

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«Запорізький національний університет»
Міністерства освіти і науки України

Заснований
у 1997 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого
засобу масової інформації
Серія КВ № 15436-4008 ПР,
22.06.2009 р.

Адреса редакції:
Україна, 69600,
м. Запоріжжя, МСП-41,
вул. Жуковського, 66

Телефон
для довідок:
(061) 289-12-52

Факс: (061) 764-45-46

В і с н и к

Запорізького національного університету

- **Фізико-математичні науки**

№ 1, 2016

Запоріжжя 2016

Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2016. – 300 с.

Затверджено як наукове фахове видання України, у якому можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (Наказ Міністерства освіти і науки України № 528 від 12.05.15 р.)

Рекомендовано до друку та поширення через мережу Інтернет (протокол засідання Вченої ради № 7 від «26» січня 2016 р.)

РЕДАКЦІЙНА РАДА

Головний редактор	– Грищак В.З.,	доктор технічних наук, професор
Заступник головного редактора	– Гребенюк С.М.,	кандидат технічних наук, доцент
Відповідальні редактори	– Гоменюк С.І., Приварников А.К., Клименко М.І., Чопоров С.В.,	доктор технічних наук, професор доктор фізико-математичних наук, професор кандидат фізико-математичних наук, доцент кандидат технічних наук, доцент

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

Андріанов І.В.	– доктор фізико-математичних наук, професор (Рейнсько-Вестфальський технічний університет Аахена, Німеччина)
Ванько В.І.	– доктор технічних наук, професор (Московський державний технічний університет ім. Н.Е. Баумана, Росія)
Гіржон В.В.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Гоман О.Г.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Гудрамович В.С.	– доктор технічних наук, професор, член-кореспондент НАН України
Козін І.В.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Колаковські З.	– доктор технічних наук, професор (Лодзинський технічний університет, Польща)
Кондрат'єва Н.О.	– кандидат фізико-математичних наук, доцент
Кузьменко В.І.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Маневич Л.І.	– доктор технічних наук, професор (Московський інститут хімічної фізики ім. Н.Н. Семенова РАН, Росія)
Морачковський О.К.	– доктор технічних наук, професор
Ольшанецький В.Ю.	– доктор технічних наук, професор
Перепелиця В.О.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Пожуєв В.І.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Толок О.В.	– доктор технічних наук, професор (Московський державний технологічний університет «Станкин», Росія)
Швидка С.П.	– кандидат фізико-математичних наук, доцент

ЗМІСТ

БАЗИЛЕВИЧ Ю.Н. РАСЩЕПЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЭКИПАЖА НА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОДВЕШИВАНИИ	5
БАРБОЛИНА Т.Н. О ПОДХОДЕ К ОПТИМИЗАЦИИ С ВЕРОЯТНОСТНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УПОРЯДОЧИВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	11
БОРИСОВСКАЯ Ю.А., ГОМЕНЮК С.И., АЛЬ-ОМАРИ М.А.В. СОВРЕМЕННЫЕ САПР В АЭРОКОСМИЧЕСКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ.....	20
ГОЛОСКУБОВА Н.С., МИХЛИН Ю.В. АНАЛИЗ БЕГУЩИХ И СТОЯЧИХ ВОЛН В МОДЕЛИ ДНК ПЕЙРАРА-БИШОПА-ДОКСУА.....	32
ГОМЕНЮК С.І., КОЗЛОВА О.С. МЕТОДИ АПРОКСИМАЦІЇ ФУНКЦІЙ ТА ІНТЕГРУВАННЯ У БЕЗСІТКОВИХ ПІДХОДАХ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ.....	40
ГРЕБЕНЮК С.М. ЭФЕКТИВНИ ПРУЖНІ СТАЛІ КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ З АРМУВАННЯМ ДВОМА СОРТАМИ ОДНОСПРЯМОВАНИХ ВОЛОКОН	48
ГРИНЕВИЧ А.А., ЛОБОДА В.В. МІЖФАЗНА ЕЛЕКТРИЧНО ТА МАГНІТНО ПРОНИКНА ТРІЩИНА В П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ/П'ЄЗОМАГНІТНОМУ БІМАТЕРІАЛІ.....	57
ГУЦУЛ О.В., СЛОБОДЯН В.З. ФІЗИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ КРОВІ: СУЧАСНИЙ СТАН І ПЕРСПЕКТИВИ.....	70
ДЬЯЧЕНКО Н.Н., СИНЧЕНКО Е.С., КАЧАН А.И. АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ПРИБЛИЖЕННО АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ И ШЕРОХОВАТОСТИ	79
ЗЕЛЕНСЬКИЙ О.В., ДАРМОСЮК В.М. ЖОРСТКІ ТА МАЙЖЕ ЖОРСТКІ САГАЙДАКИ.....	91
КОЗИН И.В., ЗИНОВЕЕВА М.И. ОБ ОЦЕНКАХ МЕРЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ БИМАТРИЧНОЙ ИГРЫ	97
КОНОНОВ Ю.Н., ДЖУХА Ю.А. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ОСНОВАНИЙ И ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ЖЕСТКОМ КОЛЬЦЕВОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗЕРВУАРЕ	103
КОРОЛЬ М.В., КОНДРАТ'ЄВА Н.О., МУХІН В.В., ЛЕОНТЬЄВА В.В. ОПТИМІЗОВАНИЙ ВАРІАНТ ФІЛЬТРАЦІЇ ЗОБРАЖЕНЬ.....	116
КУРАПОВ С.В., ДАВИДОВСКИЙ М.В., КЛИЦЕНКО А.А. ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ ГРАФА	121
ЛАТИФОВ Ф.С., АГАЕВ Р.Н. КОЛЕБАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПЕРЕКРЕСТНЫМИ РЕБРАМИ НЕОДНОРОДНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТЬЮ.....	138
ЛЕВАДА В.С., ЛЕВИЦКАЯ Т.И., ХИЖНЯК В.К. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАЗРЫВНОГО РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ	146
ЛИТВИН О.М., КОВАЛЕНКО Г.В., ДЕНИСОВА О.І. ПОБУДОВА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО ПОЛІНОМА 5-ГО СТЕПЕНЯ НА ДОВІЛЬНОМУ ТРИКУТНИКУ З ВИКОРИСТАННЯМ БАЗИСНИХ ПОЛІНОМІВ НА «ОДИНИЧНОМУ» ТРИКУТНИКУ	153
НЕЧИПОРЕНКО Н.А., КОРОТУНОВА Е.В. О РАВНОМЕРНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ НЕ БОЛЕЕ ДВУХ ТОЧЕК ПЕРЕГИБА.....	165
НОВИЦЬКИЙ В.В., ЗІНЧУК М.О., СВЯТОВЕЦЬ І.Ф. УМОВИ ФОРМУВАННЯ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНОЇ СИСТЕМИ ЗА ДОПОМОГОЮ ВЕКТОРА КЕРУВАННЯ	174

НОВИЦЬКИЙ В.В., ЗІНЧУК М.О., ТЕТЕРЯТНИК О.В. СТАБІЛІЗАЦІЯ ТА РОБАСТНА СТІЙКІСТЬ НЕПЕРЕРВНИХ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ.....	184
ОБОДАН Н.И., АДЛУЦКИЙ В.Я., ГРОМОВ В.А. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ В ТЕОРИИ ТОНКОСТЕННЫХ СИСТЕМ.....	191
ПОЖУЄВ А.В., ФАСОЛЯК А.В. НЕСТАЦІОНАРНА ДЕФОРМАЦІЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ У ПРУЖНОМУ ПРОСТОРИ ПІД ДІЄЮ ПОВЕРХНЕВИХ НАВАНТАЖЕНЬ, ЩО РОЗШИРЮЮТЬСЯ.....	200
ROMANUKE V.V. CONDITIONS OF OVERLAPPING WITHIN AN INFINITE SET OF HYPERPARALLELEPIPEDS IN EUCLIDEAN ARITHMETICAL SPACE AND THE FINITE LEBESGUE MEASURE OF THEIR UNION	213
СТОРОЖУК Є.А., КОМАРЧУК С.М., ПІГОЛЬ О.В., ЯЦУРА А.В. АНАЛІТИЧНО-ЧИСЕЛЬНА МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ ДОВГИХ НЕКРУГОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З УРАХУВАННЯМ ДЕФОРМАЦІЙ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ.....	224
СТРЕЛЯЕВ Ю.М., ШУПЧИНСКАЯ К.С. КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О СЖАТИИ ДВУХ УПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ КУЛОНА.....	236
ТАНЦЮРА І.В. ВПЛИВ ШВИДКОСТІ ОХОЛОДЖЕННЯ НА ФОРМУВАННЯ СТРУКТУРИ СПЛАВУ СИСТЕМИ AL-MN.....	246
ФАТЄЄВА Ю.О. ВПЛИВ ПЕРІОДИЧНОГО ЗОВНІШНЬОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА КОЛИВАННЯ ФГМ ПОЛОГИХ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ ЗІ ЗМІННОЮ ЗА ЧАСОМ ТОВЩИНОЮ.....	251
ХОМА Н.Г., ХОМА-МОГИЛЬСЬКА С.Г., ХОХЛОВА Л.Г. УМОВИ ІСНУВАННЯ 2π -ПЕРІОДИЧНОГО ГЛАДКОГО РОЗВ'ЯЗКУ КВАЗІЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ.....	257
ЧЕРНЯКОВ Ю.А., ШЕВЧЕНКО А.Г. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ НА ПЛОЩАДКЕ ТЕКУЧЕСТИ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ.....	264
ЧОПОРОВ С.В., ГОМЕНЮК С.И., АЛАТАМНЕХ Х.Х., ОСПИЩЕВ К.С. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ: СТРУКТУРИРОВАННЫЕ И БЛОЧНО-СТРУКТУРИРОВАННЫЕ СЕТКИ.....	272
ШЕРМАН З.А. КРАТКИЙ ОБЗОР МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ ГРАЦИОЗНЫХ ГРАФОВ.....	284
ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У «ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ» ЗА ФАХОМ «ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ».....	298

УДК 512.547.2:517.926

РАСЩЕПЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЭКИПАЖА НА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОДВЕШИВАНИИ

Базилевич Ю. Н., к. ф.-м. н., доцент

*Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры,
ул. Чернышевского, 24а, г. Днепропетровск, 49600, Украина*

bazilevich@yandex.ru

Выполнена декомпозиция уравнений, описывающих работу системы горизонтальной стабилизации экипажа высокоскоростного наземного транспорта на магнитном подвешивании. Для декомпозиции уравнений используются свойства симметрии выбранной расчётной схемы. Расчёты выполняются с помощью теории представлений конечных групп. Это позволяет до составления уравнений найти наборы новых переменных, при которых уравнения распадутся на независимые подсистемы. Для исследуемой системы получено, что система уравнений 78-ого порядка распадается на четыре подсистемы, имеющие порядки 12, 12, 28 и 26.

Ключевые слова: группа симметрии, декомпозиция, электромагнитное подвешивание, уравнения движения.

РОЗЩЕПЛЕННЯ РІВНЯНЬ РУХУ ЕКІПАЖА НА ЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ ПІДВІШУВАННІ

Базилевич Ю. М., к. ф.-м. н., доцент

*Придніпровська державна академія будівництва та архітектури,
вул. Чернишевського, 24а, м. Дніпропетровськ, 49600, Україна*

bazilevich@yandex.ru

Виконано декомпозицію рівнянь, що описують роботу системи горизонтальної стабілізації екіпажу високошвидкісного наземного транспорту на магнітному підвішуванні. Для декомпозиції рівнянь використовуються властивості симетрії обраної розрахункової схеми. Розрахунки виконуються за допомогою теорії зображень скінчених груп. Це дозволяє до складання рівнянь знайти набори нових змінних, при яких рівняння розпадутся на незалежні підсистеми. Для досліджуваної системи отримано, що система рівнянь 78 другого порядку розпадається на чотири підсистеми, які мають порядки 12, 12, 28 і 26.

Ключові слова: група симетрії, декомпозиція, електромагнітне підвішування, рівняння руху.

DECOUPLING OF EQUATIONS OF ELECTROMAGNETICALLY LEVITATED MOTION OF THE VEHICLE

Bazilevich, Yu. N., Ph.D. in Physics and Maths, associate professor

*Prydniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture,
Chernychevskiy str., 24a, Dnepropetrovsk, 49600, Ukraine*

bazilevich@yandex.ru

Electromagnetic levitation of the vehicle is based on attractive forces generated between the electromagnets mounted on the vehicle and a ferromagnetic rail, laid along the whole length of the track. At that in each electromagnet the system of continuous current control is used. The guiding magnets, intended to stabilize the carriage motion in a horizontal plane, work on the same principle.

In this paper the decoupling of equations describing the work of a horizontal stabilization system of the high-speed overland transportation on a magnetic levitation has been performed. The equations of vehicle motion include both mechanical joint variables and current magnitudes in the electromagnets, resulting in the need to analyze the systems of differential equations of higher order.

For equations decoupling the symmetry properties of the selected design model are used. Calculations are performed using the representation theory of finite groups. This allows finding of sets of new variables under which the equations shall be split into independent subsystems before equations composition. For the system under study we have found that the equations system of the 78th order is broken down into four subsystems having orders 12, 12, 28 and 26.

Key words: symmetry group, decoupling, electromagnetic levitation, the equations of motion.

ВВЕДЕНИЕ

Поезд на магнитном подвешивании, магнитоплан или маглев (от англ. *magnetic levitation* – «магнитная левитация») – это поезд, удерживаемый над полотном дороги, движимый и управляемый силой электромагнитного поля [1].

Наибольшее распространение получили два варианта магнитного подвеса. Первый вариант – электромагнитный подвес – основан на притягивающих усилиях, возникающих между установленными на экипаже электромагнитами и ферромагнитным рельсом, уложенным по всей длине трассы (рис. 1). Для преодоления принципиальной неустойчивости электромагнитного подвеса используется система непрерывного управления токами в каждом электромагните. По такому же принципу работают направляющие магниты, предназначенные для стабилизации движения вагона в горизонтальной плоскости.

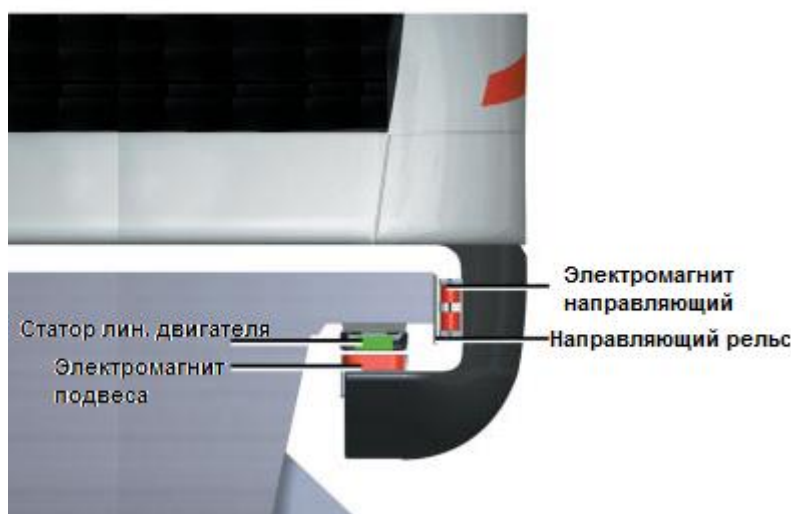


Рис. 1. Схема расположения магнитов и рельсов (электромагнитное подвешивание)

Второй вариант – электродинамический подвес – основан на усилиях отталкивания между источником магнитного поля на борту экипажа и проводником, уложенным вдоль трассы, при их взаимном движении. В процессе движения источника магнитного поля относительно проводящей пластины в последней возникают вихревые токи. Магнитное поле этих токов направлено противоположно внешнему магнитному полю, в результате чего возникает сила отталкивания.

Сама идея такого транспорта не нова, но экономические и технические ограничения пока не позволяют ей развернуться в полной мере.

ГРУППА СИММЕТРИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Группы симметрии давно используются физиками при расчётах колебаний молекул, кристаллов и при решении ряда других задач [2]. Применение этих же методов в технических задачах имеет ряд особенностей [3, 4].

Симметрия физической системы проявляется в том, что существуют преобразования g_i пространства, относительно которых система, а следовательно, и ее математическая модель, инвариантны (неизменны). К таким преобразованиям относятся отражения физической системы относительно плоскостей симметрии, повороты вокруг осей симметрии и т. п.

Если во множестве преобразований g_i ввести операцию последовательного применения преобразований $g_c = g_a g_b$, то это множество становится группой. Свойство инвариантности системы относительно преобразований g_i выражается в том, что матрицы $T(g_i)$ коммутируют с матрицами коэффициентов системы уравнений.

В литературе (см., например, [2]) подробно описаны все конечные группы, встречающиеся в приложениях. Приведены также их неприводимые представления $\tau_k(g_i)$ (здесь $k = \overline{1, m}$, m – число различных неприводимых представлений данной группы). Разложение представлений $\{T(g_i)\}$ на неприводимые соответствует разделению системы уравнений на несколько подсистем.

Пусть рассматривается некоторая механическая система. Вектор ее исходных обобщенных координат обозначим через \mathbf{q} . Эта система инвариантна относительно группы преобразований координат g_1, g_2, \dots, g_n . В матричном виде данные преобразования записывают так: $\tilde{\mathbf{q}} = T(g_i)\mathbf{q}$. Требуется найти такую замену обобщенных координат $\mathbf{q} = S\mathbf{x}$, чтобы уравнения, составленные в новых координатах, получились разделенными на подсистемы.

Существуют два пути решения этой задачи. Первый путь – использование образующих элементов $T(g_1), \dots, T(g_r)$ группы матриц. Здесь и далее образующие располагаются в начале списка элементов группы. Матрица $T(g_1)$ коммутирует с матрицами коэффициентов $\{B_i\}$ уравнений движения исследуемой системы. Поэтому можно применить «способ коммутирующей матрицы» [3]. Другими словами, в качестве столбцов матрицы преобразования S_1 берём векторы канонического базиса матрицы $T(g_1)$. Тогда преобразование $\mathbf{q} = S_1\mathbf{x}$ уже дает более удачные обобщенные координаты \mathbf{x} . Далее используем следующие образующие элементы группы.

Другой путь состоит в вычислении проекторов на инвариантные подпространства, соответствующие неприводимым представлениям. В случае одномерных неприводимых представлений формула для нахождения проекторов имеет вид:

$$P_j = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N \overline{\tau_j(g_v)} T(g_v), \quad j = \overline{1, m}, \quad (1)$$

где N – число элементов группы, $\tau_j(g_v)$ – v -е значение j -го одномерного неприводимого представления. Затем выбираются линейно независимые векторы-столбцы каждого из проекторов, которые служат строками матрицы преобразования S .

Такой подход уже давно используется при расчёте колебаний молекул, кристаллов и в других задачах теоретической физики [2]. К настоящему времени появилось большое число работ по применению групп симметрии и в технике (см., например, обзоры [5, 6]).

В случае, когда исходные матрицы имеют сравнительно высокий порядок, расчёты целесообразно выполнять на компьютере. Для вычисления проекторов по формуле (1) была составлена программа GROUPS [3].

ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЧЁТОВ

Экипаж высокоскоростного наземного транспорта (ВСНТ) на электромагнитном подвешивании [1, 7] является одним из примеров электромеханической системы. В качестве переменных при исследовании движения такого вагона используются механические величины (перемещения масс, размеры зазоров и т.п.) и значения токов в электромагнитах. При решении задачи стабилизации боковых колебаний такого экипажа появляются громоздкие системы уравнений. Становится актуальной задача их декомпозиции.

Рассматривается декомпозиция уравнений, описывающих работу системы горизонтальной стабилизации движения экипажа ВСНТ с четырьмя тележками (рис. 2). При исследовании устойчивости движения этого экипажа в горизонтальной плоскости принимаются во внимание следующие обобщенные координаты [7]:

$$\psi, y, \theta, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, y_1, y_2, y_3, y_4, \\ \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, y_{11}, y_{12}, \dots, y_{44}.$$

Координаты без индекса обозначают смещения и углы поворота кузова, с одним индексом – смещения и углы поворота соответствующих тележек, y_{kj} – боковой относ -го магнита, укрепленного на k -ой тележке. Кроме того, в дифференциальные уравнения входят величины токов в электромагнитах i_{kj} . Это связано с тем, что величины токов в электромагнитах не могут меняться мгновенно. «Инерция» возникает из-за индуктивности электромагнитов.

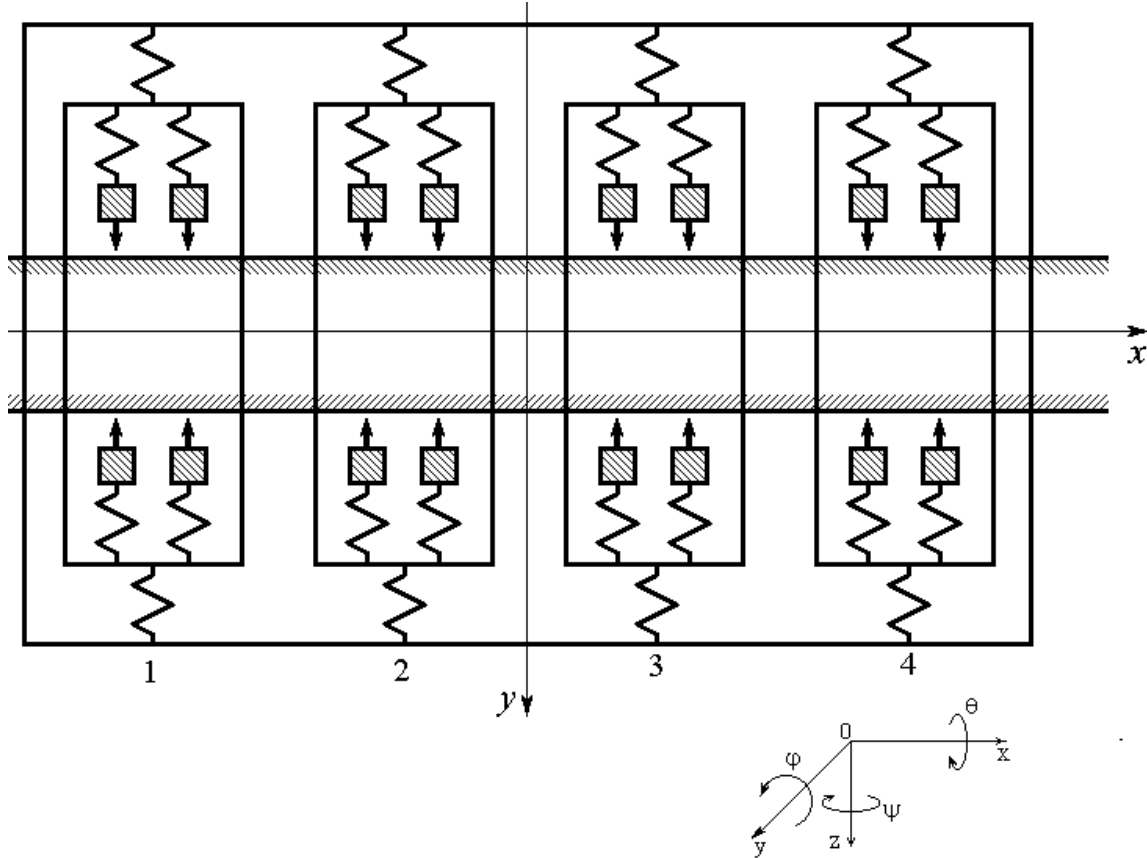


Рис. 2. Расчетная схема экипажа высокоскоростного наземного транспорта

Взаимосвязь между механическими и электрическими величинами следующая. Притягивающая сила электромагнита равна:

$$P = C_m \frac{i_{\Pi}^2}{\delta_{\Pi}^2},$$

где C_m – постоянная электромагнита, i_{Π} – ток, δ_{Π} – зазор. При линеаризации эта зависимость заменяется следующей:

$$P = b_1 + b_2 i - b_3 \delta,$$

где $b_1 = C_m \frac{i_0^2}{\delta_0^2}$, $b_2 = 2C_m \frac{i_0}{\delta_0^2}$, $b_3 = C_m \frac{i_0^2}{\delta_0^3}$, i_0 и δ_0 – заданные значения тока и зазора, i и δ – динамические добавки величин тока и зазора. Система управления подаёт напряжение на электромагнит в зависимости от величины зазора, скорости и ускорения изменения величины зазора:

$$U = k_1 \delta + k_2 \dot{\delta} - k_3 \ddot{\delta},$$

где U – динамическая добавка величины напряжения; k_1 , k_2 , k_3 – коэффициенты системы автоматического управления зазором между электромагнитами и путевой структурой.

Величина тока меняется в соответствии с уравнением:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U,$$

где L и R – индуктивность и сопротивление обмоток электромагнита.

Система уравнений имеет 78-й порядок.

Симметрия экипажа ВСНТ проявляется в том, что его расчетная схема остается неизменной при следующих преобразованиях: g_1 – отражение всей системы относительно вертикальной поперечной плоскости Oyz ; g_2 – отражение относительно продольной плоскости Oxz ; g_3 – поворот на 180° вокруг оси Oz ; g_4 – тождественное преобразование. Эти преобразования образуют группу G симметрии экипажа ВСНТ.

Матрицы преобразования обобщенных координат, соответствующие таким преобразованиям симметрии, имеют следующий вид:

$$T(g_1) = \text{diag} \left(-1, 1, 1, -M, M, M, M \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right),$$

$$T(g_2) = \text{diag} \left(-1, -1, -1, -E_4, -E_4, -E_4 - E_4 \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right),$$

$$T(g_3) = \text{diag}(1, -1, -1, M, -M, -M, -M \times M),$$

$$T(g_4) = E_{31},$$

где $M = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}$, \times – знак прямого произведения матриц; E_m – единичная матрица порядка m .

Точки i_{kj} преобразуются так же, как и боковые перемещения магнитов y_{kj} .

Группа G совпадает с группой симметрии прямоугольника C_{2h} (см. [2]). Её неприводимые представления следующие:

	g_1	g_2	g_3	$g_4 = e$
τ_1	1	1	1	1
τ_2	-1	1	-1	1
τ_3	1	-1	-1	1
τ_4	-1	-1	1	1

С помощью программы GROUPS были вычислены проекторы на инвариантные подпространства, соответствующие неприводимым представлениям этой группы. Элементы линейно независимых столбцов этих проекторов являются коэффициентами выражений для новых обобщенных координат.

Получены следующие новые наборы переменных:

$$\begin{aligned} \text{а) } q_1 &= \frac{1}{4}(y_{11} - y_{12} + y_{43} - y_{44}), & q_2 &= \frac{1}{4}(y_{13} - y_{14} + y_{41} - y_{42}), \\ q_3 &= \frac{1}{4}(y_{21} - y_{22} + y_{33} - y_{34}), & q_4 &= \frac{1}{4}(y_{23} - y_{24} + y_{31} - y_{32}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{4}(i_{11} - i_{12} + i_{43} - i_{44}), & s_2 &= \frac{1}{4}(i_{13} - i_{14} + i_{41} - i_{42}), \\
s_3 &= \frac{1}{4}(i_{21} - i_{22} + i_{33} - i_{34}), & s_4 &= \frac{1}{4}(i_{23} - i_{24} + i_{31} - i_{32}); \\
\text{б)} \quad q_5 &= \frac{1}{4}(y_{11} - y_{12} - y_{43} + y_{44}), & q_6 &= \frac{1}{4}(y_{13} - y_{14} - y_{41} + y_{42}), \\
q_7 &= \frac{1}{4}(y_{21} - y_{22} - y_{33} + y_{34}), & q_8 &= \frac{1}{4}(y_{23} - y_{24} - y_{31} + y_{32}), \\
s_5 &= \frac{1}{4}(i_{11} - i_{12} - i_{43} + i_{44}), & s_6 &= \frac{1}{4}(i_{13} - i_{14} - i_{41} + i_{42}), \\
s_7 &= \frac{1}{4}(i_{21} - i_{22} - i_{33} + i_{34}), & s_4 &= \frac{1}{4}(i_{23} - i_{24} - i_{31} + i_{32}); \\
\text{в)} \quad q_9 &= y, & q_{10} &= \theta, \\
q_{11} &= \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_4), & q_{12} &= \frac{1}{2}(\psi_2 - \psi_3), \\
q_{13} &= \frac{1}{2}(y_1 + y_4), & q_{14} &= \frac{1}{2}(y_2 + y_3), \\
q_{15} &= \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_4), & q_{16} &= \frac{1}{2}(\theta_2 + \theta_3) \\
q_{17} &= \frac{1}{4}(y_{11} + y_{12} + y_{43} + y_{44}), & q_{18} &= \frac{1}{4}(y_{13} + y_{14} + y_{41} + y_{42}), \\
q_{19} &= \frac{1}{4}(y_{21} + y_{22} + y_{33} + y_{34}), & q_{20} &= \frac{1}{4}(y_{23} + 4 + y_{31} + y_{32}), \\
s_9 &= \frac{1}{4}(i_{11} + i_{12} + i_{43} + i_{44}), & s_{10} &= \frac{1}{4}(i_{13} + i_{14} + i_{41} + i_{42}), \\
s_{11} &= \frac{1}{4}(i_{21} + i_{22} + i_{33} + i_{34}), & s_{12} &= \frac{1}{4}(i_{23} + i_{24} + i_{31} + i_{32}); \\
\text{г)} \quad q_{21} &= \psi, & q_{22} &= \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_4), & q_{23} &= \frac{1}{2}(\psi_2 + \psi_3), \\
q_{24} &= \frac{1}{2}(y_1 - y_4), & q_{25} &= \frac{1}{2}(y_2 - y_3), \\
q_{26} &= \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_4), & q_{27} &= \frac{1}{4}(\theta_2 - \theta_3), \\
q_{28} &= \frac{1}{4}(y_{11} + y_{12} - y_{43} - y_{44}), & q_{29} &= \frac{1}{4}(y_{13} + y_{14} - y_{41} - y_{42}), \\
q_{30} &= \frac{1}{4}(y_{21} + y_{22} - y_{33} - y_{44}), & q_{31} &= \frac{1}{4}(y_{23} + y_{24} - y_{31} - y_{32}), \\
s_{13} &= \frac{1}{4}(i_{11} + i_{12} - i_{43} - i_{44}), & s_{14} &= \frac{1}{4}(i_{13} + i_{14} - i_{41} - i_{42}), \\
s_{15} &= \frac{1}{4}(i_{21} + i_{22} - i_{33} - i_{44}), & s_{16} &= \frac{1}{4}(i_{23} + i_{24} - i_{31} - i_{32}).
\end{aligned}$$

РЕЗУЛЬТАТЫ

В результате расчетов получаем, что система уравнений 78-ого порядка распадается на четыре подсистемы, имеющие порядки 12, 12, 28 и 26. Получены новые наборы переменных. Каждому набору переменных соответствует отдельная система уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Maglev // Wikipedia, the free encyclopedia. – 2015. – Access to the resource : <https://en.wikipedia.org/wiki/Maglev>.
2. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике : Курс лекций для физиков-теоретиков. Изд. 2 / Г. Я. Любарский. – М. : URSS, 2016. – 360 с.
3. Базилевич Ю. Н. Численные методы декомпозиции в линейных задачах механики / Ю. Н. Базилевич. – К. : Наук. думка, 1987. – 156 с.

4. Базилевич Ю. М. Вибір узагальнених координат локомотива з трьома візками з урахуванням симетрії його розрахункової схеми / Ю. М. Базилевич, М. Л. Коротенко // Вісник Запорізького державного університету. Фізико-математичні науки, Біологічні науки. – 2000. – №1. – С. 13-16.
5. Павлов В. Г. Системы, инвариантные относительно групп преобразований / В. Г. Павлов // Кибернетика и вычисл. техника. – 1983. – Вып. 58. – С. 17-21.
6. Павловский Ю. Н. Управление декомпозиционными структурами / Ю. Н. Павловский // Там же. – С. 11-16.
7. Коротенко М. Л. Боковые колебания экипажа с бесконтактным подвесом / М. Л. Коротенко, В. Л. Копорулин, Е. П. Крышко // Проблемы динамики, прочности и устойчивости движения железнодорожного подвижного состава. – Днепропетровск : ДИИТ, 1986. – С. 79-87.

REFERENCES

1. (2015), “Maglev”, Wikipedia, the free encyclopedia, available at: <https://en.wikipedia.org/wiki/Maglev>.
2. Lyubarskiy, G.Ya. (2016), *Teoriya grupp i ee primeneniye v fizike: Kurs lektsiy dlya fizikov-teoretikov* [Group theory and its application in physics: Lectures for theoretical physicists] URSS, Moscow, Russia.
3. Bazilevich, Yu.N. (1987), *Chislennyye metody dekompozitsii v lineynykh zadachah mehaniki* [Numerical decoupling methods in the linear problems of mechanics], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.
4. Bazilevich, Yu.N. and Korotenko, M.L. (2000), “The choice of locomotive with three carriages joint variables considering the symmetry of its design scheme”, *Visnyk Zaporiz'kogo derzhavnogo universytetu. Fyzyko-matematychni nauky, Biologichni nauky*, no. 1, pp. 13-16.
5. Pavlov, V.G. (1983), “Systems that are invariant with respect to transformation groups”, *Kibernetika i vychislitel'naya tehnika*, issue 58, pp. 17-21.
6. Pavlovskiy, Yu.N. (1983), “Decomposition structures management”, *Kibernetika i vychislitel'naya tehnika*, issue 58, pp. 11-16.
7. Korotenko, M.L., Koporulin, V.L. and Kryshko, E.P. (1986), “Sideways movements of the vehicle with contactless suspension”, *Problemy dinamiki, prochnosti i ustoychivosti dvizheniya zheleznodorozhnogo podvizhnogo sostava*, pp. 79-87.

УДК 519.85

О ПОДХОДЕ К ОПТИМИЗАЦИИ С ВЕРОЯТНОСТНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УПОРЯДОЧИВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Барболина Т. Н.

*Полтавский национальный педагогический университет им. В.Г. Короленко,
ул. Остроградского, 2, г. Полтава, 36000, Украина*

tm-b@ukr.net

Для использования в постановках оптимизационных задач предложен подход к упорядочиванию случайных величин. Введено отношение линейного порядка на фактор-множестве по эквивалентности, основанной на сравнении числовых характеристик случайной величины. Рассмотрены некоторые свойства этого отношения. Используя введенное отношение порядка, сформулированы оптимизационные задачи, которые учитывают вероятностную неопределенность данных.

Ключевые слова: вероятностная неопределенность, линейный порядок, оптимизационная задача, числовые характеристики случайной величины.

ПРО ПІДХІД ДО ОПТИМІЗАЦІЇ З ІМОВІРНОЮ НЕВИЗНАЧЕНІСТЮ З ВИКОРИСТАННЯМ УПОРЯДКУВАННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Барболіна Т. М.

*Полтавський національний педагогічний університет ім. В.Г. Короленка,
вул. Остроградського, 2, м. Полтава, 36000, Україна*

tm-b@ukr.net

Для використання в постановках оптимізаційних задач запропонований підхід до упорядкування випадкових величин. Уведено відношення лінійного порядку на фактор-множині за еквівалентністю, що ґрунтується на порівнянні числових характеристик випадкової величини. Розглянуто деякі властивості цього відношення. Використовуючи введене відношення порядку, сформульовані оптимізаційні задачі, які враховують імовірнісну невизначеність даних.

Ключові слова: імовірнісна невизначеність, лінійний порядок, оптимізаційна задача, числові характеристики випадкової величини.

ABOUT APPROACH TO OPTIMIZATION WITH PROBABILISTIC UNCERTAINTY USING ORDERING OF RANDOM VARIABLES

Barbolina T. M.

*Poltava V.G. Korolenko National Pedagogical University,
Ostrogradsky Str., 2, Poltava, 36000, Ukraine*

tm-b@ukr.net

The problems with uncertainty, including probabilistic, attract the attention of researchers recently. Different ways have been proposed to construct constraints and criterions of stochastic optimization problems. For instance wide class of the stochastic models may be written in form of minimization of mathematical expectation of objective function on some domain. At the same time such approach doesn't allow to compare different solutions if corresponding value of objective function has equal mathematical expectations. Specifically such problems arise in combinatorial optimization. In the paper an example of problem is given.

One possible approach for formalization of optimization problems under interval, fuzzy and probabilistic uncertainty would be to use a certain order on the set of relevant variables. In particular an order on a set of discrete random variables proposed earlier is defined through the comparison of the mathematical expectations, dispersions, possible values and associated probabilities. However in many practical problems probabilistic distribution is unknown. Therefore such order cannot be used. In this paper author proposes ordering through the comparison of numerical characteristics of random variables.

Let the characteristic vector of the random variable be a vector which components are numerical characteristics of the random variable. We mainly consider characteristic vector which components are initial moments of a random variable, i.e. mathematical expectation of its n -s power.

Random variables with equal characteristic vectors are called H -equivalent. H -equivalence relation on a set of random variables is an equivalence relation. Let the characteristic vector of equivalence class is a characteristic vector of its representative. We will call two equivalence classes organized in ascending (nondecreasing) order, if characteristic vector of the first class lexicographically less (less or equal) then characteristic vector of the second one. From properties of lexicographic order it follows that introduced order is linear one.

We define sum of two equivalence classes to be the class which contains sum of its representatives. We prove that this definition is correct. If random variables are independent and components of characteristic vectors are initial moments of a random variable then introduced order possesses property important for some practical problems. Ordering of two equivalency classes remained at addition to the left and right part of a relation of the same equivalence classes. Also we prove some corollaries of this property.

Consider finite subset Ω of the set of independent random variables. Using introduced linear order, let us order the elements of the factor set of Ω relative to H -equivalence. The first random variable in this ordered list is the minimum value and the last one is the maximum value. The definition of the minimum and maximum allows setting the optimization problem for finding the extreme elements in the given conditions.

Statement of optimization problems on factor set of Ω relative to H -equivalence in the general case requires to define operations with equivalence classes. At the same time if operation with classes defines through operation with their representatives then result may depend from choose of classes' elements.

Since statement of optimization problems in the general case is difficult author formulate one class of problems. This statement uses sum of equivalence classes and multiplication class on real number. Also we assume that components of characteristic vector are initial moments of a random variable. If mathematical expectations of objective function and constraint are different under all feasible points then statements of optimization problems proposed in the paper is equivalent to problem of optimization of mathematical expectation under statistical constraints.

Studying of optimization problems on linear ordered sets allows to use branch and bound method for its solving. Subsequent studies suggest further study of the properties of the considered problems.

Key words: probabilistic uncertainty, linear order, optimization problem, numerical characteristics of a random variable.

ВВЕДЕНИЕ

Вероятностный характер исходной информации, имеющий место во множестве практических задач, обращает внимание исследователей на развитие моделей и методов стохастического программирования (см., например, [1-6]). При построении моделей задач стохастической оптимизации возникает вопрос о том, что считать допустимым решением и каким образом определять лучшее решение. Существуют различные подходы к формированию условий: жесткие постановки [2, 3], вероятностные ограничения и квантильная оптимизация [4, 5], модели со статистическими условиями [3] и др.

Столь же разнообразными являются подходы к выбору критерия, что является отдельной нетривиальной научной проблемой, решение которой зависит от особенностей исследуемых практических задач. Среди наиболее известных подходов к выбору критерия в стохастическом программировании можно указать:

- поиск экстремума математического ожидания значения функции;
- минимизация отклонения целевой функции от заданного значения;
- максимизация вероятности получить значение целевой функции выше заданного и др.

Следует отметить, что достаточно широкий класс стохастических моделей может быть записан в однообразной форме минимизации математического ожидания целевой функции в некоторой области [3]. В то же время такой подход не дает возможности сравнивать различные решения, для которых значение математического ожидания целевой функции одинаково. Такие ситуации нередко возникают, в частности, в задачах комбинаторной оптимизации. В качестве примера приведем так называемую задачу директора, которая формулируется следующим образом [7]. В приемной директора находятся k посетителей. Известно ожидаемое время приема каждого посетителя. Необходимо установить порядок приема посетителей таким образом, чтобы время приема было минимальным. Обобщая задачу, совершенно естественно полагать, что ожидаемое время приема является случайной величиной. В этом случае можно требовать минимизации математического ожидания суммарного времени приема. Однако, если математические ожидания всех случайных величин времени приема одинаковы, выбрать лучшее решение не представляется возможным. Поэтому целесообразно ставить вопрос об уточнении критерия.

Для оптимизационных задач интервальной и нечеткой оптимизации был предложен подход, основанный на введении отношения порядка [8, 9]. Развитие такого подхода для задач стохастической оптимизации представлено в [10, 11]. Один из предложенных способов упорядочивания дискретных случайных величин основывается на сравнении их числовых характеристик (математическое ожидание, дисперсия), возможных значений и соответствующих вероятностей.

Однако, как известно, во многих практически значимых задачах закон распределения случайной величины не может быть получен. В этом случае указанный способ упорядочивания случайных величин не может быть использован. Поскольку при неизвестном законе распределения случайной величины, как правило, ограничиваются числовыми характеристиками этой величины, в частности, моментами, то для таких задач целесообразно использовать упорядочивание, которое основывается на сравнении числовых характеристик случайных величин. В настоящей статье излагается такой подход и обосновывается ряд положений, изложенных в [10].

УПОРЯДОЧИВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ПРИ ПОМОЩИ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Будем обозначать дискретные случайные величины большими латинскими буквами (X, Y, Z) , их возможные значения – малыми (x_i, y_i, z_i) , а соответствующие вероятности

через p_i^x, p_i^y, p_i^z . Пусть Ω – некоторое множество независимых случайных величин. Определим для случайной величины X характеристический вектор как вектор $H(X) = (h_1(X), \dots, h_s(X))$, где $h_i(X)$, $i = 1, \dots, k$ – некоторые числовые характеристики случайной величины X .

В дальнейшем преимущественно будем рассматривать характеристический вектор, компонентами которого являются начальные моменты случайной величины. Как и в [13], начальным моментом k -го порядка случайной величины X будем называть математическое ожидание k -ой степени этой случайной величины:

$$\mu_k(X) = M(X^k). \quad (1)$$

Определение 1. Будем называть две случайные величины $X, Y \in \Omega$ H -эквивалентными (обозначать $X \simeq_k Y$) тогда и только тогда, когда $H(X) = H(Y)$.

Утверждение 1. Отношение \simeq_k на множестве независимых случайных величин является отношением эквивалентности.

Доказательство. Рефлексивность непосредственно следует из равенства $h_i(X) = h_i(X)$ для всех $i = 1, \dots, k$.

Симметричность. Если $X \simeq_k Y$, то для всех $i = 1, \dots, k$ имеют места равенства $h_i(X) = h_i(Y)$, а значит, и равенства $h_i(Y) = h_i(X)$, то есть $Y \simeq_k X$.

Транзитивность. Пусть $X \simeq_k Y$ и $Y \simeq_k Z$, тогда для всех $i = 1, \dots, k$ имеют места равенства $h_i(X) = h_i(Y)$ и $h_i(Y) = h_i(Z)$. Тогда также $h_i(X) = h_i(Z)$ для всех $i = 1, \dots, k$. Таким образом, $X \simeq_k Z$. Утверждение доказано.

Класс эквивалентности по отношению \simeq_k с представителем X будем обозначать $[X]_k$, то есть $[X]_k \in \Omega / \simeq_k$. Обозначим также $H([X]_k)$ характеристический вектор некоторой дискретной случайной величины $X \in [X]_k$ (в соответствии с определением 1 эти вектора равны для всех представителей класса $[X]_k$). Пусть также $<_l$ обозначает лексикографическое упорядочение в m -мерном евклидовом пространстве: для любых $u, u' \in R^m$ $u <_l u'$, если первая ненулевая компонента разности $u - u'$ отрицательна. Если $u <_l u'$ или $u = u'$, то будем записывать $u \leq_l u'$.

Определение 2. Будем называть классы $[X]_k, [Y]_k \in \Omega / \simeq_k$ упорядоченными по возрастанию (обозначать $[X]_k < [Y]_k$), если $H([X]_k) <_l H([Y]_k)$.

Определение 3. Будем называть классы $[X]_k, [Y]_k \in \Omega / \simeq_k$ упорядоченными по неубыванию (обозначать $[X]_k \preceq [Y]_k$), если $H([X]_k) \leq_l H([Y]_k)$.

Из свойств лексикографического порядка следует, что отношение $<$ является отношением строгого порядка, а отношение \preceq – отношением линейного порядка.

Для потребностей моделирования ряда практических задач, в частности, задач упаковки (см. например, [9, 12]), естественным было бы требовать, чтобы для введенных определенным образом порядка и суммы упорядочивание двух случайных величин сохранялось при прибавлении к левой и правой части соотношения одной и той же случайной величины.

Покажем, что такое свойство выполняется в случае независимых случайных величин для порядка, введенного в соответствии с определением 3, если для характеристического вектора $h_i(X) = \mu_i(X)$ для всех $i = 1, \dots, k$. Сумму классов эквивалентности определим следующим образом.

Определение 4. Суммой классов $[X]_k, [Y]_k \in \Omega / \simeq_k$ будем называть класс с представителем $X_1 + Y_1$, где $X_1 \in [X]_k, Y_1 \in [Y]_k$.

Корректность определения 4 (в смысле независимости суммы от выбора представителей классов эквивалентности) обосновывается следующими рассуждениями. Пусть дискретные случайные величины X_1 и X_2 принадлежат классу эквивалентности $[X]_k \in \Omega / \simeq_k$, а величины Y_1 и Y_2 – классу $[Y]_k \in \Omega / \simeq_k$. Так как величины из множества Ω независимы, то для i -го момента суммы величин $X_l + Y_l$ ($l = 1, 2$) имеет место формула [14]

$$M(X_l + Y_l)^i = \sum_{j=0}^i C_i^j M(X_l^j) M(Y_l^{i-j}). \quad (2)$$

Так как для всех $j = 1, \dots, k$ выполняются равенства $M(X_1^j) = M(X_2^j), M(Y_1^j) = M(Y_2^j)$ (вследствие $X_1 \simeq_k X_2, Y_1 \simeq_k Y_2$), то также $M(X_1 + Y_1)^i = M(X_2 + Y_2)^i$ для всех $i = 1, \dots, k$, то есть $X_1 + Y_1 \simeq_k X_2 + Y_2$.

Вернемся к рассмотрению свойства сохранения упорядочивания классов эквивалентности из Ω / \simeq_k при прибавлении к левой и правой части соотношения одного и того же класса.

Утверждение 2. Пусть компоненты характеристического вектора случайной величины определяются согласно (1). Если для классов $[X]_k, [Y]_k \in \Omega / \simeq_k$ выполняется условие $[X]_k \prec [Y]_k$, то также имеет место $[X]_k + [Z]_k \prec [Y]_k + [Z]_k$, где $[Z]_k \in \Omega / \simeq_k$.

Доказательство. Пусть для классов $[X]_k, [Y]_k \in \Omega / \simeq_k$ выполняется условие $[X]_k \prec [Y]_k$, также $[Z]_k \in \Omega / \simeq_k$. Пусть r – наименьший порядок, для которого $\mu_r([X]_k) \neq \mu_r([Y]_k)$. Из определения 2 следует, что $\mu_r([X]_k) < \mu_r([Y]_k)$.

Если $r = 1$, то $\mu_1([X]_k) = \mu_1(X) = M(X), \mu_1([Y]_k) = \mu_1(Y) = M(Y)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mu_1([X]_k + [Z]_k) &= \mu_1(X + Z) = M(X + Z) = M(X) + M(Z) < \\ &< M(Y) + M(Z) = M(Y + Z) = \mu_1(Y + Z) = \mu_1([Y]_k + [Z]_k), \end{aligned}$$

откуда $[X]_k + [Z]_k \prec [Y]_k + [Z]_k$.

При $r > 1$ на основании формулы (2) получаем, что для всех $i = 1, \dots, r-1$ равны соответствующие моменты сумм $[X]_k + [Z]_k$ и $[Y]_k + [Z]_k$: $\mu_i([X]_k + [Z]_k) = \mu_i([Y]_k + [Z]_k)$.

Рассмотрим r -е моменты:

$$\mu_r([X]_k + [Z]_k) = \mu_r(X + Z) = \sum_{j=0}^r C_r^j \mu_j(X) \mu_{r-j}(Z) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{r-1} C_r^j \mu_j(X) \mu_{r-j}(Z) + \mu_r(X) = \sum_{j=0}^{r-1} C_r^j \mu_j(Y) \mu_{r-j}(Z) + \mu_r(X) < \\
&< \sum_{j=0}^{r-1} C_r^j \mu_j(Y) \mu_{r-j}(Z) + \mu_r(Y) = \mu_r(Y+Z) = \mu_r([Y]_k + [Z]_k).
\end{aligned}$$

Таким образом, $[X]_k + [Z]_k < [Y]_k + [Z]_k$. Утверждение доказано.

Следствие 1. Пусть компоненты характеристического вектора случайной величины определяются согласно (1), $[X]_k, [Y]_k, [Z]_k \in \Omega / \simeq_k$. Если выполняется условие $[X]_k \preceq [Y]_k$, то также имеет место $[X]_k + [Z]_k \preceq [Y]_k + [Z]_k$.

Доказательство. Согласно определению 3 $[X]_k \preceq [Y]_k$, если $[X]_k < [Y]_k$ или $[X]_k = [Y]_k$. В первом случае выполнение условия $[X]_k + [Z]_k \preceq [Y]_k + [Z]_k$ следует из утверждения 2, во втором, очевидно, выполняется равенство $[X]_k + [Z]_k = [Y]_k + [Z]_k$, откуда $[X]_k + [Z]_k \preceq [Y]_k + [Z]_k$. Следствие доказано.

Следствие 2. Пусть компоненты характеристического вектора случайной величины определяются согласно (1), $[X]_k, [Y]_k, [Z]_k, [V]_k \in \Omega / \simeq_k$. Если выполняются условия $[X]_k \preceq [Y]_k$ и $[Z]_k \preceq [V]_k$, то также имеет место соотношение $[X]_k + [Z]_k \preceq [Y]_k + [V]_k$.

Доказательство. Из условия $[X]_k \preceq [Y]_k$ в соответствии со следствием 1 имеем $[X]_k + [Z]_k \preceq [Y]_k + [Z]_k$. Аналогично из $[Z]_k \preceq [V]_k$ следует $[Y]_k + [Z]_k \preceq [Y]_k + [V]_k$. Тогда из транзитивности отношения \preceq имеем, что $[X]_k + [Z]_k \preceq [Y]_k + [V]_k$. Следствие доказано.

Следствие 3. Если для классов $[A_1]_k, [A_2]_k, \dots, [A_n]_k, [B_1]_k, [B_2]_k, \dots, [B_n]_k \in \Omega / \simeq_k$ выполняются условия $[A_i]_k \preceq [B_i]_k$ для всех $i = 1, \dots, n$, то $[A_1]_k + [A_2]_k + \dots + [A_n]_k \preceq [B_1]_k + [B_2]_k + \dots + [B_n]_k$.

ПОСТАНОВКИ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Существенным в задачах оптимизации является определение минимума и максимума на заданном множестве дискретных случайных величин. Используя введенный в определении 3 линейный порядок, упорядочим элементы заданного конечного подмножества множества Ω / \simeq_k : $[X^1]_k \preceq [X^2]_k \preceq \dots \preceq [X^m]_k$. Максимумом является класс $[X^m]_k$, а минимумом – класс $[X^1]_k$.

Определение минимума и максимума дает возможность ставить задачи оптимизации для нахождения экстремальных элементов при заданных условиях.

Постановка оптимизационных задач на фактор-множества Ω / \simeq_k в достаточно общем случае требует определения операций над классами эквивалентности. При этом следует отметить, что поэлементное определение операций не гарантирует их корректности, то есть независимости результата от выбора элементов класса. Продemonстрируем это на следующем примере.

Пример 1. Пусть операция умножения классов определена как умножение их представителей: $[X]_k \cdot [Y]_k = [X \cdot Y]_k$. Рассмотрим дискретные случайные величины X и Y , заданные рядами распределения в соответствии с табл. 1.

Таблица 1 – Ряды распределения случайных величин X и Y

	X				Y			
Значения случайной величины	2	6	8	12	2	7	12	16
Вероятности значений случайной величины	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{23}{45}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{1}{72}$

Так как $\mu_1(X) = \mu_1(Y) = 7$ и $\mu_2(X) = \mu_2(Y) = 62$, то $X \simeq_2 Y$. Следовательно, $[X]_2 = [Y]_2$ и должно выполняться равенство $[X]_2 \cdot [X]_2 = [Y]_2 \cdot [Y]_2$. Однако $[X \cdot X]_2 \neq [Y \cdot Y]_2$. Действительно, ряды распределения величин $X \cdot X$ и $Y \cdot Y$ имеют вид как в табл. 2.

Таблица 2 – Ряды распределения случайных величин $X \cdot X$ и $Y \cdot Y$

	$X \cdot X$				$Y \cdot Y$			
Значения случайной величины	4	36	64	144	4	49	144	256
Вероятности значений случайной величины	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{23}{45}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{1}{72}$

Таким образом, $\mu_2(X \cdot X) = 4^2 \cdot \frac{1}{4} + 36^2 \cdot \frac{1}{4} + 64^2 \cdot \frac{1}{4} + 144^2 \cdot \frac{1}{4} = 6536$, тогда как $\mu_2(Y \cdot Y) = 4^2 \cdot \frac{1}{4} + 49^2 \cdot \frac{23}{45} + 144^2 \cdot \frac{9}{40} + 256^2 \cdot \frac{1}{72} = 6807 \neq 6536$. Это означает, что предложенный способ определения умножения классов зависит от выбора представителей классов.

Учитывая сложность постановки оптимизационной задачи в общем случае, предложим формулировку одного класса задач, которая использует операции сложения классов (введенную в определении 4) и умножения класса на вещественное (действительное) число. Полагаем также, что элементы множества Ω являются независимыми случайными величинами, а компоненты характеристического вектора, как и выше, определяются согласно (1).

Определение 5. Произведением класса $[X]_k \in \Omega / \simeq_k$ на число c будем называть класс c представителем cX , где $X \in [X]_k$, $c \in R^1$.

Рассмотрим корректность введенного определения. Пусть дискретные случайные величины $X, Y \in \Omega$ являются H -эквивалентными, c – некоторое число. Так как вследствие H -эквивалентности случайных величин X и Y для всех $j = 1, \dots, k$ выполняются равенства $\mu_j(X) = \mu_j(Y)$, то, используя свойства математического ожидания [13, 14], для j -х начальных моментов величин cX и cY для всех $j = 1, \dots, k$ имеем:

$$\mu_j(cX) = \sum_{i=1}^{\infty} (cx_i)^j p_i^x = \sum_{i=1}^{\infty} c^j x_i^j p_i^x = c^j \sum_{i=1}^{\infty} x_i^j p_i^x = c^j \sum_{i=1}^{\infty} y_i^j p_i^y = \sum_{i=1}^{\infty} c^j y_i^j p_i^y = \mu_j(cY),$$

то есть $cX \simeq_k cY$.

Используя введенные определениями 4 и 5 операции над элементами фактор-множества Ω / \simeq_k (Ω – конечное множество), понятие минимума, можем сформулировать следующую оптимизационную задачу на множестве классов эквивалентности по отношению \simeq_k : найти минимум функции

$$\sum_{j=1}^n c_j [X^j]_k \quad (3)$$

в области

$$S = \left\{ \left([X^1]_k, [X^2]_k, \dots, [X^n]_k \right) \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} [X^j]_k \leq [b_i]_k, i = 1, \dots, m \right. \right\}, \quad (4)$$

где c_j, a_{ij} – детерминированные величины, $[X^j]_k, [b_i]_k \in \Omega / \simeq_k$.

Из определений 4, 5 следует, что задача (3), (4) эквивалентна задаче поиска минимума функции

$$\left[\sum_{j=1}^n c_j X^j \right]_k \quad (5)$$

в области

$$S' = \left\{ \left(X^1, X^2, \dots, X^n \right) \left| \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} X^j \right]_k \leq [b_i]_k, i = 1, \dots, m \right. \right\}, \quad (6)$$

где c_j, a_{ij} , как и выше, – детерминированные величины, $X^j, b_i \in \Omega$. Следует отметить, что в случае, когда известны законы распределения дискретных случайных величин множества Ω , можно рассматривать задачу (5), (6) при условии, что коэффициенты c_j, a_{ij} также являются случайными величинами. Также, если может быть получен закон распределения случайной величины $F(X^1, X^2, \dots, X^n)$, возможна следующая постановка задачи с использованием упорядочивания классов фактор-множества Ω / \simeq_k : найти в некоторой области S n -мерных случайных величин

$$\min_{(X^1, X^2, \dots, X^n) \in S} \left[F(X^1, X^2, \dots, X^n) \right]_k.$$

ВЫВОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Таким образом, в статье предложен подход к упорядочиванию случайных величин с использованием их числовых характеристик. Введение порядка дает возможность ставить задачи оптимизации для нахождения экстремальных элементов при заданных условиях. Предложенные постановки оптимизационных задач можно рассматривать как расширение известных постановок оптимизации математического ожидания со статистическими условиями: в случае, когда для всех допустимых точек математические ожидания целевой функции и функций условий различны, то оптимумы таких задач совпадают.

Рассмотрение оптимизационных задач на линейно упорядоченных множествах позволяет использовать для их решения метод ветвей и границ. Как направление дальнейших исследований можно рассматривать изучение свойств сформулированных оптимизационных задач и развитие методов их решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сергієнко І. В. Застосування методів стохастичної оптимізації для дослідження трансформаційних процесів в економіці / І. В. Сергієнко, М. В. Михалевич // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2004. – № 4. – С. 7-29.

2. Ермольев Ю. М. Стохастические модели и методы в экономическом планировании / Ю. М. Ермольев, А. И. Ястремский. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 256 с.
3. Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации / Д. Б. Юдин. – М. : Сов. радио, 1974. – 400 с.
4. Кан Ю. С. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями / Ю. С. Кан, А. И. Кибзун. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 375 с.
5. Наумов А. В. Исследование задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием / А. В. Наумов, С. В. Иванов // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 2. – С. 142-158.
6. Marti K. Stochastic Optimization Methods / K. Marti. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg : Springer, 2008. – 340 p.
7. Шкурба В. В. Задача трех станков / В. В. Шкурба. – М. : Наука, 1976. – 96 с.
8. Сергиенко И. В. Задачи оптимизации с интервальной неопределенностью: метод ветвей и границ / И. В. Сергиенко, О. А. Емец, А. О. Емец // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 5. – С. 38-50.
9. Ємець О. О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 239 с. – Режим доступу : <http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/352>.
10. Емец О. А. Об оптимизационных задачах с вероятностной неопределенностью / О. А. Емец, Т. Н. Барболина // Доповіди Національної академії наук України. – 2014. – № 11. – С. 40-45.
11. Емец О. А. Комбинаторная оптимизационная модель упаковки прямоугольников со стохастическими параметрами / О. А. Емец, Т. Н. Барболина // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – № 4. – С. 99-111.
12. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації [Електронний ресурс] / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. – К. : Інститут системних досліджень освіти, 1993. – 188 с. – Режим доступу : <http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/487>.
13. Вентцель Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М. : Гл. ред. физ.-мат. литерат., 1969. – 576 с.
14. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей : учебник / Б. В. Гнеденко. – М. : Едиториал УРСС, 2005. – 448 с.

REFERENCE

1. Sergienko, I.V. and Mikhalevich, M.V. (2004), “Application of stochastic optimization methods to analysis of the processes of economic transformation”, *Systemni doslidzhennya ta informatsiyni tekhnolohiyi*, no. 4, pp. 7-29.
2. Ermol'ev, Yu.M. and Yastremskii, A.I. (1979), *Stokhasticheskiye modeli i metody v ekonomicheskoy planirovaniy* [Stochastic models and methods in economic planning], Nauka, Moscow, Russia.
3. Yudin, D.B. (1974), *Matematicheskie metody upravleniya v usloviyakh nepolnoi informatsii* [Mathematical methods of a management in the conditions of incomplete information], Sovetskoe radio, Moscow, Russia.
4. Kan, Yu.S., and Kibzun, A.I. (2009), *Zadachi stokhasticheskogo programmirovaniya s veroyatnostnymi kriteriyami* [Stochastic Programming Problems with Probabilistic Criteria], Fizmatlit, Moscow, Russia.
5. Naumov, A.V. and Ivanov, S.V. (2011), “On stochastic linear programming problems with the quantile criterion”, *Avtomatika i telemekhanika*, no. 2, pp. 142-158.
6. Marti, K. (2008), [Stochastic Optimization Methods], Springer, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
7. Shkurba, V.V. (1976), *Zadacha trekh stankov* [Problem of three machines], Nauka, Moscow, Russia.

8. Sergienko, I.V., Iemets, O.O. and Yemets, O.O. (2013), "Optimization problems with interval uncertainty: Branch and bound method", *Kibernetika i sistemnyy analiz*, no. 5, pp. 673-683.
9. Iemets, O.O. and Yemets, O.O. (2011), *Rozvyazuvanna zadach kombinatornoyi optymizatsiyi na nechitkykh mnozhynakh* [Solving combinatorial optimization problems on fuzzy sets], PUET, Poltava, Ukraine.
10. Iemets, O.O. and Barbolina, T.M. (2014), "About optimization problems with probabilistic uncertainty", *Dopovidi Natsional'noyi akademiyi nauk Ukrayiny*, no. 11, pp. 40-45.
11. Iemets, O.O. and Barbolina, T.M. (2015), "Combinatorial Optimization Model of Packing Rectangles with Stochastic Parameters", *Kibernetika i sistemnyy analiz*, no. 4, pp. 583-593.
12. Stoyan, Yu.G. and Iemets, O.O. (1993), *Teoriya i metody evklidovoyi kombinatornoyi optymizatsiyi* [Theory and methods of euclidian combinatorial optimization], Instytut systemnykh doslidzhen osvity, Ukraine.
13. Ventsel, Ye.S. (1969), *Teoriya veroyatnosti* [Probability theory], Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury, Moskow, Russia.
14. Gnedenko, B.V. (2005), *Kurs teorii veroyatnosti* [Course in probability theory], Editorial URSS, Moscow, Russia.

УДК 629.7.01 : 519.876.5 : 621.45.03

СОВРЕМЕННЫЕ САПР В АЭРОКОСМИЧЕСКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Борисовская Ю. А., аспирант, Гоменюк С. И., д. т. н., профессор,
Аль-Омари М. А. В., аспирант

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

julia.borisovskaya@gmail.com, serega@znu.edu.ua

В работе представлен обзор основных коммерческих и свободно распространяемых современных САПР-систем. Рассмотрены их основные возможности и методы, используемые для проведения анализа и расчета конструкций. Проведен анализ программных систем для автоматизированного анализа с точки зрения использования их при проектировании комплексов в аэрокосмической отрасли.

Ключевые слова: метод конечных элементов, САПР, моделирование, аэрокосмическая отрасль, обзор.

СУЧАСНІ САПР В АЕРОКОСМІЧНІЙ ПРОМИСЛОВОСТІ

Борисовська Ю. О., аспірант, Гоменюк С. І., д. т. н., професор
Аль-Омарі М. А. В., аспірант

*Запорізький національний університет,
вул.Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

julia.borisovskaya@gmail.com

У роботі представлений огляд основних комерційних та вільно розповсюджуваних сучасних САПР-систем. Розглянуті їх основні можливості та методи, що використовуються для проведення аналізу та розрахунку конструкцій. Проведено аналіз програмних систем для автоматизованого аналізу з точки зору їх використання при проектуванні комплексів в аерокосмічній галузі.

Ключові слова: метод скінчених елементів, САПР, моделювання, аерокосмічна галузь, огляд.

MODERN CAD SYSTEMS IN THE AEROSPACE INDUSTRY

Borysovska J., postgraduate, Gomenyuk S., D.Sc. in Engineering, professor
Al-Omari M. A. W., postgraduate

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

julia.borisovskaya@gmail.com

Nowadays, the use of mathematical models is an important part of the design of facilities and structures of varying complexity. The use of computer-aided design systems (CAD) is a modern design tool. Today there are many reviews of modern CAD-systems. The authors present the comparisons of the different parameters and criteria in order to find the optimal system for given design conditions.

