in L_1, \quad (17)$$

а вираз для функції  $\sigma_2^*$  залишається без змін.

У цьому випадку будуть мати місце крайові умови (6) і (7) та задачі лінійного спряження (8) і (9), розв'язки яких будуть також даватися формулами (10) і (11), причому

$$X_1(z) = \sqrt{z^2 - d^2}. \quad (18)$$

Також має місце залежність (12), з якої, після врахування (18) і обчислення інтегралів [9], отримаємо

$$\frac{P\pi}{2\sigma_Y} = \left( -\sqrt{d^2 - a^2} + d \right) a_1 + b_1 \arcsin \frac{a}{d} + a_2 \sqrt{d^2 - b^2} + b_2 \arccos \frac{b}{d}, \quad (19)$$

де  $a = s - l$ ,  $b = s + l$ ,  $d = s + l + w$ ,  $w$  – довжина пластичної зони у крайніх вершинах тріщини.

Розкриття берегів тріщини у її вершинах у цьому випадку визначимо за формулами

$$\delta_b = \text{Im} \int_d^b \frac{1+\kappa}{2\mu} (\Phi^+(x) - \Phi^-(x)) dx, \tag{20}$$

$$\delta_a = \text{Im} \int_d^a \frac{1+\kappa}{2\mu} (\Phi^+(x) - \Phi^-(x)) dx,$$

де функція  $\Phi(z)$  визначається за формулою (14), урахувавши (18).

### ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ТА ВИСНОВКИ

Був проведений числовий аналіз задачі для  $\nu=0.3$ ,  $m^*=1.2$ , який поданий на рис. 2-3, де використані такі позначення:  $\tilde{w} = w/l$ ,  $\tilde{P} = P/\sigma_Y$ ,  $\tilde{s} = s/l$ .

На основі числового розв’язку задачі для двох співвісних тріщин отримано, що пластичні зони у внутрішніх вершинах тріщин зіллються, коли  $\tilde{s} = s^*$ ,  $\tilde{P} = P^*$ ,  $\tilde{w} = w^*$  і їх значення наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

$s^*$	$P^*$	$w^*$
1.7	0.5275	0.4593
2	0.6165	0.6989
2.5	0.7140	1.1098

На рис. 3 зображена графічна залежність відносної довжини пластичної зони  $\tilde{w}$  від безрозмірного зовнішнього навантаження  $\tilde{P} > P^*$ , причому крива 1 побудована при  $s^* = 1.7$ , крива 2 – при  $s^* = 2$ , крива 3 – при  $s^* = 2.5$ . З рис. 3 бачимо, що при збільшенні безрозмірного зовнішнього навантаження  $\tilde{P}$  чи  $\tilde{s}$  довжина пластичної зони  $\tilde{w}$  збільшується.

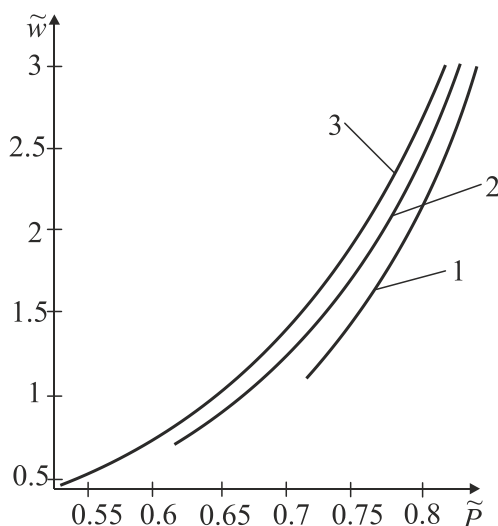


Рис. 3. Графічна залежність відносної довжини пластичної зони  $\tilde{w}$  від безрозмірного зовнішнього навантаження  $\tilde{P}$

На рис. 4 і рис. 5 зображена графічна залежність зведеного розкриття  $\tilde{\delta}_a = \delta_a E / (l \sigma_Y)$ ,  $\tilde{\delta}_b = \delta_b E / (l \sigma_Y)$  від відносної відстані між центрами тріщин  $\tilde{s}$  відповідно, причому криві 1 побудовані при  $\tilde{w} = 0.4593$  ( $s^* = 1.7$ ), криві 2 – при  $\tilde{w} = 0.6989$  ( $s^* = 2$ ), криві 3 – при  $\tilde{w} = 1.1098$  ( $s^* = 2.5$ ).

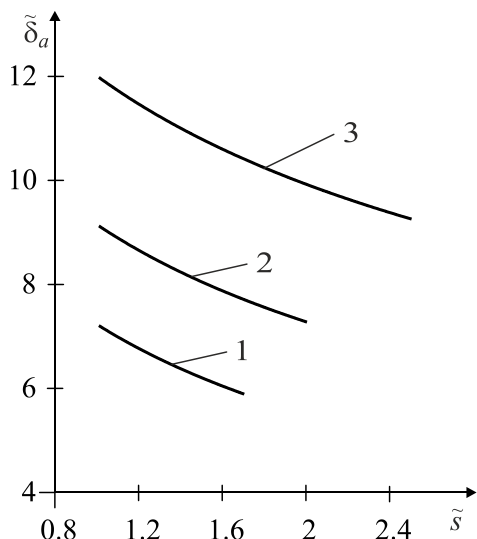


Рис. 4. Графічна залежність зведеного розкриття  $\tilde{\delta}_a$  від відстані між центрами тріщин  $\tilde{s}$

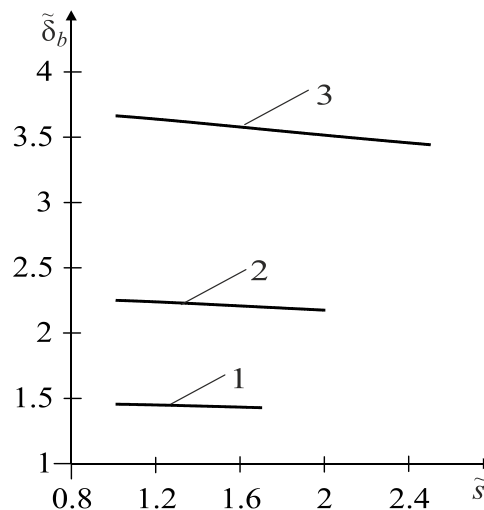


Рис. 5. Графічна залежність зведеного розкриття  $\tilde{\delta}_b$  від відстані між центрами тріщин  $\tilde{s}$

На основі цих рисунків можна дійти висновку, що розкриття берегів тріщини у вершині  $a$  є більші, ніж у вершині  $b$ , причому з ростом  $s^*$  вони зростають.

Зауважимо, що зусилля  $q$  не впливають на пружно-пластичний стан пластини.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Витвицкий П. М., Панасюк В. В., Ярема С. Я. Пластические деформации в окрестности трещин и критерии разрушения (Обзор). *Пробл. прочности*. 1973. № 2. С. 3–18.
2. Панасюк В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наук. думка, 1991. 416 с.
3. Панасюк В. В., Саврук М. П. Модель смуг пластичності в пружно-пластичних задачах механіки руйнування. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 1992. 28, №1. С. 49–68.
4. Каминский А. А., Галатенко Г. В. Исследования роста усталостных трещин в материалах с упрочнением. *Прикл. механика*. 1984. 20, № 4. С. 54–60.
5. Николишин М. М., Опанасович В. В., Куротчин Л. Р., Слободян М. С. Знаходження довжини пластичних зон біля вершини наскрізної тріщини на прямолінійній межі поділу матеріалів при розтязі кусково-однорідної ізотропної пластини. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. 2012. Вип. 13. С. 294–300.
6. Николишин М. М., Опанасович В. В., Куротчин Л. Р. Двовісний розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з тріщиною на прямолінійній межі поділу матеріалів з урахуванням пластичних зон біля їх вершин. *Прикл. проблеми мех. і мат.* 2006. Вип. 4. С. 101–108.
7. Николишин М. М., Опанасович В. В., Куротчин Л. Р., Слободян М. С. Двовісний розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів та ненаскрізною тріщиною в ній з урахуванням пластичних зон біля її вершин. *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат.* 2012. Вип. 72. С. 29–45.
8. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 708 с.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Наука, 1971. 1100 с.

#### REFERENCES

1. Vitvits'kiy, P. M., Panasyuk, V. V. & Yarema, S. Ya. (1973). Plastic deformations in the vicinity of cracks and destruction criteria (Review). *Problemy prochnosti*, No. 2, pp. 3-18.
2. Panasyuk, V. V. (1991). *Mechanics of quasibrittle fracture of materials*. Kiev: Naukova dumka.
3. Panasyuk, V. V. & Savruk, M. P. (1992). Model of plasticity strips in elastic-plastic problems of fracture mechanics. *Fiz.-khim. mekhanika materialiv*, 28, No. 1, pp. 49-68.
4. Kamins'kiy, A. A. & Galatenko, G. V. (1984). Studies of the growth of fatigue cracks in materials with hardening. *Prikl. Mekhanika*, 20, No. 4, pp. 54-60.
5. Nykolyshyn, M. M., Opanasovych, V. V., Kurotchyn, L. R. & Slobodyan, M. S. (2012). Finding the length of plastic zones near the top of the through cracks on the straight line of the separation of materials during the tensile of a piecewise homogeneous isotropic plate. *Metody rozv'yazuvannya prykladnykh zadach mekhaniky deformivnoho tverdoho tila*, Iss. 13, pp. 294-300.

6. Nykolyshyn, M. M., Opanasovych, V. V. & Kurotchyn, L. R. (2006). Double-tensile stretch of a piecewise homogeneous isotropic plate with a crack on the straight line of the separation of materials, taking into account the plastic zones near their vertices. *Prykl. problemy mekh. i mat.*, Iss. 4, pp. 101-108.
7. Nykolyshyn, M. M., Opanasovych, V. V., Kurotchyn, L. R. & Slobodyan, M. S. (2012). Double-tensile stretch of a piecewise homogeneous isotropic plate with a straight-line boundary between the materials and a non-cross-sectional crack in it, taking into account the plastic zones at its vertices. *Visnyk L'viv. un-tu. Seriya mekh.-mat.*, Iss. 72, pp. 29-45.
8. Muskhelishvili, N. I. (1966). *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Moscow: Nauka.
9. Gradshteyn, I. S. & Ryzhik, I. M. (1971). *Tables of integrals, sums, series and products*. Moscow: Nauka.

УДК 393.3

## ПРО ПІДХІД ДО ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПЛАСТИНИ З ОТВОРАМИ ТА ПРЯМОЛІНІЙНОЮ НАСКРІЗНОЮ ТРИЩИНОЮ

Опанасович В. К., д. ф.-м. н., професор, Слободян М. С., к. ф.-м. н., доцент,  
Ярема Є. Б., аспірант

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

kafmech@franko.lviv.ua, slob@yandex.ru, evhenkozak@mail.ru

У роботі запропоновано підхід до дослідження напружено-деформованого стану пластини з прямолінійною наскрізною тріщиною та двома отворами довільної форми, яка знаходиться під дією однорідного поля зусиль на нескінченності. Використовуючи методи теорії функцій комплексної змінної та комплексні потенціали Колосова-Мухелішвілі, розв'язок задачі зведено до сингулярних інтегральних рівнянь на отворах, а на берегах прямолінійної тріщини крайові умови задовольняються аналітично. Проведено числовий аналіз коефіцієнтів інтенсивності напружень, який подано графічно, при різних значеннях параметрів задачі, коли отвори мають форму круга, еліпса та прямокутника, а в часткових випадках отримано відомі результати.

*Ключові слова: пластина, прямолінійна тріщина, криволінійні отвори, комплексні потенціали, коефіцієнти інтенсивності напружень.*

## О ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИНЫ С ОТВЕРСТИЯМИ И ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ СКВОЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Опанасович В. К., д. ф.-м. н., професор, Слободян Н. С., к. ф.-м. н., доцент,  
Ярема Е. Б., аспірант

*Львовский национальный университет им. Ивана Франко,  
ул. Университетская, 1, г. Львов, 79000, Украина*

kafmech@franko.lviv.ua, slob@yandex.ru, evhenkozak@mail.ru

В работе предложен подход к исследованию напряженно-деформированного состояния пластины с прямолинейной сквозной трещиной и двумя отверстиями произвольной формы, которая находится под действием однородного поля усилий на бесконечности. Используя методы теории функций комплексного переменного и комплексные потенциалы Колосова-Мухелишвили, решение задачи сведено к сингулярным интегральным уравнениям на отверстиях, а на берегах прямолинейной трещины краевые условия удовлетворяются аналитически. Проведен численный анализ коэффициентов интенсивности напряжений, который представлен графически, при различных значениях параметров задачи, когда отверстия имеют форму круга, эллипса и прямоугольника, а в частных случаях получены известные результаты.

*Ключевые слова: пластина, прямолинейная трещина, криволинейные отверстия, комплексные потенциалы, коэффициенты интенсивности напряжений.*

## ABOUT APPROACH TO THE STUDY OF STRESS-STRAIN STATE OF THE PLATE WITH HOLES AND STRAIGHT-THROUGH CRACK

Opanasovich V. K., D. Sc. in Physics and Maths., professor,  
Slobodyan M. S., Ph. D. in Physics and Maths., associate professor, Yarema Y. B., postgraduate

*Ivan Franko National University of Lviv,  
1, Universytetska St., Lviv, 79000, Ukraine*

kafmech@franko.lviv.ua, slob@yandex.ru, evhenkozak@mail.ru

Plate structural elements are widely used in various industries and technology. From structural considerations they may contain holes of different shapes. In the operation they may turn up cracks that significantly reduce the permissible load, resulting in reduced structural strength.

In this paper we investigate the biaxial tensile plate with two holes of arbitrary shape, and one straight-through crack, which are free from external loads.

In most operations, which deals with the problem of this type of solution was reduced to integral equations on the holes and on the crack. In this paper, using methods of the theory of complex variable and complex potentials Kolosov-Muskhelishvili,  $\Phi(z)$  and  $\Psi(z)$ , which looks like:

$$\Phi(z) = \Gamma + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \Gamma' + \Psi_1(z) + \Psi_2(z),$$

where  $\Gamma$  and  $\Gamma'$  – known constants associated with stress stain at infinity.

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{g(u) du}{u-z}, \quad \Psi_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \left[ \frac{g(u) d\bar{u}}{u-z} + \frac{\bar{u}g(u) du}{(u-z)^2} \right],$$

$g(u)$  – finding function on the holes  $L_1$ , to determine which obtained on  $L_1$  singular integral equations, functions  $\Phi_2(z)$  and  $\Psi_2(z)$ , responsible for the crack is found on the basis of linear conjugation problems that solved analytically.

Integral equations solved numerical and conducted a numerical analysis of stress intensity factors, which presented graphically for different values of parameters of the problem when the holes are in the shape of a circle, ellipse and rectangle.

*Key words: plate, rectilinear crack, curved holes, complex potentials, stress intensity factors.*

### ВСТУП

Пластинчасті елементи конструкцій широко використовуються в машинобудуванні та інших галузях промисловості. Вони з конструктивних міркувань можуть містити отвори, а в процесі експлуатації в них можуть виникнути тріщини, які різко знижують діапазон допустимого навантаження. Тому важливо знати, як такі дефекти впливають на міцність та довговічність конструкцій. Дослідженням напруженого стану тонкостінних елементів конструкцій, які містять тріщини і отвори, займалось чимало дослідників, що відображено в монографіях [1-8] та довідниках [9, 10]. Переважно в більшості робіт розв'язування задач з такими дефектами зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь як на отворах, так і на тріщинах, розв'язування яких будувалось числово з використанням відповідних квадратурних формул.

В нашій роботі досліджено напружено-деформований стан пластинчастого елемента конструкцій за наявності в ньому двох гладких отворів довільної форми та прямолінійної наскрізної тріщини, які вільні від зовнішнього навантаження, а на нескінченності пластина знаходиться під дією рівномірно розподіленого поля зусиль. Використовуючи методи теорії функцій комплексної змінної та комплексні потенціали, розв'язок задачі зведено до сингулярних інтегральних рівнянь на криволінійних отворах, а на берегах прямолінійної тріщини крайові умови задовольняються аналітично. Проведено числовий аналіз коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) при різних значеннях параметрів задачі для кругових, еліптичних та прямокутних отворів, а в часткових випадках отримано числові результати, які наведено в науковій літературі.



### ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Дослідимо напружено-деформований стан пластини з двома криволінійними отворами та прямолінійною наскрізною тріщиною завдовжки  $2l$ . Тріщина та отвори вільні від зовнішнього навантаження. Крім того, на нескінченності пластини знаходиться під дією рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю  $p_1$  і  $p_2$ , які є взаємно перпендикулярні, причому зусилля  $p_1$  утворює кут  $\alpha$  з віссю симетрії тріщини.

Уведемо в дослідження декартову систему координат  $Oxy$  з початком координат у центрі тріщини, направивши вісь  $Ox$  вздовж неї. З  $L'_j$  отвором зв'язуємо локальну систему координат  $O_jx'_jy'_j$ , ( $j=1,2$ ), з початком координат  $O_j$  в середині отвору із координатами  $c_j$  і  $d_j$ , причому вісь  $O_jx'_j$  утворює кут  $\beta_j$  з віссю (див. рис. 1). Лінію, де розміщена тріщина, позначимо через  $L$ , а межу отворів – через  $L_1 = \tilde{L}'_1 + \tilde{L}'_2$ .

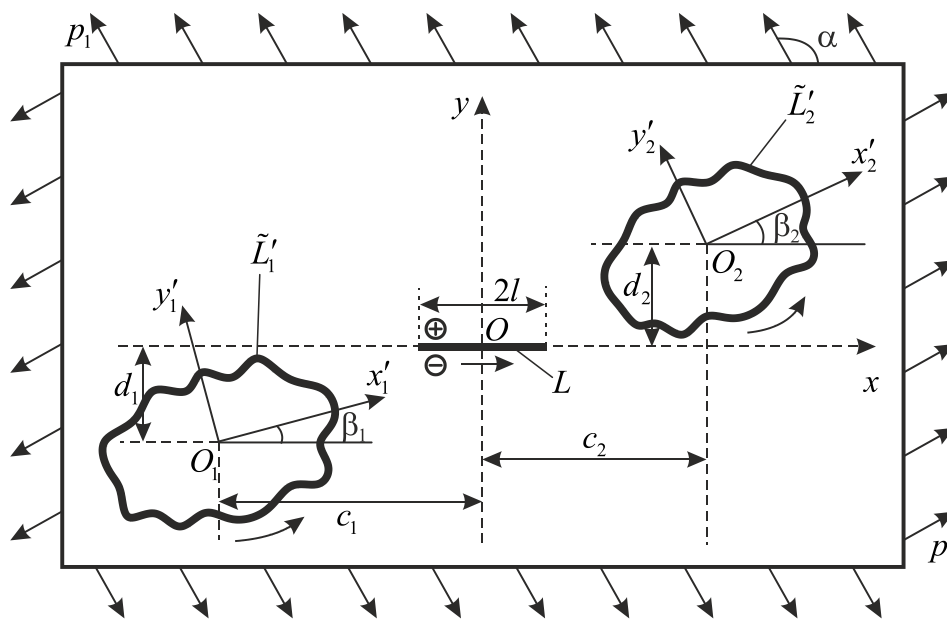


Рис. 1. Схема розміщення отворів, тріщини та навантаження

Згідно з формулюванням задачі, маємо такі крайові умови:

$$\sigma_{yy}^{\pm}(x) - i\sigma_{xy}^{\pm}(x) = 0, \quad x \in L, \tag{20}$$

$$N(t_j) + iT(t_j) = 0, \quad t_j \in \tilde{L}'_j, \quad (j=1,2), \tag{21}$$

де  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  – компоненти тензора напружень у декартовій системі координат  $Oxy$ ,  $N$  і  $T$  – відповідно нормальна та дотична компонента зовнішнього навантаження на  $L_1$ , значками «+» та «-» позначено граничне значення відповідної величини при прямуванні точки площини до лінії справа і зліва по відношенню до заданого напрямку, що вказано на рис. 1.

### ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ

Уведемо в дослідження комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі  $\Phi(z)$  і  $\Psi(z)$ . Тоді для визначення компонент тензора напружень  $\sigma_{yy}$  і  $\sigma_{xy}$  та нормальної  $N$  і дотичної  $T$  складової напруження на  $L_1$  будемо мати співвідношення [11]:

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}, \tag{22}$$

$$N + iT = \Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + \frac{dt}{dt} \left[ t \overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)} \right], \quad t \in L_1. \quad (23)$$

Надалі криволінійні отвори замінюємо криволінійними тріщинами  $L'_j$  того самого обрису, що й отвір з малою відстанню між вершинами.

Комплексні потенціали  $\Phi(z)$  і  $\Psi(z)$  подамо у вигляді:

$$\Phi(z) = \Gamma + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \Gamma' + \Psi_1(z) + \Psi_2(z), \quad (24)$$

де функції  $\Phi_1(z)$  і  $\Psi_1(z)$ , згідно з [1], подамо так:

$$\Phi_1(z) = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{L'_k} \frac{g_k(u) du}{u-z}, \quad \Psi_1(z) = -\sum_{k=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{L'_k} \left[ \frac{\overline{g_k(u) d\bar{u}}}{u-z} + \frac{\bar{u} g_k(u) du}{(u-z)^2} \right], \quad (25)$$

$g_k(u)$  – шукані функції,  $z = x + iy$ ,  $i^2 = -1$ , функції  $\Phi_2(z)$  і  $\Psi_2(z)$  – голоморфні поза прямолінійною тріщиною,

$$\Gamma = \frac{1}{4}(p+q), \quad \Gamma' = -\frac{1}{2}(p-q)e^{-2i\alpha},$$

крім того, має місце залежність:

$$\int_{L'_k} g_k(u) du = 0, \quad (26)$$

що визначає собою однозначність переміщень при обході контура криволінійної тріщини.

Уведемо в дослідження функцію:

$$\Omega_2(z) = \overline{\Phi_2(z)} + z \overline{\Phi_2'(z)} + \overline{\Psi_2(z)}, \quad (27)$$

де  $\overline{\Phi}(z) = \Phi(\bar{z})$ ,  $\bar{z} = x - iy$ .

Урахувавши (5) і (8), залежність (3) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = & \Phi_2(z) + \Omega_2(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi_2'(z)} + \Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} + \\ & + z \overline{\Phi_1'(z)} + \overline{\Psi_1(z)} + 2\Gamma + \overline{\Gamma'}. \end{aligned} \quad (28)$$

На основі (1) можемо записати:

$$(\sigma_{yy}(x) - i\sigma_{xy}(x))^+ - (\sigma_{yy}(x) - i\sigma_{xy}(x))^- = 0, \quad x \in L. \quad (29)$$

Якщо врахувати (9), то (10) можемо подати так:

$$(\Phi_2(x) - \Omega_2(x))^+ - (\Phi_2(x) - \Omega_2(x))^- = 0, \quad x \in L. \quad (30)$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (11) та врахувавши поведінку функцій  $\Phi_2(z)$  і  $\Psi_2(z)$  при великих  $|z|$ , одержимо:

$$\Phi_2(z) = \Omega_2(z). \quad (31)$$

З крайової умови (1) отримаємо:

$$(\sigma_{yy}(x) - i\sigma_{xy}(x))^+ + (\sigma_{yy}(x) - i\sigma_{xy}(x))^- = 0, \quad x \in L. \quad (32)$$

Якщо врахувати (9), (6) і (12), (13), можемо отримати:

$$\Phi_2^+(x) + \Phi_2^-(x) = f(x), \quad x \in L, \tag{33}$$

де

$$f(x) = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \left\{ \overline{g_k(u_k)} \left[ \frac{1}{u_k - x} + \frac{x}{(\overline{u_k} - x)^2} - \frac{u_k}{(\overline{u_k} - x)^2} \right] d\overline{u_k} - \right. \\ \left. - g_k(u_k) \left[ \frac{1}{u_k - x} + \frac{1}{\overline{u_k} - x} \right] du_k \right\} - 2\Gamma - \overline{\Gamma}'. \tag{34}$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (14) та врахувавши поведінку функції  $\Phi_2(z)$  при великих  $|z|$ , одержимо:

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{f(x) X^+(x) dx}{x - z}, \tag{35}$$

де

$$X(z) = \sqrt{z^2 - l^2}. \tag{36}$$

Оскільки мають місце залежності [11]:

$$\int_L \frac{X^+(x) dx}{x - z} = \pi i (X(z) - z), \quad \int_L \frac{X^+(x) dx}{(x - z)^2} = \pi i \left( \frac{z}{X(z)} - 1 \right), \tag{37}$$

то функція  $\Phi_2(z)$  (16), урахувавши (18), набуде вигляду:

$$\Phi_2(z) = - \left( \Gamma + \frac{\overline{\Gamma}'}{2} \right) \left( 1 - \frac{z}{X(z)} \right) - \sum_{k=1}^2 \frac{1}{4\pi i X(z)} \int_{L_k} \left\{ g_k(u_k) \left[ \frac{X(z) - X(u_k)}{u_k - z} + \frac{X(z) - X(\overline{u_k})}{\overline{u_k} - z} \right] du_k - \right. \\ \left. - \overline{g_k(u_k)} \left[ \frac{(\overline{u_k} - u_k)}{(\overline{u_k} - z)} \left( \frac{X(z) - X(\overline{u_k})}{\overline{u_k} - z} + \frac{\overline{u_k}}{X(\overline{u_k})} \right) \right] d\overline{u_k} \right\}. \tag{38}$$

Визначивши функцію  $\overline{\Psi_2(z)}$  із залежності (8) та врахувавши (5), формулу (4) можна подати так:

$$N + iT = \Phi_1(t_j) + \overline{\Phi_1(t_j)} + \frac{dt_j}{dt_j} \left[ t_j \overline{\Phi_1'(t_j)} + \overline{\Psi_1(t_j)} \right] + \Phi_2(t_j) + \frac{dt_j}{dt_j} \Phi_2(t_j) + \\ + \left( 1 - \frac{dt_j}{dt_j} \right) \overline{\Phi_2(t_j)} + (t_j - \overline{t_j}) \frac{dt_j}{dt_j} \overline{\Phi_2'(t_j)} + 2\Gamma + \frac{dt_j}{dt_j} \overline{\Gamma}', \quad t_j \in L_1. \tag{39}$$

З крайової умови (2) отримаємо:

$$(N(t_j) - iT(t_j))^+ + (N(t_j) - iT(t_j))^- = 0, \quad t_j \in L'_j. \tag{40}$$

Беручи до уваги (20), (19), (6), з (21) одержимо систему двох сингулярних інтегральних рівнянь для знаходження шуканих функцій  $g_1(u_1)$  та  $g_2(u_2)$ :

$$\sum_{k=1}^2 \int_{L'_k} \left[ g_k(u_k) K_{kj}(u_k, t_j) du_k + \overline{g_k(u_k)} M_{kj}(u_k, t_j) d\overline{u_k} \right] = \rho_j(t_j), \quad t_j \in L'_j, \quad (j=1,2), \quad (41)$$

де

$$\rho_j(t_j) = -\Gamma \left[ \frac{t_j}{X(t_j)} + \frac{\overline{t_j}}{X(t_j)} - (t_j - \overline{t_j}) \frac{dt_j}{dt_j} \frac{l^2}{X(t_j)(\overline{t_j}^2 - l^2)} \right] - \overline{\Gamma} \left[ \frac{dt_j}{dt_j} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{t_j}{X(t_j)} \right) - \left( 1 - \frac{\overline{t_j}}{X(t_j)} \right) \frac{1}{2} \frac{dt_j}{dt_j} \right] + \frac{1}{2} \Gamma' \left[ \left( 1 - \frac{dt_j}{dt_j} \right) \left( 1 - \frac{\overline{t_j}}{X(t_j)} \right) + (t_j - \overline{t_j}) \frac{dt_j}{dt_j} \frac{l^2}{X(t_j)(\overline{t_j}^2 - l^2)} \right], \quad (42)$$

$$K_{kj}(u_k, t_j) = \frac{1}{2\pi i} \left[ \frac{1}{u_k - t_j} + \frac{dt_j}{dt_j} \frac{1}{u_k - \overline{t_j}} \right] - \frac{1}{4\pi i} \left\{ \frac{1}{X(t_j)} \left[ \frac{X(t_j) - X(u_k)}{u_k - t_j} + \frac{X(t_j) - \overline{X(u_k)}}{u_k - \overline{t_j}} \right] + \frac{1}{X(t_j)} \frac{dt_j}{dt_j} \left[ \frac{\overline{X(t_j)} - X(u_k)}{u_k - \overline{t_j}} + \frac{\overline{X(t_j)} - \overline{X(u_k)}}{u_k - t_j} \right] + \frac{1}{X(t_j)} \left\{ \left( 1 - \frac{dt_j}{dt_j} \right) \frac{u_k - \overline{u_k}}{u_k - t_j} \times \left( \frac{\overline{X(t_j)} - X(u_k)}{u_k - \overline{t_j}} + \frac{u_k}{X(u_k)} \right) - (t_j - \overline{t_j}) \frac{dt_j}{dt_j} \left[ \frac{\overline{t_j}}{(\overline{t_j}^2 - l^2)} \frac{u_k - \overline{u_k}}{u_k - t_j} \left( \frac{\overline{X(t_j)} - X(u_k)}{u_k - \overline{t_j}} + \frac{u_k}{X(u_k)} \right) - \frac{u_k - \overline{u_k}}{(u_k - \overline{t_j})^2} \left( \frac{2(\overline{X(t_j)} - X(u_k))}{u_k - t_j} + \frac{\overline{t_j}}{X(t_j)} + \frac{u_k}{X(u_k)} \right) \right] \right\} \right\}, \quad (43)$$

$$M_{kj}(u_k, t_j) = -\frac{1}{2\pi i} \left[ \frac{1}{u_k - t_j} + \frac{dt_j}{dt_j} \frac{t_j - u_k}{(u_k - \overline{t_j})^2} \right] + \frac{1}{4\pi i} \left\{ \frac{1}{X(t_j)} \frac{\overline{u_k} - u_k}{u_k - t_j} \left( \frac{X(t_j) - \overline{X(u_k)}}{u_k - t_j} + \frac{\overline{u_k}}{X(u_k)} \right) + \frac{1}{X(t_j)} \left\{ \frac{dt_j}{dt_j} \frac{\overline{u_k} - u_k}{u_k - t_j} \left( \frac{\overline{u_k}}{X(u_k)} + \frac{\overline{X(t_j)} - X(u_k)}{u_k - \overline{t_j}} \right) + \left( 1 - \frac{dt_j}{dt_j} \right) \left( \frac{X(t_j) - \overline{X(u_k)}}{u_k - \overline{t_j}} + \frac{\overline{X(t_j)} - X(u_k)}{u_k - t_j} \right) + (t_j - \overline{t_j}) \frac{dt_j}{dt_j} \left[ \frac{1}{u_k - t_j} \left( \frac{X(t_j) - \overline{X(u_k)}}{u_k - \overline{t_j}} + \frac{\overline{t_j}}{X(t_j)} \right) + \frac{1}{u_k - t_j} \left( \frac{\overline{t_j}}{X(t_j)} + \frac{\overline{X(t_j)} - X(u_k)}{u_k - \overline{t_j}} \right) - \frac{\overline{t_j}}{t_j^2 - l^2} \left( \frac{X(t_j) - \overline{X(u_k)}}{u_k - \overline{t_j}} + \frac{\overline{X(t_j)} - X(u_k)}{u_k - t_j} \right) \right] \right\} \right\}. \quad (44)$$

КІН знайдемо за формулою [9]:

$$k_1^\pm - ik_2^\pm = 2 \lim_{x \rightarrow \pm l} \left[ \sqrt{2\pi|x \mp l|} \Phi_2(x) \right]. \quad (45)$$

Узявши до уваги (5), (6), (19), (17), залежність (26) набуде вигляду:

$$k_1^\pm - ik_2^\pm = 2\sqrt{\pi l} \left\{ \left( \Gamma + \frac{\bar{\Gamma}'}{2} \right) \pm \frac{1}{4\pi i l} \int_{L'_k} \left\{ 2g_k(u_k) \operatorname{Re} \left[ \frac{X(u_k)}{u_k \mp l} \right] du_k - \right. \right. \\ \left. \left. - \overline{g_k(u_k)} \left[ \frac{2 \operatorname{Im}(u_k)}{(u_k \mp l)} \left( \frac{\bar{u}_k}{X(u_k)} - \frac{\overline{X(u_k)}}{u_k \mp l} \right) \right] du_k \right\} \right\}. \quad (46)$$

Нехай у системі координат  $O_k x'_k y'_k$  рівняння лінії  $\tilde{L}'_k$  задається рівнянням  $t'_j = x'_j + iy'_j = \omega_j(\theta_j) = \tilde{\omega}_j(e^{i\theta_j})$ ,  $0 < \theta_j \leq 2\pi$ , де функція  $\tilde{\omega}_j(\xi_j)$  конформно відображає зовнішність одиничного кола на зовнішність контура  $\tilde{L}'_k$  у цій системі координат. Тоді рівняння контура  $\tilde{L}'_k$  у системі координат  $Oxy$  буде мати вигляд:

$$t_j(\theta_j) = z_j + e^{i\beta_j} \omega_j(\theta_j), \quad 0 < \theta_j \leq 2\pi, \quad z_j = c_j + id_j, \quad (47)$$

$$u_k(v_k) = z_k + e^{i\beta_k} \omega_k(v_k), \quad 0 < v_k \leq 2\pi, \quad (48)$$

В інтегральному рівнянні (22) робимо заміни (28) і (29), у результаті отримаємо:

$$\sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi-\delta} \left[ \tilde{g}_k(v_k) \tilde{K}_{kj}(v_k, \theta_j) dv_k + \overline{\tilde{g}_k(v_k)} \tilde{M}_{kj}(v_k, \theta_j) dv_k \right] = \tilde{\rho}_j(\theta_j), \quad 0 \leq \theta_j \leq 2\pi - \delta, \quad (49)$$

де

$$\tilde{K}_{kj}(v_k, \theta_j) = K_{kj}(u_k(v_k), t_j(\theta_j)), \quad \tilde{M}_{kj}(v_k, \theta_j) = M_{kj}(u_k(v_k), t_j(\theta_j)), \\ \tilde{\rho}_j(\theta_j) = \rho_j(t_j(\theta_j)), \quad \tilde{g}_k(v_k) = g_k(u_k(v_k)) \omega'_k(v_k), \quad (50)$$

$\delta$  – параметр, який характеризує малу відстань між вершинами тріщин.

Рівняння (31) доповнимо умовою:

$$\int_0^{2\pi-\delta} \tilde{g}_k(v_k) dv_k = 0. \quad (51)$$

Систему інтегральних рівнянь (30), (32) розв'язуємо числово за допомогою методу механічних квадратур [2], зробивши в них відповідні заміни та перейшовши до проміжку інтегрування  $[-1, 1]$ .

### ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ТА ВИСНОВКИ

Був проведений числовий аналіз задачі для двовісного розтягу пластини зусиллями  $p_1$  і  $p_2$ , коли  $\alpha = \pi/2$ ,  $\beta_j = 0$ , ( $j=1, 2$ ) для еліптичних та прямокутних отворів, коли відображуючі функції  $\omega_k(v_k)$ , ( $k=1, 2$ ) для еліптичного отвору мають вигляд [11]:

$$\omega_k(v_k) = R_k (e^{iv_k} + m_k e^{-iv_k}), \quad R_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k), \quad m_k = \frac{a_k - b_k}{a_k + b_k},$$

для прямокутного отвору [12]:

$$\omega_k(v_k) = \tilde{R}_k \left( e^{iv_k} + \sum_{n=1}^9 \frac{\tilde{C}_{2n-1}}{e^{iv_k(2n-1)}} \right), \quad \tilde{C}_{2k} = 0,$$

де  $a_k$  і  $b_k$  – півосі еліпсів,  $\tilde{R}_k$  – дійсне число,  $\tilde{C}_{2n-1}$  – відомі сталі, значення яких не наводимо [12]. На рис. 2-4 – штриховим лініям відповідають КІН у лівій вершині тріщини ( $x = -l$ ), а суцільним – у правій її вершині ( $x = l$ ).

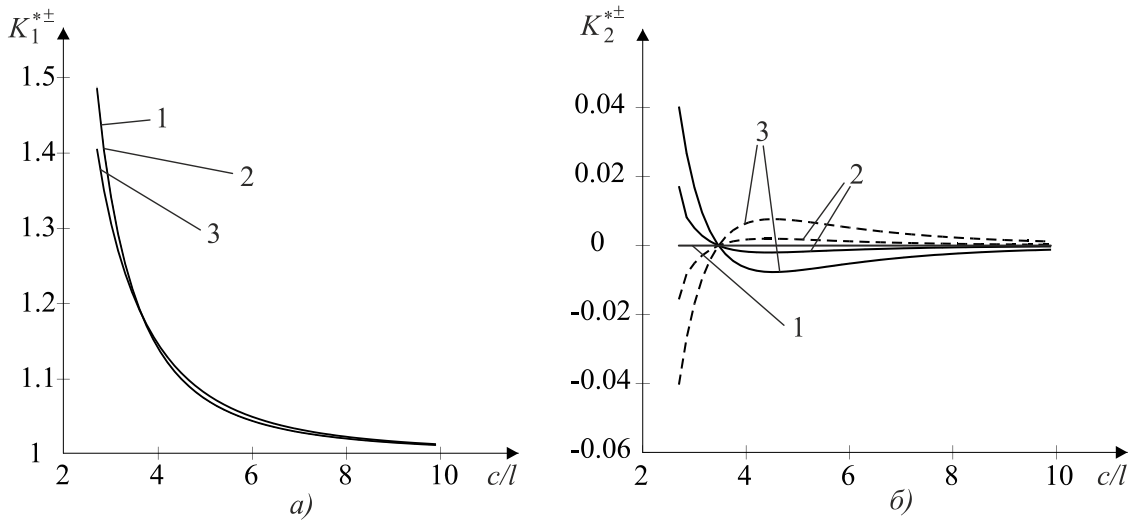


Рис. 2. Зведені коефіцієнти інтенсивності напружень по відношенню до  $c/l$

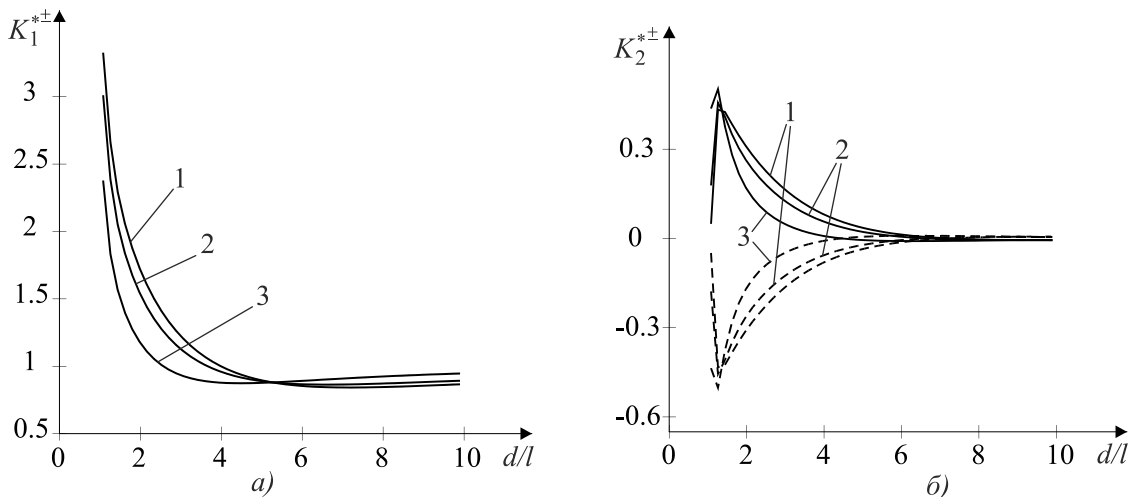


Рис. 3. Зведені коефіцієнти інтенсивності напружень по відношенню до  $d/l = d_1/l = d_2/l$

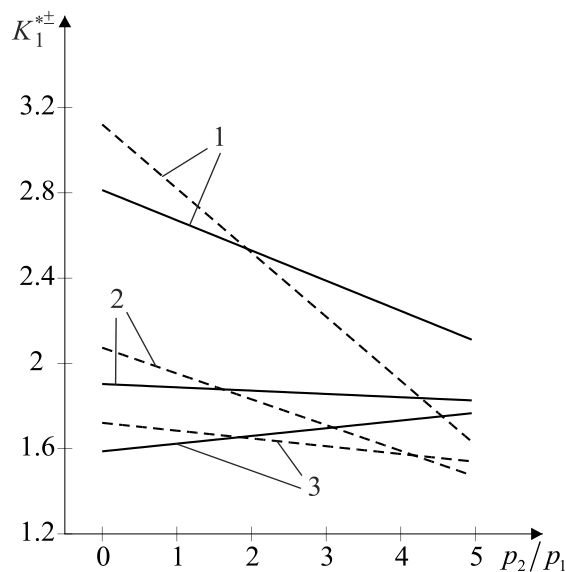


Рис. 4. Зведені коефіцієнти інтенсивності напружень по відношенню до  $p_2/p_1$

На рис. 2 для двох еліптичних отворів з тріщиною зображено зведені коефіцієнти інтенсивності напружень (ЗКІН)  $K_j^{*\pm} = k_j^{*\pm} / (p_1 \sqrt{\pi l})$  від відносної відстані  $c/l = -c_1/l = c_2/l$  між центрами отворів та центром тріщини, причому  $a_1/l = a_2/l = 1$ ,  $b_1/l = b_2/l = 2$ ,  $p_2/p_1 = 0$ , і піввісь  $a_j$  паралельна до тріщини. Крива 1 побудована для  $d_1/l = d_2/l = 0$ , крива 2 – для  $d_1/l = d_2/l = 0.2$ , крива 3 – для  $d_1/l = d_2/l = 1$ .