The purpose of this article is a brief review of existing CAD-systems and their methods for creating models of complex geometric objects. The review is conducted from perspective of the usage of software systems in the aerospace industry.

The first part of the article is devoted to the most popular commercial systems (proprietary systems) such as ANSYS, LS-DYNA, NASTRAN (MSC.Nastran), Patran (MSC.Patran), NX AdvancedSimulation, CATIA, ABAQUS, ESAComp, NEiNastran, NXNastran, Femap LIRA, MIRELA, FORTU-FEM. These systems solve a lot of problems in the modeling of physical processes, for example, the strength analysis of construction and stress-strain state, liquids and gases flowing, etc. All of these systems use finite-element methods for solving problems. The most widespread CAE-systems have the ability to import / export data from other systems.

The most common of the considered CAD-systems is a software package CATIA. This CAD/CAM/CAE system that includes all stages of technical preparation of production. That is why it takes about 70% of the world market of computer-aided design and technological preparation of production in the aerospace industry.

For each of the described programs, a specific range of applications can be selected. For example, for analysis the consequences of accidents and catastrophes widely used software package LS-DYNA. ESAComp program is used to work with layered composites. MSC.Patran is integrating environment and graphical user interface for many of finite-element analysis, and also supports access to many, not even a standard, geometric data formats. A distinctive feature of MSC.Nastran program is superelement technology, which allows the user to use prearranged substructures for objects' modeling. Femap is a leading programming environment for solving problems of engineering analysis, based on solver NX Nastran (Femap with NX Nastran). Femap is independent from used CAD-systems and allows to import geometry from most CAD systems such as CATIA, Pro / Engineer, NX, Solid Edge, SolidWorks and AutoCAD. Also the system ABAQUS is worth mentioning, It is cross-platformed, i.e. it runs on all major operating systems. Domestic software systems (Lear, Mirela +, FORTU-FEM) allow to solve a wide class of problems of mechanical engineering, to carry out finite element analysis, and visualize the results.

All CAD-systems shown in the first part of this article give the opportunity to simulate different types of materials (composites, polymers and others). They have graphical tools for analysis of the results and creating a computational model. Moreover, some CAE systems include built-in-language and propose an opportunity for developing user's modules.

The second part of the article is devoted to computer-aided design and open source systems, such as SALOME, Code_Aster, Elmer, FreeFem ++, CAELinux, CalculiX. This kind of software is generally used for educational purposes. These programs use the finite element method as a basic tool for numerical calculations. The software may be integrated with commercial systems. Their main advantage is that these programs have an open source which allows to develop them and realize user's methods.

Key words: finite element method, CAD, modeling, aerospace, review.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование прочности сложных объектов и конструкций является актуальной проблемой современной техники. Существующие исследования сосредоточены как на аналитических методах, так и на численных и гибридных, позволяющих обеспечить необходимый уровень надежности различных систем. Развитие аэрокосмической техники, рост конструктивной сложности летательных аппаратов требуют высокой надежности и долговечности изделий, достичь которых возможно за счет внедрения новых технических решений [1]. Именно поэтому проектирование и создание современных аэрокосмических комплексов предъявляют повышенные требования к расчету их конструкций с точки зрения прочности и надежности.

В такой наукоемкой области, как авиационная и космическая техника, проектирование и производство, а особенно экспериментальные исследования прочности и надежности реальных инженерных конструкций, связаны с большими расходами. В таких условиях процесс оптимизации проектирования возможен при использовании новейших средств

инженерного анализа, основанных на разработке компьютерных моделей проектируемой конструкции. Современным инструментом проектирования комплексов различной сложности для аэрокосмической промышленности является использование систем автоматизированного проектирования (САПР) [2]. В настоящее время уровень компьютерного моделирования позволяет создать, исследовать, анализировать и оптимизировать конструкцию целиком и каждый ее элемент в отдельности при помощи виртуальной среды еще до изготовления дорогостоящей конструкции. Следует отметить, что проектирование сложных конструкций, как правило, требует совместного использования широкого набора различных программных систем инженерного анализа, ответственных за тот или иной этап расчетного сопровождения проекта [3].

В последнее время уровень развития вычислительной техники позволяет выполнять решение задач на прочность конструкций любой формы с применением компьютерного моделирования, которое опирается на аппарат численных методов. Наиболее широкое распространение для решения данного класса задач получил метод конечных элементов (МКЭ), применение которого, с заданными критериями, позволяет эффективно делать расчеты конструкций и решать задачи на прочность и устойчивость, как самих конструкций, так и их отдельных узлов и элементов.

Цель статьи – краткий обзор существующих САПР, используемых ими методов для построения сложных геометрических объектов и расчета прочности сложных конструкций, а также анализ возможности их использования в аэрокосмической отрасли.

ОБЗОР ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСОВ

Существует большое количество различных программных пакетов, которые предназначены для проектирования и разработки объектов производства, для оформления конструкторской и технологической документации. Программные системы, которые применяются для компьютерного моделирования конструкций можно условно разделить на три класса [4]:

1. Программные системы геометрического моделирования и автоматизации конструкторских работ CAD (Computer-Aided Design) – предназначены для решения конструкторских задач и оформления конструкторской документации, моделирования трёхмерной объёмной конструкции, оформления чертежей и текстовой конструкторской документации. Наиболее популярными в мире системами геометрического моделирования являются AutoCAD, CreoParametric (ранее Pro/ENGINEER), SolidWorks и другие. Геометрические модели, разработанные в этих системах, становятся основой конечно-элементной модели конструкции.

2. Программные системы CAE (Computer-Aided Engineering) – системы инженерного моделирования, анализа и оптимизации в задачах автоматизированного проектирования конструкций. Это системы, реализующие метод конечных элементов. Наиболее популярными в мире системами CAE являются программные продукты MSC.Software Corporation – Nastran, Marc, Adams, Dytran, FlightLoads and Dynamics, а также программные продукты других разработчиков, например, ANSYS или Siemens PLM Software.

3. САМ-системы (Computer-aided manufacturing) или компьютерная поддержка изготовления – предназначены для проектирования обработки изделий на станках с числовым программным управлением и выдачи программ для этих станков.

Для более эффективного процесса моделирования современные системы автоматизации инженерных расчётов (CAE) применяются совместно с CAD-системами, а точнее зачастую интегрируются в них, в этом случае получаются гибридные CAD/CAE-системы.

По мере того, как анализ сложных конструкций с использованием конечно-элементных моделей становится обычной процедурой в практике проектирования, требования к аппарату анализа возрастают в различных контекстах. Как известно, для программ, реализующих

МКЭ, четыре части являются общими [5]. Это: ввод данных о модели, библиотека конечных элементов, решение алгебраических уравнений и вывод расчетных данных. Безусловно, принципиальное значение имеет библиотека конечных элементов как фактор, оказывающий влияние не только на круг охватываемых программой задач, но и на вычислительные моменты, – высокоточные конечные элементы позволяют снизить размерность используемых моделей. В то же время, этап решения уравнений является вторым и зачастую главным аспектом, влияющим на вычислительную эффективность системы в целом.

Современный рынок программных комплексов промышленного назначения, в которых реализован метод конечных элементов, предлагает большое разнообразие программ для расчета конструкций. Инструменты, предлагаемые разработчиками, существенно различаются спецификой их применения в предметных областях, степенью автоматизации расчетных процедур, используемым математическим аппаратом, быстродействием, пользовательским интерфейсом, языками программирования и др. Наибольшее распространение из них получили: ABAQUS, ADINA, ASKA/DYNAN, ANSYS, MARC, NASTRAN, PATRAN, EUFEMI, CATIA, COSMOS, HERCULE, MODULEF, SAP-7, LS-DYNA, ЛИРА, ПРОЧНОСТЬ, КОДЕТОМ, МИРЕЛА+, FORTU и ряд других [6-9].

Создание высококачественной продукции для авиационной, космической и других наукоемких отраслей требует проведения большого объема проектных и расчетных работ. Они, в свою очередь, основываются на математическом моделировании поведения материалов и конструкций, процессов изготовления оснастки и самих изделий, механической обработки и контроля качества поверхностей полученных деталей. В настоящее время существует достаточно большой выбор программных комплексов, реализующих качественную проектную работу. Приведем основные известные коммерческие программы и программные пакеты, используемые для решения различных инженерных задач.

Программный комплекс **ABAQUS** является универсальной системой в области конечно-элементных расчетов на прочность, с его помощью можно получать точные и достоверные решения для самых сложных линейных и нелинейных инженерных проблем. Семейство продуктов Abaqus разрабатывается и поддерживается компанией Abaqus, Inc., которая с 2005 г. входит в компанию Dassault Systemes. Это универсальная система КЭ анализа с встроенным пре-/постпроцессором ABAQUS/CAE, которая может быть интегрирована со многими САД-системами и другими программными комплексами. ABAQUS обеспечивает расчёты: напряженно-деформированного состояния, запасов прочности, собственных частот и форм колебаний, анализ устойчивости, исследование установившихся и неуставившихся динамических процессов, решение задач теплопередачи, акустических явлений, нелинейных статических и нелинейных переходных процессов, анализ сложного контактного взаимодействия, расчёт критических частот и вибраций роторных машин, исследование аэроупругости на дозвуковых и сверхзвуковых скоростях. Недавно компания разработчик анонсировала создание совершенно новой универсальной среды моделирования SIMULIA, которая будет обобщать не только все решения компаний Dassault Systemes и Abaqus, Inc. в области прочностных расчетов, но и объединять лучшие решения третьих фирм для создания мощного инструментария для реалистичного проектирования и многодисциплинарного анализа конструкции. Abaqus работает на всех основных платформах/операционных системах и поддерживает встроенный язык программирования PYTHON [6, 8, 10].

Широкое применение у специалистов в сфере автоматизации инженерных расчетов получил программный комплекс **ANSYS**. Данная программа является продуктом компании ANSYS, Inc., это универсальная система КЭ анализа с встроенным пре-/постпроцессором, которая представляет собой многоцелевой пакет для решения сложных проблем физики и механики, предназначенный для расчета задач механики деформируемого твердого тела (МДТТ), температурных задач, задач механики жидкости и газа, а также расчета электромагнитных полей. Кроме того, данный комплекс обладает возможностью расчета связанных задач, в которых результаты расчета для одной среды (например, поля температур) могут быть

использованы в качестве исходных нагрузок для расчета других сред (например, для вычисления распределения напряжений в нагретой детали). Программа располагает широким перечнем расчетных средств, которые могут учесть разнообразные конструктивные нелинейности; дают возможность решить самый общий случай контактной задачи для поверхностей; допускают наличие больших (конечных) деформаций и углов поворота; позволяют выполнить интерактивную оптимизацию и анализ влияния электромагнитных полей, получить решение задач гидро/аэродинамики и многое другое – вместе с параметрическим моделированием, адаптивным перестроением сетки и обширными возможностями создания макрокоманд с помощью языка параметрического программирования (APDL). Многоцелевые функции комплекса ANSYS обеспечиваются наличием в нем многочисленного семейства отдельных специализированных программ, имеющих много общих функций, однако математическое обеспечение которых рассчитано на решение отдельных классов задач. Следует отметить, что большая часть работ по применению ANSYS в аэрокосмической отрасли посвящено вычислительной гидродинамике и CFD-моделям. Для расчета конструкционных задач с тепловым анализом в аэрокосмической отрасли используются, как правило, программные комплексы ANSYS Multiphysics или ANSYS Mechanical [6, 11, 12].

Программный комплекс **LS-DYNA** используется для анализа высоконелинейных динамических процессов и объединяет возможности пре-/постпроцессоров ANSYS APDL и решателя LS-DYNA. Программа интегрирована в среду ANSYS и объединяет в одной программной оболочке традиционные методы решения с обращением матриц, специализированные контактные алгоритмы, множество уравнений состояния и метод интегрирования, что позволяет численно моделировать процессы формирования материалов. Технология ANSYS LS-DYNA – незаменимый инструмент для анализа технологических процессов, анализа аварийных столкновений и ударов при конечных деформациях, при нелинейном поведении материала и контактном взаимодействии большого числа тел в автомобильной, авиационной, трубопроводной промышленности. На сетках сравнительно малой размерности возможно получение практически значимых и физически адекватных результатов для анализа последствий аварий и катастроф, а также предотвращения их возникновения. С 2006 г. решатель LS-DYNA также вошел в состав пакета программ MD NASTRAN [12, 13].

Одной из наиболее популярных САПР верхнего уровня, которые используются специалистами в сфере авиа- и ракетостроения, является комплекс **CATIA** (Dassault Systemes). Это комплексная система автоматизированного проектирования (CAD), технологической подготовки производства (CAM) и инженерного анализа (CAE), включающая в себя передовой инструментарий трёхмерного моделирования, подсистемы программной имитации сложных технологических процессов, развитые средства анализа и единую базу данных текстовой и графической информации. Система позволяет эффективно решать все задачи технической подготовки производства – от внешнего (концептуального) проектирования до выпуска чертежей, спецификаций, монтажных схем и управляющих программ для станков с ЧПУ. В настоящее время CATIA занимает около 70% мирового рынка систем автоматизированного проектирования и технологической подготовки производства в авиакосмической промышленности и более 45% – в автомобилестроении [14].

Система **ESAComp** изначально была создана для авиакосмической отрасли, однако в дальнейшем программа развивалась как универсальный инструмент для профессионалов, имеющих дело со слоистыми композитами, как в промышленности, так и в научно-исследовательской деятельности. Данный программный продукт используется для конечно-элементных расчетов тонкостенных многослойных пластин и оболочек. Из преимуществ этой системы следует отметить наличие многоуровневой базы данных готовых элементов конструкций, базы данных свойств материалов, различные виды анализа (прочностной,

частотный, анализ потери устойчивости) и графическое отображение результатов, автоматическое построение конечно-элементной сетки, наличие интерфейса экспорта/импорта в другие программные системы конечно-элементного анализа [15].

Главный продукт компании MSC.Software Corporation – **MSC.Nastran** вот уже более 40 лет доказывает свою точность и эффективность. Это универсальная система КЭ анализа с пре-/постпроцессором MSC.Patran. Данная система обеспечивает расчёты: напряженно-деформированного состояния, запасов прочности, собственных частот и форм колебаний, анализ устойчивости, исследование установившихся и неустойчивых динамических процессов, решение задач теплопередачи, акустических явлений, нелинейных статических и нелинейных переходных процессов, анализ сложного контактного взаимодействия, расчёт критических частот и вибраций роторных машин, исследование аэроупругости на дозвуковых и сверхзвуковых скоростях. Предусмотрена возможность моделирования практически всех типов материалов, включая композитные и гиперупругие. Расширенные функции включают технологию суперэлементов (подконструкций), модальный синтез и макроязык DMAP для создания пользовательских приложений. MSC.Nastran может использоваться и для оптимизации проектов [12, 16].

Система инженерных расчетов **MSC.Patran** является интегрирующей средой и графической оболочкой для MD Nastran, MSC Nastran, Marc, Dytran, Sinda и других конечно-элементных систем анализа. Patran обеспечивает импорт геометрических моделей из CAD-систем, создание расчетных моделей, запуска их на расчет, графическое отображение и обработку полученных результатов. Помимо доступа к стандартным геометрическим форматам, таким, как Parasolid, ACIS, STEP, IGES и др., предоставляет прямой доступ к наиболее популярным программным пакетам автоматизированного проектирования верхнего уровня: CATIA v4 и v5, NX, CreoParametric (ранее Pro/ENGINEER) [12, 17].

С 2014 г. компания NEi Software, продуктом которой является решатель **NEiNastran**, стала частью Autodesk. Данный продукт является универсальной интегрированной системой конечно-элементного анализа со встроенным графическим интерфейсом пользователя и редактором моделей. NEi Nastran, как решатель, является одной из основных программ в мире CAE. С его помощью можно решать огромные матричные уравнения, что в свою очередь является показателем успешности процесса компьютерного моделирования. Этот продукт позволяет находить решения линейных и нелинейных задач механики деформируемого твёрдого тела; задач механики конструкций, машин, сооружений, установок и приборов, включая задачи механики контактного взаимодействия; задач динамики и прочности, механики композитных структур, теплообмена и акустики, механики жидкости и газа для сложных реальных конструкций и процессов [4, 18].

Инструментом для проведения компьютерного инженерного анализа проектируемых изделий методом конечных элементов от компании Siemens PLM Software является программный комплекс **NXNastran**. Он предназначен для решения статических и динамических линейных и нелинейных задач инженерного анализа; обеспечивает выполнение инженерных расчётов, включая расчёт напряженно-деформированного состояния, собственных частот и форм колебаний, анализ устойчивости, решение задач теплопередачи, исследование установившихся и неустойчивых процессов, нелинейных статических процессов, нелинейных динамических переходных процессов, анализ частотных характеристик, отклика на динамические и случайные воздействия. Система NX Nastran получила широкое распространение в аэрокосмической отрасли, она позволяет проводить анализ напряжений, вибраций, долговечности, передачи тепла, шума/акустики и аэроупругости. Система обеспечивает высокую степень интеграции с большим числом CAE приложений [12, 19].

Независимый от САПР пре-/постпроцессор **Femap** используется для проведения инженерного анализа методом конечных элементов и является связующим звеном между

пользователем и решателем – ядром, осуществляющим вычисления в задачах инженерного анализа. Система Femap на базе решателя NX Nastran позволяет: проводить анализ динамики и прочности конструкций, машин и сооружений, получать решение нестационарных нелинейных пространственных задач, задач механики композитов и композитных структур, строительной и технологической механики, проводить анализ теплопереноса, получать решение задач механики жидкости и газа, связанных многодисциплинарных задач. Используется для моделирования сложных конструкций, систем и процессов, таких, как спутники, самолёты, электронная аппаратура военного назначения, тяжёлое строительное оборудование, подъёмные краны, морской транспорт и технологическое оборудование [19].

Программный комплекс **Ли́ра** украинско-российских разработчиков является современным инструментом для численного исследования прочности и устойчивости конструкций и их автоматизированного конструирования. Одно из наиболее важных свойств этого пакета заключается в возможности расчета арматуры для железобетонных элементов (как плоских пластин, так и стержней) с учетом всевозможных загрузок и комбинаций усилий и различных воздействий [20].

Украинский программный комплекс **МИРЕЛІА+**, разработанный под руководством профессора В.В. Киричевского, является развитием системы КОДЕТОМ и позволяет автоматизировать проектирование сложных конструкций из эластомерных материалов и анализировать напряженно-деформированное состояние. Решение задач проводится методом конечных элементов [21].

Система **FORTU-FEM** является программным комплексом, который разработан для автоматизации анализа сложных механических процессов на базе МКЭ и позволяет решать широкий класс задач машиностроения. Программа позволяет генерировать в автоматическом режиме дискретные модели сложных трехмерных тел, проводить конечно-элементный анализ и визуализировать результаты. Данный программный комплекс имеет встроенный объектно-ориентированный язык программирования FORTU-3, который является методом описания общей постановки задачи и метода ее расчета. В процессе расчета пользователь имеет возможность выбирать тип конечного элемента, вид функционала, который минимизируется. В состав FORTU-FEM входят две подсистемы: подсистема дискретизации произвольной геометрической области на конечные элементы и подсистема анализа, позволяющая эффективно исследовать полученные численные результаты [22].

Одним из наиболее популярных программных комплексов, предлагаемых на рынке проектирования авиаиндустрии, является **NX Advanced Simulation** (компания Siemens PLM Software) – единая среда инженерного анализа, объединяющая в себе широкий набор инструментов для постановки и анализа практически всех задач моделирования механического поведения конструкций, гидрогазодинамики и теплопереноса в авиационной индустрии [6, 8]. Эти инструменты позволяют решать сложнейшие инженерные задачи в единой инженерной среде с минимальными временными затратами. Набор решений для авиационной промышленности включает следующие модули: *NX Nastran Basic* (входит в NX Advanced Simulation), *NX Nastran Advanced Non-Linear*, *NX Nastran Dynamic Response*, *NX Response Simulation*, *NX Nastran Rotor Dynamics*, *NX Nastran Superelements*, *NX Nastran Aeroelasticity*, *NX Laminate Composites*, *NX Thermal/NX Flow*, *NX Space System Thermal*, *NX Electronic System Cooling*. Следует отметить, что использование расчетных модулей NX Advanced Simulation и NX Flow совместно с NX Motion, интегрированных в единую платформу NX, позволяет специалисту определять напряженно-деформированное состояние исследуемого механизма в любом интересующем положении с учетом аэродинамических характеристик без необходимости перестройки КЭ модели и переопределения граничных условий. Возможности NX Advanced Simulation позволяют просматривать результаты динамического анализа, как в графическом виде, так и в виде распределений полей различных величин, что помогает определять работоспособность и пригодность спроектированных изделий, подверженных динамическим воздействиям. Анализ полученной

информации может использоваться для доработки или разработки нового изделия с целью обеспечения качества конструкции. Библиотека конечных элементов достаточно обширна, помимо стандартных типов элементов, используемых в решателе NX Nastran, существуют звукопоглощающие, демпфирующие и нелинейные упругие элементы [23].

Недостатком любых коммерческих пакетов является закрытый код, что делает недоступной модификацию даже отдельных модулей. Поэтому отдельного внимания заслуживают так называемые свободные пакеты конечно-элементного анализа, особенно программы, имеющие открытый код. Такие программные комплексы, как **Elmer**, **Code_Aster**, **Salome** и др. становятся конкурентами коммерческим САПР, поскольку дают возможность пользователям реализовывать свои алгоритмы анализа.

Программный комплекс **Elmer** позволяет строить одно-, двух- и трехмерные физические модели для решения задач гидродинамики, строительной механики, электродинамики, теплопереноса, акустики и т. д. Состоит из нескольких модулей: физические модели, граничные и начальные условия задаются в модуле ElmerGUI; численное решение задачи выполняется в ElmerSolver, а результаты обрабатываются в Elmerpost. Задачи описываются в виде легко читаемых текстовых файлов, есть графический интерфейс, позволяющий включить функции распараллеливания по MPI [24].

Среда **FreeFEM++** предназначена для численного решения уравнений в частных производных с помощью МКЭ. Она поддерживает решение линейных и нелинейных задач в двух- и трехмерных областях, имеет свой язык программирования транслируемый в C++, типизированный C-подобный, со встроенными типами триангуляций и пространств конечных элементов, код получается понятен, краток и приближен к математической записи задачи в слабой форме – но поддерживаются только треугольные элементы (включая DG- и мини-элементы), хорошая документация, много примеров использования на разных задачах, кроссплатформенный инструмент [25].

Возможности программного комплекса **Code_Aster** включают расчеты сложных механических моделей для одно-, двух- и трехмерных задач механики сплошных сред, термо- и гидродинамики, акустики, магнетизма и других, заметна ориентация проекта на инженерные приложения, поддерживается язык программирования Python, документация преимущественно на французском языке. Некоторые специалисты считают, что по своим возможностям данный программный комплекс является прямым конкурентом для ANSYS, NASTRAN, ABAQUS [26].

Платформа **Salome** является бесплатным программным обеспечением, которое предоставляет платформу для пре-/постпроцессорной обработки числового моделирования. Особенностью данной системы является отсутствие решателя (предполагается, что пользователь добавит нужный ему решатель, например Code_Aster). С помощью программы возможно трёхмерное моделирование (поэтапное конструирование, импортирование, исправление; визуализация; управление вычислительными схемами; постобработка). Платформа имеет внутренний язык Python, а также предоставляет возможность написания сценариев и модулей на C++ [26-29].

Дистрибутив от Linux с открытым исходным кодом **CAELinux** широко используется для инженерного расчетного анализа и проектирования [30]. Дистрибутив включает большое количество приложений для выполнения различных проектных, расчетных задач и моделирования. **CalculiX** входит в состав CAELinux в качестве дистрибутива. CalculiX – открытый, свободный программный пакет, предназначенный для решения линейных и нелинейных трёхмерных задач механики твёрдого деформируемого тела с помощью метода конечных элементов. Изначально создавался для Linux, в настоящее время существуют сборки для Windows и MacOS [31].

ВЫВОДЫ

Авиакосмическая техника представляет собой сложную техническую систему, состоящую из элементов, объединенных связями и оказывающих друг на друга определенное влияние. Система выступает как единое целое, но каждая ее часть имеет свое функциональное назначение. На сегодняшний день проектирование всех его компонентов осуществляется автоматизировано, то есть все проектные решения или их часть получают с помощью САПР. Ядром используемых в авиастроении САПР является система геометрического моделирования. Следует отметить, что большинство существующих и рассмотренных программных комплексов компьютерного инжиниринга позволяют как можно более полно охватить весь процесс проектирования авиационной и космической техники. В то же время, каждая из программ обладает некоторыми ярко выраженными преимуществами. Например, в ANSYS, LS-DYNA, MSC.Patran, MSC.Nastran, ABAQUS это удобный интерфейс пользователя (поставляется компанией MSC), более широкие возможности препроцессора. Систему ABAQUS можно выделить по скорости выполнения численного нелинейного анализа, а также по широкому выбору нелинейных моделей материалов, в частности, полезных при моделировании нелинейного напряженно деформированного состояния. Основное преимущество систем с открытым кодом, таких, как Salome, это создание среды, в которой пользователь сможет выполнять обработку данных в привычной оболочке, вне зависимости от используемого решателя. В таких программах существует возможность подключить к оболочке любые решатели, например, ANSYS и других коммерческих пакетов с помощью написания специальных модулей или управляющих сценариев.

Следует отметить, что большинство предложенных для обзора систем являются кроссплатформенными, имеют хорошо развитый графический интерфейс с поддержкой необходимых форматов данных для обмена между CAD/CAE-программными пакетами, высокую надежность конечно-элементных расчетов и обеспечивают требуемую точность при детальном расчете полей напряжений и деформаций. При этом системы открыты для возможности интеграции с другими программами (например, комплекс ESAComp отлично взаимодействует с ANSYS, т.е. данные о материалах могут экспортироваться в ANSYS для композитных твердотельных элементов и оболочек, затем результаты конечно-элементного анализа в ANSYS могут быть переданы в ESAComp для постпроцессинга). Кроме того, рассмотренные программные комплексы обеспечивают поддержку средств пользовательского программирования посредством встроенных средств автоматизации вычислительных процессов (язык Python для ABAQUS, Salome; язык ADPL для ANSYS; язык PCL для Patran).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровский С. С. Влияние структурно-технологических факторов на прочностные характеристики деталей [Электронный ресурс] / С. С. Дубровский, А. Ю. Кривенко, Н. А. Ковешников // Авиационно-космическая техника и технология. – 2013. – № 5(102). – Режим доступа : <http://www.khai.edu/csp/nauchportal/Arhiv/AKTT/2013/AKTT513/Dubrovsk.pdf>.
2. Горбунов А. А. Использование технологий САПР при проектировании сложных технических авиационных изделий / А. А. Горбунов, А. Д. Припадчев // Высокие технологии, экономика, промышленность : сборник статей тринадцатой международной научно-практической конференции. – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – Т. 1. – С. 50-52.
3. Пересыпкин К. В. Электронный курс лекций «Компьютерный инженерный анализ» [Электронный ресурс] / К. В. Пересыпкин, В. П. Пересыпкин, Е. А. Иванова. – Самара : Изд-во СГАУ, Б. г. – 94 с. – Режим доступа : http://www.ssau.ru/files/education/uch_posob/Eлектронный%20курс.%20Компьютерный-Пересыпкин%20KB.pdf.
4. Васильев В. А. О классификации компьютерных программ [Электронный ресурс] / В. А. Васильев, М. А. Калмыкова // Современные научные исследования и инновации : интернет-журн. – 2013. – Вып. 2. – Режим доступа: <http://web.snauka.ru/issues/2013/02/20478>.

5. Рычков С. П. Алгоритмы метода конечных элементов / С. П. Рычков. – СПб : BHV, 2006. – 800 с.
6. Павлов С. CAE-технологии в 2013 году : обзор достижений и анализ рынка [Электронный ресурс] / С. Павлов // CAD/CAM/CAE Observer. – 2014. – Вып. 4(88). – Режим доступа : <http://www.cadcamcae.lv/N88/08-18.pdf>.
7. Киричевский В. В. Развитие метода конечных элементов и его применение в САПР / В. В. Киричевский, С. И. Гоменюк, С. Н. Гребенюк, Р. В. Киричевский // Вісник Запорізького національного університету : Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2006. – Вып. 1. – С. 38-56.
8. Синеокий Т. В. Обзор CAD/CAM/CAE-систем [Электронный ресурс] / Т. В. Синеокий. – Режим доступа : <http://www.cad.dp.ua/obzors/obzor-cad.php>.
9. Селяков М. Ю. Отечественные и зарубежные CAD/CAM системы / М. Ю. Селяков // Успехи современного естествознания. – 2011. – Вып. 7. – С. 193-197.
10. Золочевский А. А. Введение в ABAQUS : метод. пособ. / А. А. Золочевский, А. А. Беккер. – Х. : Бизнес Инвестор Групп, 2011. – 47 с.
11. Басов К. А. ANSYS справочник пользователя / К. А. Басов. – М. : ДМК Пресс, 2005. – 640 с.
12. Чумаченко Е. Н. Математическое моделирование в нелинейной механике (обзор программных комплексов для решения задач моделирования сложных систем) / Е. Н. Чумаченко, Т. В. Полякова, С. А. Аксенов [и др.]. – М. : ИКИ РАН, 2009. – 42 с.
13. Муйземнек А. Ю. Пользователям программы LS-DYNA. Новая книга по LS-DYNA / А. Ю. Муйземнек, А. А. Богач. – Пенза : Информационно-издательский центр ПГУ, 2005. – 106 с.
14. Басов К. А. CATIA V5 Геометрическое моделирование / К. А. Басов. – М. : ДМК Пресс, 2008. – 269 с.
15. ESAComp [Electronic resource]. – Mode of access : <http://fea.ru/article/innovations-esacomp>.
16. Шимкович Д. Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows / Д. Г. Шимкович. – М. : ДМК Пресс, 2001. – 448 с.
17. Гуменюк А. Patran-Sinda-Msc Thermica – специализированный комплекс для орбитального теплового анализа конструкции космического аппарата / А. Гуменюк // CADmaster. – 2014. – № 2(75). – С. 50-58.
18. Васильев В. А. Анализ и выбор программных продуктов для решения инженерных задач приборостроения [Электронный ресурс] / В. А. Васильев, М. А. Калмыкова // Современная техника и технологии. – 2013. – Вып. № 3. – Режим доступа : <http://technology.snauka.ru/2013/03/1702>.
19. Рычков С. П. Моделирование конструкций в среде Femap with NX Nastran / С. П. Рычков. – М. : ДМК Пресс, 2013. – 784 с.
20. Стрелец-Стрелецкий Е. Б. ЛИРА 9.4. Руководство пользователя. ОСНОВЫ. Учебное пособие / Е. Б. Стрелец-Стрелецкий, В. Е. Боговис, Ю. В. Гензерский [и др.]. – К. : «ФАКТ», 2008. – 164 с.
21. Киричевский В. В. Система «МИРЕЛА» для исследования прочности, долговечности и разрушения конструкций из эластомерных композитных материалов в условиях нелинейного деформирования на основе метода конечных элементов / В. В. Киричевский, Б. М. Дохняк, Ю. Г. Козуб [и др.] // Тр. междунар. конф. «Прогрессивная техника и технология машиностроения и сварочного производства». – К. : КПИ, 1998. – Т. 3. – С. 136-139.
22. Гоменюк С. І. Об'єктно-орієнтовані моделі і методи аналізу механічних процесів у системі автоматизації проектування : Автореф. дис... д-ра техн. наук : 05.13.12 / С. І. Гоменюк ; Харк. нац. ун-т радіоелектрон. – Х., 2004. – 34 с.
23. Гончаров П. С. NX Advanced Simulation. Практическое пособие / П. С. Гончаров, И. А. Артамонов, Т. Ф. Халитов [и др.]. – М. : ДМК Пресс, 2014. – 112 с.

24. Elmer [Electronic resource]. – Mode of access : <http://www.csc.fi/english/pages/elmer>.
25. Hecht F. FreeFem++ [Electronic resource] / F. Hecht. – Paris. – Mode of access : <http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf>.
26. Dharmit Thakore. Finite Element Analysis with Open Source Software [Electronic resource] / Dharmit A. Thakore. – Mode of access : <http://engineering.moonish.biz/store/books/FEAusingOSS-Ed2-Preview.pdf>.
27. An open-source finite element library Software [Electronic resource]. – Mode of access : <http://download.gna.org/getfem/html/homepage/>.
28. Бикмеев А. Моделирование в САЕ Salome : Часть 1. Общие принципы [Электронный ресурс] / А. Бикмеев. – Режим доступа : http://www.ibm.com/developerworks/ru/library/lsalome_01/.
29. SALOME. The Open Source Integration Platform for Numerical Simulation [Electronic resource]. – Mode of access : <http://www.salome-platform.org/>.
30. Welcome to CAELinux [Electronic resource]. – Mode of access : <http://caelinux.com/CMS/>.
31. Dhondt G. CalculiX. A Free Software Three-Dimensional Structural Finite Element Program [Electronic resource] / G. Dhondt, K. Wittig. – Mode of access : <http://www.dhondt.de/>.

REFERENCES

1. Dubrovskiy, S.S., Krivenko, A.Yu. and Koveshnikov, N.A. (2013), “The impact of structural and technological factors on the strength characteristics of the parts”, *Aerospace Engineering and Technology*, no. 5(102), available at: <http://www.khai.edu/csp/nauchportal/Arhiv/AKTT/2013/AKTT513/Dubrovsk.pdf> (access January 9, 2016).
2. Gorbunov, A.A, and Pripadchev, A.D. (2012), “The use of CAD technology in designing complex technical aeronautical products”, *Vysokie tekhnologii, ekonomika, promyshlennost: sbornik statey trinadtsatoy mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii*, vol. 1, pp. 50-52.
3. Peresypkin, K.V., Peresypkin, V.P. and Ivanova, E.A. (2010), “E-lectures “Computer engineer””, available at: http://www.ssau.ru/files/education/uch_posob/Электронный%20курс.%20Компьютерный-Пересыпкин%20КВ.pdf (access January 19, 2016).
4. Vasilev, V.A. and Kalmykova, M.A. (2013), “On the classification of computer programs”, *Modern scientific research and innovation: the Internet magazine*, issue 2, available at: <http://web.snauka.ru/issues/2013/02/20478> (access January 6, 2016).
5. Rychkov, S.P. (2006), *Algoritmy metoda konechnykh elementov* [Algorithms for the finite element method], BHV, St. Petersburg, Russia.
6. Pavlov, S. (2014), “CAE-technology in 2013: an overview of the achievements and market analysis”, *CAD/CAM/CAE Observer*, issue 4(88), available at: <http://www.cadcamcae.lv/N88/08-18.pdf> (access January 20, 2016).
7. Kirichevskiy, V.V., Gomenyuk, S.I., Grebenyuk, S.N. and Kirichevskiy, R.V. (2006), “The development of the finite element method and its application in CAD”, *Visnik Zaporizkogo natsionalnogo universitetu: Zbirnik naukovih statey. Fiziko-matematichni nauki*, issue 1, pp. 38-56.
8. Sineokiy, T.V. “Review CAD/CAM/CAE-systems”, available at: <http://www.cad.dp.ua/obzors/obzor-cad.php> (access January 19, 2016).
9. Selyakov, M.Yu. (2011), “National and foreign CAD/CAM system”, *Uspekhi sovremennogo estestvoznaniya*, vol. 7, pp. 193-197.
10. Zolochevskiy, A.A. and Bekker, A.A. (2011), *Vvedenie v ABAQUS: metodicheskoe posobie* [Introduction to ABAQUS: methodical manual], Biznes Invest Grupp, Kharkov, Ukraine.
11. Basov, K.A. (2011), *ANSYS. Spravochnik polzovatelya* [ANSYS user's guide], DMK press, Moscow, Russia.
12. Chumachenko, E.N., Polyakova, T.V., Aksenov, S.A., Bober, S.A., Logashina, I.V., Korzo, V.N. and Erokhina, O.S. (2009), *Matematicheskoe modelirovanie v nelineynoy mekhanike (obzor programnykh kompleksov dlya resheniya slozhnykh sistem)* [Mathematical modeling in nonlinear mechanics (review

- of software packages for the solution of complex systems modeling problems)], IKI RAN, Moscow, Russia.
13. Muyzenmek, A.Yu. and Bogach, A.A., (2005), *Polzovatelyam programmy LS-DYNA. Novaya kniga po LS-DYNA* [The users of the program LS-DYNA. New book on LS-DYNA], Informatsionno-izdatil'skiy tsentr PGU, Penza, Russia.
 14. Basov, K.A. (2008), *CATIA V5 Geometricheskoe modelirovanie* [CATIA V5 Geometric modeling], DMK Press, Moscow, Russia.
 15. ESAComp, available at: <http://fea.ru/article/innovations-esacomp> (access January 19, 2016).
 16. Shumkovich, D.G., (2001), *Raschet konstruksiy v MSC/NASTRAN for Windows* [Calculation of constructions MSC/NASTRAN for Windows], DMK Press, Moscow, Russia.
 17. Gumenuk, A. (2014), "Patran-Sinda-Msc Thermica – specialized complex for thermal analysis of the orbital spacecraft design", *CADmaster*, no. 2(75), pp. 50-58.
 18. Vasilev, V.A. (2013), "Analysis and selection of software to solve engineering problems Instrumentation", *Sovremennaya tekhnika i tekhnologii*, issue 3, available at: <http://technology.snauka.ru/2013/03/1702> (access January 21, 2016).
 19. Rychkov, S.P. (2013), *Modelirovanie konstruksiy v srede Femap with NX Nastran* [Modeling constructions in an environment Femap with NX Nastran], DMK Press, Moscow, Russia.
 20. Strelets-Strelet'skiy, E.B., Bogovis, V.E., Genzerskiy, Yu. V., Geraymovish, Yu.D., Marchenko, D.V. and Titok, B.P. (2008), *LIRA 9.4. Rukovodstvo polzovatelya. Osnovy. Uchebnoe posobie* [LIRA 9.4. User guide. BASIS. Tutorial], "Fakt", Kiev, Ukraine.
 21. Kirichevskiy, V.V., Dohnyak, B.M., Kozub, Yu.G. and other (1998), "'MIRELA" system for the study of the strength, durability and fracture constructions of elastomeric composite materials in a non-linear deformation based on the finite element method", *Progressivnaya tekhnika i tekhnologiya mashinostroeniya I svarochnogo proizvodstva. Tr. mezhdunar. konf.* [Progressive technique and technology of mechanical engineering and welding engineering. Third International Conference], vol. 3, Kiev, KPI, pp. 136-139.
 22. Gomenyuk, S.I. (2004), "Object-oriented models and methods of analysis of mechanical processes in system design automation", Thesis abstract for Cand. Sc. (Engineering.), 05.13.12, Kharkivskiy natsionalniy universitet radioelektroniki, Karkiv, Ukraine.
 23. Goncharov, P.S., Artamonov, I.A., Khalitov, T.F. and other (2014), *NX Advanced Simulation. Prakticheskoe posobie* [NX Advanced Simulation. Practical handbook], DMK Press, Moscow, Russia.
 24. Elmer, available at: <http://www.csc.fi/english/pages/elmer> (access January 21, 2016).
 25. Hecht, F. FreeFem++, available at: <http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf> (access January 21, 2016).
 26. Dharmit, Thakore (2014), Finite Element Analysis with Open Source Software, available at: <http://engineering.moonish.biz/store/books/FEAusingOSS-Ed2-Preview.pdf> (access January 21, 2016).
 27. An open-source finite element library Software, available at: <http://download.gna.org/getfem/html/homepage/> (access January 21, 2016).
 28. Bikmeev, A. "Modeling in CAE Salome: Part 1: General principles", available at: http://www.ibm.com/developerworks/ru/library/lalome_01/ (access January 21, 2016).
 29. SALOME. The Open Source Integration Platform for Numerical Simulation, available at: <http://www.salome-platform.org/> (access January 21, 2016).
 30. Welcome to CAELinux, available at: <http://caelinux.com/CMS/> (access January 21, 2016).
 31. Dhondt, G. and K. Wittig (1998), CalculiX. A Free Software Three-Dimensional Structural Finite Element Program, available at: <http://www.dhondt.de/> (access January 21, 2016).

УДК 534.2; 519.62

АНАЛИЗ БЕГУЩИХ И СТОЯЧИХ ВОЛН В МОДЕЛИ ДНК ПЕЙРАРА-БИШОПА-ДОКСУА

Голоскубова Н. С., Михлин Ю. В.

*Национальный технический университет «ХПИ»,
ул. Кирпичева, 21, г. Харьков, 61002, Украина*

muv@kpi.kharkov.ua

Рассматривается модель Пейрара-Бишопа-Доксуа (модель ПБД), описывающая динамику молекулы ДНК. Исследованы два предельных случая: первый случай – бегущие волны в длинноволновом приближении (сверхнизкие частоты), второй – наиболее высокочастотные формы колебаний, а именно, антифазные формы колебаний. Для обоих случаев получены нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейными членами степени не выше третьей. Решение системы уравнений движения, которое получено в аналитическом виде методом малого параметра, сравнивается с численными результатами, полученными методом Рунге-Кутты четвертого порядка.

Ключевые слова: модель ПБД, длинноволновое приближение, антифазные формы колебаний.

АНАЛІЗ БІГУЧИХ ТА СТОЯЧИХ ХВИЛЬ У МОДЕЛІ ДНК ПЕЙРАРА-БИШОПА-ДОКСУА

Голоскубова Н. С., Міхлін Ю. В.

*Національний технічний університет «ХПИ»,
вул. Кирпичова, 21, м. Харків, 61002, Україна*

muv@kpi.kharkov.ua

Розглянуто модель Пейрара-Бішопа-Доксуа (модель ПБД), що описує динаміку молекули ДНК. Досліджено два граничних випадки: перший випадок – бігучі хвилі у довгохвильовому наближенні (наднизькі частоти), другий – найбільш високочастотна форма коливань, а саме, антифазні форми коливань. Для обох випадків отримані нелінійні системи звичайних диференціальних рівнянь з нелінійними членами степеня не вище третього. Розв'язок системи рівнянь руху в аналітичному вигляді, що був отриманий за допомогою метода малого параметру, порівнюється з результатами, що були отримані методом Рунге-Кутта четвертого порядку.

Ключові слова: модель ПБД, довгохвильове наближення, антифазні форми коливань.

ANALYSIS OF TRAVELLING AND STANDING WAVES IN THE DNA MODEL BY PEYRARD-BISHOP-DAUXOIS

Goloskubova N. S., Mikhlin Yu. V.

*National Technical University «KhPI»,
21 Kirpichev str., Kharkiv, 61002, Ukraine*

muv@kpi.kharkov.ua

The model by Peyrard-Bishop-Dauxois (the PBD model) which describes the DNA molecule nonlinear dynamics, is considered. This model represents two chains of rigid disks connected by nonlinear springs. An interaction between opposite disks of different chains is modeled by the Morse potential. Solutions of equations of motion are obtained analytically in two approximations of the small parameter method for two limit cases. The first one is the long-wavelength limit of traveling waves, when frequencies of vibrations are small. Dispersion relations are obtained also for the long-wavelength limit by the small parameter method. The second case is a limit of high frequency standing waves in the form of out-of-phase vibration modes. Two such out-of-phase modes are obtained; it is selected one of them, which has the larger frequency. In both cases systems of nonlinear ODEs are obtained. Nonlinear terms are presented in the Taylor series expansion, where terms up to third degree by displacement are saved. The analytical solutions are compared with checking numerical simulation obtained by the Runge-Kutta method of the four order. The comparison shows a good exactness of these approximate analytical solutions.

Key words: PBD model, long-wavelength approximation, out-of-phase vibration modes.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие современной нанороботехники является важным направлением современной прикладной науки. В частности, речь идет об использовании нанороботов в медицине. Одно из перспективных направлений проектирования нанороботов связано с их проектированием на основе молекул ДНК. Решение этой проблемы требует как экспериментальных, так и теоретических исследований свойств молекулы ДНК. Важной задачей является исследование распространения волн в этой молекуле.

Детальный обзор моделей нелинейной динамики ДНК дан в монографии [1] и обзорах [2, 3]. Одной из наиболее удачных для анализа моделей молекулы ДНК является модель ПБ, разработанная Пейраром и Бишопом [4]. Две цепочки ДНК в данной модели представлены связанными цепочками твердых дисков, причем связи внутри пар оснований описываются потенциалом Морзе. При этом стэкинг-взаимодействия учтены через обычный гармонический потенциал. Рассматривалась так называемая денатурация молекулы ДНК. Авторы модели ПБ в первую очередь интересовались лишь расхождением цепей, поэтому фактически рассматривалась одномерная динамика молекулярной цепочки. В связи с несовершенством модели и расхождениями с экспериментом в модель ПБ был феноменологически введен ангармонический потенциал, более адекватно описывающий стэкинг-взаимодействия. Эта модель получила название модели ПБД (модель Пейрара-Бишопа-Доксуа) [5]. Волновые процессы в моделях ПБ и ПБД анализировались в некоторых последующих работах, что отражено в публикациях [1-3]. В некоторых публикациях последних лет были рассмотрены и уединенные волны – так называемые дискретные бризеры в моделях ПБ и ПБД [6, 7].

В данной работе приведены результаты исследования некоторых типов волн в ПБД-модели молекулы ДНК. А именно, методом малого параметра построены низкочастотные бегущие волны в длинноволновом приближении. Аналитическое решение сравнивается с результатами, полученными методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Получены дисперсионные соотношения длинноволнового приближения. Построены также наиболее высокочастотные стоячие волны в виде антифазных форм колебаний.

1. МОДЕЛЬ ПЕЙРАРА-БИШОПА-ДОКСУА

Как было указано выше, ПБД-модель представляет собой две цепочки дисков, связанных между собой продольными и поперечными пружинами (рис. 1).

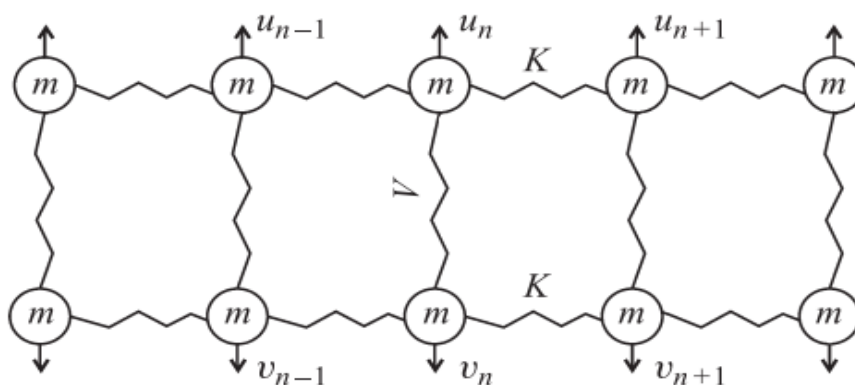


Рис. 1. Модель ДНК Пейрара-Бишопа-Доксуа

Взаимодействие между узлами разных цепочек моделируется так называемым потенциалом Морзе, $V = D(\exp(-a(u_n - v_n)) - 1)^2$, который имитирует водородные связи, соединяющие основания комплементарных пар. Здесь D – энергия диссоциации полинуклеотидных цепочек, a – параметр, обратный длине (пространственный масштаб потенциала). Используя

замену $z_n = \frac{u_n + v_n}{\sqrt{2}}$, $y_n = \frac{u_n - v_n}{\sqrt{2}}$, получим уравнения движения рассматриваемой модели ПБД в следующей форме [5]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 z_n}{dt^2} = S(z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1}) + S\rho \left\{ e^{-\gamma(z_{n+1} + z_n)} (z_{n+1} - z_n) \left[\frac{1}{2} \gamma (z_{n+1} - z_n) + 1 \right] + \right. \\ \left. + e^{-\gamma(z_n + z_{n+1})} (z_n - z_{n-1}) \left[\frac{1}{2} \gamma (z_n - z_{n-1}) - 1 \right] \right\}, \\ \frac{d^2 y_n}{dt^2} = S(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + S\rho \left\{ e^{-\gamma(y_{n+1} + y_n)} (y_{n+1} - y_n) \left[\frac{1}{2} \gamma (y_{n+1} - y_n) + 1 \right] + \right. \\ \left. + e^{-\gamma(y_n + y_{n-1})} (y_n - y_{n-1}) \left[\frac{1}{2} \gamma (y_n - y_{n-1}) - 1 \right] \right\} - 2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}y_n} [1 - e^{-\sqrt{2}y_n}], \end{cases} \quad (1)$$

где $S = \frac{K}{da^2}$, $\gamma = \frac{\alpha}{a}$ – безразмерные параметры; K – константа, характеризующая взаимодействие между парами оснований вдоль цепочки; ρ – параметр ангармонизма, характеризующий величину нелинейности в системе; α – параметр, который учитывает уменьшение стекинг-взаимодействия; d – энергия диссоциации полинуклеотидных цепочек.

2. ДЛИННОВОЛНОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Рассматривая случай длинноволнового приближения (случай сверхнизких частот), предполагаем, что значения $1/a$ достаточно малы по отношению к длине волны. Переход к распределенной системе сделаем с использованием следующих приближений относительно расстояний между частицами цепочки:

$$\begin{aligned} z_{i+1} - z_i &\approx a \frac{dz}{dx}, & y_{i+1} - y_i &\approx a \frac{dy}{dx}; \\ y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} &\approx a^2 \frac{d^2 y}{dx^2}, & z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1} &\approx a^2 \frac{d^2 z}{dx^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Кроме того, используются следующие приближения: $y_i \sim y(x)$; $y_{i+1} \sim y(x)$; $z_i \sim z(x)$; $z_{i+1} \sim z(x)$. Учитывая все приведенные приближения, получим из системы (1) следующую систему уравнений длинноволнового приближения:

$$\begin{cases} \frac{d^2 z}{dt^2} = \beta \frac{d^2 z}{dx^2} + \sigma e^{-2\gamma z} \left(\frac{dz}{dx} \right)^2, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = \beta \frac{d^2 y}{dx^2} - 2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}y} [1 - e^{-\sqrt{2}y}] + \sigma e^{-2\gamma y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2, \end{cases} \quad (3)$$

где $\beta = a^2 S$, $\sigma = \gamma \beta \rho$ – безразмерные параметры.

Рассмотрим бегущие волны в следующем виде: $z = \Phi_1(\varphi)$; $y = \Phi_2(\varphi)$, где фаза волны $\varphi = kx - \omega t$. Для этих решений из уравнений (3) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Кроме того, предполагая, что значения величин Φ_1 и Φ_2 не слишком велики, разложим экспоненты в ряды Тейлора. Сохраняя нелинейные члены не выше третьей степени по Φ_1 , $\frac{d\Phi_1}{d\varphi}$ и Φ_2 , $\frac{d\Phi_2}{d\varphi}$, получим:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \Phi_1}{d\varphi^2} (\omega^2 - \beta k^2) - \sigma k^2 \left(\frac{d\Phi_1}{d\varphi} \right)^2 (1 - 2\gamma \Phi_1) = 0, \\ \frac{d^2 \Phi_2}{d\varphi^2} (\omega^2 - \beta k^2) + 4\Phi_2 - 6\sqrt{2}\Phi_2^2 + \frac{28}{3}\Phi_2^3 - \sigma k^2 \left(\frac{d\Phi_2}{d\varphi} \right)^2 (1 - 2\gamma \Phi_2) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Анализ первого уравнения системы (4), который здесь не приводится, показывает, что эти движения неограничены. Это связано с тем, что координата Φ_1 , в соответствие со сделанной ранее заменой, определяется суммой исходных координат. Таким образом, эта координата описывает фактически движения центра масс исходной модели, для которых не введены

ограничения. Поэтому далее мы рассматриваем лишь второе уравнение системы. Поскольку в этом уравнении есть только одно положение равновесия, $\Phi_2 = 0$, уединенные волны в данном длинноволновом приближении отсутствуют. Теперь во второе уравнение системы (4) вводим безразмерный малый параметр ε , который будет характеризовать малость нелинейных членов в рассматриваемой системе. Для анализа полученных уравнений использован метод малого параметра. Вводится также новая независимая переменная τ при помощи преобразования:

$$\varphi = \mu\tau. \tag{5}$$

Здесь μ – некоторая постоянная величина. Она определяется при построении решения, которое должно быть периодическим по τ с периодом 2π . Переходя от аргумента φ к новой независимой переменной τ , получим из второго уравнения системы (4) следующее уравнение (здесь штрих означает дифференцирование по новой независимой переменной τ):

$$\Phi_{2\tau}''(\omega^2 - \beta k^2) + 4\mu^2\Phi_2 + \varepsilon \left[-6\sqrt{2}\Phi_2^2\mu^2 + \frac{28}{3}\mu^2\Phi_2^3 - \sigma k^2\Phi_{2\tau}'^2(1 - 2\gamma\Phi_2) \right] = 0. \tag{6}$$

В соответствии с процедурой метода малого параметра решение уравнения (6) ищем в виде разложений по степеням малого параметра ε :

$$\Phi_2 = \Phi_{20} + \varepsilon\Phi_{21} + \dots; \quad \mu = \mu_0 + \varepsilon\mu_1 + \dots. \tag{7}$$

Подставляя ряды (7) в уравнение (6), получаем:

$$\begin{aligned} & (\Phi_{20}'' + \varepsilon\Phi_{21}'' + \dots)(\omega^2 - \beta k^2) + 2(\mu_0 + \varepsilon\mu_1 + \dots)^2(\Phi_{20} + \varepsilon\Phi_{21} + \dots) + \\ & + \varepsilon \left[\left(-6\sqrt{2}(\Phi_{20} + \varepsilon\Phi_{21} + \dots)^2 + \frac{28}{3}(\Phi_{20} + \varepsilon\Phi_{21} + \dots)^3 \right) (\mu_0 + \varepsilon\mu_1 + \dots)^2 - \right. \\ & \left. - \sigma k^2(\Phi_{20}' + \varepsilon\Phi_{21}' + \dots)^2(1 - 2\gamma(\Phi_{20} + \varepsilon\Phi_{21} + \dots)) \right] = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Далее выделяем слагаемые в двух первых приближениях по малому параметру. В каждом приближении значения μ_0 и μ_1 подбираются так, чтобы исключить появление секулярных членов. Кроме того, в силу консервативности системы при решении может быть использовано дополнительное условие: $\Phi_2'(0) = 0$. Не приводя здесь, для краткости, детали стандартных преобразований, выпишем решение уравнения (8), возвращаясь к аргументу φ . Это решение с точностью до членов порядка ε^2 имеет такой вид:

$$\begin{aligned} \Phi_2 = \alpha_0 \cos\left(\frac{\varphi}{\mu}\right) - \frac{\varepsilon}{(\omega^2 - \beta k^2)} \left[\frac{\alpha_0^2}{\theta} \left(3\sqrt{2}\mu_0^2 + \frac{\sigma k^2}{2} \right) + \frac{\alpha_0^2 \left(3\sqrt{2}\mu_0^2 - \frac{\sigma k^2}{2} \right)}{(\theta - 4)} \cos\left(2\frac{\varphi}{\mu}\right) - \right. \\ \left. - \frac{\alpha_0^3}{(\theta - 9)} \cos\left(3\frac{\varphi}{\mu}\right) \left[\frac{\gamma\sigma k^2}{2} - \frac{7}{3}\mu_0^2 \right] \right] + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{9}$$

где $\mu = \mu_0 + \varepsilon \frac{\alpha_0^2(7\mu_0^2 + \frac{1}{2}\gamma\sigma k^2)}{4\mu_0}$, $\theta = \frac{2\mu_0^2}{\omega^2 - \beta k^2}$, $\mu_0 = \frac{\sqrt{\omega^2 - \beta k^2}}{\sqrt{2}}$.

Разложение (9) является равномерным разложением, поскольку секулярные члены в нем отсутствуют, а поправка первого порядка по ε , при условии относительной малости амплитуды α_0 , оказывается малой по сравнению с главным членом разложения.

Для оценки точности полученного аналитического решения (9) оно сравнивается с численным решением второго дифференциального уравнения системы (4), которое получено методом Рунге-Кутты 4 порядка [8]. Для числового расчета используются начальные условия, которые совпадают с начальными условиями для аналитического решения. Эти начальные условия выбраны таким образом: $\Phi_2(0) = 0.049$, $\Phi_2'(0) = 0$. Числовые параметры здесь

выбраны следующими: $a = 4 A^{-1}$, $K = 0.01 eV/A^2$, $\rho = 3$, $\alpha = 0.8 A^{-1}$ [4]. Кроме того, зададим безразмерный параметр связи $S = 0.0118957$ и параметры $\gamma = 0.2$, $\sigma = 0.14$. Пусть также $\omega = 1.12$, $F = 0.05$, $\varepsilon = 1$. Решение было получено на отрезке $[0, 10]$ с шагом $h = 0.002$. Сравнение аналитического и численного решений, представленное на рис. 2, демонстрирует хорошее совпадение этих решений.

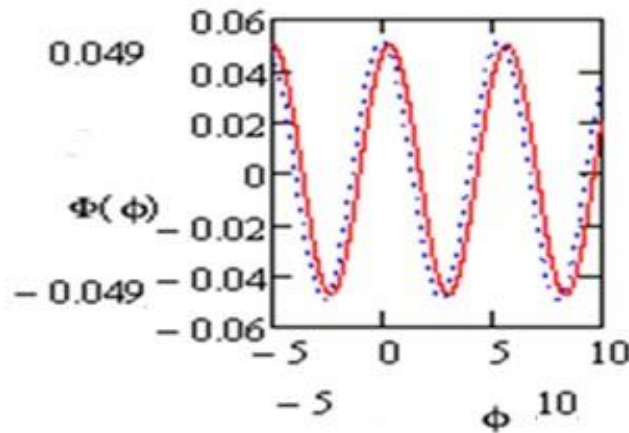


Рис. 2. Сравнение аналитического и численного решений для длинноволнового приближения. Сплошная кривая отвечает численному решению, точки – аналитическому

3. ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ ДЛИННОВОЛНОВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Дисперсионное соотношение для длинноволнового приближения в модели ПБД будет получено методом малого параметра. Рассмотрим второе уравнение системы (4):

$$\frac{d^2\Phi_2}{d\varphi^2}(\omega^2 - \beta k^2) + 4\Phi_2 - 6\sqrt{2}\Phi_2^2 + \frac{28}{3}\Phi_2^3 - \sigma k^2 \left(\frac{d\Phi_2}{d\varphi}\right)^2 (1 - 2\gamma\Phi_2) = 0. \quad (10)$$

Используем следующие ряды по степеням ε_x :

$$\Phi_2 = \Phi_{20} + \varepsilon\Phi_{21} + \dots; \quad \omega^2 = \omega^2(k) = \omega_0^2 + \varepsilon\omega_1^2 + \dots \quad (11)$$

Подставляя разложения (11) в уравнение (10) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим:

при ε^0 :

$$\Phi_{20}''(\omega_0^2 - \beta k^2) + 4\Phi_{20} = 0; \quad (12)$$

при ε^1 :

$$\begin{aligned} \Phi_{21}''(\omega_0^2 - \beta k^2) + 4\Phi_{21} = & -\omega_1^2\Phi_{20}'' + 6\sqrt{2}\Phi_{20}^2 - \\ & -\frac{28}{3}\Phi_{20}^3 + \sigma k^2\Phi_{20}'^2(1 - 2\gamma\Phi_{20}) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

2π – периодическое решение уравнения (13), $\Phi_{20} = B\cos(\varphi)$, может быть получено, если

$$\omega_0^2 = 4 + \beta k^2. \quad (14)$$

При этом уравнение (13) перепишется как:

$$\begin{aligned} \Phi_{21}''(\omega_0^2 - \beta k^2) + 4\Phi_{21} = & -\omega_1^2 B\cos(\varphi) + 6\sqrt{2}B^2\cos^2(\varphi) - \\ & -\frac{28}{3}B^3\cos^3(\varphi) + \sigma k^2 B^2\sin^2(\varphi)(1 - 2\gamma B\cos(\varphi)) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Правая часть уравнения (15) содержит секулярный член, содержащий $\cos(\varphi)$. Это слагаемое может быть устранено подбором параметра ω_1 . В результате получим следующее равенство:

$$\omega_1^2 B - 7B^3 - \frac{1}{2} \sigma k^2 \gamma B^3 = 0. \quad (16)$$

Подставляя теперь значение ω_1^2 из (16) и ω_0^2 из (14) в разложение (11), получаем закон дисперсии рассматриваемой системы, который описывает зависимость частоты системы ω от волнового числа a , в следующем виде:

$$\omega^2 = 4 + \beta k^2 + \varepsilon \left[7B^2 + \frac{1}{2} \sigma k^2 \gamma B^2 \right]. \quad (17)$$

4. АНТИФАЗНЫЕ ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим другой предельный случай, а именно, наиболее высокочастотные антифазные формы колебаний, которые представляют собой **стоячие волны**.

1) Одна из антифазных форм определяется однонаправленными движениями верхнего и нижнего дисков модели молекулы ДНК, которые одновременно являются антифазными по отношению к движениям соседних частиц цепочки; таким образом, имеем: $u_i = v_i$, что отвечает следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} z_i &= z_i(t); \quad y_i = 0, \\ -z_{i-1} &= z_i; \quad -z_{i+1} = z_i. \end{aligned} \quad (18)$$

2) Вторая антифазная форма определяется противоположно-направленными движениями верхнего и нижнего дисков модели молекулы ДНК, то есть, $u_i = -v_i$, что отвечает соотношениям:

$$y_i = y_i(t); \quad z_i = 0; \quad -y_{i-1} = y_i; \quad -y_{i+1} = y_i. \quad (19)$$

Для антифазной формы вида 1) из уравнений движения (1) получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + z[4S(1 + \rho)] - z^2 4S\rho\gamma = 0. \quad (20)$$

Для определения решений уравнения (20) вблизи тривиального положения равновесия используется метод малого параметра. Вводя новую независимую переменную ψ , будем разыскивать решение, которое будет периодическим по ψ с периодом 2π . Для этого используем следующее преобразование:

$$t = v_1 \psi, \quad (21)$$

где v_1 – некоторая постоянная, которая будет определена при построении периодического решения. Переходя от аргумента t к новой независимой переменной ψ , получим вместо уравнения (20) следующее уравнение:

$$\frac{d^2 z}{d\psi^2} + z v_1^2 [4S(1 + \rho)] - 4\varepsilon v_1^2 S\rho\gamma z^2 = 0. \quad (22)$$

Формальный малый параметр ε подчеркивает малость нелинейных членов по сравнению с линейными. Решение уравнения (22), в соответствии с процедурой метода малого параметра, разыскиваем в виде разложений по степеням ε , а именно,

$$z = z_0 + \varepsilon z_1 + \dots; \quad v_1 = v_{10} + \varepsilon v_{11} + \dots. \quad (23)$$

Не приводя здесь детали вычислений, выпишем решение уравнения (22), возвращаясь к аргументу t . Решение имеет такой вид:

$$z = G \cos\left(\frac{t}{v_{10}}\right) + \varepsilon \left[\frac{2S\rho\gamma v_{10}^2 G^2}{\Omega_1} + \frac{2S\rho\gamma v_{10}^2}{(\Omega_1 - 4)} G^2 \cos\left(\frac{2t}{v_{10}}\right) \right] + O(\varepsilon^2), \quad (24)$$

где $v_{10} = \frac{1}{\sqrt{[4S(1+\rho)]}}$, $\Omega_1 = [4S(1+\rho)]v_{10}^2$.

Разложение (24) является равномерным разложением, поскольку секулярные члены в нем отсутствуют, а поправка порядка ε мала по сравнению с главным членом разложения, при условии относительной малости амплитуды G .

Для антифазной формы вида 2) из модели (1) получим такое обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 4Sy[-1 + \rho(\gamma y - 1)] + 2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}y}(e^{-\sqrt{2}y} - 1). \quad (25)$$

Раскладывая экспоненту в ряд и сохраняя члены со степенями не выше третьей по y и $\frac{dy}{dt}$, получаем

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y(4[S(1+\rho) + 1]) - y^2(6\sqrt{2} + 4S\rho\gamma) + \frac{28}{3}y^3 = 0. \quad (26)$$

Это уравнение также не допускает решений в виде уединенных волн, поскольку здесь существует только тривиальное положение равновесия, $y = 0$. Для анализа полученного уравнения (26) используется метод малого параметра. Вводя новую независимую переменную κ при помощи замены:

$$t = v_2\kappa, \quad (27)$$

где v_2 – некоторая постоянная величина, ищем решение, которое является периодическим по κ с периодом 2π .

Далее, переходя от аргумента t к новой независимой переменной κ , перепишем уравнение (26) в такой форме:

$$y''_{\psi} + yv_2^2(4S(1+\rho) + 4) - \varepsilon v_2^2 \left[y^2(6\sqrt{2} + 4S\rho\gamma) + \frac{28}{3}y^3 \right] = 0. \quad (28)$$

Решение уравнения (3) вблизи тривиального положения равновесия разыскиваем с использованием таких разложений по степеням малого параметра ε :

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \dots; \quad v_2 = v_{20} + \varepsilon v_{21} + \dots. \quad (29)$$

Не приводя детали преобразований, выпишем решение, возвращаясь к переменной t :

$$y = F \cos\left(\frac{t}{v_2}\right) + \varepsilon \left[\frac{F^2 v_{20}^2 (3\sqrt{2} + 2S\rho\gamma)}{\Omega_2} + \cos\left(\frac{2t}{v_2}\right) \frac{F^2 (3\sqrt{2} + 2S\rho\gamma) v_{20}^2}{(\Omega_2 - 4)} - \frac{7v_{20}^2 F^3}{3(\Omega_2 - 9)} \cos\left(\frac{3t}{v_2}\right) \right] + O(\varepsilon^2), \quad (30)$$

где $v_2 = v_{20} - \varepsilon \frac{7v_{20}F^2}{2[4+4S(1+\rho)]}$, $v_{20} = \frac{1}{\sqrt{[4+4S(1+\rho)]}}$, $\Omega_2 = [4 + 4S(1+\rho)]v_{20}^2$.

Разложение (30) также является равномерным разложением, поскольку секулярные члены в нем отсутствуют, а поправка порядка ε мала по сравнению с главным членом разложения, при условии относительной малости амплитуды F .

Сравнивая две построенные антифазные формы колебаний, находим, что при значениях параметров: $S = 0.0118957$, $\rho = 3$, $F = 0.05$, наиболее высокочастотной является антифазная форма вида 2), которая имеет частоту $\nu = 2.292$, в отличие от антифазной формы вида 1) с частотой $\nu = 0.488$.

Аналитические решения (24) и (30) сравнивались с численными решениями уравнений (20) и (26), полученными методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Для числовых расчетов использовались те же начальные условия, что и для аналитических решений. Они имеют такой вид: $z(0) = 0.049$, $z'(0) = 0$; те же условия приняты для переменной y . Числовые

параметры при расчете взяты такими же, как и ранее при расчете решений длинноволнового приближения. Графики, отвечающие сравниваемым решениям, показаны на рис. 3.

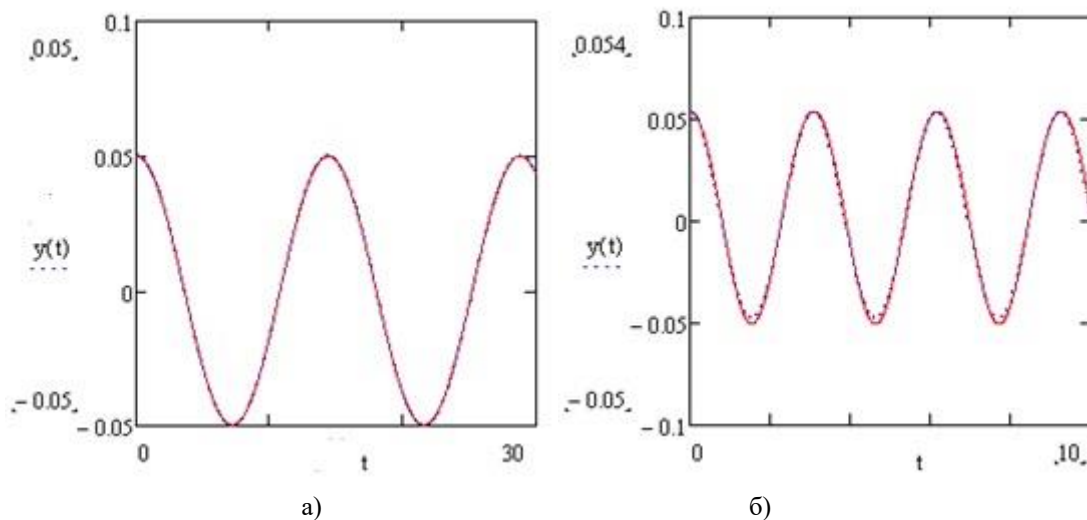


Рис. 3. Графики численных и аналитических решений для антифазных форм колебаний.

Сплошная кривая отвечает численному расчету, пунктирная кривая – аналитическому.

Кривые на рис. 2,а) получены для первой антифазной формы колебаний, а на рис. 2,б) – для второй формы

Очевидно, что графики, построенные с использованием метода Рунге-Кутты, хорошо совпадают с графиками аналитических решений, что указывает на адекватность приближенных аналитических решений.

ВЫВОДЫ

В работе рассмотрены волновые процессы в модели Пейрара-Бишопа-Доксуа (модель ПБД), которая описывает нелинейную динамику молекулы ДНК. С использованием метода малого параметра построены периодические бегущие волны в длинноволновом приближении модели ПБД; здесь малый параметр характеризует малость нелинейных членов в рассматриваемой модели. Также методом малого параметра построены наиболее высокочастотные – антифазные формы колебаний модели ПБД. Проверочные численные расчеты, которые проводились методом Рунге-Кутты 4 порядка, при начальных условиях, совпадающих с начальными условиями аналитических решений, демонстрируют адекватность приближенных аналитических решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yakushevich L. V. *Nonlinear Physics of DNA* / L. V. Yakushevich. – New York : Wiley, 2nd Edition, 2004. – 207 p.
2. Peyrard M. *Nonlinear dynamics and statistical physics of DNA* / M. Peyrard // *Nonlinearity*. – 2004. – No. 17. – P. R1-R40.
3. Шигаев А. С. Теоретические и экспериментальные исследования открытых состояний ДНК / А. С. Шигаев, О. А. Пономарёв, В. Д. Лахно // *Математическая биология и биоинформатика*. – 2013. – Т. 8, № 2. – С. 553-664.
4. Peyrard M. *Statistical Mechanics of a Nonlinear Model for DNA Denaturation* / M. Peyrard, A. R. Bishop // *Physical Review Letters*. – 1989. – V. 62. – P. 2755-2758.
5. Dauxois T. *Entropy-driven DNA denaturation* / T. Dauxois, M. Peyrard, A. R. Bishop // *Physical Review E*. – 1993. – V. 47. – P. R44-R47.
6. Фахретдинов М. И. Дискретные бризеры в модели ДНК Пейрара-Бишопа / М. И. Фахретдинов, Ф. К. Закирьянов // *Журнал технической физики*. – 2013. – Т. 83, вып. 7. – С. 1-5.
7. Фахретдинов М. И. Дискретные бризеры и мультибризеры в модели ДНК Пейрара-Бишопа / М. И. Фахретдинов, Ф. К. Закирьянов, Е. Г. Екомасов // *Нелинейная динамика*. – 2015. – Т. 11, № 1. – С. 77-87.

8. Поршнев С. В. Численные методы на базе Mathcad / С. В. Поршнев, И. В. Беленкова. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 464 с.

REFERENCES

1. Yakushevich, L.V. (2004), [Nonlinear Physics of DNA] Wiley, New York.
2. Peyrard, M. (2004), Nonlinear dynamics and statistical physics of DNA, *Nonlinearity*, no. 17, pp. R1-R40.
3. Shygayev, A.S., Ponomarev, O.A. and Lakhno, V.D. (2013), “Theoretical and experimental studies of the open state of DNA”, *Matematicheskaya biologiya i bioinformatika*, vol. 8, no. 2, pp. 553-664.
4. Peyrard, M. and Bishop, A.R. (1989), “Statistical Mechanics of a Nonlinear Model for DNA Denaturation”, *Physical Review Letters*, vol. 62, pp. 2755-2758.
5. Dauxois, T., Peyrard, M. and Bishop, A.R. (1993), “Entropy-driven DNA denaturation”, *Physical Review E*, vol. 47, pp. R44-R47.
6. Fakhretdinov, M.I. and Zakirianov, F.K. (2013), “Discrete breathers in the model of DNA Peyrara-Bishop”, *Zhurnal Tekhnicheskoi Phisiki*, vol. 83, no. 7, pp. 1-5.
7. Fakhretdinov, M.I., Zakirianov, F.K. and Ekomasov, E.G. (2015), “Discrete breathers and multibrizery model DNA Peyrara-Bishop”, *Nelineinaya Dynamika*, vol. 11, no. 1, pp. 77-87.
8. Porshnev, S.V. and Belenkova, I.V. (2005), *Chislennye metody na baze Mathcad* [Numerical methods based Mathcad], BKhV-Peterburg, St. Petersburg.

удк 531/534:001.8

МЕТОДИ АПРОКСИМАЦІІ ФУНКЦІЙ ТА ІНТЕГРУВАННЯ У БЕЗСІТКОВИХ ПІДХОДАХ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ

Гоменюк С. І., д. т. н., професор, Козлова О. С., аспірант

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

oskozlova@gmail.com, serega78@gmail.com

Запропонований короткий огляд публікацій, у яких розглядається та досліджується застосування безсіткового підходу до розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла. Особлива увага приділяється таким ключовим етапам безсіткового підходу, як апроксимація функцій форми та метод дискретизації диференційного рівняння.

Ключові слова: безсітковий метод, функція форми, слабе формулювання, сильне формулювання, задачі механіки.

МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ В БЕССЕТОЧНЫХ ПОДХОДАХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

Гоменюк С. И., д. т. н., профессор, Козлова О. С., аспирант

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, м. Запорожье, 69600, Украина*

oskozlova@gmail.com, serega78@gmail.com

Представлен краткий обзор публикаций, в которых рассматривается и исследуется применение бессеточного подхода к решению задач механики деформированного твердого тела. Особое внимание уделяется таким ключевым этапам бессеточного подхода, а именно аппроксимации функции формы и методу дискретизации дифференциального уравнения.

Ключевые слова: бессеточный метод, функция формы, слабая формулировка, сильная формулировка, задачи механики.

MESHFREE APPROXIMATION AND INTEGRATION TECHNIQUES IN SOLID MECHANICS PROBLEMS

Gomenyuk S. I., D.Sc in Technical Sciences, Kozlova O. S., postgraduate

Zaporizhzhya State University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine

oskozlova@gmail.com, serega78@gmail.com

Meshless approach is an alternative of the Finite Element Method. This approach represents an approximated value of a function in terms of nodes. A lot of papers is devoted to meshless methods and their applications, including solid mechanics problems. This article will describe the methods of shape function approximation and explain integration techniques in meshfree approaches. Possible applications to solid mechanics of the shape functions will be examined in details.

The major stage of the meshless methods is the approximation of shape functions. This stage based entirely on an arbitrary distributed nodes. The most used methods of shape functions approximation in mechanics problems are the moving least square (MLS), the point interpolation method (PIM), and the radial point interpolation method (RPIM). These methods usually use locally supported shape functions. The discretization of a governing equation is based on different technics such as strong form (collocation methods) or Galerkin methods (based on weak formulation or variational principle). Strong formulation is effective and very easy programming, but often leads to bad conditioned matrices that require additional correction tools. The weak formulation is more common used, because it gives good results and has more flexibility to develop different variations. Integral evaluation may be done in various ways, such as nodal integration (local weak form), cell background integration (global weak form) or a background of finite-element mesh. The global weak form uses integration within the entire domain and its borders. On the contrary local weak forms based on overlapping subdomains, which make up entire domain. Then the integration is carried out in this subdomain. Moreover, the strong form often applied together with RPIM, while the weak form used effectively both of the approximation method.

This article has shown a possible development direction of meshfree methods in solid mechanics problems is using specific basis functions and numerical algorithm optimization.

Key words: meshfree/meshless methods, shape function, strong form, weak form, solid mechanics problems.

ВСТУП

Останні декілька років актуальним напрямком розвитку чисельних методів є розвиток безсіткових методів (БМ), які використовуються в широкому колі проблем механіки (в тому числі у механіці руйнування та розповсюдження тріщин) та розв'язку систем диференціальних рівнянь з частинними похідними, наприклад, задачі переносу тепла, електромагнетизм тощо. Безсіткові підходи є однією з альтернатив методу скінчених елементів у дослідженні цих проблем. Серед сучасних тенденцій розвитку САПР-систем як комерційних, так і вільно-розповсюджуваних (зазвичай дослідницьких) є інтеграція цих нових методів у свої програмні продукти, що зумовлено відносною легкістю генерації та регенерації системи вузлів. Це дозволяє більш ефективно використовувати їх у задачах моделювання великих деформацій, розповсюдження тріщин або моделювання тонких оболонок.

Наближене значення шуканої функції у будь-якій точці області розв'язання у безсітковому підході базується на значеннях функцій форми у деяких вузлах невеликої обмеженої області підтримки та має вигляд:

$$\hat{u}(x) = \sum_{i \in S_n} \phi_i(x) u_i,$$

де S_n – набір вузлів, що входять до локальної області підтримки, $\phi_i(x)$ – функція форми i -го вузла, що побудована з використанням усіх вузлів області підтримки, u_i – значення змінної у i -му вузлі області підтримки [1].

Загальна схема алгоритму БМ дуже схожа на метод скінчених елементів, але на кожному з етапів виникають свої особливості. Першим кроком загального алгоритму методу є побудова сітки вузлів, але безсітковий підхід вимагає лише їх координати, та не вимагає зазначати зв'язок між цими вузлами. Приклад скінченно-елементного та безсіткового представлення

тривимірний об'єкт зображений на рис. 1. Наступний етап – побудова функцій форми. Апроксимація функції форми зазвичай відбувається з використанням певного набору базисних функцій, які є дуже різними, але всі вони повинні мати обмежену область підтримки, бути неперервними та додатними в межах цієї області [2]. Найчастіші техніки апроксимації розглянуті нижче.

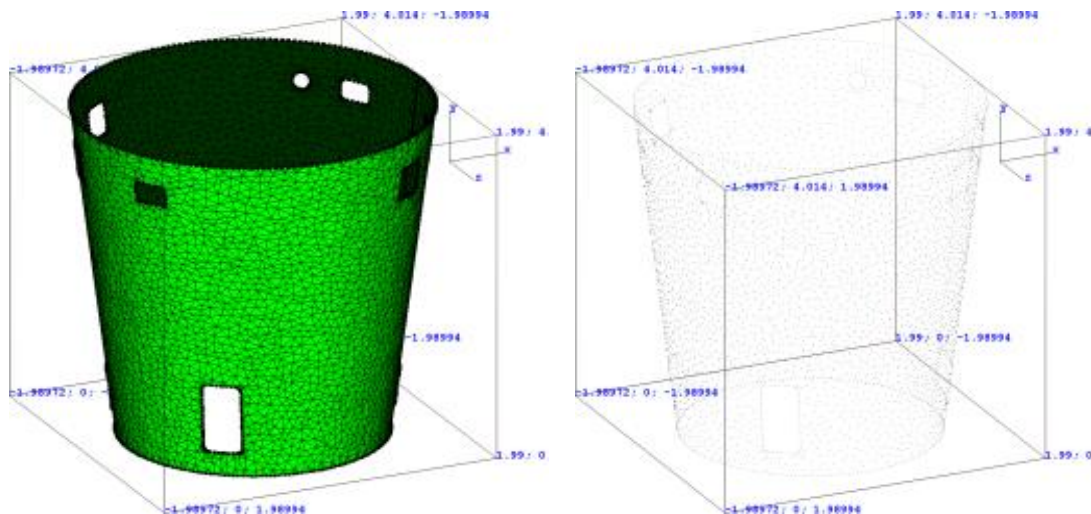


Рис. 1. Скінченно-елементне (а) та безсіткове (б) представлення оболонки об'єкта

Ще однією особливістю безсіткових підходів порівняно з МСЕ є різні методи дискретизації головного диференціального рівняння. Деякі дослідники використовують на цьому етапі методи колокації (сильне формулювання), інші – варіаційну постановку (слабке формулювання), або поєднання обох вказаних підходів (слабо-сильне формулювання). Для інтегрування також застосовується декілька технік, таких, як інтегрування в межах фонові комірці, скінченно-елементної сітки або області підтримки кожного окремого вузла [2].

Наразі існує декілька великих оглядів з використання БМ та історією їх розвитку [2-7]. Найбільш повний опис безсіткових підходів, їх класифікація та приклади розв'язання задач наведені у роботах [1, 8, 9]. **Метою статті** є аналіз методів апроксимації функції форми та інтегрування у безсіткових підходах, їх використання у розв'язанні саме задач механіки твердого тіла, особливостей застосування та визначення можливих напрямів подальших досліджень.

МЕТОДИ АПРОКСИМАЦІЇ ФУНКЦІЙ ФОРМИ

Головною ознакою та відмінністю БМ є процес апроксимації функції форми, що відбувається повністю базуючись на довільному наборі вузлів. Перевагою функції форми у БМ є те, що можна сконструювати функцію необхідного степеню неперервності. Генерація функцій форми у БМ можлива декількома способами, заснованими на інтегральному представленні (метод згладжених часток SPH, метод відтворення часток ядра RKPM), диференціальному представленні (метод скінчених різниць), представленні у нескінченних рядах (метод рухливих найменших квадратів MLS, метод точкової інтерполяції PIM, метод розбиття одиниці PU) та ін. [1, 5, 7].

Основними способами апроксимації функцій форми у задачах механіки є метод рухливих найменших квадратів (moving least square – MLS) та метод точкової інтерполяції (point interpolation method – PIM), що має декілька варіацій. Ці методи використовують довільний набір вузлів для побудови функцій форми, які зазвичай є фінітними, тобто за межами так званої області підтримки функція форми дорівнює нулю [9].

Метод точкової інтерполяції представляє функцію у вигляді скінченної суми

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=1}^m a_i B_i(x),$$

де a_i – невідомі коефіцієнти, $B_i(x)$ – базисні функції. Як базисні розглядають або поліноміальні або радіальні базисні функції (РБФ). Найчастіше у задачах як РБФ використовують мультиквадратичну функцію, гаусіан та інші, або фінітні РБФ, запропоновані Wendland та Wu [9]. Основною перевагою використання РБФ є нескінченна неперервність, що забезпечує можливість генерування дуже гладких розв'язків [10].

При використанні цього методу інтерполяції зростають затрати часу на обчислення функції форми у кожному вузлі, тому актуальною є оптимізація алгоритму, наприклад, як у роботі [11].

Використання як базисних нескінченно-диференційованих функцій з компактним носієм, що є розв'язками функціонально-диференціальних рівнянь спеціального виду, запропоновано у [12]. Такий підхід дозволяє враховувати локальні особливості задач, але має велику залежність точності результату від якості обчислення базисних функцій.

У методі рухливих найменших квадратів (МРНК) апроксимація функції має вигляд:

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) a_i(x) \equiv p^T(x) a(x),$$

де m – число елементів базису, $p_i(x)$ – мономіальні базисні функції, та $a_i(x)$ – числові коефіцієнти, які визначаються з умови мінімуму зваженої дискретної норми L_2 (квадрату різниці між апроксимованим значенням та дійсним). Явний вигляд виразу в матричній формі для обчислення коефіцієнтів буде таким

$$a(x) = A^{-1}(x) B(x) U,$$

де

$$A = \sum_{i=1}^n W_i(x) p(x_i) p^T(x_i),$$

$$B = \{W_1(x) p(x_1), W_2(x) p(x_2), \dots, W_n(x) p(x_n)\}.$$

Важливим моментом при апроксимації методом рухливих найменших квадратів є вибір функції ваги $W_i(x)$, яка повинна відповідати певним вимогам, а саме, бути додатною, монотонно спадною залежно від відстані до носія та мати певний ступінь неперервності разом із похідними [9]. Найчастіше як вагові функції використовуються гаусіан та кубічні або квадратичні сплайни [8].

Відмінністю між методами зважених та рухливих найменших квадратів є те, що в першому випадку коефіцієнти a_i є константами, а у другому – функціями. Відповідно апроксимація МРНК є неперервною в усій області, що є важливим при використанні глобального формулювання, а апроксимація методом зважених найменших квадратів – кусково-неперервною, та є частковим випадком МРНК [9].

Перевагою точкової інтерполяції можна назвати відсутність вагової функції. У процесі інтерполяції коефіцієнти відрізняються тим, що в методі точкової інтерполяції вони є числовими, тоді як МРНК – це функції. Також за даними досліджень метод радіальної точкової інтерполяції призводить до більш точних результатів, ніж МРНК або поліноміальної точкової інтерполяції [9]. Найчастіше МРНК застосовується в поєднанні зі слабким формулюванням (така комбінація є основою методу вільних елементів Гальборкіна – EFG), тоді як метод точкової інтерполяції застосовується у поєднанні як зі слабким, так і з

сильним формулюванням. Детальне порівняння характеристик функцій форми (фінітність, неперервність, можливість відтворювати базисні функції тощо), отриманих цими методами інтерполяції, повністю наведені у [1, 9], але всі вони відповідають вимогам безсіткового підходу.

Зауважимо, що для інших областей фізики використовуються й інші методи, такі, як метод згладжених гідродинамічних часток (smoothed particle hydrodynamics, SPH), метод hp-хмар та розбиття одиниці. Наприклад, у механіці рідин та газів найчастіше використовується метод SPH та його варіації [13]. Застосування вдосконаленого методу SPH до еліптичних рівнянь з частинними похідними (зокрема задач еластостатики) можна знайти у [14], але таких підхід не є дуже розповсюдженим.

МЕТОДИ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ ГОЛОВНОГО ДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ

У загальному вигляді рівняння з частинними похідними в області Ω , що обмежена границею Γ , має вигляд

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega.$$

Для дискретизації цього рівняння найчастіше використовуються сильне формулювання (метод коллокацій) або метод Гальоркіна (будується на слабкому формулюванні або варіаційному принципі) [3].

Сильне формулювання використовує РБФ для розв'язання рівнянь з частинними похідними шляхом застосування відповідного диференційного оператора до РБФ та методу коллокацій до певного набору вузлів області розв'язання та її границі. У несиметричному варіанті застосування диференційного оператора відбувається на множині вузлових точок області та її границі, а в симетричному – до послідовного застосування до кожної пари «точка коллокації – центр РБФ» [10]. Сильне формулювання є ефективним та дуже легким у програмуванні, але часто призводить до недостатньо обумовлених матриць, що потребує додаткових інструментів виправлення [9]. Використання РБФ для розв'язання рівнянь з частинними похідними в сильному формулюванні досліджено у роботах [15], а у [10] наведені приклади застосування цього підходу до лінійних та нелінійних задач механіки, а саме для аналізу балок на пружній основі, аналізу пружних нестабільних навантажень, аналізу пошкоджень залізобетонної балки та вигину тонкої пластини на пружній основі.

Актуальними також є роботи українських вчених в області дослідження безсіткових підходів. У роботі [12] детально описаний безсітковий алгоритм розв'язання крайової задачі для рівняння Лапласа з використанням атомарних РБФ, основою якого є сильне формулювання. Використання цього підходу до розв'язання задач механіки потребує додаткових досліджень і є досить перспективним.

Використання **слабкого формулювання** дуже схоже на МСЕ – у варіаційну постановку задачі підставляються обрані функції форми, та отримуємо загальне слабке формулювання.

Обчислення інтегралу може проводитись різними способами, а саме вузлове інтегрування (локальне слабке формулювання), інтегрування в межах фонові комірки (глобальне слабке формулювання) або з використанням фонові скінчено-елементної сітки [3]. Глобальне слабке формулювання використовує інтегрування в межах всієї області та її границі, тоді як локальне базується на розбитті проблемної області на локальні підобласті, що перетинаються і в межах яких відбувається інтегрування [5].

Детальний опис різних модифікацій БМ з прикладами програм представлений у роботі [9]. Серед розглянутих задач є статичні та динамічні задачі пружності. Для дискретизації використовується як слабке формулювання (і глобальне, і локальне), так і сильне формулювання та їх поєднання. Досліджується поведінка базисних функцій залежно від обраних параметрів, а також збіжність методів залежно від розміру області підтримки.

Багатогранною є робота [1], що висвітлює різні безсіткові підходи. Основну увагу автор приділяє статичним та динамічним задачам пружності у слабкому та ослаблено-слабкому (weakened-weak) формулюванні, яке поєднує в одному процесі ключові підходи безсіткових методів та методу скінчених елементів. Подальшим розвитком такого підходу є метод згладжених скінчених елементів, що описаний у [16]. Для апроксимації базисних функцій застосовується метод рухливих найменших квадратів та метод точкової інтерполяції з його різновидами, що використовують різні схеми вибору вузлів. Окремо розглянуті особливості застосування БМ до балок, пластин та оболонок. У цій роботі проведені дослідження впливу параметрів базисних функцій на результат.

У роботі [8] автори приділяють увагу використанню БМ для аналізу статичних та динамічних задач пружності, задач пластичності (високошвидкісне зіткнення, контактні задачі та розповсюдження тріщин). У чисельних прикладах використовується слабе формулювання та апроксимація методом найменших рухливих квадратів.

Підходи, що використовують глобальне слабе формулювання в задачах лінійної пружності, наведені у роботі [2]. Основну увагу автори приділяють проблемам реалізації згаданих підходів. Також, автори дійшли висновку, що для задач з малими деформаціями більш точним способом отримання дискретних рівнянь є інтегрування з використанням фонові комірки. У цій роботі наведені також техніки врахування розривів різного типу.

Використання слабкого формулювання в моделюванні великих деформацій тонких оболонок наведені у роботі [17]. Великі деформації в задачах обробки металу тиском розглянуті в [18]; автори використовують локальне слабе формулювання та РБФ як базисні функції.

Наведені вище методи дискретизації головного рівняння є основними, але чимало дослідників у пошуках найбільш вдалого безсіткового алгоритму поєднують обидва підходи. Прикладом такого підходу є техніка, описана у роботі [19], що займає окреме місце та має назву Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG). Перевагою такого підходу є відсутність необхідності будь-яких фонових комірок. Авторами цього методу запропонований ефективний спосіб для розв'язання задач пружності, який незалежно апроксимує переміщення та напругу із застосуванням однакових функцій форм, подібно до методу скінчених об'ємів. Слабе формулювання використовується у вузлах, а метод коллокацій – для напруг. У процесі апроксимації використовується метод найменших рухливих квадратів, наприклад, до задач моделювання оболонок [20].

У роботі [21] наведені чисельні результати тестових задач механіки деформівного тіла, які отримані із застосуванням цікавого підходу, що поєднує безсітковий підхід та скінченно-різницевий. РБФ використовуються для апроксимації просторових похідних, визначених на локальних шаблонах.

Безсітковий підхід також вдало використовується для розрахунків напружено-деформівного стану в контактних задачах. Російські автори (М.В. Попков та ін.) у серії своїх робіт використовували енергетичне формулювання задачі. Як базисні функції використовувалась звичайна експоненціальна залежність [22].

Досліджені роботи підтверджують більшу розповсюдженість слабкого формулювання у розв'язанні задач механіки, що обумовлено достатньою точністю результатів та більшою гнучкістю у розробці специфічних підходів. На противагу цьому, сильне формулювання є простішим у програмуванні та для деяких задач дає набагато кращі результати, але за дослідженнями призводить іноді до погано обумовлених систем, тому вимагає більш ретельного етапу підготовки.

ВИСНОВКИ

У статті подається стислий огляд робіт, які застосовують безсіткові підходи до розв'язання задач механіки. Розповсюдженими методами апроксимації базисних функцій є метод

радіальної точкової інтерполяції та МРНК. Обидва методи досить прості в реалізації, але МРНК передбачає вибір вагової функції та зазвичай застосовується разом зі слабким формулюванням. Метод радіальної точкової інтерполяції вдало використовується як і з сильним формулюванням, так і разом зі слабким. Перевагою сильного формулювання є простота реалізації, але слабке формулювання є більш гнучким у розробці різних модифікацій та поєднанні зі скінченно-елементним підходом. Точність результатів в обох підходах певною мірою залежить від обраного методу та параметрів базисних функцій. Перспективним напрямком розвитку БМ у задачах механіки є застосування специфічних базисних функцій та оптимізація алгоритму чисельного розв'язку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Liu G. R. Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method / G. R. Liu. – 2nd ed. – CRC PressTaylor & Francis Group, 2010. – 792 p.
2. Nguyen V. P. Meshless methods: A review and computer implementation aspects / V. P. Nguyen, T. Rabczuk, S. Bordas, M. Duflot // Mathematics and Computers in Simulation. – 2008. – N 79. – P. 763-813.
3. Belytschko T. Meshless Methods: An Overview and Recent Developments / T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming, P. Krysl // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1996. – Vol. 139. – P. 3-47.
4. Li Sh. Meshfree and particle methods and their applications. // Sh. Li, W. K. Liu // Applied Mechanics Reviews. – 2002. – Vol. 55(1). – P. 1-34.
5. Fries Th. P. Classification and Overview of Meshfree Methods / Th.-P. Fries, H. G. Matthies. – Technical University Braunschweig, 2004. – 122 p.
6. Колодяжный В. М. Бессеточные методы в задачах моделирования физических процессов / В. М. Колодяжный, О. Ю. Лисина // Пробл. машиностроения. – 2010. – Т. 13, № 3. – С. 67-74.
7. Daxini S. D. A review on recent contribution of meshfree methods to structure and fracture mechanics applications. [Electronic resource] / S. D. Daxini, J. M. Prajapati // The Scientific World Journal. – 2014. – Mode of access: <http://dx.doi.org/10.1155/2014/247172>.
8. Chen Y. Meshless Methods in Solid Mechanics / Y. Chen, J. D. Lee, A. Eskandarian. – Verlag New York : Springer, 2006. – 210 p.
9. Liu G. R. An introduction to meshfree methods and their programming / G. R. Liu, Y. T. Gu. – Springer, 2005. – 496 p.
10. Tiago C. M. Application of radial basis functions to linear and nonlinear structural analysis problems / C. M. Tiago, V. M. A. Leitão // Computers and Mathematics with Applications. – 2006. – Vol. 51. – P. 1311-1334.
11. Nakata S. An Efficient Scheme for Meshless Analysis Based on Radial Basis Functions / S. Nakata // Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics (JNAIAM). – 2009. – Vol. 4, no. 3-4. – P. 193-201.
12. Колодяжный В. М. Атомарные радиально базисные функции в численных алгоритмах решения краевых задач для уравнения Лапласа / В. М. Колодяжный, В. А. Рвачев // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 4. – С. 165-178.
13. Liu M. B. Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH): an Overview and Recent Developments / M. B. Liu, G. R. Liu // Archives of Computational Methods in Engineering. – 2010. – Vol. 17. – Iss. 1. – P. 25-76.
14. Batra R. C. SSPH basis functions for meshless methods, and comparison of solutions with strong and weak formulations / R. C. Batra, G. M. Zang // Computational Mechanics. – 2008. – No. 41. – P. 527-545.
15. Sarra S. A. Multiquadric Radial Basis Function Approximation Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations / S. A. Sarra, E. J. Kansa // Advances in Computational Mechanics. – 2009. – Vol. 2. – 220 p.

16. Liu G. R. A smoothed finite element method for mechanics problems / G. R. Liu, K. Y. Dai, T. T. Nguyen // *Computational Mechanics*. – 2007. – No. 39. – P. 859-877.
17. Li S. Numerical simulations of large deformation of thin shell structures using meshfree methods / S. Li, W. Hao, W. K. Liu // *Computational Mechanics*. – 2000. – No. 25. – P. 102-116.
18. Gu Y. T. An advanced meshless technique for large deformation analysis of metal forming / Y. T. Gu, C. Yan, P. K. D. V. Yarlagadda // 9th Global Congress on Manufacturing and Management, 12-14th November, 2008, Gold Coast, Australia.
19. Alturi S. N. Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Mixed Collocation Method for Elasticity Problems / S. N. Alturi, H. T. Liu, Z. D. Han // *CMES*. – 2006. – Vol. 14, no. 3. – P. 141-152.
20. Jarak T. Meshless numerical formulation for analysis of shell-like structures / T. Jarak // Doctoral thesis. – University of Zagreb, 2010. – 232 p.
21. Толстых А. И. Бессеточный метод на основе радиальных базисных функций / А. И. Толстых, Д. А. Ширококов // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2005. – Т. 45, № 8. – С. 1498-1505.
22. Попков М. В. Бессеточный метод и его применение для расчета напряженно-деформированного состояния упругой матрицы при штамповке эластичными средами / М. В. Попков // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. – 2013. – № 4. – С. 3-14.

REFERENCES

1. Liu, G.R. (2010), "Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method", 2nd ed. CRC Press/Taylor & Francis Group.
2. Nguyen, V.P., Rabczuk, T., Bordas, S. and Duflot, M. (2008), "Meshless methods: A review and computer implementation aspects", *Mathematics and Computers in Simulation*, no. 79, pp. 763-813.
3. Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M. and Krysl, P. (1996), "Meshless Methods: An Overview and Recent Developments", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 3-47.
4. Li, Sh. and Liu, W.K. (2002), "Meshfree and particle methods and their applications", *Applied Mechanics Reviews*, vol. 55(1), pp. 1-34.
5. Fries, Th.-P. and Matthies, H.-G. (2004), "Classification and Overview of Meshfree Methods", *Technical University Braunschweig*, 122 p.
6. Kolodiazhnyi, V.M. and Lysyna, O.Iu. (2010), "Meshless methods in physical processes modeling problems", *Probl. Mashinostroeniya*, vol. 13, no. 3, pp. 67-74.
7. Daxini, S.D. and Prajapati, J.M. (2014), "A review on recent contribution of meshfree methods to structure and fracture mechanics applications", *The Scientific World Journal*, available at: <http://dx.doi.org/10.1155/2014/247172> (access March 1, 2016).
8. Chen, Y., Lee, J.D. and Eskandarian, A. (2006), "Meshless Methods in Solid Mechanics", Springer, Verlag New York.
9. Liu, G.R. and Gu, Y.T. (2005), "An introduction to meshfree methods and their programming", Springer.
10. Tiago, C.M. and Leitão, V.M.A. (2006), "Application of radial basis functions to linear and nonlinear structural analysis problems", *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 51, pp. 1311-1334.
11. Nakata, S. (2009), "An Efficient Scheme for Meshless Analysis Based on Radial Basis Functions", *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics (JNAIAM)*, vol. 4, no. 3-4, pp. 193-201.
12. Kolodiazhnyi, V.M. and Rvachov, V.A. (2008), "Atomic radial basis functions in numerical algorithms for boundary value problems with the Laplace equation", *Kibernetika i sistemnyi analiz*, no. 4, pp. 165-178.
13. Liu, M.B. and Liu, G.R. (2010), "Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH): an Overview and Recent Developments", *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 17, issue 1, pp. 25-76.

14. Batra, R.C. and Zang, G.M. (2008), “SSPH basis functions for meshless methods, and comparison of solutions with strong and weak formulations”, *Computational Mechanics*, no. 41, pp. 527-545.
15. Sarra, S.A. and Kansa, E.I. (2009), “Multiquadric Radial Basis Function Approximation Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations”, *Advances in Computational Mechanics*, vol. 2, 220 p.
16. Liu, G.R., Dai, K.Y. and Nguyen, T.T. (2007), “A smoothed finite element method for mechanics problems”, *Computational Mechanics*, no. 39, pp. 859-877.
17. Li, S., Hao, W. and Liu, W.K. (2000), “Numerical simulations of large deformation of thin shell structures using meshfree methods”, *Computational Mechanics*, no. 25, pp. 102-116.
18. Gu, YuanTong, Yan, Cheng and Yarlagadda, Prasad K. (2008), “An advanced meshless technique for large deformation analysis of metal forming”, 9th Global Congress on Manufacturing and Management, 12-14th November, 2008, Gold Coast, Australia.
19. Alturi, S.N., Liu, H.T. and Han, Z.D. (2006), “Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Mixed Collocation Method for Elasticity Problems”, *CMES*, vol. 14, no. 3, pp. 141-152.
20. Jarak, T. (2010), “Meshless numerical formulation for analysis of shell-like structures”, *Doctoral thesis*, University of Zagreb.
21. Tolstyih, A.I. and Shirobokov, D.A. (2005), “Meshfree method based on radial basis functions”, *Zhurnal vyichislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*, vol. 45, no. 8, pp. 1498-1505.
22. Popkov, M.V. (2013), “Meshfree method and its application for determining stress-strain state of elastic matrix for stamping by elastic medium”, *Izvestiya vysshih uchebnyih zavedeniy. Mashinostroenie*, no. 4, pp. 3-14.

УДК 539.3

ЕФЕКТИВНІ ПРУЖНІ СТАЛІ КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ З АРМУВАННЯМ ДВОМА СОРТАМИ ОДНОСПРЯМОВАНИХ ВОЛОКОН

Гребенюк С. М., к. т. н., доцент

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

gsm1212@ukr.net

Запропоновано підхід до визначення ефективних пружних характеристик волокнистого композита, армованого періодичною системою двох волокон. У матеріалі виокремлюються області гексагональної форми, що містять матеріал одного з сортів волокон та оточуючу його матрицю, так щоб ці області покривали увесь композит. Отримуємо два типи областей, що містять відповідно перший сорт волокна і другий сорт волокна. Для кожної з цих областей проводимо процедуру гомогенізації волокнистого композиту. В результаті неоднорідний матеріал, що містить матрицю та волокно, представляємо однорідним трансверсально-ізотропним матеріалом, пружні властивості якого визначаються п'ятьма сталими. За такої гомогенізації матеріал представляється сукупністю двох типів областей з трансверсально-ізотропними властивостями. Для цього матеріалу також проводимо процедуру гомогенізації. У результаті отримуємо однорідний трансверсально-ізотропний матеріал, який описує механічну поведінку композита, армованого двома сортами односпрямованих волокон. Розроблений підхід застосовано до визначення ефективних пружних сталих волокнистого композита, армованого одним сортом волокна, але представленого як трикомпонентний – матриця та два сорти волокон. Порівняння з чисельними результатами, отриманими за співвідношеннями інших авторів, дають добру збіжність. Для повздовжніх характеристик цей збіг повний, а для поперечних – якісна картина однакова, а значення мають незначні відмінності.

Ключові слова: волокнистий композит, ефективні пружні сталі, матриця, трансверсально-ізотропний матеріал.

ЭФФЕКТИВНЫЕ УПРУГИЕ ПОСТОЯННЫЕ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА С АРМИРОВАНИЕМ ДВУМЯ СОРТАМИ ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ ВОЛОКОН

Гребенюк С. Н., к. т. н., доцент

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

gsm1212@ukr.net

Предложен подход к определению эффективных упругих характеристик волокнистого композита, армированного периодической системой двоих волокон. В материале выделяются области гексагональной формы, которые содержат материал одного из сортов волокон и окружающую его матрицу так, чтобы эти области покрывали весь композит. Получаем два типа областей, содержащих первый сорт волокна и второй сорт волокна. Для каждой из этих областей проводим процедуру гомогенизации волокнистого композита. В результате неоднородный материал, содержащий матрицу и волокно, представляем однородным трансверсально-изотропным материалом, упругие свойства которого определяются пятью постоянными. При такой гомогенизации материал представляется совокупностью двоих типов областей с трансверсально-изотропными свойствами. Для этого материала также проводим процедуру гомогенизации. В результате получаем однородный трансверсально-изотропный материал, который описывает механическое поведение композита, армированного двумя сортами однонаправленных волокон. Разработанный подход применен к определению эффективных упругих постоянных волокнистого композита, армированного одним сортом волокна, но представленного как трехкомпонентный – матрица и два сорта волокна. Сравнение с численными результатами, полученными по соотношениям других авторов, дают хорошую сходимость. Для продольных характеристик это совпадение полное, а для поперечных – качественная картина одинаковая, а значения имеют незначительные отличия.

Ключевые слова: волокнистый композит, эффективные упругие постоянные, матрица, трансверсально-изотропный материал.

EFFECTIVE ELASTIC CONSTANTS OF THE COMPOSITE MATERIAL REINFORCED BY THE UNIDIRECTIONAL FIBERS OF THE TWO TYPES

Grebeniuk Sergii, candidate of technical sciences, associated professor

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

gsm1212@ukr.net

In the article it is proposed an approach to the determination of the effective elastic characteristics of the fibrous composite reinforced by the two-fiber periodical system. In the material the hexagonal form areas are singled out. These areas contain the material of the one type fiber and the surrounding matrix, so that these areas cover the entire composite. We obtain areas of two kinds containing the first and second types of fiber. Then for each of these areas we homogenize the fiber composite. Consequently, we represent inhomogeneous material containing the matrix and fiber through the transversally-isotropic in the issue material. Elastic properties of this material can be calculated by use of five constants: longitudinal modulus E_1 , transversal modulus E_2 , shear modulus G_{12} , Poisson ratios ν_{12} and ν_{23} . Under condition of such homogenization the material is represented by the aggregate of the two kind areas with transversally-isotropic properties. For this material we also carry out homogenization procedure with the help of analogous correlation. In the issue we have in the issue transversally-isotropic material modelling the composite's mechanical behavior reinforced by two types of the unidirectional fibers. Mechanical characteristics of such material depend on elastic properties of the each of the fiber types and on the volume fraction of each of them in the composite. The elaborated approach is applied to determination of the effective elastic constants of the fibrous composite reinforced by one type of the fiber but represented as the ternary – matrix and the fiber of the two types. Comparison with the numerical results obtained according to the other author's correlations gives the good convergence. This gives entire coincidence for longitudinal characteristics. In case of transversal characteristics we have the same qualitative picture with insignificant discrepancies in values.

Key words: fibrous composite, effective elastic constants, matrix, transversally-isotropic material.

При визначенні напружено-деформованого стану конструкцій із волокнистих композитів виникає необхідність урахування неоднорідної структури композита. При високій частоті армування врахувати механічні відмінності кожного волокна досить складно з математичної точки зору. Як правило, при розв'язанні таких задач неоднорідний матеріал представляється однорідним з трансверсально-ізотропними властивостями, що залежать від механічних властивостей матриці та волокна та об'ємної долі кожної з них у композиті. Після чого задача зводиться до задачі механіки анізотропного середовища.

Задача визначення ефективних пружних сталей при армуванні одним сортом волокон розв'язується при різних вихідних умовах різними методами (аналітичними, асимптотичними, чисельними), що видно в роботах [1-9]. Якщо армування проводиться декількома сортами волокон, задача ускладнюється, і визначення ефективних механічних характеристик має певні труднощі математичного характеру.

Так, у монографії Kwon Y.W., Allen D.H., Talreja R. [10] представлено широкий спектр методів із застосуванням ймовірнісних та статистичних підходів, які дозволяють описувати механічну поведінку композитів, у тому числі, наведені термпружні сталі для волокнистого композита, армованого системою n волокон. Співвідношення для визначення пружних сталей волокнистого композита, армованого системою n односпрямованих волокон наведено у роботі волокон [11]:

$$E_1 = \sum_{i=1}^n E_{ci} f_i + E_m f_m, \quad (1)$$

$$v_{12} = v_m - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{f_i (\chi_m + 1) (v_m - v_{ci})}{(2 + (\chi_i - 1) G_m / G_{ci})}}{f_m + \sum_{i=1}^n \frac{f_i (\chi_m + 1)}{(2 + (\chi_i - 1) G_m / G_{ci})}}, \quad (2)$$

$$E_2 = \left[\frac{v_{12}^2}{E_1} + \frac{\chi_m + 1}{8G_m} \left(\frac{1}{R} - \frac{2P}{1+P} \right) \right]^{-1}, \quad (3)$$

$$G_{12} = G_m \frac{f_m + 2 \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{(1 + G_m / G_{ci})}}{1 - \sum_{i=1}^n f_i \frac{(1 - G_m / G_{ci})}{(1 + G_m / G_{ci})}}, \quad (4)$$

$$G_{23} = G_m \frac{1 + \sum_{i=1}^n \frac{f_i (1 - G_m / G_{ci})}{(\chi_m + G_m / G_{ci})}}{1 - \chi_m \sum_{i=1}^n \frac{f_i (1 - G_m / G_{ci})}{(\chi_m + G_m / G_{ci})}}, \quad (5)$$

де f_i – об'ємна доля i -го сорту волокна в композиті, f_m – об'ємна доля матеріалу матриці в композиті, E_{ci} – модуль пружності матеріалу i -го сорту волокна, G_{ci} – модуль зсуву матеріалу i -го сорту волокна, v_{ci} – коефіцієнт Пуассона матеріалу i -го сорту волокна,

$$\chi_m = 3 - 4v_m, \quad \chi_i = 3 - 4v_{ci}, \quad P = \sum_{i=1}^n \frac{f_i (1 - G_m / G_{ci})}{(\chi_m + G_m / G_{ci})}, \quad R = f_m + \sum_{i=1}^n \frac{f_i (\chi_m + 1)}{(2 + (\chi_i - 1) G_m / G_{ci})}.$$

Розглянемо підхід до визначення ефективних механічних характеристик волокнистого композита, періодично армованого системою двох сортів волокон, на основі гомогенізації композита з трансверсально-ізотропними матрицею та волокном [12-16]. Для визначення пружних характеристик композита з трансверсально-ізотропною матрицею та трансверсально-ізотропним волокном запропоновані такі формули (тут символом * – позначені величини, що відносяться до матеріалу матриці, а символом \circ – позначені величини, що відносяться до матеріалу волокна):

$$E_1 = \frac{(\alpha - 2v_{12}^\circ \beta) E_1^* (1 - f) + (\alpha - 2v_{12}^* \beta) E_1^\circ f}{\alpha - 2\beta v_{12}^\circ + 2f v_{21}^* E_2^\circ (v_{12}^\circ - v_{12}^*)}, \quad (6)$$

$$v_{12} = \frac{(\alpha - 2\beta v_{12}^\circ) v_{12}^* + 2E_2^\circ f (v_{12}^\circ - v_{12}^*)}{\alpha - 2\beta v_{12}^\circ + 2f v_{21}^* E_2^\circ (v_{12}^\circ - v_{12}^*)}, \quad (7)$$

де $\alpha = E_2^* (1 - f) (1 - v_{23}^\circ) + E_2^\circ (f (1 - v_{23}^*) + (1 + v_{23}^*))$, $\beta = v_{21}^\circ E_2^* (1 - f) + v_{21}^* f E_2^\circ$, f – об’ємний вміст волокна у композиті, та

$$E_2 = \frac{2\alpha E_2^* E_2^\circ}{(E_2^\circ (\delta_1 + \eta_1 \eta_2) + \alpha \delta_2)}, \quad (8)$$

$$v_{23} = \frac{(\alpha \delta_2 - E_2^\circ (\delta_1 + \eta_1 \eta_2))}{(\alpha \delta_2 + E_2^\circ (\delta_1 + \eta_1 \eta_2))}, \quad (9)$$

$$G_{12} = \frac{G_{12}^* (G_{12}^* (1 - f) + G_{12}^\circ (f + 1))}{G_{12}^\circ (1 - f) + G_{12}^* (f + 1)}, \quad (10)$$

де

$$\alpha_1 = \left(\left(f^2 + \frac{3}{f} - 3 + 3f \right) \zeta_1^2 + 3\zeta_2^2 \left(\frac{1}{f^3} + \frac{1}{f^2} + \frac{1}{f} + 3 + 6f^2 \right) - 6 \left(f^2 + \frac{1}{f^2} + 2f \right) \zeta_1 \zeta_2 + 1 - 6f \zeta_2 + 2f \zeta_1 \right) (1 - f),$$

$$\alpha_2 = 9\zeta_2^2 \left(2f^3 - 2f^2 + f - 2 + \frac{1}{f^3} \right) - 6\zeta_1 \zeta_2 \left(f^3 + f^2 - 2f - \frac{3}{f} + \frac{3}{f^2} \right) + \zeta_1^2 \left(f^3 - 2f^2 + 10f - 18 + \frac{9}{f} \right) + (2(3\zeta_2 - \zeta_1)(1 - f) + 1) f,$$

$$\beta_1 = (1 - f) (24f \zeta_1 \zeta_2 - 12\zeta_2^2 (1 + f + f^2) - 4f \zeta_1^2), \quad \beta_2 = -\frac{12}{f} \left((1 - f) \left(\zeta_2 \left(\frac{1 + f + f^2}{f} \right) - \zeta_1 \right) \right)^2,$$

$$\chi_1 = \frac{(d_{11} - d_{21})}{d_{11} d_{22} - d_{21} d_{12}}, \quad \chi_2 = \frac{(d_{22} - d_{12})}{d_{11} d_{22} - d_{21} d_{12}}, \quad \eta_1 = 2E_1^\circ E_1^* f (f - 1) (v_{21}^* \gamma - 2v_{21}^\circ E_2^*)^2,$$

$$\eta_2 = 1 / \left(E_2^* (\alpha (E_1^\circ f + E_1^* (1 - f))) - 2\beta (v_{12}^* E_1^\circ f + v_{12}^\circ E_1^* (1 - f)) \right), \quad \gamma = E_2^* (1 - v_{23}^\circ) + E_2^\circ (1 + v_{23}^*),$$

$$\delta_1 = E_2^* (1 - v_{23}^\circ) (f (1 + v_{23}^*) + (1 - v_{23}^*)) + E_2^\circ (1 - (v_{23}^*)^2) (1 - f), \quad \zeta_1 = b_1 \chi_1, \quad \zeta_2 = b_1 \chi_2,$$

$$\delta_2 = E_2^\circ (\alpha_1 (1 + v_{23}^*) + \beta_1 (v_{23}^\circ + v_{21}^* v_{12}^*)) + E_2^* (\alpha_2 (1 + v_{23}^\circ) + \beta_2 (v_{23}^\circ + v_{21}^\circ v_{12}^\circ)),$$

$$d_{11} = E_2^\circ \left(\left(4f - 3 - \frac{1}{f^2} \right) (1 + v_{23}^*) - 4f (1 - v_{21}^* v_{12}^*) \right) - E_2^* \left(\left(4f - \frac{1}{f^2} - 3 \right) (1 + v_{23}^\circ) + 4 \left(\frac{1}{f^2} - f \right) (1 - v_{21}^\circ v_{12}^\circ) \right),$$

$$d_{21} = E_2^\circ \left(4f (1 - v_{21}^* v_{12}^*) + \left(2f + \frac{1}{f^2} - 3 \right) (1 + v_{23}^*) \right) - E_2^* \left(\left(2f + \frac{1}{f^2} - 3 \right) (1 + v_{23}^\circ) + 4 \left(f - \frac{1}{f^2} \right) (1 - v_{21}^\circ v_{12}^\circ) \right),$$

$$d_{22} = E_2^\circ \left(\left(2 - f - \frac{1}{f} \right) (1 + v_{23}^*) - 4 (1 - v_{21}^* v_{12}^*) \right) - E_2^* \left(\left(2 - f - \frac{1}{f} \right) (1 + v_{23}^\circ) + 4 \left(\frac{1}{f} - 1 \right) (1 - v_{21}^\circ v_{12}^\circ) \right),$$

$$d_{12} = E_2 \left(\left(\frac{1}{f} - f \right) (1 + \nu_{23}^*) - 4(1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*) \right) - E_2^* \left(\left(\frac{1}{f} - f \right) (1 + \nu_{23}^\circ) + 4 \left(1 - \frac{1}{f} \right) (1 - \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right),$$

$$b_1 = E_2^\circ (1 + \nu_{23}^*) - E_2^* (1 + \nu_{23}^\circ).$$

Однією із найбільш розповсюджених схем розташування волокон в односпрямованих композиційних матеріалах є гексагональна укладка волокон (рис. 1).

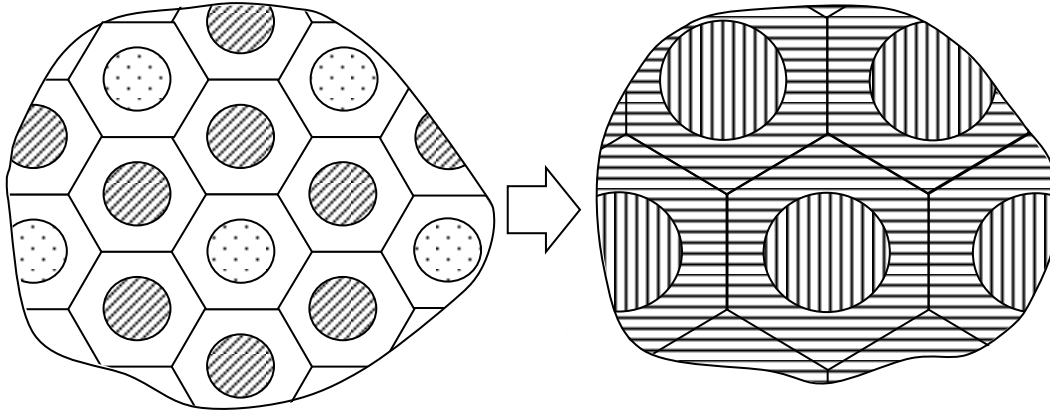


Рис. 1. Представлення трикомпонентного композиційного матеріалу

Розглянемо приклад такої схеми армування трикомпонентного композиційного матеріалу двома сортами односпрямованих волокон періодичної структури. Знайдемо пружні сталі такого композиційного матеріалу, використовуючи формули (6-10), отримані для двохкомпонентного волокнистого композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропними матрицею і волокном.

Розіб'ємо поперечний перетин композиційного матеріалу на гексагональні комірки, так, щоб центр перетину діагоналей шестикутника збігався з центром волокна, як показано на рисунку 1. При такому розбитті матеріал матриці в будь-якій гексагональній комірці буде займати однаковий об'єм, якщо діаметр обох сортів волокон однаковий, і об'єм, що займає матеріал матриці, буде різним, якщо діаметр волокна у кожного сорту свій. Отже, отримуємо два типи гексагональних комірок – для волокна I сорту (позначено похилою штриховкою), і для волокна II сорту (позначено точками). Далі згідно з процедурою, викладеною в розділі 2, апроксимуємо гексагональну комірку кругом, рівним площі цієї комірки. І після цього визначаємо за формулами, отриманими в розділі 2 і в попередніх підрозділах розділу 3, пружні сталі для двох областей композита, що містять волокна I та II сорту. Зважаючи на те, що обидва сорти волокон однаково направлені, ці області будуть мати трансверсально-ізотропні властивості з однаковими площинами ізоτροпії навіть, якщо обидва сорти волокон та матриця матимуть ізотропні властивості. Далі, апроксимуємо кожну гексагональну область, яка містить матеріал волокна та матеріал матриці і відповідає одному із сортів волокна, наприклад, для волокна I сорту, кругом, рівним площі гексагональної комірки (рис. 1). У результаті отримаємо «умовний» уже двохкомпонентний волокнистий матеріал з розрахованими пружними сталими трансверсально-ізотропних «умовної» матриці та «умовного» волокна.

До моделі «умовного» композиційного матеріалу повторно застосуємо процедуру визначення пружних сталей. Тоді перетин цього «умовного» матеріалу розіб'ємо гексагональними комірками і застосуємо до елементарної гексагональної комірки процедуру визначення пружних сталей за формулами, отриманими в розділі 2 та початкових

підрозділах розділу 3, за визначеними раніше пружними сталими «умовної» матриці та «умовного» волокна. Об'ємна доля «умовного» волокна визначається як відношення площі круга, що займає «умовне» волокно, до площі гексагональної комірки. Отримані пружні сталі «умовного» композиційного матеріалу й будуть визначати пружні сталі трикомпонентного композиційного матеріалу з двома сортами волокон.

Якщо у вихідному трикомпонентному композиційному матеріалі об'ємна доля волокна I сорту дорівнює f_1 , а волокна II сорту – f_2 , то об'ємна доля матеріалу матриці буде складати $1 - f_1 - f_2$. Тоді, згідно з вищевикладеним підходом представлення «умовної» матриці і «умовного» волокна, об'ємна доля «умовної» матриці буде складати величину

$(1 - f_1 - f_2) \frac{f_1}{f_1 + f_2} + f_1$, де перший доданок представляє долю вихідної матриці в

представленні «умовної» матриці, а другий доданок – об'ємну долю волокна I сорту в представленні «умовної» матриці. Отже, об'ємна доля «умовної» матриці в «умовному»

композиційному матеріалі буде складати величину, що дорівнює $\frac{f_1}{f_1 + f_2}$. Аналогічно,

визначимо об'ємну долю «умовного» волокна в «умовному» композиційному матеріалі. Об'ємна доля «умовного» волокна буде складати величину, що дорівнює

$(1 - f_1 - f_2) \frac{f_2}{f_1 + f_2} + f_2$, де перший доданок представляє долю вихідної матриці в

представленні «умовного» волокна, а другий доданок – об'ємну долю волокна II сорту в представленні «умовного» волокна. Отже, об'ємна доля «умовного» волокна в «умовному»

композиційному матеріалі буде складати величину $\frac{f_2}{f_1 + f_2}$.

Однак, слід урахувувати, що отримані співвідношення для розрахунку пружних властивостей композиційного матеріалу оперують лише з об'ємною долею волокон і не враховують діаметр волокна і структуру укладки. Тому вищевикладену методику можна застосовувати і для інших схем армування, слід лише враховувати, що чим точніше апроксимується колом межа матеріалу матриці в моделі, тим точніше отримані результати.

Для перевірки правильності міркувань обчислимо пружні сталі двокомпонентного композиційного матеріалу як трикомпонентного за вищевикладеною методикою, розділивши об'ємну долю волокна на дві частини – волокно I сорту і волокно II сорту.

Розглянемо гумовокордний матеріал з такими компонентами: гума марки 2959 з коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,49$ та модулем пружності $E = 5,28$ МПа, корд з коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,3$ та модулем пружності $E = 1277,5$ МПа.

Представимо цей двокомпонентний композиційний матеріал як трикомпонентний згідно зі схемою, показаною на рис. 1. При цьому діаметр волокон та пружні властивості волокна I сорту і пружні властивості волокна II сорту будуть однакові. Така схема розташування волокон та висока частота армування дають змогу визначити, що в нашому трикомпонентному матеріалі відношення об'ємних долей волокон I сорту та II сорту – f_1/f_2 – прагне до 3. Об'ємний вміст корда $f = f_1 + f_2$. Побудуємо залежності для пружних властивостей композиційного матеріалу від коефіцієнта $f = 0,4..0,96$, який показує, яка загальна доля волокна в композиті (рис. 2-6).

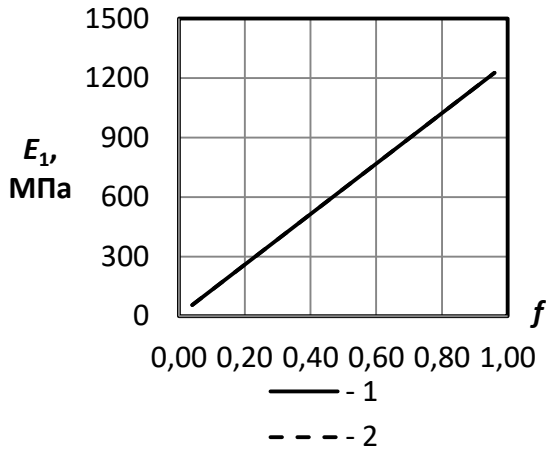


Рис. 2. Повздожній модуль пружності: 1 – формула (1), 2 – трикомпонентна модель матеріалу (співпадає з 1)

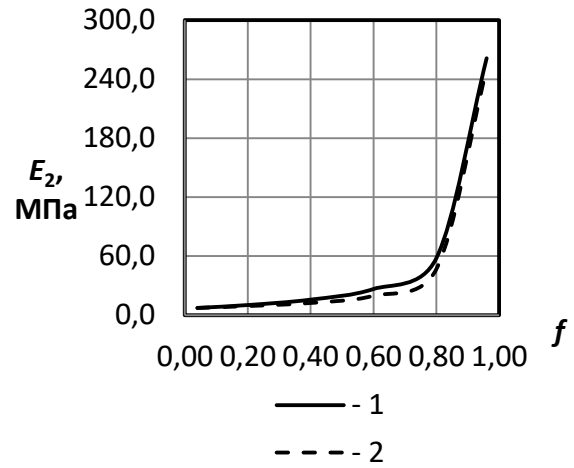


Рис. 3. Поперечний модуль пружності: 1 – формула (3), 2 – трикомпонентна модель матеріалу

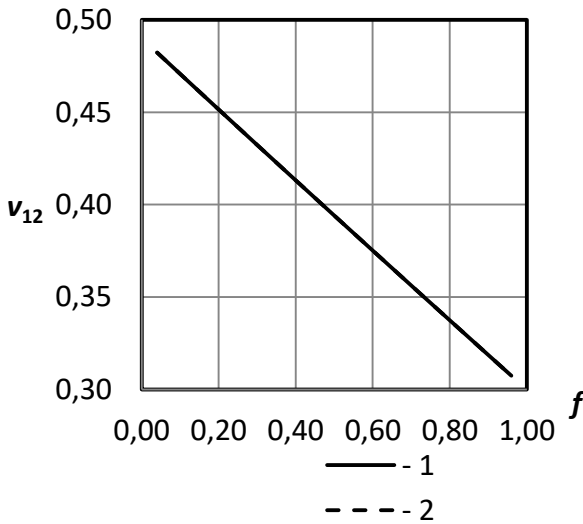


Рис. 4. Коефіцієнт Пуассона ν_{12} : 1 – формула (2), 2 – трикомпонентна модель матеріалу (співпадає з 1)

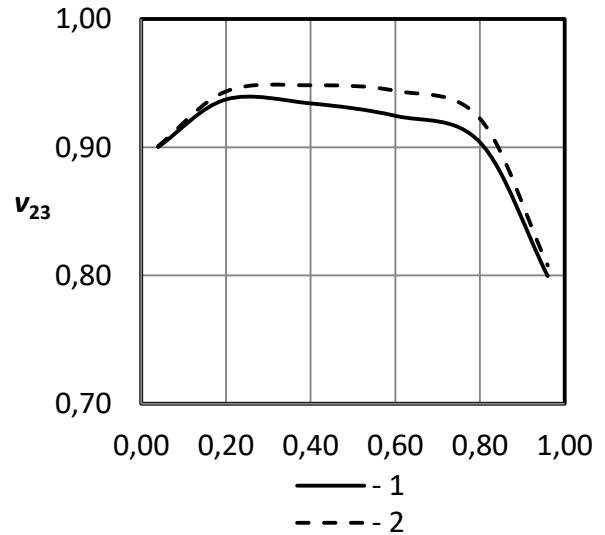


Рис. 5. Коефіцієнт Пуассона ν_{23} : 1 – формула (3), (5), 2 – трикомпонентна модель матеріалу

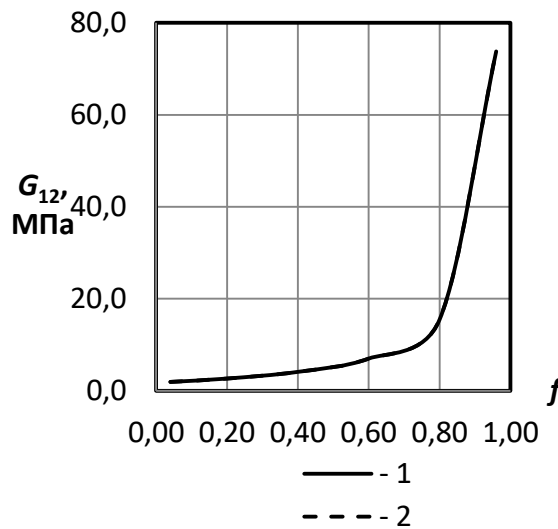


Рис. 6. Модуль зсуву G_{12} : 1 – формула (4), 2 – трикомпонентна модель матеріалу (співпадає з 1)

Отже, згідно з запропонованим підходом однорідний трансверсально-ізотропний матеріал, який описує механічну поведінку композита, армованого двома сортами односпрямованих волокон представляється трансверсально-ізотропним однорідним матеріалом. Такий підхід застосовано до визначення ефективних пружних сталей волокнистого композита, армованого одним сортом волокна, але представленого як трикомпонентний – матриця та два сорти волокна. Порівняння з чисельними результатами, отриманими за співвідношеннями інших авторів, дають добру збіжність. Для повздовжніх характеристик цей збіг повний, а для поперечних – якісна картина однакова, а значення мають незначні відмінності (не більше 3%).