З цього рисунка можна побачити, що при наближенні отворів до тріщини зведені коефіцієнти інтенсивності напружень зростають, а при віддаленні вони прямують до значення зведених коефіцієнтів інтенсивності напружень для ізольованої тріщини. У часткових випадках числові результати збігаються з результатами із монографією [5], отриманими іншим підходом.

На рис. 3 подано графічну залежності ЗКІН  $K_j^{*\pm}$  при взаємодії двох прямокутних отворів зі сторонами  $2a_1 = 2a_2 = 4$ ,  $2b_1 = 2b_2 = 2$  із тріщиною, від відносної відстані  $d/l$ ,  $c_2/l = -c_1/l = 3.1$ , коли більші сторони прямокутних отворів паралельні до тріщини. Окрім того, крива 1 побудована для  $p_2/p_1 = 0$ , крива 2 – для  $p_2/p_1 = 1$ , крива 3 – для  $p_2/p_1 = 3$ . Із цього рисунка бачимо, що ЗКІН суттєво залежать від величини  $d/l$ , чим вона більша, тим швидше значення КІН прямують до відповідних значень для ізольованої тріщини, при цьому вони майже не залежать від відношення розтягуючих зусиль на нескінченності. При зростанні зусилля  $p_2$  ЗКІН зменшуються.

На рис. 4 зображено ЗКІН  $K_1^{*\pm}$  від відносної величини  $p_2/p_1$ , за взаємодії тріщини із квадратним отвором (зі стороною  $2a_1 = 2b_1 = 2$ ) та круговим отвором із радіусом  $R_2/l = 1$  при  $d_1/l = d_2/l = 0$ . Крива 1 побудована для  $c_2/l = -c_1/l = 2.1$ , крива 2 – для  $c_2/l = -c_1/l = 2.3$ , крива 3 – для  $c_2/l = -c_1/l = 2.5$ . ЗКІН  $K_2^{*\pm} = 0$ . Частковий аналіз показав, що при збільшенні відстані між центрами отворів та центром тріщини – ЗКІН наближаються до одиниці. Окрім того, бачимо, що КІН у вершині, яка ближча до квадратного отвору, більші, ніж в іншій вершині, яка ближча до кругового, коли маємо односторонній розтяг  $p_2 = 0$ , а при  $p_2 > 2p_1$  маємо протилежну ситуацію.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.
2. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 444 с.
3. Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. Киев: Наук думка, 1989. 248 с.
4. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1983. 277 с.
5. Калоеров С. А., Авдюшина Е. В., Мироненко А. Б. Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках. Донецк: ДонНУ, 2013. 440 с.
6. Каминский А. А. Хрупкое разрушение вблизи отверстий. Киев: Наук. думка, 1982. 160 с.
7. Стащук Н. Г. Задачи механики упругих тел с трещиноподобными дефектами. Киев: Наук. думка, 1993. 359 с.
8. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. 716 с.
9. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами: справочное пособие. Т. 2. Механика разрушения и прочность материалов. Киев: Наук думка, 1998. 620 с.
10. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Мураками Ю. (ред.). Москва: Мир, 1990. Т. 1. 429 с., Т. 2. 566 с.
11. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 708 с.
12. Космодамианский А. С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами, выступами. Киев: Вища школа, 1975. 228 с.

## REFERENCES

1. Savruk, M. P. (1981). Two-dimensional problems of elasticity for bodies with cracks. Kiev: Naukova Dumka.
2. Panasyuk, V. V., Savruk, M. P. & Datsishin, A. P. (1976). Distribution of stresses around cracks in plates and shells. Kiev: Naukova Dumka.
3. Savruk, M. P., Osiv, P. N. & Prokopchuk, I. V. (1989). Numerical analysis in plane problems of the crack theory. Kiev: Naukova Dumka.
4. Kyt, G. S. & Krivcun, M. G. (1983). Flat thermoelasticity problem for bodies with cracks. Kiev: Naukova Dumka.
5. Kaloerov, S. A., Avdyushina, Y. V. & Myronenko, A. B. (2013). Stress concentration in multiple isotropic plate. Donetsk: DonNU.
6. Kaminskii, A. A. (1982). Brittle fracture near holes. Kiev: Naukova Dumka.
7. Staschuk, N. G. (1993). Problems of mechanics of elastic bodies with crack-like defect. Kiev: Naukova Dumka.
8. Sulym, G. T. (2007). Fundamentals of the mathematical theory of thermoelastic equilibrium deformed solids with thin inclusions. Lviv: Research and Publishing Center of Shevchenko.
9. Savruk, M. P. (1998). The stress intensity factors in the bodies with cracks: a handbook. Fracture mechanics and strength of materials. Kiev: Naukova Dumka.
10. Murakami, Y. (Eds.). (1990). Handbook of stress intensity factor. Moscow: Mir.
11. Mushelishvili, N. I. (1966). Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Moscow: Nauka.
12. Kosmodamianskiy, A. S. (1975). The plane problem of the theory of elasticity for plates with apertures, notches, projections. Kiev: Vyscha shkola.

УДК 539.3

## ТЕРМОПРУЖНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ШАРУВАТИХ ОБОЛОНОК СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Сметанкіна Н. В., д. т. н., провідний науковий співробітник

*Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України,  
вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, 61046, Україна*

nsmetankina@ukr.net

Запропоновано метод дослідження термонапруженого стану шаруватих незамкнених циліндричних оболонок зі складною формою плану. Метод базується на прийомі розширення заданої системи. Деформування оболонок розглянуто в рамках уточненої теорії оболонок, яка враховує деформації поперечного зсуву та обтиснення вздовж товщини в кожному шарі. Результати розрахунку напружень у шарах порівнюються з даними, одержаними інтегрально-різницею методом.

*Ключові слова: шарувата оболонка, складна форма, температура, термонапружений стан.*

## ТЕРМОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СЛОИСТЫХ ОБОЛОЧЕК СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Сметанкина Н. В., д. т. н., ведущий научный сотрудник

*Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,  
ул. Пожарского, 2/10, г. Харьков, 61046, Украина*

nsmetankina@ukr.net

Предложен метод исследования термонапряженного состояния многослойных незамкнутых цилиндрических оболочек со сложной формой плана. Метод основан на приеме расширения заданной системы. Деформирование оболочек рассматривается в рамках уточненной теории оболочек, учитывающей деформации поперечного сдвига и обжатие по толщине в каждом слое. Результаты расчета напряжений в слоях сравниваются с данными, полученными интегрально-разностным методом.

*Ключевые слова: слоистая оболочка, сложная форма, температура, термонапряженное состояние.*



## THERMOELASTIC DEFORMATION OF LAMINATED SHELLS OF A COMPLEX SHAPE

*Smetankina N. V., D. Sc. in Engineering, Leading Research Associate*

*A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of NAS of Ukraine,  
Pozharsky str., 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine*

nsmetankina@ukr.net

A topical problem in modern engineering is reliable determination of temperature fields and stresses in structural elements. A review of models and methods of solving heat conduction and thermoelasticity problems has shown that uniform structures are the most investigated ones. If a temperature field changes slowly with time, one can ignore the inertia terms in the equations of motion and the coupling term in the heat conduction equation, and treat the thermoelasticity problem as a quasistatic one.

A constant-thickness non-closed cylindrical laminated shell is considered. It comprises isotropic layers with constant thickness and various physical and mechanical properties. The number of layers and their layout is arbitrary. In the coordinate surface, it occupies the complex domain limited by a boundary  $\Gamma$ . Convective heat exchange occurs on the shell surfaces. The shell is affected by interlayer heat sources. The nonstationary heat conduction equation and the boundary conditions for the laminated shell are derived from the heat balance variational equation. The temperature fields are determined while solving the nonstationary heat conduction problem for laminated shells when the latter are heated with interlayer film heat sources. The shell behavior is described within the framework of the refined first-order theory. It accounts for lateral shear strain and thickness reduction in each shell layer. The polygonal line hypothesis holds for the pack, and interlayer contact excludes their delamination and mutual slippage. The shell equilibrium equations and the boundary conditions are derived from the Lagrange variational equation.

According to the extension method, the complex-shape shell virtually extends to an auxiliary laminated cylindrical non-closed simply supported shell of rectangular planform shape with the same composition of layers. An auxiliary shell is one whose contour shape and boundary conditions yield a simple analytical solution. In this case, the auxiliary shell is a simply supported non-closed cylindrical laminated with rectangular plan-view shape, allowing to find the problem solution as trigonometric series. To satisfy actual boundary conditions, additional distributed compensating loads, the intensity of which are to be found, are applied to the auxiliary shell over the boundary  $\Gamma$ . Based on the condition of satisfying boundary conditions on the boundary  $\Gamma$ , we form a system of integral equations for determining the intensities of compensating loads. Displacements and loads are expanded in the auxiliary shell domain in trigonometric series for functions satisfying simply supported conditions. The compensating loads are expanded into a series along the boundary  $\Gamma$ . Hence, the system of integral equations is transformed to a system of algebraic equations with respect to the expansion coefficients of the compensating loads.

The method feasibility has tested on five- and seven-layer shells. Results of calculation of stresses in layers are compared with the data obtained by an integral-difference method. The method suggested can be used for designing heating systems and determining temperature stresses in the laminated glazing of different transport vehicles.

*Key words: laminated shell, complex shape, temperature, thermal stressed state.*

### 1. ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Шаруваті оболонки є елементами конструкцій у різних галузях сучасної техніки, оскільки вони забезпечують високу міцність, жорсткість, поліпшені звуко- і теплоізоляційні характеристики при малій вазі конструкції під впливом різних силових та температурних полів [1, с. 589; 2, с. 117]. Основні методи розв'язання задач квазистатичної термопружності шаруватих оболонок можна розділити на аналітичні і чисельні. Найбільш поширеним у практиці розрахунків є метод скінченних елементів. Варто зазначити, що чисельні методи не завжди ефективні при розв'язанні задач термопружності шаруватих елементів конструкцій, оскільки потребують розв'язання систем лінійних рівнянь великого порядку. Тому багато дослідників звертаються до розробки аналітичних або чисельно-аналітичних методів розв'язання таких задач.

### 2. АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

З огляду літературних джерел впливає, що найчастіше розглядається розрахунок шаруватих конструкцій в умовах стаціонарного нагріву під впливом температурних розподілів, які задаються за кусково-лінійним законом вздовж товщини конструкції. У статті [3, с. 230] досліджено згин шарнірно опертих шаруватих пластин несиметричної структури під дією

температури, яка кусково-лінійно розподілена вздовж товщини пластини. Системи рівнянь термопружності теорії першого порядку з урахуванням зсуву та класичної теорії розв'язуються методом скінчених різниць і методом Леві. У працях [4, с. 91] та [5, с. 3710] автори застосували гіпотезу про кусково-лінійний розподіл температури вздовж товщини пакета для дослідження стаціонарних температурних полів у шаруватих композитних оболонках і панелях. У випадку нестационарних теплових впливів шаруваті пластини й оболонки також розглядаються при відомому розподілі температурних полів. У статті [6, с. 52] автори дослідили нелінійну реакцію шаруватої симетричної ортогонально армованої циліндричної панелі на імпульсний тепловий потік. Температурний розподіл є сталим вздовж товщини, а за часом він змінюється за показниковим законом.

Варто зазначити, що для розв'язання задач термопружного деформування шаруватих елементів конструкцій під впливом нестационарних температурних полів найчастіше застосовуються методи, базовані на дискретизації області або контуру, наприклад, метод скінчених елементів [6, с. 50]. Отже, актуальною задачею є розробка методів дослідження термонапруженого стану шаруватих елементів конструкцій складної форми з урахуванням їх неоднорідної структури, які дозволяють подати розв'язок задачі в аналітичному вигляді.

### 3. НЕВИРШЕНІ ПРОБЛЕМИ ТА ЦІЛІ СТАТТІ

З аналізу публікацій, які присвячені термопружному деформуванню шаруватих елементів конструкцій, можна зробити висновок, що кожний зі згаданих методів дослідження має свої переваги і недоліки, що обмежують область застосування. Крім того, часто деформування шаруватих оболонок розглядається в рамках класичної теорії оболонок, хоча оболонка може складатися з шарів, фізико-механічні характеристики яких суттєво різняться. Тому розробка нових методів і удосконалення існуючих методів розрахунку оболонок залишаються актуальними задачами. У цій роботі пропонується метод розв'язання задачі термопружності шаруватих незамкнених циліндричних оболонок зі складною формою плану. Метод базований на методі розширення заданої складної області до канонічної, що дозволяє одержати розв'язок вихідної задачі в аналітичному вигляді.

### 4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається багатошарова циліндрична оболонка, складена з  $I$  ізотропних шарів сталої товщини  $h_i$ , яка займає на зовнішній поверхні першого шару (координатній поверхні) область  $\Omega$ , що обмежена контуром  $\Gamma$ . На оболонку діють температурні та силові навантаження  $\mathbf{P} = \{p_j(x, y)\}$  ( $j = \overline{1, 3I+3}$ ). Координата  $x$  змінюється вздовж твірної, координата  $y$  – вздовж напрямної оболонки. Додатний напрям осі  $Oz$  збігається з напрямом зовнішньої нормалі до координатної поверхні.

Поведінка оболонки описується в рамках уточненої теорії першого порядку, що враховує деформації поперечного зсуву та обтиснення нормального елемента в кожному шарі. Передбачається, що контакт між шарами виключає їх розшарування та взаємне проковзування. Переміщення точки  $i$ -го шару мають вигляд:

$$u_k^i = u_k + \sum_{j=1}^{i-1} h_j u_{3+I(k-1)+j} + (z - \delta_{i-1}) u_{3+I(k-1)+i}, \quad k = 1, 2, 3, \quad i = \overline{1, I}, \quad (1)$$

де  $u_k = u_k(x, y)$ ,  $k = 1, 2, 3$  – переміщення точки координатної поверхні в напрямі координатних осей,  $u_{3+I(k-1)+i} = u_{3+I(k-1)+i}(x, y)$ ,  $k = 1, 2$  – кути повороту нормального елемента відносно координатних осей в  $i$ -му шарі,  $u_{3+2I+i} = u_{3+2I+i}(x, y)$  – обтиснення нормального елемента в межах  $i$ -го шару,  $\delta_i = \sum_{j=1}^i h_j$ ,  $\delta_{i-1} \leq z \leq \delta_i$ ,  $i = \overline{1, I}$ .

Деформації шарів визначаються відповідно до формул Коші, а напруження і деформації в шарах зв'язані законом Гука. Інтегральні характеристики тензора напружень в  $i$ -му шарі визначаються за формулами:

$$\hat{N}_x^i = N_x^i - N_{1T}^i, \quad \hat{N}_y^i = N_y^i - N_{2T}^i, \quad \hat{N}_z^i = N_z^i - N_{1T}^i, \quad \hat{M}_x^i = M_x^i - M_{1T}^i, \quad \hat{M}_y^i = M_y^i - M_{2T}^i, \\ \hat{Q}_x^i = Q_x^i, \quad \hat{Q}_y^i = Q_y^i, \quad \hat{M}_{xz}^i = M_{xz}^i, \quad \hat{M}_{yz}^i = M_{yz}^i, \quad i = \overline{1, I},$$

де

$$\begin{bmatrix} N_x^i & N_{xy}^i \\ M_x^i & M_{xy}^i \end{bmatrix} = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ z - \delta_{i-1} \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} \sigma_x^i & \tau_{xy}^i \end{bmatrix} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) dz, \quad \begin{bmatrix} N_y^i & N_{yx}^i \\ M_y^i & M_{yx}^i \end{bmatrix} = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ z - \delta_{i-1} \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} \sigma_y^i & \tau_{xy}^i \end{bmatrix} dz, \\ \begin{bmatrix} N_z^i & Q_x^i \end{bmatrix} = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \begin{bmatrix} \sigma_z^i & \tau_{xz}^i \end{bmatrix} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) dz, \quad Q_y^i = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \tau_{yz}^i dz, \\ M_{xz}^i = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \tau_{xz}^i (z - \delta_{i-1}) \left( 1 + \frac{z}{R} \right) dz, \quad M_{yz}^i = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \tau_{yz}^i (z - \delta_{i-1}) dz, \\ N_{1T}^i = \frac{E_i \alpha_T^i}{1 - \nu_i} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i \left( 1 + \frac{z}{R} \right) dz, \quad N_{2T}^i = \frac{E_i \alpha_T^i}{1 - \nu_i} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i dz, \\ M_{1T}^i = \frac{E_i \alpha_T^i}{1 - \nu_i} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i (z - \delta_{i-1}) \left( 1 + \frac{z}{R} \right) dz, \quad M_{2T}^i = \frac{E_i \alpha_T^i}{1 - \nu_i} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i (z - \delta_{i-1}) dz, \quad i = \overline{1, I},$$

$E_i$  – модуль Юнга матеріалу  $i$ -го шару;  $\nu_i$  – коефіцієнт Пуассона;  $\alpha_T^i$  – коефіцієнт лінійного температурного розширення матеріалу  $i$ -го шару;  $T_i = T_i(x, y, z)$  – функція приросту температури відносно температури ненапруженого стану;  $R$  – радіус оболонки.

З варіаційного принципу Лагранжа [1, с. 81] одержуємо рівняння термопружної рівноваги шаруватої оболонки

$$[\mathbf{A}] \mathbf{U} = \mathbf{P}_T - \mathbf{P}, \quad (x, y) \in \Omega, \tag{2}$$

та граничні умови на контурі  $\Gamma$

$$[\mathbf{B}^\Gamma] \mathbf{U} = \mathbf{P}^\Gamma, \quad (x, y) \in \Gamma. \tag{3}$$

У рівняннях (2) та (3) матриці  $[\mathbf{A}]$  і  $[\mathbf{B}^\Gamma]$  – квадратні симетричні матриці розміру  $3I + 3$ ;

$\mathbf{U}$  – вектор переміщень,  $\mathbf{U} = \{u_i\}$ ,  $i = \overline{1, 3I + 3}$ ;

$$\mathbf{P}_T = \left\{ C_{1T,x}^I, C_{2T,y}^I, -\frac{C_{2T}^I}{R}, D_{1T,x}^I, D_{2T,y}^I, -C_{1T}^I - \frac{D_{2T}^I}{R} \right\};$$

$$\mathbf{P}^\Gamma = \left\{ C_{1T}^I l_x^2 + C_{2T}^I l_y^2, (C_{1T}^I - C_{2T}^I) l_x l_y, 0, D_{1T}^I l_x^2 + D_{2T}^I l_y^2, (D_{1T}^I - D_{2T}^I) l_x l_y, 0 \right\},$$

$$C_{1T}^I = \sum_{i=1}^I N_{1T}^i, \quad C_{2T}^I = \sum_{i=1}^I N_{2T}^i, \quad D_{1T}^I = h_i \sum_{j=i}^{I-1} N_{1T}^{j+1} + M_{1T}^i, \quad D_{2T}^I = h_i \sum_{j=i}^{I-1} N_{2T}^{j+1} + M_{2T}^i, \quad i = \overline{1, I},$$

$l_x$  та  $l_y$  – напрямні косинуси нормалі до контуру  $\Gamma$ .

## 5. МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Розв'язання крайової задачі (2), (3) здійснюється методом розширення заданої системи [7, с. 149], який урахує геометрію області на аналітичному рівні. Відповідно до запропонованого методу, вихідна оболонка розширюється до допоміжної шарнірно опертої оболонки з прямокутною формою плану, для якої можливо одержати розв'язок задачі у вигляді розвинень у тригонометричні ряди. Допоміжна оболонка має таку ж композицію шарів і в межах області  $\Omega$  навантажена так само, як і задана оболонка.

Щоб забезпечити виконання заданих граничних умов на контурі  $\Gamma$  і тотожність напружено-деформованого стану допоміжної оболонки в області  $\Omega$  стану вихідної оболонки, до допоміжної оболонки прикладаються додаткові компенсуючі навантаження  $\mathbf{Q}^{\text{comp}} = \{q_j^{\text{comp}}(x, y)\}$  ( $j = \overline{1, 3I+3}$ ), які неперервно розподілені вздовж контуру  $\Omega$ . У рівняння термопружної рівноваги оболонки (2) компенсуючі навантаження входять у вигляді криволінійних розподілів

$$p_j^{\text{comp}}(x, y) = \sum_{k=1}^{3I+3} \oint_{\Gamma} L_{jk} q_k^{\text{comp}}(s) \delta(x - x_{\Gamma}, y - y_{\Gamma}) ds, \quad j, k = \overline{1, 3I+3}. \quad (4)$$

Тут  $\delta(x - x_{\Gamma}, y - y_{\Gamma})$  – двовимірна  $\delta$ -функція Дірака;  $s$  – поточна довжина дуги.

Граничні умови (3) з урахуванням (4) призводять до системи інтегральних рівнянь, з якої визначаються невідомі інтенсивності компенсуючих навантажень:

$$[\mathbf{B}^{\Gamma}] \mathbf{U}[\mathbf{Q}^{\text{comp}}(x, y)] = \mathbf{P}^{\Gamma}, \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (5)$$

Щоб перетворити інтегральні рівняння на їх алгебраїчний аналог, функції переміщень, заданих і компенсуючих навантажень розвиваються в тригонометричні ряди за функціями, що задовольняють граничні умови оболонки з прямокутною формою плану:

$$\begin{aligned} u_j(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{jmn} C_{jmn}(x, y), \quad p_j(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn} C_{jmn}(x, y), \\ p_j^T(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn}^T C_{jmn}(x, y), \quad p_j^{\text{comp}}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn}^{\text{comp}} C_{jmn}(x, y), \\ C_{1mn} &= \cos \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad C_{2mn} = \sin \alpha_m x \cos \beta_n y, \quad C_{3mn} = \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ C_{3+i mn} &= C_{1mn}, \quad C_{3+I+i mn} = C_{2mn}, \quad C_{3+2I+i mn} = C_{3mn}, \quad \alpha_m = m\pi/A, \quad \beta_n = n\pi/B, \\ j &= \overline{1, 3I+3}, \quad i = \overline{1, I}, \end{aligned}$$

де  $A$  – довжина твірної допоміжної оболонки;  $B$  – довжина напрямної оболонки.

Функції компенсуючих навантажень розвиваються в ряд уздовж контуру  $\Gamma$ :

$$q_j^{\text{comp}}(s) = \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\infty} q_{j\alpha\mu} b_{\alpha\mu}(s), \quad j = \overline{1, 3I+3}, \quad (6)$$

$$b_{1\mu} = \sin[\mu\gamma(s)], \quad b_{2\mu} = \cos[\mu\gamma(s)], \quad \gamma(s) = 2\pi \int_0^s \frac{d\tilde{s}}{\oint_{\Gamma} d\tilde{s}}, \quad 0 \leq \gamma(s) \leq 2\pi, \quad \mu = \overline{0, \mu^*}.$$

Граничні функції, що входять у вихідні граничні умови (3), також розвиваються в ряд уздовж  $\Gamma$ . У результаті система (5) перетворюється на систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів розвинення компенсуючих навантажень у ряд уздовж контуру  $\Gamma$ . Порядок

одержаної системи залежить від числа шарів в оболонці і кількості членів ряду в розвиненні (6). Після обчислення компенсуючих навантажень розв'язок задачі набуває вигляду:

$$u_j(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{AB} \sum_{k=1}^{3I+3} \pi_{jk}^{mn} \sum_{l=1}^{3I+3} \sum_{\alpha=1,2}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} q_{l\alpha\mu}^{mn} \theta_{kl\alpha\mu}^{mn} + \varepsilon_{jmn} \right) C_{jmn}(x, y), \quad j = \overline{1, 3I+3}.$$

Потім визначаються переміщення (1), деформації і напруження в шарах вихідної оболонки.

### 6. ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Для підтвердження достовірності чисельних результатів проведено порівняння значень напружень для п'ятишарової незамкненої циліндричної оболонки під впливом змінного вздовж товщини об'ємного теплового поля з даними, наведеними в роботі [8, с. 19]. Контур оболонки жорстко закріплений, а його форма задається рівняннями кривих Ламе:  $x(\varphi) = \alpha \cos^{2/c}(\varphi)$ ,  $y(\varphi) = \beta \sin^{2/c}(\varphi)$ . Оболонка має такі геометричні і механічні параметри:  $2\alpha = 0,555$  м,  $2\beta = 0,42$  м,  $c = 10$ ;  $R = 0,69$  м;  $h_1 = h_5 = 5$  мм,  $h_2 = 2$  мм,  $h_3 = 8$  мм,  $h_4 = 3$  мм;  $E_i = 6,3 \cdot 10^4$  МПа,  $i = 1, 3, 5$ ,  $E_2 = 1,6 \cdot 10^3$  МПа,  $E_4 = 10$  МПа;  $\nu_i = 0,22$ ,  $i = 1, 3, 5$ ,  $\nu_2 = \nu_4 = 0,4$ ;  $\alpha_T^i = 8,8 \cdot 10^{-6}$  °C<sup>-1</sup>,  $i = 1, 3, 5$ ,  $\alpha_T^2 = 7 \cdot 10^{-5}$  °C<sup>-1</sup>,  $\alpha_T^4 = 2 \cdot 10^{-4}$  °C<sup>-1</sup>.

На рис. 1 показано розподіл температури та напруження вздовж товщини оболонки. Розподіл температури  $T$  у межах кожного шару апроксимується квадратичною параболою (рис. 1, а). На рис. 1, б показано змінення напруження  $\sigma_y^i$  у точці з координатами  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ , на рис. 1, в – у точці з координатами  $x_0 = \alpha/2$ ,  $y_0 = 0$ . Штриховими лініями на рис. 1 показані розподіли напруження, які одержані інтегрально-різницеvim методом у статті [8, с. 20]. Добре узгодження розподілів напружень підтверджує достовірність результатів розрахунку, які одержані за допомогою запропонованого методу.

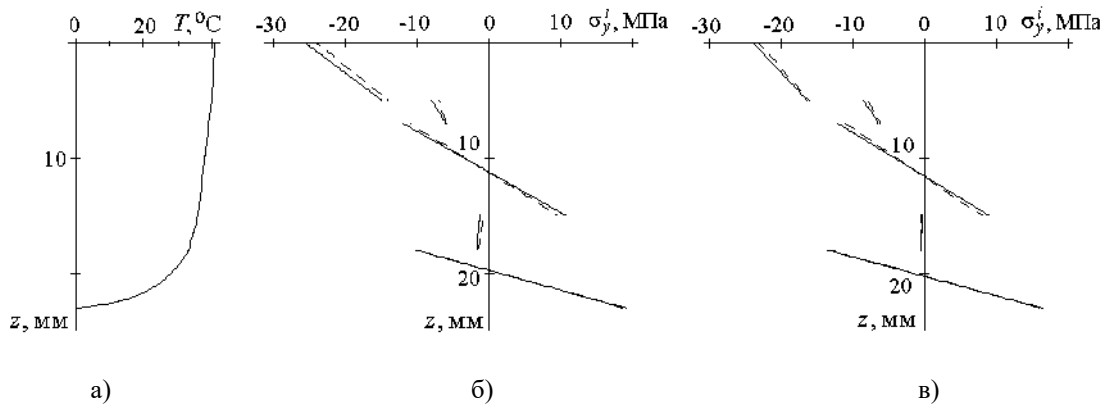


Рис. 1. Розподіл температури та напруження вздовж товщини оболонки

Ефективність розробленого методу підтверджено на прикладі розв'язання задачі термопружності семишарової вільно опертої циліндричної оболонки, розрахункова схема якої наведена на рис. 2. Оболонка знаходиться під впливом плівкового джерела тепла, яке розміщене між першим і другим шарами оболонки. Розташування джерела тепла на поверхні шарів показано штриховою лінією. Його питома потужність  $0,84$  Вт/см<sup>2</sup>. Поле температурних навантажень одержано в результаті розв'язання нестационарної задачі теплопровідності оболонки [9, с. 336]. Геометричні та механічні параметри оболонки мають такі значення:  $R = 1,34$  м,  $l_1 = 0,7$  м,  $l_2 = 0,54$  м,  $l_3 = 0,61$  м,  $l_4 = 0,55$  м,  $R_1 = 0,05$  м,  $R_2 = 0,03$  м,  $R_3 = 0,04$  м,  $R_4 = 0,045$  м;  $h_1 = 5$  мм,  $h_2 = 3$  мм,  $h_3 = h_5 = h_7 = 10$  мм,  $h_4 = h_6 = 2$  мм;  $E_i = 6,8 \cdot 10^4$  МПа,  $i = 1, 3, 5, 7$ ,  $E_i = 2,2 \cdot 10^2$  МПа,  $i = 2, 4, 6$ ;  $\nu_i = 0,22$ ,  $i = 1, 3, 5, 7$ ,  $\nu_i = 0,38$ ,  $i = 2, 4, 6$ ;  $\alpha_T^i = 9 \cdot 10^{-6}$  °C<sup>-1</sup>,  $i = 1, 3, 5, 7$ ,  $\alpha_T^i = 8,3 \cdot 10^{-5}$  °C<sup>-1</sup>,  $i = 2, 4, 6$ .

За результатами розрахунку отримані розподіли головних напружень у момент часу, коли вони досягають своїх найбільших значень. На рис. 3 показано розподіл напружень  $\sigma_1$  в області розташування джерела тепла на поверхні  $z = \delta_1$ , яка містить це джерело. Значення напружень наведені в мегапаскалях.

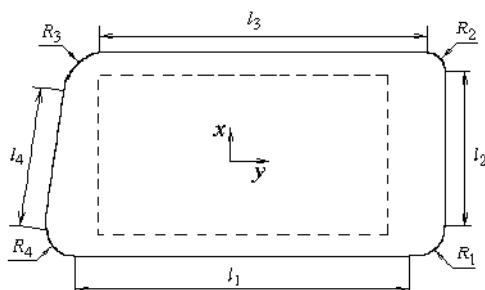
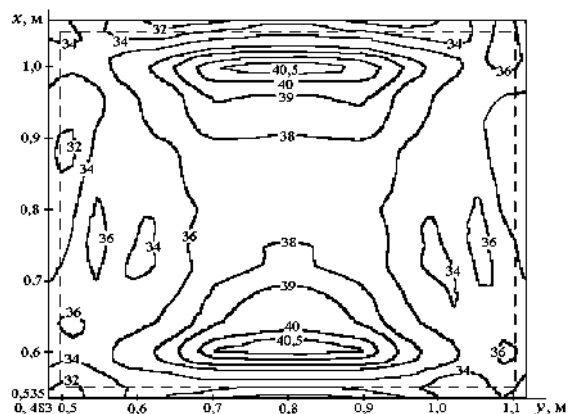


Рис. 2. Розрахункова схема оболонки

Рис. 3. Розподіл напружень на поверхні  $z = \delta_1$ 

У кутах і вздовж межі області джерела тепла спостерігається концентрація температурних напружень. Встановлено, що напруження не перевищили своїх допустимих значень.

## 7. ВИСНОВКИ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ Й НАПРЯМКИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розроблено метод розрахунку термонапруженого стану шаруватих циліндричних оболонок складною формою плану під впливом плівкових джерел тепла, який дозволяє подати розв'язок задачі у вигляді тригонометричного ряду та досліджувати оболонки з різними граничними умовами та довільним розташуванням шарів.

Можливості методу проілюстровані на прикладі розрахунку деформацій п'ятишарової та семишарової вільно опертих оболонок. Добре узгодження результатів розрахунку температурних напружень за різними методами підтвердило достовірність результатів, одержаних за допомогою запропонованого методу. Встановлено ефект концентрації напружень у кутах і вздовж межі області джерела тепла.

Метод можна застосувати для подальшого аналізу температурних напружень у багатошаровому осклінні сучасних літальних апаратів при впливі плівкових джерел тепла, які є складовою частиною систем обігріву.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Carrera E., Cinefra M., Fazzolari F. A. Some results on thermal stress of layered plates and shells by using unified formulation. *J. Thermal Stresses*. 2013. Vol. 36, No. 6. P. 589–625.
2. Carrera E., Fazzolari F. A. Thermal stress analysis of beams, plates and shells: computational modeling and applications. London: Academic Press, 2016. 440 p.
3. Khdeir A. A. On the thermal response of antisymmetric angle-ply laminated plates. *Trans. ASME J. Appl. Mech.* 1997. Vol. 64, No. 1. P. 229–233.
4. Tauchert T. R. Publications on thermal stresses. *J. Thermal Stress*. 2001. Vol. 24, No. 1. P. 91–92.
5. Barut A, Madenci E., Tessler A. Non-linear analysis of composite panels under non-uniform temperature distribution. *Int. J. Solids and Structures*. 2000. Vol. 37, No. 27. P. 3681–3713.
6. Oguamanam D. C. D., Hansen J. S., Heppler G. R. Nonlinear transient response of thermally loaded laminated panels. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 2004. Vol. 71, No. 1. P. 49–56.
7. Сметанкина Н. В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек. Харьков: Миськдрук, 2011. 376 с.

8. Демидов В. Г., Паймушин В. Н. Метод и пакет прикладных программ для расчета термонапряженного состояния многослойных оболочек сложной геометрии. *Прикл. пробл. прочности и пластичности*. 1987. С. 13–21.
9. Shupikov A. N., Smetankina N. V., Svet Ye. V. Nonstationary heat conduction in complex-shape laminated plates. *Trans. ASME. J. Heat Transfer*. 2007. Vol. 129, No. 3. P. 335–341.

### REFERENCE

1. Carrera, E., Cinefra, M. & Fazzolari, F. A. (2013). Some results on thermal stress of layered plates and shells by using unified formulation. *J. Thermal Stresses*, Vol. 36, No. 6, pp. 589-625.
2. Carrera, E. & Fazzolari, F. A. (2016). *Thermal stress analysis of beams, plates and shells: computational modeling and applications*. London: Academic Press.
3. Khdeir, A. A. (1997). On the thermal response of antisymmetric angle-ply laminated plates. *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 64, No. 1, pp 229-233.
4. Tauchert, T. R. (2001). Publications on thermal stresses. *J. Thermal Stress*, Vol. 24, No. 1, pp. 91-92.
5. Barut, A., Madenci, E. & Tessler, A. (2000). Non-linear analysis of composite panels under non-uniform temperature distribution. *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 37, No. 27, pp. 3681-3713.
6. Oguamanam, D. C. D., Hansen, J. S. & Heppler, G. R. (2004). Nonlinear transient response of thermally loaded laminated panels. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, Vol. 71, No. 1, pp. 49-56.
7. Smetankina, N. V. (2011), *Nonstationary deformation, thermoelasticity and optimization of multilayer plates and cylindrical shells*. Kharkov: Miskdruk.
8. Demidov, V. G. & Payimushin, V. N. (1987). Method and package of applied programs for calculation of a thermal stressed condition of multilayered shells of complex geometry. *Applied problems of strength and plasticity*, pp. 13-21.
9. Shupikov, A. N., Smetankina, N. V. & Svet, Ye. V. (2007). Nonstationary heat conduction in complex-shape laminated plates. *Trans. ASME. J. Heat Transfer*, Vol. 129, No. 3, pp. 335-341.

УДК 539.3

## АНТИПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ БІМАТЕРІАЛУ З ФІЗИЧНО НЕЛІНІЙНИМ МІЖФАЗНИМ ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

<sup>1</sup>Сулим Г. Т., <sup>2</sup>Піскозуб Й. З., <sup>2</sup>Піскозуб Л. Г.

<sup>1</sup>Львівський національний університет ім. Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, м. Львів, Україна

<sup>2</sup>Українська академія друкарства,  
вул. Підголосько, 19, м. Львів, Україна

sulym@franko.lviv.ua, piskozub@pancha.lviv.ua

Розглянуто задачу поздовжнього зсуву біматеріалу з тонким нелінійно пружно-пластичним включенням на межі поділу матеріалів матриці. Розв'язок сформульованої задачі побудовано методом задачі спряження граничних значень аналітичних функцій із застосуванням методу функцій стрибка. Побудована модель тонкого включення з нелінійними характеристиками. Запропоновано збіжний ітераційний метод розв'язування отриманої системи сингулярних інтегральних рівнянь зі змінними коефіцієнтами для різних варіантів нелінійного деформування. Розвинуто інкрементальну методику розрахунку напружено-деформованого стану тіла при циклічному навантажуванні. Здійснено числові розрахунки для різних значень параметрів нелінійності деформаційних характеристик матеріалу включення.

*Ключові слова:* поздовжній зсув, антипловка деформація, тонке включення, біматеріал, функції стрибка.

## АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ БИМАТЕРИАЛА С ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫМ МЕЖФАЗНЫМ ТОНКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

<sup>1</sup>Сулим Г. Т., <sup>2</sup>Пискозуб И. З., <sup>2</sup>Пискозуб Л. Г.

<sup>1</sup>Львовский национальный университет им. Ивана Франко,  
ул. Университетская, 1, г. Львов, Украина

<sup>2</sup>Украинская академия печати,  
ул. Подголоско, 19, г. Львов, Украина

sulym@franko.lviv.ua, piskozub@pancha.lviv.ua

Рассмотрена задача продольного сдвига биматериала с тонким нелинейно упругопластическим включением на границе раздела материалов матрицы. Решение сформулированной задачи построено методом задачи сопряжения предельных значений аналитических функций с применением метода функций скачка. Построена модель тонкого включения с нелинейными характеристиками. Предложен сходящийся итерационный метод решения системы сингулярных интегральных уравнений с переменными коэффициентами для различных вариантов нелинейного деформирования. Развита инкрементальная методика расчета напряженно-деформированного состояния тела при циклическом нагружении. Осуществлены численные расчеты напряженно-деформированного состояния тела для различных значений параметров нелинейности деформационных характеристик материала включения.

*Ключевые слова:* продольный сдвиг, антиплоская деформация, тонкое включение, биматериал, функции скачка.

## LONGITUDINAL SHEAR OF THE BIMATERIAL WITH PHYSICAL NONLINEAR THIN INTERFACIAL INCLUSION

<sup>1</sup>Sulym G. T., <sup>2</sup>Piskozub J. Z., <sup>2</sup>Piskozub L. G.