ЛІТЕРАТУРА

1. Аболиньш Д. С. Тензор податливости однонаправлено армированного упругого материала / Д. С. Аболиньш // Механика полимеров. – 1965. – № 4. – С. 52-59.
2. Ван Фо Фы Г. А. Упругие постоянные и напряженное состояние стеклоленты / Г. А. Ван Фо Фы // Механика полимеров. – 1966. – № 4. – С. 593-602.
3. Tang T. Variational Asymptotic Micromechanics Modeling of Composite Materials / T. Tang. – Logan : Utah State University, 2008. – 280 p.
4. Guinovart-Díaz R. Closed-form expressions for the effective coefficients of fibre-reinforced composite with transversely isotropic constituents. I: Elastic and hexagonal symmetry / R. Guinovart-Díaz, J. Bravo-Castillero, R. Rodríguez-Ramos, F. J. Sabina // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2001. – Vol. 49. – P. 1445-1462.
5. Каспаров А. А. Упругие характеристики и механика деформирования текстильных кордов / А. А. Каспаров // Геотехническая механика. – 1999. – № 11. – С. 69-83.
6. Сендецки Дж. Упругие свойства композитов / Дж. Сендецки // Механика композиционных материалов / ред. Дж. Сендецки. – М. : Мир, 1978. – Том 2. – С. 61-101.
7. Жук Я. А. К вопросу об определении макрохарактеристик однонаправленного волокнистого композита из физически нелинейного материала при гармоническом нагружении / Я. А. Жук, И. К. Сенченков // Системні технології. – 2003. – № 4(27). – С. 62-67.
8. Большаков В. И. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры / В. И. Большаков, И. В. Андрианов, В. В. Данишевский. – Днепропетровск : «Пороги», 2008. – 196 с.
9. Хорошун Л. П. Статистическая механика и эффективные свойства материалов / Л. П. Хорошун, Б. П. Маслов, Е. Н. Шикла, Л. В. Назаренко // Механика композитов. Том 3 / [Под общей редакцией А.Н. Гузя] – К. : Наукова думка, 1993. – 388 с.
10. Kwon Y. W. Multiscale Modeling and Simulation of Composite Materials and Structures / Y. W. Kwon, D. H. Allen, R. Talreja. – New York : Springer, 2007. – 630 p.
11. Композиционные материалы : Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса. – К. : Наук. думка, 1985. – 592 с.
12. Гребенюк С. Н. Определение упругих постоянных резинокордного материала при помощи энергетического критерия согласования / С. Н. Гребенюк // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла : збірник наукових праць. – Дніпропетровськ : Наука і освіта, 2010. – Вип. 11. – С. 79-86.
13. Гребенюк С. Н. Упругие характеристики композиционного материала с трансропной матрицей и волокном / С. Н. Гребенюк // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла : збірник наукових праць. – Дніпропетровськ : Ліра, 2011. – Вип. 12. – С. 62-68.
14. Гребенюк С. Н. Определение модуля сдвига композиционного материала с трансропными матрицей и волокном / С. Н. Гребенюк // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла : збірник наукових праць. – Дніпропетровськ : Ліра, 2012. – Вип. 13. – С. 92-98.

15. Гребенюк С. Н. Определение продольного модуля упругости композита на основе энергетического условия согласования / С. Н. Гребенюк // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон : ХНТУ, 2012. – Вып. 2(45). – С. 106-110.
16. Grebenyuk S. N. The shear modulus of a composite material with a transversely isotropic matrix and a fibre / S. N. Grebenyuk // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2014. – Vol. 78, N 2. – P. 270-276.

REFERENCES

1. Abolinsh, D.S. (1965), “Tensor of the compliance of the unidirectionally reinforced elastic material”, *Mehanika polimerov*, no. 4, pp. 52-59.
2. Van Fo Fy, G.A. (1966), “The elastic constants and stress state of the glass tape”, *Mehanika polimerov*, no. 4, pp. 593-602.
3. Tang, T. (2008), *Variational Asymptotic Micromechanics Modeling of Composite Materials*, Utah State University, Logan, USA.
4. Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J., Rodríguez-Ramos, R. and Sabina, F.J. (2001), “Closed-form expressions for the effective coefficients of fibre-reinforced composite with transversely isotropic constituents. I: Elastic and hexagonal symmetry”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 49, pp. 1445-1462.
5. Kasparov, A.A. (1999), “The elastic characteristics and mechanical deformation of the textile cords”, *Heotekhnicheskaia mehanika*, no. 11, pp. 69-83.
6. Sendetski, Dzh. (1978), *The elastic properties of composites*, Mir, Moscow, Russia.
7. Zhuk, Ya.A. and Senchenkov, I.K. (2003), “On the definition of macro characteristics of unidirectional fiber composite of physically nonlinear material under harmonic loading”, *Systemni tehnologii*, no. 4(27), pp. 62-67.
8. Bolshakov, V.I., Andrianov, I.V. and Danishevskii, V.V. (2008), *Asymptotic methods of the calculation of the composite materials based on the internal structure*, Porogi, Dnepropetrovsk, Ukraine.
9. Horoshun, L.P., Maslov, B.P., Shykula, E.N. and Nazarenko, L.V. (1993), *Statistical mechanics and the effective properties of materials*, Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
10. Kwon, Y.W., Allen, D.H. and Talreja, R. (2007), *Multiscale Modeling and Simulation of Composite Materials and Structures*, Springer, New York, USA.
11. Karpinos, D.M. (1985), *Composite materials: A handbook*, Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
12. Grebeniuk, S.N. (2010), “Determination of the elastic constants of the rubber-cord material by energy matching criterion”, *Metodu rozviazuvannia prykladnyh zadach mehaniky deformivnoho tverdoho tila: zbirnyk naukovykh prats*, issue 11, pp. 79-86.
13. Grebeniuk, S.N. (2011), “Elastic characteristics of the composite material with the transtropic matrix and fiber”, *Metodu rozviazuvannia prykladnyh zadach mehaniky deformivnoho tverdoho tila: zbirnyk naukovykh prats*, issue 12, pp. 62-68.
14. Grebeniuk, S.N. (2012), “Definition of the shear modulus of the composite material with the matrix and fiber transtropic”, *Metodu rozviazuvannia prykladnyh zadach mehaniky deformivnoho tverdoho tila: zbirnyk naukovykh prats*, issue 13, pp. 92-98.
15. Grebeniuk, S.N. (2012), “Determination of the longitudinal modulus of elasticity of the composite on the basis of the energy terms of coordination”, *Vestnik Hersonskoho natsionalnoho tehnikeskoho unisersiteta*, issue 2(45), pp. 106-110.
16. Grebeniuk, S.N. (2014) “The shear modulus of a composite material with a transversely isotropic matrix and a fibre”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 78, no. 2, pp. 270-276.

УДК 539.3

МІЖФАЗНА ЕЛЕКТРИЧНО ТА МАГНІТНО ПРОНИКНА ТРІЩИНА В П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ/П'ЄЗОМАГНІТНОМУ БІМАТЕРІАЛІ

Гриневич А. А., Лобода В. В., д. ф.-м. н., професор

*Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара,
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49000, Україна*

alina.grynevych@gmail.com, loboda@mail.dsu.dp.ua

Пропонується точний аналітичний підхід до дослідження плоскої деформації п'єзоелектричного/п'єзомагнітного біматеріалу з електродованою і магнітно проникною електрично зарядженою тріщиною, розташованою на межі поділу його компонент. Вважається, що на нескінченності задано поле нормальних та дотичних напружень, електричне і магнітне поля, паралельні до берегів тріщини. Розглядається відкрита тріщина, для якої сформульована задача Гільберта. Її точний розв'язок отримано в замкнутому виді. Проведена числова ілюстрація одержаних розв'язків для різних значень електричного поля на нескінченності. Показано, що магнітне поле тріщини не впливає на електромеханічні характеристики в околі тріщини, та досліджено залежність цих характеристик від механічного навантаження та електричного поля.

Ключові слова: електрично заряджена міжфазна тріщина, п'єзоелектричний/п'єзомагнітний біматеріал, магнітна індукція.

МЕЖФАЗНАЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИ И МАГНИТНО ПРОНИКАЮЩАЯ ТРЕЩИНА В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ/ПЬЕЗОМАГНИТНОМ БИМАТЕРИАЛЕ

Гриневич А. А., Лобода В. В., д. ф.-м. н., профессор

*Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара,
просп. Гагарина, 72, г. Днепропетровск, 49000, Украина*

alina.grynevych@gmail.com, loboda@mail.dsu.dp.ua

Предлагается точный аналитический подход к исследованию плоской деформации пьезоэлектрического/пьезомагнитного биматериала с электродированой и магнитно проницаемой электрически заряженной трещиной, расположенной на границе раздела его компонент. Считается, что на бесконечности задано поле нормальных и касательных напряжений, электрическое и магнитное поля, параллельные к берегам трещины. Рассматривается открытая трещина, для которой сформулирована задача Гильберта. Её точное решение найдено в замкнутом виде. Проведена численная иллюстрация полученных решений для разных значений электрического поля на бесконечности. Показано, что магнитное поле трещины не влияет на электромеханические характеристики в окрестности трещины, и исследовано зависимость этих характеристик от механического нагружения и электрического поля.

Ключевые слова: электрически заряженная межфазная трещина, пьезоэлектрический/пьезомагнитный биматериал, магнитная индукция.

AN INTERFACE ELECTRICALLY AND MAGNETICALLY PERMEABLE CRACK IN PIEZOELECTRIC/PIEZOMAGNETIC BIMATERIAL

Grynevych A. A., Loboda V. V.

*Dnipropetrovsk National University,
ave. Gagarin, 72, Dnepropetrovsk, 49000, Ukraine*

alina.grynevych@gmail.com, loboda@mail.dsu.dp.ua

Exact analytical approach for plane stain investigation of piezoelectric/piezomagnetic bimaterial with an electroded and magnetically permeable electrically conducting crack located at the interface between its components is proposed. It is assumed that a normal and shear stresses field, the electric and magnetic fields paralleled to the crack faces are given at infinity. An open crack is considered, for which Hilbert problem has been derived. Its exact solution has been obtained in a closed form. A numerical illustration of the obtained solutions were done for different values of the electric field at infinity. It is shown that the magnetic field does not affect on the crack electromechanical characteristics, and the dependence of these parameters on the mechanical load and electric field were investigated.

Key words: electrically conducting interface crack, piezoelectric/piezomagnetic bimaterial, magnetic induction.

ВСТУП

Волокнисті та ламіновані композити, виготовлені з п'єзоелектричних/п'єзомагнітних матеріалів, проявляють магнітоелектричний ефект, який відсутній в однофазних п'єзоелектричних чи п'єзомагнітних матеріалах. Вони знайшли широке інженерне застосування в смарт-структурах, наприклад, датчики, магнітні пристрої пам'яті та в інших галузях СВЧ: електронних, оптико-електронних та електронних приборів. Ці прилади мають звичайно шарову структуру; тому інтерфейсні відшарування можуть з'явитися в процесі виробництва чи при експлуатації таких приладів. Ці відшарування можуть призвести до появи міжфазних тріщин, які є найбільш небезпечним видом дефектів у таких структурах, і є основною причиною їх руйнування. Дуже часто м'які електроди можуть бути розташовані вздовж границі поділу двох п'єзоелектричних/п'єзомагнітних матеріалів. Розшарування таких електродів зазвичай призводить до появи інтерфейсних тріщин, які мають визначений електричний заряд. Більш того, електроди можуть бути виготовлені з сегнетоелектричних матеріалів з визначеними магнітними властивостями, такими, як залишкова індукція. Отже, дослідження електрично заряджених електрично провідних тріщин, що мають визначену магнітну залишкову індукцію, дуже важливо для кращого розуміння та прогнозування поведінки та відмови п'єзоелектричних/п'єзомагнітних приладів.

У роботі [1] розглядалася проблема електричного поля навколо електрично провідної тріщини в діелектриках. Проблема електрично провідної тріщини в однорідному п'єзоелектричному матеріалі була розглянута [2-4], а така ж тріщина між двома різними п'єзоелектричними матеріалами була розглянута [5] в рамках відкритої моделі тріщини.

Тим не менш, наскільки відомо, електропровідна міжфазна тріщина в п'єзоелектричному біматеріалі, яка має визначений електричний заряд і магнітну залишкову індукцію, не вивчена, не дивлячись на можливість появи значних напружень для таких тріщин під дією електричного та магнітного полів. Указана проблема і розглядається в нашій роботі з метою аналізу впливу електричних та магнітних полів на особливості деформування п'єзоелектромагнітних елементів з міжфазними тріщинами.

ЗАГАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОСНОВНИХ РІВНЯНЬ

У прямокутній системі координат x_j ($j=1,2,3$) рівняння стану для пружного матеріалу, які враховують його п'єзоелектричні та п'єзомагнітні властивості, можуть бути записані у вигляді:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = c_{ijkl}\gamma_{kl} - e_{ij}E_l - h_{ij}H_l, \\ D_i = e_{ikl}\gamma_{kl} + \alpha_{ii}E_l + d_{il}H_l, \\ B_i = h_{ikl}\gamma_{kl} + d_{il}E_l + \mu_{ii}H_l, \end{cases} \quad (1)$$

де σ_{ij} , γ_{ij} – відповідно поля механічних напружень та деформації; D_i , B_i – відповідно поля електричної та магнітної індукції; E_i , H_i – відповідно компоненти електричного та магнітного полів. Також c_{ijkl} , e_{ikl} , h_{ikl} , d_{il} – відповідно компоненти пружної, п'єзоелектричної, п'єзомагнітної та магнітоелектричної матриць; α_{ii} , μ_{ii} – діелектрична та магнітна проникність; i, j, k, l набувають значення $\{1,2,3\}$ і приймається підсумовування за індексами, що повторюються.

Рівняння рівноваги за відсутності в середовищі масових сил, електричних та магнітних зарядів, такі:

$$\sigma_{ij,i} = 0, \quad D_{i,i} = 0, \quad B_{i,i} = 0, \quad (2)$$

де кома означає похідні по відповідним координатним змінним.

Вирази для деформації, електричного та магнітного полів такі:

$$\gamma_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_i = -\varphi_{,i}, \quad H_i = -\psi_{,i}, \quad (3)$$

де u_i – компоненти механічного переміщення, φ , ψ – відповідно електричний та магнітний потенціали.

З (1)-(3) отримуємо рівняння:

$$\begin{cases} (c_{ijkl}u_k + e_{ij}\varphi + h_{ij}\psi)_{,li} = 0, \\ (e_{ikl}u_k - \alpha_{il}\varphi - d_{il}\psi)_{,li} = 0, \\ (h_{ikl}u_k - d_{il}\varphi - \mu_{il}\psi)_{,li} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Введемо вектори:

$$\mathbf{V} = \{u_1, u_2, u_3, \varphi, \psi\}^T, \quad \mathbf{t} = \{\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}, D_3, B_3\}^T. \quad (5)$$

Оскільки всі поля не залежать від координати x_2 , то розв’язок рівнянь (4) відповідно до методу, запропонованого в [6] для анізотропного матеріалу, може бути представлено у вигляді [7]:

$$\mathbf{V} = \mathbf{af}(z), \quad (6)$$

де $z = x_1 + px_3$, вектор $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]^T$ знаходиться з рівняння:

$$[\mathbf{Q} + p(\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}^T) + p^2\mathbf{T}]\mathbf{a} = 0, \quad (7)$$

а елементи матриць \mathbf{Q} , $\mathbf{\Pi}$ та \mathbf{T} розмірності 5×5 визначаються як

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1121} & c_{1131} & e_{111} & h_{111} \\ c_{1211} & c_{1221} & c_{1231} & e_{121} & h_{121} \\ c_{1311} & c_{1321} & c_{1331} & e_{131} & h_{131} \\ e_{111} & e_{121} & e_{131} & -\alpha_{11} & -d_{11} \\ h_{111} & h_{121} & h_{131} & -d_{11} & -\mu_{11} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} c_{1112} & c_{1122} & c_{1132} & e_{211} & h_{211} \\ c_{1212} & c_{1222} & c_{1232} & e_{221} & h_{221} \\ c_{1312} & c_{1322} & c_{1332} & e_{231} & h_{231} \\ e_{112} & e_{122} & e_{132} & -\alpha_{12} & -d_{12} \\ h_{112} & h_{122} & h_{132} & -d_{12} & -\mu_{12} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_{2112} & c_{1122} & c_{1132} & e_{212} & h_{212} \\ c_{2212} & c_{1222} & c_{1232} & e_{222} & h_{222} \\ c_{2312} & c_{1322} & c_{1332} & e_{232} & h_{232} \\ e_{212} & e_{222} & e_{232} & -\alpha_{22} & -d_{22} \\ h_{212} & h_{222} & h_{232} & -d_{22} & -\mu_{22} \end{bmatrix}.$$

Ненульовий розв’язок системи (7) існує, якщо p є коренем рівняння:

$$\det[\mathbf{Q} + p(\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}^T) + p^2\mathbf{T}] = 0. \quad (8)$$

Оскільки рівняння (8) не має дійсних коренів [7], позначимо корені цього рівняння з додатною уявною частиною через p_α і відповідні власні вектори (6) через \mathbf{a}_α (нижній індекс α тут і далі набуває значення від 1 до 5). Тоді загальний розв’язок рівнянь (4) може бути поданий у вигляді [7]:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Af}(z) + \overline{\mathbf{Af}}(\bar{z}), \quad (9)$$

де $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5]$ – матриця, складена з власних векторів системи (7), $\mathbf{f}(z) = [f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_3), f_4(z_4), f_5(z_5)]^T$ – довільна аналітична вектор-функція, $z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_3$, а риска означає комплексно-спряжену величину.

З використанням рівнянь (1) вектор \mathbf{t} , введений в (5), може бути поданий у вигляді:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}\mathbf{f}'(z) + \overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{f}}'(\bar{z}), \quad (10)$$

де матриця \mathbf{B} розмірності 5×5 визначається як

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5],$$

$$\mathbf{b}_\alpha = (\mathbf{\Pi}^T + p_\alpha \mathbf{T})\mathbf{a}_\alpha \text{ (сумування по } \alpha \text{ не проводиться),}$$

$$\mathbf{f}'(z) = \left[\frac{df_1(z_1)}{dz_1}, \frac{df_2(z_2)}{dz_2}, \frac{df_3(z_3)}{dz_3}, \frac{df_4(z_4)}{dz_4}, \frac{df_5(z_5)}{dz_5} \right]^T.$$

Далі, вводячи вектори $\mathbf{L} = [u'_1, u'_2, u'_3, D_3, B_3]^T$ та $\mathbf{P} = [\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}, E_1, H_1]^T$ на основі (9) та (10), будемо представлення:

$$\mathbf{L} = \mathbf{M}\mathbf{f}'(z) + \overline{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{f}}'(\bar{z}),$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{N}\mathbf{f}'(z) + \overline{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{f}}'(\bar{z}),$$

де матриці \mathbf{M} та \mathbf{N} знаходяться за допомогою перетворення матриць \mathbf{A} , \mathbf{B} і мають вигляд:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ b_{4j} \\ b_{5j} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ -a_{4j} \\ -a_{5j} \end{bmatrix}.$$

Проводячи далі аналіз, аналогічний до статті [8], отримуємо

$$\langle \mathbf{L}(x_1) \rangle = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \quad (11)$$

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{S}\mathbf{W}^+(x_1) - \overline{\mathbf{S}}\mathbf{W}^-(x_1), \quad (12)$$

де $\mathbf{S} = \mathbf{N}^{(1)}\mathbf{D}^{-1}$, $\mathbf{D} = \mathbf{M}^{(1)} - \overline{\mathbf{M}}^{(2)}(\overline{\mathbf{N}}^{(2)})^{-1}\mathbf{N}^{(1)}$.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається плоска деформація біматеріалу, складеного з півпросторів $x_3 > 0$ та $x_3 < 0$, поляризованих за напрямком осі x_3 і зчеплених по інтерфейсу $x_3 = 0$. На відріжку $x_1 \in (c, b)$ інтерфейсу розташована електродована тріщина (рис. 1), яка вважається відкритою, електрично- та магнітнопровідною, тобто на її берегах електричний та магнітний потенціали розподіляються рівномірно, а значить електричне та магнітне поля мають вигляд

$$E_1^{(1)}(x_1, 0) = E_1^{(2)}(x_1, 0) = 0 \quad \text{та} \quad H_1^{(1)}(x_1, 0) = H_1^{(2)}(x_1, 0) = 0 \quad \text{для} \quad x_1 \in (c, b). \quad (13)$$

Крім того, на тріщині задано сумарний електричний заряд величини D_0 та сумарну магнітну індукцію B_0 . Така ситуація часто виникає на практиці внаслідок розшарування механічно

м'якого внутрішнього електроду, виготовленого із феромагнітного матеріалу. При цьому електрод може бути попередньо намагніченим та підключеним до позитивного або негативного електричного джерела живлення. У таких випадках треба враховувати ненульові значення D_0 та B_0 . У часткових випадках, коли електрод заземлено і його намагніченість відсутня, відповідні значення D_0 або B_0 треба прийняти рівними нулю.

Вважаємо також, що на нескінченості задані рівномірно розподілені механічні напруження і електричне та магнітне поля

$$\sigma_{13}^\infty = \tau^\infty, \quad \sigma_{33}^\infty = \sigma^\infty, \quad E_1^\infty = e^\infty, \quad H_1^\infty = h^\infty. \quad (14)$$

Окрім (13), інші умови на інтерфейсі $x_1 \in (c, b)$ (рис. 1) набувають вигляду:

$$\sigma_{i3}^{(1)}(x_1, 0) = \sigma_{i3}^{(2)}(x_1, 0), \quad E_1^{(1)}(x_1, 0) = E_1^{(2)}(x_1, 0), \quad H_1^{(1)}(x_1, 0) = H_1^{(2)}(x_1, 0) \quad \text{для } x_1 \in L, \quad (15)$$

$$D_3^{(1)}(x_1, 0) = D_3^{(2)}(x_1, 0), \quad u_i^{(1)}(x_1, 0) = u_i^{(2)}(x_1, 0), \quad B_3^{(1)}(x_1, 0) = B_3^{(2)}(x_1, 0) \quad \text{для } x_1 \in L, \quad (16)$$

$$\sigma_{i3}^{(m)}(x_1, 0) = 0 \quad \text{для } x_1 \in (c, b), \quad (17)$$

де $m=1, 2$, u_i , E_i , H_i , σ_{ij} , D_i , B_i – відповідно компоненти вектора переміщень, електричного та магнітного полів, механічних напружень, електричної та магнітної індукції; $i, j = 1, 3$, $L = (-\infty, \infty) \setminus (c, b)$.

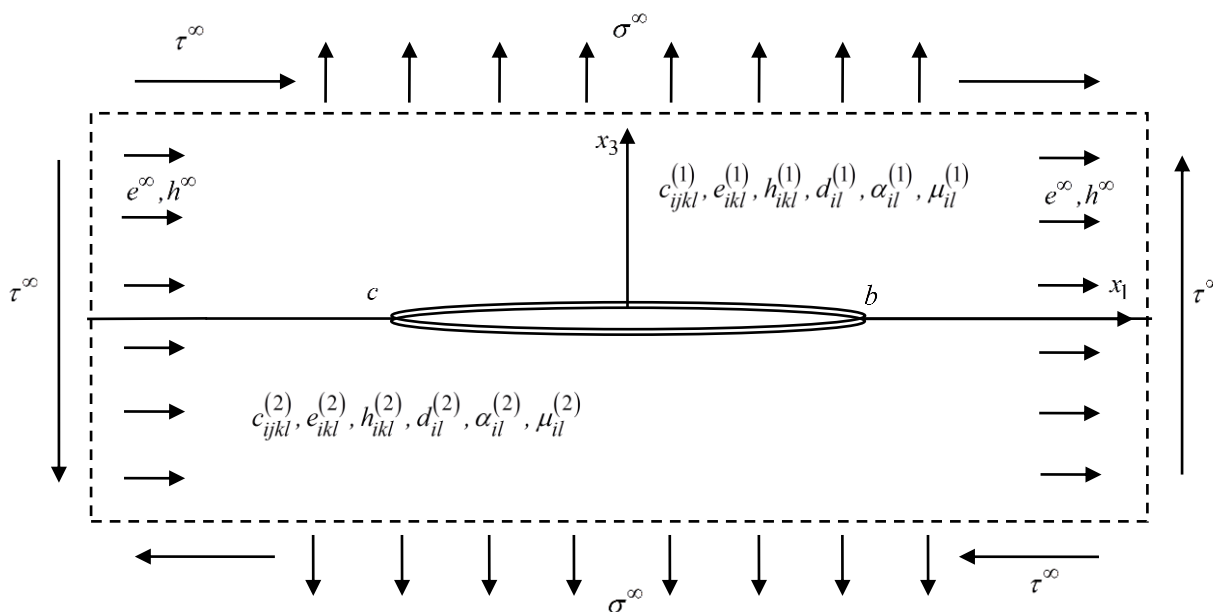


Рис. 1. Електро- та магнітно-провідна відкрита тріщина в біматеріалі

Оскільки розглядаємо задачу плоскої деформації, тому W_2 виключаємо з розгляду. З цієї причини з розгляду виключаємо другі рядки та стовбці матриць та векторів у наступному аналізі.

Враховуючи, що $\mathbf{W}^+(x_1) = \mathbf{W}^-(x_1) = \mathbf{W}(x_1)$ при $x_1 \rightarrow \infty$, отримуємо з (12) та (14) при $x_1 \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}^\infty = (\mathbf{S} - \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{W}^\infty, \quad (18)$$

де $\mathbf{P}^\infty = [\tau^\infty, \sigma^\infty, e^\infty, h^\infty]$, та $\mathbf{W}^\infty = \mathbf{W}(z)$ для $z \rightarrow \infty$.

З рівняння (18) отримуємо

$$\mathbf{W}^\infty = (\mathbf{S} - \bar{\mathbf{S}})^{-1} \mathbf{P}^\infty.$$

Задовольняючи граничним умовам на (c, b) , отримуємо:

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = 0,$$

тоді

$$\mathbf{S}\mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{S}}\mathbf{W}^-(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in (c, b)$$

або

$$\mathbf{W}^+(x_1) - (\mathbf{S})^{-1} \bar{\mathbf{S}}\mathbf{W}^-(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in (c, b). \quad (19)$$

Розв'язок задачі лінійного спряження (19) може бути отриманий аналогічно [7], але ми розглядаємо інший підхід.

Розглянемо довільну однорядкову матрицю $\mathbf{R} = [R_1, R_3, R_4, R_5]$. На основі (12) маємо

$$\mathbf{R}\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{R}\bar{\mathbf{S}}\mathbf{W}^-(x_1). \quad (20)$$

Вводимо функцію

$$F(z) = \mathbf{T}\mathbf{W}(z), \quad (21)$$

де $\mathbf{T} = [T_1, T_3, T_4, T_5] = \mathbf{R}\mathbf{S}$.

Покладаючи $\mathbf{R}\bar{\mathbf{S}} = -\gamma\mathbf{R}\mathbf{S}$, рівняння (20) запишемо у вигляді:

$$\mathbf{R}\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = F^+(x_1) + \gamma F^-(x_1), \quad (22)$$

де γ та \mathbf{R}^T – власне значення та власний вектор системи:

$$(\gamma\mathbf{S}^T + \bar{\mathbf{S}}^T)\mathbf{R}^T = 0. \quad (23)$$

Для найбільш важливого п'єзоелектричного/п'єземагнітного матеріалу $\text{BaTiO}_3\text{-CoFe}_2\text{O}_4$ матриця \mathbf{S} має структуру

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} i s_{11} & s_{13} & i s_{14} & i s_{15} \\ s_{31} & i s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ i s_{41} & s_{43} & i s_{44} & i s_{45} \\ i s_{51} & s_{53} & i s_{54} & i s_{55} \end{bmatrix},$$

де всі s_{jk} дійсні та $s_{31} = -s_{13}$, $s_{14} = -s_{41}$, $s_{43} = s_{34}$, $s_{51} = -s_{15}$, $s_{45} = s_{54}$, $s_{35} = s_{53}$. У цьому випадку корені рівняння $\det(\gamma\mathbf{S}^T + \bar{\mathbf{S}}^T) = 0$ мають вигляд:

$$\gamma_1 = \frac{1 + \delta}{1 - \delta}, \quad \gamma_3 = \gamma_1^{-1}, \quad \gamma_4 = 1, \quad \gamma_5 = 1, \quad (24)$$

де

$$\delta^2 = \frac{-s_{51}t_1 + s_{53}t_3 - s_{54}t_5 + s_{55}t_7}{s_{51}t_2 + s_{54}t_4 - s_{55}t_6}, \quad t_1 = s_{13}s_{34}s_{45} + s_{14}s_{35}s_{43} - s_{15}s_{34}s_{43} - s_{13}s_{35}s_{44},$$

$$\begin{aligned}
 t_2 &= -s_{15}s_{33}s_{44} + s_{14}s_{33}s_{45}, & t_3 &= s_{11}s_{34}s_{45} + s_{14}s_{35}s_{41} + s_{15}s_{31}s_{44} - s_{15}s_{34}s_{41} - s_{14}s_{31}s_{45} - s_{35}s_{44}s_{11}, \\
 t_4 &= -s_{11}s_{33}s_{45} - s_{15}s_{33}s_{41}, & t_5 &= s_{13}s_{35}s_{41} + s_{15}s_{31}s_{43} - s_{11}s_{35}s_{43} - s_{45}s_{13}s_{31}, \\
 t_6 &= -s_{11}s_{33}s_{44} + s_{41}s_{33}s_{14}, & t_7 &= s_{13}s_{41}s_{34} + s_{31}s_{43}s_{14} - s_{31}s_{13}s_{44} - s_{11}s_{34}s_{43}.
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Власний вектор $\mathbf{R}_j^T = [R_{j1}, R_{j3}, R_{j4}, R_{j5}]^T$, пов'язаний з власним значенням γ_j ($j=1,3,4,5$), може бути знайдений з системи (23). Аналіз показує, що для $\delta^2 > 0$ матриця \mathbf{R} , складена з власних векторів \mathbf{R}_j^T , має структуру:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} ir_{11} & 1 & ir_{14} & ir_{15} \\ ir_{31} & 1 & ir_{34} & ir_{35} \\ ir_{41} & 0 & i & 0 \\ ir_{51} & 0 & 0 & i \end{bmatrix},$$

де всі r_{jk} дійсні та $r_{41} = -\frac{s_{43}}{s_{13}}$, $r_{51} = -\frac{s_{53}}{s_{13}}$, а r_{11}, r_{14}, r_{15} та r_{31}, r_{34}, r_{35} визначаються з системи (23)

для γ_1 та γ_3 , відповідно.

Чисельний аналіз показує, що для всіх п'єзоелектромагнітних керамік, поляризованих у напрямку x_3 , нерівність $\delta^2 > 0$ справедлива. Компоненти матриці

$$\mathbf{T} = \mathbf{RS}, \tag{26}$$

які складаються з однострокових матриць $\mathbf{T}_j = [T_{j1}, T_{j3}, T_{j4}, T_{j5}] = \mathbf{R}_j \mathbf{S}$ ($j=1,3,4,5$) для $\delta^2 > 0$ можуть бути представлені у формі $T_{j1} = t_{j1}$, $T_{j3} = it_{j3}$, $T_{j4} = t_{j4}$, $T_{j5} = t_{j5}$, де всі t_{jk} ($j, k = 1,3,4,5$) є дійсними та $t_{43} = 0$, $t_{53} = 0$.

Використовуючи співвідношення (21) та (22), ми отримуємо

$$\mathbf{R}_j \mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \tag{27}$$

де

$$F_j(z) = \mathbf{T}_j \mathbf{W}(z). \tag{28}$$

З останнього співвідношення витікає, що функції $F_j(z)$ мають ті ж властивості, що і $\mathbf{W}(z)$. Зокрема, для граничних умов (15)-(17) вони аналітичні у всій площині за винятком області тріщини (c, b) . Тоді з (28) маємо

$$F_j(z) = t_{j1}W_1(z) + it_{j3}W_3(z) + t_{j4}W_4(z) + t_{j5}W_5(z).$$

Враховуючи представлення (11), з останнього рівняння отримуємо

$$t_{j1} \langle u'_1(x_1) \rangle + it_{j3} \langle u'_3(x_1) \rangle + t_{j4} \langle D_3(x_1) \rangle + t_{j5} \langle B_3(x_1) \rangle = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1). \tag{29}$$

Розкриваючи далі ліву частину (27) та враховуючи структуру матриці \mathbf{R} , приходимо до співвідношення

$$ir_j \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) + r_{j3} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + ir_{j4} E_1^{(1)}(x_1, 0) + ir_{j5} H_1^{(1)}(x_1, 0) = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \tag{30}$$

де r_{ij} та t_{ij} ($i, j = 1, 3, 4, 5$) – компоненти відомих матриць, а γ_j константи, які визначаються фізичними характеристиками матеріалів, причому $r_{13} = r_{33} = r_{44} = r_{55} = 1$ та $r_{43} = r_{45} = r_{53} = r_{54} = 0$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Задовольняючи за допомогою представлень (30) граничним умовам (17), приходимо до таких задач лінійного спряження:

$$F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in (c, b). \quad (31)$$

Використовуючи задані граничні умови на нескінченності (14), можемо записати:

$$F_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j, \quad (32)$$

де $\tilde{\sigma}_j = \frac{r_{j3}\sigma^\infty}{g_j}$, $\tilde{\tau}_j = -\frac{1}{g_j}(r_{j1}\tau^\infty + r_{j4}e^\infty + r_{j5}h^\infty)$, ($j = 1, 3, 4, 5$), $g_k = 1 + \gamma_k$, ($k = 1, 3$), $g_4 = g_5 = 2$.

На основі (29), з урахуванням умов однозначності зміщень при обході контуру тріщини,

$$\int_c^b \langle u'_k(x_1) \rangle dx_1 = 0, \quad k = 1, 3,$$

і теореми Гауса, застосованої до контуру, співпадаючого з берегами тріщини,

$$\int_c^b \langle D_3(x_1) \rangle dx_1 = D_0, \quad \int_c^b \langle B_3(x_1) \rangle dx_1 = B_0 \quad (33)$$

отримуємо

$$\int_c^b \{F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1)\} dx_1 = t_{j4}D_0 + t_{j5}B_0, \quad j = 1, 3, 4, 5. \quad (34)$$

На основі [9] розв'язок задачі (31) знаходимо у вигляді

$$F_j(z) = \frac{c_{0j} + c_{1j}z}{\sqrt{(z-c)(z-b)}} \left(\frac{z-c}{z-b} \right)^{i\varepsilon_j}, \quad (35)$$

де $\varepsilon_j = \frac{\ln(\gamma_j)}{2\pi}$, $j = 1, 3, 4, 5$.

Довільні константи c_{0j} , c_{1j} ($j = 1, 3, 4, 5$) знаходяться з умов на нескінченності (32), та додаткових умов (34), що забезпечують виконання умов однозначності переміщень та теорему Гауса. При цьому відомо [10], що умови (34) буде виконано, якщо коефіцієнт при z^{-1} в розкладенні $F_j(z)$ на нескінченності дорівнює $i(t_{j4}D_0 + t_{j5}B_0)/(2\pi)$. Після розкладення $F_j(z)$ на нескінченності та використання рівнянь (32) та (34), знаходимо:

$$F_j(z) = i \frac{t_{j4}D_0 + t_{j5}B_0}{2\pi} \chi_j(z) + (z - 2ib\varepsilon_j)(\tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j) \chi_j(z), \quad j = 1, 3, 4, 5,$$

де $\chi_j(z) = (z-c)^{\frac{1}{2}+i\varepsilon_j} (z-b)^{\frac{1}{2}-i\varepsilon_j}$.

Оскільки $F_j^+(x_1) = F_j^-(x_1) = F_j(x_1)$ ($j = 1, 3, 4, 5$) для $x_1 > b$, то з рівняння (30) одержуємо формулу для $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) = \frac{1 + \gamma_1}{r_{13}} \operatorname{Re} F_1(x_1) \quad \text{для } x_1 > b. \quad (36)$$

Уявна частина системи рівнянь (30) формує СЛАР для визначення $\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0)$, $E_1^{(1)}(x_1, 0)$ та $H_1^{(1)}(x_1, 0)$:

$$\begin{cases} r_{11}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) + r_{14}E_1^{(1)}(x_1, 0) + r_{15}H_1^{(1)}(x_1, 0) = (1 + \gamma_1) \operatorname{Im} F_1(x_1), \\ r_{41}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) + r_{44}E_1^{(1)}(x_1, 0) + r_{45}H_1^{(1)}(x_1, 0) = 2 \operatorname{Im} F_4(x_1), \\ r_{51}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) + r_{54}E_1^{(1)}(x_1, 0) + r_{55}H_1^{(1)}(x_1, 0) = 2 \operatorname{Im} F_5(x_1) \end{cases} \quad \text{для } x_1 > b,$$

з якої для $x_1 > b$ одержуємо:

$$\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \frac{(1 + \gamma_1)(r_{44}r_{55} - r_{45}r_{54}) \operatorname{Im} F_1(x_1) + 2(r_{54}r_{15} - r_{14}r_{55}) \operatorname{Im} F_4(x_1) + 2(r_{14}r_{45} - r_{44}r_{15}) \operatorname{Im} F_5(x_1)}{\Delta_1}, \quad (37)$$

$$E_1^{(1)}(x_1, 0) = \frac{(1 + \gamma_1)(r_{45}r_{51} - r_{41}r_{55}) \operatorname{Im} F_1(x_1) + 2(r_{11}r_{55} - r_{15}r_{51}) \operatorname{Im} F_4(x_1) + 2(r_{41}r_{15} - r_{11}r_{45}) \operatorname{Im} F_5(x_1)}{\Delta_1}, \quad (38)$$

$$H_1^{(1)}(x_1, 0) = \frac{(1 + \gamma_1)(r_{41}r_{54} - r_{51}r_{44}) \operatorname{Im} F_1(x_1) + 2(r_{14}r_{51} - r_{11}r_{54}) \operatorname{Im} F_4(x_1) + 2(r_{11}r_{44} - r_{14}r_{41}) \operatorname{Im} F_5(x_1)}{\Delta_1}, \quad (39)$$

де $\Delta_1 = r_{11}(r_{44}r_{55} - r_{54}r_{45}) + r_{41}(r_{54}r_{15} - r_{14}r_{55}) + r_{51}(r_{14}r_{45} - r_{15}r_{44})$.

Оскільки $F_j^-(x_1) = -\frac{1}{\gamma_j} F_j^+(x_1)$ ($j = 1, 3, 4, 5$) для $x_1 \in (c, b)$, то з рівняння (29) одержуємо

СЛАР для визначення електро- та магнітномеханічних факторів:

$$\begin{cases} t_{11} \langle u_1'(x_1) \rangle + it_{13} \langle u_3'(x_1) \rangle + t_{14} \langle D_3(x_1) \rangle + t_{15} \langle B_3(x_1) \rangle = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1} F_1(x_1), \\ t_{41} \langle u_1'(x_1) \rangle + t_{44} \langle D_3(x_1) \rangle + t_{45} \langle B_3(x_1) \rangle = 2F_4(x_1), \\ t_{51} \langle u_1'(x_1) \rangle + t_{54} \langle D_3(x_1) \rangle + t_{55} \langle B_3(x_1) \rangle = 2F_5(x_1), \end{cases} \quad \text{для } x_1 \in (c, b). \quad (40)$$

З першого рівняння (40) похідна розкриття тріщини матиме вигляд:

$$\langle u_3'(x_1) \rangle = \frac{\gamma_1 + 1}{t_{13}\gamma_1} \operatorname{Im} F_1(x_1), \quad (41)$$

тобто розкриття тріщини на основі (41) записується у формі

$$\langle u_3(x_1) \rangle = \frac{\gamma_1 + 1}{t_{13}\gamma_1} \int_c^{x_1} \operatorname{Im} F_1(x_1) dx_1 \quad \text{для } x_1 \in (c, b). \quad (42)$$

Дійсні частини системи рівнянь (40) формують СЛАР для визначення $\langle u_1'(x_1) \rangle$, $\langle D_3(x_1) \rangle$ та $\langle B_3(x_1) \rangle$:

$$\begin{cases} t_{11} \langle u_1'(x_1) \rangle + t_{14} \langle D_3(x_1) \rangle + t_{15} \langle B_3(x_1) \rangle = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1} F_1(x_1), \\ t_{41} \langle u_1'(x_1) \rangle + t_{44} \langle D_3(x_1) \rangle + t_{45} \langle B_3(x_1) \rangle = 2F_4(x_1), \\ t_{51} \langle u_1'(x_1) \rangle + t_{54} \langle D_3(x_1) \rangle + t_{55} \langle B_3(x_1) \rangle = 2F_5(x_1) \end{cases} \quad \text{для } x_1 \in (c, b).$$

З цієї системи для $x_1 \in (c, b)$ отримуємо:

$$\langle u_1'(x_1) \rangle = \frac{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}(t_{44}t_{55} - t_{45}t_{54})\text{Re } F_1(x_1) + 2(t_{54}t_{15} - t_{14}t_{55})\text{Re } F_4(x_1) + 2(t_{14}t_{45} - t_{44}t_{15})\text{Re } F_5(x_1)}{\Delta_2}, \quad (43)$$

$$\langle D_3(x_1) \rangle = \frac{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}(t_{45}t_{51} - t_{41}t_{55})\text{Re } F_1(x_1) + 2(t_{11}t_{55} - t_{15}t_{51})\text{Re } F_4(x_1) + 2(t_{41}t_{15} - t_{11}t_{45})\text{Re } F_5(x_1)}{\Delta_2}, \quad (44)$$

$$\langle B_3(x_1) \rangle = \frac{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}(t_{41}t_{54} - t_{51}t_{44})\text{Re } F_1(x_1) + 2(t_{14}t_{51} - t_{11}t_{54})\text{Re } F_4(x_1) + 2(t_{11}t_{44} - t_{14}t_{41})\text{Re } F_5(x_1)}{\Delta_2}, \quad (45)$$

де $\Delta_2 = t_{11}(t_{44}t_{55} - t_{54}t_{45}) + t_{41}(t_{54}t_{15} - t_{14}t_{55}) + t_{51}(t_{14}t_{45} - t_{15}t_{44})$.

Тобто всі шукані компоненти σ_{33} , σ_{13} , E_1 , H_1 вздовж інтерфейсу для $x_1 > b$ визначені відповідно в (36), (37), (38), (39); розкриття ж тріщини $\langle u_3 \rangle$ та стрибки компонент D_3 і B_3 для $x_1 \in (c, b)$ – визначені формулами (43), (44) та (45) відповідно.

ВІЗУАЛІЗАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ

Розглянемо вплив зовнішніх механічних, електричних та магнітних навантажень, а також загального електричного заряду тріщини та магнітної індукції на напруження, електричне та магнітне поля. Біматеріал складений з $\text{BaTiO}_3\text{-CoFe}_2\text{O}_4$ композитів з об'ємною долею (Vf) п'єзоелектрика BaTiO_3 рівного 0.5 (верхній матеріал) та 0.1 (нижній матеріал) [11] був вибраний для численних розрахунків. Для області тріщини вибиралось $c = -0,01$ м та $b = 0,01$ м.

На рис. 2 показано нормальне напруження на продовженні тріщини. Ці результати отримані для $\sigma^\infty = 10$ МПа; $\tau^\infty = 0.0$ Па, $D_0 = 0.0$ Кл/м та $B_0 = 1.0$ Н/А. Крім того, лінія I отримана для $e^\infty = 0$, $h^\infty = 0$; лінія II – для $e^\infty = 0.4 \times 10^7$ В/м, $h^\infty = 0$; лінія III – для $e^\infty = 0$, $h^\infty = -0,25 \times 10^6$ А/м. Можна побачити з отриманих результатів, що електричні та магнітні поля, а також загальний електричний заряд тріщини та сумарна магнітна індукція суттєво впливають на нормальне напруження на продовженні тріщини.

На рис. 3 для різних e^∞ та h^∞ наведені графіки зміни електричного поля для відкритої тріщини на її продовженні (I – $e^\infty = 0$, $h^\infty = 0$; II – $e^\infty = 0.4 \times 10^7$ В/м, $h^\infty = 0$; III – $e^\infty = 0$, $h^\infty = -0,25 \times 10^6$ А/м). На рис. 4 для різних значень e^∞ та h^∞ наведені відповідні графіки зміни стрибка $\langle D_3(x_1) \rangle$ вздовж області тріщини (I – $e^\infty = 0$, $h^\infty = 0$; II – $e^\infty = 0.4 \times 10^7$ В/м, $h^\infty = 0$; III – $e^\infty = 0$, $h^\infty = -0,25 \times 10^6$ А/м).

З отриманих результатів видно, що електричні та магнітні поля мають значний вплив на шукані компоненти електричного поля та електричної індукції особливо біля вершини

тріщини. Слід також відзначити, що електричне поле $E_1^{(1)}(x_1, 0)$ зростає дуже швидко по абсолютній величині в околі вершини тріщини. Поведінка стрибків електричного зміщення $\langle D_3(x_1) \rangle$ через область тріщини продемонструвала їх суттєве зростання у вершинах тріщини через особливості в цих точках. Найбільше зростання по всій області тріщини спостерігається зі збільшенням модуля e^∞ при нульовому магнітному полі.

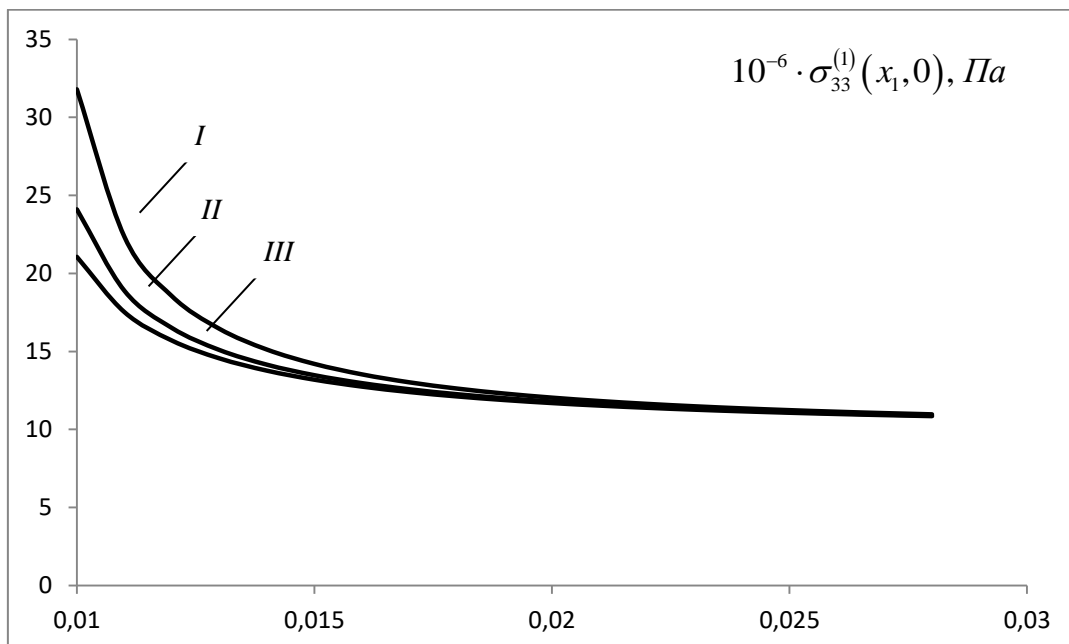


Рис. 2. Розподіл нормального напруження $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$ на продовженні тріщини для біматеріалу Vf5/Vf1 за $\sigma^\infty = 10^7 \text{ Па}$, $\tau^\infty = 0.0 \text{ Па}$, $D_0 = 0.0 \text{ Кл/м}$, $B_0 = 1.0 \text{ Н/А}$,
 I – $e^\infty = 0$, $h^\infty = 0$; II – $e^\infty = 0.4 \times 10^7 \text{ В/м}$, $h^\infty = 0$; III – $e^\infty = 0$, $h^\infty = -0.25 \times 10^6 \text{ А/м}$

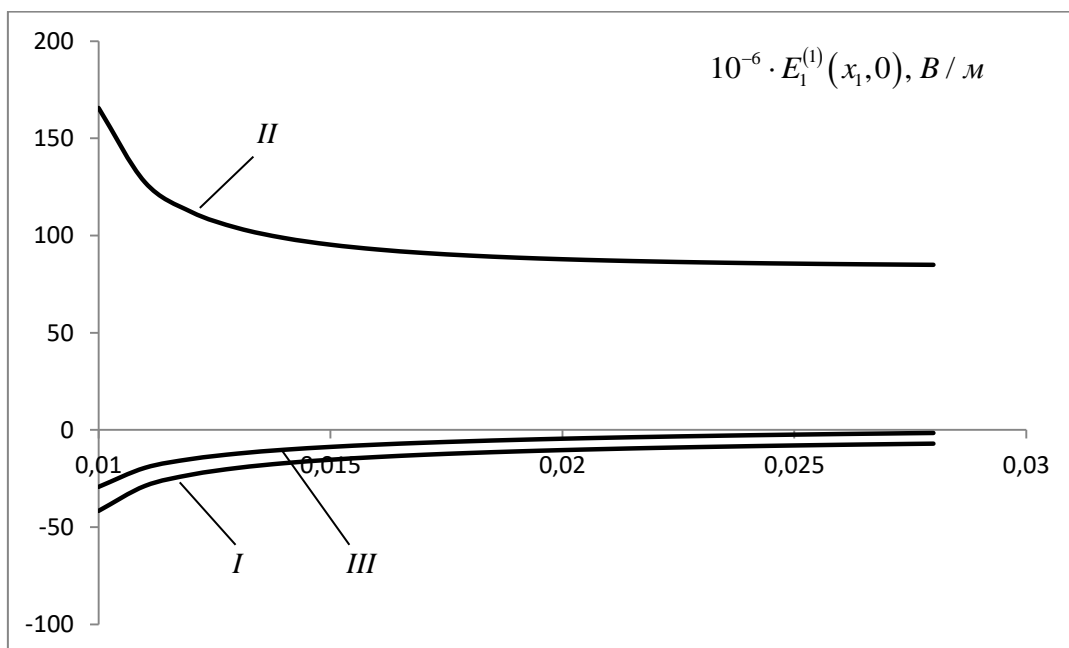


Рис. 3. Розподіл електричного поля $E_1^{(1)}(x_1, 0)$ на продовженні тріщини за таких же зовнішніх напружень, електричного та магнітного полів, як в рис. 2

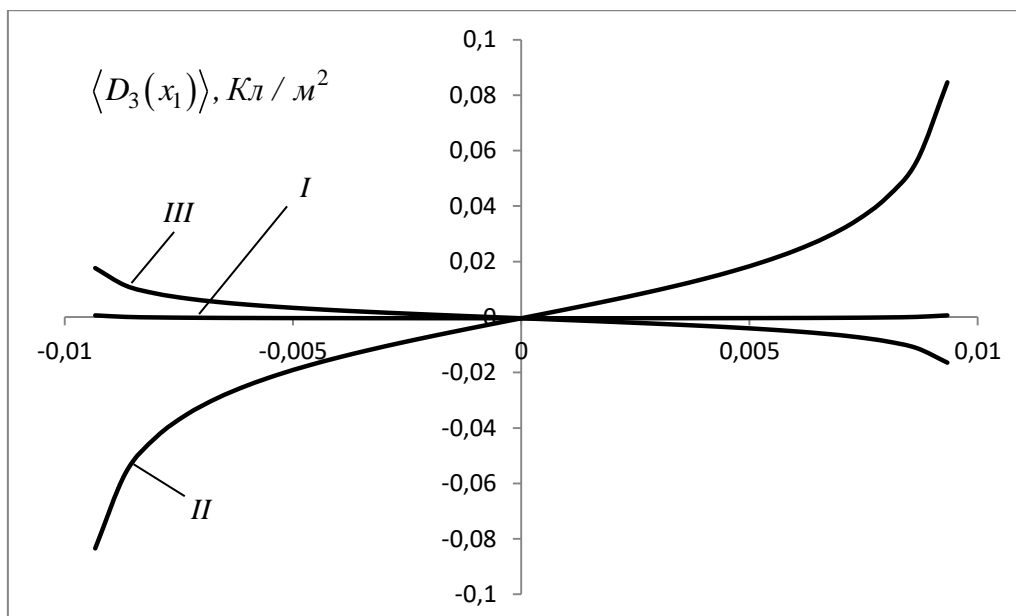


Рис. 4. Розподіл електричної індукції $\langle D_3(x_1) \rangle$ вздовж тріщини за таких же зовнішніх напружень, електричного та магнітного полів, як в рис. 2

ВИСНОВКИ

Досліджена відкрита тріщина в п'єзоелектричному/п'єземагнітному біматеріалі під дією дотичного та нормального механічних напружень, а також електричного та магнітного полів, паралельних до берегів тріщини. Вважалось, що п'єзокераміки поляризовані перпендикулярно до берегів тріщини. Припускається, що берега тріщини вкриті механічно м'якими електродами з сегнетоелектричного матеріалу, на яких задано електричний заряд та залишкова магнітна індукція і електричне та магнітне поля є незалежними від координати, паралельної до фронту тріщини.

Вектор-матричні представлення (11) та (12) для напружень, електричної та магнітної індукції, а також для переміщення, стрибків електричного та магнітного потенціалів виводяться через кусково-голоморфні вектор-функції. Вважаючи, що тріщина відкрита, формується задача Гільберта (31). Проблема вирішується в аналітичному вигляді. При цьому магніто-електро-механічні характеристики мають осцилюючі особливості, що призводить до фізично нереального взаємопроникнення берегів тріщини. Наводяться аналітичні вирази для напружень, електричних та магнітних зміщень, а також для стрибків пружного переміщення, електричного та магнітного потенціалів уздовж інтерфейсу.

З аналітичного аналізу результатів та візуалізації даних видно, що електричне та магнітне поля мають суттєвий вплив на характеристики механічних, електричних та магнітних факторів, особливо в околі вершин тріщини.

ЛІТЕРАТУРА

1. McMeeking R. M. On mechanical stresses at cracks in dielectrics with application to dielectric breakdown / R. M. McMeeking // J. Appl. Phys. – 1987. – 62. – P. 3119-3122.
2. Suo Z. Models for breakdown-resistant dielectric and ferroelectric ceramics / Z. Suo // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1993. – 41. – P. 1155-1176.
3. Ru C. Q. Conducting cracks in a piezoelectric ceramic of limited electrical polarization / C. Q. Ru, X. Mao // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1999. – 47. – P. 2125-2146.

4. Zhang T. Y. Fracture behaviours of piezoelectric materials / T. Y. Zhang, C. F. Gao // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2004. – 41. – P. 339-379.
5. Beom H. G. Conducting cracks in dissimilar piezoelectric media / H. G. Beom, S. N. Atluri // *International Journal of Fracture*. – 2002. – 118. – P. 285-301.
6. Eshelby J. D. Anisotropic elasticity with application to dislocation theory / J. D. Eshelby, W. T. Read, W. Shockley // *Acta Metall.* – 1953. – 1. – P. 251-259.
7. Suo Z. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics / Z. Suo, C.-M. Kuo, D. M. Barnett, J. R. Willis // *Journal of Mechanics and Physics of Solids* 40. – 1992. – P. 739-765.
8. Loboda V. An electrically conducting interface crack with a contact zone in a piezoelectric biomaterial / V. Loboda, A. Sheveleva, Y. Lapusta // *International Journal of Solids and Structures*. – 2014. – V. 51. – P. 63-73.
9. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
10. Кныш П. Ю. Аналитическое и численное исследование электродированной трещины в пьезоэлектрическом материале / П. Ю. Кныш, В. В. Лобода // *Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка»*. – 2012. – С. 1-15.
11. Sih G. C. Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in BaTiO₃ – CoFe₂O₄ composite / G. C. Sih, Z. F. Song // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 2003. – 39. – P. 209-227.

REFERENCES

1. McMeeking, R.M. (1987), “On mechanical stresses at cracks in dielectrics with application to dielectric breakdown”, *J. Appl. Phys.*, 62, pp. 3119-3122.
2. Suo, Z. (1993), “Models for breakdown-resistant dielectric and ferroelectric ceramics”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41, pp. 1155-1176.
3. Ru, C.Q. and Mao, X. (1999), “Conducting cracks in a piezoelectric ceramic of limited electrical polarization”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 47, pp. 2125-2146.
4. Zhang, T.Y. and Gao, C.F. (2004), “Fracture behaviours of piezoelectric materials”, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 41, pp. 339-379.
5. Beom, H.G. and Atluri, S.N. (2002), “Conducting cracks in dissimilar piezoelectric media”, *International Journal of Fracture*, 118, pp. 285-301.
6. Eshelby, J.D., Read, W.T. and Shockley, W. (1953), “Anisotropic elasticity with application to dislocation theory”, *Acta Metall*, 1, pp. 251-259.
7. Suo, Z, Kuo, C.-M., Barnett, D.M. and Willis, J.R. (1992), “Fracture mechanics for piezoelectric ceramics”, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 40, pp. 739-765.
8. Loboda V., Sheveleva, A. and Lapusta, Y. (2014), “An electrically conducting interface crack with a contact zone in a piezoelectric biomaterial”, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 51, pp. 63-73.
9. Muskhelishvili, N.I. (1966), *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti* [Some basic problems in the mathematical theory of elasticity], Nauka, Moscow.
10. Knish, P.U. and Loboda, V.V. (2012), “Analytical and numerical investigation of electroded crack in the piezoelectric material”, *Visnyk Dnipropetrovs'koho universytetu. Seriya “Mekhanika”*, pp. 1-15.
11. Sih, G.C. and Song, Z.F. (2003), “Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in BaTiO₃ – CoFe₂O₄ composite”, *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 39, pp. 209-227.

УДК 53.08:621.317.7.082.743:542.6

**ФІЗИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ КРОВІ:
СУЧАСНИЙ СТАН І ПЕРСПЕКТИВИ**¹Гуцул О. В., ²Слободян В. З.¹*Буковинський державний медичний університет,
Театральна пл., 2, м. Чернівці, 58002, Україна*²*Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,
вул. Коцюбинського, 2, м. Чернівці, 58012, Україна*

oksana.v.s@mail.ru

Проведено літературний аналіз інноваційних фізичних методів гематологічних досліджень, що використовуються або знаходяться на стадії впровадження в сучасну клінічну практику. Розглянуто основні напрямки сучасних тенденцій дослідження крові. Порівняння методів дослідження крові оптичних, електрофізичних та ін., спонукає до пошуку нових ідей розробки комплексу пристроїв, які б задовольняли широкий спектр вимог сучасної медицини.

Ключові слова: фізичні методи дослідження, гематологічні дослідження, кров.

**ФИЗИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КРОВИ:
СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ**¹Гуцул О. В., ²Слободян В. З.¹*Буковинский государственный медицинский университет,
Театральная пл., 2, г. Черновцы, 58002, Украина*²*Черновицкий национальный университет им. Ю. Федьковича,
ул. Коцюбинского, 2, г. Черновцы, 58012, Украина*

oksana.v.s@mail.ru

Проведен літературний аналіз інноваційних фізичних методів гематологічних досліджень, які використовуються або знаходяться на стадії впровадження в сучасну клінічну практику. Розглянуто основні напрямки сучасних тенденцій дослідження крові. Порівняння методів дослідження крові оптичних, електрофізичних та др., побуждає до пошуку нових ідей розробки комплексу пристроїв, які б задовольняли широкий спектр вимог сучасної медицини.

Ключевые слова: физические методы исследования, гематологические исследования, кровь.

PHYSICAL METHODS OF BLOOD: CURRENT STATE AND PROSPECTS¹Gutsul O.V., ²Slobodyan V.Z.¹*Bukovinian State Medical University,
2, Theatralna sq., Chernivtsi, 58002, Ukraine*²*Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University,
2, Kotsjubynskyi Str., Chernivtsi, 58012, Ukraine*

oksana.v.s@mail.ru

Modern literature, dealing with a study of the innovative hematologic research of physical methods used or under implementation in current clinical practice, has been analyzed. The main areas of contemporary research trends of blood. Comparison of methods for blood tests optical, electro and others, leads to the search for new ideas develop a set of devices with wide range of modern medicine requirements.

The paper reviews an analysis of literature the new for physical investigations of blood. We describe some of the fundamentals for measuring the viscosity of whole blood and plasma and its application to the diagnosis of patients and describe some of general principles of clinical laboratory viscosity measurement. The 3 main categories of instrumentation for viscosity measurement – capillary, falling-sphere, and rotational viscometers – are discussed. We compare the various types of instrumentation for their usefulness with various types of clinical specimens. Relevant features that may be important in selecting a viscometer are described. We hope the information in this review will be useful to scientists and clinical laboratory staff in explaining the available choices for investigation plasma and whole blood. Development, creation, production and introduction into clinical practice of modern measuring and diagnostic systems that find their application in all areas of the health system, is of great practical importance. The advantages of modern automated systems integrate several methods of analysis, the ability of many tests with a tube using a minimum sample volume, guarantee high precision studies,

automated quality control. Analysis of the literature showed that the development of new diagnostic methods is an urgent task medical equipment. Despite the advances in the study of blood rheology urgent task is the development of methods of analysis hemorheology that objectively reflect the aggregation and rheological properties of blood. Modern methods of hematological studies are quite diverse. From the physical properties of blood has important diagnostic value determination of its specific gravity, viscosity and speed of coagulation, and erythrocyte sedimentation reaction. At the heart of rheological measurements in medicine lies precisely measure blood viscosity, which depends on: hematocrit, plasma protein concentration, flow velocity and other external factors. Blood viscosity is a major factor in a lot of diseases and very important in heart diseases. When blood viscosity increases, it damages blood vessels and increases the risk of heart attacks. Currently, the only method of treatment is to take drugs such as aspirin, which has, however, several unwanted side effects. Here we report our finding that blood viscosity can be reduced with magnetic fields of 1 T or above in the blood flow direction. One magnetic field pulse of 1.3 T lasting ~1 min can reduce the blood viscosity by 20%-30%. After the exposure, in the absence of magnetic field, the blood viscosity slowly moves up, but takes a couple of hours to return to the original value. The process is repeatable. Reapplying the magnetic field reduces the blood viscosity again. This technology has much potential for physical therapy. Everything diversity of modern devices and methods viscosimeter does not allow for analysis of blood viscosity in conditions in vivo. This leads to finding innovative approaches in the development of non-trivial devices and methods for the study of biological fluids. Numerous clinical and biophysical studies have shown that exposure to magnetic fields reduces blood rheology, accelerates erythrocyte sedimentation rate, etc. We described a novel optical approach, Laser Speckle Rheology (LSR), to evaluate a patient's coagulation status by measuring the viscoelastic properties of blood during coagulation. It should be noted that to date there is no sufficient data set that can provide the most effective impact parameters (amplitude, frequency magnetic field, the action, etc.), so all research in this area is urgent. So creating new innovative devices of high quality and great range of functionality is the urgent task of modern medical equipment.

Key words: physical methods of investigation, hematologic studies, blood.

Аналіз літературних даних показав, що розробка нових діагностичних методів є актуальним завданням медичного приладобудування [1]. Для ранньої діагностики онкологічних захворювань перспективним є метод, заснований на вимірюванні електрофізичних параметрів крові [2]. Незважаючи на успіхи в дослідженні реологічних властивостей крові, актуальним залишається завдання розробки методів аналізу гемореології, що об'єктивно відтворюють агрегаційні й реологічні властивості крові. Поява будь-якого принципово нового методу завжди означає розширення можливостей дослідника та створення передумов для висвітлення проблеми з нового боку. Сучасні методи гематологічних досліджень досить різноманітні. З фізичних властивостей крові важливе діагностичне значення має визначення її питомої ваги, в'язкості й швидкості згортання [3, 4], а також реакції осідання еритроцитів. В основі реологічних вимірів у медицині лежить саме вимірювання в'язкості крові, яка залежить від: гематокрита, концентрації білка в плазмі, швидкості кровотоку та інших зовнішніх факторів.

Вивчення залежності процесів агрегації в рухомій крові від електричних параметрів клітин [5-7] на основі дослідження електромагнітної взаємодії поляризованих клітин з урахуванням просторового розділення заряду потребує відповіді на питання про характер розподілу клітин у рухомому потоці.

Наразі багато дослідників приділяють значну увагу вивченню реологічних властивостей крові на рівні мікроциркуляції [8-12], проте використання різних методів визначення гемореологічних параметрів не дозволяє знайти стандарти кількісного контролю, що необхідно для клінічної практики.

Непрямі методи визначення в'язкості ґрунтуються на застосуванні різних методів, основними з яких є метод капілярного витікання, метод падаючої кульки, ротаційний і вібраційний методи [13-15]. Для вимірювання в'язкості рідин використовують спеціальні прилади – віскозиметри: для вимірювання кінематичної в'язкості – капілярні, для динамічної – ротаційні.

Капілярний віскозиметр підходить для дослідження ньютонівських рідин (плазма), проте для не ньютонівських рідин (кров) використання метода Оствальда значно ускладнюється. У віскозиметрі такого типу рідина піддається дії напруженню зсуву, яке змінюється у широкому інтервалі, причому це напруження завжди максимальне поблизу стінок та рівне нулю біля осьової лінії.

Технічні складності віскозиметрії пов'язані насамперед з тим, що кров є не однорідною рідиною. У медицині використовуються капілярні віскозиметри (віскозиметр ВПЖ, ВНЖ, ВК-4). Визначення в'язкості крові у взаємозв'язку з рядом інших аналізів дозволяє об'єктивно оцінити стан людського організму. Проте слід відзначити, що наразі не існує єдиної методики вивчення в'язкості крові. Зараз розроблено мікрорідинні динамічні системи для вимірювання швидкості і в'язкості біологічних рідин (наприклад, крові в коронарних артеріях) [16, 17].

Усе різноманіття сучасних пристроїв та методів віскозиметрії не дозволяє проводити аналіз в'язкості крові в умовах *in vivo*. Це спонукає до пошуку нестандартних підходів під час розробки нетривіальних приладів та методів дослідження біологічних рідин.

Реологічні властивості крові проявляються при течії по судинах менше 300 мікрон – при зменшенні діаметра судини відносна спостережувана в'язкість $\eta_{\text{від}}$ зменшується [8]. Це явище відоме, як ефект Фареуса-Ліндквіста – залежність в'язкості крові від діаметра кровоносної судини рис. 1.

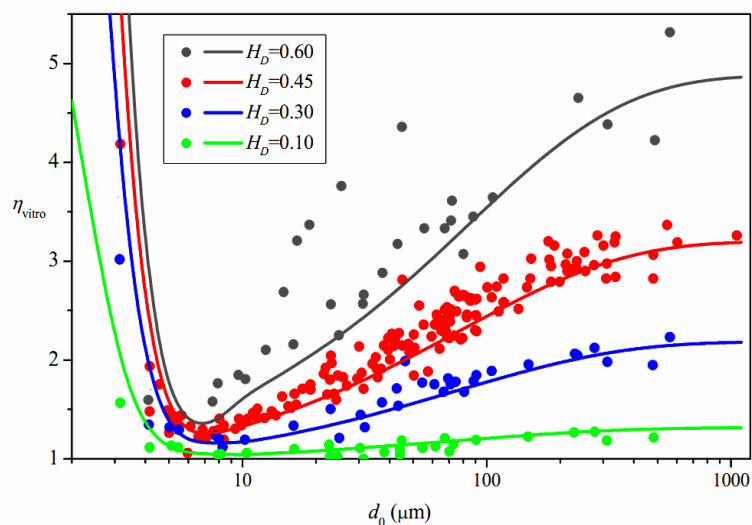


Рис. 1. Залежність відносної в'язкості η_{vitro} від діаметра судини d_0 для чотирьох фіксованих значень середнього по потоку показника гематокриту H_D [9]. Значки – експериментальні дані з [18] для скляних трубок, лінії – розраховані за апроксимаційною формулою

Зменшення відносної в'язкості пояснюють сепарацією еритроцитів до центру кровоносної судини і утворенням коло стінки вільного від еритроцитів шару плазми, у якому в'язкість менше. У процесі руху по судинах еритроцити деформуються, обертаються, злипаються, утворюють конгломерати. Усі ці процеси необхідно враховувати в математичній моделі течії крові.

Для розрахунку відносної та ефективної в'язкості крові відомий цілий ряд емпіричних залежностей, наведених у роботах [8-10, 13]. У роботах [8-11, 19-26] вивчають реологічні властивості крові та розглядають теоретичні моделі, які описують рух крові судинами. Для опису течії рідин використовують різні математичні моделі. Кров, загалом, може бути добре описана з використанням моделі Кессона [12].

В'язкість крові визначається наявним вмістом еритроцитів, у свою чергу, відомо, що магнітні властивості еритроцита загалом визначаються співвідношенням наявних у ньому форм гемоглобіну Hb. Найбільш сильно парамагнітні властивості виражені у metHb, вміст якого в нормальній крові менше 4% (залежно від віку еритроцита), але значно зростає при деяких патологічних станах. З огляду на це, важливою є оцінка величини магнітного моменту та магнітної сприйнятливості еритроцита. У роботі [6] наведено величину магнітного моменту еритроцита: $M_s = \chi_v w_0 H = -6,334 \cdot 10^{-17} H$, де χ_v – об'ємна сприйнятливості внутрішньоклітинного розчину. У роботі [27] також проведено оцінку величини магнітного моменту еритроцита, попередньо визначивши його магнітну сприйнятливості

$\chi = -4\pi \cdot 0,736 \cdot 10^{-6}$. Експериментально встановлено, що магнітна сприйнятливість крові залежить від величини прикладеного магнітного поля. В артеріях спостерігається зменшення, а у венах навпаки збільшення магнітної сприйнятливості зі зростанням величини прикладеного магнітного поля (рис. 2).

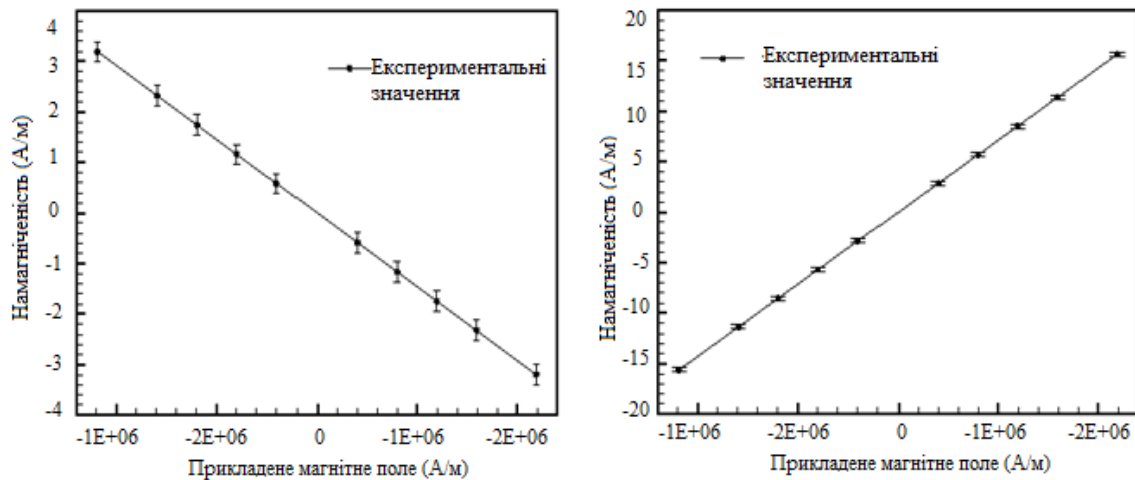


Рис. 2. Магнітна сприйнятливість крові в артеріях (1) та венах (2)

Крім магнітних сил між еритроцитами діють ще сили молекулярного притягання і електростатичного відштовхування. Під час дослідження балансу сил агрегації клітин у зовнішньому магнітному полі, необхідно враховувати їх взаємодію як наведених магнітних диполів. Реальне ж індуковане поле клітини буде відрізнятися від поля диполя і сильно залежить від форми еритроцита.

У магнітному полі (МП) еритроцити здатні орієнтуватися і агрегувати в ланцюжки подібно до магнітних частинок (рис. 3). Дія МП ($B = 0,5 \text{ Тл}$) викликала помітну зміну електричних властивостей клітин крові [28]. Експериментально виявлено вплив МП на гемодинаміку, причому найбільш значні зміни відбуваються на рівні мікроциркуляції.



Рис. 3. Після впливу магнітних імпульсів (1,33 Тл) еритроцити згрупувалися в ланцюжки (зображення отримано за допомогою оптичного мікроскопа)

Експериментальні дані досить суперечливі: частина з них вказує на те, що МП викликає розширення кровоносних судин, а інша частина – що залежно від початкового стану організму МП призводить або до розширення, або до звуження судин [29]. У серії експериментів виявлено, що уповільнення руху крові досягає 25%, якщо величина прикладеного поля становить 10 Тесла [30]. При значенні поля в 1 Тесла (характерна величина для МРТ-пристроїв), в'язкість змінюється менш, ніж на 0,3%.

Встановлено, що осмотична стійкість еритроцитів лінійно залежить від індукції магнітного поля. Слабкі поля активують утворення активних форм кисню в нейтрофілах, а сильніші поля призводять до загибелі еритроцитів. Експериментуючи з величиною магнітної індукції та тривалістю впливу, автори [3] підібрали такі параметри, за яких червоні кров'яні тілця поляризуються і починають злипатися в дуже короткі ланцюжки, більш важчі ланцюжки еритроцитів спрямовуються до середини судинного русла, завдяки такому ефекту в'язкість крові знижується на 20-30%. Цього ефекту вдалося досягти, помістивши кров усього на одну хвилину в поле з індукцією в 1,3 Тесла – приблизно така ж, як у апарата магнітно-

резонансної томографії. Еритроцити згрупувалися в ланцюжки після впливу магнітних імпульсів (1,33 Тл), зображення отримане за допомогою оптичного мікроскопа (рис. 3).

Важливим діагностичним показником також є час згортання крові. Для дослідження згортання крові необхідно застосовувати велику кількість дорогих лабораторних тестів, що вимагають тривалого часу. Проте інноваційна розробка вчених [4] дозволила отримати максимум інформації під час лабораторного тестування методом лазерної спекл-реології (laser speckle rheology). При цьому властивості крові (текучість, в'язкість, здатність до коагуляції) досліджуються за допомогою лазера. У процесі пропущеного лазерного променя через зразок утворюється спекл-структура. Зразок крові просвічують лазерним променем, при цьому клітини крові й, зокрема, тромбоцити розсіюють світло, формуючи спекл. Схема пристрою та зображення спекл-структури представлена на рис. 4.

У крові зі звичайними показниками згортання об'єкти, що розсіюють світло, переміщуються вільно. У крові з підвищеними показниками в'язкості, з високою концентрацією фібриногену рух клітин крові сповільнений, обмежений, що зменшує мерехтіння спекла порівнянно зі спеклом звичайної крові.

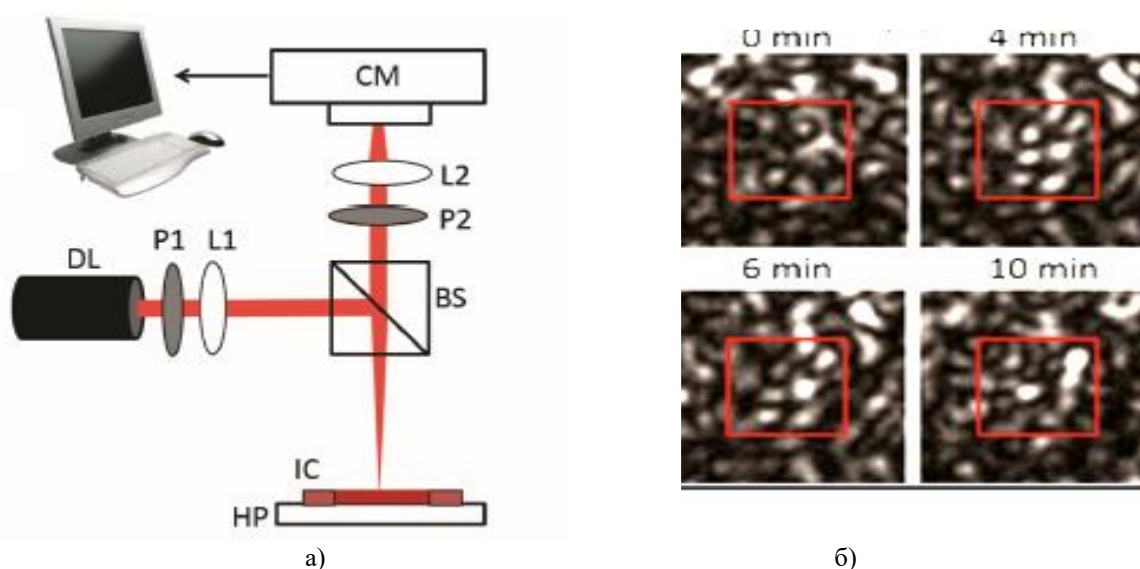


Рис. 4. а) Оптична схема пристрою: DL – діодний лазер (690 нм); P1, P2 – поляризатор; L1, L2 – лінзи; BS – пластинка, що розбиває промінь; CM – CMOS камера; IC – зразок; HP – пластина

Спекл кривої інтенсивності автокореляції $g_2(\tau)$, вимірний при 0, 6, 10 і 12 хвилин у процесі згортання крові зі зразка крові людини, представлено на рис. 5.

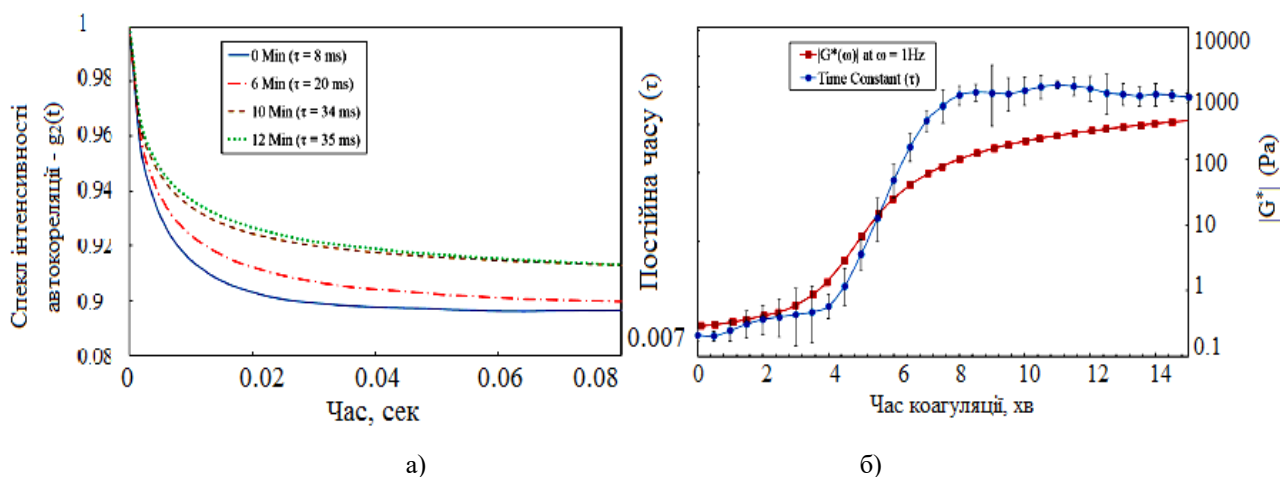


Рис. 5. Спекл інтенсивності кривої автокореляції (а) та спекл автокореляції постійної часу (б) для зразка крові людини

Спостерігається зменшення інтенсивності $g_2(\tau)$ зі збільшенням процесу згортання крові.

У пацієнтів з нормальним аРТТ і РТ спостерігали коротший час згортання порівняно із збільшеними аРТТ і РТ значеннями (рис. 6 (а)). Максимальний час утворення згустку (τ_{Max}) визначають на кривій залежності $\tau(t)$ (рис.6 (б)). Зростання τ_{Max} спостерігали для зразків крові пацієнтів з високим рівнем фібриногену і зменшення для зразків крові пацієнтів з нормальним вмістом фібриногену.

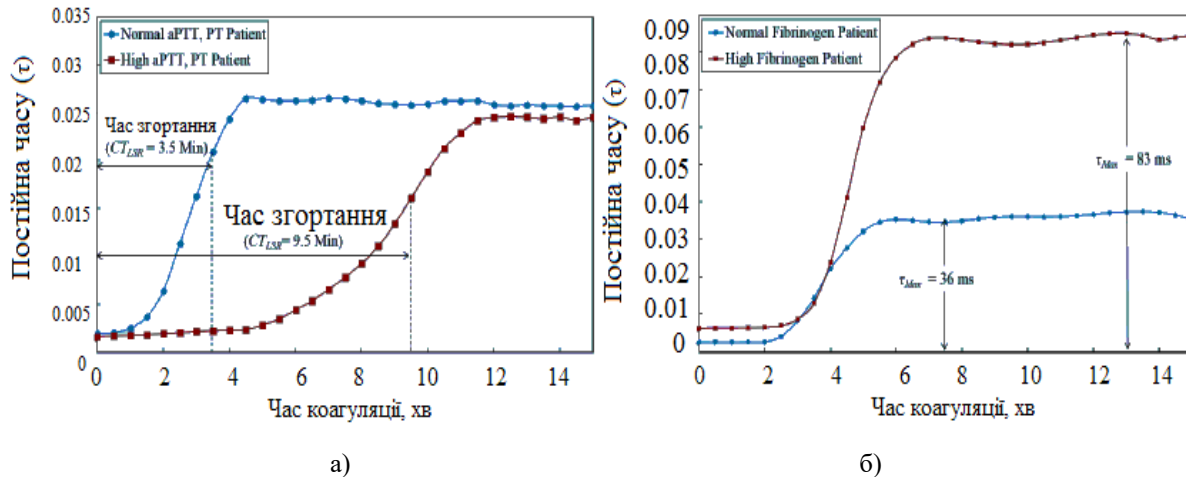


Рис. 6. Залежність часу коагуляції від спеклу автокореляції постійної часу $\tau(t)$: а) зразки крові пацієнтів з нормальним та високим аРТТ і РТ; б) зразки крові пацієнтів з нормальним та високим рівнем фібриногену

Сьогодні багато дослідників приділяють велику увагу вивченню реологічних властивостей крові на рівні мікроциркуляції [31-33], які визначаються її агрегаційними характеристиками [34], на агрегацію еритроцитів впливають імуноглобуліни всіх класів, імунні комплекси й компоненти комплементу, що може відігравати істотну роль у хворих бронхіальною астмою.

ВИСНОВОК

На жаль, накопичені знання не одержали поки що належного застосування в практичній діяльності лікаря через відсутність надійних і доступних методів діагностики. Внаслідок взаємозв'язку між агрегаційною здатністю еритроцитів і в'язкістю крові для оцінки реологічних властивостей крові необхідний комплексний аналіз цих показників. Разом із цим, на сьогодні використання різних методів визначення гемореологічних параметрів не дозволяє знайти стандарти кількісного контролю, що необхідно для клінічної практики. Отже очевидно, що створення конкурентоздатних та інноваційних приладів високої якості та з великим спектром функціональних можливостей є актуальним завданням сучасного медичного приладобудування.

ЛІТЕРАТУРА

1. Солдаткин В. В. Анализы погрешностей и методы повышения точности измерительных приборов и систем : учеб. пособие / В. В. Солдаткин, В. М. Солдаткин. – Казань : Изд-во КГТУ им. А.Н. Туполева, 2009. – 248 с.
2. Романов А. Н. Изменение характеристик электромагнитных волн микроволнового диапазона при прохождении через биологические жидкости человека / А. Н. Романов // Биомедицинская радиоэлектроника. – 2011. – № 3. – С. 16-19.
3. Tao R. Reducing blood viscosity with magnetic fields / R. Tao, K. Huang // Phys. Rev. – 2011. – E 84, 011905. – P. 5.
4. Tripathi Markandey M. Assessing blood coagulation status with laser speckle rheology / Markandey M. Tripathi, Zeinab Hajjarian, Elizabeth M. Van Cott, Seemantini K. Nadkarni // Biomedical Optics Express. – 2014. – Vol. 5, Issue 3. – P. 817-831.

5. Колесникова А. В. МГД – модели гемодинамики и движения столбика эритроцитов в переменном магнитном поле : автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук : спец. 05.13.18 / А. В. Колесникова. – ТГУ, Томск, 2007. – 17 с.
6. Kizilova N. Blood Rheology, erythrocyte aggregation and sedimentation: Experimental and theoretical study / N. Kizilova // 4th Eurosummer School on Biorheology. – Varna, 2012.
7. Черевко В. А. Математическое моделирование суспензий агрегирующих частиц / В. А. Черевко, Н. Н. Кизилова // Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях. Сб. тезисов междунар. конф. – Харьков, 2012. – С. 129.
8. Медведев А. Е. Двухфазная модель течения крови в крупных и мелких кровеносных сосудах / А. Е. Медведев // Математическая биология и биоинформатика. – 2011. – Т. 6, № 2. – С. 228-249.
9. Pries A. R. Blood Flow in Microvascular Networks / A. R. Pries, T. W. Secomb ; R. F. Tuma, W. N. Dura, K. Ley (Eds.). – Handbook of Physiology : Microcirculation. Academic Press, 2008. – P. 3-36.
10. Damiano E. R. Estimation of viscosity profiles using velocimetry data from parallel flows of linearly viscous fluids: application to microvascular haemodynamics / E. R. Damiano, D. S. Long, M. L. Smith // J. Fluid Mech. – 2004. – Vol. 512. – P. 1-19.
11. Рахимов А. А. Особенности течения крови в капиллярах при малых перепадах давления / А. А. Рахимов, Ю. В. Бурдюк, А. Т. Ахметов // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – № 3. – Режим доступа : www.science-education.ru/103-6375.
12. Вышлова М. А. Вискозиметрические и агрегационные корреляции в гемореологии : автореф. дис. на соискание ученой степени канд. мед. наук : спец. 01.02.08 / М. А. Вышлова. – М., 2002. – 25 с.
13. Биофизика : учеб. для студ. высш. учеб. заведений / Под. ред. проф. В. Ф. Антонова. – М. : Гуманит. Изд. Центр ВЛАДОС, 1999. – 288 с.
14. Колчунов В. І. Теоретична та прикладна гідромеханіка : навч. посібник / В. І. Колчунов. – К. : НАУ, 2004. – 336 с.
15. Rosencranz R. Clinical Laboratory Measurement of Serum, Plasma, and Blood Viscosity / R. Rosencranz, S. A. Bogen // Am. J. Clin. Pathol. Pathology Patterns Reviews. – 2006. – P. 578-586.
16. A biodynamic microsystem for fluids viscosity measurements / A.M. Avram, M. Avram, A. Bragaru [et all] // Journal of Physics : Conference Series. – 2006. – Vol. 34. – P. 82-88.
17. Stand-alone self-powered integrated microfluidic blood analysis system (SIMBAS) / Ivan K. Dimov, Lourdes Basabe-Desmonts, Jose L. Garcia-Cordero [et all] // Lab Chip. – 2011. – № 11. – P. 845-850.
18. Pries A. R. The endothelial surface layer / A. R. Pries, T. W. Secomb, P. Gaehtgens // Eur J Physiol. – 2000. – Vol. 440. – P. 653-666.
19. Review: Rheological properties of biological materials / C. Verdier, J. Etienne, A. Duperray [et all] // Physique. – 2009. – Vol. 10. – P. 790-811.
20. Unique morphology and focal adhesion development of valvular endothelial cells in static and fluid flow environments / J. T. Butcher, A. M. Penrod, A. J. Garcia, R. M. Nerem // Arterioscler. Thromb. Vasc. Biol. – 2004. – Vol. 24, № 8. – P. 1429-1434.
21. Chan W. Y. Modelling of non-Newtonian blood flow through a stenosed artery in-corporating fluid-structure in teraction / W. Y. Chan, Y. Ding, J. U. Tu // Australian & New Zealand Industrial and Applied Mathematics Journal. – 2007. – № 47. – P. 507-523.
22. Joshi P. Two-Layered Model of Blood Flow through Composite Stenosed Artery / P. Joshi, A. Pathak, B. K. Joshi // Applications and Applied Mathematics: An International Journal. – 2009. – Vol. 4, № 2. – P. 343-354.

23. Ponalagusamy R. Blood flow through an artery with mild stenosis: a two-layered model, different shapes of stenoses and slip velocity at the wall / R. Ponalagusamy // *Journal of Applied Sciences*. – 2007. – Vol. 7, № 7. – P. 1071-1077.
24. Shaw S. Pulsatile Casson Fluid Flow Through a Stenosed Bifurcated Artery / S. Shaw, R. S. R. Gorla, P. V. S. N. Murthy, C. O. Ng // *International Journal of Fluid Mechanics Research*. – 2009. – Vol. 36, № 1. – P. 43-63.
25. Shibeshi S. S. The rheology of Blood Flow in a Branched Arterial System / S. S. Shibeshi, W. E. Collins // *Applied Rheology*. – 2005. – Vol. 15, № 6. – P. 398-405.
26. Погорелова Е. А. Математическая модель сдвиговых течений в вене при наличии облитерирующего тромба / Е. А. Погорелова // *Компьютерные исследования и моделирование*. – 2010. – Т. 2, № 2. – С. 169-182.
27. Sheppard A. R. Biological effects of electric and magnetic fields of extremely low frequency / A. R. Sheppard, M. Eisenbud. – New York : New York University Press, 1977.
28. Sosa M. Magnetic Field in fluence on Electrical Properties of Human Blood Measured by Impedance Spectroscopy / M. Sosa, J. Bernal-Alvarado, M. Jimenez-Moreno [et all] // *Bioelectromagnetics*. – 2005. – Vol. 26. – P. 564-570.
29. McKay J. C. The Effects of Magn etic Field Exposure on Blood Flow and Blood Vessels in the Microvasculature / J. C. McKay, F. S. Prato, A. W. Thomas // *Bioelectromagnetics*. – 2007. – Vol. 28. – P. 81-98.
30. Haik Y. Apparent viscosity of human blood in a high static magN etic field / Y. Haik, V. Pai, Ch-J. Chen // *J. Magnetism Magn. Materials*. – 2001. – Vol. 225. – P. 180-186.
31. Wilson P. W. F. The metabolic syndrome: practical guide to origins and treatment : part I / P. W. F. Wilson, S. M. Grandy // *Circulation*. – 2008. – Vol. 112. – P. 1422-1425.
32. Петроченко Е. П. Механизмы регуляции микрогемодикуляции и реологических свойств крови в норме и при нарушениях кровообращения : дис. на соискание уч. степени канд. биолог. наук : спец. 03.00.13 / Е. П. Петроченко – Ярославль, 2009. – 161 с.
33. Шилов А. М. Артериальная гипертония и реологические свойства крови / А. М. Шилов, М. В. Мельник. – М. : «БАРС», 2005.
34. Пурло Н. В. Электрофоретическая подвижность эритроцитов как показатель оценки функциональной полноценности мембраны эритроцитов / Н. В. Пурло, О. В. Попова, Л. С. Бирюкова [и др.] // *Клиническая лабораторная диагностика*. – 2005. – № 1. – С. 40-44.

REFERENCE

1. Soldatkin, V.V. and Soldatkin, V.M. (2009), *Analiz pogreshnostey i metody povyshenia tochnosti izmeritel'nyh priborov i sistem* [Analysis of errors and methods to improve the accuracy of measuring devices and systems], high school textbook, Izd-vo KGTU im. A.N. Tupoleva, Kazan, Russia.
2. Romanov, A.N. (2011), “Variations in Electromagnetic Properties of Microwaves Passing Through Human Biological Fluids”, *Biomedical electronics*, no. 3, pp. 16-19.
3. Tao, R. and Huang, K. (2011), “Reducing blood viscosity with magnetic fields”, *Phys. Rev.*, E 84, 011905.
4. Markandey M. Tripathi, Zeinab Hajjarian, Elizabeth M. Van Cott, and Seemantini K. Nadkarni (2014), “Assessing blood coagulation status with laser speckle rheology”, *Biomedical Optics Express*, vol. 5, issue 3, pp. 817-831.
5. Kolesnikova, A.V. (2007), “MHD – model hemodynamics and movement of the column of red blood cells in an alternating magnetic field”, Thesis abstract for Cand. Sc. (Phys.-Math.), 05.13.18, Tomsk State University Tomsk, Russia.
6. Kizilova, N. (2012), “Blood Rheology, erythrocyte aggregation and sedimentation: Experimental and theoretical study” Conference proceedings of the 4 th Eurosummer School on Biorheology, Varna, 2012.

7. Cherevko, V.A. and Kizilova, N.N. (2012), "Mathematical modeling of suspensions of particles aggregation", *Sovremennye problemy matematiki i ee prilozheniya v estestvennyh naukah i informatsionnyh tehnologiyah*, Sbornik tesisov mejdunarodnoy konferentsii, Kharkov, p. 129.
8. Medvedev, A.E. (2011), "A two-phase model of blood flow in large and small blood vessels", *Mathematical Biology and Bioinformatics*, vol. 6, no. 2, pp. 228-249.
9. Pries, A.R., Secomb, T.W., Tuma, R.F., Dura, W.N., Ley, K. Eds. (2008), "Blood Flow in Microvascular Networks", In: *Handbook of Physiology: Microcirculation*, Academic Press, pp. 3-36.
10. Damiano, E.R., Damiano, E.R., Long, D.S. and Smith, M.L. (2004), "Estimation of viscosity profiles using velocimetry data from parallel flows of linearly viscous fluids: application to microvascular haemodynamics", *J. Fluid Mech.*, vol. 512, pp. 1-19.
11. Rahimov, A.A., Burdyuk, A.T. and Ahmetov, A.T. (2012), "Features of blood flow in capillaries at low differential pressure", *Modern problems of science and education*, no. 3, available at: www.science-education.ru/103-6375.
12. Vyshlova, M.A. (2002), "Viscometric aggregation and correlation hemorheology" Thesis abstract for Cand. Sc. (Med.), 01.02.08, Moskov, Russia.
13. Antonov, V.F. (1999), *Biofizika* [Biophysic], Gumanitarnoe izdatelstvo Tsentr Vldos, Moskow, Russia.
14. Kolchunov, V.I. (2004), *Teoretychna i prykladna gidromechanika* [Theoretical and Applied Fluid Mechanics] high school textbook, The National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine.
15. Rosencranz, R. and Bogen, S.A. (2006), "Clinical Laboratory Measurement of Serum, Plasma, and Blood Viscosity", *Am. J. Clin. Pathol. Pathology Patterns Reviews*, pp. 578-586.
16. Avram, A.M., Avram, M., Bragaru, A. and Iiescu, C. (2006), "A biodynamic microsystem for fluids viscosity measurements", *Journal of Physics: Conference Series.*, vol. 34, pp. 82-88.
17. Dimov, I.K., Basabe-Desmonts, L., Garcia-Cordero, J.L., Ross, B.M., Park, Y., Ricco, A.J. and Lee, L.P. (2011), "Stand-alone self-powered integrated microfluidic blood analysis system (SIMBAS)", *Lab Chip.*, no. 11, pp. 845-850.
18. Pries, A.R., Secomb, T.W. and Gaehtgens, P. (2000), "The endothelial surface layer", *Eur J Physiol.*, vol. 440, pp. 653-666.
19. Verdier, C., Etienne, J., Duperray, A. and Preziosi, L. (2009), "Review: Rheological properties of biological materials", *Physique*, vol. 10, pp. 790-811.
20. Butcher, J.T., Penrod, A.M., Garcia, A.J. and Nerem, R.M. (2004), "Unique morphology and focal adhesion development of valvular endothelial cells in static and fluid flow environments", *Arterioscler. Thromb. Vasc. Biol.*, vol. 24, no. 8, pp. 1429-1434.
21. Chan, W.Y., Ding, Y. and Tu, J.U. (2007), "Modelling of non-Newtonian blood flow through a stenosed artery in-corporating fluid-structure in teraction", *Australian & New Zealand Industrial and Applied Mathematics Journal*, no. 47, pp. 507-523.
22. Joshi, P., Pathak, A. and Joshi, B.K. (2009), "Two-Layered Model of Blood Flow through Composite Stenosed Artery", *Applications and Applied Mathematics: An International Journal*, vol. 4, no. 2, pp. 343-354.
23. Ponalagusamy, R. (2007), "Blood flow through an artery with mild stenosis: a two-layered model, different chapes of stenoses and slip velocity at the wall", *Journal of Applied Sciences*, vol. 7, no. 7, pp. 1071-1077.
24. Shaw, S., Gorla, R.S.R., Murthy, P.V.S.N. and Ng, C.O. (2009), "Pulsatile Casson Fluid Flow Through a Stenosed Bifurcated Artery", *International Journal of Fluid Mechanics Research*, vol. 36, no. 1, pp. 43-63.
25. Shibeshi, S.S. and Collins, W.E. (2005), "The rheology of Blood Flow in a Branched Arterial System", *Applied Rheology*, vol. 15, no. 6, pp. 398-405.

26. Pogorelova, E.A. (2010) "Mathematical model of shear stress flows in the vein in the presence of obliterating thrombus", *Computer Research and Modeling*, vol. 2, no. 2, pp. 169-182.
27. Sheppard, A.R. and Eisenbud, M. (1977), "Biological effects of electric and magnetic fields of extremely low frequency", New York University Press, New York.
28. Sosa, M., Bernal-Alvarado, J., Jimenez-Moreno, M., Hernandez, J.C., Gutierrez-Juarez, G., Vargas-Luna, M., Huerta, R., Villagomez-Castro, J.C. and Palomares, P. (2005), "Magnetic Field in fluence on Electrical Properties of Human Blood Measured by Impedance Spectroscopy", *Bioelectromagnetics*, vol. 26, pp. 564-570.
29. McKay, J.C., Prato, F.S. and Thomas, A.W. (2007), "The Effects of Magnetic Field Exposure on Blood Flow and Blood Vessels in the Microvasculature", *Bioelectromagnetics*, vol. 28, pp. 81-98.
30. Haik, Y., Pai, V. and Chen, Ch. J.(2001), "Apparent viscosity of human blood in a high static magnetic field", *J. Magnetism Magn. Materials*, vol. 225, pp. 180-186.
31. Wilson, P.W.F. and Grandy, S.M. (2008), "The metabolic syndrome: practical guide to origins and treatment: part I", *Circulation*, vol. 112, pp. 1422-1425.
32. Petrochenko, E.P. (2009), "Mechanism of regulation of microcirculation and blood rheology in health and circulatory disorders", Thesis abstract for Cand. Sc. (Biology), 03.00.13, Yaroslavl, Russia.
33. Shylov, A.M. and Melnik, M.V. (2005), *Arterialnaya gipetoniya i reologicheskie svoistva krovi* [Arterial hypertension and blood rheology], BARS, Moskow, Russia.
34. Purlo, N.V., Popova, O.V., Biryukova, L.S. and Kozinets, G.I. (2005), "Electrophoretic mobility of red blood cells as a measure of evaluation of the functional usefulness of erythrocyte membranes", *Klinicheskaya Laboratornaya Diagnostika*, no. 1, pp. 40-44.

УДК 539.3

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ПРИБЛИЖЕННО АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ И ШЕРОХОВАТОСТИ

Дьяченко Н. Н., к. ф.-м. н., доцент, Синченко Е. С., бакалавр, Качан А. И., бакалавр

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

dyachenko-nata@mail.ru

Рассматривается плоская квазистатическая задача о скольжении с трением штампа с плоским основанием по поверхности упругого шероховатого слоя при линейном законе деформирования шероховатости. Предполагается отсутствие наклона штампа. В работе изучены свойства линейных операторов данной задачи. На их основании в двух случаях ограничения на коэффициенты шероховатости получено аналитическое решение задачи: первоначально в виде ряда Неймана, а затем степенного ряда, коэффициенты которого выражаются через повторные ряды. Для получения приближенно аналитического решения уравнение задачи сведено к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов степенного ряда функции нормального давления. В работе приведено обоснование возможности применения метода редукции с помощью проверки условий Л.В. Кантаровича, Г.П. Акилова. Проведен анализ числовых результатов относительно влияния шероховатости и трения на контактные характеристики: функцию нормального давления, углубление штампа, значение абсциссы точки наименьшего нормального давления.

Ключевые слова: плоская контактная задача, штамп с плоским основанием, шероховатость, линейный закон деформирования шероховатости, трение, ряд Неймана, метод последовательных приближений, метод редукции.

АНАЛІТИЧНИЙ І НАБЛИЖЕНО АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ПЛОСКОЇ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ І ШОРСТКОСТІ

Д'яченко Н. М., к. ф.-м. н., доцент, Сінченко О. С., бакалавр, Качан А. І., бакалавр

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

dyachenko-nata@mail.ru

Розглянуто плоску квазистатичну задачу про ковзання з тертям штампа з плоскою основою по поверхні пружного шорсткого шару при лінійному законі деформування шорсткості. Припускається відсутність нахилу штампа. У роботі вивчено властивості лінійних операторів цієї задачі. На їх основі у двох випадках обмежень на коефіцієнти шорсткості отримано аналітичний розв'язок задачі: спочатку у вигляді ряду Неймана, а потім – степеневому ряду, коефіцієнти якого виражаються через повторні ряди. Для отримання наближено аналітичного розв'язку рівняння задачі зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів степеневому ряду функції нормального тиску. У роботі наведено обґрунтування можливості застосування методу редукції за допомогою перевірки умов Л.В. Кантаровича, Г.П. Акілова. Проведено аналіз числових результатів щодо впливу шорсткості і тертя на контактні характеристики: функції нормального тиску, занурення штампа, значення абсциси точки найменшого нормального тиску.

Ключові слова: плоска контактна задача, штамп з плоскою основою, шорсткість, лінійний закон деформування шорсткості, тертя, ряд Неймана, метод послідовних наближень, метод редукції.

ANALYTICAL AND APPROXIMATELY ANALYTICAL SOLUTION OF THE PLANE CONTACT PROBLEM TAKING INTO ACCOUNT THE FRICTION AND THE ROUGHNESS

Dyachenko N. N., Ph. D. In Physics and Math, associate professor, Sinchenko E. S., B.S. in Math, Kachan A. I., B.S. in Math

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

dyachenko-nata@mail.ru

The quasi-static plane problem about sliding with a friction of punch with the flat fundament on a surface of an elastic rough layer is considered at the linear law of deformation of a roughness. It is supposed, that the punch inclination is absent. Plane contact problems taking into account a roughness are studied in works [3, 4, 7], taking into account a friction – in [3, 4], taking into account both factors – in [12]. However, in article [12] it is supposed, that tangential stress do not influence normal pressure. Properties of the integral operator of the given problem are studied. On the basis of these properties the analytical solution of problems in two cases of restriction on roughness factors is received. Function of normal pressure is originally presented in the form of Neumann's series. Then this function is presented by a power series, in which coefficients are expressed through repeated series.

For reception of the approximately analytical solution the integral equation of this problem is reduce to infinite system of the linear algebraic equations concerning unknown coefficients of a power series of function of normal pressure. In work the substantiation of possibility of application of a reduction method by means of conditional test of L.V. Kantarovich and G.P. Akilov is resulted. The numerical estimation of residual is received.

The analysis of numerical results concerning influence of a roughness and a friction on contact characteristics is carried out. With shortcut of the roughness coefficient and with shortcut of the friction coefficient all contact characteristics come nearer to corresponding characteristics without a roughness or a friction. The greatest value of pressure on border of a contact platform, the least value of pressure in an internal point of this platform are reached. With increase of a roughness coefficient or a coefficient of a point friction absciss of the least pressure is displaced from the centre to the action direction of a tangential of force.

Key words: a plane contact problem, a punch with the flat fundament, a roughness, the linear law of deformation of a roughness, a friction, a Neumann's series, a method of successive approximations, a reduction method.

ВВЕДЕНИЕ

Контактом шероховатых тел занимается наука трибология. Среди задач, которые решает эта наука, такие: исследование характеристик шероховатых поверхностей, влияние шероховатости на трение и износ. Эти проблемы поставлены инженерной практикой. Поэтому решение контактных задач с учетом как шероховатости, так и трения, имеет большое практическое значение.

Впервые контактная задача с учетом шероховатости была решена И.Я. Штаерманом [1]. Он предположил, что шероховатость вызывает дополнительные деформации под действием штампа. Моделирование шероховатости поверхности тел наиболее детально изучено в [2]. В работах [3-8] и др. решены задачи в пространственной и плоской постановке с учетом шероховатости (для покрытия винклеровского типа – в [9]) при различных законах ее деформирования. Такие задачи с дополнительным учетом трения изучены в пространственной постановке в [10, 11], в плоской – в [12]. Однако, в работе [12] предполагается, что касательные напряжения не влияют на нормальные. В данной работе изучается плоская контактная задача, в которой такое предположение отсутствует. Кроме того, найдено ее аналитическое решение в отличие от работ [10-12].

В данной статье применялись выведенное ранее интегральное уравнение плоской контактной задачи с трением [3, 4] и интегральное уравнение плоской контактной задачи штампа с шероховатым слоем, приведенным в [4]. Авторы также применили решения, полученные в [3, 4], для анализа достоверности результатов при соответствующих предельных переходах.

Для получения аналитического решения поставленной задачи применяется метод представления решения операторного уравнения рядом Неймана, для приближенно аналитического – метод сведения интегрального уравнения задачи к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения функции нормального давления в степенной ряд, метод редукции и метод последовательных приближений в двух случаях ограничений на коэффициенты шероховатости. Такими методами решалась плоская контактная задача с учетом только шероховатости в [6], где решение представлялось степенным рядом с четными степенями. В данной задаче степенные ряды содержат также и нечетные степени.

Цель работы. Построить аналитическое и приближенно аналитическое решение квазистатической задачи о напряженном состоянии, которое появляется в упругом слое (полосе) при скольжении по нему без наклона штампа с учетом трения и шероховатости поверхности слоя при линейном законе деформирования шероховатости, обосновать возможность применения численных методов, провести анализ числовых результатов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Предположим, что штамп вдавливается в упругий шероховатый слой $\{|x| < +\infty, 0 < y < h\}$ вертикальной силой Q (рис. 1). В направлении оси x действует сила ρQ , сдвигающая штамп, и он скользит по поверхности слоя со скоростью настолько малой, что динамическими составляющими можно пренебречь.

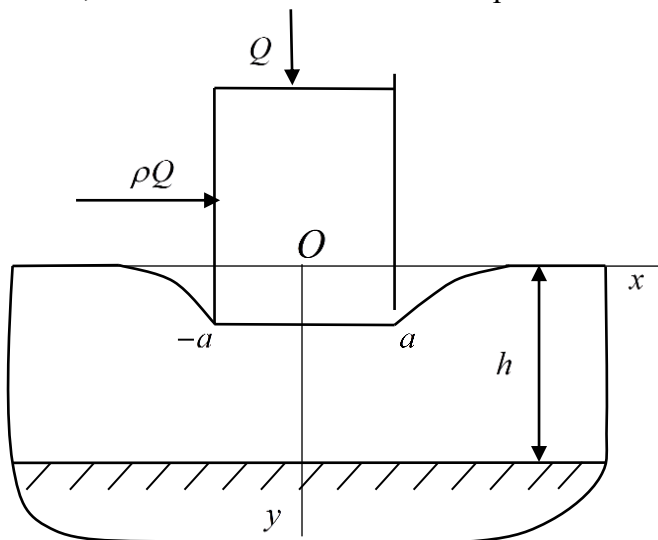


Рис. 1. Схема контакта штампа с упругим слоем

Также предположим, что штамп не может поворачиваться под действием приложенных сил.

Рассмотрим достаточно толстый слой, для которого $\lambda = \frac{a}{h} \leq \frac{1}{2}$. Возможны два случая закрепления полосы ($y = h$) [4]:

1. Полоса лежит на жестком основании без трения:

$$\tau_{xy}(x, h) = 0, v(x, h) = 0, |x| < +\infty.$$

2. Полоса жестко закреплена на основании:

$$u(x, h) = v(x, h) = 0.$$

Граничные условия на поверхности $y = 0$ в обоих случаях имеют вид [3, 4]:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, 0) &= 0, \quad \sigma_y(x, 0) = 0, \quad a < |x| < +\infty, \\ \sigma_y(x, 0) &= -p(x), \quad \tau_{xy}(x, 0) = \rho p(x), \quad |x| \leq a, \end{aligned}$$

где δ – углубление штампа в упругий слой под действием нормального давления $p(x)$, ρ – коэффициент трения.

В поставленной задаче интегральное уравнение и условие равновесия для определения нормального давления и углубления имеют вид [3, 4]:

$$Bp(x) + \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \left[\int_{-a}^a \left[-\ln \left| \frac{x'-x}{h} \right| + a_0 \right] p(x') dx' + \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \pi \int_{-a}^x \rho p(x') dx' \right] = \delta, \quad (1)$$

$$\int_{-a}^a p(x') dx' = Q, \quad (2)$$

где B – коэффициент шероховатости линейного закона, E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона, значение величины a_0 может быть $a_0 = -0,352$ для задачи 1 и $a_0 = -0,527$ – для задачи 2 при $\nu = 0,3$.

Перепишем уравнения (1) и (2) в безразмерных величинах:

$$B_1 p_1(t) + \int_{-1}^1 \left[-\ln |t'-t| - C_0 \right] \cdot p_1(t') dt' + C_1 \int_{-1}^t p_1(t') dt' = \delta_1, \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 p_1(t') dt' = Q_1, \quad (4)$$

где $C = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}$, $C_1 = \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \pi \rho$, $Q_1 = \frac{QC}{a}$, $B_1 = \frac{B}{Ca}$, $\delta_1 = \frac{\delta}{a}$, $t = \frac{x}{a}$, $t' = \frac{x'}{a}$, $p_1(t) = Cp(ta)$,
 $c_0 = \ln \frac{a}{h} - a_0$.

Введем оператор

$$[Lp_1](t) = \int_{-1}^1 \left[\ln |t'-t| + C_0 \right] p_1(t') dt' - C_1 \int_{-1}^t p_1(t') dt' \quad (5)$$

и перепишем уравнение (3) в операторном виде:

$$B_1 p_1(t) - [Lp_1](t) = \delta_1. \quad (6)$$

2. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ

1. Рассмотрим вначале линейный оператор L . Перепишем его в виде

$$L = A - C_1 B,$$

где

$$[Ap_1](t) = \int_{-1}^1 \left[\ln |t'-t| + C_0 \right] p_1(t') dt', \quad [Bp_1](t) = \int_{-1}^t p_1(t') dt'.$$

В работе [6] показано, что оператор A переводит пространство $C[-1;1]$ непрерывных на отрезке $[-1;1]$ функций в себя, то есть $A:C[-1;1] \rightarrow C[-1;1]$, а норма этого оператора удовлетворяет неравенству $\|A\| \leq 8$.

Если функция $p_1(t)$ непрерывна на отрезке $[-1;1]$, то функция $g(t)=[Bp_1](t)$, представляющаяся интегралом с переменным верхним пределом от непрерывной функции, является непрерывной функцией [13]. Поэтому $B:C[-1;1] \rightarrow C[-1;1]$. Очевидно, что $\|B\| \leq 2$.

Таким образом, $L:C[-1;1] \rightarrow C[-1;1]$, а для нормы этого оператора имеет место оценка:

$$\|L\| \leq 8 + 2C_1 = C^* \tag{7}$$

Обозначим через C^{**} – любое число, большее C^* .

2. В случае, когда $0 < \alpha < 1$, рассмотрим оператор $\left(\alpha I + \frac{1}{C^*} L\right)$, где $[Ip_1](t) = p_1(t)$. В силу сказанного выше, получим: $\left(\alpha I + \frac{1}{C^{**}} L\right): C[-1;1] \rightarrow C[-1;1]$. Докажем сжимаемость этого отображения на классе неотрицательных функций пространства $C[-1;1]$. Оценим норму

$$\left\| \left[\left(\alpha I + \frac{1}{C^{**}} L \right) p_1 \right] (t) \right\| = \max_{t \in [-1,1]} \left| \left[\left(\alpha I + \frac{1}{C^{**}} L \right) p_1 \right] (t) \right|.$$

По второй теореме Вейерштрасса [13] максимум непрерывной на отрезке функции достигается в некоторой точке $t_0 \in [-1;1]$, откуда

$$\left\| \left[\left(\alpha I + \frac{1}{C^{**}} L \right) p_1 \right] \right\| = \left| \left[\left(\alpha I + \frac{1}{C^{**}} L \right) p_1 \right] (t_0) \right|.$$

Рассмотрим случай, когда выражение под модулем неотрицательно, то есть $\alpha p_1(t_0) - \frac{1}{C^{**}} [-Lp_1](t_0) \geq 0$. Если функция $p_1(t)$ неотрицательная, то значение $[-Lp_1](t_0)$ оператора в точке $t_0 \in [-1;1]$ характеризует смещение упругой полосы с учетом трения в этой точке под действием давления $p_1(t)$, распределенной на отрезке $[-1;1]$. Поэтому $[-Lp_1](t_0) \geq 0$, откуда

$$\alpha p_1(t_0) - \frac{1}{C^{**}} [-Lp_1](t_0) \leq \alpha p_1(t_0) \leq \alpha \|p_1\|.$$

В случае, когда выражение под модулем отрицательное, имеем: $\alpha p_1(t_0) < \frac{1}{C^{**}} [-Lp_1](t_0)$.

Тогда существует число $q \in (0,1)$ такое, что $\alpha p_1(t_0) = q \cdot \frac{1}{C^{**}} [-Lp_1](t_0)$. Используя неравенство (7), получим

$$\left\| \left(\alpha I + \frac{1}{C^{**}} L \right) p_1 \right\| = -\alpha p_1(t_0) + \frac{1}{C^{**}} [-Lp_1](t_0) =$$

$$= (1-q) \cdot \frac{1}{C^{**}} [-Lp_1](t_0) \leq (1-q) \cdot \frac{1}{C^{**}} \|Lp_1\| \leq \frac{1}{C^{**}} \|L\| \cdot \|p_1\| \leq \frac{C^*}{C^{**}} \|p_1\|.$$

Таким образом,

$$\left\| \left(\alpha I + \frac{1}{C^{**}} L \right) p_1 \right\| \leq u \cdot \|p_1\|, \quad u = \max \left\{ \alpha, \frac{C^*}{C^{**}} \right\}. \quad (8)$$

Так как по предположению $C^* < C^{**}$ и $0 < \alpha < 1$, то $u < 1$. Значит, в силу (8), отображение $\left(\alpha I + \frac{1}{C^{**}} L \right)$ является сжимающим на классе неотрицательных функций.

3. Разложения образа степенной функции $f(x) = x^N$ ($N = 0, 1, 2, 3, \dots$) при действии оператора L имеет вид:

$$[Lf](y) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{N,i} y^i, \quad (9)$$

где при $N = 2j$, $j = 1, 2, 3, \dots$

$$\beta_{2j,2k} = -\frac{2}{k(2j-2k+1)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad \beta_{2j,2k+1} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad k \neq j,$$

$$\beta_{2j,0} = -\frac{2}{(2j+1)^2} + \frac{2C_0}{2j+1} - \frac{C_1}{2j+1}, \quad \beta_{2j,2j+1} = -\frac{C_1}{2j+1},$$

при $N = 0$

$$\beta_{0,2k+1} = 0, \quad \beta_{0,2k} = -\frac{1}{k(-2k+1)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad \beta_{0,1} = -C_1,$$

а при $N = 2j-1$, $j = 1, 2, 3, \dots$

$$\beta_{2j-1,2k-1} = -\frac{2}{(2k-1)(2j-2k+1)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad \beta_{2j-1,2k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, \quad k \neq j),$$

$$\beta_{2j-1,2j} = -\frac{C_1}{2j}; \quad \beta_{2j-1,0} = -\frac{C_1}{2j}.$$

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

В случае, когда $B_1 > C^*$, уравнение (6) перепишем в виде операторного уравнения Фредгольма второго рода

$$p_1(t) = \frac{1}{B_1} [Lp_1](t) + \frac{\delta_1}{B_1}. \quad (10)$$

Вследствие (7), согласно принципу сжимающих отображений [14], при $B_1 > C^*$ уравнение (10) имеет единственное решение, которое можно представить рядом Неймана [14]

$$p_1(t) = \frac{\delta_1}{B_1} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1}{B_1} \right)^s [L^s e](t).$$

Используя разложение (9), получим

$$p_1(t) = \frac{\delta_1}{B_1} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1}{B_1}\right)^s \sum_{n_1=0}^{\infty} \beta_{0,n_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} \beta_{n_1,n_2} \dots \sum_{n_s=0}^{\infty} \beta_{n_{s-1},n_s} t^{n_s}. \quad (11)$$

Безразмерное углубление можно найти из условия равновесия (4), откуда

$$\delta_1 = \frac{Q_1 B_1}{\gamma},$$

где $\gamma = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1}{B_1}\right)^s \sum_{n_1=0}^{\infty} \beta_{0,n_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} \beta_{n_1,n_2} \dots \sum_{n_{s-1}=0}^{\infty} \beta_{n_{s-2},n_{s-1}} \sum_{j_s=0}^{\infty} \beta_{n_{s-1},2j_s} \frac{2}{2j_s+1}.$

В случае, когда $B_1 < C^*$, введем малый параметр $\alpha = 1 - \frac{B_1}{C^{**}}$, а уравнение (6) представим операторным уравнением Фредгольма второго рода:

$$p_1(t) = \left[\left(\alpha I + \frac{1}{C^{**}} L \right) p_1 \right](t) + \frac{\delta_1}{C^{**}}. \quad (12)$$

Если $B_1 < C^*$, то $0 < \alpha < 1$, тогда отображение $\left(\alpha I + \frac{1}{C^{**}} L \right)$ удовлетворяет неравенству (8), и является сжимающим. Поэтому уравнение (12) имеет единственное решение, которое можно записать рядом Неймана [14], а затем через повторные ряды:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \frac{\delta_1}{C^{**}} \sum_{r=0}^{\infty} \left[\left(\alpha I + \frac{1}{C^{**}} L \right)^r e \right](t) = \frac{\delta_1}{C^{**}} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^r C_r^k \alpha^{r-k} \frac{1}{(C^{**})^k} [L^k e](t) = \\ &= \frac{\delta_1}{C^{**}} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^r C_r^k \alpha^{r-k} \frac{1}{(C^{**})^k} \sum_{n_1=0}^{\infty} \beta_{0,n_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} \beta_{n_1,n_2} \dots \sum_{n_{k-1}=0}^{\infty} \beta_{n_{k-2},n_{k-1}} \sum_{n_k=0}^{\infty} \beta_{n_{k-1},n_k} t^{n_k}, \end{aligned} \quad (13)$$

тут $C_r^k = \frac{r!}{k!(r-k)!}$ ($r = 0, 1, 2, \dots, k = 0, 1, 2, \dots, r$). Углубление можно найти по формулам:

$$\delta_1 = \frac{Q_1 C^{**}}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{\delta_1}{C^{**}} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^r \frac{C_r^k \alpha^{r-k}}{(C^{**})^k} \sum_{n_1=0}^{\infty} \beta_{0,n_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} \beta_{n_1,n_2} \dots \sum_{n_{k-1}=0}^{\infty} \beta_{n_{k-2},n_{k-1}} \sum_{j_k=0}^{\infty} \beta_{n_{k-1},2j_k} \frac{2}{2j_k+1}.$$

4. ПРИБЛИЖЕННО АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

1. Выше было показано, что решение уравнения (6) – функцию безразмерного нормального давления – можно представить одной из формул (11) или (13) при различных ограничениях на коэффициент шероховатости. Из этого следует, что решение уравнения (6) представляется степенным рядом

$$p_1(t) = \delta_1 \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n t^n. \quad (14)$$

В силу представления (9), образ оператора для функции (14) примет вид:

$$[Lp_1](t) = \delta_1 \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{k,n} t^n, \quad (15)$$

а операторное уравнение (6), вследствие (14) и (15), выразится через ряды

$$B_1 \delta_1 \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n t^n - \delta_1 \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{k,n} t^n = \delta_1. \quad (16)$$

Естественным образом приходим к системе относительно неизвестных коэффициентов степенного ряда (14):

$$\begin{cases} B_1 \xi_0 - \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \beta_{k,0} = 1, \\ B_1 \xi_n - \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \beta_{k,n} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots). \end{cases} \quad (17)$$

Углубление штампа находим с помощью условия равновесия (4), подставляя в него (14). Получим:

$$\delta_1 = \frac{Q_1}{T}, \quad T = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2\xi_{2l}}{2l+1}. \quad (18)$$

2. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений (17) может быть решена **методом редукции**, то есть сведением ее к конечной системе из $N+1$ уравнения. Поскольку система (17) эквивалентна уравнению (6), а неизвестные системы (17) являются коэффициентами степенного ряда (14), то возможность применения метода редукции к системе (17) равносильна возможности применения этого метода к операторному уравнению (6). А именно: все ряды в (14) и (16) заменяются частичными суммами до номера N , что эквивалентно замене степенного ряда (14) многочленом $\bar{p}_1(t) = \delta_1 \sum_{k=0}^N \xi_k t^k$ степени N , а операторного уравнения (6) – приближенным

$$B_1 \bar{p}_1(t) - [\bar{L} \bar{p}_1](t) = \delta_1, \quad (19)$$

где

$$[\bar{L} \bar{p}_1](t) = \delta_1 \sum_{k=0}^N \xi_k \sum_{n=0}^N \beta_{k,n} t^n = [P_N L \bar{p}_1](t), \quad (20)$$

тут проектор $P_N : C[-1;1] \rightarrow R_N[-1;1]$ отображает пространство непрерывных функций $C[-1;1]$ в пространство $R_N[-1;1]$ многочленов степени N , при этом $[P_N p_1](t) = \bar{p}_1(t)$.

В каждом из случаев ограничений на коэффициенты шероховатости ($B_1 > C^*$ и $B_1 < C^*$) выполняются условия возможности применения метода редукции [15] для операторных уравнений (10) и (12) соответственно. Пусть $B_1 > C^*$ (второй случай, когда $B_1 < C^*$, исследуется аналогично), тогда приближенное уравнение (19) переписывается в виде

$$\bar{p}_1(t) - \frac{1}{B_1} [\bar{L} \bar{p}_1](t) = \frac{\delta_1}{B_1}, \quad (21)$$

и выполнены условия Л.В. Канторовича, Г.П. Акилова [15]:

1) по построению, в силу (15), неравенство $\left\| \frac{1}{B_1} [P_N L \bar{f}] - \frac{1}{B_1} [\bar{L} \bar{f}] \right\| \leq \eta \| \bar{f} \|$ для $f \in C[-1;1]$

имеет место при $\eta = \eta(N) = 0$;

2) элемент $\frac{1}{B_1} [L f](t)$ (тут $f \in C[-1;1]$) аппроксимируем элементом $\bar{y}(t) = \frac{1}{B_1} [P_N L f](t)$ из $R_N[-1;1]$, тогда

$$\left\| \frac{1}{B_1} [Lf] - \bar{y} \right\| \leq \frac{1}{B_1} \|I - P_N\| \cdot \|L\| \cdot \|f\| \leq \frac{1}{B_1} \varepsilon(N) C^* \|f\| = \eta_1(N) \|f\|,$$

где $\varepsilon_1(N) = \|I - P_N\|$, $\eta_1(N) = \varepsilon_1(N)$;

3) для свободного члена $y(t) = \frac{\delta_1}{B_1} \in C[-1;1]$ точного уравнения (10) в качестве аппроксимирующего элемента из $R_N[-1;1]$ выберем $\bar{y} = y$, поэтому в неравенстве $\|y - \bar{y}\| \leq \eta_2 \|y\|$ можно выбрать $\eta_2 = 0$;

4) по теореме С. Банаха [14] $K = I - \frac{1}{B_1} L$ имеет непрерывно обратный оператор, а поскольку

$$\|K\| = \left\| I - \frac{1}{B_1} L \right\| \geq 1 - \frac{C^*}{B_1} = \frac{1}{\eta_3}, \text{ то } \|K^{-1}\| \leq \eta_3;$$

5) для достаточно больших N выполняется неравенство

$$u = \frac{1}{B_1} [\eta + \|I - P_N\| \eta_1] \|K^{-1}\| \leq \frac{C^* \varepsilon^2(N)}{B_1 (B_1 - C^*)} < 1;$$

6) из определения $\varepsilon_1(N)$ и $\eta_1(N)$ следует, что $\lim_{N \rightarrow \infty} \eta_1(N) \|P_N\| = 0$.

Вследствие выполнимости выписанных условий, приходим к выводу [15], что в случае $B_1 > C^*$ при достаточно больших N приближенное уравнение (21) имеет решение $\bar{p}_{1,N}^*(t)$ и имеет место сходимость последовательности приближенных решений $\{\bar{p}_{1,N}^*(t)\}$ к точному $p_1^*(t)$, то есть

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|p_1^* - \bar{p}_{1,N}^*\| = 0.$$

При этом, решения приближенного уравнения (21) можно найти **методом последовательных приближений** [15].

5. АНАЛИЗ ЧИСЛОВЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для приближенных вычислений выберем $Q_1 = 0,008625$, $c_0 = -3$, $a = 1$ см. С помощью программного пакета MAPLE вычислено абсолютное значение невязки

$$\varepsilon = \max_{t \in [-1;1]} |B_1 \bar{p}_1(t) - [L\bar{p}_1](t) - \delta_1|,$$

в которой значение интегрального оператора найдено численно в каждой точке площадки контакта и для разных входных параметров. Если в методе редукции выбрать $N = 100$, то при всех указанных данных получено $\varepsilon < 5 \cdot 10^{-2} \cdot Q_2$.

На рис. 2 (а) і 2 (б) приведены графики функций давления при разных значениях коэффициента шероховатости B_1 (рис. 2 (а)) и коэффициента трения ρ (рис. 2 (б)) для фиксированного значения другого параметра ($\rho = 0,5$ для рис. 2 (а) и $B_1 = 0,5$ для рис. 2 (б)). Штриховой линией на рис. 2 (а) построен график этой функции для гладкой полосы ($B_1 = 0$), полученный Л.А.Галиным [3]. На рис. 2 (б) штриховой линии соответствует график функции давления для задачи без трения ($\rho = 0$).