<sup>1</sup>Lviv National Ivan Franko University,  
Universytetska Str., 1, L'viv, 79000, Ukraine

<sup>2</sup>Ukrainian Academy of Printing,  
Pidgolosko Str., 19, L'viv, 79020, Ukraine

The problem of longitudinal shear of a bimaterial with thin nonlinearly elastic-plastic inclusion at the interface matrix materials is discussed. Solid is exposed to the combined cyclic loading in the longitudinal direction. It is assumed that the load on each step of loading increases from zero to its maximum monotonically and slowly enough not to consider the effect of inertia. The solution of the formulated problem is constructed by applying the problem linear conjugation of analytic functions and jump functions method. A model of thin inclusion with nonlinear characteristics is constructed. The solution of problem is reduced to a system of singular integral equations with variable coefficients. A convergent iterative method for solving such a system due to the various law of nonlinear deformation is proposed. An incremental technique for calculating the stress-strain state of body under the multistep (including cyclic) loading is developed. The basis of this technique is the idea of consideration at every step of loading previous step stresses and displacements as the residual. Correctness of the obtained solution is justified. Evolution of the plastic zone in the inclusion is considered at different stages of loading. Numerical calculations of the body stress-strain state for various values of the inclusion material nonlinearity parameters are made. Their influence on the mode of deformation of the of matrix under the loading by the shear on the infinity and balanced system of concentrated forces is analyzed.

*Key words:* longitudinal shear, anti-plane deformation, thin inclusion, bi-material, jump functions.

Тонкі включення різноманітної фізичної природи дуже часто зустрічаються як дефекти у матеріалах (тріщини, включення) чи як конструкційні елементи для підкріплення деталей машин та споруд, зокрема і як наповнювачі композиційних матеріалів [1, 2]. Такі тонкі структурні неоднорідності переважно мають складну термомеханічну будову з урахуванням можливої в'язкості, пластичності та інших нелінійних ефектів, урахування яких істотно ускладнює процес розв'язування задач і вимагає використання різноманітних наближених методів навіть для тіл простої геометрії [1, 3].

Спроби врахувати різноманітну нелінійність в антиплоскій задачі для двох стиснених півпросторів із міжфазними дефектами було здійснено різними авторами в працях [4-9], у



т.ч. розглядалися фрикційне проковзування контактуючих тіл [6-8], гранично-елементний підхід [9].

Метою публікації є розвиток методу функцій стрибка та побудова адекватних моделей тонких включень-прошарків, матеріал яких має істотно нелінійні деформаційні властивості за різного навантаження тіла, у тому числі багатокрокового чи циклічного.

Вивчатимемо напружено-деформований стан (НДС) перерізу безмежного ізотропного масиву, що складається з двох півпросторів з пружними сталими  $G_1, G_2$ , площиною  $xOy$ , перпендикулярною до напрямку  $z$  його поздовжнього зсуву. Перпендикулярні до цієї осі плоскі перерізи півпросторів утворюють дві півплощини  $S_k$  ( $k=1,2$ ), а межі поділу між ними відповідає вісь абсцис  $L \sim x$ . На ній уздовж відрізка  $L' = [-a; a]$  знаходиться тонке включення товщиною  $2h$  ( $h \ll a$ ) (рис. 1).

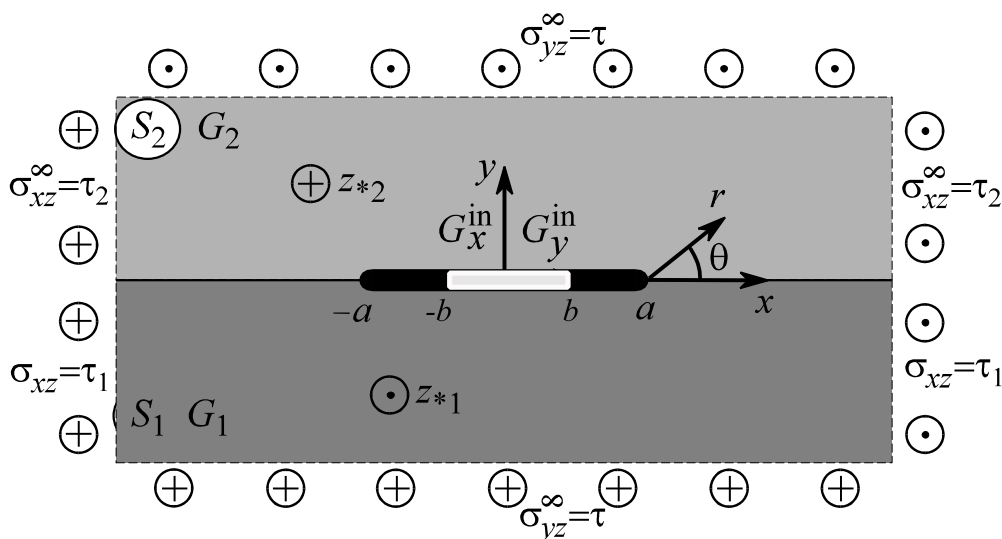


Рис. 1. Силова й геометрична схема задачі

Приймаємо, що матеріал включення ортотропно нелінійний і задовольняє в загальному випадку залежності

$$\frac{\partial w^{in}}{\partial x} = \mathfrak{I}_x^{in}(\sigma_{xz}^{in}), \quad \frac{\partial w^{in}}{\partial y} = \mathfrak{I}_y^{in}(\sigma_{yz}^{in}) \tag{1}$$

або

$$\sigma_{xz}^{in} = G_x^{in}(\sigma_{xz}^{in}) \frac{\partial w^{in}}{\partial x}, \quad \sigma_{yz}^{in} = G_y^{in}(\sigma_{yz}^{in}) \frac{\partial w^{in}}{\partial y}. \tag{2}$$

Співвідношення (1)-(2) у часткових випадках може мати вигляд, зокрема, моделі деформування Рамберга-Осгуда зі сталими деформування  $M_s, A_s, B_s, s = \{x; y\}$  матеріалу включення (рис. 2)

$$\frac{\partial w^{in}}{\partial x} = A_x \sigma_{xz}^{in} \left( 1 + B_x (\sigma_{xz}^{in})^{M_x} \right), \quad \frac{\partial w^{in}}{\partial y} = A_y \sigma_{yz}^{in} \left( 1 + B_y (\sigma_{yz}^{in})^{M_y} \right), \tag{3}$$

чи звичайної моделі пружно-пластичного деформування зі зміцненням (рис. 3)

$$\frac{\partial w^{in}}{\partial x} = (\sigma_{xz}^{in} - \tau_{pl}) \frac{G_{0x} - G_{1x}}{G_{0x} G_{1x}}, \quad \frac{\partial w^{in}}{\partial y} = (\sigma_{yz}^{in} - \tau_{pl}) \frac{G_{0y} - G_{1y}}{G_{0y} G_{1y}}. \tag{4}$$

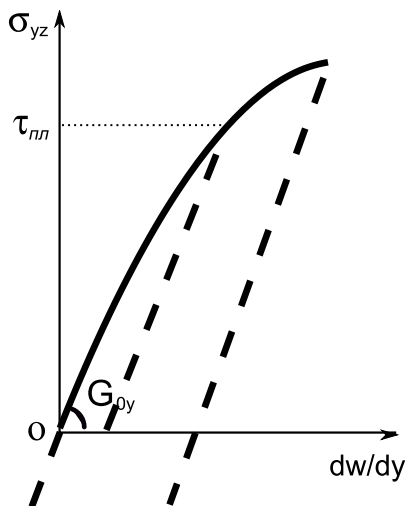


Рис. 2. Схема деформування Рамберга-Осгуда

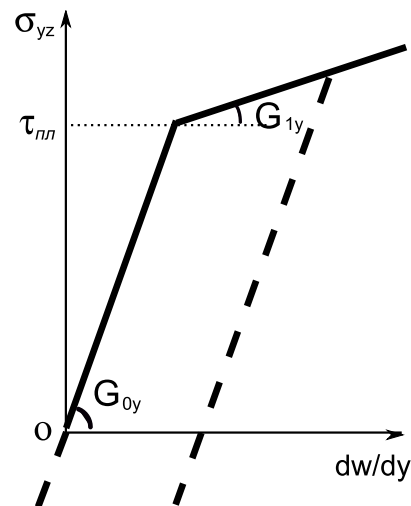
 $G_{1y}$ 

Рис. 3. Діаграма пружно-пластичного деформування з лінійним зміцненням

Припустимо, що величина і напрямок дії зовнішніх силових факторів, що здійснюють поздовжній зсув масиву, змінюються квазістатично. Зовнішнє навантаження визначають монотонно змінні в часових проміжках  $[t_{(p-1)}; t_{(p)}]$  покрокові послідовності силових факторів: рівномірно розподілених на нескінченності напружень  $\sigma_{yz}^\infty = \sum_p \tau_{(p)}(t)$ ,  $\sigma_{xz}^\infty = \sum_p \tau_{k(p)}(t)$ , зосереджених сил інтенсивності  $Q_k(t) = \sum_p Q_{k(p)}(t)$ , гвинтових дислокацій зі складовою вектора Бюргера  $b_k(t) = \sum_p b_{k(p)}(t)$  в точках  $z_{*k} \in S_k$  ( $k=1,2$ ),  $(p)$  – номер кроку навантажування. Напруження на нескінченності повинні в довільний момент часу задовольняти умові  $\tau_{2(p)}(t)G_1 = \tau_{1(p)}(t)G_2$  для забезпечення прямолінійності межі поділу матеріалів. Застосування під час розв'язування задачі однакового традиційного позначення для осі  $z$  та комплексної змінної  $z = x + iy$  не повинно викликати непорозумінь.

Наявність тонкого включення в масиві моделюється стрибком компонент векторів напружень і переміщень на  $L'$  [1]:

$$\begin{aligned} [\sigma_{yz}]_{h(p)} &\cong \sigma_{yz}^- - \sigma_{yz}^+ = f_{3(p)}(x, t), \\ \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{h(p)} &\cong \frac{\partial w^-}{\partial x} - \frac{\partial w^+}{\partial x} = \left[ \frac{\sigma_{xz}}{G} \right]_{h(p)} \cong \frac{\sigma_{xz}^-}{G_1} - \frac{\sigma_{xz}^+}{G_2} = f_{6(p)}(x, t), \quad x \in L'; \\ f_{3(p)}(x, t) &= f_{6(p)}(x, t) = 0, \quad \text{якщо } x \notin L', \end{aligned} \quad (5)$$

де  $(p)$  – номер кроку навантажування;  $t$  – деякий момент часу. Тут і далі позначено:  $[\varphi]_h = \varphi(x, -h) - \varphi(x, +h)$ ,  $\langle \varphi \rangle_h = \varphi(x, -h) + \varphi(x, +h)$ ; індекси «+» та «-» відповідають граничним значенням функцій на верхньому і нижньому краях лінії  $L$ .

Контакт між півпросторами уздовж лінії  $L'' = L \setminus L'$  та між масивом і берегами включення уздовж  $L'$  вважаємо ідеальним

$$w^{in}(x, \pm h) = w_k(x, \pm h), \quad \sigma_{yz}^{in}(x, \pm h) = \sigma_{yzk}(x, \pm h) \quad x \in L'. \quad (6)$$

Математична модель тонкого включення подається у вигляді умов взаємодії [1, 3], які еквівалентні до умов неідеального контакту між прилеглими до включення поверхнями матриці. В основі пропонованої методики моделювання тонкого об'єкту лежить принцип

об'ємного інтегрування визначальних співвідношень, що описують фізико-механічний стан матеріалу включення, з наступним урахуванням малості одного з лінійних розмірів включення:

$$\begin{cases} G_x^{in}(\sigma_{xz}^{in}) \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle_h(x, t) - 2\sigma_{xz}^{in}(-a) - \frac{1}{h} \int_{-a}^x [\sigma_{yz}]_h(\xi, t) d\xi = 0, \\ G_y^{in}(\sigma_{yz}^{in}) [w]_h(x, t) + h \langle \sigma_{yz} \rangle_h(x, t) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Використання методики [1, 7, 8] дозволяє отримати залежності, згідно з якими компоненти тензора напружень і похідні вектора переміщень на лінії  $L$  необмеженої площини  $S$ , а також всередині неї дорівнюють

$$\begin{aligned} \sigma_{yz(1)}^\pm(x, t) &= \mp p_k f_{3(1)}(x, t) - C g_{6(1)}(x, t) + \sigma_{yz(1)}^{0\pm}(x, t), \\ \sigma_{xz(1)}^\pm(x, t) &= \mp C f_{6(1)}(x, t) + p_k g_{3(1)}(x, t) + \sigma_{xz(1)}^{0\pm}(x, t), \\ g_{r(p)}(z, t) &\equiv \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_{r(p)}(x, t) dx}{x - z}, \quad p_k = \frac{G_k}{G_1 + G_2}, \quad C = G_{3-k} p_k, \\ \sigma_{yz(1)}^0(z, t) + i \sigma_{xz(1)}^0(z, t) &= \sigma_{yz(1)}^0(z, t) + i \sigma_{xz(1)}^0(z, t) + i p_k g_{3(1)}^n(z, t) - C g_{6(1)}^n(z, t) \\ &\quad (z \in S_k; \quad r = 3, 6; \quad k = 1, 2). \end{aligned} \quad (8)$$

Величини, відзначені індексом «0» зверху, відповідають НДС масиву без включень за відповідного зовнішнього навантаження (однорідний розв'язок). Тут і далі для кожного кроку навантажування використані позначення [8]:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz(p)}^0(z, t) + i \sigma_{xz(p)}^0(z, t) &= \tau_{(p)}(t) + i \left\{ \tau_{k(p)}(t) + D_{k(p)}(z, t) + \right. \\ &\quad \left. + (p_k - p_j) \bar{D}_{k(p)}(z, t) + 2p_k D_{j(p)}(z, t) \right\}, \\ D_{k(p)}(z, t) &= - \frac{Q_{k(p)}(t) + i G_k b_{k(p)}(t)}{2\pi(z - z_{*k})} \quad (z \in S_k, \quad k = 1, 2; \quad j = 3 - k). \end{aligned} \quad (9)$$

Використовуючи (8), (9) та крайові умови (5), (6) отримаємо з моделі (7) систему сингулярних інтегральних рівнянь (СІР)

$$\begin{cases} (p_2 - p_1) f_{6(1)}(x, t) + 2p g_{3(1)}(x, t) - \frac{1}{h G_x^{in}(\sigma_{xz}^{in})} \int_{-a}^x f_{3(1)}(\xi, t) d\xi = F_{3(1)}(x, \tau, t), \\ (p_2 - p_1) f_{3(1)}(x, t) + 2C g_{6(1)}(x, t) - \frac{G_y^{in}(\sigma_{yz}^{in})}{h} \int_{-a}^x f_{6(1)}(\xi, t) d\xi = F_{6(1)}(x, \tau, t), \end{cases} \quad (10)$$

$$F_{3(1)}(x, \tau, t) = \frac{2}{G_x^{in}(\sigma_{xz}^{in})} \sigma_{xz}^{0k}(-a) - (\sigma_{xz2}^0(x, t)/G_2 + \sigma_{xz1}^0(x, t)/G_1),$$

$$F_{6(1)}(x, \tau, t) = \langle \sigma_{yz}^0 \rangle(x, t) - G_y^{in}(\sigma_{yz}^{in}) \left( \frac{\sigma_{yz2}^0(x, t)}{G_2} + \frac{\sigma_{yz1}^0(x, t)}{G_1} \right) - \frac{G_y^{in}(\sigma_{yz}^{in})}{h} [w^0](-a)$$

з додатковими умовами силового балансу та однозначності переміщень при обході навколо тонкого дефекту

$$\int_{-a}^a f_{3(1)}(\xi, t) d\xi = 2h(\sigma_{xz}^{in}(a) - \sigma_{xz}^{in}(-a)), \quad \int_{-a}^a f_{6(1)}(\xi, t) d\xi = [w](a) - [w](-a). \quad (11)$$

До розв'язування (10)-(11) використовується методика [1] з урахуванням того, що характеристична частина ССІР не залежить від нелінійних коефіцієнтів. У результаті застосування згаданої методики ССІР зводиться на кожному кроці навантажування до системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) на невідомі коефіцієнти розвинення функцій стрибка  $f_{k(1)}(x, t)$  в ряди за поліномами Чебишова.

Залежність  $G_{x(1)}^{in}(\sigma_{xz}^{in}, t)$ ,  $G_{y(1)}^{in}(\sigma_{yz}^{in}, t)$  від поточного НДС масиву породжує істотні труднощі при розрахунку внаслідок його змінності вздовж  $L$ . Введемо позначення:  $\gamma_{xm}^j = G_{x(1)}^{in}(\sigma_{xz}^{in}(x_m))$ ,  $\gamma_{ym}^j = G_{y(1)}^{in}(\sigma_{yz}^{in}(x_m))$  – величини змінних модулів зсуву в точках колокації  $x_m$  ( $m = \overline{1, n}$ ),  $j$  – номер наближення. Далі пропонується відповідна стратегія розв'язування:

- 1) на початковому кроці значення  $\gamma_{xm}^0 = G_{xm(1)}^{in}(0, 0)$ ,  $\gamma_{ym}^0 = G_{ym(1)}^{in}(0, 0)$  вибираються рівними  $G_{0x}^{in}$ ,  $G_{0y}^{in}$ , що відповідають стартовому моменту процесу навантажування при відсутності будь-яких залишкових НДС. Ці значення однакові у всіх точках колокації  $x_m$  ( $m = \overline{1, n}$ );
- 2) починаємо навантажування з деякого значення  $\tau$  чи  $Q_k$  згідно з вибраною схемою;
- 3) розв'язуємо СЛАР. Підставимо отримані розв'язки у співвідношення (10), а потім у (8), обчислюючи НДС в кожній з точок колокації;
- 4) обчислюємо з використанням (2) за заданою схемою деформування відповідне наближення модуля зсуву в кожній точці колокації

$$\gamma_{xm}^j = G_{xm(1)}^{in}(\sigma_{xz}^{in}(x_m, \gamma_{xm}^{j-1})), \quad \gamma_{ym}^j = G_{ym(1)}^{in}(\sigma_{yz}^{in}(x_m, \gamma_{ym}^j)); \quad (12)$$

- 5) перевіряємо, чи виконується в кожній точці колокації задана точність. Якщо «ні», то мінімізуємо відхилення розрахункового модуля пружності від заданого в (2), повторюючи схему розрахунку від пункту 3) з новими значеннями модулів у кожній точці колокації (12), відповідними для даного НДС.

Досліджено, що такий ітераційний процес є збіжним. Отримані на першому (початковому) кроці в момент часу його завершення  $t_{(1)}$  значення НДС масиву матимуть на другому кроці (навантаженні чи розвантаженні) мати зміст залишкових. Тому застосуємо для отримання розв'язку методика [8].

Вважаємо, що постановка задачі на другому кроці відрізняється від постановки задачі на попередньому кроці лише наявністю вже заданих стрибків переміщень та напружень, спричинених попереднім кроком навантажування. Тоді подання загального поля напружень має вигляд:

$$\sigma_{yz}(z, t) + i\sigma_{xz}(z, t) = \sigma_{yz(1)}(z, t_{(1)}) + i\sigma_{xz(1)}(z, t_{(1)}) + \sigma_{yz(2)}^0(z, t) + i\sigma_{xz(2)}^0(z, t) + ip_k g_{3(2)}(z, t) - Cg_{6(2)}(z, t) \quad (z \in S_k; \quad k = 1, 2; \quad j = 3 - k). \quad (13)$$

Переміщення та напруження повинні задовольняти крайові умови (6) на  $L'$ . Тоді з урахуванням (13) можна сформулювати таку локальну задачу для другого кроку:

$$\sigma_{yz(2)}(z, t) + i\sigma_{xz(2)}(z, t) = \{\sigma_{yz}(z, t) + i\sigma_{xz}(z, t)\} - \{\sigma_{yz(1)}(z, t_{(1)}) + i\sigma_{xz(1)}(z, t_{(1)})\} \quad (z \in S_k; \quad k = 1, 2; \quad j = 3 - k) \quad (14)$$

з крайовими умовами (6), які перепишемо у вигляді

$$w_{(1)}^{in}(x, \pm h) + w_{(2)}^{in}(x, \pm h) = w_{k(1)}(x, \pm h) + w_{k(2)}(x, \pm h), \quad x \in L',$$

$$\sigma_{yz(1)}^{in}(x, \pm h) + \sigma_{yz(2)}^{in}(x, \pm h) = \sigma_{yzk(1)}(x, \pm h) + \sigma_{yzk(2)}(x, \pm h),$$

або

$$w_{(2)}^{in}(x, \pm h) = \left\{ w_{k(1)}(x, \pm h) - w_{(1)}^{in}(x, \pm h) \right\} + w_{k(2)}(x, \pm h), \quad x \in L' \tag{15}$$

$$\sigma_{yz(2)}^{in}(x, \pm h) = \left\{ \sigma_{yzk(1)}(x, \pm h) - \sigma_{yz(1)}^{in}(x, \pm h) \right\} + \sigma_{yzk(2)}(x, \pm h).$$

Вирази у фігурних дужках дорівнюють нулю в силу (8) на першому кроці і, отже, умови (15) отримують ідентичний до (6) вигляд

$$w_{(2)}^{in}(x, \pm h) = w_{k(2)}(x, \pm h), \quad \sigma_{yz(2)}^{in}(x, \pm h) = \sigma_{yzk(2)}(x, \pm h) \quad x \in L'. \tag{16}$$

Оскільки вигляд (14), (16) такий самий, як вигляд (6), (8), то ССІР для визначення локальних (щодо досягнутого у момент часу  $t_{(1)}$  НДС) стрибків переміщень та напружень  $f_{3(2)}$ ,  $f_{6(2)}$  від локального (для цього кроку) навантаження

$$\tau_{(2)}(t) = \tau(t) - \tau_{(1)}(t), \quad \tau_{k(2)}(t) = \tau_k(t) - \tau_{k(1)}(t),$$

$$Q_{k(2)}(t) = Q_k(t) - Q_{k(1)}(t_{(1)}) \quad (k = 1, 2; \quad t > t_{(1)}) \tag{17}$$

матиме аналогічний до (10), (11) вигляд.

Залежність  $G_{x(2)}^{in}(\sigma_{xz}^{in}, t)$ ,  $G_{y(2)}^{in}(\sigma_{yz}^{in}, t)$  від поточного локального НДС на цьому кроці вже не може бути обчислена так, як на першому кроці, бо вимагає врахування повного НДС. Тому пропонується відповідний алгоритм їх визначення:

- 1) на наступному кроці як початкові вибираються значення  $G_{x(1)}^{in}(\sigma_{xz}^{in}, t_{(1)})$ ,  $G_{y(1)}^{in}(\sigma_{yz}^{in}, t_{(1)})$ , що відповідають завершальному моменту процесу навантажування на попередньому кроці;
- 2) продовжуємо зовнішнє навантажування як локальне, згідно з (17), за обраною схемою навантажування;
- 3) розв'язуємо СЛАР. Підставляємо отримані розв'язки у співвідношення (12), а потім у (8), обчислюючи локальне НДС у кожній з точок колокації;
- 4) обчислюємо згідно з (14) повний НДС, вважаючи значення НДС з попереднього кроку залишковим;
- 5) обчислюємо, з використанням (1), (2), (12), наступне наближення модуля зсуву у кожній точці колокації;
- 6) перевіряємо, чи виконується в кожній точці колокації задана точність. Якщо «так», то процес розрахунку на цьому кроці завершено і можна переходити до наступного кроку навантаження, вибравши відповідні для кожної точки колокації значення  $G_{x(2)}^{in}(\sigma_{xz}^{in}, t_{(2)})$ ,  $G_{y(2)}^{in}(\sigma_{yz}^{in}, t_{(2)})$  (на пункт 1). Якщо «ні», то мінімізуємо відхилення розрахункового модуля пружності від заданого в (1), повторюючи схему розрахунку від пункту 3) з новими значеннями модулів у кожній точці колокації (12), відповідними для даного НДС. Такий інкрементальний процес можна продовжити на довільну кількість кроків.

Детальніший аналіз розв'язку задачі зробимо для часткового випадку рівності пружних характеристик півпросторів ( $G_1 = G_2 = G$ ), схеми навантаження зосередженими силами інтенсивністю  $\tilde{Q} = Q/aG$  ( $Q_2 = -Q_1 = Q$ ,  $z_2 = -z_1 = id$ ) у симетричному циклі і

деформаційних характеристик включення  $\tilde{G}_{0y} = G_{0y}/\tau_{pl}$ , що відповідають моделі пружно-пластичного деформування зі зміцненням (4). На рисунку 4 показана залежність розміру зони пластичності  $\tilde{b} = b/a$  на від інтенсивності прикладених сил  $\tilde{Q}$  та віддаленості точок їх прикладання  $\tilde{d} = d/a$ . Рис. 5 ілюструє гістерезисну поведінку деформацій у симетричному циклі навантаження.

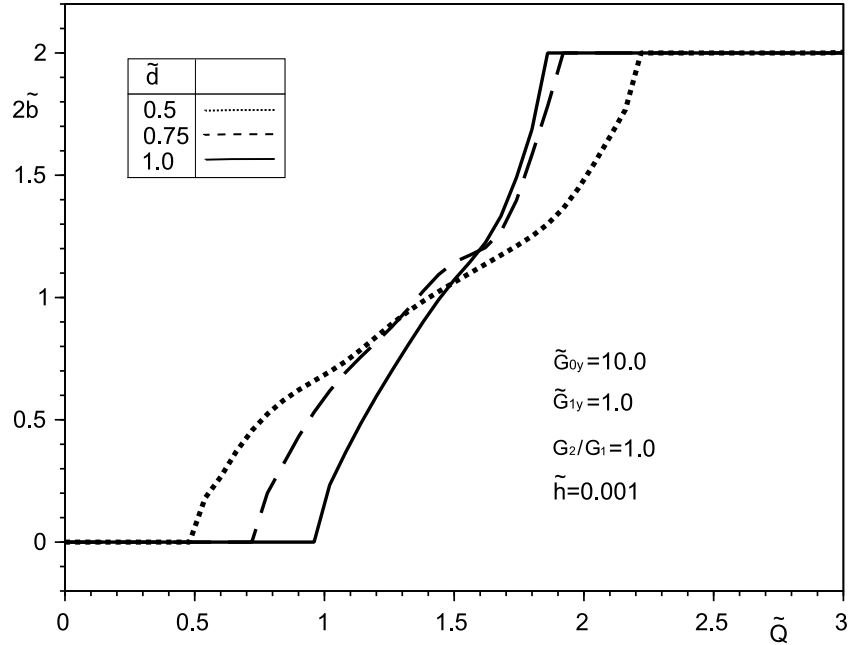


Рис. 4. Вплив параметрів навантаження на розмір зони пластичності

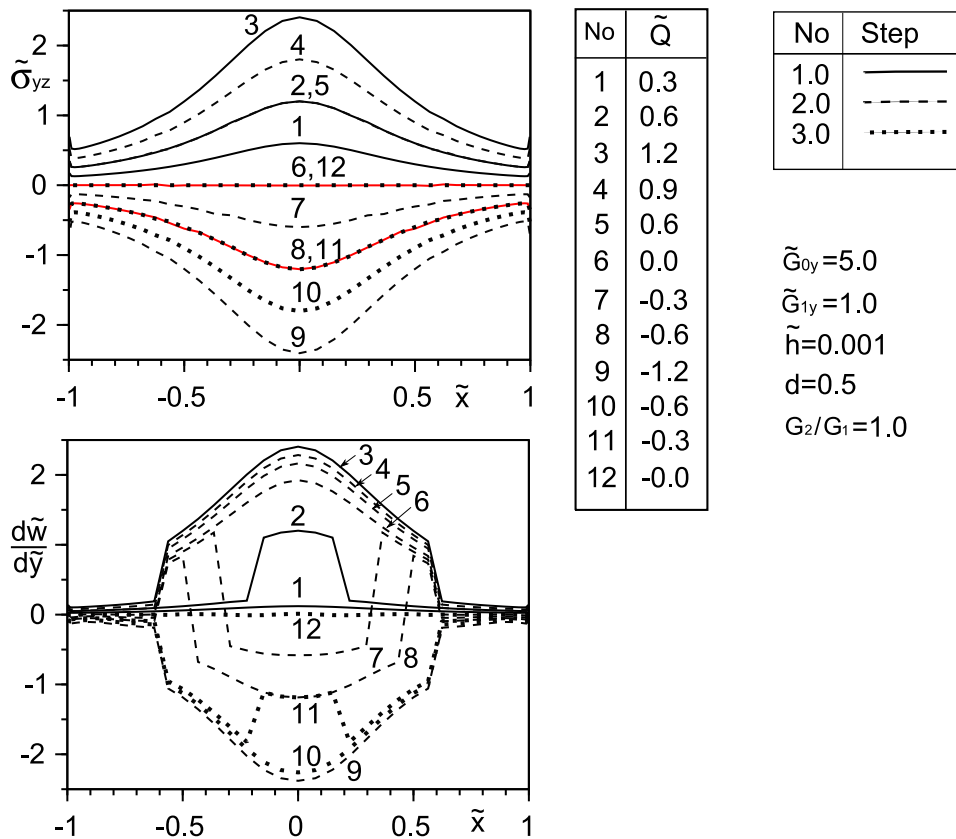


Рис. 5. Гістерезисна поведінка НДС включення при циклічному навантаженні

Отже, побудовано модель тонкого включення з істотно нелінійними механічними властивостями. З її використанням, методом задачі спряження граничних значень аналітичних функцій та методу функцій стрибка, побудована ССІР із змінними коефіцієнтами, для розв'язування якої запропоновано збіжний ітераційний числово-аналітичний метод. Для випадків багатокрокового процесу навантажування розвинуто інкрементальну методику розрахунку НДС у тілі.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Монографія. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. 716 с.
2. Архипенко К. М., Кривий О. Ф. Міжфазна балка при різних типах контактної взаємодії з неоднорідною анізотропною площиною. *Машинознавство*. 2008. № 3(129). С. 16–21.
3. Сулим Г. Т., Піскозуб Й. З. Умови контактної взаємодії (огляд). *Мат. методи і фіз.-мех. поля*. 2004. 47, № 3. С. 110–125.
4. Rice J. R., Rosengren G. F. Plane strain deformation near a crack tip in power law hardening material. *J. of the Mechanics and Physic of Solids*. 1968. V. 16. P. 1–12.
5. Кундрат М. М., Сулим Г. Т. Зони передруйнування в композиції з пружним високомодульним включенням при симетричному та антисиметричному навантаженнях. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*. Львів. 2003. С. 322–324.
6. Мартыняк Р. М., Криштафович А. А. Фрикционный контакт двух упругих полуплоскостей с локальными поверхностными выемками. *Трение и износ*. 2000. 21, № 4. С. 350–360.
7. Піскозуб Л. Г. Поздовжній зсув зосередженою силою біматеріалу з міжфазною тріщиною з урахуванням тертя. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2014. Вип. 20. С. 160–172.
8. Heorhiy Sulym, Lyubov Piskozub, Yosyf Piskozub, Iaroslav Pasternak Antiplane Deformation of a Bimaterial Containing an Interfacial Crack with the Account of Friction. 2. Repeating and Cyclic Loading. *ACTA Mechanica et Automatica*. 2015. Vol. 9, No. 3. P. 178–185.
9. Пастернак Я. М., Сулим Г. Т., Пастернак Р. М. Поздовжній зсув тіла з тонкими стрічковими накладками та пружними включеннями змінної жорсткості при їхньому ідеальному та неідеальному контактах. *Механіка і фізика руйнування будівельних конструкцій: збірник наукових праць*. Вип. 9. Львів: Каменяр, 2012. С. 98–113.

### REFERENCES

1. Sulym, H. T. (2007). Bases of mathematical theory of thermo-elastic equilibrium of solids containing thin inclusions. L'viv: Research and Publishing center of NTSh.
2. Arhipenko, K. M. & Kriviy, O. F. (2008). Interphase beam at different types of contact interaction of heterogeneous anisotropic plane. *Mashynoznavstvo*, No. 3(129), pp. 16-21 (in Ukrainian).
3. Sulym, H. T. & Piskozub, J. Z. (2004). Contact conditions (a survey). *Mat. metody i fiz.-meh. polya* (Journal of Mathematical Science), 47, No. 3, pp. 110-125 (in Ukrainian).
4. Rice, J. R. & Rosengren, G. F. (1968). Plane strain deformation near a crack tip in power law hardening material. *J. of the Mechanics and Physic of Solids*, Vol. 16, pp. 1-12.
5. Kundrat, M. M. & Sulym, H. T. (2003). Prefracture zone in the composition of high-modulus elastic inclusion in the symmetric and antisymmetric load. *Matematychni problemy mehaniky neodnorodnyh struktur*, Lviv, pp. 322-324 (in Ukrainian).
6. Martyniak, R. & Kryshatfovych, A. (2000). Friction contact of two elastic half-planes with local recesses in boundary. *J. Friction and Wear*, 21, No. 4, pp. 6-15.
7. Piskozub, L. G. (2014). Longitudinal shear by concentrated force of bi-material with taking into account friction in the interfacial crack, *Physic-Mathematical Modeling and Informational Technologies*, 20, pp. 160-172 (in Ukrainian).
8. Heorhiy Sulym, Lyubov Piskozub, Yosyf Piskozub & Iaroslav Pasternak (2015). Antiplane Deformation of a Bimaterial Containing an Interfacial Crack with the Account of Friction. 2. Repeating and Cyclic Loading. *ACTA Mechanica et Automatica*, Vol. 9, No. 3, pp. 178-185.
9. Pasternak, I. M., Sulym, G. T. & Pasternak, R. M. (2012). Longitudinal shear of the body with thin straps and elastic inclusions of variable stiffness at their ideal and nonideal contacts. *Mechanika i fizyka ruynuvannia budivelnnykh konstrukciy*, Lviv, Kameniar, 9, pp. 98-113 (in Ukrainian).

УДК 517.944

## ИНТЕГРО-ОПЕРАТОРНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ КРАЙОВИХ ПЕРІОДИЧНИХ ЗАДАЧ

<sup>1</sup>Хома Н. Г., к. ф.-м. н., доцент, <sup>1</sup>Хома–Могильська С. Г., к. ф.-м. н., доцент,  
<sup>2</sup>Хохлова Л. Г., к. ф.-м. н., доцент

<sup>1</sup>*Тернопільський національний економічний університет,  
вул. Львівська, 11, м. Тернопіль, 46020, Україна*

<sup>2</sup>*Тернопільський національний педагогічний університет ім. Володимира Гнатюка,  
вул. М. Кривоноса, 2, м. Тернопіль, 46027, Україна*

khoma.nadiya@gmail.com, sv\_khoma@ukr.net, larysa\_khokhlova@ukr.net

Досліджуються крайові періодичні задачі для лінійного та квазілінійного рівнянь гіперболічного типу, використовуючи аналітичні методи. Побудовано оператор, що переводить клас  $2\pi$ -періодичних функцій у самого себе. Встановлено оцінки, необхідні для доведення теореми існування розв'язку квазілінійної крайової періодичної задачі.

*Ключові слова: крайова періодична задача, квазілінійне рівняння, властивості розв'язку, інтегральний оператор, аналітичний метод.*

## ИНТЕГРА-ОПЕРАТОРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

<sup>1</sup>Хома Н. Г., к. ф.-м. н., доцент, <sup>1</sup>Хома–Могильская С. Г., к. ф.-м. н., доцент,  
<sup>2</sup>Хохлова Л. Г., к. ф.-м. н., доцент

<sup>1</sup>*Тернопольский национальный экономический университет,  
ул. Львовская, 11, г. Тернополь, 46020, Украина*

<sup>2</sup>*Тернопольский национальный педагогический университет им. Владимира Гнатюка,  
ул. М. Кривоноса, 2, г. Тернополь, 46027, Украина*

khoma.nadiya@gmail.com, sv\_khoma@ukr.net, larysa\_khokhlova@ukr.net

Исследуются краевые периодические задачи для линейного и квазилинейного уравнений гиперболического типа, используя аналитические методы. Построен оператор, переводящий класс  $2\pi$ -периодических функций в себя. Установлены оценки, необходимые для доказательства теоремы существования решения квазилинейной краевой периодической задачи.

*Ключевые слова: краевая периодическая задача, квазилинейное уравнение, свойства решения, интегральный оператор, аналитический метод.*

## INTEGRA-OPERATOR RESEARCH OF BOUNDARY-VALUE PERIODIC PROBLEM

<sup>1</sup>Khoma N. H., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor,  
<sup>1</sup>Khoma-Mohylska S. H., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor,  
<sup>2</sup>Khokhlova L. H., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor

<sup>1</sup>*Ternopil national economic university,  
Lvivs'ka str., 11, Ternopil', 46020, Ukraine,*

<sup>2</sup>*Ternopil Volodymyr Hnatiuk national pedagogical university,  
M. Krivonosa str., 2, Ternopil', 46027, Ukraine*

khoma.nadiya@gmail.com, sv\_khoma@ukr.net, larysa\_khokhlova@ukr.net

We obtain some results concerning the investigation the boundary-value periodic problems for the linear and quasilinear non-homogeneous second order hyperbolic equations using analytical method.

The boundary-value periodic problem for differential equations in partial derivatives, including hyperbolic equations, are complicated and controversial subject of study. Boundary problems with data throughout the border region as well as the problem of non-local (including integrated) conditions for hyperbolic equations in limited areas are, generally speaking, relatively correct. Many authors link the



solvability of such problems with the problem of small denominators and use the methods of nonlinear functional analysis, the theory of implicit functions, variation methods.

We use the analytical methods in the research of periodic boundary-value problems for second order hyperbolic equations. We build the integrated operators and seek the solution in specially spaces of continuously differentiated periodic functions. By studying the properties of the internal integral of the

function  $\tilde{u}_H(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau) d\xi$  the operator which transforms a class of periodic function

$Q_{2\pi \times 2\pi}^- = \{u : u(x,t) = -u(-x,t) = u(x+2\pi,t) = u(x,t+2\pi)\}$  into itself is constructed. Estimations used in the proof of the existence theorem of periodic solutions to quasi-linear boundary-value periodic

problem  $v_{tt} - v_{xx} = F[v, v_t, v_x](x,t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F[v, v_t, v_x](x+t-s,s) + F[v, v_t, v_x](x-t+s,s)) ds,$

$v(0,t) = v(\pi,t) = 0, v(x,t+2\pi) = v(x,t), (x,t) \in \mathbf{R}^2,$  are established. Obtained result can be used for further research the uniqueness of the solution to quasi-linear boundary-value periodic problem.

*Key words:* boundary-value periodic problem, quasi-linear equation, solution properties, integral operator, analytical method.

## ВСТУП

Крайові періодичні задачі для диференціальних рівнянь у частинних похідних, зокрема гіперболічних рівнянь, є складним та неоднозначним об'єктом дослідження. Крайові задачі з даними на всій границі області, а також задачі з нелокальними (у тому числі інтегральними) умовами для гіперболічних рівнянь в обмежених областях є, загалом, умовно коректними. Багато авторів пов'язують розв'язність таких задач з проблемою малих знаменників [1-3] та використовують при цьому методи нелінійного функціонального аналізу, теорії неявних функцій, варіаційні методи. Починаючи з 80-х років ХХ ст. ряд учених [4-6], при дослідженні крайових періодичних задач для гіперболічних рівнянь другого порядку використовують аналітичні методи та у своїх працях будують інтегральні оператори і розв'язок шукають у спеціально визначених просторах неперервно диференційованих функцій для конкретних випадків періодичності.

У нашій роботі, яка є продовженням праць [7-11], використано результати та методи досліджень [6, 10, 11].

## ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

При дослідженні крайових періодичних задач виду  $u_{tt} - u_{xx} = g(x,t), u(0,t) = u(\pi,t) = 0, u(x,t+2\pi) = u(x,t), 0 \leq x \leq \pi, t \in \mathbf{R},$  стверджується, що єдиний класичний ( $u \in C^2$ ) розв'язок вказаних задач може існувати лише при додаткових умовах. Зокрема, у роботі О. Вейводи та М. Штедри [4] такими умовами є спеціальний клас функцій  $A_3 = \{g : g(x,t) = g(\pi-x,t+\pi) = g(x,t+2\pi)\}$  та твердження, що розв'язок

$$u^0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \sin kx \tag{1}$$

відповідної однорідної крайової періодичної задачі  $u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0, u^0(0,t) = u^0(\pi,t) = 0, u^0(x,t+2\pi) = u^0(x,t), 0 \leq x \leq \pi, t \in \mathbf{R}$  є тривіальний (тобто  $a_k = b_k = 0, k \in \mathbf{N}$ ). З іншого боку, в роботі П. Рабиновича [1] доведено, що класичний розв'язок крайової періодичної задачі  $u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon F(x,t,u), u(0,t) = u(\pi,t) = 0, u(x,t+2\pi) = u(x,t), 0 \leq x \leq \pi, t \in \mathbf{R}$  існує у вигляді  $u(x,t) = u^0(x,t) + \varepsilon w(x,t)$  без введення спеціального класу функцій і без обмеження на  $u^0(x,t)$ . Нами раніше встановлено [6], що результат О. Вейводи і М. Штедри вимагає додаткових умов і залежить від методу дослідження. А також показано, що і результат П. Рабиновича справедливий.