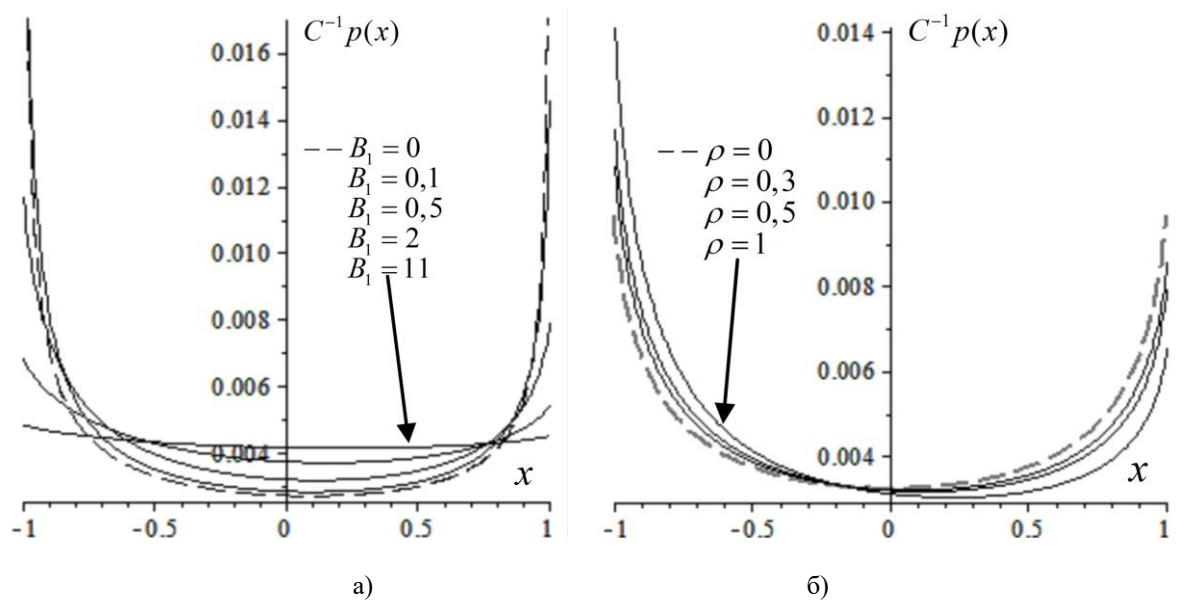


Рис. 2. Графики функций давления при разных входных параметрах

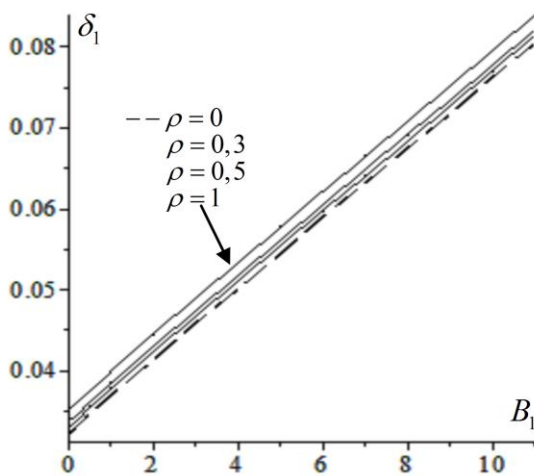
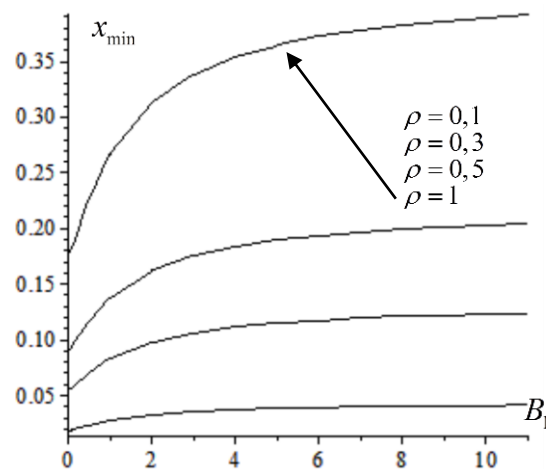
На рис. 3 изображены графики зависимостей углубления штампа в упругую полосу от коэффициента шероховатости B_1 для разных значений коэффициента трения ρ . Значения углубления для $B_1 = 0$ рассчитаны в соответствии с результатами Л.А. Галина [3].

Из анализа рис. 2 (а) и рис. 2 (б) следует, что наибольшее значение нормального давления достигается на границе площадки контакта при $x = -a$, а наименьшее – в некоторой внутренней точке x_{\min} площадки контакта.

Для поиска точки x_{\min} с помощью MAPLE найдено численное решение t^* уравнения

$$\frac{d\bar{p}_1(t)}{dt} = 0 \Leftrightarrow \delta_1 \sum_{k=1}^N k \xi_k t^k = 0.$$

Тогда at^* будет точкой локального минимума функции давления, то есть $x_{\min} = at^*$. На рис. 4 приведены графики зависимостей x_{\min} от коэффициента шероховатости B_1 для разных значений коэффициента трения ρ .

Рис. 3. Графики зависимостей углубления штампа от коэффициента шероховатости B_1 Рис. 4. Графики зависимостей x_{\min} от коэффициента шероховатости B_1

Проанализируем влияние шероховатости на контактные характеристики. С уменьшением коэффициента шероховатости B_1 (при фиксированном значении коэффициента трения) наблюдается приближение всех контактных характеристик к соответствующим характеристикам задачи для гладкой полосы (рис. 2 (а) и рис. 3). При этом углубление уменьшается (рис. 3), давление на границе площадки контакта увеличивается, а наименьшее давление уменьшается (рис. 2 (а)). Абсцисса x_{\min} точки наименьшего давления перемещается в направлении к $x=0$ справа. Например, при $\rho=0,5$ (см. рис. 4) абсцисса этой точки уменьшается от значения, большего 0,21 см для $B_1 > 10$, до значения 0,0090334471 см, соответствующего $B_1 = 0$ (гладкий слой).

Контактные давления в данной задаче являются функциями, ограниченными на отрезке $[-a; a]$, в то время, как в задаче с гладкой поверхностью слоя [4] давления на границе площадки контакта стремятся к бесконечности (рис. 2 (а)).

Проанализируем влияние трения на контактные характеристики. С уменьшением коэффициента трения ρ (при фиксированном значении коэффициента шероховатости) наблюдается приближение всех контактных характеристик к соответствующим характеристикам задачи при отсутствии трения (рис. 2 (б) и рис. 3). При этом углубление уменьшается, давление в граничной точке площадки контакта $x = -a$ уменьшается, а в точке $-$ увеличивается, при этом наименьшее давление увеличивается. Рост коэффициента трения приводит к смещению абсциссы точки наименьшего давления от $x=0$ в направлении к $x=a$, что следует из анализа рис. 4. Так, например, при $B_1 = 0,5$ значение x_{\min} увеличивается от 0 см для $\rho=0$ до приблизительно 0.2264 см при $\rho=1$.

Достоверность результатов подтверждается справедливостью предельных переходов при $B_1 \rightarrow 0$ или $\rho \rightarrow 0$, оценкой невязки, а также сравнением полученных результатов с известными. В частности, при $\rho=0$ расчеты, проведенные в данной работе, согласовываются с результатами работ [4, 6].

ВЫВОДЫ

В работе изучена плоская квазистатическая контактная задача о скольжении плоского штампа с трением без поворота по границе упругого шероховатого слоя при линейном законе деформирования шероховатости. В работе доказана единственность решения поставленной задачи. Найдено аналитическое решение данной задачи в двух случаях ограничения на коэффициент шероховатости. Также найдено приближенно аналитическое решение задачи. В результате анализа числовых результатов получены следующие выводы. При уменьшении как коэффициента шероховатости, так коэффициента трения, все контактные характеристики приближаются к соответствующим характеристикам без учета шероховатости или трения соответственно. Наибольшее значение давления достигается на границе площадки контакта, а наименьшее – во внутренней точке этой площадки. При увеличении коэффициента шероховатости или коэффициента трения абсцисса точки наименьшего давления смещается от центра в направлении действия касательной силы.

Изложенный подход к решению данной задачи позволяет найти аналитическое решение такой задачи с учетом наклона штампа при линейном законе деформирования шероховатости, а при нелинейном (степенном или экспоненциальном) – приближенно аналитическое решение, в том числе задач с неизвестной заранее площадкой контакта. Это является предметом дальнейшего исследования

ЛІТЕРАТУРА

1. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости / И. Я. Штаерман. – М.-Л. : Гостехтеоретиздат, 1949. – 270 с.

2. Крагельский И. В. Основы расчётов на трение и износ / И. В. Крагельский, М. Н. Добычин, В. С. Комбалов. - М. : Машиностроение, 1977. – 576 с.
3. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л. А. Галин. – М. : Наука, 1980. – 302 с.
4. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия / И. Г. Горячева. – М. : Наука, 2001. – 478 с.
5. Гоман О. Г. Задачі про штампи при різних законах деформування шорсткості / О. Г. Гоман, С. Ф. Шишканова, Н. М. Д'яченко // Вісник Херсонського держ. технічного університету. – 2003. – № 3 (19). – С. 98-101.
6. Д'яченко Н. М. Аналітичний і наближено аналітичний розв'язок плоскої контактної задачі про взаємодію штампа з шорсткою смугою / Н. М. Д'яченко, Т. О. Жмур, А. М. Нікітенко // Вісник Запорізького національного університету. Фіз.-мат. науки. – 2008. – № 1. – С. 58-66.
7. Тітова О. О. Плоска контактна задача про вдавнення штампа з плоскою основою в пружну шорстку смугу при різних законах деформування шорсткості / О. О. Тітова, О. М. Гриценко, Т. А. Д'яченко, О. В. Стасюк // Вісник Запорізького національного університету. Фіз.-мат. науки. – 2012. – № 2. – С. 105-113.
8. Александров А. И. Алгоритм численного решения пространственной контактной задачи о взаимодействии упругих тел, имеющих шероховатые поверхности / А. И. Александров, Е. В. Грабко // Проблемы обчислювальної математики і міцності конструкцій. – 2011. – Вип. 17. – С. 23-34.
9. Александров В. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В. М. Александров, С. М. Мхитарян. – М. : Наука, 1983. – 488 с.
10. Шишканова А. А. О решении контактной задачи с учетом трения и шероховатости для штампа в форме двусвязного квадрата в плане / Анна Анатольевна Шишканова // Вісник Донецького університету. Сер. А. Природничі науки. – 2004. – Вип. 1. – С. 95-102.
11. Дьяченко Н. Н. Решение задачи о скольжении штампа с трением по границе шероховатого полупространства с линейным законом деформирования шероховатости / Н. Н. Дьяченко, Е. В. Шашкова // Вісник Запорізького національного університету. Фіз.-мат. науки. – 2006. – № 1. – С. 25-33.
12. Pauk V. Plane Contact Problems with Partial Slip for Rough Elastic Half-Space / V. Pauk, B. Zastrau. // J. Theor. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 42, no. 1. – P. 107-124.
13. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – Т. 1. – М. : Физматлит, 2003. – 680 с.
14. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1989. – 624 с.
15. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1984. – 752 с.

REFERENSES

1. Shtaerman, I.Ya. (1949), *Kontakt'naya zadacha teorii uprugosti* [Contact problems of the theory of elasticity], Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, Russia.
2. Kragelsky, I.V., Dobychin, M.N. and Kombalov, V.S. (1977), *Osnovy raschetov na trenie i iznos* [Fundamentals calculations on a friction and wear], Mashinostroenie, Moscow, Russia.
3. Galin, L.A. (1980), *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti i vyzkouprugosti* [Contact problems in the theory of elasticity and viscoelasticity], Nauka, Moscow, Russia.
4. Goryacheva, I.G. (2001), *Mekhanika friksionnogo vzaimodeystviya* [Mechanics of friction interaction], Nauka, Moscow, Russia.
5. Goman, O.G., Shishkanova, S.F. and Dyachenko N.M. (2003), “Problems of punch in various laws of roughness deformation”, *Visnyk Khersonskogo derzavnogo universiteta*, no. 3(19), pp. 98-101.
6. Dyachenko, N.M., Zhmur, T.A. and Nikitenko, A.N. (2008), “Analytical and approximately analytical solution of a flat contact problem on interaction of a punch with a rough strip”, *Visnyk Zaporizkogo nacional'nogo universytetu*, Fiz.-mat. Nauky, no. 1, pp. 58-66.
7. Titova, O.O., Gritsenko, O.M., Dyachenko, T.A. and Stasyuk, O.V. (2012), “The plane contact problem on pressing of punch with the flat fundament in the elastic strip at the different laws of

deformation of the roughness”, *Visnyk Zaporizkogo nationalnogo universytetu*, Fiz.-mat. Nauky, no. 2, pp. 105-113.

8. Alexandrov, A.I. and Grabko, E.V. (2011), “Algorithm of the numerical solution of three-dimensional contact problem, connected with the interaction between the elastic bodies with rough surfaces”, *Problemy obchyslyval'noyi matematyky i mitsnosti konstruktivnykh*, issue 17, pp. 23-34.
9. Alexandrov, V.M. and Mhitaryan, S.M. (1983), *Kontaktnye zadachi dlya tel s tonkimi pokrytiami i prosloykami* [Contact problems for bodies with thin coatings and layers], Nauka, Moscow, Russia.
10. Shishkanova, A.A. (2004), *O reshenii kontaktnoy zadachi s uchetom treniya i sherohovatosti dlya shtampa v forme dvusvyaznogo kvadrata v plane* [About the solution of a contact problem taking into account a friction and a roughness for a punch in the form of a doubly-connected square in the plan], *Visnik Denezkogo universitetu*, Pripodnichi nauki, issue 1, pp. 95-102.
11. Dyachenko, N.M. and Shashkova, Ye.V. (2006), “The decision of the problem about sliding of a punch with friction on border rough half-space by the linear law of deformation of a roughness”, *Visnyk Zaporizkogo nationalnogo universytetu*, Fiz.-mat. Nauky, no. 1, pp. 25-33.
12. Pauk, V and Zastrau, B. (2004), “Plane Contact Problems with Partial Slip for Rough Elastic Half-Space”, *J. Theor. Appl. Mech*, vol. 42, no. 1, pp. 107-124.
13. Fihthengolts, G.M. (2003), *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya* [Kurs differential and integral calculus], vol. 1, Fismatlit, Moscow, Russia,
14. Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V. (1989), *Elementy teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza* [Elements of the theory of functions and the functional analysis], Nauka, Moscow, Russia.
15. Kantorovich, L.V. and Akilov, G.P. (1984), *Funktsionalnyi analiz* [Functional Analysis], Nauka, Moscow, Russia.

УДК 512.552

ЖОРСТКІ ТА МАЙЖЕ ЖОРСТКІ САГАЙДАКИ

¹Зеленський О. В., ²Дармосюк В. М.

¹Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, Україна

²Миколаївський національний університет імені В.О. Сухомлинського,
вул. Никольська, 24, м. Миколаїв, Україна

¹zelik82@mail.ru, ²darmosiuk@gmail.com

У роботі досліджуються жорсткі та майже жорсткі сагайдаки матриць показників. Знайдено умови того, що сагайдак одержується зі скінченної кількості матриць показників та знайдені всі жорсткі сагайдаки на 4 вершинах.

Ключові слова: матриця показників, допустимий сагайдак матриці показників, жорсткий сагайдак.

ЖЕСТКИЕ И ПОЧТИ ЖЕСТКИЕ КОЛЧАНЫ

¹Зеленский А. В., ²Дармосюк В. Н.

¹Каменец-Подольский национальный университет имени Ивана Огиенко,
ул. Огиенко, 61, г. Каменец-Подольский, Украина

²Николаевский национальный университет имени А.В. Сухомлинского,
ул. Никольская, 24, г. Николаев, Украина

¹zelik82@mail.ru, ²darmosiuk@gmail.com

В работе исследуются жесткие и почти жесткие колчаны матриц показателей. Найденны условия того, что колчан получается из конечного числа матриц показателей и найдены все жесткие колчаны на 4 вершинах.

Ключевые слова: матрица показателей, допустимый колчан матрицы показателей, жесткий колчан.

RIGID QUIVERS AND ALMOST RIGID QUIVERS

¹Zelenskiy O. V., ²Darmosiuk V. M.¹Kamianets-Podilskyi Ivan Ohienko National University,
Ohienko str., 61, Kamianets-Podilsky, Ukraine²Mykolayiv National Sukhomlynsky University,
Nikolska str., 24, Mykolaiv, Ukraine¹zelik82@mail.ru, ²darmosiuk@gmail.com

One of the most important classes, which appear in various questions of the ring theory and the image theory, is the class of the tiled orders. In terms of the abstract ring theory tiled order is primary Noetherian, semi-perfect and semi-distributive Noetherian ring with non-zero Jacobson radical.

Exponent matrices appear in the theory of tiled orders. Each tiled order is completely determined by its exponent matrix and discrete valuation ring. Many of the properties of these rings are completely determined by their exponent matrix, such as quivers of rings. The exponent matrix quiver coincides with the tiled order quiver. In order to research the exponent matrices and their quivers there can be applied the combinatorial and geometric methods.

This article deals with the question of exponent matrices and their rigid and almost rigid quivers. Properties of admissible quivers have also been discovered. The authors have proved that a unit quiver is rigid or almost rigid. If there is a weight function, for which quiver is not a unit quiver, so there is an infinite number of pairwise nonequivalent exponent matrices, from which quiver is derived. A rigid quiver cannot have loops. There are only four rigid not isomorphic quivers with four vertices. But there doesn't exist almost rigid quiver with four vertices.

Key words: exponent matrix, admissible quiver, rigid quiver.

ВСТУП

Одним із аспектів теорії кілець є вивчення властивостей кілець за допомогою теорії графів. Кожний черепичний порядок повністю визначається своєю матрицею показників і дискретно нормованим кільцем [1]. Багато властивостей таких кілець повністю визначаються їх матрицями показників [2, 3], зокрема, сагайдаки таких кілець [1]. Порівняно недавно матриці показників стали окремим об'єктом вивчення. Нежорсткість допустимого сагайдака, який має хоча б одну петлю, доведено в [4]. З появою вагових функцій з'явилося більше можливостей для дослідження допустимих сагайдаків [5]. Опис деяких класів жорстких сагайдаків започатковано в [6]. У [7] встановлено властивості одиничних циклів та одиничних сагайдаків, зокрема знайдено обмеження для елементів матриці показників одиничного сагайдака. У роботі продовжуються дослідження матриць показників та їх сагайдаків, зокрема жорстких та майже жорстких сагайдаків матриць показників.

ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ

Нехай $M_n(\mathbb{Z})$ – це кільце матриць розмірності n з цілими елементами.

Означення 1 [1, с. 353]. Матриця $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$, для якої виконуються умови:

- 1) $\alpha_{ij} + \alpha_{ik} \geq \alpha_{ik}$ для всіх $i, j, k = 1, \dots, n$;
- 2) $\alpha_{ii} = 0$ для всіх $i = 1, \dots, n$, називається *матрицею показників*.

Матриця показників, для якої виконується умова

- 3) $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geq 1$ для всіх $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ($i \neq j$) називається *зведеною матрицею показників*.

Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ – зведена матриця показників. Введемо матрицю $\mathcal{E}^{(1)} = (\beta_{ij}) = \mathcal{E} + E_n \in M_n(\mathbb{Z})$, де E_n – одинична матриця. Введемо матрицю $\mathcal{E}^{(2)} = (\gamma_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$: $\gamma_{ij} = \min_k \{\beta_{ik} + \beta_{kj}\}$.

Означення 2 [1, с.357]. Сагайдаком зведеної матриці показників $Q = Q(\mathcal{E})$ називається сагайдак, матриця суміжності якого задається формулою $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$.

Означення 3 [1]. Зведені матриці показників \mathcal{E}_1 і \mathcal{E}_2 називається еквівалентними, якщо одну можна отримати з іншої за допомогою елементарних перетворень двох типів:

- 1) відняти ціле число t від елементів i -го рядка та додати це число до елементів i -го стовпчика;
- 2) поміняти місцями два рядки і поміняти місцями два стовпчика з такими ж номерами.

Означення 4 [1, с.357]. Сагайдак Q називається *допустимим*, якщо існує зведена матриця показників \mathcal{E} , така, що $Q(\mathcal{E}) = Q$.

Означення 5 [5]. Сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ називається *зваженим*, якщо визначена функція $\omega: AQ \rightarrow \mathbb{R}$. Функція ω називається *ваговою*, а її значення на стрілці називається *вагою* стрілки.

Сума ваг усіх стрілок шляху називається *вагою* шляху.

Теорема 1 [5] Сильнозв'язний сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ є допустимим тоді і тільки тоді, коли існує вагова функція $\omega: AQ \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\emptyset\}$, яка задовольняє умовам:

- 1) вага стрілки з точки i у точку j менша за вагу шляху з точки i у точку j довжини $l \geq 2$;
- 2) вага петлі в точці i менше за вагу будь-якого циклу, що проходить через точку i , довжини $l \geq 2$;
- 3) вага будь-якого циклу більше або дорівнює 1;
- 4) вага петлі дорівнює 1;
- 5) через кожну точку без петлі проходить цикл довжини $l \geq 2$, вага якого дорівнює 1.

Зауваження [7]. Згідно з умовами (4) та (5) через кожну точку допустимого сагайдака проходить цикл ваги 1.

Означення 7 [5]. Вагову функцію, яка задовольняє всі умови теореми 1, будемо називати *допустимою ваговою функцією*.

За сагайдаком Q та допустимій ваговій функції ω можна побудувати матрицю показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ таким чином: якщо сагайдак Q містить стрілку σ_{ij} , то $\alpha_{ij} = \omega(\sigma_{ij})$ у протилежному випадку α_{ij} дорівнює вазі найлегшого шляху із вершини v_i у вершину v_j .

Означення 8 [7]. Простий цикл у сагайдаку $Q = (VQ, AQ)$, вага якого дорівнює 1, будемо називати *одиничним*.

Твердження 1 [7]. У допустимому сагайдаку $Q = (VQ, AQ)$, між вершинами одиничного циклу не існує інших стрілок, окрім стрілок цього циклу.

Твердження 2 [7]. Допустимий сагайдак Q не може містити двох стрілок (v_i, v_a) та (v_j, v_a) , де вершини v_i, v_j належать одному одиничному циклу.

Твердження 3 [7]. Допустимий сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ не може містити стрілки (v_a, v_i) , (v_a, v_j) , де вершини v_i, v_j належать деякому одиничному циклу.

В орієнтованому графі Q позначимо через $d(v_1, v_2)$ мінімальну кількість одиничних циклів, через вершини яких потрібно пройти, щоб з вершини v_1 потрапити у вершину v_2 . Будемо вважати $d(v, v) = 0$.

Лема 1 [7].

1. $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$, для всіх $v_i, v_j \in Q$,
2. $d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k) \geq d(v_i, v_k)$ для всіх $v_i, v_j, v_k \in Q$.

Лема 2 [7]. В одиничному сагайдаку Q існує вершина v_1 така, що для довільної вершини $v_k \in VQ$ має місце нерівність $d(v_1, v_k) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Означення 14 [7]. Допустимий сагайдак Q будемо називати *одиничним*, якщо об'єднання одиничних циклів допустимого сагайдака Q утворює сильнозв'язний сагайдак Q_1 , такий, що $VQ = VQ_1$.

Означення 15 [6]. Допустимий сагайдак Q називається *жорстким*, якщо існує з точністю до еквівалентності єдина зведена матриця показників \mathcal{E} така, що $Q(\mathcal{E}) = Q$.

Означення 16. Нежорсткий допустимий сагайдак Q , який одержується зі скінченної кількості (з точністю до еквівалентності) матриць показників, називається *майже жорстким*.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Теорема 2. Якщо для довільної вагової функції допустимий сагайдак одиничний, то він жорсткий або майже жорсткий. Якщо існує вагова функція, для якої сагайдак не є одиничним, то існує нескінченна кількість попарно нееквівалентних матриць показників, з яких він одержується.

Доведення. Спочатку доведемо першу частину теореми. Нехай Q – допустимий сагайдак, який для довільної вагової функції є одиничним. Доведемо, що Q одержується зі скінченної кількості матриць показників.

Нехай $Q = Q(\mathcal{E})$, $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$. Доведемо, що $\alpha_{1j} \leq n$. З леми 2 випливає, що в сагайдаку Q існує вершина v_1 така, що для довільної вершини $v_k \in VQ$ має місце нерівність $d(v_1, v_k) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$:

$$\alpha_{ij} \leq d(v_i, v_j) \leq d(v_i, v_1) + d(v_1, v_j) \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n.$$

Отже, $0 \leq \alpha_{ij} \leq n$, тобто елемент α_{ij} може приймати не більше, ніж $n + 1$ різних значень. Тобто кількість матриць показників, з яких одержується сагайдак Q (за комбінаторним правилом добутку), не перевищує $(n + 1)^{\frac{n}{2}}$. Отже, сагайдак Q одержується зі скінченної кількості матриць, тому він жорсткий або майже жорсткий.

Доведемо другу частину теореми. Нехай ω – вагова функція, для якої сагайдак Q – не одиничний. Тоді множину VQ можна розбити на дві частини VQ_1 та VQ_2 так, щоб не існувало одиничного циклу, який містить вершини з обох частин. Оскільки сагайдак Q сильнозв'язний, то є стрілки (або стрілка), які починаються в VQ_1 та закінчуються в VQ_2 . За ваговою функцією ω побудуємо вагову функцію ω_k , у якій вага стрілок, що починаються в VQ_1 та закінчуються в VQ_2 , збільшена на k . Очевидно, що вагова функція ω_k є допустима, тобто вона задовольняє всі умови теореми 1. Оскільки збільшилась вага стрілок, які не належать одиничним циклам, то умови 2-5 виконуються. Умова (1) теореми 1 виконується тому, що якщо вага стрілки збільшилась на k , то вага шляху збільшилась не менше, ніж на k .

Оскільки для різних k ми одержуємо різні сагайдаки (сума елементів різна), то сагайдак Q одержується з нескінченної кількості матриць.

Наслідок. Допустимий сагайдак Q з петлями не є жорстким або майже жорстким.

Доведення. Одиничний сагайдак не має петель, бо кожна його вершина належить деякому одиничному циклу. Сагайдак Q має петлі, тому не є одиничним для довільної допустимої вагової функції. За теоремою 2 сагайдак Q одержується з нескінченної кількості матриць.

Теорема 3 [2]. Дві зведені матриці показників еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони мають ізоморфні сагайдаки, вага відповідних простих циклів яких однакова.

Теорема 4. На чотирьох вершинах існує тільки чотири жорстких не ізоморфних сагайдака та жодного майже жорсткого.

Доведення. Оскільки жорсткий або майже жорсткий сагайдак не має петель, то через кожну вершину має проходити одиничний цикл. За твердженням 1 одиничний цикл не може містити інших стрілок, крім стрілок самого циклу. Тому в сагайдаку з чотирма вершинами одиничний цикл складається мінімум з двох, максимум з чотирьох стрілок. Розглянемо три різних випадки:

а) Найбільший одиничний цикл складається з чотирьох стрілок. Оскільки за твердженням 1 сагайдак не може містити інших стрілок, крім циклу, то у випадку а) є тільки один жорсткий сагайдак:

$$[Q_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) Найбільший одиничний цикл складається з трьох стрілок. Нехай цей цикл проходить через вершини (1-2-3). Оскільки четверта вершина без петлі, то через неї також проходить одиничний цикл. Можливі два випадки: одиничний цикл, який проходить через четверту вершину, проходить ще через одну або через дві вершини.

У першому випадку ми одержимо $[Q_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, якщо четверта вершина утворює одиничний цикл не з третьою, а з другою або з першою вершиною, то ми одержуємо сагайдаки ізоморфні Q_2 .

У другому випадку ми одержимо $[Q_3] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, якщо четверта вершина утворює одиничний цикл не з стрілкою σ_{31} , а з стрілкою σ_{12} або з стрілкою σ_{23} , ми одержимо сагайдаки, аналогічні до Q_3 .

Зауважимо, що четверта вершина не може утворити одиничний цикл з двома стрілками, оскільки одержується одиничний цикл, який складається з чотирьох вершин та містить стрілку всередині циклу, що суперечить твердженню 1.

в) Найбільший одиничний цикл складається з двох стрілок. Тобто всі одиничні цикли складаються з двох стрілок.

Якщо для сагайдака Q можна підібрати вагову функцію, для якої в сагайдаку є два одиничних цикли, які складаються з різних вершин (наприклад (1, 2), (3, 4)), то за теоремою 2 такий сагайдак одержується з нескінченної кількості матриць показників.

Залишається розглянути випадок, коли всі одиничні цикли проходять через одну вершину.

Нехай це буде вершина 1. Одержуємо сагайдак $[Q_4] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, який містить три одиничних цикли. Якщо до нього додати стрілки або стрілку, то він стане недопустимим (твердження 2 або твердження 3).

Оскільки всі прості цикли сагайдака Q_1 - одиничні, то за теоремою 3 всі матриці показників, з яких одержується сагайдак Q_1 , попарно еквівалентні, тобто Q_1 – жорсткий сагайдак. Аналогічно Q_2, Q_3, Q_4 – жорсткі сагайдаки.

Отже, на чотирьох вершинах є чотири жорстких сагайдака, та жодного майже жорсткого. Теорема доведена.

ВИСНОВКИ

Знайдено умови того, що сагайдак одержується зі скінченної кількості матриць показників. Якщо для довільної вагової функції допустимий сагайдак одиничний, то він жорсткий або майже жорсткий. Якщо існує вагова функція, для якої сагайдак не є одиничним, то існує нескінченна кількість попарно нееквівалентних матриць показників, з яких він одержується. На чотирьох вершинах є чотири жорстких сагайдака, та жодного майже жорсткого.

ЛІТЕРАТУРА

1. Hazewinkel M. Algebras Rings and Modules, vol. 1 / M. Hazewinkel, N. Gubareni, V. V. Kirichenko. – Kluwer Academic Publishers, 2004. – 380 p.
2. Hazewinkel M. Algebras Rings and Modules, vol. 2 / M. Hazewinkel, N. Gubareni, V. V. Kirichenko. – Kluwer Academic Publishers, 2007. – 400 p.
3. Kirichenko V. V. Exponent Matrices and Tiled Order over Discrete Valuation Rings / V. V. Kirichenko, O. V. Zelenskiy, V. N. Zhuravlev // International Journal of Algebra and Computation. – 2005. – Vol. 15, № 5&6. – P. 1-16.
4. Зеленський О. В. Жорсткі сагайдаки зведених матриць показників / О. В. Зеленський // Вісник Київського університету. Серія : фізико-математичні науки. – 2007. – № 3. – С. 27-31.
5. Журавлев В. Н. Допустимые колчаны / В. Н. Журавлев // Фундаментальная и прикладная математика. – 2008. – Т. 14, №7. – С. 121-128.
6. Кириченко В. В. О жестких колчанах / В. В. Кириченко, В. Н. Журавлёв, И. Н. Цыгановская // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12, вып. 8. – С. 105-120.
7. Журавльов В. М. Одиничні сагайдаки матриці показників / В. М. Журавльов, О. В. Зеленський, В. М. Дармосюк // Вісник Київського університету. Серія : фізико-математичні науки. – 2012. – № 4. – С. 27-31.

REFERENCES

1. Hazewinkel, M., Gubareni, N. and Kirichenko, V.V. (2004), Algebras Rings and Modules, vol. 1, Kluwer Academic Publishers.
2. Hazewinkel, M., Gubareni, N. and Kirichenko, V.V. (2007), Algebras Rings and Modules, vol. 2, Kluwer Academic Publishers.
3. Kirichenko, V.V., Zelenskiy, O.V. and Zhuravlev, V.N. (2005), “Exponent Matrices and Tiled Order over Discrete Valuation Rings”, *International Journal of Algebra and Computation*, vol. 15, no. 5&6, pp. 1-16.
4. Zelenskiy, O.V. (2007), “Rigid quivers of reduced exponent matrices”, *Visnyk Kyivsk'oho universytetu*, Seriya: fizyko-matematychni nauky, no.3, pp. 27-31.
5. Zhuravlev, V.N. (2008), “Admissible quivers”, *Fundamental'naya i prikladnaya matematika*, vol. 14, no. 7, p. 121-128.
6. Kirichenko, V.V., Zhuravlev, V.N. and Tsyganivska, I.N. (2006), “On rigid quiver”, *Fundamental'naya i prikladnaya matematika*, vol. 12, no. 8, pp. 105-120.
7. Zhuravlev, V.N., Zelenskiy, O.V. and Darmosiuk, V.M. (2012), “Unit quivers of exponent matrices”, *Visnyk Kyivsk'oho universytetu*, Seriya: fizyko-matematychni nauky, no. 4, pp. 27-31.

УДК 519.83

ОБ ОЦЕНКАХ МЕРЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ БИМАТРИЧНОЙ ИГРЫ

Козин И. В., д. ф.-м. н., профессор, Зиновеева М. И., аспирант

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

ainc00@gmail.com, zinoveeva92@mail.ru

Рассматривается биматричная игра, не имеющая точек равновесия по Нэшу. Предложен способ определения меры близости между биматричной игрой без равновесной точки и биматричной игрой с точкой равновесия. Предложен механизм, который по заданной матрице игры позволяет построить ближайшую к ней, в смысле манхеттенской метрики, игру с точкой равновесия. Найдены оценки для меры неопределенности биматричной игры.

Ключевые слова: биматричная игра, точка равновесия, мера неопределенности, равновесие Нэша, манхеттенская метрика.

ПРО ОЦІНКИ МІРИ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ БИМАТРИЧНОЇ ГРИ

Козін І. В., д. ф.-м. н., професор, Зіновєєва М. І., аспірант

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

ainc00@gmail.com, zinoveeva92@mail.ru

Розглядається биматрична гра, яка не має точок рівноваги Неша. Запропоновано спосіб визначення міри близькості між биматричною грою без рівноважної точки і биматричною грою з точкою рівноваги. Запропоновано механізм, який по заданій матриці гри дозволяє побудувати найближчу до неї, у сенсі манхеттенської метрики, гру з точкою рівноваги. Знайдено оцінки для міри невизначеності биматричної гри.

Ключові слова: биматрична гра, точка рівноваги, міра невизначеності, рівновага Неша, манхеттенська метрика.

ABOUT UNCERTAINTY MEASURE'S ASSESMENT OF BIMATRIX GAME

Kozin I. V., D.Sc. in Physics and Maths, Professor, Zinovieieva M. I., Graduate Student

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

ainc00@gmail.com, zinoveeva92@mail.ru

Game theory is a powerful tool for modeling strategic interactions in a system where different parties need to act and react at the same time, anticipating the appropriate response to each other. Using models of game theory can be described by a wide range of problems in life and human activities. For example, the unregulated market can be studied by the theory of Nash equilibrium [1, 2, 4]. The main disadvantage of the concept of equilibrium is that there is seldom enough. Matrix games can be solved on the basis of the algorithm, which follows from an algebraic proof of the theorem minimax given in [3]. Class bimatix games much wider class of matrix (a variety of new simulated conflict situations is very noticeable), and thus inevitably increases and difficulties encountered by their successful resolution. Every bimatix game has at least one equilibrium situation (the balance point) in mixed strategies.

The problem of finding equilibria in games bimatix considered by all researchers in two aspects: the search for a balance of the situation and search for all equilibrium situations in order to highlight the best of a variety of situations, those that satisfy the additional conditions (strong equilibrium, perfect balance, and others.). The question arises: how different arbitrary bimatix play the game to the point of equilibrium? We consider bimatix game has no Nash equilibrium points. A method for determining the measure of proximity between bimatix games. A mechanism that, given the matrix of the game allows you to build the closest to it, in the sense of the Manhattan metric, the game with a point of equilibrium.

Key words: bimatix game, equilibrium point, a measure of uncertainty, the Nash equilibrium, the manhattan metric.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из самых важных сторон человеческой деятельности является проблема принятия решений. В большинстве случаев выбор приходится принимать в условиях конфликта. Именно изучением различных видов конфликтных ситуаций и занимается математическая теория игр. Каждый из участников конфликта стремится повлиять на ход ситуации в своих собственных целях, т.е. целью каждого участника любой матричной игры является нахождение наиболее выгодной стратегии, обеспечивающей одному игроку максимальный выигрыш, а другому игроку минимальный проигрыш [3]. Используя модели математической теории игр, можно описать большое количество ситуаций, которые возникают в деятельности и жизни человека. Это является одним из основных подтверждений актуальности этого исследовательского направления. Теория игр – это один из основных способов моделирования стратегий в различных системах, в которых участники должны принимать решения, опережая соответствующие действия друг друга.

Для большинства типов игр предложены различные типы оптимальности и выделены их свойства [5-12]. Но классическими понятиями оптимальности являются равновесия Нэша, в случае которого ни один из игроков, действуя в одиночку, не может увеличить своего выигрыша. Известно множество уточнений равновесия по Нэшу: изолированное равновесие, регулярное равновесие, строго собственное равновесие и ряд других. Теорема Нэша обеспечивает существование равновесных ситуаций, но не метод их нахождения. Математически довольно сложно их отыскать, но для довольно простых видов игр, таких как биматричные например, решения есть.

Именно поэтому в статье рассматривается биматричная игра с конечным числом стратегий. Данный вид задач является первым по сложности обобщением матричных игр. Под понятием равновесие будет подразумеваться равновесие по Нэшу без дополнительных условий. В статье предлагается механизм, позволяющий от задачи, которая не имеет решения в чистых стратегиях перейти к новой задаче, которая имеет решение в чистых стратегиях. При этом платежная матрица новой задачи «наиболее близка» к платежной матрице исходной задачи по некоторому критерию.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В теории игр наиболее простой моделью является матричная игра двух лиц [13]. Кооперативную игру двух лиц будем задавать матрицей вида:

$$A = \left((a_{ij}, b_{ij}) \right)_{i=1, j=1}^{i=n, j=m}.$$

Здесь n – число стратегий 1-го игрока и m – число стратегий 2-го игрока, a_{ij} , b_{ij} – соответственно выигрыши первого и второго игроков при выборе первым игроком стратегии i , а вторым – стратегии j .

Определим расстояние между играми, заданными соответственно матрицами $A = \left((a_{ij}, b_{ij}) \right)_{i=1, j=1}^{i=n, j=m}$ и $A' = \left((a'_{ij}, b'_{ij}) \right)_{i=1, j=1}^{i=n, j=m}$, следующим образом:

$$\rho(A, A') = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij} - a'_{ij}|.$$

В соответствии с [15] будем называть мерой неопределенности матричной игры двух лиц расстояние между этой игрой и множеством игр с седловой точкой, то есть множеством игр,

заданных матрицами вида $A = \left((a_{ij}, b_{ij}) \right)_{i=1, j=1}^{i=n, j=m}$, для которых найдется пара индексов i_0, j_0 таких, что

$$a_{i_0 j_0} = \max_i \min_j a_{ij}, \quad b_{i_0 j_0} = \max_i \min_j b_{ij}.$$

Задача настоящей статьи состоит в отыскании верхней оценки меры неопределенности матричных игр двух лиц.

Рассмотрим сначала игру двух лиц размерности $n \times 1$, в которой у первого игрока n стратегий, а у второго игрока стратегия единственная. Такая игра задается n -мерным вектором, каждая координата которого представляет собой пару (a_i, b_i) , где координаты векторов $a = (a_i)$, $b = (b_i)$ – соответственно выигрыши 1-го и 2-го игроков при выборе первым игроком стратегии с номером i . Наличие седловой точки в этой игре означает, что $\max_i a_i$ и $\max_i b_i$ достигаются при одном и том же номере $i = i_0$. Пусть седловая точка в игре отсутствует, то есть $\max_i a_i = a_{i_0}$, $\max_i b_i = b_{j_0}$ и $i_0 \neq j_0$.

Обозначим через r_0 меру неопределенности рассматриваемой игры.

Теорема 1. Имеет место неравенство

$$r_0 \leq \min \{ a_{i_0} - a_{i_1}, b_{i_1} - b_{j_0} \}.$$

Доказательство. Для доказательства заметим, что для того, чтобы рассматриваемая игра стала игрой с седловой точкой достаточно поменять местами координаты i_0, i_1 в векторе выигрышей a или в векторе выигрышей b .

Покажем, что эту оценку можно улучшить. Для этого рассмотрим отдельно вектор $c = (c_i)_{i=1}^{i=n}$, для которого $\max_i c_i = c_{i_0}$. Задача состоит в следующем: изменить координаты вектора c таким образом, чтобы максимальная координата заняла место с номером j_0 .

Упорядочим координаты вектора c по возрастанию координат. Получим

$$c_{i_1} \leq c_{i_2} \leq \dots \leq c_{i_k} = c_{j_0} \leq \dots \leq c_{i_n} = c_{i_0}.$$

Очевидно, чтобы координата с номером j_0 стала максимальной, достаточно изменить координаты с номерами i_k, i_{k+1}, \dots, i_n . При этом можно либо увеличить все координаты $c_{i_k}, c_{i_{k+1}}, \dots, c_{i_n}$ до величины c_{i_0} , либо уменьшить эти координаты до величины c_{j_0} , либо увеличить первые s из них и уменьшить оставшиеся до некоторой величины $z \in [c_{i_s}, c_{i_{s+1}}]$. Величина минимальных изменений координат определяется как

$$\sigma(c, j_0) = \min_{z \in [c_{i_s}, c_{i_{s+1}}]} \left\{ \left(\sum_{q=s+1}^n c_{i_q} - \sum_{q=k}^s c_{i_q} \right) + (2s - k - n + 1)z \right\}.$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Для меры неопределенности матричной игры двух лиц размерности $n \times 1$ справедливо неравенство $r_0 \leq \min \{ \sigma(a, j_0), \sigma(b, i_0) \}$.

Перейдем теперь к общему случаю игры двух лиц с матрицей $A = \left((a_{ij}, b_{ij}) \right)_{i=1, j=1}^{i=n, j=m}$. Как и прежде, обозначим меру неопределенности этой игры r_0 , определим два вектора

$$p = (p_i)_{i=1}^n, \quad p_i = \min_{1 \leq j \leq m} a_{ij} \quad \text{и} \quad q = (q_i)_{i=1}^n, \quad q_i = \min_{1 \leq j \leq m} b_{ij}.$$

Пусть $p_0 = \max_{1 \leq i \leq n} p_i = \max_{1 \leq i \leq n} \min_{1 \leq j \leq m} a_{ij} = a_{i_0 j_0}$ и $q_0 = \max_{1 \leq i \leq n} q_i = \max_{1 \leq i \leq n} \min_{1 \leq j \leq m} b_{ij} = q_{k_0 l_0}$. Рассмотрим случай, когда $i_0 = k_0$, $j_0 \neq l_0$. То есть максимин для двух игроков достигается в одной и той же строке, но в разных столбцах соответствующих матриц. Упорядочим элементы строки i_0 в матрице $a = (a_{ij})$ по возрастанию. Пусть $p_0 = a_{i_0 j_0} = a_{i_0 j_1} \leq a_{i_0 j_2} \leq \dots \leq a_{i_0 j_k} = a_{i_0 l_0} \leq \dots a_{i_0 j_m}$.

Для достижения седловой точки в игре достаточно уменьшить все элементы $a_{i_0 j_0} = a_{i_0 j_1}, a_{i_0 j_2}, \dots, a_{i_0 j_k} = a_{i_0 l_0}$ до величины $a_{i_0 j_0}$. Положим $\tau(a, i_0) = \sum_{s=1}^k a_{i_0 j_s} - k a_{i_0 j_0}$. Аналогично определим величину $\tau(b, i_0)$ для матрицы $b = (b_{ij})$.

Таким образом, приходим к следующей оценке меры неопределенности в рассматриваемом случае:

Теорема 3. Для меры неопределенности матричной игры двух лиц размерности $n \times m$, в которой строки максимина двух игроков совпадают, справедливо неравенство $r_0 \leq \min \{ \tau(a, i_0), \tau(b, i_0) \}$.

Теперь рассмотрим случай, когда $i_0 \neq k_0$, $j_0 \neq l_0$. Сначала увеличим элементы строки с номером k_0 в матрице $a = (a_{ij})$ так, чтобы минимальный элемент в этой строке сравнялся с числом p_0 . Величина такого изменения определяется числом

$$\omega(a, k_0) = \sum_{j=1}^m \max(a_{k_0 j} - a_{i_0 j_0}, 0). \quad (1)$$

Обозначим преобразованную матрицу a' . Минимум в матрицах a' и b достигается в одной и той же строке с номером k_0 . Воспользовавшись утверждением теоремы 3, приходим к следующей теореме.

Теорема 4. Для меры неопределенности матричной игры двух лиц размерности $n \times m$, в которой строки максимина двух игроков совпадают, справедливо неравенство $r_0 \leq \min \{ \tau(a', k_0) + \omega(a, k_0), \tau(b', i_0) + \omega(b, i_0) \}$.

АЛГОРИТМ ПЕРЕХОДА ОТ БИМАТРИЧНОЙ ИГРЫ К ИГРЕ С ТОЧКОЙ РАВНОВЕСИЯ

В отличие от игр с нулевой суммой, игры с ненулевой суммой уже не подразумевают обязательность выигрыша одного из участников и проигрыша другого; скорее наоборот – возможен вариант одновременного выигрыша или проигрыша. А так как интересы игроков уже не полностью противоположны, то их поведение становится более разнообразным. Если же в игре с нулевой суммой игрокам было невыгодно информировать друг друга о своей стратегии, поскольку это могло значительно уменьшить собственный выигрыш, то в игре с ненулевой суммой ситуация меняется и становится полезным координировать свои действия с партнером или каким-либо способом влиять на его действия.

Пусть i_0 – оптимальная стратегия для первого игрока, j_1 – оптимальная стратегия для второго игрока. Если значение выигрыша первого игрока находится в точке $a_{i_0 j_1}$, а второго игрока – $b_{i_1 j_1}$, то игра уже имеет точку равновесия. В противном случае положим, что функцией выигрыша первого игрока является $a_{i_0 j_0} = \max_i \min_j a_{ij}$, а для второго $b_{i_1 j_1} = \max_i \min_j b_{ij}$. Таким образом, седловые точки для игроков находятся в разных строках и столбцах. Рассмотрим вначале выигрыш первого игрока. Наложим на элементы a_{ij} строки i_0 штраф, величина которого равна (1), таким образом, чтобы элемент $a_{i_0 j_0}$ совпадал с элементом $a_{i_0 j_1}$. После данных преобразований седловые точки первого и второго игроком находятся в разных строках, но в одном столбце. Аналогичным образом накладываем штраф на элементы b_{ij} столбца j_1 , величина которого равна

$$\psi(l_0, b) = \sum_{i=1}^n \max(0, b_{i l_0} - b_{i j_1}).$$

В результате преобразований седловые точки двух игроков совпадут на пересечение строки i_1 и столбца j_1 .

ВЫВОДЫ

Актуальность данной статьи обусловлена тем, что теория игр в настоящее время активно применяется ко многим направлениям нашей жизни, но еще недостаточно разработана. Методы в теории игр дают возможность просчитывать возможный вариант получения прибыли, определения наиболее лучших шагов, а также определение поведения и действий оппонентов. В статье рассмотрено понятие меры неопределенности для биматричной игры, предложен алгоритм перехода от игры с отсутствующей точкой равновесия к самой ближайшей к ней новой биматричной игре с равновесной точкой. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании экономических ситуаций, связанных с поведением экономических агентов в конфликтных и безконфликтных ситуациях, при создании систем с адаптивным управлением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карманов В. Г. Математическое программирование / В. Г. Карманов. – М. : Наука, 1986. – 288 с.
2. Handbook of Game Theory / Ed. by R. J. Aumann and S. Hart. – 2002. – Vol. 3.
3. Данилов В. И. Лекции по теории игр / В. И. Данилов. – М. : Российская экономическая школа, 2002. – 140 с.
4. Lemke C. E. Bimatrix equilibrium points and mathematical programming / C. E. Lemke // Management science. – 1965. – Vol. 11, №7. – P. 681-689.
5. Безруков А. Б. Прикладная теория игр : учебное пособие / А. Б. Безруков, С. С. Сайтгараев. – Челябинск : Изд-во Челябинского Госуниверситета, 2001. – 128 с.
6. Воробьев Н. Н. Теория игр для экономистов и кибернетиков / Н. Н. Воробьев. – М. : Наука, 1985. – 272 с.
7. Петросян Л. А. Игры в развернутой форме: оптимальность и устойчивость / Л. А. Петросян, Д. В. Кузютин. – СПб. : Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2000. – 292 с.
8. Протасов И. Д. Теория игр и исследование операций / И. Д. Протасов. – М. : Гелиос АРВ, 2003. – 368 с.

9. Стрекаловский А. С. Введение в теорию игр : учебное пособие / А. С. Стрекаловский. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2003. – 124 с.
10. Mangasarian O. L. Two-person nonzero games and quadratic programming / O. L. Mangasarian, H. Stone // *Journal of mathematical analysis and applications*. – 1964. – № 9. – P. 348-355.
11. Raghavan T. E. S. Non zero-sum two person games / T. E. S. Raghavan. Ed.by R. J. Aumann and S. Hart // *Handbook of Game Theory*. – 2002. — Vol. 3.
12. Vermeulen A. J. On the set of perfect equilibria of bimatrix games / A. J. Vermeulen, M. J. M. Jansen // *Naval research logistics quarterly*. – 1994. – Vol. 41. – P. 295-302.
13. Сурмин Ю. П. Теория систем и системный анализ : учебное пособие / Ю. П. Сурмин. – К. : МАУП, 2003. – 368 с.
14. Таха Х. Введение в исследование операций (Книга 2) / Х. Таха. – М. : Мир, 1985. – 496 с.
15. Питання прикладної математики і математичного моделювання : зб. наук. пр. / редкол. О. М. Кісельова (відп. ред.) та ін. – Д. : Вид-во «Ліра», 2014. – С. 105-111.

REFERENCES

1. Karmanov, V.G. (1986), *Matematicheskoe programmirovaniye* [Mathematical programming], Nauka, Moscow, Russia.
2. Aumann, R.J. and Hart, S. (2002), “Handbook of Game Theory”, North-Holland, Amsterdam, Netherlands.
3. Danilov, V.I. (2002), *Lektsii po teorii igr* [Lectures on Game Theory], Rossiyskaya ekonomicheskaya shkola, Moscow, Russia.
4. Lemke, C.E. (1965), “Bimatrix equilibrium points and mathematical programming”, *Management science*, vol. 11, no. 7, pp. 681-689.
5. Bezrukov, A.B. and Saitgaraev, S.S. (2001), *Prikladnaya teoriya igr. Uchebnoye posobie* [Applied game theory. Training manual], Izd-vo Chelyabinskogo Gosuniversiteta, Chelyabinsk, Russia.
6. Vorobev, N.N. (1985) *Teoriya igr dlya ekonomistov i kibernetikov* [Game theory for economists and cybernetics], Nauka, Moscow, Russia.
7. Petrosyan, L.A. and Kuzyutin, D.V. (2000) *Igry v razvernutoi forme: optimalnost i ustoichivost* [Games in extensive form: optimality and stability], Izd-vo Sankt-Peterburgskogo universiteta, Sankt-Peterburg, Russia.
8. Protasov, I.D. (2003), *Teoriya igr i issledovanie operatsiy* [Game theory and operations research], Gelios ARV, Moscow, Russia.
9. Strekalovskiy, A.S. (2003), *Vvedenie v teoriyu igr. Uchebnoye posobie* [Introduction to the theory of games. Training manual], Izd-vo IGU, Irkutsk, Russia.
10. Mangasarian, O.L. and Stone, H. (1964), “Two-person nonzero games and quadratic programming”, *Journal of mathematical analysis and applications*, vol. 9, pp. 348-355.
11. Raghavan, T.E.S. (2002), “Non zero-sum two person games”, North-Holland, Amsterdam, Netherlands.
12. Vermeulen, A.J. and Jansen, M.J.M. (1994), “On the set of perfect equilibria of bimatrix games”, *Naval research logistics quarterly*, vol. 41, pp. 295-302.
13. Surmin, Yu.P. (2003), *Teoriya sistem i sistemnyiy analiz: Ucheb. posobie* [Theory and system analysis: Textbook. allowance], MAUP, Kiev, Ukraine.
14. Таха, Н. (1985), *Vvedenie v issledovanie operatsiy* [Introduction to operations research], Mir, Moscow, Russia.
15. Zinoveeva, M.I. (2014), “Pitannya prikladnoyi matematiki I matematichnogo modelyuvannya”, *zb. Nauk. pr.*, pp. 105-111.

УДК 533.6.013.42

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ОСНОВАНИЙ И ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ЖЕСТКОМ КОЛЬЦЕВОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗЕРВУАРЕ

Кононов Ю. Н., д. ф.-м. н., профессор, Джуха Ю. А., аспирант

*Донецкий национальный университет,
ул. 600-летия, 21, г. Винница, 21021, Украина*

kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com, yu.djukha@donnu.edu.ua

Выведено частотное уравнение собственных совместных осесимметричных колебаний упругих оснований в виде кольцевых пластин и тяжелой идеальной жидкости в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре. Рассмотрены различные случаи закрепления контуров кольцевых пластин, различные предельные случаи вырождения кольцевых пластин в круговые, в мембраны, в абсолютно жесткие пластины, а также случай отсутствия верхней пластины (случай жидкости со свободной поверхностью). Для широкого круга параметров рассматриваемой механической системы проведены и проанализированы численные исследования.

Ключевые слова: гидроупругость, кольцевые упругие пластины, идеальная жидкость, осесимметричные колебания.

ОСЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНИХ ОСНОВ ТА ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ В ЖОРСТКОМУ КІЛЬЦЕВОМУ ЦИЛІНДРИЧНОМУ РЕЗЕРВУАРІ

Кононов Ю. М., д. ф.-м. н., професор, Джуха Ю. О., аспірант

*Донецький національний університет,
вул. 600-річчя, 21, м. Вінниця, 21021, Україна*

kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com, yu.djukha@donnu.edu.ua

Виведене частотне рівняння власних сумісних осесиметричних коливань пружних основ у вигляді кільцевих пластин і важкої ідеальної рідини в жорсткому кільцевому циліндричному резервуарі. Розглянуті різні випадки закріплення контурів кільцевих пластин, різні межові випадки виродження кільцевих пластин у кругові, у мембрани, в абсолютно жорсткі пластины, а також випадок відсутності верхньої пластини (випадок рідини з вільною поверхнею). Для широкого кола параметрів механічної системи, що розглядається, проведені та проаналізовані чисельні дослідження.

Ключові слова: гідропружність, кільцеві пружні пластины, ідеальна рідина, осесиметричні коливання.

AXISYMMETRIC VIBRATIONS OF ELASTIC BASES AND IDEAL LIQUID IN A RIGID ANNULAR CYLINDRICAL TANK

Kononov Yu. M., D.Sc. in Physics and Maths, professor, Dzhukha Yu. O., postgraduate

*Donetsk National University,
600-richchya str., 21, Vinnytsia, 21021, Ukraine*

kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com, yu.djukha@donnu.edu.ua

Interest in axisymmetric vibrations of elastic bases and liquid in an annular cylindrical tank is connected with the need to take into account vibrations of a liquid column between elastic bases. This is not necessary in the case of asymmetric vibrations of liquid in axisymmetric tank.

Right annular cylindrical tank with elastic bases contains a heavy liquid. The bases are modeled by isotropic thin annular plates. It is considered three types of fixing of outer and inner contours: clamped, simply supported and free edge. The plates are under an action of tensile forces acting on a middle surface. It is assumed that the liquid is ideal, homogeneous and incompressible. The movement of the liquid is potential. The problem is considered in the linear formulation. Plates' bending problem is represented as a sum of static and dynamic bending. Spectral problem is represented as a system of two inhomogeneous biharmonic equations. These equations govern coupled vibrations of plates and liquid. The general solution to each equation is the sum of the general solution of the related homogeneous equation and the particular solution. Mechanical parameters of the plate and the density of the liquid define the general solution of the homogeneous equation which contains an unknown frequency.

Particular solution of the inhomogeneous equation takes the form of a series expansion in the eigenfunctions of ideal liquid vibrations in the annular cylindrical tank.

From the condition of fixing of outer and inner contours of the plates, compatibility condition and condition of incompressibility of the liquid follows the frequency equation of natural joint axisymmetric vibrations of the elastic bases and the ideal liquid. In general this transcendental equation takes the form of a determinant of the ninth order. In general terms, the frequency spectrum of equation consists of two sets of frequencies corresponding to vibrations of upper and lower elastic bases. In the absence of gravity frequency equation is symmetrical referred to the upper and lower bases. On the basis of analytical and numerical investigations it may be concluded that:

1. The frequency spectrum consists of two sets of frequencies corresponding to vibrations of upper and lower elastic bases;
2. Under zero gravity axisymmetric vibrations are absent if the plates are massless or if one plate is absolutely rigid and another one is massless;
3. If the liquid has a free surface, then the frequency spectrum consists of two sets of frequencies corresponding to vibrations of the free surface and the elastic bottom. In a wide variation range of parameters of the mechanical system takes place a weak change of the first set of frequencies and a significant change of the second set of frequencies as well:
 - 3.1. In most cases the first frequency of the second set depends on the dimensionless rigidity almost linearly;
 - 3.2. The frequencies of the first set decrease slightly, and the frequencies of the second set decrease significantly when the depth of filling increase;
 - 3.3. The frequencies of the second set in the case of the fixed outer and free inner contours and sufficiently small inner radius are closely equal to the corresponding frequencies in the case of a circular cylinder;
 - 3.4. The series of the frequency equation converge fast enough. The time of finding solution of the frequency equation greatly goes up with an allowance for mass characteristics of the plates.

Key words: hydroelasticity, annular elastic plates, ideal liquid, axisymmetric vibrations.

ВВЕДЕНИЕ

Данная статья обобщает результаты работы [1], в которой рассматривалась задача о совместных осесимметричных колебаниях упругих круговых оснований прямого кругового цилиндра и идеальной жидкости, на случай кольцевого цилиндра, кольцевых оснований и различных способов закрепления внешних и внутренних контуров.

Наиболее полный обзор литературы приведен в [1]. Отметим только последние основные публикации. В статье [2] рассмотрены осесимметричные колебания заземленного упругого кольцевого основания жесткого прямого кольцевого цилиндра и идеальной жидкости со свободной поверхностью. В линейной постановке динамика и устойчивость колебаний цилиндрического резервуара с упругим дном и жидкостью со свободной поверхностью исследована в [3]. Наиболее полная постановка задачи о колебаниях упругих оснований и идеальной жидкости дана в работе [4], а в статье [5] она обобщена на случай двухсвязного цилиндрического сосуда и двухслойной жидкости. В указанных выше статьях [3-5] осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости не были рассмотрены. С позиции функционального анализа задача о колебаниях жидкости между упругими основаниями в жестком круговом цилиндрическом резервуаре была рассмотрена в [6]. Из последних зарубежных работ, близких по тематике, следует отметить статьи [7-9], в которых рассматриваются осесимметричные колебания двухслойной жидкости применительно к проблеме капиллярных фазоразделителей. В данной статье выведено и исследовано частотное уравнение собственных осесимметричных колебаний кольцевых пластин и идеальной жидкости для трех различных способов закрепления внешнего и внутреннего контуров оснований. Рассмотрен ряд частных случаев вырождения кольцевых пластин в круговые, в абсолютно жесткие, в мембраны, а также случай отсутствия верхней пластины (случай жидкости со свободной поверхностью). Проведены и проанализированы численные исследования для случая жидкости со свободной поверхностью и случая невесомости.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим совместные колебания упругих оснований и тяжелой идеальной несжимаемой жидкости плотности ρ , находящейся в прямом кольцевом цилиндре внешнего радиуса a и

внутреннего $a\varepsilon$ ($0 \leq \varepsilon < 1$). Основания цилиндра представляют собой кольцевые изотропные пластины с изгибной жесткостью D_i , подверженные растягивающим усилиям T_i в срединной плоскости ($i = 1, 2$). Будут рассмотрены три наиболее часто используемые условия закрепления внешнего и внутреннего контуров пластин: защемленный, опертый и свободный край. Индекс $i = 1$ соответствует верхнему основанию, а $i = 2$ – нижнему. Цилиндрическую систему координат $Or\theta z$ расположим так, чтобы плоскость $Or\theta$ находилась на одинаковом расстоянии от оснований, а ось Oz была направлена по оси цилиндра противоположно вектору ускорения силы тяжести \vec{g} . Задачу будем рассматривать в линейной постановке, считая движение жидкости потенциальным, а совместные колебания пластин и жидкости – безотрывными.

Уравнения движения рассматриваемой механической системы имеют вид [1, 4]

$$k_{01} \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + D_1 \Delta_2^2 W_1 - T_1 \Delta_2 W_1 + \rho g W_1 = \rho \left(Q - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=h/2} - g \frac{h}{2} \right), \quad (1)$$

$$k_{02} \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + D_2 \Delta_2^2 W_2 - T_2 \Delta_2 W_2 - \rho g W_2 = -\rho \left(Q - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=-h/2} + g \frac{h}{2} \right), \quad (2)$$

$$\Delta \Phi = 0$$

с учетом следующих граничных условий:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=a, r=a\varepsilon} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=h/2} = \frac{\partial W_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=-h/2} = \frac{\partial W_2}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\int_S W_1 dS = \int_S W_2 dS, \quad (4)$$

$$\left(\mathcal{L}_{i1} [W_i] \right) \Big|_{r=a, r=a\varepsilon} = 0, \quad \left(\mathcal{L}_{i2} [W_i] \right) \Big|_{r=a, r=a\varepsilon} = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (5)$$

Здесь $k_{0i} = \rho_{0i} \delta_{0i}$; W_i , ρ_{0i} и δ_{0i} – соответственно прогиб, плотность и толщина i -ой пластинки; Φ – потенциал скоростей жидкости; h – глубина заполнения; Q – произвольная функция времени; $\Delta_2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$ и $\Delta = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – соответственно двухмерный и трехмерный операторы Лапласа для осесимметричного случая; S – кольцевая область; \mathcal{L}_{i1} и \mathcal{L}_{i2} – два оператора условий закрепления i -ой пластинки.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Вследствие осевой симметрии функции Φ и W_i представим в виде обобщенных рядов Фурье по собственным функциям $\psi_n(r)$ следующим образом [1, 4]:

$$\Phi(r, z, t) = a_0(t) + a_1(t)z + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(t)e^{k_n z} + B_n(t)e^{-k_n z}] \psi_n(r), \quad (6)$$

$$W_i(r, t) = W_{i0}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} W_{in}(t) \psi_n(r), \quad (7)$$

где

$$W_{i0} = \frac{1}{S} \int_S W_i dS, \quad W_{in} = \frac{1}{N_n^2} \int_S W_i \psi_n dS, \quad N_n^2 = \int_S \psi_n^2 dS.$$

Собственные функции $\psi_n(r)$ и соответствующие им собственные числа k_n находятся из решения краевой задачи

$$\Delta_2 \psi_n + k_n^2 \psi_n = 0 \quad \text{на} \quad [a\varepsilon, a], \quad \left. \frac{d\psi_n}{dr} \right|_{r=a, r=a\varepsilon} = 0$$

и вместе с произвольной константой образуют на отрезке $[a\varepsilon, a]$ полную и ортогональную систему функций. Из-за осевой симметрии эти функции имеют вид $\psi_n(r) = J_0(k_n r) + \gamma_n Y_0(k_n r)$. ($\gamma_n = -J_1(\xi_n)/Y_1(\xi_n)$, $k_n = \xi_n/a$; ξ_n - корни уравнения $J_1(\xi_n)Y_1(\xi_n \varepsilon) - J_1(\xi_n \varepsilon)Y_1(\xi_n) = 0$, J_0, J_1 и Y_0, Y_1 - функции Бесселя первого и второго рода). Подставив выражения (6)-(7) функций Φ и W_i в граничные условия (3)-(4), получим

$$A_n = \frac{\dot{W}_{1n} e^{\kappa_n/2} - \dot{W}_{2n} e^{-\kappa_n/2}}{2k_n \sinh \kappa_n}, \quad B_n = \frac{\dot{W}_{1n} e^{-\kappa_n/2} - \dot{W}_{2n} e^{\kappa_n/2}}{2k_n \sinh \kappa_n}, \quad a_1 = \dot{W}_{10} = \dot{W}_{20}, \quad (\kappa_n = k_n h),$$

и уравнения (1)-(2) примут вид

$$k_{01} \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + D_1 \Delta_2^2 W_1 - T_1 \Delta_2 W_1 + \rho g W_1 = \rho \left(Q - \dot{a}_0 - (\dot{a}_1 + g) \frac{h}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ddot{W}_{1n} \cosh \kappa_n - \ddot{W}_{2n}}{k_n \sinh \kappa_n} \psi_n \right), \quad (8)$$

$$k_{02} \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + D_2 \Delta_2^2 W_2 - T_2 \Delta_2 W_2 - \rho g W_2 = -\rho \left(Q - \dot{a}_0 + (\dot{a}_1 + g) \frac{h}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ddot{W}_{2n} \cosh \kappa_n - \ddot{W}_{1n}}{k_n \sinh \kappa_n} \psi_n \right), \quad (9)$$

ВЫВОД ЧАСТОТНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим задачу о собственных совместных колебаниях упругих пластин и жидкости. Для этого положим $W_i(r, t) = e^{i\omega t} w_i(r) + W_i^{st}(r)$, $\rho(Q - \dot{a}_0) = \tilde{Q}e^{i\omega t}$, $\rho \dot{a}_1 \frac{h}{2} = \tilde{w}e^{i\omega t}$. Здесь W_i^{st} - статический прогиб пластин. В этом случае уравнения (8)-(9) примут вид

$$D_i \Delta_2^2 w_i - T_i \Delta_2 w_i - [k_{0i} \omega^2 + (-1)^i \rho g] w_i = (-1)^{i+1} \tilde{Q} - \tilde{w} + \rho \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_{in} \psi_n \quad (i=1, 2), \quad (10)$$

где

$$\tilde{w}_{1n} = \frac{w_{1n} \cosh \kappa_n - w_{2n}}{k_n \sinh \kappa_n}, \quad \tilde{w}_{2n} = \frac{w_{2n} \cosh \kappa_n - w_{1n}}{k_n \sinh \kappa_n}, \quad \tilde{w} = -\rho \omega^2 \frac{h}{2} w, \quad (11)$$

$$w_{in} = \frac{1}{N_n^2} \int_S w_i \psi_n dS, \quad w = \frac{1}{S} \int_S w_1 dS = \frac{1}{S} \int_S w_2 dS. \quad (12)$$

Решение каждого уравнения (10) будем искать в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$w_i = \sum_{k=1}^4 w_{ik}^0 A_{ik}^0 + \rho \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{w}_{in}}{d_{in}} \psi_n + \tilde{k}_{0i} \left[\tilde{Q} + (-1)^i \tilde{w} \right] \quad (i=1, 2). \quad (13)$$

Здесь

$$\tilde{k}_{0i} = \frac{1}{\rho g + (-1)^i k_{0i} \omega^2}, \quad d_{in} = (D_i k_n^2 + T_i) k_n^2 - [k_{0i} \omega^2 + (-1)^i \rho g],$$

A_{ik}^0 ($i=1,2; k=\overline{1,4}$), w_{in} , \tilde{Q} и \tilde{w} – неизвестные константы.