Якщо питання існування єдиного розв'язку досліджувати у вигляді ряду

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx, \quad u_k(t + 2\pi) = u_k(t), \quad (2)$$

то звідси випливає, що він належить до класу обмежених функцій вигляду

$$\mathcal{Q}_{2\pi \times 2\pi}^- = \{u : u(x, t) = -u(-x, t) = u(x + 2\pi, t) = u(x, t + 2\pi)\}. \quad (3)$$

Використовуючи введений клас функцій (3) і клас  $\mathcal{Q}_{2\pi}^- = \{\mu : \mu(z) = -\mu(-z) = \mu(z + 2\pi)\}$ , встановимо ряд тверджень, на основі яких можна побудувати оператор, що переводить клас періодичних функцій  $\mathcal{Q}_{2\pi \times 2\pi}^-$  у цей же клас функцій та покажемо використання одержаних результатів для дослідження квазілінійних крайових періодичних задач.

### ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ ТА ОБҐРУНТУВАННЯ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що для кожної непарної і  $2\pi$ -періодичної функції  $\mu(z) \in C^1(\mathbf{R}) \cap \mathcal{Q}_{2\pi}^-$  та  $f(x, t) \in C^{1,0}(\mathbf{R}^2) \cap \mathcal{Q}_{2\pi \times 2\pi}^-$  лінійна крайова задача

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t), \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbf{R}^2 \quad (4)$$

має єдиний класичний розв'язок, який задається формулою

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi \equiv u^0(x, t) + \tilde{u}_H(x, t), \quad (5)$$

де  $u^0(x, t)$  – розв'язок відповідної однорідної крайової задачі ( $f(x, t) \equiv 0$ ), а  $\tilde{u}_H(x, t)$  – частинний розв'язок лінійної неоднорідної крайової задачі (4).

Вивчаючи властивості внутрішнього інтегралу функції (оператора Даламбера)

$$\tilde{u}_H(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi, \quad (6)$$

можна дослідити існування  $2\pi$ -періодичних розв'язків крайових періодичних задач для гіперболічних рівнянь другого порядку. Скористаємося позначенням

$$K(x, t, \tau) = \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi.$$

**Лема 1.** Якщо  $f(x, t) \in C(\mathbf{R}^2) \cap \mathcal{Q}_{2\pi \times 2\pi}^-$ , то

- 1)  $K(x + 2\pi, t, \tau) = K(x, t, \tau)$ ;
- 2)  $K(x, t + 2\pi, \tau) = K(x, t, \tau)$ ;
- 3)  $K(x, t, \tau + 2\pi) = K(x, t, \tau)$ ;
- 4)  $K(-x, t, \tau) = -K(x, t, \tau)$ .

**Доведення.** Безпосередньою перевіркою переконуємося у справедливості твердження 1) леми 1. Доведемо друге твердження:

$$K(x, t + 2\pi, \tau) = \int_{x-(t+2\pi)+\tau}^{x+(t+2\pi)-\tau} f(\xi, \tau) d\xi = \int_{x-t+\tau-2\pi}^{x-t+\tau} f(\xi, \tau) d\xi + \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi + \int_{x+t-\tau}^{x+t-\tau+2\pi} f(\xi, \tau) d\xi =$$

$$= \int_{-2\pi}^0 f(\xi, \tau) d\xi + \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi + \int_0^{2\pi} f(\xi, \tau) d\xi = \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi = K(x, t, \tau).$$

Аналогічно доводиться твердження 3) і 4) леми 1.

**Лема 2.** Нехай  $f(x, t) \in C(\mathbf{R}^2) \cap Q_{2\pi \times 2\pi}^-$ . Тоді оператор, визначений формулою

$$\begin{aligned} (Pf)(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_0^t \left( \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(\xi, s) d\xi \right) d\tau \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_0^t \left( K(x, t, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau \end{aligned} \quad (7)$$

при кожній функції  $\mu(z) \in C(\mathbf{R}) \cap Q_{2\pi}^-$  переводить функцію  $f$  із класу  $Q_{2\pi \times 2\pi}^-$  в клас  $Q_{2\pi \times 2\pi}^-$ , причому

$$(Pf)(0, t) = 0, \quad (Pf)(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (8)$$

**Доведення.** Покажемо, що функція  $(Pf)$  задовольняє крайові умови (8). На основі (7) при  $x = 0$  одержуємо

$$(Pf)(0, t) = 0 + \frac{1}{2} \int_0^t \left( \int_{-(t-\tau)}^{t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_{-(t-s)}^{t-s} f(\xi, s) d\xi \right) d\tau. \quad (9)$$

Оскільки при  $f(x, t) \in Q_{2\pi \times 2\pi}^-$  інтеграл

$$\int_{-(t-\tau)}^{t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi \equiv 0, \quad t \in \mathbf{R}, \quad \tau \in \mathbf{R}, \quad (10)$$

то на основі (9) і (10) маємо  $(Pf)(0, t) = 0$ , тобто функція  $(Pf)$  задовольняє першу крайову умову (8). Тепер, покладаючи  $x = \pi$  у формулі (7), одержуємо

$$(Pf)(\pi, t) = \frac{1}{2} \int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_0^t \left( \int_{\pi-t+\tau}^{\pi+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_{\pi-t+s}^{\pi+t-s} f(\xi, s) d\xi \right) d\tau. \quad (11)$$

Доведемо, що при  $f(x, t) \in C(\mathbf{R}^2) \cap Q_{2\pi \times 2\pi}^-$  та  $\mu(z) \in C(\mathbf{R}) \cap Q_{2\pi}^-$  інтеграли

$$\int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha \equiv 0; \quad \int_{\pi-t+\tau}^{\pi+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi \equiv 0, \quad t \in \mathbf{R}, \quad \tau \in \mathbf{R}.$$

Справді,

$$\begin{aligned} \int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha &= \int_0^{2\pi} \mu(\alpha) d\alpha \equiv 0; \\ \int_{\pi-t+\tau}^{\pi+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi &= \int_{-t+\tau}^{t-\tau} f(\pi+\eta, \tau) d\eta = \int_{-t+\tau}^0 f(\pi+\eta, \tau) d\eta + \int_0^{t-\tau} f(\pi+\eta, \tau) d\eta = \\ &= \int_0^{t-\tau} f(\pi-\zeta, \tau) d\zeta + \int_0^{t-\tau} f(\pi+\eta, \tau) d\eta = - \int_0^{t-\tau} f(\pi+\zeta, \tau) d\zeta + \int_0^{t-\tau} f(\pi+\eta, \tau) d\eta \equiv 0. \end{aligned}$$

Отже, на основі (11) і доведених рівностей маємо  $(Pf)(\pi, t) = 0$ ,  $t \in \mathbf{R}$ . Отже, і друга крайова умова (8) виконується.

Доведемо тепер справедливості рівностей

$$(Pf)(x + 2\pi, t) = (Pf)(x, t); \quad (12)$$

$$(Pf)(x, t + 2\pi) = (Pf)(x, t); \quad (13)$$

$$(Pf)(-x, t) = -(Pf)(x, t). \quad (14)$$

Оскільки  $(Pf)(x, t) \equiv u^0(x, t) + \tilde{u}(x, t)$ , то спочатку доведемо, що властивостями (12)-(14)

володіє розв'язок  $u^0(x, t) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha$  однорідної крайової періодичної задачі  $u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0$ ,

$u^0(0, t) = u^0(\pi, t) = 0$ ,  $u^0(x, t + 2\pi) = u^0(x, t)$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .

Нехай  $\mu(z) \in C(\mathbf{R}) \cap Q_{2\pi}^-$ . Тоді

$$\begin{aligned} u^0(x + 2\pi, t) &= \frac{1}{2} \int_{t-x-2\pi}^{t+x+2\pi} \mu(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} \int_{t-x-2\pi}^{t-x} \mu(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_{t+x}^{t+x+2\pi} \mu(\alpha) d\alpha = \\ &= 0 + u^0(x, t) + 0 = u^0(x, t), \end{aligned}$$

$$u^0(x, t + 2\pi) = \frac{1}{2} \int_{t-x+2\pi}^{t+x+2\pi} \mu(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\eta + 2\pi) d\eta = u^0(x, t);$$

$$u^0(-x, t) = \frac{1}{2} \int_{t+x}^{t-x} \mu(\alpha) d\alpha = -\frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha = -u^0(x, t),$$

що й потрібно було довести.

Тепер покажемо, що властивостями (12)–(14) володіє і розв'язок

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \left( K(x, t, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau. \quad (15)$$

Справді,

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x + 2\pi, t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \left( K(x + 2\pi, t, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x + 2\pi, t, s) ds \right) d\tau = \tilde{u}(x, t); \\ \tilde{u}(x, t + 2\pi) &= \frac{1}{2} \int_0^{t+2\pi} \left( K(x, t + 2\pi, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t + 2\pi, s) ds \right) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \left( K(x, t, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau + \frac{1}{2} \int_t^{t+2\pi} \left( K(x, t, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau = \\ &= \tilde{u}(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( K(x, t, \tau) - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau = \\ &= \tilde{u}(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( K(x, t, \tau) - \frac{2\pi}{4\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau \equiv \tilde{u}(x, t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}(-x, t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \left( \int_{-x-t+\tau}^{-x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_{-x-t+s}^{-x+t-s} f(\xi, s) d\xi \right) d\tau = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^t \left( \int_{x+t-\tau}^{x-t+\tau} f(-\eta, \tau) d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_{x+t-s}^{x-t+s} f(-\eta, s) d\eta \right) d\tau = -\tilde{u}(x, t), \end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

Використовуючи доведені властивості для функцій  $u^0(x, t)$  і  $\tilde{u}(x, t)$  та зображення оператора  $(Pf)(x, t) \equiv u^0(x, t) + \tilde{u}(x, t)$ , переконуємося у справедливості тверджень леми 2.

Одержані результати дозволяють використовувати аналітичний метод для дослідження нелінійних та квазілінійних крайових періодичних задач. Покажемо це на прикладі такої квазілінійної крайової  $2\pi$ -періодичної задачі:

$$v_{tt} - v_{xx} = F[v, v_t, v_x](x, t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F[v, v_t, v_x](x+t-s, s) + F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)) ds, \quad (16)$$

$$v(0, t) = v(\pi, t) = 0, \quad v(x, t+2\pi) = v(x, t), \quad (x, t) \in \mathbf{R}^2. \quad (17)$$

**Теорема.** Нехай для кожної функції  $v(x, t) \in C^2(\mathbf{R}^2) \cap Q_{2\pi \times 2\pi}^-$  функція  $F[v, v_t, v_x](x, t) = f(x, t, v(x, t), v_t(x, t), v_x(x, t)) \in C^1(\mathbf{R}^2) \cap Q_{2\pi \times 2\pi}^-$ . Тоді функція  $v(x, t) = (PF[v, v_t, v_x])(x, t)$ , визначена формулою

$$\begin{aligned} v(x, t) &= (PF[v, v_t, v_x])(x, t) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \left( \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} F[v, v_t, v_x](\xi, \tau) d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_{x-t+s}^{x+t-s} F[v, v_t, v_x](\xi, s) d\xi \right) d\tau \equiv \\ &\equiv z(x, t) + (P_0F[v, v_t, v_x])(x, t) \end{aligned} \quad (18)$$

є  $2\pi$ -періодичним розв'язком задачі (16), (17).

**Доведення.** Те, що функція  $v(x, t)$ , визначена інтегральним рівнянням (18), задовольняє умови (17), було показано при доведенні тверджень леми 2. Тепер доведемо виконання рівності (16). Обчислимо похідні другого порядку  $v_{tt}$  та  $v_{xx}$ :

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &= \frac{1}{2} (\mu(t+x) - \mu(t-x)) - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_{x-t+s}^{x+t-s} F[v, v_t, v_x](\xi, s) d\xi + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \left( F[v, v_t, v_x](x+t-\tau, \tau) + F[v, v_t, v_x](x-t+\tau, \tau) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F[v, v_t, v_x](x+t-s, s) + F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)) ds \right) d\tau; \\ v_{tt}(x, t) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mu(t+x)}{\partial(t+x)} - \frac{\partial \mu(t-x)}{\partial(t-x)} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (F[v, v_t, v_x](x+t-s, s) + F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)) ds + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \left( \frac{\partial F[v, v_t, v_x](x+t-\tau, \tau)}{\partial(x+t-\tau)} - \frac{\partial F[v, v_t, v_x](x-t+\tau, \tau)}{\partial(x-t+\tau)} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial F[v, v_t, v_x](x+t-s, s)}{\partial(x+t-s)} - \frac{\partial F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)}{\partial(x-t+s)} \right) ds \right) d\tau + \\
& + \frac{1}{2} (F[v, v_t, v_x](x, t) + F[v, v_t, v_x](x, t)) - \\
& - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (F[v, v_t, v_x](x+t-s, s) + F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)) ds
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
v_{tt}(x, t) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mu(t+x)}{\partial(t+x)} - \frac{\partial \mu(t-x)}{\partial(t-x)} \right) + F[v, v_t, v_x](x, t) - \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F[v, v_t, v_x](x+t-s, s) + F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)) ds + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \left( \frac{\partial F[v, v_t, v_x](x+t-\tau, \tau)}{\partial(x+t-\tau)} - \frac{\partial F[v, v_t, v_x](x-t+\tau, \tau)}{\partial(x-t+\tau)} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial F[v, v_t, v_x](x+t-s, s)}{\partial(x+t-s)} - \frac{\partial F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)}{\partial(x-t+s)} \right) ds \right) d\tau; \tag{19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_x(x, t) &= \frac{1}{2} (\mu(t+x) - \mu(t-x)) + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t (F[v, v_t, v_x](x+t-\tau, \tau) - F[v, v_t, v_x](x-t+\tau, \tau) - \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F[v, v_t, v_x](x+t-s, s) - F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)) ds) d\tau;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{xx}(x, t) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mu(t+x)}{\partial(t+x)} - \frac{\partial \mu(t-x)}{\partial(t-x)} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \left( \frac{\partial F[v, v_t, v_x](x+t-\tau, \tau)}{\partial(x+t-\tau)} - \frac{\partial F[v, v_t, v_x](x-t+\tau, \tau)}{\partial(x-t+\tau)} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial F[v, v_t, v_x](x+t-s, s)}{\partial(x+t-s)} - \frac{\partial F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)}{\partial(x-t+s)} \right) ds \right) d\tau. \tag{20}
\end{aligned}$$

На основі рівностей (19) і (20) знаходимо

$$v_{tt} - v_{xx} = F[v, v_t, v_x](x, t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F[v, v_t, v_x](x+t-s, s) + F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)) ds,$$

що й потрібно було довести.

Встановимо ряд оцінок, необхідних для доведення теореми існування розв'язку квазілінійної крайової періодичної задачі (16), (17).

**Лема 3.** Нехай  $f(x, t)$  – неперервна на прямокутнику  $\bar{\Pi}_{2\pi} = \{0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq t \leq 2\pi\}$  функція.

Тоді для ядра  $K(x, t, \tau) = \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi$  оператора Д'Аламбера

$$(\tilde{P}f)(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi$$

$$|K(x, t, \tau)| \leq M_0 |t - \tau|,$$

де  $M_0 = \max_{(x,t) \in \bar{\Pi}_{2\pi}} |f(x, t)|$ .

**Лема 4.** Нехай  $f(x, t)$  – неперервна на прямокутнику  $\bar{\Pi}_{2\pi}$  функція. Тоді

$$\left| \int_0^t \left( K(x, t, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau \right| \leq \frac{1}{2} (2\pi t - t^2) M_0 \equiv \frac{M_0}{2} \beta_1(t),$$

де  $\beta_1(t) = 2\pi t - t^2$ , причому  $\beta_1(t) \leq \pi^2 \forall t \in [0, 2\pi]$ .

**Доведення.** Враховуючи твердження леми 3, маємо

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \left( K(x, t, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau \right| &= \left| \int_0^t \left( K(x, t, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^t K(x, t, s) ds - \frac{1}{2\pi} \int_t^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau \right| = \\ &= \left| \int_0^t K(x, t, \tau) - \frac{t}{2\pi} \int_0^t K(x, t, s) ds - \frac{t}{2\pi} \int_t^{2\pi} K(x, t, s) ds \right| \leq \\ &\leq \left( \left( 1 - \frac{t}{2\pi} \right) \int_0^t |K(x, t, \tau)| d\tau + \left| \frac{t}{2\pi} \int_t^{2\pi} |K(x, t, s)| ds \right| \right) \leq \left( 1 - \frac{t}{2\pi} \right) M_0 \int_0^t |t - \tau| d\tau + \left| \frac{M_0 t}{2\pi} \int_t^{2\pi} |t - s| ds \right| = \\ &= \frac{M_0}{2} \left( 1 - \frac{t}{2\pi} \right) \left( -(t - \tau)^2 \right) \Big|_0^t + \frac{M_0 t}{4\pi} (s - t)^2 \Big|_t^{2\pi} = \frac{M_0}{2} \left( 1 - \frac{t}{2\pi} \right) t^2 + \frac{M_0 t}{4\pi} (2\pi - t)^2 = \\ &= \frac{M_0}{4\pi} \left( (2\pi - t)t^2 + t(2\pi - t)^2 \right) = \frac{M_0}{4\pi} (2\pi t^2 - t^3 + 4\pi^2 t - 4\pi t^2 + t^3) = \\ &= \frac{M_0}{4\pi} (4\pi^2 t - 2\pi t^2) = \frac{M_0}{2} (2\pi t - t^2) \equiv \frac{M_0}{2} \beta_1(t), \end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

Одержані оцінки ми використаємо в подальшому для доведення теореми єдиності розв'язку квазілінійної крайової періодичної задачі.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Rabinowitz P. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 1967. **20**, № 1. P. 145–205.
2. Brezis H., Coron J. M., Nirenberg L. Free vibrations for a nonlinear wave equations and a theorem of P. Rabinowitz. *Comm. Pure Appl. Math.* 1980. Vol. **33**. P. 667–689.
3. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. Київ: Наукова думка, 2002. 416 с.
4. Вейвода О., Штедры М. Существование классических периодических решений волнового уравнения. Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений. *Дифференциальные уравнения*. 1984. **XX**, № 10. С. 1733–1739.
5. Хохлова Л. Г., Хома Н. Г., Петрівський Я. Б. Тривіальні розв'язки однорідної крайової періодичної задачі. *Волинський матем. вісник*. 1995. Вип. 2. С. 179–182.
6. Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г. Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку I. *Укр. Мат. журн.* 2005. **57**, № 7. С. 912–921.
7. Самойленко А. М., Хома Н. Г., Хома-Могильська С. Г. Властивості  $2\pi$ -періодичних розв'язків крайової задачі. *Доповіді НАН України*. 2010. № 10. С. 18–21.
8. Самойленко А. М., Хома Н. Г., Хома-Могильська С. Г. Окремий випадок існування  $2\pi$ -періодичних розв'язків крайових задач для гіперболічного рівняння другого порядку. *Доповіді НАН України*. 2012. № 2. С. 35–41.
9. Хома-Могильська С. Г. Представлення розв'язку крайової періодичної задачі для гіперболічного рівняння другого порядку. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: Математика і інформатика*. 2014. Вип. 25, № 1. С. 133–136.
10. Khoma G. P., Khoma N. G., Khoma-Mohylska S. G. Existence T-periodic solutions of the second-order hyperbolic equations. *Modern scientific research and their practical application*. 2014. Vol. J21414-002. P. 9–13.
11. Хома Н. Г., Хома-Могильська С. Г., Хохлова Л. Г. Умови існування  $2\pi$ -періодичного гладкого розв'язку квазілінійного рівняння гіперболічного типу. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 257–264.

## REFERENCES

1. Rabinowitz, P. (1967). Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 20, No. 1, pp. 145-205.
2. Brezis, H., Coron, J. M. & Nirenberg, L. (1980). Free vibrations for a nonlinear wave equations and a theorem of P. Rabinowitz. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 33, pp. 667-689.
3. Ptashnyk, B. Y., Ilkiv, V. S., Kmit, I. Ya. & Polishchuk, V. M. (2002). Unlocal regional tasks are for equalizations with the derivatives of part. Kiev: Naukova dumka.
4. Veyvoda, O. & Shtedry, M. (1984). Existence of classic periodic decisions of wave equalization. Connection of теоретико-числового character of period and geometrical properties of decisions.. *Differentsialnyye uravneniya*, XX, No. 10, pp. 1733-1739.
5. Khokhlova, L. H., Khoma, N. H. & Petrivskiy, Ya. B. (1995). Banal upshots of homogeneous regional periodic task. *Volynskiy matem. visnyk*, Iss. 2, pp. 179-182.
6. Mytropolskiy, Yu. O. & Khoma-Mohylska, S. H. (2005). Terms of existence of decisions of regional periodic task for heterogeneous linear hyperbolical equalization of the second order I. *Ukr. Mat. zhurn.*, 57, No. 7, pp. 912-921.
7. Samoilenko, A. M., Khoma, N. H. & Khoma-Mohylska, S. H. (2010). Properties of  $2\pi$ -periodic decisions of regional task. *Dopovidi NAN Ukrainy*, No. 10, pp. 27-32.
8. Samoilenko, A. M., Khoma, N. H. & Khoma-Mohylska, S. H. (2012). A separate case of existence of  $2\pi$ -periodic decisions of regional tasks is for hyperbolical equalization of the second order. *Dopovidi NAN Ukrainy*, No. 2, p. 35-41.
9. Khoma-Mohylska, S. H. (2014). Presentation of decision of regional periodic task is for hyperbolical equalization of the second order. *Naukovyi visnyk Uzhhorodskoho universytetu. Seriya: Matematyka i informatyka*, Iss. 25, No. 1, pp. 133-136.
10. Khoma, G. P., Khoma, N. G. & Khoma-Mohylska, S. G. (2014). Existence T-periodic solutions of the second-order hyperbolic equations. *Modern scientific research and their practical application*, Vol. J21414-002, pp. 9-13.
11. Khoma, N. H., Khoma-Mohylska, S. H. & Khokhlova, L. H. (2016). Existence conditions of  $2\pi$ -periodic smooth solution to the quasi-linear equation of hyperbolic type. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Fyzyko-matematychni nauky*, No. 1, pp. 257-264.



УДК 519.3

## ГЕОМЕТРИЯ КОНОИДА И ФИЗИЧЕСКАЯ НЕАДЕКВАТНОСТЬ СТАНДАРТНЫХ СЕРЕНДИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

<sup>1</sup>Хомченко А. Н., <sup>2</sup>Литвиненко Е. И., <sup>2</sup>Астионенко И. А.

<sup>1</sup>Черноморский национальный университет им. П. Могилы,  
ул. 68 Десантников, 10, г. Николаев, Украина

<sup>2</sup>Херсонский национальный технический университет,  
Бериславское шоссе, 24, г. Херсон, Украина

<sup>1</sup>khan@chdu.edu.ua, <sup>2</sup>mmkntu@gmail.com

Рассматривается известный парадокс «гравитационного отталкивания», возникающий в задачах о поузловом распределении равномерной массовой нагрузки на конечном элементе. Показано, что в задаче серендиповой аппроксимации на стандартных элементах решающая роль принадлежит коноидам, которые ассоциируются с промежуточными узлами на сторонах квадратного носителя. Именно коноид (линейчатая поверхность) делает модель стандартного элемента чрезмерно «жесткой». От этого недостатка можно избавиться, заменив поверхность нулевой гауссовой кривизны поверхностью отрицательной кривизны.

*Ключевые слова:* конечный элемент, серендипова аппроксимация, коноид, гауссова кривизна.

## ГЕОМЕТРИЯ КОНОЇДА І ФІЗИЧНА НЕАДЕКВАТНІСТЬ СТАНДАРТНИХ СЕРЕНДИПОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ

<sup>1</sup>Хомченко А. Н., <sup>2</sup>Литвиненко О. І., <sup>2</sup>Астіоненко І. О.

<sup>1</sup>Чорноморський національний університет ім. П. Могилы,  
вул. 68 Десанників, 10, м. Миколаїв, Україна

<sup>2</sup>Херсонський національний технічний університет,  
Бериславське шосе, 24, м. Херсон, Україна

<sup>1</sup>khan@chdu.edu.ua, <sup>2</sup>mmkntu@gmail.com

Розглядається відомий парадокс «гравітаційного відштовхування», який виникає в задачах про поузловий розподіл рівномірного вагового навантаження на скінченному елементі. Показано, що в задачі серендипової апроксимації на стандартних елементах вирішальна роль належить коноїдам, які асоціюються з проміжними вузлами на сторонах квадратного носія. Саме коноїд (лінійчатая поверхня) робить модель стандартного елемента надмірно «жорсткою». Цього недоліку можна позбутися, замінивши поверхню нульової гауссової кривини поверхню від'ємної кривини.

*Ключові слова:* скінченний елемент, серендипова апроксимація, коноїд, гауссова кривина.

## GEOMETRY OF CONOID AND PHYSICAL INADEQUACY OF STANDARD SERENDIPITY ELEMENTS

<sup>1</sup>Khomchenko A. N., <sup>2</sup>Litvinenko Ye. I., <sup>2</sup>Astionenko I. A.

<sup>1</sup>Petro Mohyla Black Sea National University,  
68 Desantnikov str, 10, Mykolaiv, Ukraine

<sup>2</sup>Kherson National Technical University,  
Berislavskoe shosse, 24, Kherson, Ukraine

<sup>1</sup>khan@chdu.edu.ua, <sup>2</sup>mmkntu@gmail.com

The well-known paradox of “gravitational repelling” which occurs in the problems on per-node distribution of equal mass load on the finite element is researched. It is shown that in the problem of serendipity approximation on the standard elements the decisive role belongs to conoids, which are associated with transitional nodes on the sides of square carrier. The rise of physical inadequacy in per-node distribution of equal mass load on the finite element has been called by the use of conoid fragments when the approximating surface is forming. The finite elements of the second, third and fourth order have been researched. It is demonstrated that conoids influence grows together with the increase of the finite element order. This is conoid (ruled surface) which makes the model of standard element excessively “hard”. We mean not only mechanical “hardness” such as higher resistance to curve, but also the mathematical “hardness”, as the uniqueness (without alternative) of solving the

mathematical problem. One can get rid of this disadvantage changing the surface of zero Gaussian curvature by the surface of negative curvature. But the Taylor's method of systematic generation of bases as well as the method of inverse matrix result in the same standard functions. The alternative bases built by authors on plain and space serendipity elements implement physically adequate distributions of nodal loads. This result has been received thanks to the use of surfaces of negative Gaussian curvature when building the basis functions.

*Key words: finite elements, serendipity approximation, conoid, Gaussian curvature.*

## ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Стандартные серендиповы элементы (ССЭ) были получены подбором в 1968 г. Эргатудисом, Айронсом и Зенкевичем [1] в связи с задачей об изопараметрическом преобразовании исправленного четырехугольника в квадрат. Как показала практика, полиномиальные базисы стандартной модели вполне справляются с задачей, ради которой они подбирались. С этой точки зрения модель можно считать адекватной. Однако уже через три года Зенкевич в своей книге [2] обратил внимание специалистов на физическую неадекватность ССЭ высших порядков. Речь идет о задаче узловых локализации равномерной массовой нагрузки (проблема Эргатудиса-Айронса-Зенкевича). К сожалению, ни сам Зенкевич, входящий (по мнению экспертов) в первую пятерку специалистов по МКЭ, ни его ученики и последователи так и не смогли объяснить парадокс «гравитационного отталкивания». В конце концов Зенкевич высказал мнение, что «негативизм» в спектре узловых нагрузок неустраним и посоветовал смириться с этим недостатком ССЭ.

## АНАЛИЗ ПРЕДШЕСТВУЮЩИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В 1982 г. [3] удалось сконструировать на плоских и пространственных серендиповых элементах (СЭ) альтернативные базисы, реализующие физически адекватные спектры узловых нагрузок. Несмотря на то, что «негативизм» был устранен, еще долго никому не удавалось найти обоснованное и содержательное объяснение «парадокса Зенкевича». Оказалось, что устранить недостаток модели легче, чем объяснить причины его возникновения. Сейчас мы готовы обсуждать причины. Первая попытка сделана в [4]. В данной статье мы возвращаемся к этой теме и пытаемся объяснить, как и почему наука восторжествовала над здравым смыслом.

## ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Изучая геометрию серендиповых поверхностей, мы пришли к выводу, что «виновником» возникновения парадоксальных результатов является коноид. Напомним определение: коноид – линейчатая поверхность, все прямолинейные образующие которой параллельны одной и той же плоскости и пересекают одну и ту же прямую (ось коноида). Явление физической неадекватности наблюдается на всех СЭ высших порядков. Элемент первого порядка с четырьмя узлами в вершинах безупречен как математически, так и физически. На рис. 1 показаны ССЭ соответственно второго, третьего и четвертого порядков. В случае необходимости читатель самостоятельно сможет продолжить этот ряд.

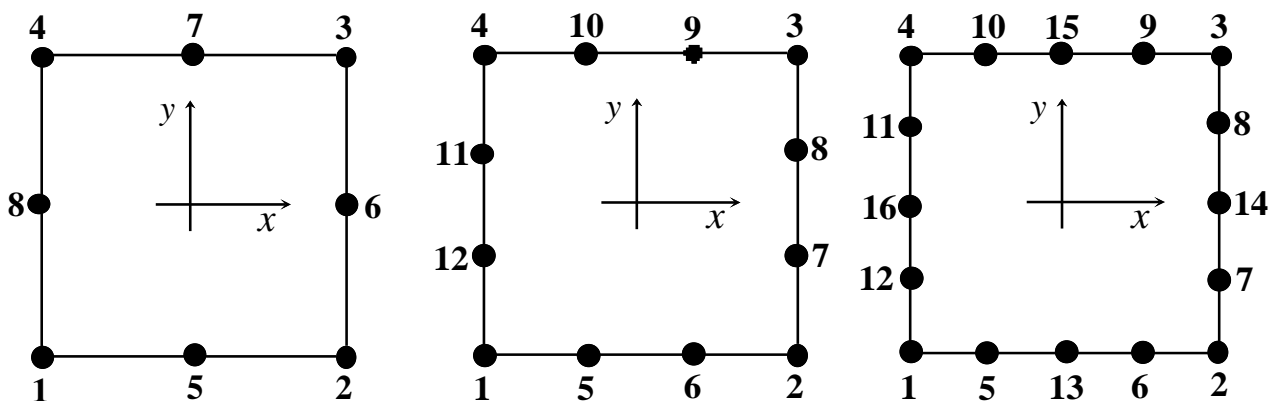


Рис. 1. ССЭ высших порядков:  $Q_8$  – 2-го порядка,  $Q_{12}$  – 3-го порядка,  $Q_{16}$  – 4-го порядка ( $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ )

В центре нашего внимания находятся узлы на сторонах квадрата. Именно с этими узлами ассоциируются коноиды. На стандартных элементах (со стандартными базисами) в задаче серендиповой аппроксимации решающая роль принадлежит коноидам. Причем эта роль возрастает с увеличением порядка СЭ. Так, на СЭ 2-го порядка коноидов 50%, на СЭ 3-го порядка – 67%, на СЭ 4-го порядка – 75%. Кажется, что использование фрагментов коноида при формообразовании аппроксимирующей поверхности на конечном носителе не предвещает нежелательных последствий. Однако это не так. Ниже мы покажем, что коноид делает модель чрезмерно «жесткой». Здесь уместно вспомнить о «жестких» и «мягких» математических моделях (по В. И. Арнольду). Мы имеем в виду не только механическую «жесткость», как повышенную сопротивляемость изгибу, но и математическую «жесткость», как единственность (без альтернативы) решения математической задачи. Когда-то (в начале XX века) Адамар уверял нас, что единственность – это хорошо. Сегодня мы знаем, насколько ошибался выдающийся французский математик. Мы не будем рассказывать о достижениях А. Н. Тихонова и его учеников в теории некорректных задач, а просто покажем конкретные результаты наших исследований «парадокса Зенкевича».

Нам понадобятся базисные полиномы, отвечающие узлам на стороне квадрата. Понятно, что можно ограничиться лишь одной функцией, например,  $N_5(x, y)$  на  $Q_8$  и  $Q_{12}$ , и двумя функциями, например,  $N_5(x, y)$  и  $N_{13}(x, y)$  на  $Q_{16}$ .

В этот перечень мы добавим «угловую» функцию, например,  $N_1(x, y)$ , чтобы читатель мог проконтролировать свойства базисов. Как известно, финитные базисные функции в МКЭ должны обладать следующими свойствами:

$$N_i(x_k; y_k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k; \end{cases} \quad \sum_{i=1}^M N_i(x_k; y_k) = 1, \quad (1)$$

где  $i$  – номер функции;  $k$  – номер узла;  $M$  – общее число узлов на границе ССЭ.

Приведем типичные базисные функции для наших моделей (рис. 1).

Для  $Q_8$ :

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= -\frac{1}{4}(1-x)(1-y)(x+y+1), \\ N_5(x, y) &= \frac{1}{2}(1-x^2)(1-y). \end{aligned} \quad (2)$$

Для  $Q_{12}$ :

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{1}{32}(1-x)(1-y)(-10+9(x^2+y^2)), \\ N_5(x, y) &= \frac{9}{32}(1-x^2)(1-3x)(1-y). \end{aligned} \quad (3)$$

Для  $Q_{16}$ :

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{1}{12}(1-x)(1-y)(2x+2y+1)(2x+2y+3)(-x-y-1), \\ N_5(x, y) &= \frac{2}{3}(1-x^2)(2x-1)x(1-y), \\ N_{13}(x, y) &= \frac{1}{2}(1-x^2)(1-4x^2)(1-y). \end{aligned} \quad (4)$$

Стоит отметить, что в мировой литературе по МКЭ практически отсутствует информация о Q16. Поэтому в (4) приведена авторская версия стандартного базиса.

Нагрузка на узел  $i$  со времен Ньютона и Котеса вычисляется как интегральное среднее соответствующей функции  $N_i(x, y)$ :

$$\gamma_i = \frac{1}{S} \iint_D N_i(x, y) dx dy, \quad (5)$$

где  $\gamma_i$  – нагрузка на узел  $i$ ;  $S$  – площадь элемента;  $D$  – область интегрирования ( $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ ).

Вычисления дают следующие результаты:

$$\begin{aligned} \text{для } Q8: \quad \gamma_1 &= -\frac{1}{12}; & \gamma_5 &= \frac{1}{3}; \\ \text{для } Q12: \quad \gamma_1 &= -\frac{1}{8}; & \gamma_5 &= \frac{3}{16}; \\ \text{для } Q16: \quad \gamma_1 &= -\frac{31}{180}; & \gamma_5 &= \frac{32}{180}; & \gamma_{13} &= \frac{12}{180}. \end{aligned} \quad (6)$$

Понятно, что из суммы (1) вытекает  $\sum_{i=1}^M \gamma_i = 1$ , однако за сохранение весового баланса пришлось «заплатить» нарушением физической адекватности спектров (6). Заметим, что во всех случаях неугловые узлы перегружены так, что суммарная нагрузка только в этих узлах уже превосходит единицу. Ясно, что в вершинах элемента нагрузки будут отрицательными (феномен «гравитационного отталкивания»).

Нетрудно определить (например, методом параллельных сечений), что поверхности  $N_5(x, y)$  и  $N_{13}(x, y)$  – классические коноиды (см. определение) с осью  $y=1$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ), лежащей в плоскости  $Z=0$  (в плоскости носителя). Поэтому двойной интеграл дает объем тела, ограниченного коноидом и плоскостью носителя. Формула (5) определяет среднюю аппликуату коноида. На рис. 2 показан коноид  $N_5(x, y)$  модели Q8.

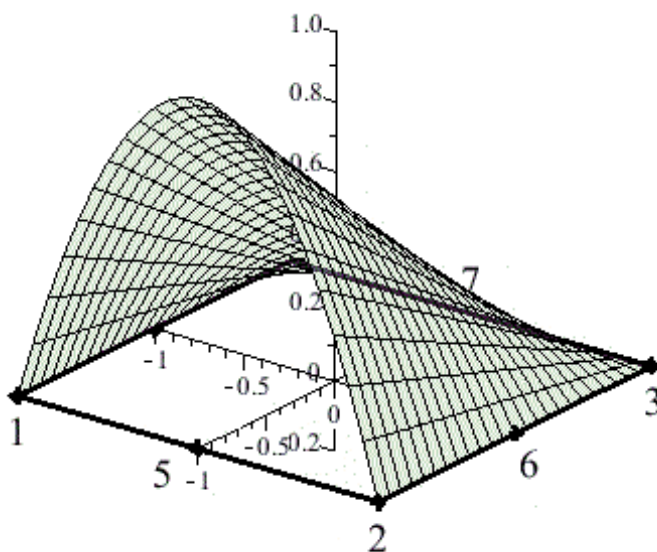


Рис. 2. Коноид  $N_5(x, y)$  модели Q8

Читатель уже догадался, как уменьшить среднюю аппликату поверхности  $N_5(x, y)$ . Нужно просто заменить прямолинейную образующую вогнутой образующей. Именно так мы поступаем при создании альтернативных моделей СЭ. Непонятно почему, но именно коноид был изначально заложен в определение базисных функций, отвечающих узлам на сторонах квадрата. Вот цитата из [5], где описано построение  $N_5(x, y)$  для Q8: «...взяв соответствующий многочлен Лагранжа второй степени по одному направлению и умножив его на линейную функцию по другому направлению, непосредственно найдем базисные функции для узлов в серединах сторон». Слово «линейную» подчеркнуто нами потому, что мы считаем это ограничение необоснованным. Именно линейность коноида вызывает противоестественные перегрузки в указанных узлах и, как следствие, отрицательные «нагрузки» в вершинах КЭ. А далее угловая функция, например,  $N_1(x, y)$  для Q8, представляется в виде линейной комбинации соответствующей билинейной функции и построенных  $N_5$  и  $N_8$ :

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4}(1-x)(1-y) - \frac{1}{4}(1-x^2)(1-y) - \frac{1}{4}(1-y^2)(1-x),$$

что приводит к первой формуле в (2).

Так устроены все плоские и пространственные ССЭ. Предложивший этот подход Р. Тейлор (1972), назвал его методом систематического генерирования базисов ССЭ. Известный специалист по МКЭ Р. Галлагер справедливо считает метод Тейлора элегантным [6], хотя он, как и метод обратной матрицы, приводит к тем же функциям Эргатудиса-Айронса-Зенкевича (иллюзия единственности). В математическом моделировании это не редкость. Очень трудно предвидеть, когда и каким образом модель «отомстит» за идеализацию (Мандельштам).

## ВЫВОДЫ

Коноид с его нулевой гауссовой кривизной – идеализация, более реалистичной оказывается поверхность отрицательной гауссовой кривизны. Так устроены альтернативные модели СЭ. Заинтересованные специалисты развивают это направление уже более 30 лет [3, 7, 8].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ergatoudis I., Irons B. M., Zienkiewicz O. C. Curved isoparametric «quadrilateral» elements for finite element analysis. *Intern. J. Solids Struct.* 1968. 4. P. 31–42.
2. Zienkiewicz O. C. The finite element method in engineering science. London: McGraw – Hill, 1971. 517 p.
3. Хомченко А. Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ. Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. Ивано-Франковск, 1982. 9 с. Деп. в ВИНТИ 18.03.82, № 1213.
4. Хомченко А. Н., Литвиненко Е. И., Астионенко И. А. Стандартные серендиповы многочлены и линейчатые поверхности. *Міжвуз. зб. «Комп'ютерно-інтегровані технології»: Освіта, наука, виробництво.* 2011. Вип. 6. С. 266–269.
5. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. Москва: Мир, 1986. 318 с.
6. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. Москва: Мир, 1984. 428 с.
7. Астионенко И. А., Литвиненко Е. И., Хомченко А. Н. Конструирование многопараметрических полиномов на бикубическом элементе серендипова семейства. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика.* 2009. Вып. 16, № 5(60). С. 15–31.
8. Астионенко И. А., Литвиненко Е. И., Хомченко А. Н. Обратные задачи серендиповых аппроксимаций. *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2009. Вып. 2 (35). С. 36–42.

## REFERENCES

1. Ergatoudis, I., Irons, B. M. & Zienkiewicz, O. C. (1968). Curved isoparametric «quadrilateral» elements for finite element analysis. *Intern. J. Solids Struct.*, 4, pp. 31-42.
2. Zienkiewicz, O. C. (1971). The finite element method in engineering science. London: McGraw – Hill.

3. Homchenko, A. N. (1982). Some Probabilistic Aspects of FEM. Ivano-Frank. in-t nefti i gaza. Ivano-Frankovsk. 9 p. Dep. v VINITI 18.03.82, №1213.
4. Homchenko, A. N., Litvinenko, E. I. & Astionenko, I. A. (2011). Standard Serendip polynomials and ruled surfaces. Mizhvuz. zb. "Komp'juterno-integrovani tehnologii": Osvita, nauka, virobnictvo, Iss. 6, pp. 266-269.
5. Zenkevich, O. & Morgan, K. (1986). Finite Elements and Approximation. Moscow: Mir.
6. Gallager, R. (1984). Finite element method. Basics. Moscow: Mir.
7. Astionenko, I. A., Litvinenko, E. I. & Homchenko, A. N. (2009). The construction of multiparameter polynomials on the bicubic element of the Serendip family. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Fizika, Iss. 16, No. 5(60), pp. 15-31.
8. Astionenko, I. A., Litvinenko, E. I. & Homchenko, A. N. (2009). Inverse problems of Serendip approximations. Vestnik Hersonskogo nacional'nogo tehniceskogo universiteta, Iss. 2(35), pp. 36-42.

УДК 539.375

## ВЗАЄМОДІЯ КОЛІНЕАРНИХ ТРІЩИН У СФЕРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З ГНУЧКИМ ПОКРИТТЯМ

Шацький І. П., д. ф.-м. н., Маковійчук М. В., к. ф.-м. н., Щербій А. Б.

*Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
вул. Микитинецька, 3, м. Івано-Франківськ, 76002, Україна*

ipshatsky@gmail.com

Досліджено задачу про розтяг сферичної оболонки, що підкріплена гнучким покриттям та містить дві меридіональні тріщини. Покриття моделюється шарніром, що з'єднує береги розрізів в одній з лицьових поверхонь оболонки. Методом сингулярних інтегральних рівнянь визначено напружений стан поблизу вершин тріщин та розподіл шарнірної реакції в покритті. Граничний стан композиції проаналізовано з урахуванням критеріїв крихкого руйнування оболонки та обмеженої міцності покриття. Досліджено вплив параметрів кривини серединної поверхні оболонки та взаємного розташування дефектів на величину руйнівного навантаження.

*Ключові слова: сферична оболонка, гнучке покриття, колінеарні тріщини, гранична рівновага.*

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТРЕЩИН В СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С ГИБКИМ ПОКРЫТИЕМ

Шацкий И. П., д. ф.-м. н., Маковийчук Н. В., к. ф.-м. н., Щербий А. Б.

*Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
ул. Микитинецькая, 3, г. Івано-Франківськ, 76002, Україна*

ipshatsky@gmail.com

Исследована задача о растяжении усиленной покрытием сферической оболочки с двумя меридиональными трещинами. Гибкое покрытие моделируется шарниром, соединяющим берега разрезов в одной из лицевых поверхностей оболочки. Методом сингулярных интегральных уравнений определены напряженное состояние вблизи вершин трещин и распределение шарнирной реакции в покрытии. Предельное равновесие композиции проанализировано с учетом критериев хрупкого разрушения оболочки и ограниченной прочности покрытия. Исследовано влияние параметров кривизны срединной поверхности оболочки и взаимного расположения дефектов на величину разрушающей нагрузки.

*Ключевые слова: сферическая оболочка, гибкое покрытие, коллинеарные трещины, предельное равновесие.*

## INTERACTION OF COLLINEAR CRACKS IN SPHERICAL SHELL WITH FLEXIBLE COATING

Shatskyi I. P., Dr. Phys. & Math. Sc., Makoviichuk M. V., Ph. D. in Phys. & Math., Shcherbii A. B.

*Ivano-Frankivsk Branch of Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics  
and Mathematics NAS of Ukraine,  
Mykytynetska str., 3, Ivano-Frankivsk, 76002, Ukraine*

ipshatsky@gmail.com

Elastic and limit equilibrium of tensioned shallow spherical shell weakened by two through the thickness meridional cracks and enhanced by coating on one of the face surfaces is studied in the two-dimensional formulation. The cracks in the shell with a flexible coating are simulated by cuts with eccentrically hinged connected edges. The boundary problem for equations of classical shell theory with interrelated conditions of tension and bending along the cutting line is formulated within the framework of such model. Singular integral equation for the unknown jump of normal displacement on the cracks edges has been elaborated.

Based on numerical solutions of integral equation dependences of forces and moments intensity factors in the vicinity of the defects tips and distribution of forces in the hinge joints on the parameter of shell curvature and mutual distance between cracks are investigated.

To estimate the influence of flexible coating on the limit state of the thin-walled elements of constructions with defects the combined fracture criterion which takes into account two mechanisms: propagation of the crack along the shell body and disintegration of the coating with limited strength, were proposed. The first mechanism is implemented in the shell of small curvature (with short cracks), and the second one – in the shell of big curvature (with long cracks). It was discovered that enhancing of external surface of tensioned spherical shell by coating is more efficient than enhancing of internal one. In addition, the limiting load depends from distance between cuts nonmonotonically in case of strengthening of external face of shell.

*Key words: spherical shell, flexible covering, collinear cracks, limit equilibrium.*

### ВСТУП

Одним зі способів подовження ресурсу роботи тонкостінних елементів конструкцій є нанесення різного роду захисних покриттів, які можуть сприймати частину зовнішнього навантаження і тим самим зменшити напруження поблизу наявних пошкоджень. Розрахунки граничного стану складених конструкцій необхідно проводити, застосовуючи критерії міцності і до основи, і до підкріплення. Раніше [1, 2] розроблено модель для оцінки впливу одностороннього гнучкого покриття на міцність пластини з наскрізною тріщиною. Гнучке покриття моделюється шарніром, який з'єднує береги розрізу на одній із лицьових поверхонь пластини. У працях [3-5] таку модель розвинуто для дослідження рівноваги тонких оболонок з тріщинами. Зокрема, для малих параметрів кривини побудовано аналітичні оцінки граничного навантаження вкритої необмежено міцним покриттям оболонки з тріщиною, орієнтованої в головному напрямку серединної поверхні. Числовий аналіз для циліндричної та сферичної оболонок з поодинокую тріщиною проведено в роботах [6, 7]. Проблема взаємодії дефектів у вкритих оболонках дотепер не розглядалася.

Мета цього дослідження – вивчити вплив одностороннього гнучкого покриття на напружено-деформований стан та міцність пологої сферичної оболонки, послабленої системою меридіональних тріщин, з урахуванням обмеженої міцності підкріплення. Числовий аналіз проведено в широкому діапазоні зміни параметрів кривини оболонки та віддалі між дефектами.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо ізотропну сферичну оболонку завтовшки  $2h$  з радіусом середньої поверхні  $R$ , послаблену двома наскрізними колінеарними розрізами завдовжки  $2l$ , які розташовані вздовж меридіана на відстані  $2d$  між їхніми центрами (рис. 1). Нехай на одну із лицьових поверхонь оболонки нанесено гнучке покриття, яке деформується сумісно з підкладкою і здатне витримати доволі високі напруження. Оболонка зазнає рівномірного розтягу мембранними зусиллями  $p = \text{const}$ ; решту поверхонь об'єкта вважаємо вільними від навантаження. У рамках теорії пологих оболонок Кірхгофа-Лява досліджуємо напружений стан та граничну рівновагу композиції.

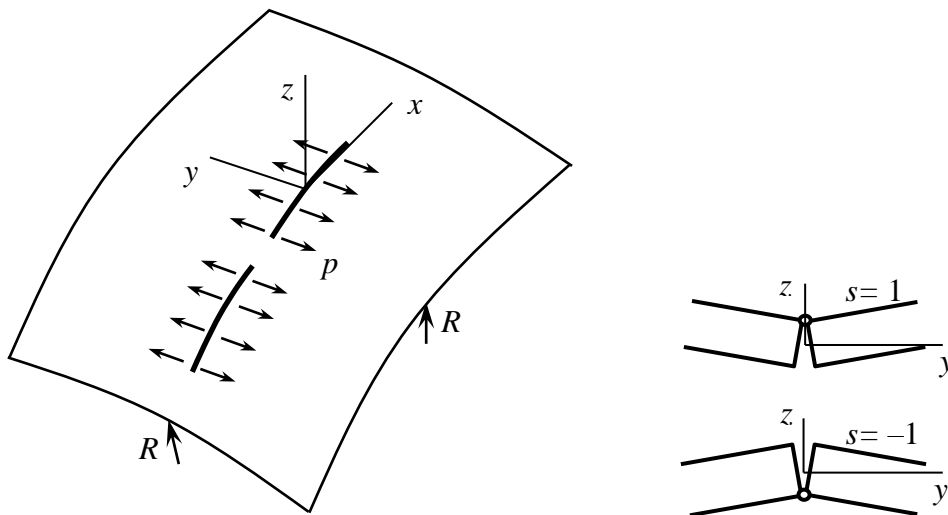


Рис. 1. Схема задачі та модель шарнірного з'єднання

Уважаючи оболонку в зоні збурення напруженого стану пологою, виберемо систему декартових координат  $Oxyz$  з центром посередині правого розрізу та віссю абсцис уздовж його лінії. Якщо прийняти гіпотезу Кірхгофа про жорстку нормаль, то тріщини в оболонці з абсолютно гнучким покриттям доцільно моделювати математичними розрізами, береги яких з'єднані шарнірно в одній із лицьових поверхонь оболонки  $z = sh$  ( $s = +1$  для зовнішнього чи  $s = -1$  для внутрішнього підкріплення). Із урахуванням симетрії об'єкта та навантаження відносно осі абсцис такий підхід призводить до задачі теорії пологих оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах [3, 4]:

$$\Delta\Delta\varphi - \frac{B}{R}\Delta w = 0, \quad \Delta\Delta w + \frac{1}{DR}\Delta\varphi = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus L; \quad (1)$$

$$[u_y] - sh[\mathcal{G}_y] = 0, \quad M_y - sh(N_y + p) = 0, \quad x \in L; \quad (2)$$

$$N_x = N_{xy} = N_y = 0, \quad M_x = M_{xy} = M_y = 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Тут  $\varphi$  – функція напружень,  $w$  – прогин оболонки,  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  – оператор Лапласа;  $[u_y]$  – розкриття тріщини в базовій поверхні оболонки,  $[\mathcal{G}_y]$  – розрив кута повороту нормалі ( $\mathcal{G}_y = \partial w/\partial y$ );  $N_x$ ,  $N_{xy}$ ,  $N_y$  – мембранні зусилля,  $M_x$ ,  $M_{xy}$ ,  $M_y$  – моменти;  $B = 2Eh$ ,  $D = 2Eh^3/(3(1-\nu^2))$ ,  $E$  і  $\nu$  – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки;  $L = (-l-2d, l-2d) \cup (-l, l)$  – сукупність розрізів.



Сутність такої постановки задачі відображають крайові умови (2). Перша з них означає неперервність переміщень на з'єднаних берегах розрізу, друга описує реактивний момент, викликаний переносом контактної реакції з шарніра у базову поверхню оболонки.

Для побудови розв'язку задачі (1)-(3) скористалися методом сингулярних інтегральних рівнянь. Ураховуючи, що дефекти перебувають в однакових умовах, зусилля та моменти на лінії правої тріщини виразимо через похідні від функцій стрибка [8-11]:

$$N_y(x,0) = \frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ \tilde{K}_{11}(\xi,x) [u_y]'(\xi) - \tilde{K}_{13}(\xi,x) a [\theta_y]'(\xi) \right\} d\xi,$$

$$M_y(x,0) = \frac{Ba}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ \tilde{K}_{31}(\xi,x) [u_y]'(\xi) - \tilde{K}_{33}(\xi,x) a [\theta_y]'(\xi) \right\} d\xi. \quad (4)$$

Тут

$$\tilde{K}_{ij}(\xi,x) = K_{ij}(\xi-x) + K_{ij}(\xi+x+2d), \quad i, j = 1,3;$$

$$K_{11}(z) = \frac{1}{z} - \frac{2}{z} \left( \frac{2}{\gamma|z|} \operatorname{kei}'(\gamma|z|) - \operatorname{ker}(\gamma|z|) + \frac{1}{2} + \gamma|z| \operatorname{ker}'(\gamma|z|) \right),$$

$$K_{13}(z) = K_{31}(z) = -\frac{2(1-\nu)}{z} \left( \frac{2}{\gamma^2 z^2} + \frac{2}{\gamma|z|} \operatorname{ker}'(\gamma|z|) + \operatorname{kei}(\gamma|z|) \right) - 2\gamma \operatorname{sgn} z \operatorname{ker}'(\gamma|z|),$$

$$K_{33}(z) = \frac{2(1-\nu)^2}{z} \left( \frac{2}{\gamma|z|} \operatorname{kei}'(\gamma|z|) - \operatorname{ker}(\gamma|z|) \right) - 2(1-\nu^2) \gamma \operatorname{sgn} z \operatorname{ker}'(\gamma|z|) - 2\gamma^2 \int_0^z \operatorname{kei}(\gamma|z|) dz;$$

$a = h/\sqrt{3(1-\nu^2)}$ ,  $\gamma^2 = 1/(Ra)$ ,  $\operatorname{ker} z$ ,  $\operatorname{kei} z$  – функції Томсона.

Підставимо вирази (4) в крайову умову (2) на правому розрізі. Виключаючи функцію  $[\theta_y]$ , отримуємо сингулярне інтегральне рівняння для знаходження розриву переміщень:

$$\frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l K(\xi,x) [u_y]'(\xi) d\xi = -p, \quad x \in (-l,l); \quad (5)$$

$$K(\xi,x) = \tilde{K}_{11}(\xi,x) - 2s\tilde{K}_{13}(\xi,x)/\sqrt{3(1-\nu^2)} + \tilde{K}_{33}(\xi,x)/(3(1-\nu^2)).$$

На кінцях розрізу розв'язок рівняння (5) повинен задовольняти умову:

$$[u_y](\pm l) = 0. \quad (6)$$

Якщо розглядати рівні колінеарні тріщини в оболонці без покриття, то, підставляючи інтегральні представлення (4) в класичні крайові умови  $N_y + p = 0$ ,  $M_y = 0$ ,  $x \in L$ , отримуємо систему інтегральних рівнянь для знаходження розриву переміщення і кута повороту на правому розрізі:

$$\frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ \tilde{K}_{11}(\xi,x) [\bar{u}_y]'(\xi) - \tilde{K}_{13}(\xi,x) a [\bar{\theta}_y]'(\xi) \right\} d\xi = -p,$$

$$\frac{Ba}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ \tilde{K}_{31}(\xi,x) [\bar{u}_y]'(\xi) - \tilde{K}_{33}(\xi,x) a [\bar{\theta}_y]'(\xi) \right\} d\xi = 0, \quad x \in (-l,l), \quad (7)$$

з додатковими умовами:

$$[\bar{u}_y](\pm l) = 0, \quad [\bar{\theta}_y](\pm l) = 0. \quad (8)$$

За знайденими функціями стрибка переміщення і кута повороту нормалі обчислюють коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів:

$$K_N^\pm = \mp \frac{B}{4} \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{2|x \mp l|} [u_y]'(x), \quad K_M^\pm = \pm (3 - 2\nu - \nu^2) \frac{D}{4} \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{2|x \mp l|} [\theta_y]'(x), \quad (9)$$

а за виразами (4) – розподіл зусиль  $N(x)$  у покритті на лінії розрізів.

### КРИТЕРІЙ РУЙНУВАННЯ

Перейдемо до розгляду можливих сценаріїв руйнування надтріснутої оболонки з покриттям.

Вважаємо, що руйнування підкріпленої оболонки з тріщинами може відбуватися двома шляхами: розповсюдження тріщин без порушення цілісності покриття та втрата несучої здатності через розтріскування покриття. Перший механізм оцінюємо енергетичним критерієм лінійної механіки руйнування за комбінованого розтягу-згину [4, 5, 7, 11]:

$$\frac{\pi}{4h^2 E} \left[ K_N^2 + \frac{3(1+\nu)}{3+\nu} \left( \frac{K_M}{h} \right)^2 \right] = 2\gamma_*, \quad (10)$$

де  $\gamma_*$  – густина ефективної поверхневої енергії матеріалу.

Після підстановки знайдених значень коефіцієнтів інтенсивності (9) у критерій (10) визначаємо граничне навантаження  $p_{1*}$ , при якому настане розвиток тріщини.

Для оцінки граничного стану покриття скористаємось класичною теорією міцності:

$$\max_{x \in [-l, l]} N(x) = N_*, \quad (11)$$

де  $N_*$  – критична сила, яку здатне витримати покриття. Використавши знайдені значення  $N(x)$ , отримаємо граничне навантаження  $p_{2*}$ , при якому відбудеться руйнування покриття.

За руйнівне зусилля слід, вочевидь, прийняти менше з  $p_{1*}$  та  $p_{2*}$ .

Нарешті, підставляючи класичні результати із задачі (6), (7) в критерій (10), отримуємо величину руйнівного зусилля  $p_{3*}$  для оболонки з тріщинами без покриття.

### АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Числовий розв'язок задач (5), (6) та (7), (8) побудували при  $\nu = 0,3$  методом механічних квадратур [8, 9] з використання як квадратурних вузлів та вузлів колокації нулів поліноми Чебишева відповідно першого та другого роду.

Графіки, подані на рис. 2, характеризують розподіл безрозмірних зусиль у покритті на лінії тріщин для різних значень безрозмірних параметрів кривини  $\lambda = \gamma l = \left( 3(1-\nu^2) \right)^{1/4} l / \sqrt{Rh}$  та відносної віддалі між тріщинами  $\rho = l/d$ . При зростанні параметра  $\lambda$  спостерігаємо суттєве підвищення реактивного зусилля в шарнірі, особливо посередині розрізу. Залежність реакції від параметра  $\rho$  є немонотонна.

Залежності безрозмірних значень коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів, від параметра відносної віддалі між тріщинами  $\rho$ , будували при фіксованих значеннях параметра кривини  $\lambda$  (рис. 3). Вплив шарнірного з'єднання берегів тріщини за розтягу оболонки проявляється в суттєвому зменшенні коефіцієнтів інтенсивності зусиль та збільшенні коефіцієнтів інтенсивності моментів. У випадку з'єднання берегів у внутрішній поверхні ( $s = -1$ ) практично відсутня немонотонна залежність від параметра взаємного розташування дефектів  $\rho$ .

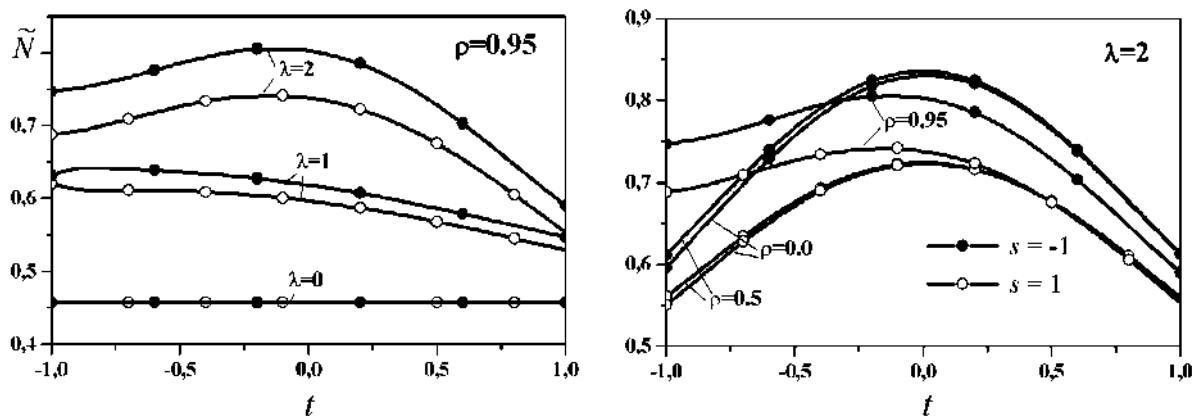


Рис. 2. Розподіл реакції в шарнірі  $\tilde{N} = N(t)/\rho$ ,  $t = x/l$  :

зліва – залежність від параметра кривини  $\lambda$ , справа – від параметра взаємного розташування тріщин  $\rho$  ;  
 $s = 1$  – зовнішнє,  $s = -1$  – внутрішнє покриття.

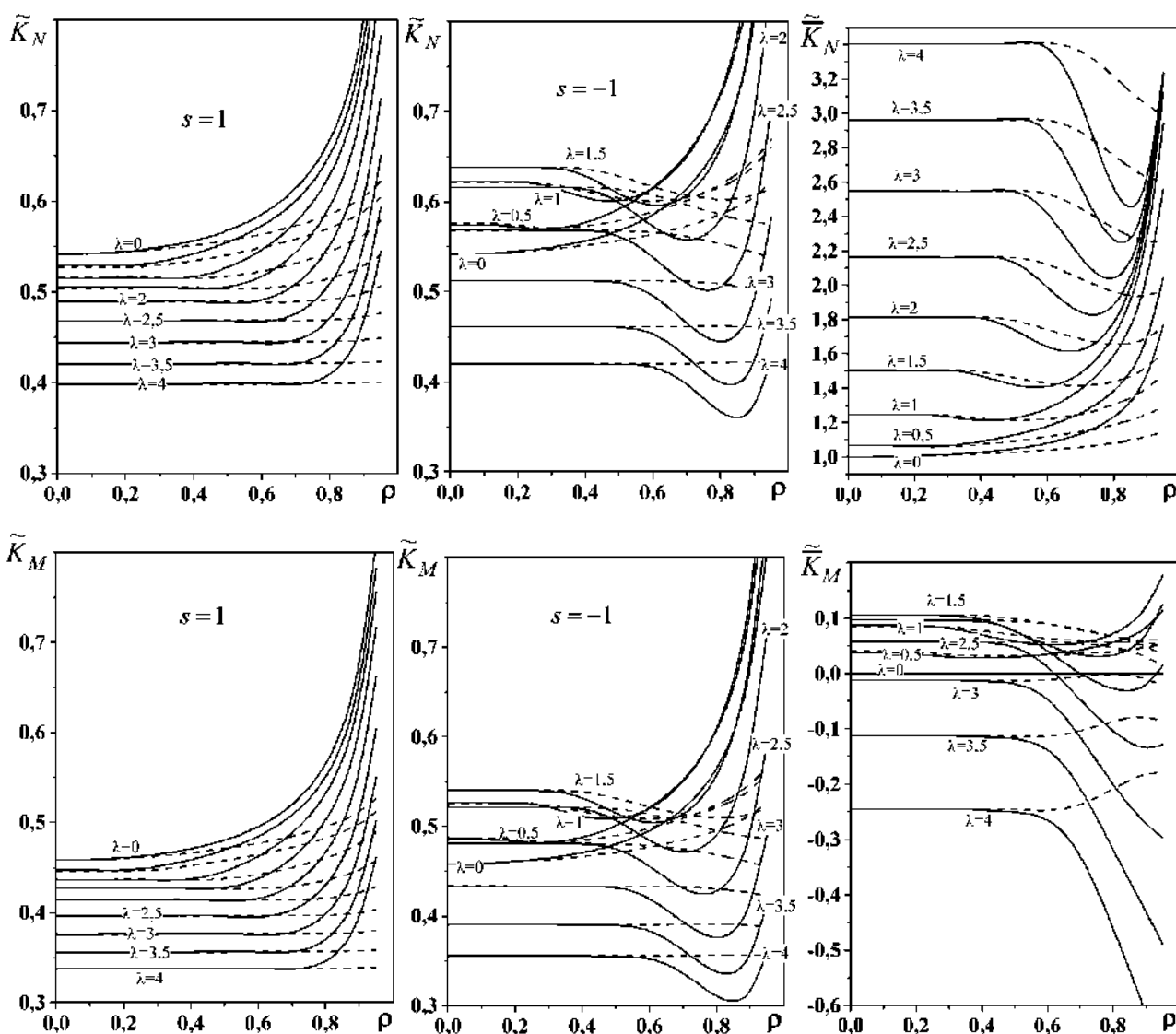


Рис. 3. Залежності коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів від взаємного ротаування тріщин:

$$\tilde{K}_N = K_N / (p\sqrt{l}), \quad \tilde{K}_M = K_M / (sph\sqrt{l}) \quad (s = 1 - \text{зовнішнє}, s = -1 - \text{внутрішнє покриття});$$

$$\tilde{\bar{K}}_N = \bar{K}_N / (p\sqrt{l}), \quad \tilde{\bar{K}}_M = \bar{K}_M / (ph\sqrt{l}) - \text{оболонка без покриття [11-13];}$$

суцільні лінії відповідають ближнім, а штрихові – дальнім вершинам

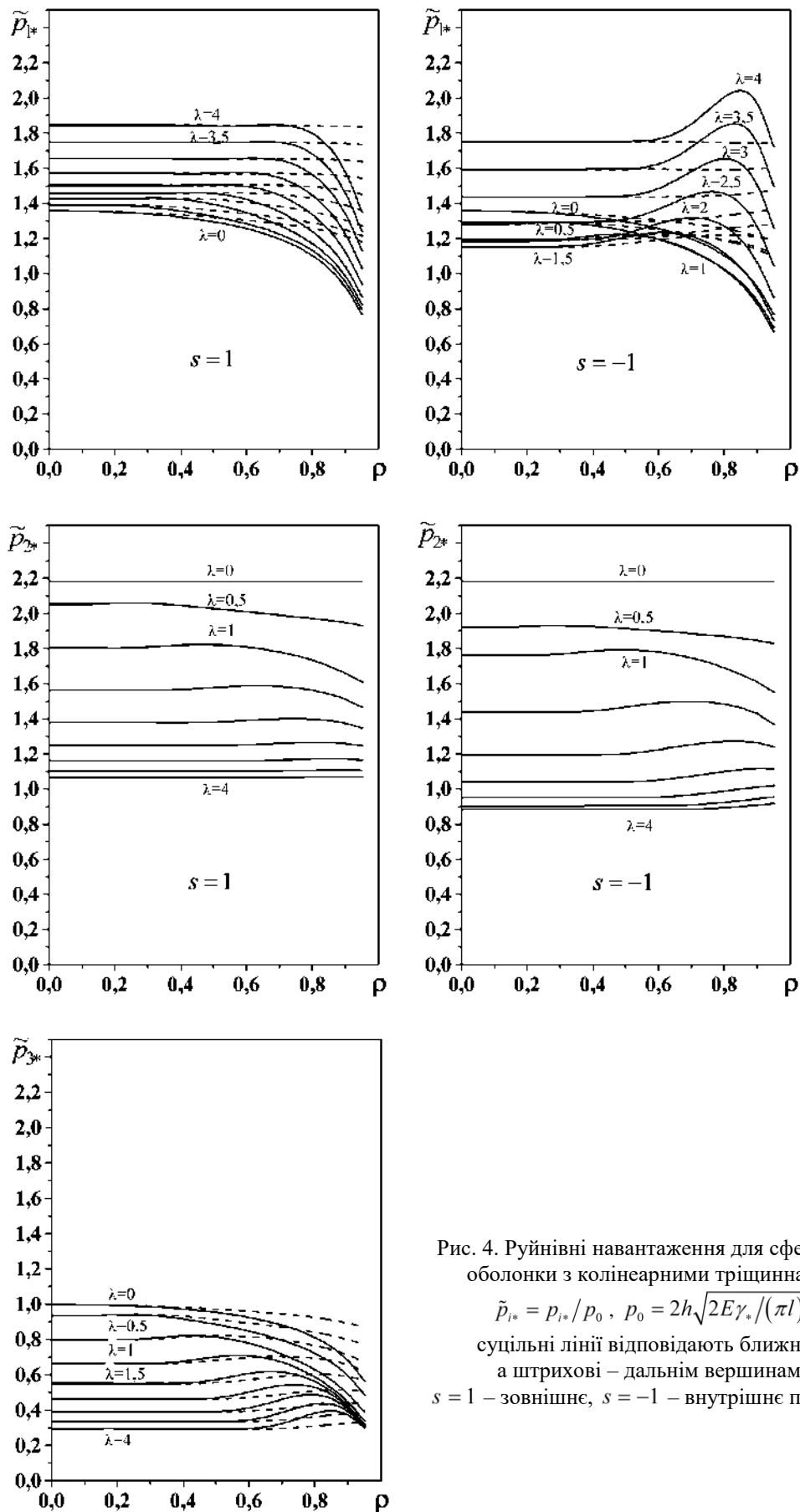


Рис. 4. Руйнівні навантаження для сферичної оболонки з колінеарними тріщинами:

$$\tilde{p}_{i*} = p_{i*} / p_0, \quad p_0 = 2h\sqrt{2E\gamma_* / (\pi l)};$$

суцільні лінії відповідають ближнім, а штрихові – дальнім вершинам;

$s = 1$  – зовнішнє,  $s = -1$  – внутрішнє покриття

Результати дослідження граничної рівноваги вкритої сферичної оболонки з двома тріщинами відображено на рис. 4. Граничні навантаження  $p_{1*}$ , отримані за критерієм розтріскування оболонки, можуть набувати значень як більших, так і менших, порівняно з аналогічно навантаженою пластиною. Для випадку покриття на зовнішній поверхні оболонки спостерігається немонотонна залежність навантаження  $p_{1*}$  від параметра  $\rho$  для ближніх вершин дефектів; водночас за великих  $\lambda$  небезпечними виявляються дальні вершини тріщин (штрихові лінії лежать нижче від суцільних). Натомість, у разі підкріплення внутрішньої поверхні завжди небезпечними є ближні вершини розрізів.

Граничні навантаження  $p_{2*}$ , розраховані за міцністю покриття, отримано при  $N_*/p_0 = 1$ ,  $p_0 = 2h\sqrt{2E\gamma_*/(\pi l)}$ . Для слабших покриттів з меншим  $N_*$  ординати кривих  $p_{2*}$  закономірно зменшуються, усуваючи тим самим ефект підкріплення. Значення  $p_{2*}$  істотно знижуються при збільшенні параметра кривини  $\lambda$  і практично не залежать від параметра взаємного розташування дефектів  $\rho$ . При малих кривинах оболонки руйнівним є навантаження  $p_{1*} = \min\{p_{1*}, p_{2*}\}$ ; при більших кривинах –  $p_{2*} = \min\{p_{1*}, p_{2*}\}$ .

У часткових випадках  $\lambda = 0$  та  $\rho = 0$  отримаємо відомі результати для колінеарних тріщин у вкритій пластині [14] та для поодинокій меридіональній тріщині у сферичній оболонці з покриттям [7] відповідно.

## ВИСНОВКИ

Руйнівне навантаження розтягу для сферичної оболонки з двома тріщинами з покриттям на внутрішній поверхні ( $s = -1$ ) немонотонно залежить від параметрів кривини та відстані між дефектами, а небезпечними можуть бути зовнішні вершини дефектів. При малих кривинах оболонки руйнівними є навантаження, розраховані за міцністю болонки; при більших кривинах – за міцністю покриття. За будь-яким із критеріїв підкріплення оболонки ззовні є вигіднішим, аніж зсередини. Для оцінки міцності вкритих надтріснутих оболонок вирішальне значення має врахування обмеженої міцності гнучкого покриття. Неміцні підкріплення не дають відновлювального ефекту і не можуть визнаватися ефективними.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Шацкий И. П. Растяжение пластины, содержащей прямолинейный разрез с шарнирно соединенными кромками. *Журн. прикл. механики и техн. физики*. 1989. № 5. С. 163–165.
2. Шацкий І. Модель тріщини в пластинці з гнучким покриттям. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 2000. Вип. 57. С. 42–47.
3. Шацкий І. П. Интегральне рівняння задачі про тріщину в пологій оболонці з гнучким покриттям. *Доп. АН України*. 1992. № 1. С. 46–48.
4. Шацкий И. П. Задача о трещине в полой оболочке с гибким покрытием. *Прикл. механика и техн. физика*. 1996. 37, № 2. С. 131–138.
5. Шацкий І. П., Щербій А. Б. Вплив гнучкого покриття на міцність пологої оболонки з тріщиною вздовж лінії кривини. *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій* (вип. 2): В 3-х т. Під заг. ред. Панасюка В. В. Львів: Каменяр, 1999. Т. 2. С. 333–335.
6. Шацкий І. П., Маковійчук М. В., Щербій А. Б. Вплив гнучкого покриття на міцність пологої циліндричної оболонки з поперечною тріщиною. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2015. Вип. 24. С. 248–257.
7. Шацкий І. П., Маковійчук М. В., Щербій А. Б. Вплив гнучкого покриття на граничну рівновагу сферичної оболонки з меридіональною тріщиною. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2017 (в друці).

8. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 444 с.
9. Хижняк В. К., Шевченко В. П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек. Донецк: Изд-во Донец. ун-та, 1980. 126 с.
10. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.
11. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. Киев: Наук. думка, 1985. 224 с.
12. Механика композитов. В 12 т. Гузь А. Н. (ред.). Киев: Наук. думка, 1993. (Т. 7. Концентрация напряжений. Киев: А. С. К., 1998. 387 с.)
13. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. Львів: СПОЛОМ, 2003. 320 с.
14. Шацький І. П. Взаємодія колінеарних розрізів з шарнірно з'єднаними берегами у розтягнутій пластинці. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 1992. Вип. 36. С. 93–97.

### REFERENCES

1. Shatskii, I. P. (1989). Tension of a plate containing a rectilinear cut with hinged rims. *J. Appl. Mech. and Techn. Phys.*, Vol. 30, No. 5, pp. 828-830.
2. Shats'kyi, I. (2000). A model of crack is in plate with flexible covering. *Visnyk Lviv. un-tu. Ser. mech.-math.*, Vol. 57, pp. 42-47.
3. Shatskyi, I. P. (1992). Integral equation of problem about a crack in shallow shell with flexible covering. *Dop. AN Ukraine*, No. 1, pp. 46-48.
4. Shatskii, I. P. (1996). Crack problem for a shallow shell with a flexible coating. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, Vol. 37, No. 2, pp. 259-265.
5. Shatskyi, I. P. & Shcherbii, A. B. (1999). Influence of flexible covering on streng of shallow shell with crack along curvature line. *Mehanika ruinovannia materialiv i mitsnist konstrukttsii*, Iss. 2, Vol. 2, pp. 333-335. (In 3 V. ed. by Panasyuk V. V., Kameniar, Lviv, Ukraine).
6. Shatskyi, I. P., Makoviichuk, M. V. & Shcherbii, A. B. (2015). Influence of flexible coating on strength of shallow cylindrical shell with a circumferential crack. *Problemy obchysluvalnoi mehaniky i mitsnosti konstrukttsii*, Iss. 24, pp. 248-257.
7. Shatskyi, I. P., Makoviichuk, M. V. & Shcherbii, A. B. (2017). Influence of flexible coating on strength of shallow spherical shell with a meridional crack. *Fiz.-khim. mehanika materialiv* (in print).
8. Panasyuk, V. V., Savruk, M. P. & Datsyshyn, A. P. (1976). Stress distribution near cracks in plates and shells. Kiev: Naukova dumka, Ukraine.
9. Khyzhnyak, V. K. & Shevchenko, V. P. (1980). Mixed problems of the plates and shells theory. Donetsk: Izd-vo Donets. un-ta, Ukraine.
10. Savruk, M. P. (1981). Two-dimensional problems of elasticity for cracked bodies. Kiev: Naukova dumka, Ukraine.
11. Osadchuk, V. A. (1985). Stress-strain state and limit equilibrium of shells with the cuts. Kiev: Naukova dumka, Ukraine.
12. Guz, A. N. (Eds.). (1993). *Mechanics of composites*, in 12 Vol. Kiev: Naukova dumka, Ukraine (Guz, A. N., Kosmodamianskii, A. S., Shevchenko, V. P. et al. (Eds.). (1998). *Concentration of stresses*, Vol. 7, Kiev: A. S. K., Ukraine).
13. Kushnir, R. M., Nykolyshyn, M. M. & Osadchuk, V. A. (2003). Elastic and elastoplastic limiting state of shells with defects. Lviv: SPOLOM, Ukraine.
14. Shats'kii, I. P. (1993). The interaction of collinear cuts with hinged rims in a plate under tension. *J. Sov. Math.*, Vol. 67, Iss. 5, pp. 3355-3358.

УДК 631.31.311.001

## МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ЧАСТИНКИ ҐРУНТУ ЗМІННОЇ МАСИ ЗА ПРЯМОЛІНІЙНИМ ЛЕЗОМ РОБОЧОГО ОРГАНУ

Швайко В. Н., к. ф.-м. н., Гурідова В. О., старший викладач

*Дніпропетровський державний аграрно-економічний університет,  
вул. Сергія Єфремова, 25, м. Дніпро, Україна*

guridova@ukr.net

Досліджується загальний випадок руху матеріальної частинки ґрунту змінної маси за прямолінійним лезом робочого органу, який прямолінійно переміщується в ґрунті зі швидкістю  $V_p(t)$ . Враховуючи зсув ґрунту в бічному напрямку, прописані диференціальні рівняння руху частинки в залежності від кута нахилу леза, на підставі чого отримана залежність зміни маси частинки від швидкості робочого органу та швидкості матеріальної точки по його лезу. Доведено наростання маси частинки ґрунту при зменшенні її швидкості, і навпаки, що відбувається в дійсності і безпосередньо пов'язано з явищем кришення ґрунту. Знайдено обмеження на кут нахилу леза робочого органу, за якого можливий рух точки по лезу. Підібрані співвідношення параметрів досліджуваного процесу руху частинки ґрунту вздовж леза, при яких маса матеріальної точки може як збільшуватися, що пояснюється ефектом «прилипання», так і зменшуватися.

*Ключові слова: частинка, змінна маса, модель, кришення ґрунту.*

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ ГРУНТА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ ПО ПРЯМОЛИНЕЙНОМУ ЛЕЗВИЮ РАБОЧЕГО ОРГАНА

Швайко В. Н., к. ф.-м. н., Гурідова В. А., старший преподаватель

*Днепропетровский государственный аграрно-экономический университет,  
ул. Сергея Ефремова, 25, г. Днепр, Украина*

guridova@ukr.net

Исследуется общий случай движения материальной частицы почвы переменной массы по прямолинейному лезвию рабочего органа, который прямолинейно перемещается в почве со скоростью  $V_p(t)$ . Учитывая смещение почвы в боковом направлении, прописаны дифференциальные уравнения движения частицы в зависимости от угла наклона лезвия, на основании чего получена зависимость изменения массы частицы от скорости рабочего органа. Доказано нарастание массы частицы почвы при уменьшении ее скорости, и наоборот, что происходит в действительности и непосредственно связано с явлением крошения ґрунта. Найдено ограничения на угол наклона лезвия рабочего органа, при котором возможно движение точки по лезвию. Подобраны соотношения параметров исследуемого процесса движения частицы почвы вдоль лезвия, при которых масса материальной точки может как увеличиваться, что объясняется эффектом «прилипание», так и уменьшаться.

*Ключевые слова: частица, переменная масса, модель, крошение ґрунта.*

## MODELING THE MOTION OF A SOIL PARTICLE WITH A VARIABLE MASS ON THE RECTILINEAR BLADE OF THE WORKING BODY

Shvayko V. N., Guridova V. O.

*Dnipropetrovsk State Agrarian and Economic University,  
Serhii Efremov str., 25, Dnipro, Ukraine*

guridova@ukr.net

A very important issue for agricultural mechanics is the question of the motion of a particle in the environment. This question arises, for example, when considering the movement of soil along the blade of cultivator paws. The soil particle, which is formed after loosening, interacts with the blade of the working member. At the same time, it begins to move under the influence of the environment, which is also ground particles, which, after loosening the soil, begin to interact with this particle. The interaction of a particle of soil and the environment leads to a change in the mass of the particle. The equation of motion of a point with variable mass is equation I.V. Meshcherskiy.