Исключим неизвестную константу \tilde{w} . Для этого подставим (13) во второе условие (12) и воспользуемся условием ортогональности собственных функций ψ_n константе

$$\tilde{w} = \frac{1}{\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02}} \left(\sum_{k=1}^4 (\tilde{w}_{1k}^0 A_{1k}^0 - \tilde{w}_{2k}^0 A_{2k}^0) + \tilde{Q}(\tilde{k}_{01} - \tilde{k}_{02}) \right),$$

где $\tilde{w}_{ik}^0 = \frac{1}{S} \int_S w_{ik}^0 dS$.

Из второго условия (12) также следует уравнение

$$\sum_{k=1}^4 (\tilde{k}_2 \tilde{w}_{1k}^0 A_{1k}^0 + \tilde{k}_1 \tilde{w}_{2k}^0 A_{2k}^0) + \tilde{k} \tilde{Q} = 0. \tag{14}$$

Здесь $\tilde{k}_2 = \rho h \tilde{k}_{02} \omega^2 + 2$, $\tilde{k}_1 = \rho h \tilde{k}_{01} \omega^2 - 2$, $\tilde{k} = 2(\rho h \tilde{k}_{01} \tilde{k}_{02} \omega^2 + \tilde{k}_{01} - \tilde{k}_{02})$.

Подставив (13) в первое условие (12) и разрешив систему двух линейных уравнений относительно w_{1n} и w_{2n} , окончательно получим

$$w_i = \sum_{k=1}^4 (w_{i1k} A_{1k}^0 + w_{i2k} A_{2k}^0) + k^* \tilde{Q}. \tag{15}$$

Здесь

$$\begin{aligned} w_{11k} &= w_{1k}^0 - k_1 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n} E_{1kn}^0 \psi_n, & w_{12k} &= k_1 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E_{2kn}^0 \psi_n, \\ w_{21k} &= k_2 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{21n} E_{1kn}^0 \psi_n, & w_{22k} &= w_{2k}^0 - k_2 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{2kn}^0 \psi_n, \\ a_{11n} &= D_{1n} D_{2n}^*, & a_{12n} &= -d_{1n}^*, & a_{21n} &= -d_{2n}^*, & a_{22n} &= D_{2n} D_{1n}^*, \\ k_1 &= \frac{\tilde{k}_{01}}{\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02}}, & k_2 &= \frac{\tilde{k}_{02}}{\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02}}, & k^* &= \frac{2\tilde{k}_{01}\tilde{k}_{02}}{\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02}}, & \tilde{d}_{in} &= \frac{\rho\omega^2}{d_{in} k_n \sinh \kappa_n}, & d_{in}^* &= \frac{\tilde{d}_{in}}{\Delta_n}, \\ D_{in} &= \tilde{d}_{in} \sinh \kappa_n, & D_{in}^* &= \frac{\coth \kappa_n - D_{in}}{\Delta_n}, & \Delta_n &= 1 - (D_{1n} + D_{2n}) \coth \kappa_n + D_{1n} D_{2n}, \end{aligned} \tag{16}$$

$$E_{ikn}^0 = \frac{1}{N_n^2} \int_S w_{ik}^0 \psi_n dS.$$

Из условий закрепления пластин (5), соотношений (15) и уравнения (14) следует частотное уравнение собственных совместных колебаний упругих оснований и жидкости

$$\left\| \left\| C_{qr} \right\|_{q,r=1}^9 \right\| = 0, \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} C_{i+j-1,k} &= \mathcal{L}_{ijk1}^0 - k_1 \tilde{w}_{1k}^0 \mathcal{L}_{ij1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathcal{L}_{ijn1}, & C_{i+j-1,k+4} &= k_1 \tilde{w}_{2k}^0 \mathcal{L}_{ij1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathcal{L}_{ijn1}, & C_{i+j-1,9} &= k^* \mathcal{L}_{ij1}^0, \\ C_{i+j,k} &= \mathcal{L}_{ijk2}^0 - k_1 \tilde{w}_{1k}^0 \mathcal{L}_{ij2}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathcal{L}_{ijn2}, & C_{i+j,k+4} &= k_1 \tilde{w}_{2k}^0 \mathcal{L}_{ij2}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathcal{L}_{ijn2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{i+j,9} &= k^* \mathcal{L}_{ij2}^0 \quad (i=1, j=1, k=\overline{1,4}). \\
C_{i+j,k} &= \mathcal{L}_{ijk1}^0 - k_1 \tilde{w}_{1k}^0 \mathcal{L}_{ij1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathcal{L}_{ijn1}, \quad C_{i+j,k+4} = k_1 \tilde{w}_{2k}^0 \mathcal{L}_{ij1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathcal{L}_{ijn1}, \quad C_{i+j,9} = k^* \mathcal{L}_{ij1}^0, \\
C_{i+j+1,k} &= \mathcal{L}_{ijk2}^0 - k_1 \tilde{w}_{1k}^0 \mathcal{L}_{ij2}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathcal{L}_{ijn2}, \quad C_{i+j+1,k+4} = k_1 \tilde{w}_{2k}^0 \mathcal{L}_{ij2}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathcal{L}_{ijn2}, \\
C_{i+j+1,9} &= k^* \mathcal{L}_{ij2}^0 \quad (i=1, j=2, k=\overline{1,4}). \\
C_{i+j+2,k} &= k_2 \tilde{w}_{1k}^0 \mathcal{L}_{ij1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathcal{L}_{ijn1}, \\
C_{i+j+2,k+4} &= \mathcal{L}_{ijk1}^0 - k_2 \tilde{w}_{2k}^0 \mathcal{L}_{ij1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathcal{L}_{ijn1}, \quad C_{i+j+2,9} = k^* \mathcal{L}_{ij1}^0, \\
C_{i+j+3,k} &= k_2 \tilde{w}_{1k}^0 \mathcal{L}_{ij2}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathcal{L}_{ijn2}, \quad C_{i+j+3,k+4} = \mathcal{L}_{ijk2}^0 - k_2 \tilde{w}_{2k}^0 \mathcal{L}_{ij2}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathcal{L}_{ijn2}, \\
C_{i+j+3,9} &= k^* \mathcal{L}_{ij2}^0 \quad (i=2, j=1, k=\overline{1,4}). \\
C_{i+j+3,k} &= k_2 \tilde{w}_{1k}^0 \mathcal{L}_{ij1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathcal{L}_{ijn1}, \quad C_{i+j+3,k+4} = \mathcal{L}_{ijk1}^0 - k_2 \tilde{w}_{2k}^0 \mathcal{L}_{ij1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathcal{L}_{ijn1}, \quad C_{i+j+3,9} = k^* \mathcal{L}_{ij1}^0, \\
C_{i+j+4,k} &= k_2 \tilde{w}_{1k}^0 \mathcal{L}_{ij2}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathcal{L}_{ijn2}, \quad C_{i+j+4,k+4} = \mathcal{L}_{ijk2}^0 - k_2 \tilde{w}_{2k}^0 \mathcal{L}_{ij2}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathcal{L}_{ijn2}, \\
C_{i+j+4,9} &= k^* \mathcal{L}_{ij2}^0 \quad (i=2, j=2, k=\overline{1,4}). \\
C_{9,k} &= \tilde{k}_2 \tilde{w}_{1k}^0, \quad C_{9,k+4} = \tilde{k}_1 \tilde{w}_{2k}^0, \quad C_{9,9} = \tilde{k} \quad (k=\overline{1,4}). \\
\mathcal{L}_{ijkp}^0 &= \left(\mathcal{L}_{ip} [w_{ik}^0] \right) \Big|_{\gamma_j}, \quad \mathcal{L}_{ijnp}^0 = \left(\mathcal{L}_{ip} [w_n] \right) \Big|_{\gamma_j}, \quad \mathcal{L}_{ijp}^0 = \left(\mathcal{L}_{ip} [1] \right) \Big|_{\gamma_j}.
\end{aligned}
\tag{18}$$

Здесь для удобства записи введены дополнительные индексы j и p , а также обозначения контуров. Индекс $j=1$ соответствует внешнему контуру γ_1 , а $j=2$ – внутреннему γ_2 . Индекс $p=1$ относится к первому условию закрепления, а $p=2$ – ко второму.

Таким образом, уравнение (17) описывает собственные совместные колебания упругих кольцевых оснований и идеальной жидкости в кольцевом цилиндре при различных закреплениях внешнего и внутреннего контуров оснований.

Запишем операторы \mathcal{L}_{ip} и значения функций \mathcal{L}_{ijnp}^0 , \mathcal{L}_{ijp}^0 для защемленного, опертого и свободного края:

защемленный край –

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{i1} &\equiv 1, \quad \mathcal{L}_{i2} = \frac{d}{dr}, \quad \mathcal{L}_{i1n1} = B_{1n}^* = \frac{\xi_n Z_0(1)}{a}, \quad \mathcal{L}_{i2n1} = B_{2n}^* = \frac{\xi_n Z_0(\varepsilon)}{a}, \\
\mathcal{L}_{i1n2} &= \mathcal{L}_{i2n2} = 0, \quad \mathcal{L}_{ij1}^0 = 1, \quad \mathcal{L}_{ij2}^0 = 0;
\end{aligned}
\tag{19}$$

опертый край –

$$\mathcal{L}_{i1} \equiv 1, \quad \mathcal{L}_{i2} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{v_i}{r} \frac{d}{dr}, \quad \mathcal{L}_{i1n1} = B_{1n}^*, \quad \mathcal{L}_{i2n1} = B_{2n}^*,$$

$$\mathfrak{L}_{i1n2} = M_{1n}^* = -\frac{\xi_n^2 Z_0(1)}{a^2}, \quad \mathfrak{L}_{i2n2} = M_{2n}^* = -\frac{\xi_n^2 Z_0(1)}{a^2}, \quad \mathfrak{L}_{ij1}^0 = 1, \quad \mathfrak{L}_{ij2}^0 = 0; \quad (20)$$

свободный край –

$$\mathfrak{L}_{i1} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{v_i}{r} \frac{d}{dr}, \quad \mathfrak{L}_{i2} = \frac{d^3}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}, \quad \mathfrak{L}_{i1n1} = M_{1n}^*, \quad \mathfrak{L}_{i2n1} = M_{2n}^*,$$

$$\mathfrak{L}_{i1n2} = L_{1n}^* = 0, \quad \mathfrak{L}_{i2n2} = L_{2n}^* = 0, \quad \mathfrak{L}_{ij1}^0 = 0, \quad \mathfrak{L}_{ij2}^0 = 0, \quad (21)$$

где $Z_m(x) = J_m(\xi_n x) + \gamma_n Y_m(\xi_n x)$.

Частотный спектр уравнения (17) состоит из двух наборов частот, характеризующих колебания верхнего и нижнего упругих оснований и следует ожидать, что при достаточно малых глубинах заполнения будет наблюдаться довольно сильное взаимовлияние этих колебаний.

Следует отметить, что частотное уравнение (17) имеет особенности при $\Delta_n = 0$, $d_{in} = 0$,

$\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02} = 0 \left(\omega^2 = \frac{2\rho g}{k_{01} - k_{02}} \right)$ и $\rho g - \omega^2 k_{01} = 0 \left(\omega^2 = \frac{\rho g}{k_{01}} \right)$, которые необходимо учитывать при проведении численных расчетов.

Наибольший интерес будет представлять случай заземленных контуров, т.к. на практике он наиболее часто используется. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать именно этот случай, а остальные два случая закрепления нами будут использоваться при численных расчетах для проведения сравнения. В этой связи выпишем элементы определителя частотного уравнения (17) для заземленных контуров

$$C_{i+j-1,k} = \dot{B}_{ijk} - k_1 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 B_{jn}^*, \quad C_{i+j-1,k+4} = k_1 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 B_{jn}^*, \quad C_{i+j-1,9} = k^*,$$

$$C_{i+j,k} = C_{ijk}, \quad C_{i+j,k+4} = 0, \quad C_{i+j,9} = 0 \quad (i=1, j=1, k=\overline{1,4}).$$

$$C_{i+j,k} = B_{ijk} - k_1 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 B_{jn}^*, \quad C_{i+j,k+4} = k_1 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 B_{jn}^*, \quad C_{i+j,9} = k^*,$$

$$C_{i+j+1,k} = C_{ijk}, \quad C_{i+j+1,k+4} = 0, \quad C_{i+j+1,9} = 0 \quad (i=1, j=2, k=\overline{1,4}). \quad (22)$$

$$C_{i+j+2,k} = k_2 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 B_{jn}^*, \quad C_{i+j+2,k+4} = B_{ijk} - k_2 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 B_{jn}^*, \quad C_{i+j+2,9} = k^*,$$

$$C_{i+j+3,k} = 0, \quad C_{i+j+3,k+4} = C_{ijk}, \quad C_{i+j+3,9} = 0 \quad (i=2, j=1, k=\overline{1,4}).$$

$$C_{i+j+3,k} = k_2 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 B_{jn}^*, \quad C_{i+j+3,k+4} = B_{ijk} - k_2 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 B_{jn}^*, \quad C_{i+j+3,9} = k^*,$$

$$C_{i+j+4,k} = 0, \quad C_{i+j+4,k+4} = C_{ijk}, \quad C_{i+j+4,9} = 0 \quad (i=2, j=2, k=\overline{1,4}).$$

Здесь

$$B_{ijk} = w_{ik}^0 \Big|_{\gamma_j}, \quad C_{ijk} = \frac{dw_{ik}^0}{dr} \Big|_{\gamma_j}, \quad B_{jn}^* = Z_0 \left(\frac{r}{a} \right) \Big|_{\gamma_j}.$$

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ЧАСТОТНОГО УРАВНЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ СОВМЕСТНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ОСНОВАНИЙ И ЖИДКОСТИ

Полученное уравнение (17) является довольно общим и включает в себя ряд частных случаев, которые представляют самостоятельный интерес.

Случай невесомости. В этом случае $g = 0$ и частотное уравнение (17) будет симметрично относительно индексов 1 и 2, что имеет физическое обоснование и подтверждает правильность выведенного уравнения. Если $k_{01} = k_{02}$, то $\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02} = 0$ и, как было отмечено выше, уравнение (17) имеет особенность. При $k_{01} = 0$ и $k_{02} \neq 0$ будем иметь $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, а девятый столбец определителя уравнения (17) перепишем следующим образом: $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, k_{02}(\rho h + k_{02}))^T$. Если $k_{02} = 0$ и $k_{01} \neq 0$, то $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, а пятый столбец определителя уравнения (17) запишется так: $(-1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, k_{01}(\rho h + k_{01}))^T$.

Верхняя пластина вырождается в мембрану. В этом случае в определителе уравнения (17) нужно вычеркнуть вторую и четвертую строки и второй и четвертый столбцы, а в соотношениях (16) положить $D_1 = 0$.

Нижняя пластина вырождается в мембрану. Как и в предыдущем случае, в определителе уравнения (17) нужно вычеркнуть шестую и восьмую строки и шестой и восьмой столбцы, а в соотношениях (16) считать $D_2 = 0$.

Нижняя и верхняя пластины вырождаются в мембраны. В этом случае в определителе уравнения (17) нужно вычеркнуть вторую, четвертую, шестую, восьмую строки и второй, четвертый, шестой и восьмой столбцы, а в соотношениях (16) положить $D_1 = D_2 = 0$.

Случай наличия свободной поверхности у жидкости. Этот случай реализуется при отсутствии верхней пластины. В определителе уравнения (17) нужно вычеркнуть первую, вторую, третью, четвертую строки и первый, второй, третий, четвертый столбцы, а в соотношениях (16) считать $k_{01} = 0$, $T_1 = 0$, $D_1 = 0$.

При вырождении нижней пластины в мембрану ($D_2 = 0$) уравнение (17) запишется следующим образом:

$$\left| \left\| C_{qr} \right\|_{q,r=579}^{579} \right| = 0, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} C_{5,5} &= \mathcal{L}_{2111}^0 - k_2 \tilde{w}_{21}^0 \mathcal{L}_{211}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{21n}^0 \mathcal{L}_{21n1}, \quad C_{5,7} = \mathcal{L}_{2121}^0 - k_2 \tilde{w}_{22}^0 \mathcal{L}_{211}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{22n}^0 \mathcal{L}_{21n1}, \\ C_{5,9} &= k^* \mathcal{L}_{211}^0, \quad C_{7,5} = \mathcal{L}_{2211}^0 - k_2 \tilde{w}_{21}^0 \mathcal{L}_{221}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{21n}^0 \mathcal{L}_{22n1}, \quad C_{7,7} = \mathcal{L}_{2221}^0 - k_2 \tilde{w}_{22}^0 \mathcal{L}_{221}^0 + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{22n}^0 \mathcal{L}_{22n1}, \quad C_{7,9} = k^* \mathcal{L}_{221}^0, \quad C_{9,5} = \tilde{k}_2 \tilde{w}_{11}^0, \quad C_{9,7} = \tilde{k}_1 \tilde{w}_{22}^0, \quad C_{9,9} = \tilde{k}. \end{aligned}$$

Нижняя или верхняя пластина абсолютно жесткая. Если верхняя или нижняя пластина становится абсолютно жесткой, то в этом случае $w_1 \equiv 0$ ($\tilde{w}_{1k}^0 \equiv 0$) или $w_2 \equiv 0$ ($\tilde{w}_{2k}^0 \equiv 0$). Переходя к пределу в уравнении (17) при $T_1 \rightarrow \infty$ ($a_{11n} \rightarrow 0$, $a_{12n} \rightarrow 0$) или при $T_2 \rightarrow \infty$ ($a_{21n} \rightarrow 0$, $a_{22n} \rightarrow 0$), получим следующие частотные уравнения:

в первом случае ($T_1 \rightarrow \infty$)

$$\left| \left\| C_{qr} \right\|_{q,r=5}^8 \right| = 0, \tag{24}$$

а во втором –

$$\left| \left\| C_{qr} \right\|_{q,r=1}^4 \right| = 0. \tag{25}$$

Коэффициенты C_{qr} вычисляются по формулам (18).

Вырождение кольцевого цилиндра в круговой ($\varepsilon = 0$). В этом случае частотное уравнение (17) примет вид

$$\left| \left\| C_{qr} \right\|_{q,r=1}^5 \right| = 0. \tag{26}$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_{i,k} &= \mathcal{L}_{ik1}^0 - k_1 \tilde{w}_{1k}^0 \mathcal{L}_{i1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathcal{L}_{in1}, \quad C_{i,k+2} = k_1 \tilde{w}_{2k}^0 \mathcal{L}_{i1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathcal{L}_{in1}, \quad C_{i,5} = k^* \mathcal{L}_{i1}^0, \\ C_{i+1,k} &= \mathcal{L}_{ik2}^0 - k_1 \tilde{w}_{1k}^0 \mathcal{L}_{i2}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathcal{L}_{in2}, \quad C_{i+1,k+2} = k_1 \tilde{w}_{2k}^0 \mathcal{L}_{i2}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathcal{L}_{in2}, \quad C_{i+1,5} = k^* \mathcal{L}_{i2}^0 \\ &\quad (i = 1, \quad k = \overline{1,2}). \\ C_{i+1,k} &= k_2 \tilde{w}_{1k}^0 \mathcal{L}_{i1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathcal{L}_{in1}, \quad C_{i+1,k+2} = \mathcal{L}_{ik1}^0 - k_2 \tilde{w}_{2k}^0 \mathcal{L}_{i1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathcal{L}_{in1}, \quad C_{i+1,5} = k^* \mathcal{L}_{i1}^0, \\ C_{i+2,k} &= k_2 \tilde{w}_{1k}^0 \mathcal{L}_{i2}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathcal{L}_{in2}, \quad C_{i+2,k+2} = \mathcal{L}_{ik2}^0 - k_2 \tilde{w}_{2k}^0 \mathcal{L}_{i2}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathcal{L}_{in2}, \quad C_{i+2,5} = k^* \mathcal{L}_{i2}^0 \\ &\quad (i = 2, \quad k = \overline{1,2}). \end{aligned}$$

$$C_{5,k} = \tilde{k}_2 \tilde{w}_{1k}^0, \quad C_{5,k+2} = \tilde{k}_1 \tilde{w}_{2k}^0, \quad C_{5,5} = \tilde{k} \quad (k = \overline{1,2}).$$

$$\mathcal{L}_{ikp}^0 = \left(\mathcal{L}_{ip} [w_{ik}^0] \right) \Big|_{\gamma}, \quad \mathcal{L}_{inp} = \left(\mathcal{L}_{ip} [\psi_n] \right) \Big|_{\gamma}, \quad \mathcal{L}_{ip}^0 = \left(\mathcal{L}_{ip} [1] \right) \Big|_{\gamma}.$$

Для заземленных контуров этот случай был подробно рассмотрен в статье [1]. Следует отметить различия между уравнением (17) при $\varepsilon \rightarrow 0$ и уравнением (26). Эти уравнения будут совпадать для опертого и свободного внутреннего контуров, а для закрепленных внутренних контуров уравнение (17) при $\varepsilon \rightarrow 0$ описывает колебания рассматриваемой механической системы при неподвижных (закрепленных) центрах. Это новая задача об осесимметричных колебаниях жидкости и упругих круговых оснований с неподвижными центрами, которая следует из рассмотренной.

Пусть верхнее и нижнее основания являются абсолютно упругими ($T_1 = T_2 = 0$). В этом случае

$$\begin{aligned} w_{i1}^0 &= J_0 \left(\mu_i \frac{r}{a} \right), \quad w_{i2}^0 = Y_0 \left(\mu_i \frac{r}{a} \right), \quad w_{i3}^0 = I_0 \left(\mu_i \frac{r}{a} \right), \quad w_{i4}^0 = K_0 \left(\mu_i \frac{r}{a} \right), \\ \tilde{w}_{i1}^0 &= \frac{2 [J_1(\mu_i) - \varepsilon J_1(\varepsilon \mu_i)]}{\mu_i (1 - \varepsilon^2)}, \quad \tilde{w}_{i2}^0 = \frac{2 [Y_1(\mu_i) - \varepsilon Y_1(\varepsilon \mu_i)]}{\mu_i (1 - \varepsilon^2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{w}_{i3}^0 &= \frac{2[I_1(\mu_i) - \varepsilon I_1(\varepsilon\mu_i)]}{\mu_i(1 - \varepsilon^2)}, \quad \tilde{w}_{i4}^0 = -\frac{2[K_1(\mu_i) - \varepsilon K_1(\varepsilon\mu_i)]}{\mu_i(1 - \varepsilon^2)}, \\ E_{i1n}^0 &= \frac{2\mu_i(J_1(\mu_i)Z_0(1) - \varepsilon J_1(\varepsilon\mu_i)Z_0(\varepsilon))}{(\mu_i^2 - \xi_n^2)\tilde{N}_n^2}, \quad E_{i2n}^0 = \frac{2\mu_i(Y_1(\mu_i)Z_0(1) - \varepsilon Y_1(\varepsilon\mu_i)Z_0(\varepsilon))}{(\mu_i^2 - \xi_n^2)\tilde{N}_n^2}, \\ E_{i3n}^0 &= \frac{2\mu_i(I_1(\mu_i)Z_0(1) - \varepsilon I_1(\varepsilon\mu_i)Z_0(\varepsilon))}{(\mu_i^2 + \xi_n^2)\tilde{N}_n^2}, \quad E_{i4n}^0 = -\frac{2\mu_i(K_1(\mu_i)Z_0(1) - \varepsilon K_1(\varepsilon\mu_i)Z_0(\varepsilon))}{(\mu_i^2 + \xi_n^2)\tilde{N}_n^2},\end{aligned}\quad (27)$$

где

$$\mu_1^4 = \frac{k_{01}\omega^2 - \rho g}{D_1}, \quad \mu_2^4 = \frac{k_{02}\omega^2 + \rho g}{D_2}, \quad \tilde{N}_n^2 = Z_0^2(1) - \varepsilon^2 Z_0^2(\varepsilon),$$

J_p, Y_p, I_p, K_p – функции Бесселя первого и второго рода от действительного и мнимого аргументов.

Введем безразмерные переменные

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2 a}{g}, \quad \tilde{D}_i = \frac{D_i}{\rho g a^4}, \quad \tilde{T}_i = \frac{T_i}{\rho g a^2}, \quad k_{0i}^* = \frac{k_{0i}}{\rho a}, \quad \tilde{h} = \frac{h}{a}.$$

Основные переменные в безразмерном виде примут вид

$$\tilde{k}_{01} = \frac{1}{1 - k_{01}^* \Omega^2}, \quad \tilde{k}_{02} = \frac{1}{1 + k_{02}^* \Omega^2}, \quad \tilde{k}_2 = \tilde{h}\tilde{k}_{02}\Omega^2 + 2, \quad \tilde{k}_1 = \tilde{h}\tilde{k}_{01}\Omega^2 - 2, \quad \tilde{k} = 2(\tilde{h}\tilde{k}_{01}\tilde{k}_{02}\Omega^2 + \tilde{k}_{01} - \tilde{k}_{02}),$$

$$D_{1n} = \frac{\Omega^2}{\xi_n \left[(\tilde{D}_1 \xi_n^2 + \tilde{T}_1) \xi_n^2 + 1 - k_{01}^* \Omega^2 \right]}, \quad D_{2n} = \frac{\Omega^2}{\xi_n \left[(\tilde{D}_2 \xi_n^2 + \tilde{T}_2) \xi_n^2 - 1 - k_{02}^* \Omega^2 \right]}.$$

Если верхнее и нижнее основания являются абсолютно упругими ($T_1 = T_2 = 0$), то

$$\mu_1^4 = \frac{k_{01}^* \Omega^2 - 1}{\tilde{D}_1}, \quad \mu_2^4 = \frac{k_{02}^* \Omega^2 + 1}{\tilde{D}_2}.$$

При $\varepsilon = 0$ выражения (27) будут иметь вид [1]

$$\begin{aligned}w_{i1}^0 &= J_0\left(\mu_i \frac{r}{a}\right), \quad w_{i2}^0 = I_0\left(\mu_i \frac{r}{a}\right), \quad \tilde{w}_{i1}^0 = \frac{2J_1(\mu_i)}{\mu_i}, \quad \tilde{w}_{i2}^0 = \frac{2I_1(\mu_i)}{\mu_i}, \\ E_{i1n}^0 &= \frac{2\mu_i J_1(\mu_i)}{(\mu_i^2 - \xi_n^2) J_0(\xi_n)}, \quad E_{i2n}^0 = \frac{2\mu_i I_1(\mu_i)}{(\mu_i^2 + \xi_n^2) J_0(\xi_n)}.\end{aligned}$$

ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Ввиду сложности рассматриваемой задачи, проведем численные исследования для двух наиболее интересных случаев: случая наличия у жидкости свободной поверхности при закрепленном нижнем основании и случай невесомости ($g = 0$). Несмотря на достаточное количество публикаций, эти случаи до конца не исследованы.

При отсутствии верхнего основания ($k_{01} = 0, T_1 = 0, D_1 = 0$) для абсолютно упругого дна ($T_2 = 0$) в ранее введенных безразмерных переменных будем иметь:

$$D_{1n} = \frac{\Omega^2}{\xi_n}, \quad D_{2n} = \frac{\Omega^2}{\xi_n \left[(\tilde{D}_2 \xi_n^2 + \tilde{T}_2) \xi_n^2 - 1 - k_{02}^* \Omega^2 \right]}, \quad \tilde{k}_{01} = 1, \quad \tilde{k}_{02} = \frac{1}{1 + \tilde{k}_2 \Omega^2}, \quad \mu_2^4 = \frac{k_{02}^* \Omega^2 + 1}{\tilde{D}_2}.$$

Функции w_{2k}^0 и выражения \tilde{w}_{2k}^0 , E_{2kn}^0 вычисляются по формулам (27).

В случае невесомости ($g = 0$) нужно перейти к другим безразмерным переменным:

$$\Omega^2 = \omega^2 \frac{\rho a^5}{D_2}, \quad D_{12} = \frac{D_1}{D_2}, \quad \mu_1^4 = k_1 \Omega^2, \quad \mu_2^4 = k_2 D_{12} \Omega^2, \quad b_1^* = \frac{1}{\tilde{h} + k_1}, \quad b_2^* = \frac{1}{k_2}.$$

При $T_i \neq 0$ и $k_{01} = k_{02} = 0$, т.е. в случае безынерционных пластин, будем иметь:

$$w_{i1}^0 = 1, \quad w_{i2}^0 = I_0 \left(\gamma_{0i} \frac{r}{a} \right), \quad \gamma_{01} = \frac{T_1 a^2}{D_2}, \quad \gamma_{02} = \frac{T_2 a^2}{D_2}, \quad E_{i1}^0 = 0, \quad E_{i2}^0 = \frac{2\gamma_{0i} I_1(\gamma_{0i})}{(\gamma_{0i}^2 + \xi_n^2) J_0(\xi_n)}, \quad (28)$$

$$D_{1n} = \frac{\Omega^2}{\xi_n \left[(D_{12} \xi_n^2 + \gamma_{01}^2) \xi_n^2 - k_1 \Omega^2 \right]}, \quad D_{2n} = \frac{\Omega^2}{\xi_n \left[(\xi_n^2 + \gamma_{02}^2) \xi_n^2 - k_2 \Omega^2 \right]}.$$

Из соотношений (16), (18), (28) и уравнения (17) и проведенных численных исследований следует, что для безынерционных пластин, а также в случае, если одна пластина является абсолютно жесткой ($T_i \rightarrow \infty$), а другая – безынерционной, то частотное уравнение не имеет действительных корней. Дальнейшие численные исследования показали, что действительные корни также будут отсутствовать и для инерционных пластин и мембран. Следовательно, в невесомости осесимметричные колебания будут отсутствовать, если одна из пластин или мембран является абсолютно жесткой.

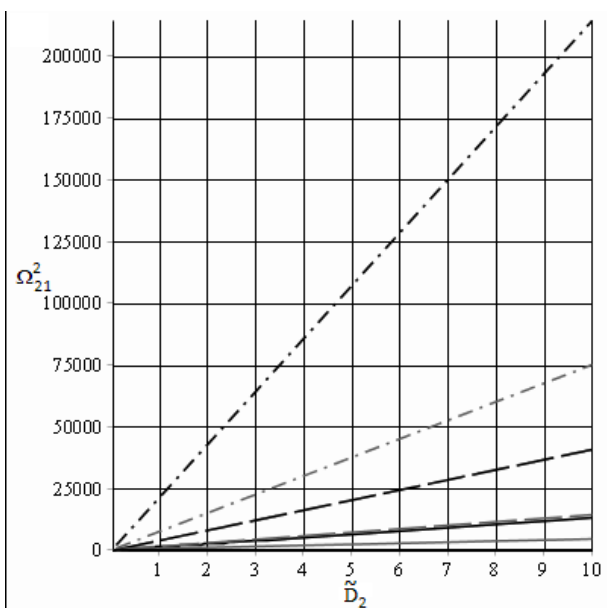


Рис. 1. Графики зависимости Ω_{21}^2 от \tilde{D}_2 для различных \tilde{h} и ε в случае закрепленных внешнего и внутреннего контуров

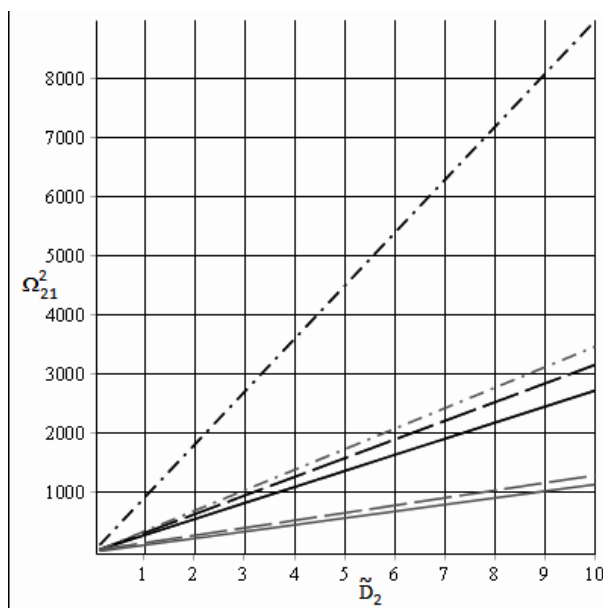


Рис. 2. Графики зависимости Ω_{21}^2 от \tilde{D}_2 для различных \tilde{h} и ε в случае закрепленного внешнего и свободного внутреннего контуров

Численные исследования частотного уравнения (23) были проведены для следующих значений безразмерных параметров: $\varepsilon = 0.001..0.5$, $\tilde{h} = 0.5..1.5$, $\tilde{k}_i = 0$, $\tilde{D}_2 = 0.1..10$. На рис. 1 с учетом двух членов в рядах уравнения (23) ($n = \overline{1, 2}$) представлены графики зависимости квадрата безразмерной первой частоты второго набора Ω_{21}^2 от безразмерной жесткости \tilde{D}_2 для безынерционного основания ($k_{02} = 0$) и различных глубин заполнения $\tilde{h} = 0.5, 1.5$. На рис. 2 рассмотрен случай жестко закрепленного внешнего и свободного внутреннего контуров при тех же значениях параметров. Серым цветом изображены графики частоты при

$\tilde{h} = 1.5$, а черным – при $\tilde{h} = 0.5$. Сплошными линиями изображены графики частоты при $\varepsilon = 0.001$, пунктирными – при $\varepsilon = 0.25$, а штрихпунктирными – при $\varepsilon = 0.5$.

На основании проведенных численных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Частотный спектр состоит из двух наборов частот, соответствующих колебаниям верхнего и нижнего упругих оснований.
2. В невесомости осесимметричные колебания будут отсутствовать в случае, если одна из пластин или мембран является абсолютно жесткой.
3. При наличии свободной поверхности у жидкости частотный спектр будет состоять из двух наборов частот, отвечающих колебаниям свободной поверхности и упругого дна. Показано, что в широком диапазоне изменения параметров механической системы наблюдается слабое изменение частот первого набора и существенное изменение частот второго набора, а также:
 - 3.1. Зависимость первой частоты второго набора от безразмерной жесткости в большинстве случаев почти линейная.
 - 3.2. С увеличением глубины заполнения происходит незначительное уменьшение частот первого набора и существенное - второго набора.
 - 3.3. Частоты второго набора для закрепленного внешнего и свободного внутреннего контуров при достаточно малом внутреннем радиусе практически совпадают с соответствующими значениями частот для кругового цилиндра.
 - 3.4. Частоты второго набора в случае защемленного внутреннего контура более чем в 4 раза выше соответствующих частот для свободного внутреннего контура.
4. Ряды в частотных уравнениях сходятся достаточно быстро. Как правило, достаточно двух-трех членов в этих рядах для достижения приемлемой для практики точности. При учете массовых характеристик пластин сильно возрастает время счета частотных уравнений.

Следует отметить, что в статье [1] есть несколько небольших неточностей. На с. 111 предложение «На рис. 1-2 с учетом двух членов в рядах уравнения (22) ($n = \overline{1,2}$) представлены графики зависимости квадрата безразмерной первой частоты второго набора Ω_{21}^2 от безразмерной жесткости \tilde{D}_2 для различных глубин заполнения $\tilde{h} = 0.5, 1.0, 1.5$ (рис. 1) и массовой характеристики пластины $\tilde{k}_2 = 2.0, 1.0, 0.5$ (рис. 2). На рис. 1 нижний график соответствует $\tilde{h} = 0.5$, средний – $\tilde{h} = 1.0$, а верхний – $\tilde{h} = 1.5$. На рис. 2 аналогично $\tilde{k}_2 = 2.0, 1.0, 0.5$ » следует заменить на «На рис. 1-2 с учетом двух членов в рядах уравнения (22) ($n = \overline{1,2}$) представлены графики зависимости квадрата безразмерной первой частоты второго набора Ω_{21}^2 от безразмерной жесткости \tilde{D}_2 для различных значений массовой характеристики пластины $\tilde{k}_2 = 0.5, 1.0, 1.5$ (рис. 1) и глубин заполнения $\tilde{h} = 0.5, 1.0, 1.5$ (рис. 2). На рис. 1 нижний график соответствует $\tilde{k}_2 = 2.0$, средний – $\tilde{h} = 1.0$, а верхний – $\tilde{h} = 0.5$. На рис. 2 аналогично $\tilde{h} = 0.5, 1.0, 1.5$.» Кроме того, на с. 112 предложение «Рис. 1. Графики зависимости Ω_{21}^2 от \tilde{D}_2 для различных \tilde{h} » нужно заменить на «Рис. 1. Графики зависимости Ω_{21}^2 от \tilde{D}_2 для различных \tilde{k}_2 », а предложение «Рис. 2. Графики зависимости Ω_{21}^2 от \tilde{D}_2 для различных \tilde{k}_2 » - на «Рис. 2. Графики зависимости Ω_{21}^2 от \tilde{D}_2 для различных \tilde{h} ». Наконец, в выводах статьи [1] на с. 112 в пункте 3 «С увеличением глубины заполнения \tilde{h} происходит незначительное увеличение частот первого набора и существенное второго набора» есть небольшая неточность, связанная с тем, что с увеличением глубины заполнения происходит уменьшение частот двух наборов.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кононов Ю. Н. Осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре / Ю. Н. Кононов, В. Ф. Русаков, Ю. А. Джуха // Вісн. Запорізького національного ун-ту. Сер. Фіз.-мат. – 2015. – №. 2. – С. 105-114.
2. Карнаух А. Ю. Свободные колебания плоского упругого дна коаксиального цилиндрического сосуда и идеальной жидкости со свободной поверхностью / А. Ю. Карнаух // Вісн. Донецького національного ун-ту. Сер. А. – 2008. – Вип. 1. – С. 202-206.
3. Дидок Н. К. Динамика и устойчивость колебаний цилиндрического резервуара с упругим дном и жидкостью со свободной поверхностью / Н. К. Дидок, Ю. Н. Кононов // Изв. вузов Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. – 2013. – № 5. – С. 30-34.
4. Дидок Н. К. Динамика и устойчивость колебаний цилиндрического резервуара с идеальной жидкостью и упругими основаниями / Н. К. Дидок, Ю. Н. Кононов // Труды ИПММ НАН Украины. – 2013. – Т. 27. – С. 102-108.
5. Карнаух А. Ю. Колебания упругой пластинки, разделяющей жидкости в цилиндрическом сосуде с упругими основаниями / А. Ю. Карнаух // Изв. вузов Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. – 2013. – № 2. – С. 33-36.
6. Копачевский Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. – М. : Наука, 1989. – 416 с.
7. Гончаров Д. А. Осесимметричные колебания двухплотностной жидкости в цилиндрическом баке [Электронный ресурс] / Д. А. Гончаров // Электронное научно-техническое издание : Наука и образование. – 2012. – № 4. – Режим доступа : <http://technomag.bmstu.ru/doc/362856.html> (дата обращения : 19.02.2014).
8. Гончаров Д. А. Динамика двухслойной жидкости, разделенной упругой перегородкой с учетом сил поверхностного натяжения [Электронный ресурс] / Д. А. Гончаров // Электронное научно-техническое издание : Наука и образование. – 2013. – № 11. – Режим доступа : <http://technomag.bmstu.ru/doc/619258.html> (дата обращения : 19.02.2014).
9. Пожалостин А. А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения [Электронный ресурс] / А. А. Пожалостин, Д. А. Гончаров // Инженерный журнал: Наука и инновации. – 2013. – Вип. 12. – Режим доступа : <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html> (дата обращения : 19.02.2014).

REFERENCES

1. Kononov, Yu.N., Rusakov, V.F., & Dzhukha, Yu.A. (2015), "Axial-symmetric vibrations of elastic bases and ideal liquid in a rigid cylindrical tank", *Visn. Zaporizkogo natsionalnoho un-tu, Ser. Fiz.-mat.*, no. 2, pp. 105-114.
2. Karnaukh, A.Yu. (2008), "Natural vibrations of flat elastic bottom of coaxial cylindrical vessel and ideal liquid with a free surface", *Visn. Donetskogo natsionalnoho un-tu, Ser. A*, issue 1, pp. 202-206.
3. Didok, N.K. (2013), "Dynamics and stability of vibrations of a cylindrical tank with elastic bottom and liquid with a free surface", *Izv. vuzov Sev.-Kav. region. Estestv. Nauki*, no. 5, pp. 30-34.
4. Didok, N.K. (2013), "Dynamics and stability of vibration of a cylindrical tank with perfect liquid and elastic foundation", *Trudy IPMM NAN Ukrainy*, vol. 27, pp. 102-108.
5. Karnaukh, A.Yu. (2013), "Vibrations of an elastic plate, separating a liquid in a cylindrical vessel with elastic foundation", *Izv. vuzov Sev.-Kav. region. Estestv. Nauki*, no. 2, pp. 33-36.
6. Kopachevskiy, N.D. (1989), *Operatornyie metodyi v lineynoy gidrodinamike: evolyutsionnyie i spektralnyie zadachi* [Operator methods in linear hydrodynamics: evolution and spectral problems], Nauka, Moscow.
7. Goncharov, D.A. (2012), "Axisymmetric vibrations of two-density liquid in a cylindrical tank", Electronic scientific-technical edition: Science&Education, no. 4, available at: <http://technomag.bmstu.ru/doc/362856.html> (access February 19, 2014).
8. Goncharov, D.A. (2013), "Dynamics of a two-layer liquid divided with elastic baffle with allowance for surface tension", Electronic scientific-technical edition: Science&Education, no. 11, available at: <http://technomag.bmstu.ru/doc/619258.html> (access February 19, 2014).
9. Pozhalostin, A.A. (2013), "Free axisymmetrical vibrations of a two-layer liquid with an elastic separator between the layers in the presence of surface tension", *Engineering Journal: Science&Innovation*, issue 12, available at: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html> (access February 19, 2014).

УДК 621.37

ОПТИМІЗОВАНИЙ ВАРІАНТ ФІЛЬТРАЦІЇ ЗОБРАЖЕНЬ

Король М. В., магістр, Кондрат'єва Н. О., к. ф-м. н., доцент, Мухін В. В., к. т. н., доцент,
Леонтьєва В. В., к. ф-м. н., доцент

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

n-kondr@mail.ru, vleonteva@mail.ru

У статті наведені способи реалізації фільтрації зображень, оптимізовані за швидкістю виконання. Розроблено методику реалізації алгоритму швидкої обробки значень пікселів зображення. Проведено дослідження ефективності прискореного способу обробки для експериментального набору вхідних даних.

Ключові слова: оптимізація, зображення, фільтрація, об'єктно-орієнтоване програмування.

ОПТИМИЗИРОВАННЫЙ ВАРИАНТ ФИЛЬТРАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Король М. В., магистр, Кондратьева Н. А., к. ф-м. н., доцент, Мухин В. В., к. т. н., доцент,
Леонтьева В. В., к. ф-м. н., доцент

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

n-kondr@mail.ru, vleonteva@mail.ru

В статье приведены способы реализации фильтрации изображений, оптимизированные по скорости использования. Разработана методика реализации алгоритма быстрой обработки значений пикселей изображения. Проведено исследование эффективности ускоренного способа обработки для экспериментального набора входных данных.

Ключові слова: оптимизация, изображение, фильтрация, объектно-ориентированное программирование.

OPTIMIZED OPTION OF IMAGE FILTERING

Korol M. V., graduate student,
Kondratieva N. O., PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor,
Mukhin V. V., PhD in Engineering, Associate Professor,
Leontieva V. V., PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor

*Zaporizhzhue National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

n-kondr@mail.ru, vleonteva@mail.ru

The paper presents ways of implementation filtering of images that are optimized for speed of execution. The method of the algorithm fast processing of pixel values of the image is developed. A study of the effectiveness of accelerated processing method for the experimental set of input data.

Filters for enhance picture quality is among the most common methods of processing images in computer graphics. Improving possible by reducing the noise in the image, increasing contrast or color images, image edge detection and so on.

Nowadays, the number of images from different digital media is very large, and their quality can not always satisfy. Conventional methods of improving the image quality can sometimes be a little behind. For example, when a lot of images or volume images are very large, so their treatment can be spent quite some time. In this situation it is necessary to improve conventional filters, making them faster. Sometimes speed can pay for quality, though not very much.

Acceleration of procedures performed by filtering unsafe method that exists in the programming language C#. Usually, working with an image, we need to read the value of pixels for further processing. To read and write pixel values using methods familiar with C# getPixel / setPixel, but these methods do not include a special rate by using these methods for each new method challenged released new buffer memory for recording pixel value. Therefore unsafe to use the method in the case of image processing to be rational. Its essence lies in the fact that all the images placed in the buffer where we

have an opportunity to do with the values of pixels using pointers. This method is faster because they do not need to create new variables at each pixel to appeal and no need to allocate new volumes of memory, since the image is always in buffer.

Developed subsystem which filters (removing noise from images, image edge detection filter to enhance image color range) united and could be used to image one by one using a method of optimizing and without it, thus making it possible to check in which cases the program handles image faster and slower. Comparing filters implemented using optimization unsafe and no optimization has been proven that this method really speeds up filters (filter used to size a floating window size 3×3).

For implementation used development environment C# 2010.

Key words: optimization, image filtering, object-oriented programming.

ВСТУП

Зазвичай зображення, сформовані різними інформаційними системами, спотворюються під впливом перешкод (шумів), що у свою чергу ускладнює як їх візуальний аналіз людиною-оператором, так і автоматичну обробку в ЕОМ. Так, при розв'язанні деяких задач обробки зображень в ролі перешкод (шуму) можуть виступати ті чи інші компоненти самого зображення. Наприклад, при аналізі космічного знімку земної поверхні може виникнути задача визначення меж між її окремими ділянками – лісом і полем, водою і сушею тощо. Отже, з точки зору цієї проблеми, окремі деталі зображення в середині певних підобластей є перешкодою (шумом).

Як відомо [1-4], ослаблення дії перешкод (шуму) досягається фільтрацією, завдяки якій яскравість (сигнал) кожної точки вихідного зображення, спотвореного шумом, замінюється деяким іншим значенням яскравості, яке визначається в найменшій мірі рівнем зашумленості. При цьому часто зображення – це двовимірні функції просторових координат, яка змінюється за цими координатами повільніше (іноді значно повільніше), ніж шум, який також є двовимірною функцією. Це дозволяє при оцінці корисного сигналу в кожній точці зображення взяти до уваги деяку кількість сусідніх точок, скориставшись певною схожістю сигналу в цих точках. В інших випадках, навпаки, ознакою корисного сигналу є різкі перепади яскравості. Однак, як правило, частота цих перепадів є відносно невеликою, так що на значних проміжках між ними сигнал є або постійним, або таким, що повільно змінюється. В цьому випадку властивості сигналу проявляються при спостереженні його не тільки в локальній точці, але й при аналізі її околиці. При цьому потрібним є зауважити, що поняття околиці є досить умовним. Вона може бути утворена лише найближчими сусідами, а також може містити досить віддалені точки зображення. Звичайно, в останньому випадку буде абсолютно різною ступінь впливу віддалених і близьких точок на прийняття рішення фільтром у даній точці зображення.

Для зменшення шуму на зображенні досить часто використовується так звана Медіанна фільтрація, запропонована Дж. Тьюки в 1971 році для аналізу економічних процесів, яка є одним з найбільш поширених методів (алгоритмів) обробки зображень. Сутність цього методу полягає в наступному. Однодимірний медіанний фільтр використовує вікно, яке охоплює непарне число елементів зображення. Далі, у зазначеному вікні центральний елемент замінюється медіаною усіх елементів зображення. При цьому для непарного випадку медіаною дискретної послідовності обирається той її елемент, для якого існують елементи, які є меншими або рівними (більшими або рівними) йому за величиною. Крім того, потрібним є дотримання правил:

– медіана добутку сталої K і послідовності $f(j)$ дорівнює

$$\text{med}\{Kf(j)\} = K\text{med}\{f(j)\};$$

– медіана суми сталої K і послідовності $f(j)$ дорівнює

$$\text{med}\{K + f(j)\} = K + \text{med}\{f(j)\};$$

– медіана суми двох довільних послідовностей $f(j)$ і $g(j)$ не дорівнює сумі їх медіан

$$\text{med}\{f(j) + g(j)\} \neq \text{med}\{f(j)\} + \text{med}\{g(j)\}.$$

Однак, при всій привабливості зазначеного методу потрібно зауважити, що можливості аналізу дії медіанного одновимірного фільтра є досить обмеженими. Концепцію медіанного фільтра можливо узагальнити на два виміри, застосовуючи двовимірне вікно бажаної форми, наприклад, прямокутне або близьке до кругового. У результаті двовимірний медіанний фільтр з вікном розміру $L \times L$ забезпечить ефективніше зменшення шуму порівняно з послідовно застосованим горизонтальним або вертикальним одновимірним медіанним фільтром з вікном розміру $L \times 1$; двовимірна обробка, проте, може призвести до істотнішого послаблення сигналу.

У цій статті наведено спосіб реалізації медіанного фільтра, який дозволяє оптимізувати роботу фільтра за швидкістю виконання. Крім того, у роботі проводиться порівняння існуючих методик із запропонованим підходом.

ЗВИЧАЙНА РЕАЛІЗАЦІЯ ФІЛЬТРА

Існуючі комерційні системи обробки зображення не дають можливості зробити порівняльну характеристику роботи фільтрів, оскільки більшість використовують багатопоточність і роблять фільтрацію на попередження ще під час діалогу з користувачем, показуючи частковий результат роботи. Для вирішення цієї проблеми реалізуємо однопоточний медіанний фільтр.

Після ознайомлення з методами фільтрації зображень, стає зрозумілим, що пікселі слід обробляти зліва направо і зверху вниз. При цьому для кожного відгуку фільтра потрібно зчитувати, чи потрапили вони в додатковий масив для тимчасового зберігання значень пікселів, потім проводити маніпуляції з цим набором пікселів та повертати відгук фільтра у середній елемент масиву. Все це реалізується за допомогою циклу, використовуючи покажчик на центральний піксель і покажчик на піксель-результат.

Представимо на блок-схемі, як працює фільтр видалення шуму (рис. 1).

Суть цього фільтра [7] полягає в тому, що за допомогою рухомого вікна здійснюється проходження по кожному пікселю зображення, сортування значення пікселів рухомого вікна та заміна значення поточного пікселя на значення середнього пікселя відсортованого масиву, що, таким чином, дозволяє позбутися на зображенні різких стрибків значень пікселя.

ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ФІЛЬТРА

Цей розділ статті присвячений висвітленню основних положень методики оптимізації роботи медіанного фільтра за показником швидкості обробки зображення.

Прискорювати роботу процедури фільтрації будемо за рахунок unsafe методу, який існує в мові програмування C# [5, 6, 8]. Зазвичай, працюючи з зображенням, нам потрібно зчитувати значення пікселів зображення для подальшої їх обробки. Для зчитування та записування значень пікселів звично використовувати методи C# `getPixel/setPixel`, але ці методи не вирізняються особливою швидкістю, за допомогою цих методів для кожного нового виклику методу виділяється новий буфер пам'яті для запису значення пікселю. Тому використовувати метод `unsafe` у випадку з обробкою зображень буде більш раціональним. Сутність зазначеного методу полягає в тому, що все зображення розміщується в буфері, де існує змога безпосередньо використовувати значення пікселів, застосовуючи вказівники. Цей метод працює швидше, оскільки не потрібно створювати нові змінні при кожному звертанні

до значень пікселів, а також не потрібно виділяти нові обсяги пам'яті, оскільки зображення постійно знаходиться в буфері пам'яті.

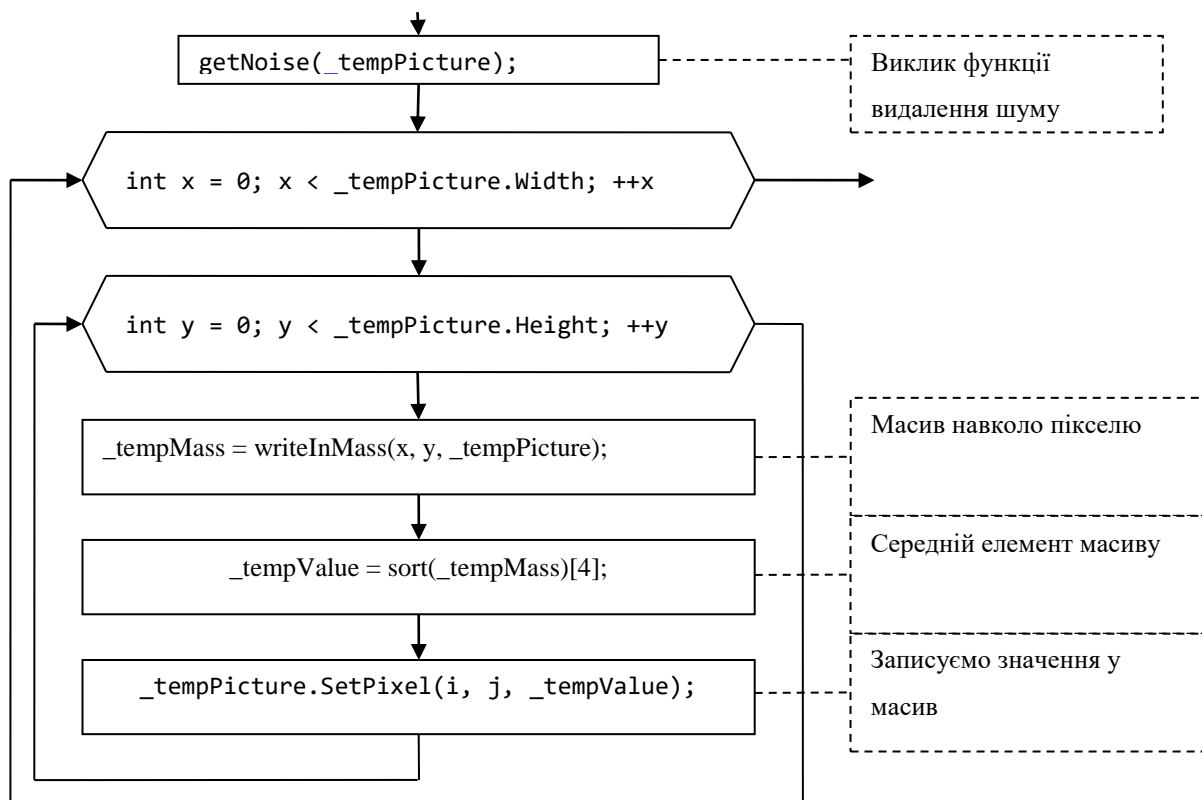


Рис. 1. Блок-схема реалізації фільтра видалення шуму

За допомогою методу LockBits переносимо зображення в буфер і дозволяємо проводити з зображенням певні маніпуляції, а саме зчитувати та змінювати значення пікселів, отримувати довжину та ширину зображення.

C# підтримує метод LockBits, який дозволяє управляти масивом точок растрового рисунку в некерованому буфері пам'яті та замінювати точки на рисункові точками з буферу.

Проведемо аналіз застосовуваних підходів до обробки зображення. У першому випадку ми працювали з зображенням за допомогою команд getPixel/setPixel, а в другому випадку – за допомогою команди LockBits перенесли зображення до буфера та працювали зі значеннями безпосередньо, що виявилось значно швидшим.

Результати роботи реалізованих медіанних фільтрів зведені в таблицю 1. Для реалізації використовувалося середовище розробки C# 2010.

Таблиця 1 – Час роботи в секундах при застосуванні звичайного методу та методу unsafe

Фільтр	Час роботи без використання unsafe методу	Час роботи, використовуючи unsafe метод
Покращення контрасту	1.457	0.411
Видалення шуму	2.231	0.673
Підвищення чіткості	0.77	0.217

Порівнюючи наведені в табл. 1 результати, бачимо, що методи фільтрації зображень можуть бути оптимізовані за швидкістю більш ніж у 3 рази (для фільтрів використовувалось рухоме вікно розміром 3×3).

ВИСНОВКИ

Отже, в роботі запропонований спосіб реалізації медіанного фільтра, який дозволяє оптимізувати роботу фільтра за швидкістю виконання обробки зображення. Для зазначеного підходу проведено аналіз з існуючим підходом, у результаті якого отримано висновок, що методи оптимізованої фільтрації із рухомим вікном розміром 3×3 зображень можуть обробляти зображення швидше, ніж у 3 рази. Цей підхід може бути узагальнений на випадок застосування фільтра з вікном розміром $L \times L$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Абламейко С. В. Обработка изображений: технология, методы, применение / С. В. Абламейко, Д. М. Лагуновский. – М. : Амадфея, 2000. – 304 с.
2. Быков Р. Цифровое преобразование изображений / Р. Быков. – М. : Горячая линия, 2003. – 228 с.
3. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес. – М. : Техносфера, 2005. – 1007 с.
4. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB / Р. Гонсалес. – М. : Техносфера, 2006. – 616 с.
5. Гуриков С. Введение в программирование на языке Visual C# / С. Гуриков. – М. : Инфра, 2013. – 448 с.
6. Мартин М. Принципы работы на C# / М. Мартин. – М. : Символ-Плюс, 2011. – 768 с.
7. Стругайло В. В. Обзор методов фильтрации и сегментации цифровых изображений / В. В. Стругайло // Наука и образование. Электронное научно-техническое издание. – Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет, 2012. – С. 270-281.
8. Фленов М. Библия C# / М. Фленов. – М. : БХВ, 2011. – 560 с.

REFERENCES

1. Ablameyko, S.V. and Lagunovsriy, D.M. (2000), *Obrabotka izobrazheniy: tekhnologiya, metody, primenenie* [Image Processing: technology, methods, application], Amadfeya, Moscow, Russia.
2. Bykov, R. (2003), *Tsifrovoye preobrazovanie izobrazheniy* [Digital image conversion], Goryachaya liniya, Moscow, Russia.
3. Gonsales, R. (2005), *Tsifrovaya obrabotka izobrazheniy* [Digital image processing], Tekhnosfera, Moscow, Russia.
4. Gonsales, R. (2006), *Tsifrovaya obrabotka izobrazheniy v srede MATLAB* [Digital image processing in MATLAB environment], Tekhnosfera, Moscow, Russia.
5. Gurikov, S. (2013), *Vvedenie v programmirovaniye na yazyke C#* [Introduction to programming in Visual C #], Infra, Moscow, Russia.
6. Martin, M. (2011), *Printsipy raboty C#* [How it works in C #], Simvol-Plus, Moscow, Russia.
7. Strugaylo, V.V. (2012), "Overview filtering techniques and segmentation of digital images", *Nauka i obrazovanie, Elektronnoye nauchno-tekhnicheskiye izdaniye*, Moskovskiy avtomobil'no-dorozhnyy gosudarstvennyy tekhnicheskyy universitet, Russia, pp. 270-281.
8. Flenov, M. (2011), *Bibliya C#* [Bible C #], BKHV, Moscow, Russia.

УДК 519.172

ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ ГРАФА

Курапов С. В., к. ф.-м. н., доцент, Давидовский М. В., Клиценко А. А.

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

vesdesvet@yandex.ru

В данной работе для формирования базисов подпространства циклов пространства суграфов графа вводится понятие изометрических циклов в отличие от фундаментальных циклов графа. Рассматриваются основные свойства вновь введенной структуры. Представлена теорема о существовании в простом несепарабельном графе базиса подпространства циклов, состоящего из изометрических циклов. А также, рассмотрен вопрос о представлении границ граней в плоском графе изометрическими циклами.

Ключевые слова: граф, базис циклов, фундаментальные циклы графа, изометрические циклы.

ИЗОМЕТРИЧНІ ЦИКЛИ ГРАФА

Курапов С. В., к. ф.-м. н., доцент, Давидовський М. В., Кліценко Г. А.

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

vesdesvet@yandex.ru

У роботі для формування базисів підпростору циклів простору суграфів графа вводяться поняття ізометричних циклів на відміну від фундаментальних циклів графа. Розглядаються основні властивості нововведеної структури. Представлена теорема про існування в простому несепарабельному графі базису підпростору циклів, який складається з ізометричних циклів. А також, розглянуто питання про представлення границь граней у плоскому графі ізометричними циклами.

Ключові слова: граф, базис циклів, фундаментальні цикли графа, ізометричні цикли.

ISOMETRIC CYCLES GRAPHKurapov S. V., Ph.D. in Physics and Maths, associate professor,
Davydovsky M. V., Klitsenko G. A.*Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

vesdesvet@yandex.ru

The article deals with the simple non separable graphs G without bridges and loops, without multiple lines and cutpoints and without vertices with local degree less or equal to two. In this paper we'll examine the issue of forming the bases of cycles of space of a graph. The example of usage of fundamental system of cycles and cutsets for the determination of basis of subspaces of cycles is examined.

Our research is based on the notions of isometric cycles and central cuts as opposed to the fundamental cycles and cuts of a graph. The basic properties of the newly introduced structures are being studied and prove the theorem on the existence of a cycle subspace basis consisting of isometric cycles in a simple non separable graph is proved. The connection of the isometric cycle of the graph G with the minimal (s-t) roots of the graph is studied. The algorithm of discerning the set of isometric cycles by the method of search in the width is represented. The examples to this algorithm are given. Additionally, we consider an issue of representing face boundaries in a plane graph by isometric cycles. The connection between the sets of isometric cycles and invariants of graph is analysed. The paper gives a number of examples of usage of properties of isometric graphs for solving various combinatory tasks.

Key words: graph, cycle basis, fundamental cycles of graph, unit cycle.