The general case of the motion of a material particle of soil of variable mass along a rectilinear cutting edge of a working organ is investigated, which moves rectilinearly in the soil at a speed  $V_p(t)$ . Taking into account the displacement of the soil in the lateral direction, the differential equations of the particle motion are registered as a function of the angle of the blade, on the basis of which the dependence of the change in the mass of the particle on the velocity of the working member is obtained. It is mathematically proven that the mass of the soil particle increases with decreasing its velocity, and vice versa, what actually happens and is directly related to the phenomenon of crumbling of the soil. Limits are found on the angle of inclination of the blade of the working member, in which the point can move along the blade. The ratios of the parameters of the process of motion of the soil particle along the blade are selected, under which the mass of the material point can both increase, which is due to the sticking effect and to decrease.

Numerical analysis of the motion characteristics of a material point, carried out for specific conditions, confirms the necessity of using this mathematical model and its further improvement.

*Key words: particle of soil, variable mass, model, crumbling of soil.*

**Постановка проблеми і аналіз результатів останніх досліджень** достатньо повно подані в роботі [1]. Зазначимо, що це одна з перших робіт з дослідження руху змінної частинки ґрунту у робочому органі. У нашій роботі до факторів, що впливають на зміну маси матеріальної частинки, додаємо вплив бічного зміщення ґрунту (явище кришення ґрунту).

**Метою дослідження** є вдосконалення механічної та відповідної математичної моделі [1] для більш точного дослідження руху матеріальної частинки ґрунту змінної маси вздовж леза робочого органу. Моделювання функції зміни маси матеріальної точки від різних параметрів, урахувавши бічну складову динамічного навантаження.

**Результати досліджень.** Дуже важливим питанням для землеробської механіки є питання про рух частинки в навколишньому середовищі. Це питання виникає, наприклад, при аналізі руху ґрунту по лезу культиваторних лап. Частинка ґрунту, яка утворюється після розпушування, взаємодіє з лезом робочого органу. При цьому вона починає рух під дією навколишнього середовища, яке також є ґрунтовими частинками, які після розпушування починають взаємодіяти з цієї частинкою. Взаємодія частинки ґрунту і навколишнього середовища призводить до зміни маси частинки.

Розглянемо прямолінійний рух у ґрунті (у навколишньому середовищі) робочого органу трикутної форми (рис. 1) з довільно заданою від часу  $t$  функцією швидкості  $V_p(t)$  при початковій умові  $V_p(0) = 0$ .

Зазначимо, що прямолінійний рух  $s$  робочого органу трикутної форми викликає зсув ґрунту в бічному (перпендикулярному) напрямку  $h = s \cdot \operatorname{tg} \alpha$  (рис. 1). Останнє визначає загальний вид функцій впливу навколишнього середовища на матеріальну точку, які будуть уточнюватися під час розгляду частинних випадків руху та обґрунтованих спрощеннях, у припущенні їх обмеженості в діапазоні кутів  $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

У проекціях на координатні осі  $x$  і  $y$  (рис. 1) рух матеріальної точки змінної маси за прямолінійним лезом робочого органу, на підставі роботи [2] визначається системою диференціальних рівнянь

$$\left. \begin{aligned} m(t) \cdot W(t) &= \left[ P \cdot \Phi_{p1}(\alpha) + k_{v1} \cdot m_0 \cdot V_p^2(t) \cdot \Phi_{v1}(\alpha) + k_{w1} \cdot m_0 \cdot W_p(t) \cdot \Phi_{w1}(\alpha) \right] \cos \alpha - \\ &- \left[ k_p \cdot P \cdot \Phi_{p2}(\alpha) + k_{v2} \cdot m_0 \cdot V_p^2(t) \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \Phi_{v2}(\alpha) + k_{w2} \cdot m_0 \cdot W_p(t) \cdot \Phi_{w2}(\alpha) \right] \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha - \\ &\quad - f \cdot N(V_p(t), t, \alpha) + m'(t) \left[ V_p(t) \cdot \cos \alpha - V_p(t) \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha - V(t) \right]; \\ 0 &= - \left[ P \cdot \Phi_{p1}(\alpha) + k_{v1} \cdot m_0 \cdot V_p^2(t) \cdot \Phi_{v1}(\alpha) + k_{w1} \cdot m_0 \cdot W_p(t) \cdot \Phi_{w1}(\alpha) \right] \sin \alpha - \\ &+ \left[ k_p \cdot P \cdot \Phi_{p2}(\alpha) + k_{v2} \cdot m_0 \cdot V_p^2(t) \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \Phi_{v2}(\alpha) + k_{w2} \cdot m_0 \cdot W_p(t) \cdot \Phi_{w2}(\alpha) \right] \sin \alpha - \\ &\quad + N(V_p(t), t, \alpha) - 2m'(t) \cdot V_p(t) \cdot \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



де символ «'» означає першу похідну за часом  $t$  від функції, що розглядається;  $\alpha$  [град] – кут нахилу прямолінійного леза до напрямку руху робочого органу;  $f$  – коефіцієнт тертя ковзання між частинкою та лезом;  $W_p(t) = V_p'(t)$  [м/с<sup>2</sup>] – прискорення робочого органу;  $V(t)$  [м/с] – швидкість частинки ґрунту змінної маси вздовж леза;  $W(t) = V'(t)$  [м/с<sup>2</sup>] – прискорення матеріальної точки;  $m(t)$  [кг] – поточна маса матеріальної точки, у початковий момент часу  $m(0) = m_0$ ;  $k_{v1}(\alpha)$ ,  $k_{v2}(\alpha)$  [м<sup>-1</sup>] і  $k_{w1}(\alpha)$ ,  $k_{w2}(\alpha)$  – коефіцієнти динамічного напору у взаємно перпендикулярних напрямках, що викликані швидкістю та прискоренням переміщення робочого органу в ґрунті;  $P(\alpha) \cdot \Phi_{p1}(\alpha)$ ,  $k_p(\alpha) \cdot P(\alpha) \cdot \Phi_{p2}(\alpha) \cdot \text{tg} \alpha$  [Н] – взаємно перпендикулярні сили (рис. 1), які викликані тиском деформованого ґрунту без руху робочого органу та переміщення вздовж його леза матеріальних частинок ( $V_p = V = 0$ ). Цей початковий процес можна охарактеризувати як квазістатичний;  $k_p(\alpha)$  – безрозмірний коефіцієнт;  $N(V_p(t), t, \alpha)$  [Н] – нормальна сила реакції (рис. 1) з боку леза на матеріальну частинку змінної маси.

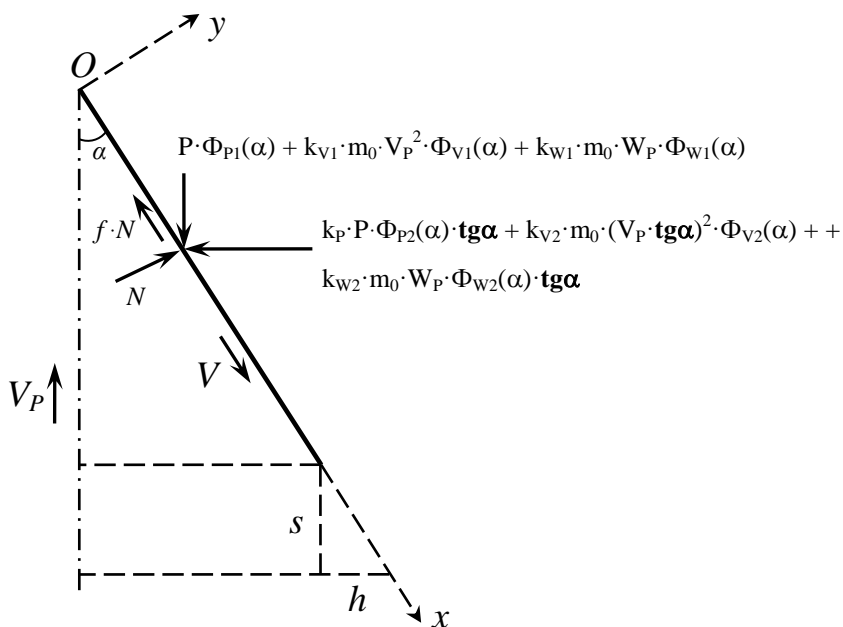


Рис. 1. Схема робочого органу трикутної форми та сил, що діють на матеріальну точку при її русі вздовж леза

Відзначимо, що коефіцієнти  $k(\alpha)$  і уточнюючі функції  $\Phi(\alpha)$  (без вказівки індексів) у загальному випадку залежать не тільки від кута  $\alpha$ , але і від багатьох інших чинників (зокрема від функції швидкості робочого органу тощо) і вимагають більш детальних досліджень із залученням експериментальних даних.

У роботі [3] на підставі експериментів дійшли до висновку, що питомий тиск ґрунту на точки леза залежить від кута  $\alpha$ , та отримали аналітичні залежності для деяких типів ґрунтів. У подальшому, в першому наближенні, будемо вважати, що  $N(V_p(t), t, \alpha) = N(\alpha)$ .

З метою спрощення викладок, функцію змінної маси частинки подамо у вигляді

$$m(t) = m_0 \cdot k_m(t), \tag{2}$$

де  $k_m(t)$  – безрозмірний шуканий коефіцієнт, що характеризує зміну початкової маси з часом,  $k_m(0) = k_{m0} = 1$ .

Розглянемо частинний випадок відсутності руху ( $V = V_p = 0$ ) матеріальної частинки вздовж леза робочого органу при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Тоді, на підставі системи диференціальних рівнянь (1), яка перетворюється в умовах статичності, отримаємо

$$\left. \begin{aligned} N\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \left[ \Phi_{P1}\left(\frac{\pi}{2}\right) + k_p\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \Phi_{P2}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \cdot P = P; \\ -P \cdot \left[ k_p\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \Phi_{P2}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} + f \right] &\leq 0. \end{aligned} \right\}$$

Остання система рівноваги буде тотожно задовольнятися, наприклад, за таких умов

$$\Phi_{P1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad k_p\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \Phi_{P2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (3)$$

Розглянемо окремий випадок руху матеріальної точки, коли  $\alpha = 0$ . При цьому логічно припустити, що частинка ґрунту ковзає (без тертя) разом з недеформованим потоком ґрунту уздовж леза робочого органу зі швидкістю  $V = V_p$  ( $W = W_p$ ) і маса її не змінюється  $m(t) = m_0$ . Тоді система диференціальних рівнянь (1) перетвориться до вигляду

$$\left. \begin{aligned} m_0 \cdot W_p(t) &= P \cdot \Phi_{P1}(0) + k_{V1}(0) \cdot m_0 \cdot V_p^2(t) \cdot \Phi_{V1}(0) + k_{W1}(0) \cdot m_0 \cdot W_p(t) \cdot \Phi_{W1}(0) - f \cdot N(0); \\ N(0) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Останнє означає, що в цьому випадку бічний тиск ґрунту на лезо відсутній, і перше рівняння останньої системи буде тотожно задовольнятися для будь-якої функції швидкості робочого органу за таких умов

$$\Phi_{P1}(0) = k_{V1}(0) \cdot \Phi_{V1}(0) = 0, \quad k_{W1}(0) \cdot \Phi_{W1}(0) = 1. \quad (4)$$

Проаналізувавши умови (3) і (4), у подальшому будемо припускати, що

$$\Phi_{P1}(\alpha) = \Phi_{V1}(\alpha) = \sin \alpha, \quad k_{W1}(\alpha) \cdot \Phi_{W1}(\alpha) = \Phi_{P2}(\alpha) = \cos \alpha, \quad \Phi_{V2}(\alpha) = \Phi_{W2}(\alpha) = 1. \quad (5)$$

Звичайно, конкретика коефіцієнтів і функцій, що уточнюються, вимагає експериментального вивчення, але переважно характер їх поведінки безсумнівний (виходячи з окремих випадків руху і рівноваги).

З урахуванням залежності (2) та уточнень (5), система диференціальних рівнянь (1) перетвориться до виду

$$\left. \begin{aligned} k_m(t) \cdot W(t) &= (\cos \alpha - k_p \cdot \sin \alpha) \cdot \sin \alpha \frac{P}{m_0} + (k_{V1} \cdot \cos \alpha - k_{V2} \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot \sin \alpha \cdot V_p^2(t) + \\ &+ (\cos^2 \alpha - k_{W2} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha) \cdot W_p(t) - f \cdot \frac{N(\alpha)}{m_0} + k'_m(t) [(\cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha) \cdot V_p(t) - V(t)]; \\ 0 &= -(\sin \alpha + k_p \cdot \cos \alpha) \cdot \sin \alpha \frac{P}{m_0} - \left( k_{V1} + \frac{k_{V2}}{\cos \alpha} \right) \cdot [\sin \alpha \cdot V_p(t)]^2 - (\cos \alpha + k_{W2}) \cdot \sin \alpha \cdot W_p(t) + \\ &+ \frac{N(\alpha)}{m_0} - 2 \cdot k'_m(t) \cdot \sin \alpha \cdot V_p(t). \end{aligned} \right\} (1')$$

Розглянемо випадок відсутності руху матеріальної частинки вздовж леза робочого органу  $V = V_p = 0$ ,  $W = W_p = 0$  (перехідний процес зі стану спокою до руху – квазістатика). Тоді на підставі системи рівнянь (1'), яка перетворюється в систему рівнянь статички, отримуємо

$$\left. \begin{aligned} 0 &= (\cos \alpha - k_p \cdot \sin \alpha) \cdot \sin \alpha \cdot P - f \cdot N(\alpha); \\ N(\alpha) &= (\sin \alpha + k_p \cdot \cos \alpha) \cdot \sin \alpha \cdot P. \end{aligned} \right\} \quad (1'')$$

З отриманих умов рівноваги знаходимо обмеження на кут  $\alpha = \left[ 0, \arctg \frac{1 - k_p \cdot f}{k_p + f} \right)$ , за якого можливий рух точки по лезу. Зауважимо, що при  $k_p = 0$  приходимо до «класичної» умови руху тіла похилою площиною  $\alpha = \left[ 0, \arctg \frac{1}{f} \right)$ .

На підґрунті [4], отримуємо розв'язок другого рівняння системи диференціальних рівнянь (1')

$$k_m(t) = k_{m0} + \frac{1}{2} \left[ \frac{N(\alpha) / \sin \alpha - (\sin \alpha + k_p \cdot \cos \alpha) \cdot P}{m_0} \cdot \int_0^t \frac{dt}{V_p(t)} - \left( k_{v1} + \frac{k_{v2}}{\cos \alpha} \right) \cdot \sin \alpha \cdot \int_0^t V_p(t) dt - \left[ \cos \alpha + k_{w2}(\alpha) \right] \cdot \ln V_p(t) \right].$$

З початкової умови  $V_p(0) = 0$  і обмеженості в початковий момент часу коефіцієнта зміни маси  $k_m(0) = 1$  приходимо до умови

$$k_{w2}(\alpha) = -\cos \alpha, \quad \left[ \cos^2 \alpha - k_{w2}(\alpha) \cdot \tg \alpha \cdot \sin \alpha = 1 \right]. \quad (6)$$

Остаточно розв'язок запишемо у вигляді

$$k_m(t) = 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{\frac{N(\alpha)}{\sin \alpha} - (\sin \alpha + k_p \cdot \cos \alpha) \cdot P}{m_0} \cdot \int_0^t \frac{dt}{V_p(t)} - \left( k_{v1} + \frac{k_{v2}}{\cos \alpha} \right) \cdot \sin \alpha \cdot \int_0^t V_p(t) dt \right]. \quad (7)$$

Аналізуючи останню залежність, доходимо висновку (у рамках цієї моделі), що функція маси частинки залежить тільки від швидкості робочого органу  $V_p(t)$  для заданого кута  $\alpha$ . Якщо в роботі [1] моделювалася функція зміни маси матеріальної точки від різних параметрів, то тут була отримана аналітична залежність з рівняння руху. Відзначимо також, що в зазначеній роботі не враховувалась бічна складова динамічного навантаження.

Припускаючи, що функції  $V_p(t)$ ,  $k_m(t)$ ,  $N(\alpha)$  відомі (задані, знаходяться з експериментів або при аналізі наведених рівнянь у частинних випадках, отримані при деяких спрощеннях), з використанням залежності (6) на підставі [4], отримуємо розв'язок першого диференціального рівняння системи (1)

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{k_m(t)} \left[ V_p(t) + \frac{(\cos \alpha - k_p \cdot \sin \alpha) \cdot \sin \alpha \cdot P - f \cdot N(\alpha)}{m_0} t + \right. \\ &\left. + (k_{v1} \cdot \cos \alpha - k_{v2} \cdot \tg^2 \alpha) \cdot \sin \alpha \int_0^t V_p^2(t) dt + \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} \int_0^t k'_m(t) \cdot V_p(t) dt + V_0 \right], \end{aligned} \quad (8)$$

де  $V_0 = V(0)$  – початкова швидкість частинки, надалі вважаємо  $V_0 = 0$ .

Розглянемо клас функцій швидкості робочого органу, які відповідають умовам  $V_p(0) = 0$

$$V_p(t) = k_{vp} \cdot t^n \quad (\text{при } n > 0), \quad (9)$$

де  $k_{vp} [m/c^{1+n}]$  – сталий коефіцієнт пропорційності (при  $n = 1$ :  $k_{vp}$  – прискорення).

Підставляючи (9) у залежності (7) і (8), остаточно матимемо

$$k_m(t) = 1 + \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{N(\alpha)}{\sin \alpha} - (\sin \alpha + k_p \cdot \cos \alpha) \cdot P \right] \frac{t^{1-n}}{m_0 \cdot k_{vp} \cdot (1-n)} - k_{vp} \cdot \left( k_{v1} + \frac{k_{v2}}{\cos \alpha} \right) \cdot \sin \alpha \frac{t^{1+n}}{1+n} \right\}, \quad (7')$$

$$V(t) = \frac{1}{k_m(t)} \left\{ \left[ (tg \alpha - k_p) \frac{P}{2} + (ctg 2\alpha - f) \cdot N(\alpha) \right] \frac{t}{m_0} + V_p(t) + \frac{k_{vp}^2}{2} \left( k_{v1} - \frac{k_{v2}}{\cos \alpha} \right) \cdot tg \alpha \cdot \frac{t^{1+2n}}{1+2n} + V_0 \right\}. \quad (8')$$

Формально останні формули справедливі для будь-яких значень  $n$ , але фактично тільки для  $n \in (0,1)$ . У цьому випадку виконується умова  $k_m(0) = 1$ . В іншому випадку ( $n \geq 1$ ), отримуємо залежність, що є другою умовою системи рівнянь рівноваги (1'')

$$P_1(\alpha) = \frac{N(\alpha)}{(1+k_p) \cdot \sin \alpha}.$$

Залежності (7'), (8') в решті решт набувають вигляду

$$k_m(t) = 1 - \frac{k_{vp}}{2} \cdot \left( k_{v1} + \frac{k_{v2}}{\cos \alpha} \right) \cdot \sin \alpha \cdot \frac{t^{1+n}}{1+n},$$

$$V(t) = \frac{1}{k_m(t)} \left[ \left( \frac{\cos \alpha - k_p \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha + k_p \cdot \cos \alpha} - f \right) \cdot \frac{N(\alpha)}{m_0} \cdot t + V_p(t) + \frac{k_{vp}^2}{2} \left( k_{v1} - \frac{k_{v2}}{\cos \alpha} \right) \cdot tg \alpha \cdot \frac{t^{1+2n}}{1+2n} + V_0 \right].$$

Аналізуючи останнє співвідношення для  $k_m(t)$ , однозначно доходимо висновку (у рамках цієї моделі), що при  $n \geq 1$  маса частинки зменшується і залежить тільки від динамічної складової системи сил (швидкості робочого органу), що діють на матеріальну точку змінної маси. Цей результат дозволяє пояснити явище кришення ґрунту при дії на нього робочого органу.

На основі отриманих формул, проведено чисельний аналіз швидкості  $V(t)$  матеріальної частинки, що рухається вздовж леза та зміни її маси ( $k_m(t)$ ), залежно від швидкості руху робочого органу  $V_p(t)$ .

На рис. 2-4 наведено залежності, отримані за наступних параметрів:  $f = 0.285$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $m_0 = 0.001$  кг,  $N(30^\circ) = 0.1035$  Н,  $k_p = 0.955$ ,  $k_{v1} = k_{v2} = 1$  м<sup>-1</sup>,  $k_{vp} = 1.3$  м/с<sup>1+n</sup>.

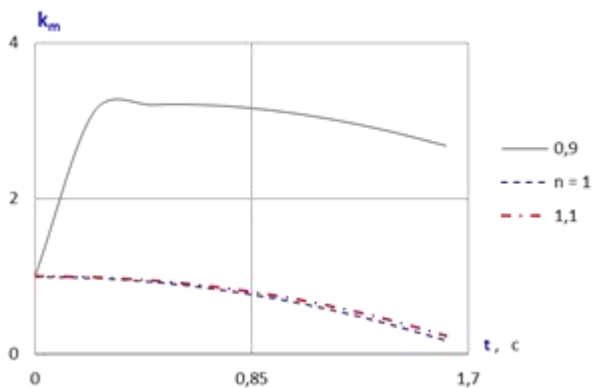


Рис. 2. Залежність коефіцієнта зміни маси частинки  $k_m(t)$  від часу  $t$

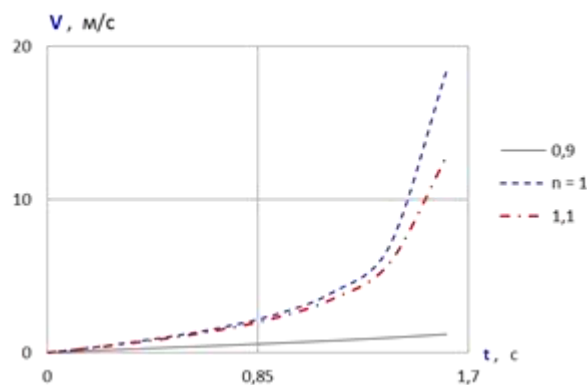


Рис. 3. Порівняльні графіки швидкостей матеріальної точки при різних значеннях  $n$

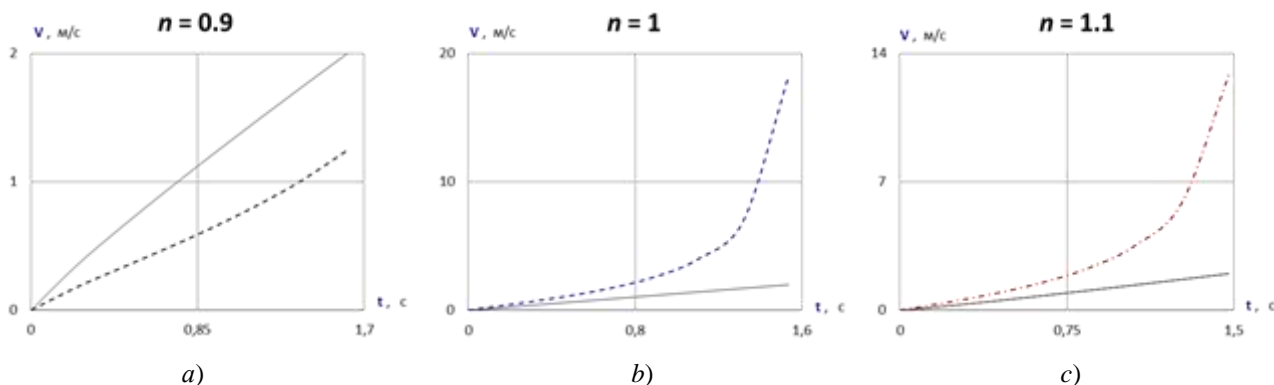


Рис. 4. Порівняльні графіки швидкості робочого органу  $V_p(t)$  (– суцільна лінія) і швидкості матеріальної частинки  $V(t)$  (--- пунктирна крива) при значеннях  $n = 0.9$  (a),  $n = 1$  (b),  $n = 1.1$  (c)

На графіках (рис. 2, 3) індекс 0.9 відповідає залежностям, отриманих за наступних додаткових значень параметрів:  $P = 0.1555 H$ ,  $n = 0.9$  – суцільна крива; індекс 1 відповідає  $P = N = 0.1035 H$ ,  $n = 1$  – пунктирна лінія; індекс 1.1 при  $P = N = 0.1035 H$ ,  $n = 1.1$  – штрихпунктирна крива.

Як видно з наведених графіків, можливі такі співвідношення параметрів досліджуваного процесу руху частинки ґрунту вздовж леза, за яких маса матеріальної точки може як збільшуватися (ефект «прилипання») (рис. 2,  $n = 0.9$ ), так і зменшуватися (рис. 2,  $n = 1$ ,  $n = 1.1$ ). Швидкість матеріальної частинки може бути як менше (рис. 4, a) швидкості робочого органу (на розглянутому проміжку часу), так і більше (рис. 4, b, c).

### ВИСНОВКИ

Розглянута математична модель дозволила на конкретних прикладах якісно описати явище «наростання маси частинки ґрунту – зменшення її швидкості», і навпаки (що відбувається насправді). Остання обставина безпосередньо пов'язана з явищем кришення ґрунту. Виявлено напрямки експериментальних і теоретичних досліджень, що дозволяють більш точно описати кінематику частинки змінної маси, що рухається по лезу робочого органу.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Тищенко С. С., Швайко В. М., Гурідова В. О. Дослідження кінематичних параметрів руху частинки ґрунту за прямолінійним лезом робочого органу. *Вісник Дніпропетровського державного аграрно-економічного університету*. 2014. № 2(34). С. 63–66.
2. Мещерский И. В. Курс теоретической механики. Ч. 1. Москва: Госиздат, 1930. 202 с.
3. Д'яконов С. О. Обґрунтування параметрів технологічного процесу і робочих органів сівалки прямого сіву: Автореф. дис... канд. техн. наук / Харків, 2007. 20 с.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Наука, 1976. 576 с.

## REFERENCES

1. Tishchenko, S., Shvayko, V. & Guridova, V. (2014). Studies kinematic parameters motion of a soil particle on the rectilinear blade of the working body. *Visnyk Dnipropetrovs'koho derzhavnoho ahrarno-ekonomichnoho universytetu*, No. 2(34), pp. 63-66.
2. Meshcherskiy, I. (1930). Course of theoretical mechanics, Part. 1. Moscow: Gosizdat.
3. D'yakonov, S. (2007). Justification parameters of technological process and working bodies seeder for direct seeding. (Extended abstract of Cand. Sc. thesis). Kharkiv, Ukraine.
4. Kamke, E. (1976). Handbook of Ordinary Differential Equations. Moscow: Nauka.

УДК 539.374

## ОБРАЗОВАНИЕ ШЕЙКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ПРИ ДВУХОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ ПЛАСТИНКИ

Шевченко А. Г., <sup>1</sup>Шнейдер В. П.

<sup>1</sup>Завод «Мастер-Профи»,  
ул. Курсантская, 23, г. Дніпро, 49000

artur\_shev91@mail.ru

В рамках теории микродеформации исследуется локализация деформации в форме образования шейки, при двухосном растяжении однородной тонкой пластины постоянной толщины. Используя ранее доказанное утверждение о том, что бифуркация процесса деформирования упругопластического тела достигается на путях полного догружения, задача бифуркации сведена к линейной задаче на собственные значения. В частном случае монотонного нагружения, когда не возникают частичные разгрузки в рамках предложенного подхода, получены формулы для определения критической нагрузки и найдено решение для шейки конечной длины.

*Ключевые слова:* бифуркация процесса деформирования, локализация пластической деформации, плоское напряженное состояние, шейкообразование, разрыв перемещений.

## УТВОРЕННЯ ШИЙКИ КІНЦЕВОЇ ДОВЖИНИ ПРИ ДВОВІСНОМУ РОЗТЯГНЕННІ ПЛАСТИНКИ

Шевченко А. Г., <sup>1</sup>Шнейдер В. П.

<sup>1</sup>Завод «Мастер-Профи»,  
вул. Курсантська, 23, м. Дніпро, 49000

artur\_shev91@mail.ru

При двоосному розтягненні за межами пружності в тонкій пластинці може виникнути локальне утоншення, тобто утворюється шийка. У рамках теорії мікродеформації досліджується локалізація деформації у формі утворення шийки, при двоосному розтягуванні однорідної тонкої пластини постійної товщини. Раніше було показано, що бифуркація процесу деформування досягається на шляхах повного довантаження, що дозволяє зводити задачу бифуркації лінійної задачі на власні значення. В окремому випадку монотонного навантаження, коли не виникають часткові розвантаження в рамках запропонованого підходу отримані формули для визначення критичного навантаження і знайдено розв'язок для шийки обмеженої довжини.

*Ключові слова:* бифуркація процесу деформування, локалізація пластичної деформації, плоский напружений стан, шийкоутворення, розрив переміщень.

## FORMATION OF A NECK OF FINITE LENGTH UNDER BIAXIAL STRETCHING OF THE PLATE

Shevchenko A. G., <sup>1</sup>Shneider V. P.

<sup>1</sup>Factory "Master-Profi",  
Kursantskaya Str., 23, Dnepr, 49000

artur\_shev91@mail.ru

Within the framework of the theory of microdeformations, for the case of biaxial tension under the plane stress conditions, the fields of rates of displacements and changes in stresses in the vicinity of the apex of the assigned line of discontinuity of displacements were built in a closed analytical form.

It was established that the solution has the root peculiarity at the apex of the neck. For the formulation of a fracture criterion, the average values of the fields of rates of change in stresses in the vicinity of the apex of the neck of discontinuity were introduced, by analogy with the concept of the averaged stresses under the Novozhilov fracture condition.

The dependence of the length of localization line on subcritical stresses was obtained from the condition of the limitation of the angle of the fracture of the trajectory of load (the angle between the directions of the deviator of subcritical stress and the rate of change in stresses), which follows from the theory of microdeformation. It was established that the localization line in the initial state can have dimension, compared with the characteristic size of the material (in our case, with the size of a grain).

*Key words: bifurcation of the deformation process, localization of plastic strain, plane stress, necking, displacement gap.*

### ВВЕДЕНИЕ

Анализ условий образования шейки при двухосном растяжении однородной пластинки постоянной толщины, материал которого подчиняется ассоциированному закону течения с гладкой поверхностью текучести, проведенный в работах [5, 9], показал, что такой подход не дает результатов, отвечающих действительности. В работе [7] при исследовании образования шейки применялись определяющие соотношения, которые включают скорость пластической дилатансии, что несколько улучшило результат. Близкими к эксперименту оказались результаты, полученные в [8] с использованием определяющих соотношений деформационной теории пластичности в скоростях. Однако, деформационная теория ограничена условием простого нагружения, или близкого к нему, и нарушает условие непрерывности при ортогональном догружении. В работе [4] использовалась определяющая модель для описания деформации при произвольном процессе нагружения, как утверждают авторы, для материалов с произвольной поверхностью текучести, вводя дополнительно скорость тангенциальной деформации.

Бифуркация процесса деформирования сопровождается изломом траектории нагружения во внутренних точках тела, кроме того, сложный процесс нагружения может предшествовать точке бифуркации. Все упомянутые выше простейшие теории не описывают в полной мере деформации при сложном нагружении. Следовательно, они не могут быть использованы и при решении задач устойчивости за пределами упругости. Наиболее выпукло этот вопрос отразился в так называемом парадоксе устойчивости [6]. В настоящей работе в рамках теории микродеформации [1, 3], получившей достаточно полное экспериментальное подтверждение, исследуется влияние истории нагружения на условия локализации деформации в форме шейки, при двухосном растяжении однородной тонкой пластины постоянной толщины.

Локализация пластической деформации в форме образования шейки. При плоском напряженном состоянии допускается возможность скачка нормальной составляющей перемещений. Подобный скачок приводит к резкому утоншению («шейка») или утолщению («валик») пластинки вдоль линии разрыва. Такая линия является математической идеализацией наблюдаемого в опытах локального образования шейки.

Рассмотрим двухосное растяжение однородной тонкой пластины постоянной толщины  $h$ . Примем, что в некоторый момент нагружения на пластинке возникает линия локализации. Компоненты нормали в системе координат  $(x_1, x_2)$  представим в виде:

$$n_1 = \cos \psi, \quad n_2 = \sin \psi,$$

где угол  $\psi$  отсчитывается от оси  $x_1$  в направлении против часовой стрелки, как показано на рис. 1.

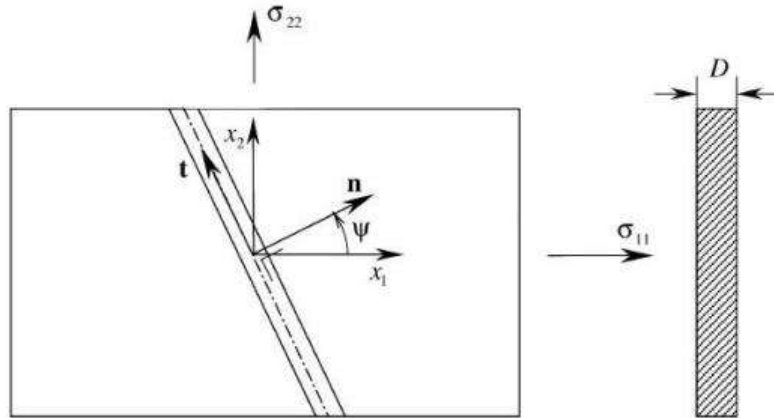


Рис. 1. Линия образования шейки в пластинке

Обозначим через  $\Delta(\cdot)$  разность полей внутри и вне полосы, т.е.

$$\Delta(\cdot) = (\cdot)^+ - (\cdot)^-, \quad (1)$$

где  $(\cdot)^+$  и  $(\cdot)^-$  значения внутри и вне полосы, соответственно. Тогда разность скоростей внутри и вне полосы будет

$$\Delta v_i = g_i (x_1 \cos(\psi) + x_2 \sin(\psi)) = g_i (x_r n_r). \quad (2)$$

Тогда разность градиентов скоростей примет вид

$$\Delta \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\partial \Delta v_\alpha}{\partial x_\beta} = g'_\alpha (x_\gamma n_\gamma) n_\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2). \quad (3)$$

Уравнения равновесия в области шейки представим в следующем виде

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\Delta \dot{\sigma}_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} \Delta D_{33}) = 0, \quad (4)$$

где  $\Delta D_{33}$  – разность скоростей деформации по толщине внутри и вне полосы, т.е.

$$\Delta D_{33} = \Delta \dot{D} / D, \quad (5)$$

где  $D$  – толщина пластинки.

Пусть  $X = n_\alpha x_\alpha$ , тогда  $\partial f(X) / \partial x_\alpha = n_\beta \partial f(X) / \partial X$  и из уравнений равновесия (4) получаем

$$\begin{cases} n_1 \Delta \dot{\sigma}_{11} + n_2 \Delta \dot{\sigma}_{12} + \sigma_1 n_1 \Delta D_{33} = 0, \\ n_1 \Delta \dot{\sigma}_{12} + n_2 \Delta \dot{\sigma}_{22} + \sigma_2 n_2 \Delta D_{33} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

При этом связь материальной производной  $\dot{\sigma}_{ij}$  с производной по Яуману тензора напряжений Коши  $\sigma_{ij}^\nabla$  следует из

$$\dot{\sigma}_{11} = \sigma_{11}^\nabla, \quad \dot{\sigma}_{22} = \sigma_{22}^\nabla, \quad \dot{\sigma}_{12} = \sigma_{12}^\nabla - (\sigma_1 - \sigma_2) W_{12}. \quad (7)$$

Определяющие соотношения теории микродеформации при плоском напряженном состоянии представим в следующем виде:



$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{\nabla} &= \dot{\sigma}_{11} = E_{1111}D_{11} + E_{1122}D_{22}, \\ \sigma_{22}^{\nabla} &= \dot{\sigma}_{22} = E_{2211}D_{11} + E_{2222}D_{22}, \\ \sigma_{12}^{\nabla} &= \dot{\sigma}_{12} + (\sigma_1 - \sigma_2)W_{12} = 2E_{1212}D_{12}.\end{aligned}\tag{8}$$

Из условия несжимаемости следует, что

$$\Delta D_{33} = -\Delta D_{11} - \Delta D_{22} = n_1 g'_1 + n_2 g'_2.\tag{9}$$

Подставляя определяющие соотношения (8) в уравнение равновесия (4) и учитывая (3), получаем систему линейных однородных уравнений для определения  $g'_1$  и  $g'_2$ , которые описывают разрыв градиента скорости. Для существования ненулевых решений для  $g'_1$  и  $g'_2$  определитель системы должен быть равен нулю. Это приводит к биквадратному уравнению относительно переменной  $\nu \equiv n_1/n_2$ , ( $n_1^2 + n_2^2 = 1$ ):

$$\begin{aligned}& (E_{1212}E_{2222} - 2E_{1212}\sigma_{22} - E_{2222}\sigma_{11} + E_{2222}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}^2)\nu^4 + 2\left(E_{1111}E_{2222} - \right. \\ & - 2E_{1111}\sigma_{22} - E_{1122}E_{1212} - E_{1122}E_{2211} + \frac{1}{2}E_{1122}\sigma_{11} + \frac{1}{2}E_{1122}\sigma_{22} - E_{1212}E_{2211} + \\ & \left. + E_{1212}\sigma_{11} + E_{1212}\sigma_{22} + \frac{1}{2}E_{2211}\sigma_{11} + \frac{1}{2}E_{2211}\sigma_{22} + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2\right)\nu^2 + \\ & 2E_{1111}E_{1212} + E_{1111}\sigma_{11} - E_{1111}\sigma_{22} + 2E_{1212}\sigma_{11} - \sigma_{11}^2 + \sigma_{11}\sigma_{22} = 0.\end{aligned}\tag{10}$$

В случае прямолинейной траектории нагружения  $\sigma_{22} = K\sigma_{11}$  интенсивность напряжений принимает вид  $\sigma_u = |\sigma_{11}|\sqrt{K^2 - K + 1}$ . Если задать  $K$ , то изменяя  $\sigma_{11}$  с некоторым шагом от значения  $|\sigma_{11}|_0 = \sigma_s/\sqrt{K^2 - K + 1}$ , можно по формулам в работе [3] определить матрицу жесткости  $E_{\alpha\beta\kappa\gamma}$  определяющих соотношений и тем самым вычислить корни биквадратного уравнения (10). Критическое напряжение  $\sigma_{11}^{kp}$  достигается, когда среди корней впервые появятся действительные. Для упрощения расчетов удобнее задавать изменение  $\alpha$  при заданном  $K$ .

### ОБРАЗОВАНИЕ ШЕЙКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Осуществим переход к системе координат  $0\hat{x}_1\hat{x}_2$  с использованием матрицы вращения  $Q$ , которая определяет поворот осей на угол  $\mathcal{G}_0$  по отношению к системе  $0x_1x_2$  (вращение против часовой стрелки принято положительным) по формуле:

$$\hat{x} = [Q^T] \cdot x, \quad [Q] = \begin{bmatrix} \cos \mathcal{G}_0 & \sin \mathcal{G}_0 \\ -\sin \mathcal{G}_0 & \cos \mathcal{G}_0 \end{bmatrix}.$$

Скорости изменения компонент первого тензора Пиола-Кирхгофа, скорости перемещений и ее градиент могут быть выражены в системе отсчета  $0\hat{x}_1\hat{x}_2$  следующим образом:

$$\Delta \hat{t} = Q^T \Delta t Q, \quad \hat{v} = Q^T \bar{v}, \quad \hat{\nabla} \hat{v} = Q^T \nabla \bar{v} Q.$$

Определяющие соотношения представим в виде:

$$\Delta \hat{\sigma} = \hat{E}(\hat{\nabla} v)^T,$$

где матрица касательной жесткости после преобразования четвертого порядка определяется как:

$$\hat{E}_{ijhk} = Q_{li} Q_{mj} E_{lmno} Q_{nh} Q_{ok},$$

и индексы принимают значения 1 и 2.

Следуя работе [13], введем функцию тока  $\hat{\psi}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$  в виде:

$$\hat{\psi}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \frac{\hat{t}_{22}^{\infty}}{2G_q} \sum_{j=1}^2 \text{Re} \left[ A_j f(\hat{z}_j) \right],$$

где

$$f(\hat{z}_j) = \hat{z}_j^2 - \hat{z}_j \sqrt{\hat{z}_j^2 - l^2} + l^2 \ln \left( \hat{z}_j + \sqrt{\hat{z}_j^2 - l^2} \right),$$

$$\hat{z}_j = \hat{x}_1 + W_j \hat{x}_2, W_j = \frac{\sin \vartheta_0 + \Omega_j \cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_0 - \Omega_j \sin \vartheta_0}.$$

Для определения постоянных  $A_j$  воспользуемся граничными условиями на линии локализации. Они основаны на равенстве нулю скорости изменения касательных напряжений и непрерывности нормальных компонент первого тензора Пиола-Кирхгофа, а также непрерывности скоростей нормальных перемещений бифуркационного решения. Для разности полей соответственно получаем:

$$\Delta \hat{t}_{22}(\hat{x}_1, 0^{\pm}) = -\hat{t}_{22}^{\infty}, \quad \forall |\hat{x}_1| < l,$$

$$\left[ \Delta \hat{t}_{21}(\hat{x}_1, 0^{\pm}) \right] = 0, \quad \forall |\hat{x}_1| < l,$$

$$\left[ \Delta \hat{v}_2(\hat{x}_1, 0) \right] = 0, \quad \forall |\hat{x}_1| < l.$$

Подставляя построенное решение в граничные условия, приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных  $A_j$ :

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{12} & c_{22} \\ -c_{21} & c_{11} & -c_{22} & c_{12} \\ c_{31} & c_{41} & c_{32} & c_{42} \\ -c_{41} & c_{31} & -c_{42} & c_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}[A_1] \\ \text{Im}[A_1] \\ \text{Re}[A_2] \\ \text{Im}[A_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

коэффициенты которой определяются по формулам:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\mu c_{1j} = \hat{E}_{1112} - \hat{E}_{1222} - \text{Re}[W_j] \left[ \hat{E}_{1111} - 2\hat{E}_{1122} - \hat{E}_{1221} + \hat{E}_{2222} + \right. \\ \quad \left. + \text{Re}[W_j] (2\hat{E}_{1121} - 2\hat{E}_{2122} + \text{Re}[W_j] \hat{E}_{2121}) + \right. \\ \quad \left. + \text{Im}[W_j]^2 (2\hat{E}_{1121} - 2\hat{E}_{2122} + 3\text{Re}[W_j] \hat{E}_{2121}) \right], \\ 2\mu c_{2j} = \text{Im}[W_j] \left[ \hat{E}_{1111} - 2\hat{E}_{1122} - \hat{E}_{1221} + \hat{E}_{2222} + \right. \\ \quad \left. + \text{Re}[W_j] (4\hat{E}_{1121} - 4\hat{E}_{2122} + 3\text{Re}[W_j] \hat{E}_{2121}) - \text{Im}[W_j] \hat{E}_{2121} \right], \\ 2\mu c_{3j} = -\hat{E}_{1221} + \text{Re}[W_j] \left[ \hat{E}_{1121} - \hat{E}_{2122} + \text{Re}[W_j] \hat{E}_{2121} - \text{Im}[W_j] \hat{E}_{2121} \right], \\ 2\mu c_{4j} = \text{Im}[W_j] \left[ -\hat{E}_{1121} + \hat{E}_{2122} - 2\text{Re}[W_j] \hat{E}_{2121} \right], \quad j = 1, 2. \end{array} \right.$$

Можно легко показать, что обращение в ноль определителя системы соответствует линии разрыва бесконечной длины.

На линии локализации полосы  $\hat{x}_2 = 0$ , тогда:

$$\hat{\psi}(\hat{x}_1, 0) = \frac{\hat{\sigma}_{22}^{\infty}}{2G_q} (Re[A_1] + Re[A_2]) \times \left( \hat{x}_1^2 - \hat{x}_1 \sqrt{\hat{x}_1^2 - l^2} + l^2 \ln \left( \hat{x}_1 + \sqrt{\hat{x}_1^2 - l^2} \right) \right).$$

Используя полученное решение, можно определить поля скоростей перемещений и деформаций, и, с помощью определяющих соотношений (2), построить скорости изменения напряжений в окрестности вершины полосы локализации. В вершине линии скольжения будут возникать корневые особенности. Сформулируем критерий вязкого разрушения, используя критерий разрушения Новожилова [2] и осреднение бесконечных напряжений в окрестности вершины шейки. Учтем, что при вязком разрушении мы имеем дело с возникновением локализованного течения, в котором прочность тела с разрезом определяется средними значениями напряжений в малой окрестности вершины полосы. При этом «квантом» скольжения можно считать вектор Бюргера на уровне монокристалла или локализованный сдвиг в пределах зерна поликристаллического металла. В нашем случае решается задача в скоростях, что приводит к необходимости новой формулировки критерия развития локализации, используя понятие средних скоростей в пределах зерна

$$d\hat{\sigma}_{ij}^{\Delta} = \frac{1}{b} \int_l^{l+b} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} dx_1.$$

Для построения зависимости длины шейки от нагрузки воспользуемся условием полного догружения:

$$tg \beta \leq \frac{\cos \alpha - \kappa F(\alpha)}{\sin \alpha},$$

где  $\beta$  – угол излома траектории нагружения в точке бифуркации.

А величина угла определяется по формуле:

$$\cos \alpha = \frac{\tau_0 + \kappa(t)}{r(t)},$$

где  $\tau_0$  – предел текучести,  $r(t) = \sqrt{r(t) : r(t)}$ ,  $\kappa(t) = \int_0^t \frac{\mu F}{r(t)(1 + \mu \Omega)} r : dr$ .

Угол излома определяется по формуле

$$\cos \beta = \frac{d\hat{S}^{\hat{\sigma}} : d\hat{S}^0}{\sqrt{d\hat{S}^{\hat{\sigma}} : d\hat{S}^{\hat{\sigma}}} \sqrt{d\hat{S}^0 : d\hat{S}^0}}.$$

где  $d\hat{S}^{\hat{\sigma}} = d\hat{S}^{\Delta} + d\hat{S}^0$ .

Предполагая, что шейка возникает при условии, что  $l/b = 1$ , можем получить параметры, при которых она образуется.

Таблица 1

К	$\sigma_{\text{крит.огранич}}$	$\sigma_{\text{крит.беск}}$
0	1.00032013	2.244255116
0.2	1.091739108	2.262683668
1	1.001045155	1.7792316

Таким образом, локализация шейки в начальном состоянии может иметь размер, сравнимый с размером зерна, что подтверждается многочисленными исследованиями пластической деформации поликристалла.

### ВЫВОДЫ

1. В рамках теории микродеформаций, для случая простого нагружения в условиях плоского напряженного состояния, построены в замкнутом аналитическом виде поля скоростей перемещений и изменений напряжений в окрестности вершині шейки.
2. Было установлено, что решение имеет корневую особенность при вершине. Для формулировки критерия разрушения введены средние значения полей скоростей изменения напряжений в окрестности вершины шейки, по аналогии с понятием осредненных напряжений в условии разрушения Новожилова.
3. Из условия ограниченности угла излома траектории нагружения (угла между направлениями девиатора докритического напряжения и скорости изменения напряжений), которое следует из теории микродеформации, получена зависимость длины шейки от докритических напряжений. Установлено, что линия шейки в начальном состоянии может иметь размер, сравнимый с характерным размером материала (в нашем случае размером зерна).

### ЛІТЕРАТУРА

1. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В., Черняков Ю. А. Теория пластичности и ползучести, учитывающая микродеформации. *ПММ*. 1986. Т. 50, вып. 6. С. 890–897.
2. Новожилов В. В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности. *Прикладная математика и механика*. 1969. Т. 33, вып. 2. С. 212–222.
3. Kadashevich Yu. I., Chernyakov Yu. A. Theory of plasticity, taking into account micro stresses. *Advances in Mechanics*. 1992. Vol. 15, No 3-4. P. 3–39.
4. Hashiguchi K., Protasov A. Localized necking analysis by the subloading surface model with tangential-strain rate and anisotropy. *International Journal of Plasticity*. 2004. Vol. 20. P. 1909–1930.
5. Hill R. On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets. *J. Mech. Phys. Solids*. 1952. Vol. 1. P. 19–30.
6. Hutchinson J. W. Plastic buckling. *Advances in Appl. Mech.* 1974. Vol. 14. P. 67–144.
7. Rudnicki J. W., Rice J. R. Conditions for localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *J. Mech. Phys. Solids*. 1975. Vol. 23. P. 371–394.
8. Storen S., Rice J. R. Localized necking in thin sheet. *J. Mech. Phys. Solids*. 1975. Vol. 23. P.421–441.
9. Swift H. W. Plastic instability under plane stress. *J. Mech. Phys. Solids*. 1952. Vol. 1. P. 1–18.

### REFERENCES

1. Kadashevich, Yu. I., Novozhilov, V. V. & Chernyakov, Yu. A. (1986). Theory of plasticity and creep, taking into account microdeformation. *PMM*, Vol. 50, Iss. 6, pp. 890-897.
2. Novozhilov, V. V. (1969). On the necessary and sufficient criteria for brittle strength. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, Vol. 33, Iss. 2, pp. 212-222.
3. Kadashevich, Yu. I. & Chernyakov, Yu. A. (1992). Theory of plasticity, taking into account micro stresses. *Advances in Mechanics*, Vol. 15, No. 3-4, pp. 3-39.
4. Hashiguchi, K. & Protasov, A. (2004). Localized necking analysis by the subloading surface model with tangential-strain rate and anisotropy. *International Journal of Plasticity*, Vol. 20, pp. 1909-1930.
5. Hill, R. (1952). On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 1, pp. 19-30.
6. Hutchinson, J. W. (1974). Plastic buckling. *Advances in Appl. Mech.*, Vol. 14, pp. 67-144.
7. Rudnicki, J. W. & Rice, J. R. (1975). Conditions for localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, pp. 371-394.
8. Storen, S. & Rice, J. R. (1975). Localized necking in thin sheet. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, pp. 421-441.
9. Swift, H. W. (1952). Plastic instability under plane stress. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 1, pp. 1-18.

УДК 539.3

## РОЗРАХУНКОВА ОЦІНКА РОЗВИТКУ ТРІЩИНИ З КОНТАКТУЮЧИМИ БЕРЕГАМИ В ПЛОСКИХ ЕЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦІЙ

Шульженко М. Г., Гонтаровський П. П., Гармаш Н. Г., Мележик І. І.

*Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України,  
вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, Україна*

shulzh@ipmach.kharkov.ua

Представлена методика розрахунку розвитку тріщини в пластинчатих і осесиметричних конструкціях при циклічному навантаженні, яка базується на концепції накопичення розсіяних пошкоджень у матеріалі. Враховується контакт берегів тріщини, що виникає при стискаючому навантаженні. Результати порівнюються з даними, отриманими за методом Ньюмана.

*Ключові слова: кінетика тріщини, циклічне навантаження, розмахи пружно-пластичних деформацій, криві малоциклової втоми, метод скінченних елементів, коефіцієнт асиметрії циклу, контакт берегів тріщини.*

## РАСЧЕТНАЯ ОЦЕНКА РАЗВИТИЯ ТРЕЩИНЫ С КОНТАКТИРУЮЩИМИ БЕРЕГАМИ В ПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИЙ

Шульженко Н. Г., Гонтаровский П. П., Гармаш Н. Г., Мележик И. И.

*Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,  
ул. Пожарского, 2/10, г. Харьков, Украина*

shulzh@ipmach.kharkov.ua

Представлена методика расчета развития трещины в пластинчатых и осесимметричных конструкциях при циклическом нагружении, которая основывается на концепции накопленных рассеянных повреждений в материале. Учитывается контакт берегов трещины, возникающий при сжимающем нагружении. Результаты сравниваются с данными, полученными по методу Ньюмана.

*Ключевые слова: кинетика трещины, циклическая нагрузка, размахи упруго-пластических деформаций, кривые малоциклической усталости, метод конечных элементов, коэффициент асимметрии цикла, контакт берегов трещины.*

## COMPUTATION ESTIMATION OF THE CRACK DEVELOPMENT WITH CRACK EDGES CONTACT OF PLANE STRUCTURAL ELEMENTS

Shulzhenko N. G., Gontarovskiy P. P., Garmash N. G., Melezhyk I. I.

*A. N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems  
of the National Academy of Sciences of Ukraine,  
Pozharsky street, 2/10, Kharkov, Ukraine*

shulzh@ipmach.kharkov.ua

The purpose of these studies was to work out the methods for the computation of crack development in the plate and axisymmetric elements of structures at cyclic loading for the plasto-elastic arrangement using the conception of the accumulation of scattered damages in the material. The processes of sign-changing plasto-elastic deformation and crack resistance of the material were simulated at the crack tip using the smooth specimen fatigue test data. Thermal and stress-strain behaviors of the construction were determined in different loading modes using the method of final elements for several fixed crack depths. The material damage was estimated using the curves of low-cycle fatigue and those of the range of plasto-elastic deformations on the would-be way of the crack development resorting to the hypothesis of linear summation. When the damageability reaches a critical value at the crack tip its depth is increased nonuniformly by a value of the specified step. This scientific paper gives consideration to the kinetics of the surface crack in the region exposed to the action of cyclic loading with different stress ratios. With negative stress ratio, contact is observed between the crack edges. The results were compared with the data obtained using the Newman method. A satisfactory agreement of the data is observed. This technique can be used for the evaluation of the service life of the elements of steam turbines.

*Key words: crack kinetics, cyclic loading, the range of plasto-elastic deformations, low-cycle fatigue curves, and the method of final elements, stress ratio, contact of crack edges.*

Урахування живучості елементів енергомашин з тріщинами має важливе значення при оцінці їхнього розрахункового ресурсу [1]. Зазвичай для оцінки кінетики тріщин при циклічному навантаженні широко використовуються положення механіки крихкого руйнування з використанням коефіцієнтів інтенсивності напружень  $K_I$  та рівнянь Періса

$$\frac{dl}{dN} = C \Delta K_I^n, \quad (1)$$

де  $l$  – довжина тріщини,  $N$  – кількість циклів,  $C$ ,  $n$  – константи матеріалу,  $\Delta K_I$  – розмах коефіцієнта інтенсивності напружень.

При цьому зона пластичності у вершині тріщини приймається малою порівняно з довжиною тріщини, що, як показали чисельні дослідження, результати яких приводяться нижче, не завжди відповідає дійсності.

Швидкість росту тріщини, крім розмаху  $\Delta K_I$ , залежить від коефіцієнта асиметрії циклічного навантаження  $R = \frac{K_{Imin}}{K_{Imax}}$ , який враховується в уточнених формулах типу Періса [2].

Коефіцієнт інтенсивності напружень обчислюється на основі розв'язків теорії пружності і його знак відповідає знаку напружень, що розкривають тріщину. У механіці крихкого руйнування припускається, що стискаючі напруження не впливають на кінетику втомної тріщини [3, 4]. Вважається, що при стискаючих зусиллях береги тріщини змикаються та тріщина закривається по всій довжині, тому розрахунки слід вести тільки для віднульового циклу ( $R=0$ ). Такий же підхід пропонується і в рекомендаціях норм ASME [5]. Згідно з теорією пружності, при розтягуючих напруженнях береги тріщини розходяться, а при стискаючих – змикаються. У випадку стискаючих напружень коефіцієнт інтенсивності напружень  $\Delta K_I = 0$  і тріщина не розвивається. Однак, експериментально показано [6, 7], що стискаюча стадія навантаження впливає на швидкість росту тріщини при циклічному навантаженні, хоч і в значно меншій мірі, ніж розтягуюча. При взаємопроникненні берегів тріщини при дії стискаючих напружень коефіцієнт інтенсивності напружень стає від'ємним. З урахуванням повного розмаху  $\Delta K_I$  у рівняннях Періса розрахунки дають занижений ресурс. Значно менша похибка буде для віднульового циклу, хоча розрахунковий ресурс стане дещо завищеним.

За рахунок пластичних деформацій береги тріщини залишаються розкритими при повному знятті розтягуючих напружень, а в зоні її вершини при цьому з'являються стискаючі напруження, що в деяких роботах отримало назву явища «закриття» тріщини [6]. У працях [7-13] запропоновано рівняння, які враховують коефіцієнт асиметрії циклічного навантаження  $R$  та базуються на явищі «закриття» тріщини. «Закриття» тріщини наразі випадку не є вдалим терміном тому, що при цьому мають місце лише стискаючі напруження у вершині тріщини, а береги тріщини не контактують. Експериментальні дані [6] показують, що від'ємні напруження у вершині тріщини мають місце і при розтягуючих навантаженнях, тому в рівняннях типу Періса використовується ефективний розмах коефіцієнта інтенсивності напружень

$$\frac{dl}{dN} = C_N \Delta K_{Ieff}^n, \quad (2)$$

$$\Delta K_{Ieff} = K_{Imax} - K_{Iop} = U \Delta K_I, \quad (3)$$

де  $K_{Iop} > 0$  – коефіцієнт інтенсивності напружень, при якому напруження у вершині тріщини розтягуючі ( $U < 1$ ),  $U$  – поправковий коефіцієнт. Отже, методики [7-13] використовують

рівняння типу Періса (1), до яких входить частина розмаху коефіцієнта інтенсивності напружень з відповідним збільшенням значення коефіцієнта  $C_N$ .

Найбільш прийнятна методика, що підтверджується експериментальними даними, запропонована Ньюманом [10]. Вона використовується в нашій роботі для порівняння з отриманими результатами. У (2) і (3) при підрахунку  $\Delta K_{\text{eff}}$ , крім коефіцієнта асиметрії циклу  $R$ , враховуються умовна границя текучості  $\sigma_{0,2}$  і тимчасовий опір матеріалу  $\sigma_B$ , від яких залежить зона пластичності у вершині тріщини. Для обчислення  $\Delta K_{\text{eff}}$  застосовуються залежності:

$$U = \frac{1-\gamma}{1-R},$$

де

$$\gamma = \frac{K_{\text{Itop}}}{K_{\text{Imax}}}; \gamma = A_0 + A_1R + A_2R^2 + A_3R^3 \text{ для } R \geq 0; \gamma = A_0 + A_1R \text{ для } -3 \leq R < 0;$$

$$A_0 = (0,825 - 0,34\alpha + 0,05\alpha^2) [\cos(\pi\sigma_{\text{max}}/2\sigma_0)]^{1/\alpha}; A_1 = (0,415 - 0,071\alpha)\sigma_{\text{max}}/\sigma_0;$$

$$A_2 = 1 - A_0 - A_1 - A_3; A_3 = 2A_0 + A_1 - 1; \alpha \approx 1,7; \sigma_0 = (\sigma_{0,2} + \sigma_B)/2;$$

$\sigma_{\text{max}}$  – номінальне напруження в площині тріщини.

При застосуванні методик, де використовується розмах  $\Delta K_{\text{eff}}$ , для визначення параметрів  $C_N$  та  $n$  необхідні довготривалі експерименти на спеціальних зразках з тріщиною.

Інший підхід для розрахунку кінетики тріщини базується на використанні параметрів розсіяних пошкоджень матеріалу в її вершині [14-17]. У [16, 17] пошкодженість матеріалу при циклічному навантаженні визначається через розмахи пластичних деформацій і криві малоциклової втоми для звичайних циліндричних зразків.

У роботі [16] розрахунок кінетики тріщин при багаторежимному циклічному навантаженні проводився з використанням розв'язання пружної задачі методом скінченних елементів. Розподіл розмаху пружно-пластичних деформацій наближено визначався на основі методу Нейбера. У [17] для  $R \geq 0$  розподіл розмаху пружно-пластичних деформацій на шляху розвитку тріщини одержаний методом скінченних елементів із розв'язку задач теорії пластичності.

У цій роботі визначається розвиток тріщини в пластинчатих й осесиметричних конструкціях при багаторежимному циклічному навантаженні на основі використання концепції накопичення розсіяних пошкоджень у матеріалі з урахуванням контакту берегів тріщини. Для визначення розподілу розмахів інтенсивності пружно-пластичних деформацій на шляху розвитку тріщини (для кожного режиму циклічного навантаження конструкції з тріщиною) розв'язуються термоконтатні задачі теорії пластичності з використанням методу скінченних елементів. Розрахунки проводяться для кількох фіксованих довжин тріщини  $l_k$  з інтервалом 0,5-1,0 см. Скінченні елементи зменшуються до вершини тріщини з однаковою закономірністю для всіх її довжин. Розмахи пластичних деформацій, отримані в центрах скінченних елементів  $x_m$  на шляху розвитку тріщини, задаються у вигляді таблиць  $\Delta \varepsilon_i(x_m, l_k)$  для кожного  $j$ -го режиму навантаження. Враховується відносна частка циклів

кожного  $j$ -го режиму навантаження  $d_{Nj} = \frac{N_j}{N}$  у загальному числі  $N$  циклів.

Шлях розвитку тріщини ділиться на відрізки  $d_l$  довжиною 0,05-0,1 мм, на яких тріщина підростає стрибкоподібно з накопиченням пошкодженості і руйнуванням матеріалу в її вершині. Розмахи інтенсивності деформацій для визначення пошкодженості матеріалу в центрах елементів довжиною  $d_l$  обчислюються шляхом інтерполяції. Для кожного наступного відрізка  $d_l$  кількість циклів до руйнування зменшується як за рахунок накопиченого в ньому пошкодження, так і через зростання деформацій і напружень при збільшенні тріщини. Використання квадратичної інтерполяції для обчислення розподілу деформацій у центрах  $x_i$  відрізків  $d_l$  через їх значення в центрах скінченних елементів  $x_m$  дозволяє суттєво зменшити обчислювальні витрати. Число циклів до руйнування  $N_{pj}$  від  $j$ -го режиму навантаження визначається з кривих втоми для відповідної температури, які задаються у вигляді таблиць для кожного матеріалу.

Визначення пошкодженості матеріалу на шляху розвитку тріщини проводиться з використанням відповідних параметрів:

приросту пошкодженості від  $j$ -го режиму навантаження в узагальненому циклі

$$\Delta\Pi_j(x_i) = \frac{1}{N_{pj}(x_i)} d_{Nj};$$

приросту пошкодженості за один узагальнений цикл від усіх  $K_N$  режимів навантаження

$$\Delta\Pi(x_i) = \sum_{j=1}^{K_N} \Delta\Pi_j(x_i);$$

кількості циклів до руйнування в елементі  $d_l$ , найближчому до вершини тріщини довжиною  $l$

$$N_i = \frac{1 - \Pi(x_1)}{\Delta\Pi(x_1)},$$

де  $\Pi(x_1)$  – накопичена пошкодженість у вершині тріщини за час її зростання до поточної довжини  $l$ ;

кількості циклів, за які тріщина досягла довжини  $l$

$$N(l) = \sum N_i.$$

Пошкодженість в інших точках  $x_i$  на шляху підростання тріщини після руйнування чергового елемента  $d_l$  визначається так:

$$\Pi(x_{i+1}) = \Pi(x_{i+1}) + \Delta\Pi(x_{i+1}) N_i.$$

Розрахунки повторюються для тріщини довжиною  $l = l + d_l$  за наведеним алгоритмом до наступного її зростання.

На основі викладеного проведено розрахунки кінетики тріщини в товстій пластині шириною 10 см і довжиною 24 см, яка знаходиться під дією знакозмінного навантаження. Поверхнева тріщина з початковою довжиною  $l = 2$  см розташована в центрі пластини (рис. 1).

Матеріал пластини – сталь 25X1M1Ф при  $T = 535^\circ \text{C}$ . Залежність інтенсивності напружень  $\sigma_i$  від інтенсивності деформацій  $\varepsilon_i$  при циклічному деформуванні ( $\sigma_{0,2}^H = 0,8\sigma_{0,2}$ ) наводиться



в таблиці 1 [21]. Параметри циклічного навантаження  $R = 0,5; 0,2; 0; -0,2; -0,5; -1$ , при максимальному напруженні в циклі  $\sigma_{z_{max}} = 100$  МПа.

Скінченноелементна дискретизація згущається до вершини тріщини. Розмір мінімального елемента прийнято 0,05 мм, що узгоджується з попередніми дослідженнями збіжності результатів [19]. Тріщина моделюється пропилом завширшки 0,1 мм. З експериментів Хейвуда [20] слідує, що радіус заокруглення у вершині тріщини, менший 0,1 мм, не впливає на втомну міцність. На рис 1, б наводиться фрагмент дискретизації на скінченні елементи в районі вершини тріщини.

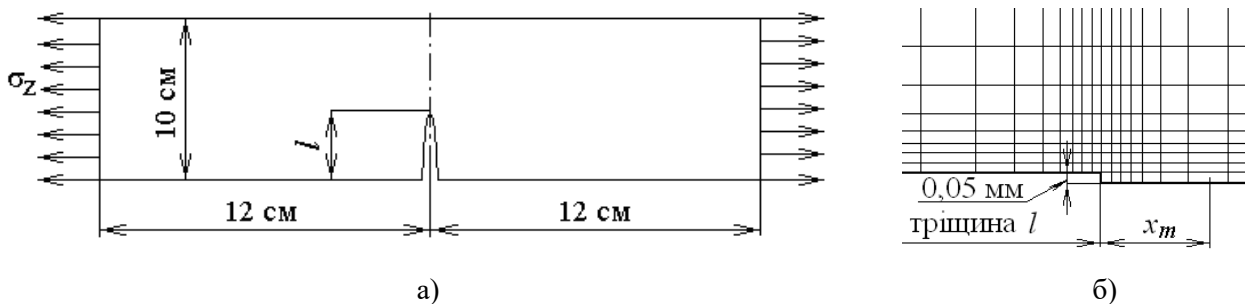


Рис. 1. Пластина з тріщиною: а) – схема навантаженої пластини; б) – фрагмент пластини з дискретизацією на скінченні елементи

Таблиця 1 – Діаграма деформування матеріалу при циклічному навантаженні

$\varepsilon_i \cdot 10^3$	0,69	1,38	1,73	2,07	2,76	3,45	5,18	6,91	10,36	13,81	20,72	27,62	41,43	55,24
$\sigma_i$ , МПа	121,6	243,2	261,44	273,6	291,8	304	322,2	334,4	352,6	364,8	383	395,2	413,4	425,6

Розмахи пружно-пластичних деформацій при симетричному циклі навантаження для тріщини довжиною  $l$  у центрах скінченних елементів  $x_m$  наводяться в таблиці 2.

Таблиця 2 – Значення розмахів інтенсивності деформацій при симетричному циклі навантаження

$x_m$ , мм	Довжина тріщини $l$ , мм				
	20	30	40	45	50
0,0025	1,4331	2,2692	3,647	4,8262	6,8068
0,0075	0,6036	1,014	1,5894	2,2822	3,5438
0,0125	0,2895	0,4983	0,8343	1,1734	1,7314
0,018	0,1751	0,2749	0,4355	0,6133	0,9053
0,0255	0,128	0,1881	0,2687	0,3552	0,5024
0,03722	0,1008	0,1467	0,2014	0,2502	0,3286
0,05456	0,0836	0,1186	0,1683	0,2024	0,2567
0,07883	0,0719	0,0974	0,1455	0,1745	0,2187
0,11281	0,0623	0,0831	0,121	0,1506	0,1915

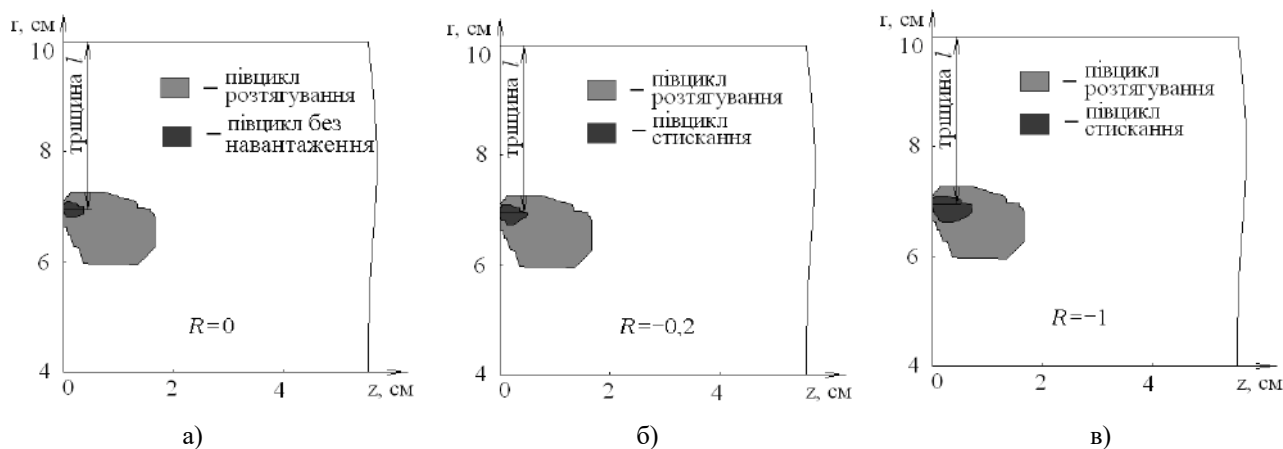
Продовження табл. 2

0,16039	0,0544	0,0721	0,1022	0,1277	0,1675
0,22699	0,0482	0,0632	0,0874	0,1072	0,1443
0,32023	0,0442	0,0556	0,0755	0,0908	0,1223
0,45077	0,0419	0,0493	0,0654	0,0774	0,1023
0,63353	0,0406	0,0449	0,0569	0,0661	0,0856
0,88939	0,04	0,0421	0,0494	0,0564	0,0705
1,16887	0,0397	0,0405	0,0436	0,0481	0,0577
1,48932	0,0398	0,0397	0,0402	0,042	0,048

Як показали розв'язки пружно-пластичної задачі для випадку плоскої деформації симетричної частини пластини з тріщиною, при знятті навантаження з'являються стискаючі напруження у районі вершини тріщини за рахунок залишкових напружень, при цьому контакт берегів тріщини не спостерігається. Після зняття навантаження в районі вершини тріщини виникає зона повторних стискаючих пластичних деформацій, значно менша за пластичну зону при максимальному навантаженні (рис. 2,  $R=0$ ). При збільшенні стискаючих зусиль зона пластичності зі стискаючими деформаціями у вершині тріщини збільшується (рис. 2,  $R<0$ ,  $R=-0,2$ ;  $-1$ ). Розкриття берегів залишається і після зняття навантаження. Причому пропорційно залежить від зони пластичних деформацій у вершині тріщини (рис. 3,  $R=0$ ). На рисунках 2 і 3 результати наводяться для симетричної частини пластини.

При навантаженні пластини стискаючими зусиллями спостерігається контакт берегів тріщини. При збільшенні стискаючого зусилля зона контакту поширюється від початку тріщини до її вершини (рис. 3). Однак, навіть при симетричному знакозмінному навантаженні, контакт берегів вздовж усієї тріщини не спостерігається (рис. 3,  $R=-1$ ).

На рис. 3 наводиться деформований стан фрагменту пластини при дії стискаючих напружень для тріщин довжиною  $l=3$  см (рис. 3, а, б, в) та  $l=4,5$  см (рис. 3, г, д, е), де переміщення збільшені відповідно в 300 і 150 разів.



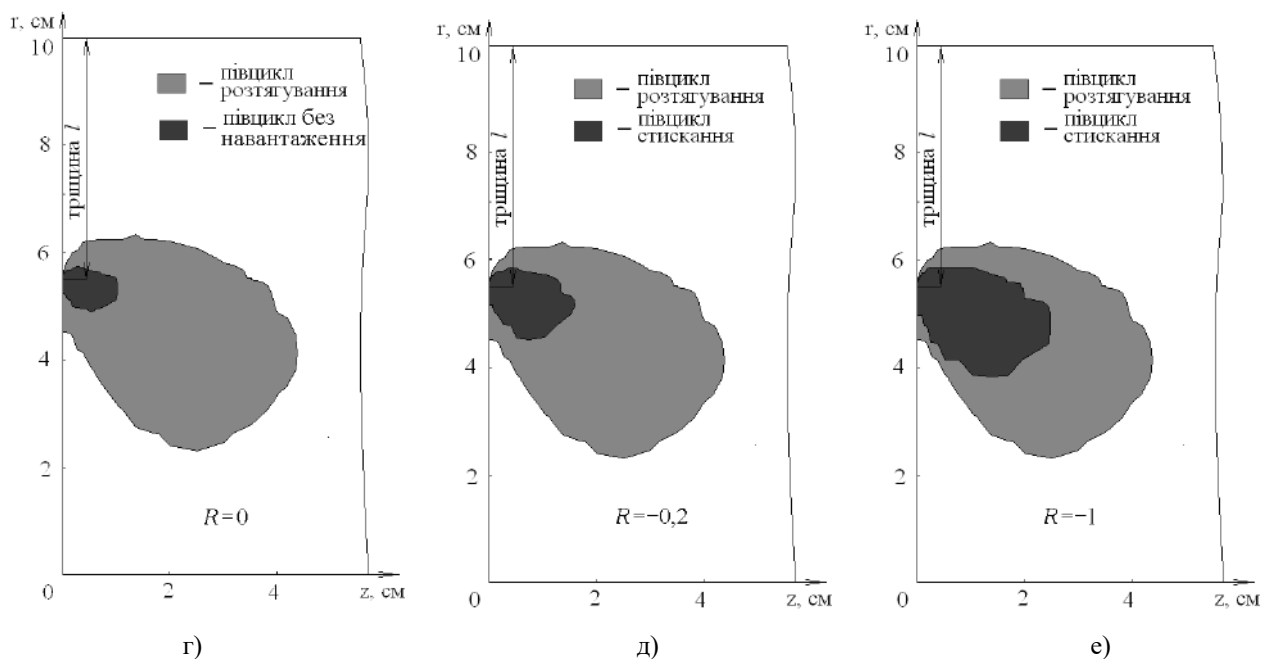


Рис. 2. Зони пластичності для довжин тріщин 3 см (а, б, в) та 4,5 см (г, д, е)

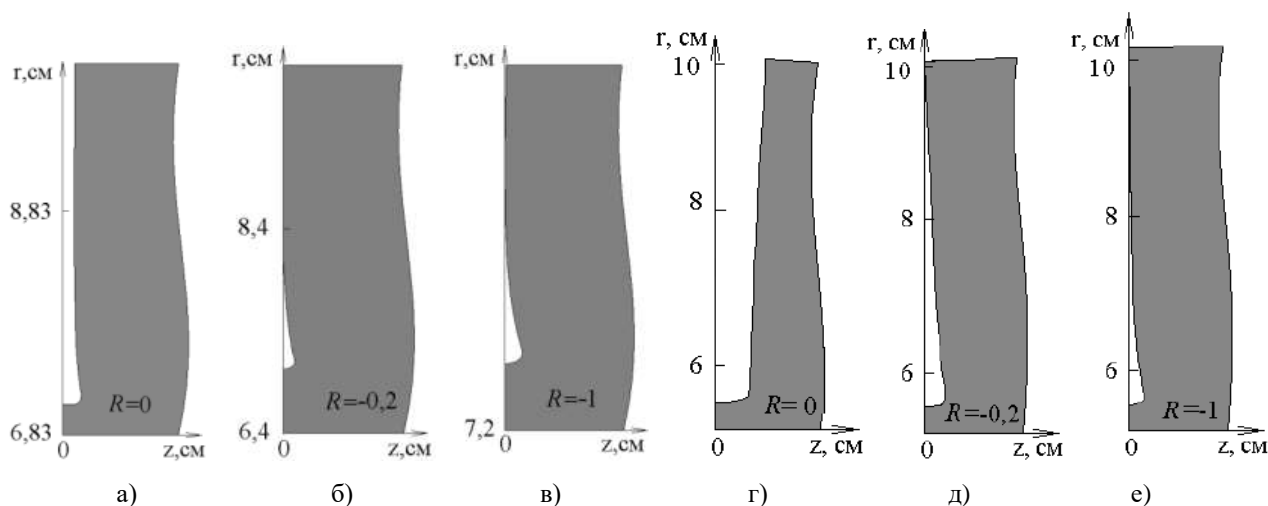


Рис. 3. Деформований стан фрагменту пластини з тріщиною при довжині тріщини 3 см (а, б, в) та 4,5 см (г, д, е)

Для порівняння результатів виконано розрахунки кінетики тріщини з різними коефіцієнтами асиметрії циклу за вказаною методикою та за методикою Ньюмана. При цьому константи рівняння (2) такі:  $C_N = 42,69 \cdot 10^{-10}$ ,  $n = 3,845$ ,  $\sigma_{0,2} = 304$  МПа,  $\sigma_b = 344$  МПа.

На рис. 4 наводиться підростання тріщини в пластині при додатному та від'ємному коефіцієнті асиметрії циклу навантаження. Суцільними лініями позначені результати, отримані за вказаною методикою, пунктирною – за методом Ньюмана.

Варто зауважити, що отримані результати задовільно узгоджуються з результатами, одержаними за методом Ньюмана.

На результати кінетики тріщини впливає багато різних чинників. Характеристики сталей, з яких були визначені параметри для обох методик, могли відрізнитися між собою за рахунок термообробки чи хімічного складу. Коефіцієнти  $C$  і  $n$  для рівняння Періса отримано з експериментів на зразках з тріщинами для сталі 25X1M1Ф при  $T = 535^\circ \text{C}$ , а коефіцієнти рівняння Ньюмана обчислено за умов співпадіння результатів з результатами Періса для віднульового циклу.

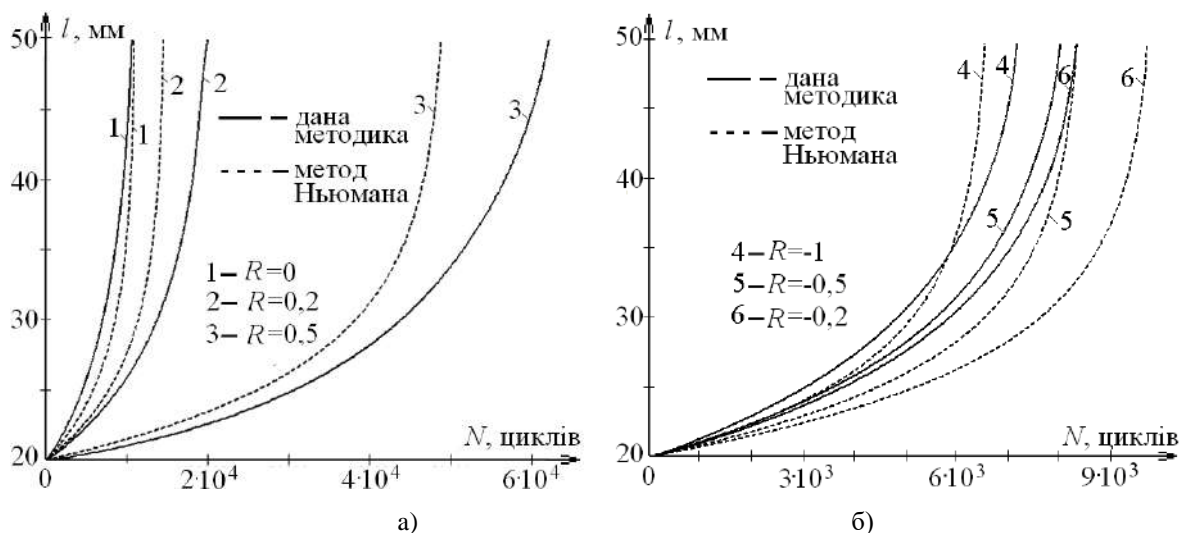


Рис. 4. Підростання тріщини в пластині при додатному (а) та від'ємному (б) коефіцієнті асиметрії циклу навантаження

## ВИСНОВКИ

У запропонованій методиці оцінки кінетики тріщини при циклічному навантаженні з використанням параметрів розсіяних пошкоджень враховується розмах пластичних деформацій поблизу вершини тріщини при контактній взаємодії її берегів. Для розрахунку кінетики тріщини в плоских і осесиметричних конструкціях використовуються криві малоциклової втоми для звичайних зразків без тріщини. Зони пластичних деформацій визначаються з використанням методу скінченних елементів.

Швидкості росту тріщини для різних коефіцієнтів асиметрії циклу відповідають результатам, одержаним за методом Ньюмана.

Викладена методика дозволяє врахувати стадію зародження тріщини з концентратора напружень, що може бути використано при оцінці ресурсу конструкцій.

## ЛІТЕРАТУРА

1. СОУ-Н МЕВ 40.1 –21677681–52: 2011. Визначення розрахункового ресурсу та оцінка живучості роторів і корпусних деталей турбін. Методичні вказівки. Чинний від 2011-07-07. Київ: ОЕП «ГРІФРЕ», 2011. 42 с. (Нормативний документ Міністерства енергетики та вугільної промисловості України).
2. Гетман А. Ф. Ресурс эксплуатации сосудов и трубопроводов АЭС. Москва: Энергоатомиздат, 2000. 427 с.
3. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. Москва: Наука, 1974. 640 с.
4. Пестриков В. М., Морозов Е. М. Механика разрушения твердых тел. Санкт-Петербург: Профессия, 2002. 320 с.
5. ASME Boiler and Pressure Vessel Code, Section XI, Appendix A, The American Society of Mechanical Engineers (31 December, New York). New York, 1990 NY, Addenda. P. 28.
6. Когаев В. П., Махутов Н.А., Гусенков А. П. Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность. Москва: Машиностроение, 1985. 234 с.
7. Bloom J. M. An approach to account for negative R-ratio effects in fatigue crack growth calculations for pressure vessels based on crack closure concepts. *Trans. ASME*. 1994. Vol. 116. P. 30–35.
8. Пиняк И. С. Аналитическое описание скорости роста усталостной трещины в металлах при различных асимметриях цикла нагружения. *Проблемы прочности*. 2001. № 5. С. 111–118.
9. Eason E. D., Gilman J. D., Jones D. P., Andrew S. P. Technical Basis for a Revised Fatigue Crack Growth Rate Reference Curve for Ferritic Steels in Air. *ASME J. of Pressure Vessel Technology*. 1992. Vol. 114. P. 80–87.
10. Newman J. C., Swain M. H., Phillips E. P. An Assessment of the Small-Crack Effect for 2024-T3 Aluminum Alloy. *Small Fatigue Cracks: Proc. of the Second Engineering Foundation Intern. Conf.*, (Santa Barbara, 5-10 January 1986). Santa Barbara, 1986. P. 427–452.
11. Kurihara V., Katon A., Kawahara M. Analysis on the Fatigue Crack Growth Rates Under a Wide Range of Stress Ratios. *ASME J. of Pressure Vessel Technology*. 1986. Vol. 108. P. 209–213.

12. Heitmann H. H., Vehoff H., Neumann P. Life Prediction for Random Load Fatigue Based on the Growth Behavior of Microcracks. *Advances in Fracture Research: Proc. of the 6<sup>th</sup> Intern. Conf. on Fracture (ICF6)*, (India, New Delhi, 4-10 Dec. 1984). Oxford, 1984. Vol.5. P. 3599–3606.
13. Schijve J. *Fatigue Crack Closure: Observations and Technical Significance*. Delft: Delft University of Technology, 1986. P. 1–43.
14. Гучинский Р. В. Моделирование роста трещин усталости с оценкой накопления повреждений. Изд-во LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. 208 с.
15. Шашурин Г. В. Разработка модели накопления повреждений для оценки прочностной надежности и ресурса гранульных турбинных дисков авиационных газотурбинных двигателей: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. техн. наук. Москва, 2007. 27 с.
16. Шульженко М., Гонтаровский П., Гармаш Н., Мележик І. Розрахункове оцінювання розвитку тріщини при циклічному навантаженні з використанням параметрів розсіяних пошкоджень. *Вісник Тернопіль. нац. техн. ун-ту*. 2013. № 3(71). С. 197–204.
17. Шульженко М. Г., Гонтаровський П. П., Гармаш Н. Г., Мележик І. І. Оцінка розвитку тріщини при циклічному навантаженні пластинчатих елементів із використанням параметрів розсіяних пошкоджень матеріалу. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування*. 2017. № 9(1231). С. 41–44.
18. Москвитин В. В. Пластичность при переменных нагружениях. Москва: Изд-во моск. ун-та, 1965. 263 с.
19. Мележик І. І. Розвиток та використання методики розрахункової оцінки живучості високотемпературних елементів енергомашин з тріщинами: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук. Харків, 2008. 20 с.
20. Хейвуд Р. Б. Проектирование с учетом усталости. Москва: Машиностроение, 1969. 504 с.
21. Детали паровых стационарных турбин. Расчет на малоцикловую усталость: РТМ 108.021.103-85. [Введен 01.07.86]. Москва: Министерство энергетического машиностроения, 1986. 49 с.

## REFERENCES

1. SOU-N MEV 40.1 –21677681–52: 2011 (2011). “Defining resource calculation and assessment of survivability rotors and body parts turbines. Guidelines”, Kyiv: OEP “GRIFRE”.
2. Getman, A. F. (2000). *The service life of the vessels and pipelines of nuclear power plants*. Moscow: Energoatomizdat.
3. Cherepanov, G. P. (1974). *Brittle fracture mechanics*. Moscow: Nauka.
4. Pestrikov, V. M. & Morozov, E. M. (2002). *Fracture mechanics of solid bodies*. St. Petersburg: Professija.
5. ASME Boiler and Pressure Vessel Code, Section XI, Appendix A, The American Society of Mechanical Engineers (1990), NY, Addenda, New York.
6. Kogaev, V. P., Mahutov, N. A. & Gusenkov, A. P. (1985). *The calculations of machine parts and structures for strength and durability*. Moscow: Mashynostroenie.
7. Bloom, J. M. (1994). An approach to account for negative R-ratio effects in fatigue crack growth calculations for pressure vessels based on crack closure concepts. *Trans. ASME*, Vol. 116. pp. 30-35.
8. Pinyak, I. S. (2001). Analytical description of speed of height of fatigue crack in metals at different stress ratio. *Problemyi prochnosti*, No. 5, pp. 111-118.
9. Eason, E. D., Gilman, J. D., Jones, D. P. & Andrew, S. P. (1992). Technical Basis for a Revised Fatigue Crack Growth Rate Reference Curve for Ferritic Steels in Air. *ASME J. of Pressure Vessel Technology*, Vol. 114. pp. 80-87.
10. Newman, J. C. (1986, January). An Assessment of the Small-Crack Effect for 2024-T3 Aluminum Alloy Small Fatigue Cracks: *Proc. of the Second Engineering Foundation Intern. Conf.*, (pp. 427-452), Santa Barbara.
11. Kurihara, M. (1986). Analysis on the Fatigue Crack Growth Rates Under a Wide Range of Stress Ratios. *ASME J. of Pressure Vessel Technology*, Vol. 108, pp. 209-213.
12. Heitmann, H. H. (1984, December). Life Prediction for Random Load Fatigue Based on the Growth Behavior of Microcracks, *Advances in Fracture Research: Proc. of the 6<sup>th</sup> Intern. Conf. on Fracture (ICF6)*. Vol. 5, (pp. 3599-3606), India, New Delhi, Oxford.
13. Schijve, J. (1986). *Fatigue Crack Closure: Observations and Technical Significance*. Delft: Delft University of Technology, pp. 1-43.
14. Guchinskiy, R. V. (2016). *Design of height of cracks of tiredness with the estimation of accumulation of damages*. LAP LAMBERT Academic Publishing.

15. Shashurin, G. V. (2007). Development of model of accumulation of damages for the estimation of прочностной reliability and resource of granule turbine disks of aviation turbo-engines. (Extended abstract of Cand. Thesis). Institute of Machine Science, Moscow, Russia.
16. Shulzhenko, M., Gontarovskiy, P., Garmash, N. & Melezhyk, I. (2013). Computation estimation of the crack development under cyclic loading using dissipated damages parameters. Visnyk Ternopil'skogo nacionalnogo universytetu, No. 3(71), pp. 197-204.
17. Shulzhenko, M. G., Gontarovskiy, P. P., Garmash, N. G. & Melezhyk, I. I. (2017). Evaluation of the crack development at a cyclic loading of plate elements using the parameters of scattered damages of the material. Visnyk NTU "HPI". Seriya Energetichni ta teplotehnichni protsesy i ustatkuvannya, Kharkiv, No. 9(1231), pp. 41-44.
18. Moskvitin, V. V. (1965). Plasticity at variable loadings. Moscow: Izdatelstvo moskovskogo universiteta.
19. Melezhyk, I. I. (2008). Development and application of a technique for a crack resistance estimation calculation of high-temperature power machines elements with cracks. (Extended abstract of Cand. Thesis). A.N. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems NAS of Ukraine, Harkiv, Ukraine.
20. Heyvud, R. B. (1969). Design for fatigue. Moscow: Mashinostroenie.
21. "Detali parovyih statsionarnyih turbin. Raschet na malotsiklovuyu ustalost: RTM 108.021.103-85 (1986) [Details of stationary steam-turbines. Calculation on a low-cycle fatigue]". Ministerstvo energeticheskogo mashinostroeniya, Moscow.

УДК. 539.3

## ТИСК ЖОРСТКОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА НА ПІВПРОСТІР З ПОЧАТКОВИМИ (ЗАЛИШКОВИМИ) НАПРУЖЕННЯМИ

Ярецька Н. О.

*Хмельницький національний університет,  
вул. Інститутська, 11, м. Хмельницький, Україна*

massacran2@ukr.net

У статті в рамках лінеаризованої теорії пружності представлено просторову контактну задачу про тиск жорсткого кільцевого штампа на півпростір з початковими напруженнями без урахування сил тертя. Дослідження представлені в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу. Числовий аналіз представлений у вигляді графіків для потенціалу Бартенева-Хазановича та гармонічного потенціалу.

*Ключові слова: лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактна задача, кільцевий штамп, півпростір.*

## ДАВЛЕНИЕ ЖЕСТКОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КОЛЬЦЕВОГО ШТАМПА НА ПОЛУПРОСТРАНСТВО С НАЧАЛЬНЫМИ (ОСТАТОЧНЫМИ) НАПРЯЖЕНИЯМИ

Ярецкая Н. А.

*Хмельницький національний університет,  
ул. Інститутська, 11, г. Хмельницький, Україна*

massacran2@ukr.net

В статье в рамках линейризованной теории упругости представлено пространственную контактную задачу о давлении кольцевого штампа на полупространство с начальными напряжениями без учета сил трения. Исследования представлены в общем виде для теории больших начальных деформаций и двух вариантов теории малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала. Численный анализ представлен в виде графиков для потенциала Бартенева-Хазановича и гармонического потенциала.

*Ключевые слова: линейризованная теория упругости, начальные (остаточные) напряжения, контактная задача, кольцевой штамп, полупространство.*

## PRESSURE OF THE STIFF CYLINDRICAL ANNULAR PUNCH ON SEMISPACED WITH INITIAL (RESIDUAL) STRESSES

Yaretskaya N. A.

*Khmelnytsky National University,  
Institutska str., 11, Khmelnytsky, Ukraine*

massacran2@ukr.net

The article is devoted to the research of problems of contact interaction of prestressed bodies, namely: the pressure of the stiff cylindrical annular punch on semispaced with initial (residual) stresses without friction.

In general, the research was carried out for the theory of great initial (ultimate) and two variants of the theory of small initial deformations within the framework of linearized theory of elasticity with the elastic potential having arbitrary structure. It is assumed that elastic potentials are two continuously differentiated functions of algebraic invariants of the Green tensor deformation. The research is carried out within the coordinates of the initial deformed state, which are interrelated with the Lagrangian coordinates (natural state). Besides, it is also assumed that the influence of the die causes small disorders of the main elastic deformed state in semispaced.

It is assumed that the semispaced is made of different isotropous, transversely isotropic or composite materials and the stiff annular punch and semispaced interacting on one of the punch's surfaces.

The mode of deformation in semispaced with initial (residual) stress will be defined with the help of harmonic functions as the Henkel integrals. Consequently we got components of potential vector and tensor of deformations in the case of equal roots of this contact problem.

In this article are analyzed the effect of parameters of the field of residual deformations on distributing contact stresses tensions. Two numerical examples of searching components of contact strain under the stiff cylindrical annular punch are considered.

The research investigates the influence of initial stress on the contact interaction of the stiff cylindrical annular punch on semispaced of particular structure potentials.

*Key words: linear elasticity theory, initial (residual) stresses, contact problem, annular punch, semispaced.*

### ВСТУП

Контактні задачі є важливим розділом механіки деформівного твердого тіла і формують теоретичну основу для розрахунків на контактну міцність, жорсткість та зносостійкість рухомих і нерухомих з'єднань.

Прикладні потреби природознавства, сучасної техніки і новітніх технологій, пов'язані із необхідністю прогнозування контактної поведінки різноманітних конструкцій, стимулювали в останні десятиліття розвиток різних математичних моделей і методів контактної механіки тіл з різними властивостями.

Одним з важливих факторів при контактній взаємодії є вплив початкових (залишкових) напружень, які практично завжди присутні в реальних конструкціях і деталях машин, тому розробка ефективних методів розрахунку напружено-деформованого стану з урахуванням початкових деформацій є актуальною і важливою науково-технічною проблемою.

На сьогодні після вивчення проблем, що мають відношення до контактних задач жорстких штампів, які взаємодіють із пружними тілами, отримані результати з широкого кола питань. І вони достатньо відображені у численних публікаціях періодичних видань. Не дивлячись на суттєві досягнення, кількість досліджень з контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями відносно мала. Так детальний огляд задач контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями представлений у роботах [1-3].

Роботи з контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями присвячені взаємодії попередньо напружених тіл із жорсткими та пружними штампами без початкових напружень [1-3]. Причому розглядаються або пружні потенціали конкретної структури, або задача ставиться в загальному вигляді для стисливих (нестисливих) тіл з потенціалом довільної структури на основі лінеаризованої теорії пружності. Існує також ряд інших узагальнюючих публікацій, що повністю або частково пов'язані з тематикою статті [4-7]. У роботі [7]

розглянуто розв'язок контактної задачі про тиск жорсткого кільцевого штампа складної конфігурації на пружний півпростір, у якому є залишкові деформації, зумовлені наявністю потенціалу лише гармонічного типу. Штмп утворено обертанням навколо спільної осі двох гілок парабол, спряжених у вершинах відрізком прямої, перпендикулярної до осі обертання (осі парабол, що обмежують штамп, паралельні до спільної осі обертання).

У нашій роботі з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності [1, 3] представлено розв'язок осесиметричної просторової контактної задачі про тиск жорсткого кільцевого штампа з плоскою основою на півпростір з початковими (залишковими) напруженнями без урахування сил тертя. Дослідження виконано в загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Вважаємо, що початковий напружено-деформований стан у півпросторі є однорідним, а пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовні функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [3].

Для дослідження введено лагранжеві координати  $(x_1, x_2, x_3)$ , які в початковому стані збігаються з декартовими координатами  $(y_1, y_2, y_3)$ , що пов'язані з ними співвідношеннями  $y_i = \lambda_i x_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ). Матеріал півпростору вважається ізотропним стисливим або нестисливим. У випадку ортотропного матеріалу приймається, що пружно-еквівалентні напрямки збігаються з напрямками осей координат.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ Й ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

Розрізнятимемо три стани півпростору з початковими напруженнями: природний, коли в ньому відсутні напруження; початковий стан, та збурений стан, усі величини якого складаються з суми відповідних величин початкового стану та збурень. Вважаючи збурення набагато меншими за відповідні величини початкового стану, дослідження проводимо в рамках лінеаризованої теорії пружності [1, 3].

Нехай скінченний жорсткий кільцевий штамп з плоскою основою, геометрична вісь симетрії якого збігається з віссю  $z_3$  циліндричної системи координат, що напрямлена в середину півпростору (рис. 1) та втискається у півпростір силою  $P$ , після виникнення там початкового деформованого стану,  $R_1$ ,  $R_2$  – відповідно внутрішній та зовнішній радіуси штампа. Будемо вважати, що зовнішнє навантаження прикладене тільки до вільного торця пружного штампа, під дією якого всі точки торця штампа переміщуються у напрямку осі симетрії  $z_3$  на одну і ту ж саму величину  $\varepsilon$ . Вважатимемо, що поверхні поза ділянкою контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а в зоні контакту переміщення та напруження – неперервні.

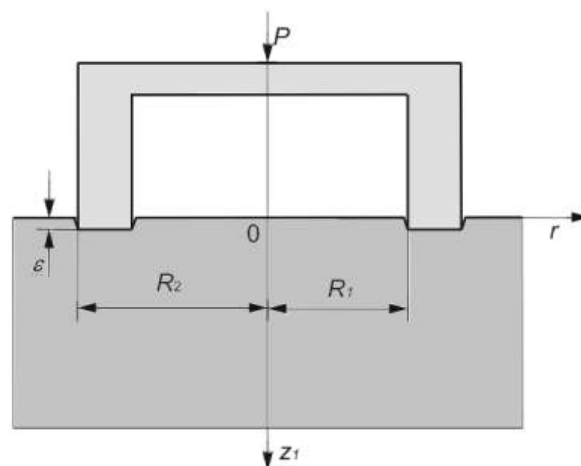


Рис. 1. Тиск жорсткого кільцевого штампа на півпростір з початковими (залишковими) напруженнями



Припустимо, що початковий стан півпростору – однорідний і виконуються співвідношення [1, 3, 5]:

$$y_m = x_m + U_m^0, \quad U_m^0 = \delta_{mi} (\lambda_m - 1) \lambda_i^{-1} y_i \quad (i, m = 1, 2, 3).$$

Тоді основне рівняння в переміщеннях [1, 3, 5] для стисливих тіл має вигляд формул

$$L'_{m\alpha} U_\alpha = 0, \quad L'_{m\alpha} = \omega'_{ij\alpha\beta} \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta \quad (i, m, \alpha, \beta = \overline{1, 3}), \quad (1)$$

а для нестисливих тіл разом із умовою нестисливості:

$$L'_{m\alpha} U_\alpha + q'_{am} \partial p' / \partial y_\alpha = 0, \quad L'_{m\alpha} = \kappa'_{im\alpha\beta} \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta, \quad q'_{ij} \partial U_j / \partial y_i = 0, \quad q'_{ij} = \lambda_i q_{ij} \quad (i, j, m, \alpha, \beta = \overline{1, 3}). \quad (2)$$

Вирази для визначення складових тензора напружень для стисливих і нестисливих тіл запишемо у вигляді:

$$Q'_{ij} = \omega'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta}, \quad Q'_{ij} = \kappa'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta} + q'_{ij} p, \quad \omega'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \omega_{ij\alpha\beta}, \quad \kappa'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \kappa_{ij\alpha\beta}.$$

При однорідних початкових напруженнях  $S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0$ ;  $S_0^{33} = 0$ ;  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$  розв'язки рівнянь (1), (2) представимо через циліндричні координати  $(r, \theta, y_3)$  у вигляді розв'язків рівняння:

$$(\Delta_1 + \xi_2'^2 \partial^2 / \partial y_3^2)(\Delta_1 + \xi_3'^2 \partial^2 / \partial y_3^2) \tilde{\chi} = 0, \quad (3)$$

де  $\Delta_1 = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r$ .

Ураховуючи умову існування єдиного розв'язку лінеаризованої теорії пружності для стисливих і нестисливих тіл [3], можливі два варіанти представлення загального розв'язку (3): випадок рівних коренів  $(\xi_2'^2 = \xi_3'^2)$  [3, 5, 7] та випадок нерівних коренів  $(\xi_2'^2 \neq \xi_3'^2)$  [3, 4]. У статті обмежимося випадком рівних коренів рівняння (3).

У системі кругових циліндричних координат  $(r, \theta, z_1)$ , де  $z_1 = v_1^{-1} y_3$ ,  $v_1 = \sqrt{n_1}$ ,  $n_1 = n_2 = \xi_2'^2 = \xi_3'^2$ , такій постановці відповідають граничні умови:

$$U_z = \varepsilon, \quad R_1 < r < R_2, \quad (4)$$

$$Q_{zz} = 0, \quad 0 < r < R_1, \quad R_2 < r < \infty, \quad (5)$$

$$Q_{rz} = 0, \quad 0 < r < \infty, \quad (6)$$

$$U_z = 0, \quad 0 < r < R_1, \quad R_2 < r < \infty, \quad (7)$$

$$Q_{zz} = -\sigma_z^0, \quad R_1 < r < R_2, \quad (8)$$

де  $\sigma_z^0 = \frac{8\varepsilon\omega_3}{\pi\sqrt{1-r^2}}$ , при  $R_1 < r < R_2$  та  $\sigma_z^0 = 0$ , при  $0 < r < R_1$ ,  $R_2 < r < \infty$ ;

$\omega_3 = C_{44} (1+m_1) l_1 (s-s_0)$ ,  $s_0 = \frac{(1+m_2)}{(1+m_1)} l_2$ ,  $s = s_0 \frac{l_2}{l_1}$ . Значення коефіцієнтів  $m_i$ ,  $c_{44}$ ,  $l_i$  залежать від характеру пружного потенціалу і подані в [3].

Умова рівноваги, що встановлює зв'язок між осіданням торця і рівнодіючою навантаження  $P$  має вигляд:

$$P = -2\pi \int_{R_1}^{R_2} r Q_{zz}(0, r) dr. \quad (9)$$

## МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Напружено-деформівний стан у попередньо напруженому півпросторі для рівних коренів, урахувавши (4)-(8) та  $z_1 = 0$ , представимо у вигляді [3, 7]:

$$Q_z = \frac{\omega_3}{R_0} \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta r) d\eta, \quad U_z = -\frac{1}{\omega_2} \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta r) d\eta, \quad U_r = \omega_1 \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\eta r) d\eta, \quad (10)$$

де  $R_0 = R_1/R_2$ ,  $\omega_2 = \frac{v_1}{m_1(s_0 - s_1)}$ ,  $s_1 = \frac{m_1 - 1}{m_1}$ ,  $\omega_1 = s_0 - 1$ ,  $J_\nu(x)$  – функція Бесселя дійсного аргументу,  $F(\eta)$  – шукана функція.

Задовольнивши умову (5), матимемо:

$$\frac{\omega_3}{R_0} \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta r) d\eta = 0, \quad 0 < r < R_1, \quad R_2 < r < \infty. \quad (11)$$

Введемо неперервну невідому функцію  $f(r)$ ,  $R_1 < r < R_2$ , що визначатиме розподіл контактних напружень під жорстким штампом. Та продовжимо (11) на проміжок  $0 < r < \infty$  [7]:

$$\frac{\omega_3}{R_0} \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta r) d\eta = f(r)(\delta(r - R_1) - \delta(r - R_2)), \quad 0 < r < \infty, \quad (12)$$

де  $\delta(r)$  – функція Хевісайда.

Ураховуючи неперервність функції  $f(r)$ , а також  $f(r) = 0$  при  $r = R_1$  та  $r = R_2$ , представимо її у вигляді:

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m J_0\left(\frac{\mu_m}{R_0} r\right), \quad (13)$$

де  $f_m$  – невідомі коефіцієнти,  $\mu_m$  – розв'язки рівняння  $J_1(\mu_k) = 0$ .

Застосувавши формулу обернення інтегрального перетворення Ханкеля до (13), одержимо

$$F(\eta) = \frac{R_0}{\omega_3} \sum_{m=1}^{\infty} f_m \int_{R_1}^{R_2} r J_0\left(\frac{\mu_m}{R_0} r\right) J_0(\eta r) dr, \quad 0 < r < \infty. \quad (14)$$

З другої формули (10), (14) та (4) отримаємо

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m \int_0^\infty \frac{T_m(\eta)}{\eta} J_0(\eta r) d\eta = -\frac{\varepsilon \omega_3 \omega_2}{R_0}, \quad (15)$$

де

$$T_m(\eta) = R_1^{-1} (a_m^1 J_0(R_1 \eta) - a_m^2 J_1(R_1 \eta) \eta - a_m^3 J_0(R_2 \eta) + a_m^4 J_1(R_2 \eta) \eta) (\eta^2 - \mu_m^2 R_0^{-2})^{-1},$$

$$a_m^1 = R_1 R_2 \mu_m J_1(R_2 \mu_m), \quad a_m^2 = R_1^2 J_0(R_2 \mu_m), \quad a_m^3 = R_2^2 \mu_m J_1(R_2 R_1^{-1} \mu_m), \quad a_m^4 = R_1 R_2 \mu_m J_0(R_2 R_1^{-1} \mu_m).$$

Проінтегруємо (15) по  $r J_0\left(\frac{\mu_m}{R_0} r\right)$  від  $R_1$  до  $R_2$ :

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m \int_0^{\infty} \frac{T_m(\eta)}{\eta} T_k(\eta) d\eta = -\frac{\varepsilon \omega_3 \omega_2}{R_0} S_k \quad (k = \overline{1, m}), \quad (16)$$

де  $S_k = -\mu_k^{-1} R_0 (R_1 J_1(\mu_k R_2) - R_2 J_1(\mu_k R_2 R_1^{-1}))$ .

Після визначення  $f_m$  із системи (16), можна обчислити напружено-деформівний стан у пружному півпросторі за формулами (10), (12)-(14). А зв'язок (9) між осіданням торця і рівнодіючою навантаження  $P$  матиме вигляд

$$P = -4\omega_3 \omega_2 \varepsilon R_0.$$

### ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ

У роботі проведено чисельне розв'язання системи (16) методом редукції для гармонічного потенціалу та потенціалу Бартенєва-Хазановича при таких значеннях параметрів:  $k = m = 16$ ;  $\nu = 0.5$ ;  $R_1 = 1$ ;  $R_2 = 2$ ;  $\lambda_1 = 0.7; 0.8; 0.9; 1; 1.1; 1.2; 1.3$ ;  $E = 3.92$ ,  $0 < \rho < R_0$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Алгоритм реалізований у вигляді програми в пакеті Maple.

На рис. 2, 3 представлені розподіли контактних напружень в зоні контакту  $-\frac{2\pi}{P} Q_{zz}$ , де значенням  $\lambda_1$  відповідають лінії, починаючи знизу доверху. Пунктирні лінії описують випадок без початкових напружень ( $\lambda_1 = 1$ ), суцільні – з початковими (залишковими) напруженнями.

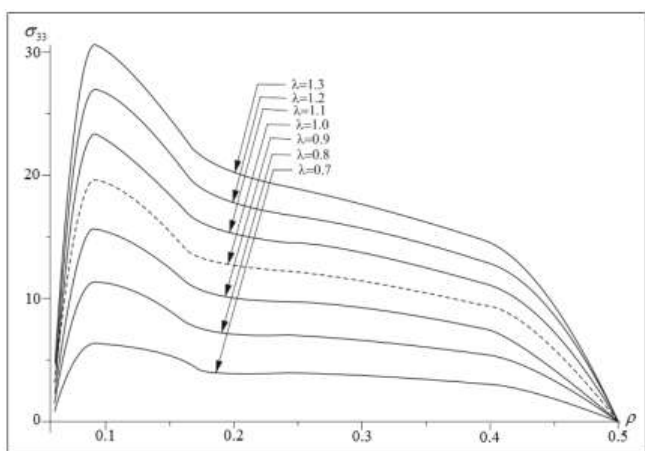


Рис. 2. Гармонічний потенціал

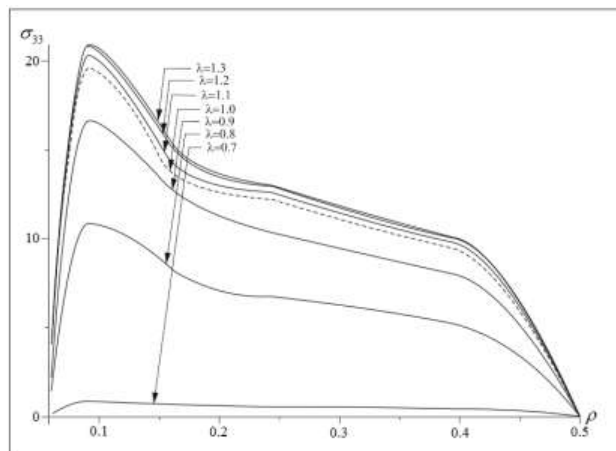


Рис. 3. Потенціал Бартенєва-Хазановича

### ВИСНОВКИ

На основі чисельного аналізу можна побачити, що максимальні за модулем значення контактних напружень досягаються в точках дещо ближчих до внутрішньої межі контакту.

Як і в [7], можна побачити, що навіть при сталому зовнішньому навантаженні зміна пружного потенціалу призводить до зміни характеру розподілу контактних напружень під штапом. Вплив початкових напружень на напружено-деформівний стан пружного півпростору, в який втискається жорсткий кільцевий штамп, полягає в тому, що: початкові напруження в півпросторі призводять у випадку стиснення до зменшення напружень, а у випадку розтягнення – до їх збільшення. Достовірність отриманих результатів підтверджує їх узгодження з результатами інших авторів [7].

## ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Рудницький В. Б. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. *Развитие идей Л.А. Галина в механике*. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 480 с.
2. Babich S. Yu., Guz A. N., Rudnitsky V. B. Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches. *Int. Appl. Mech.* 2004. 40, № 7. P. 744–765.
3. Гузь А. Н., Рудницький В. Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. Хмельницький: вид. ПП Мельник, 2006. 710 с.
4. Gao X.-L., Mao J. C. L. Solution of the Contact Problem of a Rigid Conical Frustum Indenting a Transversely Isotropic Elastic Half-Space. *Appl. Mech.* 2014. 81(4). P. 107–119.
5. Yaretskaya N. A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *International Applied Mechanics*. July 2014. Vol. 50, Issue 4. P. 378–388.
6. Nataliya Iaretska, Vyacheslav Rudnitsky. Research of contact interaction of prestressed stamps, layer and foundation without friction. *Вісник Тернопільського національного технічного університету. Науковий журнал*. 2016. № 3(83). С. 28–37.
7. Шелестовський Б., Габрусєва І. Контактна взаємодія кільцевого штампа із попередньо напруженим півпростором. *Вісник ТДТУ*. 2009. Том 14, № 3. С. 48–53.

## REFERENCE

1. Guz', A. N., Babich, S. Ju. & Rudnickij, V. B. (2013). Contact interaction of elastic bodies with initial (residual) stresses. *Razvitie idej L.A. Galina v mehanike. M.–Izhevsk, Institut komp'juternyh issledovanij* (in Russian).
2. Babich, S. Yu. (2004). Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches. *Int. Appl. Mech*, Vol. 40, No. 7, pp. 744-765.
3. Guz', A. N. & Rudnickij, V. B. (2006). Fundamentals of the theory of the contact interaction of elastic bodies with initial (residual) stresses. *Hmel'nic'kij: vyd. PP Mel'nik*.
4. Gao, X.-L. & Mao, J. C. L. (2014). Solution of the Contact Problem of a Rigid Conical Frustum Indenting a Transversely Isotropic Elastic Half-Space. *Appl. Mech.*, Vol. 81, No. 4, pp. 107-119.
5. Yaretskaya, N. A. (2014). Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *International Applied Mechanics*, Vol. 50, No. 4, pp. 378-388.
6. Iaretska, N. A. & Rudnitsky, V. B. (2016). Research of contact interaction of prestressed stamps, layer and foundation without friction. *Visnyk Ternopil's'koho nacional'noho texnichnoho universytetu. Naukovyj zhurnal*, Vol. 83. No. 3, pp. 28-37.
7. Shelestovs'kyj, B. & Habrusyeva, I. (2009). Kontaktна vzayemodiya kil'cevoho shtampa iz poperedn'o napruzhenym pivprostorum. *Visnyk TDTU*, Vol. 14, No. 3, pp. 48-53.

УДК .....

## ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У «ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ» ЗА ФАХОМ «ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ»

Іванов І. І., д. ф.-м. н., професор

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

ivan@mail.ru

До друку будуть прийматися лише наукові статті, де присутні такі необхідні елементи

(п. 3 Постанови президії ВАК України № 7 – 05 / 1 від 15 січня 2003 р.):

- **Постановка проблеми** у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями.
- **Аналіз останніх досліджень і публікацій**, в яких започатковано порушення даної проблеми і на які спирається автор.
- **Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми**, яким присвячується стаття.
- **Формулювання цілей статті** (постановка завдання).
- **Виклад основного матеріалу дослідження** з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів.
- **Висновки з даного дослідження і перспективи** подальших розвідок у даному напрямку.

### 1. МАКЕТ СТОРІНКИ

Для оригінал-макета використовується формат А4 з такими полями:

з усіх боків – 2 см.

Шрифт набору – Times New Roman.

У разі необхідності для шрифтових виділень у таблицях і рисунках дозволяється застосовувати шрифт Courier New (наприклад, для ілюстрації текстів програм для ЕОМ). Для стилістичного виділення фрагментів тексту слід вживати начертання *курсив*, **напівжирний**, *напівжирний курсив* зі збереженням гарнітури, розміру шрифту та інтервалу абзацу.

Гарнітури, розміри шрифтів та начертання:

- а) для УДК: Times New Roman, – 14 пт, усі літери прописні;
- б) для заголовку статті: Times New Roman, – 14 пт, напівжирний, усі літери прописні;
- в) для підзаголовків: Times New Roman, – 12 пт, напівжирний, усі літери прописні;
- г) для прізвищ, ініціалів авторів, адреси електронної пошти: Times New Roman – 12 пт, усі строчні;
- д) для назв і адрес організацій: Times New Roman – 12 пт, курсив, усі строчні;
- е) для анотацій, виносков, посилань, підписів до рисунків та надписів над таблицями: Times New Roman – 10 пт;
- ж) для ключових слів: Times New Roman – 10 пт, курсив;
- з) для основного тексту: Times New Roman – 12 пт, як у реченні.

Інтервал між абзацами – 6 пт, міжрядковий інтервал – одинарний.

### 2. ТИПОГРАФСЬКІ ПОГОДЖЕННЯ ТА СТИЛІ

УДК вказується в першому рядку сторінки і вирівнюється за лівим краєм. Заголовок статті набирається в наступному за УДК рядку і вирівнюється по центру. У третьому рядку з вирівнюванням по центру зазначаються прізвища, ініціали авторів. У наступному рядку розміщується інформація про назву та адресу організації, де працює (навчається) автор, яка також вирівнюється по центру. Четвертий рядок містить адресу електронної пошти авторів, розміщену по центру. Далі розташовується анотація (3-5 речень) і ключові слова мовою оригіналу та анотація українською або російською мовами (залежно від мови оригіналу). З наступного абзацу послідовно набираються і вирівнюються по центру заголовки статті англійською мовою, транслітеровані прізвища, ініціали авторів, назви і адреси організацій, які повинні бути подані англійською мовою, із зазначенням міста і країни, без назви вулиці, яка подається транслітерацією. З наступного рядка розміщується розширена (обсягом не менше 3,5 тис. знаків) анотація із ключовими словами англійською мовою. Після анотацій з абзацу викладається основний текст статті.

Заголовки наукових статей повинні бути інформативними та містити тільки загальноприйняті скорочення. У перекладі заголовків статей англійською мовою не повинно бути жодних транслітерацій, окрім неперекладних назв власних імен, приладів та інших об'єктів, що мають власні назви; також не використовується неперекладний сленг. Це стосується також анотацій і ключових слів.

**Початок абзацу** основного тексту виділяється збільшеним інтервалом між абзацами і **не виділяється відступом або пустим рядком**.

Ілюстрації мають бути оригінальними рисунками або фотографіями. Фотографії скануються у 256 градаціях сірого. Ілюстрації розміщуються у відповідних місцях тексту статті (по можливості вгорі сторінки) і повинні бути підписані та послідовно пронумеровані арабськими цифрами: Рис. 1, Рис. 2. Номер рисунка та підпис розміщуються безпосередньо під рисунком. Кожен рисунок та підписи до нього включаються до тексту публікації. Створення графічних об'єктів може здійснюватися будь-яким графічним редактором у форматі ВМР файлів. Виконання рисунків засобами Microsoft Word здійснюється через використання команд панелі «Рисование». Підписи здійснюються командою «Надпись». Усі графічні компоненти рисунка і підписи об'єднуються командою «Группировать» (меню «Действия» на панелі «Рисование») і подаються у вигляді одного графічного об'єкта, прив'язаного до тексту з об'єктом «В тексте». Ілюстрації готують та масштабують так, щоб розміри букв тексту на ілюстраціях не перевищували розмір літер основного тексту статті більше, ніж на 50%.

Ілюстрації, так само як і підписи до них, вирівнюються на середину рядка (за виключенням невеликих рисунків – не більш 7 см, які можуть розташовуватися по декілька в ряд).

Таблиці розміщуються у відповідних місцях тексту статті (по можливості вгорі сторінки) і повинні містити назву та бути послідовно пронумерованими арабськими цифрами: Таблица 1, Таблица 2. Номер та назва таблиці розміщують над таблицями.

Посилання на літературні джерела послідовно нумеруються арабськими цифрами в порядку появи в тексті статті і зазначаються у квадратних дужках, де вказуються порядковий номер джерела та через кому конкретна сторінка [8, с.16]. Перелік літературних джерел мовою оригіналу подається в порядку їх нумерації після основного тексту статті з підзаголовком «ЛІТЕРАТУРА», який вирівнюється по центру. Список літератури оформлюється відповідно до ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 «Система стандартів з інформації, бібліотечної та видавничої справи. Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання».

З наступного абзацу подається перелік літературних джерел латиницею з підзаголовком «REFERENCES», який вирівнюється по центру.

### 3. СТИЛІСТИЧНІ ПОГОДЖЕННЯ

- Не допускається закінчення сторінки одним або декількома пустими рядками, за винятком випадків, спричинених необхідністю дотримання попереднього пункту (висячі підзаголовки і початок абзацу) та кінця статті.
- Не допускається починати сторінку незакінченим рядком (переноси в останньому рядковій заборонені).
- Не дозволяється підкреслювання в заголовках, підписах і надписах.
- Слід дотримуватися правила про мінімальні зміни в шрифтовому та стильовому оформленні сторінки для того, щоб максимально уникнути різноманітності макета і зберегти єдиний стиль збірника.
- Не допускається часте використання виносок (виноска повинна розглядатися як виняток і вживатися тільки у випадку дійсної необхідності).
- Ілюстрації мають бути підготовані та масштабовані таким чином, щоб розміри букв тексту на ілюстраціях не перевищували розмір букв основного тексту статті більш ніж на 50%.
- Сторінки тексту статті слід пронумерувати.
- Диск треба підписати, вказавши прізвище, ініціали автора, імена файлів.
- На диску повинно бути **два файли**:
  - ✓ **перший** – із текстом статті та анотацій з ключовими словами,
  - ✓ **другий** – із відомостями про авторів (прізвище, ім'я, по батькові; посада; вчений ступінь; учене звання; місце роботи або навчання; адреса електронної пошти; домашня адреса; номери контактних телефонів).

### 4. ДЛЯ ОПУБЛІКУВАННЯ СТАТТІ АВТОРУ НЕОБХІДНО ПОДАТИ ДО РЕДАКЦІЇ ЗБІРНИКА:

1. Роздрукований текст статті з анотаціями та ключовими словами.
2. Відомості про авторів.
3. Витяг з протоколу засідання кафедри або факультету.
4. Зовнішню рецензію.
5. Диск із текстом статті, анотацій, ключовими словами та відомостями про авторів.

**Адреса редакції:** Україна, 69600, м. Запоріжжя, МСП-41, вул. Жуковського, 66

**Довідки за телефонами:**

(061) 289-12-52 – відповідальний за випуск (технічний редактор)

(061) 289-12-26 – редакційно-видавничий відділ (IV корпус, кімн. 323)

**Адреса електронної пошти:**

kpmf.mf@znu.edu.ua

**ДЛЯ НОТАТОК**

Збірник наукових праць

***Вісник Запорізького національного університету***  
***Фізико-математичні науки***  
**№ 1, 2017**

Технічний редактор – *Н.В. Ярош*

Верстка, дизайн-проробка, оригінал-макет і друк виконані  
в редакційно-видавничому відділі  
Запорізького національного університету  
тел. (061) 228-75-47

Підписано до друку 12.10.2017. Формат 60 × 90/8.

Папір Data Copy. Гарнітура «Таймс».

Умовн.-друк. арк. 52,9

Замовлення № 131. Наклад 100 прим.

Запорізький національний університет  
69600, м. Запоріжжя, МСП-41  
вул. Жуковського, 66

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виготівників  
і розповсюджувачів видавничої продукції  
ДК № 5229 від 11.10.2016