ВВЕДЕНИЕ

Будем рассматривать простые несепарабельные графы $G = (X, U)$ без мостов и петель, без кратных ребер и точек сочленения и без вершин с локальной степенью, меньшей или равной двум.

Пусть $G=(X,U)$ – граф с пронумерованным множеством ребер $U=\{u_1,u_2,\dots,u_m\}$ и $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ вершин, причем $\text{card } X=n$ и $\text{card } U=m$. Пусть L_G – множество всех суграфов этого графа. Тогда для двух суграфов существует операция сложения (будем называть ее кольцевой суммой) [1]

$$(X,U_1)\oplus(X,U_2)=(X,(U_1\cup U_2)\setminus(U_1\cap U_2)).$$

И тогда множество L_G с операцией сложения образует абелеву группу.

Действительно, L_G заведомо является группоидом; относя каждому суграфу $G^*=(X,U)$ строку чисел $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_m)$, в которой $i=(1,2,\dots,m)$, и определяя сложение строк как покомпонентное по модулю 2, мы получим изоморфный L_G группоид, элементами которого служат всевозможные строки длины m из нулей и единиц, и который представляет собой абелеву группу.

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & \text{если } u_i \in U; \\ 0, & \text{если } u_i \notin U. \end{cases}$$

В дальнейшем группу L_G удобно рассматривать как линейное пространство над полем коэффициентов $GF(2)=\{0,1\}$, называемое пространством суграфов данного графа G . Размерность этого пространства $\dim L_G = m$ ибо множество элементов

$$(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1),$$

представляющие односторонние суграфы, образует базис пространства суграфов.

Рассмотрим множество L_G всех m -векторов (суграфов) над полем $GF(2)$. Если $\omega_1=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)$ и $\omega_2=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m)$ – элементы L_G , то

$$\omega_1 \oplus \omega_2 = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_m + \beta_m).$$

Если λ принадлежит $GF(2)$, то

$$\lambda\omega = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_m).$$

Нетрудно установить, что L_G – абелева группа относительно операции \oplus , в которой нулевым элементом считается m -вектор $(0,0,\dots,0)$. Таким образом, множество L_G удовлетворяет первой аксиоме в определении векторного пространства. Легко убедиться в том, что элементы множеств L_G и $GF(2)$ удовлетворяют и другим аксиомам векторного пространства.

Таким образом, L_G является векторным пространством над полем $GF(2)$. Если $U=\{u_1,u_2,\dots,u_m\}$, то подмножества $\{u_1\},\{u_2\},\dots,\{u_m\}$ образуют базис для L_G . Из того, что каждый реберно-порожденный суграф графа G соответствует единственному подмножеству множества U и что кольцевой сумме любых 2-реберно-порожденных суграфов можно поставить в соответствие кольцевую сумму двух соответствующих множеств ребер, следует, что множество всех реберно-порожденных суграфов графа G является векторным пространством. Заметим, что L_G включает в себя нуль-граф \emptyset .

1. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РАЗРЕЗЫ ГРАФА

Как известно, в пространстве суграфов можно выделить два подпространства, называемых подпространством разрезов S и подпространством циклов C [1].

Для определения базиса подпространства циклов в теории графов применяется фундаментальная система циклов и разрезов.

Данная система образуется в результате выделения случайного дерева графа (ациклический суграф), тем самым, разделяя ребра графа на ветви дерева и хорды. Ребра, принадлежащие дереву, называются ветвями, а не принадлежащие дереву – хордами. Каждый фундаментальный цикл образуется как объединение одной хорды и ветвей дерева. Рассматривая все хорды для выделенного дерева графа, строим матрицу фундаментальных циклов. Например, для графа G (см. рис.1) относительно дерева $T = \{u_1, u_3, u_7, u_{10}, u_{11}\}$ матрица фундаментальных циклов представлена в таблице 1.

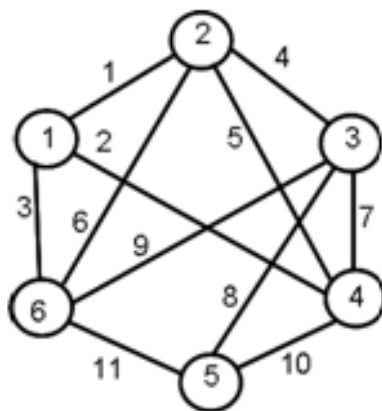


Рис. 1. Граф G

Таблица 1

	u_2	u_4	u_5	u_6	u_8	u_9	u_1	u_3	u_7	u_{10}	u_{11}
u_2	1							1		1	1
u_4		1					1	1	1	1	1
u_5			1				1	1		1	1
u_6				1			1	1			
u_8					1				1	1	
u_9						1			1	1	1

Единичная блочная подматрица
 Блочная подматрица π

Количество фундаментальных циклов определяется цикломатическим числом графа $\nu(G) = m - n + 1$ [2].

Рассмотрим фундаментальные циклы для выбранного дерева графа G (см. рис.1):

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \{u_2, u_3, u_{10}, u_{11}\}; & c_2 &= \{u_1, u_3, u_4, u_7, u_{10}, u_{11}\}; \\
 c_3 &= \{u_1, u_3, u_5, u_{10}, u_{11}\}; & c_4 &= \{u_1, u_3, u_6\}; \\
 c_5 &= \{u_7, u_8, u_{10}\}; & c_6 &= \{u_7, u_9, u_{10}, u_{11}\}.
 \end{aligned}$$

Фундаментальные циклы относительно дерева $T = \{u_1, u_3, u_7, u_{10}, u_{11}\}$ имеют суммарную длину $l = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 = 4 + 6 + 5 + 3 + 3 + 4 = 25$.

А следующие базисные циклы графа G , полученные путем линейной комбинации фундаментальных циклов [3]:

$$c_7 = c_1 = \{u_2, u_3, u_{10}, u_{11}\}; \quad c_8 = c_4 = \{u_1, u_3, u_6\}; \quad c_9 = c_5 = \{u_7, u_8, u_{10}\};$$

$$c_{10} = c_5 \oplus c_6 = \{u_7, u_8, u_{10}\} \oplus \{u_7, u_9, u_{10}, u_{11}\} = \{u_8, u_9, u_{11}\};$$

$$c_{11} = c_2 \oplus c_4 \oplus c_6 = \{u_1, u_3, u_4, u_7, u_{10}, u_{11}\} \oplus \{u_1, u_3, u_6\} \oplus \{u_7, u_9, u_{10}, u_{11}\} = \{u_4, u_6, u_9\};$$

$$c_{12} = c_2 \oplus c_3 = \{u_1, u_3, u_4, u_7, u_{10}, u_{11}\} \oplus \{u_1, u_3, u_5, u_{10}, u_{11}\} = \{u_4, u_5, u_7\},$$

имеют меньшую суммарную длину $l = l_7 + l_8 + l_9 + l_{10} + l_{11} + l_{12} = 4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 19$.

Будем рассматривать такие базисные циклы, суммарная длина которых минимальна.

2. ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ ГРАФА

Определение 1. Изометрический подграф – подграф G' графа G , у которого все расстояния внутри G' те же самые, что и в G .

Определение 2. Изометрическим циклом в графе называется простой цикл, для которого кратчайший путь между любыми двумя его вершинами состоит из ребер этого цикла.

Изометрический цикл – частный случай изометрического подграфа.

В таком цикле между любыми двумя его несмежными вершинами в соответствующем графе не существует маршрутов меньшей длины, чем маршруты, принадлежащие данному циклу.

Любой суграф, принадлежащий подпространству циклов C графа G , в общем случае является квазициклом. Простые циклы – это квазициклы, у которых локальная степень вершин в точности равна двум [4].

Мощность подмножества простых циклов в графе меньше мощности множества квазициклов. Подмножество простых циклов обозначим C_R . Тогда

$$\text{card } C_R \leq \text{card } C.$$

Однако существует подмножество с мощностью еще меньшей, чем подмножество простых циклов, это подмножество изометрических циклов [5].

Подмножество, состоящее из изометрических циклов, будем называть подмножеством изометрических циклов, и обозначать C_τ . Сказанное поясним на примерах. Рассмотрим суграф, состоящий из ребер $\{u_1, u_3, u_{13}, u_{15}\}$ графа G_a , представленного на рис. 2. Как видно, это простой цикл. Но в то же время, это не изометрический цикл, так как между вершинами x_7 и x_8 (несмежными для цикла) в соответствующем графе (т.е. в графе, которому принадлежит выбранный цикл) существует маршрут меньшей длины, проходящий по ребру u_{14} .

Рассмотрим граф G_b , представленный на рис. 3.

Пусть цикл состоит из ребер $\{u_1, u_2, u_3, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}\}$. Данный суграф есть простой цикл. Однако этот суграф не может быть изометрическим циклом, так как в соответствующем графе между вершинами x_2 и x_8 имеется маршрут меньшей длины (а именно, маршрут, проходящий по ребрам u_4 и u_{10}), чем маршруты, принадлежащие этому суграфу (например, маршрут, проходящий по ребрам $\{u_1, u_3, u_8, u_9\}$ или $\{u_2, u_6, u_{11}, u_{12}\}$).

Для графа, представленного на рис. 1, множество изометрических циклов $C_\tau = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9\}$, где:

$$\begin{aligned} c_1 &= \{u_1, u_3, u_6\}, & c_4 &= \{u_1, u_2, u_5\}, & c_7 &= \{u_5, u_6, u_{10}, u_{11}\}, \\ c_2 &= \{u_1, u_2, u_4, u_7\}, & c_5 &= \{u_4, u_5, u_7\}, & c_8 &= \{u_7, u_8, u_{10}\}, \\ c_3 &= \{u_2, u_3, u_{10}, u_{11}\}, & c_6 &= \{u_4, u_6, u_9\}, & c_9 &= \{u_8, u_9, u_{11}\}. \end{aligned}$$

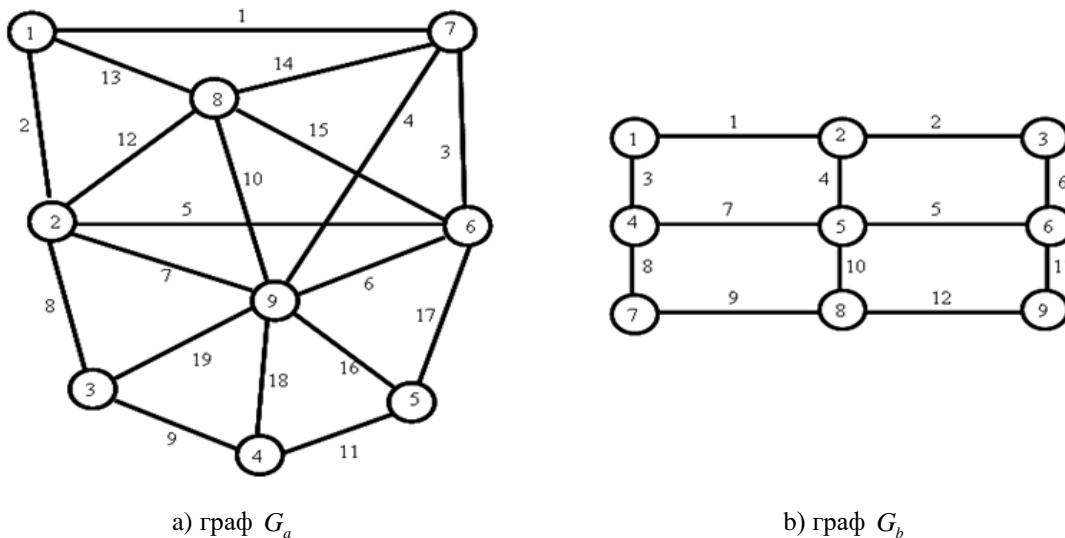


Рис. 2. Графы G_a и G_b

Следует заметить, что в полных графах множество изометрических циклов совпадает с множеством циклов минимальной длины [6].

Для изучения свойств изометрического цикла нам понадобится следующая теорема.

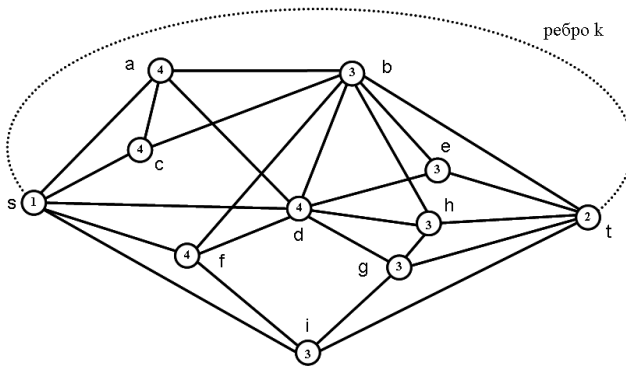
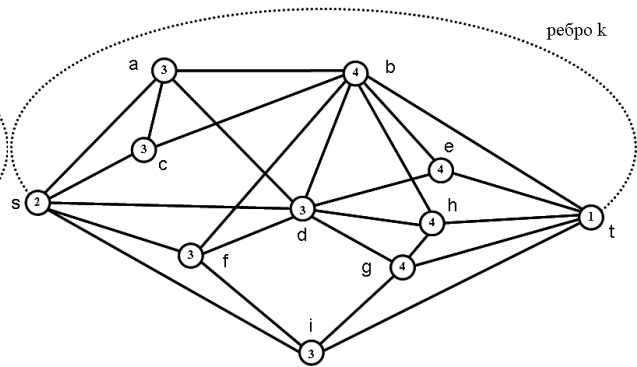
Теорема 1. Для любого связного простого несепарабельного графа без мостов и петель, без кратных ребер и точек сочленения и без вершин с локальной степенью, меньшей или равной двум, линейное подпространство квазициклов имеет базис, состоящий из изометрических циклов.

Доказательство. Будем рассматривать систему фундаментальных циклов, порожденных деревом T . Пусть вершины A_1, A_2, \dots, A_p образуют фундаментальный цикл, содержащий хорду (A_p, A_1) . Если между несмежными вершинами этого цикла в графе не существует путей меньшей или равной длины, чем пути принадлежащие циклу, то это есть изометрический цикл. Если в цикле существуют две несмежные вершины графа A_i и A_j ($i < j$), путь между которыми минимален и включает хорду, такую что путь $A_i, B_1, B_2, \dots, B_r, A_j$ содержит меньшее либо равное количество ребер, чем пути между A_i и A_j нашего цикла. Так образуются два цикла, кольцевая сумма которых есть исходный цикл. Отметим, что каждый новый цикл имеет не более, чем $p - 1$ вершин. Оставляем цикл, содержащий хорду, это и есть изометрический цикл. Так как количество фундаментальных циклов определяется цикломатическим числом, то количество изометрических циклов, полученных описанным выше способом, также равно цикломатическому числу графа. Множество изометрических циклов включает все хорды и линейно независимо. Теорема доказана.

Понятие изометрического цикла графа G тесно связано с минимальными $(s - t)$ маршрутами графа.

С целью определения множества изометрических циклов графа рассмотрим изометрические циклы, проходящие по k -му ребру, соединяющему вершины s и t графа G (см. рис. 3). Удалим из графа ребро k , получим граф $G-k$, где вершины s и t теперь несмежны. Вершине s поставим в соответствие фронт волны 1. А вершине t поставим в соответствие фронт волны 2. Тогда вершины, смежные с вершиной 2 и еще не помеченные, пометим цифрой 3 и так далее. Другими словами, применим алгоритм поиска в ширину относительно вершины s . Выделим все простые цепи минимальной длины, образованные алгоритмом поиска в ширину, осуществляя проход от вершины с большим номером к вершине с меньшим номером. Сформируем множество C_{st} циклов, где элементами множеств есть вершины

$$C_{st} = \left\{ \begin{array}{l} \{s, a, b, t\}, \{s, c, b, t\}, \{s, f, b, t\}, \{s, d, b, t\}, \{s, d, e, t\}, \{s, d, h, t\}, \{s, d, g, t\}, \{s, f, b, t\}, \\ \{s, f, i, t\}, \{s, i, t\} \end{array} \right\}.$$

Рис. 3. Прямая разметка вершин для ребра k Рис. 4. Обратная разметка вершин для ребра k

Рассмотрим построение фронта волны с другой стороны. Вершине t поставим в соответствие фронт волны 1. А вершине s поставим в соответствие фронт волны 2. Тогда вершины, смежные с вершиной 2 и еще не помеченные, пометим цифрой 3, и так далее. Другими словами, применим алгоритм поиска в ширину относительно вершины t . Выделим все простые цепи минимальной длины, образованные алгоритмом поиска в ширину, осуществляя проход от вершины с большим номером к вершине с меньшим номером (см. рис. 4). Сформируем множество C_{ts} циклов

$$C_{ts} = \left\{ \begin{array}{l} \{s, a, b, t\}, \{s, c, b, t\}, \{s, f, b, t\}, \{s, d, b, t\}, \{s, d, e, t\}, \{s, d, h, t\}, \{s, d, g, t\}, \{s, f, b, t\}, \\ \{s, i, g, t\}, \{s, i, t\} \end{array} \right\}.$$

Циклы $\{s, a, b, t\}$, $\{s, c, b, t\}$, $\{s, f, b, t\}$, $\{s, d, b, t\}$, $\{s, d, e, t\}$, $\{s, d, h, t\}$, $\{s, d, g, t\}$, $\{s, f, b, t\}$, $\{s, i, t\}$, принадлежащие и множеству C_{st} и множеству C_{ts} , есть изометрические циклы. Циклы $\{s, f, i, t\}$ и $\{s, i, g, t\}$ принадлежат только одному из множеств и поэтому не являются изометрическими.

Данные рассуждения можно применить ко всем ребрам графа G и сформировать множество изометрических циклов графа.

Ввиду важности вопроса выделения конечного множества изометрических циклов из множества квазициклов, предлагается алгоритм выделения множества изометрических циклов в графе.

Построение алгоритма начинается с выделения всех ребер в графе G . Выбираем очередное ребро графа. Одну из вершин такого выбранного ребра пометим индексом 1, другую – индексом 2. Вершины графа, смежные с вершиной, имеющей индекс 2, и ещё не

помеченные, пометим индексом 2. Вершины графа, смежные с вершиной, имеющей индекс 3 и ещё не помеченные, пометим индексом 4 и т. д. Число, выражающее индекс последней помеченной вершины (вершин) графа, называется глубиной проникновения волны, относительно выбранного ребра. Данный процесс представляет собой разметку вершин графа, относительно выбранного ребра волновым алгоритмом (алгоритмом поиска в ширину).

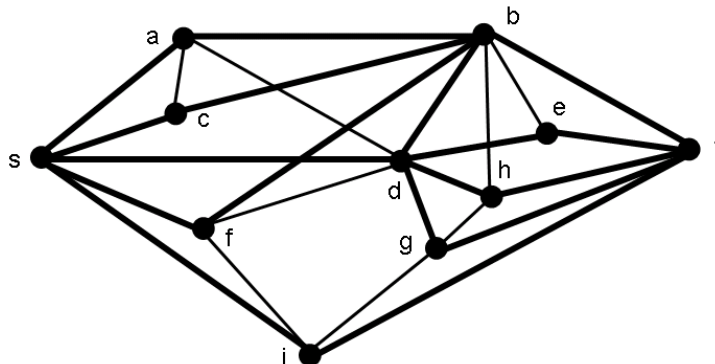


Рис. 5. Минимальные $s-t$ цепи

Построим простые циклы, проходящие по выбранному ребру, относительно первоначальной ориентации. С этой целью, выберем все вершины графа G , смежные с вершиной, помеченной индексом 1. Будем идти от любой выбранной вершины, имеющей глубину проникновения d , к вершинам, имеющим глубину проникновения $(d-1)$, проходя при этом по ребрам графа, затем от вершины $(d-1)$ к вершинам $(d-2)$ и т.д. Остановим этот процесс тогда, когда подойдем к вершине, имеющей индекс 2. Пройдя по всем таким образом построенным маршрутам, построим систему циклов, проходящих по выбранному ребру j . Обозначим такое множество циклов через S_j^i . Переориентируем направление разметки, т.е. вершина, имеющая индекс 1, будет иметь индекс 2, а вершина, имеющая индекс 2, будет иметь индекс 1. И вновь построим разметку вершин. Описанным выше методом выделим систему циклов. Изометрические циклы, проходящие по выбранному ребру j , будут образованы как:

$$C_j = C_j^1 \cap C_j^2. \tag{1}$$

Множество изометрических циклов графа G будет образовано как объединение всех циклов, проходящих по всем ребрам графа:

$$C_\tau = \bigcup_{i=1}^m C_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \tag{2}$$

Алгоритм 2.1. [Выделение множества изометрических циклов методом поиска в ширину]

Шаг 1. [Выбор ребра]. Выбираем ребро, идем на шаг 2. Если количество ребер исчерпано, то конец работы алгоритма.

Шаг 2. [Прямая разметка вершин относительно вершины s ребра]. Алгоритмом поиска в ширину производим прямую разметку вершин относительно вершины s выбранного ребра. Идем на шаг 3.

Шаг 3. [Формирование множества циклов C_s при прямой разметке вершин]. Производим формирование множества циклов при прямой разметке вершин. Идем на шаг 4.

Шаг 4. [Обратная разметка вершин относительно вершины t ребра]. Алгоритмом поиска в ширину производим обратную разметку вершин относительно вершины t выбранного ребра. Идем на шаг 5.

Шаг 5. [Формирование множества циклов C_t при обратной разметке вершин]. Производим формирование множества циклов при обратной разметке вершин. Идем на шаг 6.

Шаг 6. [Проверка циклов C_s и C_t на совпадение]. Проверяем циклы C_s и C_t для выбранного ребра на совпадение. Несовпадающие циклы исключаем из рассмотрения. Идем на шаг 7.

Шаг 7. [Запись циклов во множество изометрических циклов]. Проверяем сформированные на предыдущем шаге циклы с ранее записанными циклами во множестве изометрических циклов, и в случае их отсутствия добавляем их во множество изометрических циклов. Идем на шаг 1.

Пример 1. В качестве примера рассмотрим граф G (рис.6).

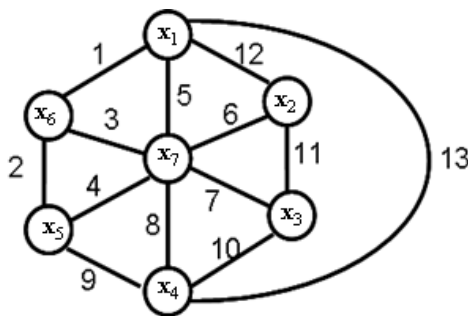


Рис. 6. Граф G

Если в качестве выбранного ребра взять ребро u_{13} , то процесс разметки вершин имеет вид, представленный на рис. 7. Система циклов, проходящих по ребру u_{13} , для разметки, показанной на рис. 7,а:

$$C_{13}^1 = \{\{u_5, u_8, u_{13}\}, \{u_1, u_3, u_8, u_{13}\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}, \{u_6, u_8, u_{12}, u_{13}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}\}.$$

Система циклов, проходящих по ребру u_{13} , для разметки, представленной на рис. 7,б:

$$C_{13}^2 = \{\{u_5, u_8, u_{13}\}, \{u_4, u_5, u_9, u_{13}\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}, \{u_5, u_7, u_{10}, u_{13}\}\}.$$

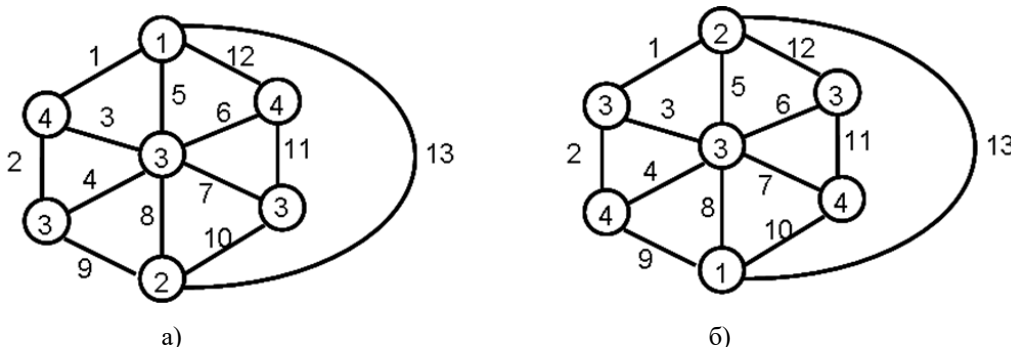


Рис. 7. Прямой и обратный процесс разметки вершин

Пересечение множеств C_{13}^1 и C_{13}^2 :

$$C_{13} = C_{13}^1 \cap C_{13}^2 = \{\{u_5, u_8, u_{13}\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}\}.$$

Каждому ребру принадлежат следующие изометрические циклы:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \{\{u_1, u_3, u_5\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}\}; & C_2 &= \{\{u_2, u_3, u_4\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}\}; \\
 C_3 &= \{\{u_2, u_3, u_4\}, \{u_1, u_3, u_5\}\}; & C_4 &= \{\{u_4, u_8, u_9\}, \{u_2, u_3, u_4\}\}; \\
 C_5 &= \{\{u_1, u_3, u_5\}, \{u_5, u_6, u_{12}\}, \{u_5, u_8, u_{13}\}\}; & C_6 &= \{\{u_5, u_6, u_{12}\}, \{u_6, u_7, u_{11}\}\}; \\
 C_7 &= \{\{u_6, u_7, u_{11}\}, \{u_7, u_8, u_{10}\}\}; & C_8 &= \{\{u_5, u_8, u_{13}\}, \{u_7, u_8, u_{10}\}, \{u_3, u_8, u_9\}\}; \\
 C_9 &= \{\{u_4, u_8, u_9\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}\}; & C_{10} &= \{\{u_7, u_8, u_{10}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}\}; \\
 C_{11} &= \{\{u_6, u_7, u_{11}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}\}; & C_{12} &= \{\{u_5, u_6, u_{12}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}\}; \\
 C_{13} &= \{\{u_5, u_8, u_{13}\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}\}.
 \end{aligned}$$

Множество изометрических циклов получим как объединение:

$$\begin{aligned}
 C_\tau &= C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6 \cup C_7 \cup C_8 \cup C_9 \cup C_{10} \cup C_{11} \cup C_{12} \cup C_{13} = \\
 &= \left\{ \begin{aligned} &\{u_1, u_3, u_5\}, \{u_2, u_3, u_4\}, \{u_3, u_8, u_9\}, \{u_4, u_8, u_9\}, \{u_5, u_6, u_{12}\}, \{u_5, u_8, u_{13}\}, \{u_6, u_7, u_{11}\}, \\ &\{u_7, u_8, u_{10}\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\} \end{aligned} \right\}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, множество изометрических циклов состоит из девяти элементов. Цикломатическое число графа G равно 7. Следовательно, для построения базиса нужно удалить два изометрических цикла. Очевидно, что для любого трехсвязного и более графа G , множество изометрических циклов имеет мощность меньшую, чем мощность множества простых циклов, но большую или равную цикломатическому числу графа:

$$\nu(G) \leq \text{card}C_\tau \leq \text{card}C_R \leq \text{card}C. \tag{3}$$

Теперь покажем, что построение множества изометрических циклов должно производиться относительно всего множества ребер графа.

Пример 2. Следующий пример демонстрирует невозможность получения полного множества изометрических циклов, если построение производится только относительно хорд для выбранного дерева графа. Рассмотрим граф, представленный на рис. 8.

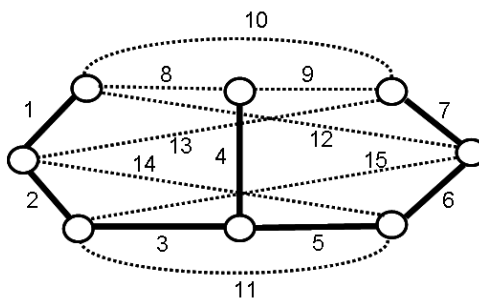


Рис. 8. Граф G и его дерево

Если производить построение только относительно хорд для выбранного дерева графа, то множество изометрических циклов будет не полно. В данном примере, во множество изометрических циклов не вошли изометрические циклы, проходящие по четвертому ребру.

Изометрические циклы относительно четвертого ребра:

$$\begin{aligned}
 c_{12} &= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_8\}; & c_{13} &= \{u_3, u_4, u_8, u_{12}, u_{15}\}; & c_{14} &= \{u_4, u_5, u_6, u_8, u_{12}\}; \\
 c_{15} &= \{u_4, u_5, u_6, u_7, u_9\}; & c_{16} &= \{u_2, u_3, u_4, u_9, u_{13}\}; & c_{17} &= \{u_4, u_5, u_9, u_{13}, u_{14}\}.
 \end{aligned}$$

Изометрические циклы относительно восьмой хорды: $c = \{u_8, u_9, u_{10}\}$. Изометрические циклы относительно девятой хорды: $c = \{u_8, u_9, u_{10}\}$. Изометрические циклы относительно десятой

хорды: $\{u_8, u_9, u_{10}\}$, $\{u_1, u_{10}, u_{13}\}$, $\{u_7, u_{10}, u_{12}\}$. Изометрические циклы относительно одиннадцатой хорды: $\{u_3, u_5, u_{11}\}$, $\{u_2, u_{11}, u_{14}\}$, $\{u_6, u_{11}, u_{15}\}$. Изометрические циклы относительно двенадцатой хорды: $\{u_7, u_{10}, u_{12}\}$, $\{u_1, u_2, u_{12}, u_{15}\}$, $\{u_1, u_6, u_{12}, u_{14}\}$. Изометрические циклы относительно тринадцатой хорды: $\{u_1, u_{10}, u_{13}\}$, $\{u_6, u_7, u_{13}, u_{14}\}$, $\{u_2, u_7, u_{13}, u_{15}\}$. Изометрические циклы относительно четырнадцатой хорды: $\{u_2, u_{11}, u_{14}\}$, $\{u_6, u_7, u_{13}, u_{14}\}$, $\{u_1, u_6, u_{12}, u_{14}\}$. Изометрические циклы относительно пятнадцатой хорды: $\{u_6, u_{11}, u_{15}\}$, $\{u_2, u_7, u_{13}, u_{15}\}$, $\{u_1, u_2, u_{12}, u_{15}\}$.

Изометрические циклы относительно хорд:

$$\begin{aligned} c_1 &= \{u_8, u_9, u_{10}\}; & c_2 &= \{u_1, u_{10}, u_{13}\}; & c_3 &= \{u_7, u_{10}, u_{12}\}; & c_4 &= \{u_3, u_5, u_{11}\}; \\ c_5 &= \{u_2, u_{11}, u_{14}\}; & c_6 &= \{u_6, u_{11}, u_{15}\}; & c_7 &= \{u_1, u_2, u_{12}, u_{15}\}; & c_8 &= \{u_1, u_6, u_{12}, u_{14}\}; \\ c_9 &= \{u_6, u_7, u_{13}, u_{14}\}; & c_{10} &= \{u_2, u_7, u_{13}, u_{15}\}; & c_{11} &= \{u_2, u_{11}, u_{14}\}. \end{aligned}$$

Вычислительная сложность такого алгоритма определится громоздкостью операции сравнения циклов выделенных прямой и обратной разметкой вершин. Здесь количество изометрических циклов при любой разметке относительно ребра полного графа определится как $(n-2)$ с каждого прохода алгоритма, а количество сравнений в таком случае будет $(n-2)^2$. Полученное выражение нужно умножить на количество ребер: $\frac{n(n-1)}{2}$. Таким образом, получим вычислительную сложность:

$$O(n^4) = \frac{n(n-1)(n-2)^2}{2}. \quad (4)$$

Количество изометрических циклов в полном графе определяется по формуле

$$\text{card}(C_e) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}. \quad (5)$$

Рассмотрим другой способ построения изометрических циклов. Выделим в полном графе множество циклов длиной три. Это очевидно будет множество изометрических циклов для полного графа.

Будем последовательно удалять ребра из полного графа K_n . Естественно, что тогда будут удалены и изометрические циклы, содержащие данное ребро, или два удаляемые цикла образуют новый изометрический цикл, равный их кольцевой сумме, в случае, если вновь образованный цикл не содержит в себе части оставшихся изометрических циклов. Таким образом, процесс удаления ребер из полного графа приводит к уменьшению количества изометрических циклов в графе, и естественно, что их количество в произвольном графе не может превышать величины определенной формулой (5).

Сказанное рассмотрим на примере графа K_5 . Множество изометрических циклов C_τ для графа K_5 (см. рис. 9):

$$\begin{aligned} c_1 &= \{u_1, u_2, u_5\}; & c_2 &= \{u_1, u_3, u_6\}; & c_3 &= \{u_1, u_4, u_7\}; & c_4 &= \{u_2, u_3, u_8\}; & c_5 &= \{u_2, u_4, u_9\}; \\ c_6 &= \{u_3, u_4, u_{10}\}; & c_7 &= \{u_5, u_6, u_8\}; & c_8 &= \{u_5, u_7, u_9\}; & c_9 &= \{u_6, u_7, u_{10}\}; & c_{10} &= \{u_8, u_9, u_{10}\}. \end{aligned}$$

Удалим из графа ребро u_{10} . Тогда из множества изометрических циклов C_τ удаляются все циклы, включающие десятое ребро:

$$c_6 = \{u_3, u_4, u_{10}\}; \quad c_9 = \{u_6, u_7, u_{10}\}; \quad c_{10} = \{u_8, u_9, u_{10}\}.$$

Остаются изометрические циклы:

$$c_1 = \{u_1, u_2, u_5\}; \quad c_2 = \{u_1, u_3, u_6\}; \quad c_3 = \{u_1, u_4, u_7\};$$

$$c_4 = \{u_2, u_3, u_8\}; \quad c_5 = \{u_2, u_4, u_9\}; \quad c_7 = \{u_5, u_6, u_8\}; \quad c_8 = \{u_5, u_7, u_9\}.$$

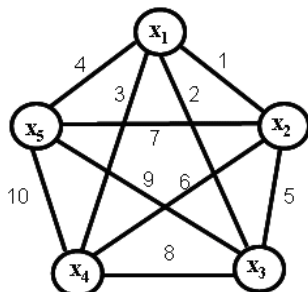


Рис. 9. Граф K_5 с пронумерованными ребрами

Но в перспективе могут образоваться новые изометрические циклы длиной четыре, образованные из удаленных циклов:

$$c_6 \oplus c_9 = \{u_3, u_4, u_{10}\} \oplus \{u_6, u_7, u_{10}\} = \{u_3, u_4, u_6, u_7\};$$

$$c_6 \oplus c_{10} = \{u_3, u_4, u_{10}\} \oplus \{u_8, u_9, u_{10}\} = \{u_3, u_4, u_8, u_9\};$$

$$c_9 \oplus c_{10} = \{u_6, u_7, u_{10}\} \oplus \{u_8, u_9, u_{10}\} = \{u_6, u_7, u_8, u_9\}.$$

Однако их включение во множество оставшихся изометрических циклов невозможно, так как они могут быть образованы как результат кольцевого суммирования из оставшихся изометрических циклов:

$$c_2 \oplus c_3 = \{u_1, u_3, u_6\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} = \{u_3, u_4, u_6, u_7\};$$

$$c_4 \oplus c_5 = \{u_2, u_3, u_8\} \oplus \{u_2, u_4, u_9\} = \{u_3, u_4, u_8, u_9\};$$

$$c_7 \oplus c_8 = \{u_5, u_6, u_8\} \oplus \{u_5, u_7, u_9\} = \{u_6, u_7, u_8, u_9\}.$$

Если мы продолжим удаление ребра u_2 из графа, то из множества оставшихся изометрических циклов $C_\tau = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8\}$ удаляются все циклы, включающие второе ребро:

$$c_1 = \{u_1, u_2, u_5\}; \quad c_4 = \{u_2, u_3, u_8\}; \quad c_5 = \{u_2, u_4, u_9\}.$$

Остаются изометрические циклы:

$$c_2 = \{u_1, u_3, u_6\}; \quad c_3 = \{u_1, u_4, u_7\}; \quad c_7 = \{u_5, u_6, u_8\}; \quad c_8 = \{u_5, u_7, u_9\}.$$

В перспективе могут образоваться новые изометрические циклы длиной четыре:

$$c_1 \oplus c_4 = \{u_1, u_2, u_5\} \oplus \{u_2, u_3, u_8\} = \{u_1, u_3, u_5, u_8\};$$

$$c_1 \oplus c_5 = \{u_1, u_2, u_5\} \oplus \{u_2, u_4, u_9\} = \{u_1, u_4, u_5, u_9\};$$

$$c_4 \oplus c_5 = \{u_2, u_3, u_8\} \oplus \{u_2, u_4, u_9\} = \{u_3, u_4, u_8, u_9\}.$$

Однако включение во множество оставшихся изометрических циклов двух первых циклов невозможно, так как они могут быть образованы как результат кольцевого суммирования из оставшихся изометрических циклов:

$$c_2 \oplus c_7 = \{u_1, u_3, u_6\} \oplus \{u_5, u_6, u_8\} = \{u_1, u_3, u_5, u_8\};$$

$$c_3 \oplus c_8 = \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_5, u_7, u_9\} = \{u_1, u_4, u_5, u_9\}.$$

Вновь образованный изометрический цикл $c_{4,5}$ включается во множество оставшихся изометрических циклов: $c_{4,5} = c_4 \oplus c_5 = \{u_3, u_4, u_8, u_9\}$.

Таким образом, множество изометрических циклов C_τ для графа, полученного путем удаления десятого и второго ребер из графа K_5 , состоит из следующих изометрических циклов:

$$c_2 = \{u_1, u_3, u_6\}; \quad c_3 = \{u_1, u_4, u_7\}; \quad c_7 = \{u_5, u_6, u_8\}; \quad c_8 = \{u_5, u_7, u_9\}; \quad c_{4,5} = \{u_3, u_4, u_8, u_9\}.$$

Особая роль изометрических циклов в теории графов определяется тем, что в плоских графах они являются границами граней [4].

3. МНОЖЕСТВО ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ И ИНВАРИАНТЫ ГРАФА

Инвариант графа – это число (функция) графа G , которое принимает одно и то же значение на любом графе, изоморфном G [4]. Пусть f – функция, относящая каждому графу G некоторый элемент $f(G)$ из множества M произвольной природы (элементами множества M чаще всего служат числа и системы чисел, векторы, многочлены, матрицы). Эту функцию будем называть инвариантом, если на изоморфных графах её значения совпадают, т.е. для любых G и G'

$$G \cong G' \Rightarrow f(G) = f(G').$$

Подпространство циклов является нормированными пространствами, так как любому элементу подпространства можно поставить в соответствие неотрицательное вещественное число $\|l\|$, называемое нормой. То есть подпространства циклов – это длина цикла. Причем введенное понятие удовлетворяет следующим условиям:

- $\|l\| > 0$ при $l \neq 0$, $\|0\| = 0$;
- $\|l_1 + l_2\| \leq \|l_1\| + \|l_2\|$ для любых $l_1 \in R, l_2 \in R$;
- $\|\alpha l\| = |\alpha| \|l\|$ для любого $l \in R$ и вещественного числа α .

Множеству изометрических циклов можно поставить в соответствие так называемый вектор изометрических циклов. Данный вектор записывается в измененном виде:

$$V_c(G) = (p_1 \times l_1, p_2 \times l_2, \dots),$$

где p_i – количество изометрических циклов во множестве C_τ длиной l_i , причем $l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq \dots$, т.е. длина циклов расставлена в порядке неубывания чисел.

Множеству изометрических циклов можно также поставить в соответствие вектор $V_u(G)$, характеризующий количество изометрических циклов, проходящих по ребрам, и вектор $V_x(G)$, характеризующий количество изометрических циклов, проходящих по вершинам. Данные вектора также можно рассматривать как некоторые инварианты графа.

4. РОЛЬ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ

Роль изометрических циклов графа неопределима при решении многих комбинаторных задач теории графов. К таким задачам можно отнести задачу проверки планарности для несепарабельных графов [8].

Пример 3. Определить, является ли граф G , представленный на рис. 10, планарным.

Множество единичных циклов графа C_i :

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \{u_1, u_3, u_5, u_{11}\}; & c_7 &= \{u_5, u_6, u_{12}, u_{14}, u_{16}\}; & c_{13} &= \{u_1, u_4, u_5, u_{12}, u_{14}\}; \\
 c_2 &= \{u_1, u_4, u_6, u_{16}\}; & c_8 &= \{u_5, u_6, u_{12}, u_{15}, u_{19}\}; & c_{14} &= \{u_{14}, u_{15}, u_{16}, u_{19}\}; \\
 c_3 &= \{u_2, u_3, u_7, u_9\}; & c_9 &= \{u_7, u_8, u_{10}\}; & c_{15} &= \{u_{14}, u_{15}, u_{17}, u_{20}\}; \\
 c_4 &= \{u_2, u_3, u_8, u_{13}\}; & c_{10} &= \{u_9, u_{10}, u_{13}\}; & c_{16} &= \{u_{16}, u_{17}, u_{18}\}; \\
 c_5 &= \{u_2, u_4, u_8, u_{14}\}; & c_{11} &= \{u_{11}, u_{12}, u_{13}\}; & c_{17} &= \{u_{18}, u_{19}, u_{20}\}. \\
 c_6 &= \{u_3, u_4, u_{13}, u_{14}\}; & c_{12} &= \{u_1, u_2, u_5, u_8, u_{12}\}; & &
 \end{aligned}$$

После удаления изометрических циклов $c_{13}, c_7, c_4, c_{12}, c_{14}, c_6, c_{15}$ цикломатическое число графа $\nu(G) = 17 - 7 = 10$ и мы получаем базис изометрических циклов, характеризующий планарный граф (см. рис. 11):

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \{u_1, u_3, u_5, u_{11}\}; & c_9 &= \{u_7, u_8, u_{10}\}; \\
 c_2 &= \{u_1, u_4, u_6, u_{16}\}; & c_{10} &= \{u_9, u_{10}, u_{13}\}; \\
 c_3 &= \{u_2, u_3, u_7, u_9\}; & c_{11} &= \{u_{11}, u_{12}, u_{13}\}; \\
 c_5 &= \{u_2, u_4, u_8, u_{14}\}; & c_{16} &= \{u_{16}, u_{17}, u_{18}\}; \\
 c_8 &= \{u_5, u_6, u_{12}, u_{15}, u_{19}\}; & c_{17} &= \{u_{18}, u_{19}, u_{20}\}.
 \end{aligned}$$

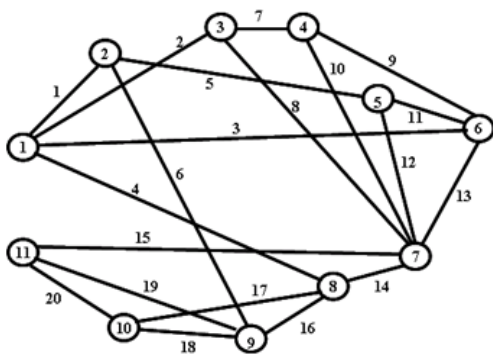


Рис. 10. Граф G

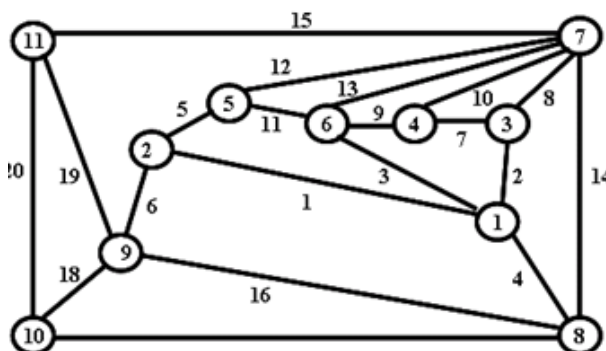


Рис. 11. Планарный граф G

Выразим удаленные изометрические циклы как линейную комбинацию базисных циклов:

$$\begin{aligned}
 c_{13} &= \{u_1, u_4, u_5, u_{12}, u_{14}\} = c_1 \oplus c_3 \oplus c_5 \oplus c_9 \oplus c_{10} \oplus c_{11} = \{u_1, u_3, u_5, u_{11}\} \oplus \{u_2, u_3, u_7, u_9\} \oplus \\
 &\oplus \{u_2, u_4, u_8, u_{14}\} \oplus \{u_7, u_8, u_{10}\} \oplus \{u_9, u_{10}, u_{13}\} \oplus \{u_{11}, u_{12}, u_{13}\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_7 &= \{u_5, u_6, u_{12}, u_{14}, u_{16}\} = c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_5 \oplus c_9 \oplus c_{10} \oplus c_{11} = \{u_1, u_3, u_5, u_{11}\} \oplus \{u_1, u_4, u_6, u_{16}\} \oplus \\
 &\oplus \{u_2, u_3, u_7, u_9\} \oplus \{u_2, u_4, u_8, u_{14}\} \oplus \{u_7, u_8, u_{10}\} \oplus \{u_9, u_{10}, u_{13}\} \oplus \{u_{11}, u_{12}, u_{13}\};
 \end{aligned}$$

$$c_4 = \{u_2, u_3, u_8, u_{13}\} = c_3 \oplus c_9 \oplus c_{10} = \{u_2, u_3, u_7, u_9\} \oplus \{u_7, u_8, u_{10}\} \oplus \{u_9, u_{10}, u_{13}\};$$

$$\begin{aligned}
 c_{12} &= \{u_1, u_2, u_5, u_8, u_{12}\} = c_1 \oplus c_3 \oplus c_9 \oplus c_{10} \oplus c_{11} = \{u_1, u_3, u_5, u_{11}\} \oplus \{u_2, u_3, u_7, u_9\} \oplus \\
 &\oplus \{u_7, u_8, u_{10}\} \oplus \{u_9, u_{10}, u_{13}\} \oplus \{u_{11}, u_{12}, u_{13}\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{14} &= \{u_{14}, u_{15}, u_{16}, u_{19}\} = c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_5 \oplus c_8 \oplus c_9 \oplus c_{10} \oplus c_{11} = \{u_1, u_3, u_5, u_{11}\} \oplus \\
 &\oplus \{u_1, u_4, u_6, u_{16}\} \oplus \{u_2, u_3, u_7, u_9\} \oplus \{u_2, u_4, u_8, u_{14}\} \oplus \{u_5, u_6, u_{12}, u_{15}, u_{19}\} \oplus \{u_7, u_8, u_{10}\} \oplus \\
 &\oplus \{u_9, u_{10}, u_{13}\} \oplus \{u_{11}, u_{12}, u_{13}\};
 \end{aligned}$$

$$c_6 = \{u_3, u_4, u_{13}, u_{14}\} = c_3 \oplus c_5 \oplus c_9 \oplus c_{10} = \{u_2, u_3, u_7, u_9\} \oplus \{u_2, u_4, u_8, u_{14}\} \oplus \{u_7, u_8, u_{10}\} \oplus \{u_9, u_{10}, u_{13}\};$$

$$c_{15} = \{u_{14}, u_{15}, u_{17}, u_{20}\} = c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_5 \oplus c_8 \oplus c_9 \oplus c_{10} \oplus c_{11} \oplus c_{16} \oplus c_{17} = \{u_1, u_3, u_5, u_{11}\} \oplus \{u_1, u_4, u_6, u_{16}\} \oplus \{u_2, u_3, u_7, u_9\} \oplus \{u_2, u_4, u_8, u_{14}\} \oplus \{u_5, u_6, u_{12}, u_{15}, u_{19}\} \oplus \{u_7, u_8, u_{10}\} \oplus \{u_9, u_{10}, u_{13}\} \oplus \{u_{11}, u_{12}, u_{13}\} \oplus \{u_{16}, u_{17}, u_{18}\} \oplus \{u_{18}, u_{19}, u_{20}\}.$$

Пример 4. Построить топологический рисунок для данного плоского графа.

После получения базиса изометрических циклов, характеризующих плоский граф, согласно теореме Мак-Лейна [7], можно охарактеризовать рисунок графа, введя понятие вращения вершин графа, согласно методу Г. Рингеля [9]. Здесь вращение вершин можно получить, рассматривая выделенный базис изометрических циклов и обода как систему циклов, индуцированную вращением вершин. Тогда вращение вершин можно записать как совокупность циклических подмножеств:

$$\begin{aligned} \hbar_1 &= \{x_2, x_6, x_3, x_8\}; & \hbar_5 &= \{x_2, x_7, x_6\}; & \hbar_9 &= \{x_{11}, x_2, x_8, x_{10}\}; \\ \hbar_2 &= \{x_1, x_9, x_5\}; & \hbar_6 &= \{x_5, x_7, x_4, x_1\}; & \hbar_{10} &= \{x_{11}, x_9, x_8\}; \\ \hbar_3 &= \{x_1, x_4, x_7\}; & \hbar_7 &= \{x_3, x_4, x_6, x_5, x_{11}, x_8\}; & \hbar_{11} &= \{x_7, x_9, x_{10}\}. \\ \hbar_4 &= \{x_6, x_7, x_3\}; & \hbar_8 &= \{x_{10}, x_9, x_1, x_7\}; \end{aligned}$$

Топологическим рисунком графа будем называть теоретико-множественную структуру, состоящую из самого графа G и вращения всех его вершин, и записывать его как (G, \hbar) .

Топологический рисунок графа позволяет осуществлять операции с рисунком графа, не производя никаких геометрических построений на плоскости, чисто алгебраическими методами.

На основании вышесказанного на рис. 12 приведен пример топологического рисунка.

Следующей задачей, при решении которой целесообразно применять множество изометрических циклов, является задача выделения максимально плоского суграфа для непланарного графа.

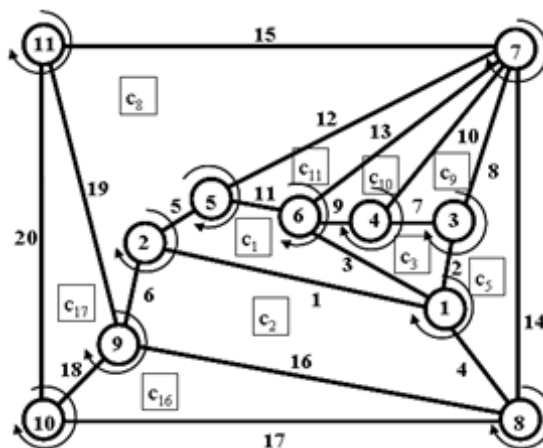


Рис. 12. Топологический рисунок графа

Пример 5. Построить максимально плоский суграф для графа G (см. рис. 13).

Максимально плоским суграфом для данного простого несепарабельного графа будем называть суграф, принадлежащий подпространству циклов и полученный путем удаления минимального количества ребер из графа.

Множество изометрических циклов C_τ для нашего графа G , будем записывать двумя способами: в виде множества ребер принадлежащих данному циклу, и в виде множества вершин, принадлежащих данному циклу:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \{u_1, u_2, u_5, u_{14}, u_{15}\} \rightarrow \{x_1, x_2, x_7, x_8, x_9\}; \\
 C_2 &= \{u_1, u_3, u_4, u_7, u_{20}\} \rightarrow \{x_1, x_2, x_3, x_{12}, x_{13}\}; \\
 C_3 &= \{u_2, u_3, u_{12}, u_{13}, u_{19}\} \rightarrow \{x_1, x_6, x_7, x_{11}, x_{12}\}; \\
 C_4 &= \{u_4, u_5, u_6, u_9, u_{17}\} \rightarrow \{x_2, x_3, x_4, x_9, x_{10}\}; \\
 C_5 &= \{u_6, u_7, u_8, u_{11}, u_{21}\} \rightarrow \{x_3, x_4, x_5, x_{13}, x_{14}\}; \\
 C_6 &= \{u_8, u_9, u_{10}, u_{13}, u_{18}\} \rightarrow \{x_4, x_5, x_6, x_{10}, x_{11}\}; \\
 C_7 &= \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{14}, u_{16}\} \rightarrow \{x_5, x_6, x_7, x_8, x_{14}\}; \\
 C_8 &= \{u_8, u_9, u_{11}, u_{15}, u_{16}, u_{17}\} \rightarrow \{x_4, x_5, x_8, x_9, x_{10}, x_{14}\}; \\
 C_9 &= \{u_4, u_5, u_7, u_{15}, u_{16}, u_{21}\} \rightarrow \{x_2, x_3, x_8, x_9, x_{13}, x_{14}\}; \\
 C_{10} &= \{u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}, u_{17}, u_{18}\} \rightarrow \{x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}\}; \\
 C_{11} &= \{u_1, u_3, u_5, u_{17}, u_{18}, u_{19}\} \rightarrow \{x_1, x_2, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}\}; \\
 C_{12} &= \{u_6, u_7, u_9, u_{18}, u_{19}, u_{20}\} \rightarrow \{x_3, x_4, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}\}; \\
 C_{13} &= \{u_{10}, u_{11}, u_{13}, u_{19}, u_{20}, u_{21}\} \rightarrow \{x_5, x_6, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}\}; \\
 C_{14} &= \{u_2, u_3, u_{14}, u_{16}, u_{20}, u_{21}\} \rightarrow \{x_1, x_7, x_8, x_{12}, x_{13}, x_{14}\}.
 \end{aligned}$$

В результате мы получим максимально плоский суграф (см. рис. 14). Шесть циклов $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_8$ и обод образуют плоский суграф из непланарного графа при исключении минимального количества ребер u_{18}, u_{10} .

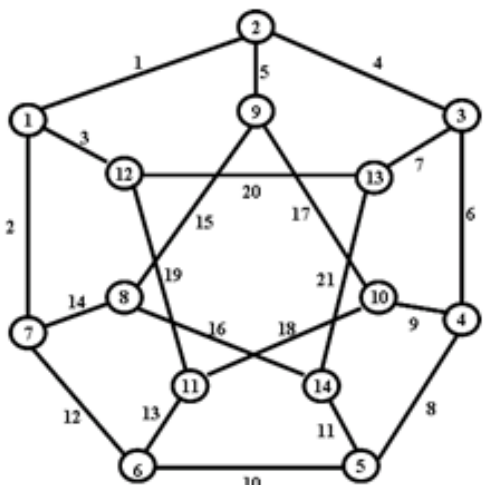


Рис. 13. Граф G

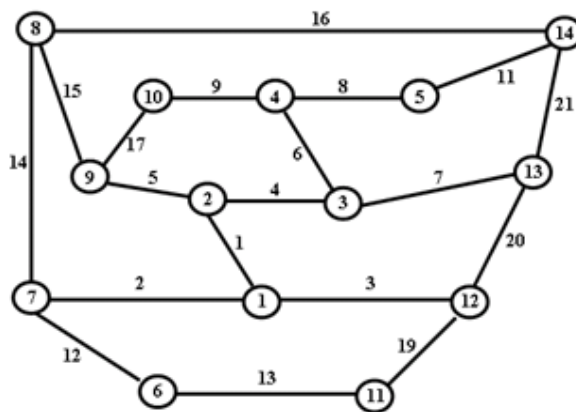


Рис. 14. Максимально плоский суграф графа

Следующее применение изометрические циклы находят при решении задачи построения гамильтонового цикла графа.

Пример 6. Построить гамильтонов цикл в следующем графе $G = (X, U)$ (см. рис.15).

Запишем множество изометрических циклов графа:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \{u_1, u_2, u_4, u_6, u_8\} \rightarrow \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}; & c_6 &= \{u_{11}, u_{12}, u_{14}, u_{25}, u_{26}\} \rightarrow \{x_6, x_7, x_{15}, x_{16}, x_{17}\}; \\
 c_1 &= \{u_1, u_3, u_5, u_{15}, u_{16}\} \rightarrow \{x_1, x_2, x_8, x_9, x_{10}\}; & c_7 &= \{u_{22}, u_{23}, u_{24}, u_{25}, u_{27}\} \rightarrow \{x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{20}\}; \\
 c_2 &= \{u_2, u_3, u_{10}, u_{11}, u_{13}\} \rightarrow \{x_1, x_5, x_6, x_7, x_8\}; & c_8 &= \{u_{19}, u_{20}, u_{21}, u_{23}, u_{30}\} \rightarrow \{x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{19}, x_{20}\}; \\
 c_3 &= \{u_8, u_9, u_{10}, u_{12}, u_{24}\} \rightarrow \{x_4, x_5, x_6, x_{14}, x_{15}\}; & c_9 &= \{u_{16}, u_{17}, u_{18}, u_{20}, u_{29}\} \rightarrow \{x_9, x_{10}, x_{11}, x_{18}, x_{19}\}; \\
 c_4 &= \{u_6, u_7, u_9, u_{21}, u_{22}\} \rightarrow \{x_3, x_4, x_{12}, x_{13}, x_{14}\}; & c_{10} &= \{u_{13}, u_{14}, u_{15}, u_{17}, u_{28}\} \rightarrow \{x_7, x_8, x_9, x_{17}, x_{18}\}; \\
 c_5 &= \{u_4, u_5, u_7, u_{18}, u_{19}\} \rightarrow \{x_2, x_3, x_{10}, x_{11}, x_{12}\}; & c_{11} &= \{u_{26}, u_{27}, u_{28}, u_{29}, u_{30}\} \rightarrow \{x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}\}.
 \end{aligned}$$

Здесь гамильтонов цикл характеризуется следующей кольцевая сумма изометрических циклов:

$$\begin{aligned}
 c_1 \oplus c_2 \oplus c_4 \oplus c_6 \oplus c_8 \oplus c_{11} &= \{u_1, u_3, u_5, u_{15}, u_{16}\} \oplus \{u_2, u_3, u_{10}, u_{11}, u_{13}\} \oplus \{u_6, u_7, u_9, u_{21}, u_{22}\} \oplus \\
 &\oplus \{u_{11}, u_{12}, u_{14}, u_{25}, u_{26}\} \oplus \{u_{19}, u_{20}, u_{21}, u_{23}, u_{30}\} \oplus \{u_{26}, u_{27}, u_{28}, u_{29}, u_{30}\} = \\
 &= \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_7, u_9, u_{10}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}, u_{16}, u_{19}, u_{20}, u_{22}, u_{23}, u_{25}, u_{27}, u_{28}, u_{29}\} = \\
 &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}\}.
 \end{aligned}$$

Полученная кольцевая сумма изометрических циклов показана на рис. 16.

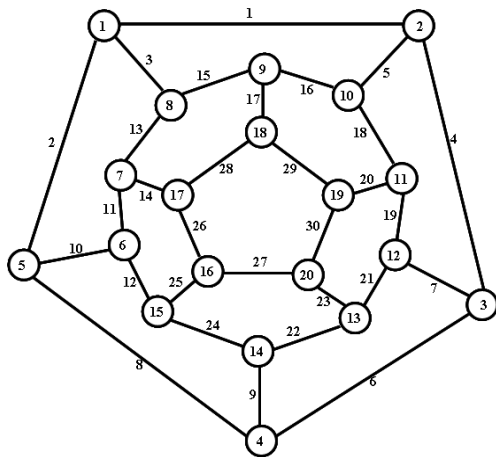


Рис. 15. Граф G

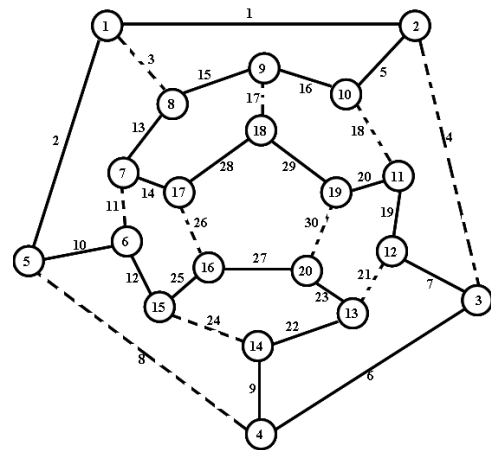


Рис. 16. Гамильтонов цикл

Для заданного графа можно выделить и другие кольцевые суммы, характеризующие гамильтонов цикл, например $c_2 \oplus c_{10} \oplus c_{11} \oplus c_7 \oplus c_4 \oplus c_5$ или $c_2 \oplus c_3 \oplus c_7 \oplus c_{11} \oplus c_9 \oplus c_5$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен вопрос о свойствах множества изометрических циклов графа. Показана природная сущность изометрических циклов и описаны методы получения такого множества. На основании свойств изометрических циклов исследован вопрос формирования базисов подпространства циклов и графа. Приведена теорема про существование в простом несепарабельном графе базиса подпространства циклов, состоящего из изометрических циклов, а также, рассмотрен вопрос о представлении границ граней в плоском графе изометрическими циклами. Также в работе приведен ряд примеров использования свойств изометрических циклов графа для решения различных комбинаторных задач.

В заключении следует отметить, что список комбинаторных задач, решаемых с помощью методов теории изометрических циклов не ограничивается приведенными примерами, а распространяется на довольно обширные области применения вычислительной математики.

ЛІТЕРАТУРА

1. Мак-Лейн С. Комбинаторное условие для плоских графов / С. Мак-Лейн // В кн. : Кибернетический сборник. Новая серия. – 1970. – Вып. 7. – С. 68-77.
2. Емеличев В. А. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич. – М. : Наука, 1990. – 384 с.
3. Kolasinska E. On a Minimum Cycle Bases of a Graph / E. Kolasinska // *Zastosowania Matematyki*. – 1980. – P. 631-639.
4. Зыков А. А. Основы теории графов / А. А. Зыков. – М. : Наука, 1987. – 384 с.
5. Kavitha T. Cycle spaces in graphs: characterization, algorithms, complexity, and applications / T. Kavitha, C. Liebchen, K. Mehlhorn, D. Michail, R. Rizzi, T. Ueckerdt, K. Zweig // *Comput. Sci. Rev.* 3. – 2009. – P. 199-243.
6. Харари Ф. Теория графов / [Пер. с англ. Козырева В.П. под ред. Гаврилова В.Г.]. – М. : Мир, 1973. – 300 с.
7. Курапов С. В. Методы построения топологического рисунка графа / С. В. Курапов, А. В. Толлок // *Автоматика и телемеханика*. – 2013. – № 9. – С. 78-97.
8. Хопкрофт Дж. Е. Изоморфизм планарных графов / Дж. Е. Хопкрофт, Р. Е. Тарьян // В кн. : Кибернетический сборник. Новая серия. – 1975. – Вып. 12. – С. 39-61.
9. Свами М. Графы, сети и алгоритмы : Пер. с англ. / М. Свами, К. Тхуласираман. – М. : Мир, 1984. – 455 с.

REFERENCES

1. Mak-Lejn, S. (1970), "A combinatorial condition for planar graphs", *v kn.: Kiberneticheskij sbornik. Novaja serija*, issue 7, pp. 68-77.
2. Emelichev, V.A., Mel'nikov, O.I., Sarvanov, V.I. and Tyshkevich, R.I. (1990), *Lekcii po teorii grafov* [Lectures in graph theory], Nauka, Moscow.
3. Kolasinska, E. (1980), "On a Minimum Cycle Bases of a Graph", *Zastosowania Matematyki*, pp. 631-639.
4. Zykov, A.A. (1987), *Osnovy teorii grafov* [Fundamentals of graph theory], Nauka, Moscow.
5. Kavitha, T., Liebchen, C., Mehlhorn, K., Michail, D., Rizzi, R., Ueckerdt, T. and Zweig, K. (2009), "Cycle spaces in graphs: characterization, algorithms, complexity, and applications", *Comput. Sci. Rev.* 3, pp. 199-243.
6. Harari, F. (1973), *Teorija grafov* [Graphs theory], Translated Kozyreva, V.P. edited by Gavrilova, V.G., Mir, Moscow.
7. Kurapov, S.V. and Tolok, A.V. (2013), "Methods of construction of the topological figure of the graph", *Avtomatika i telemehanika*, no. 9, pp. 78-97.
8. Hopcroft, Dzh.E. and Tar'jan, R.E. (1975), "The isomorphism of planar graphs", *v kn.: Kiberneticheskij sbornik. Novaja serija*, issue 12, pp. 39-61.
9. Svami, M. and Thulasiraman, K. (1984), *Grafy, seti i algoritmy* [Graphs, Networks and Algorithms], Mir, Moscow.

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПЕРЕКРЕСТНЫМИ РЕБРАМИ НЕОДНОРОДНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТЬЮ

Латифов Ф. С., д. ф.-м. н., профессор, Агаев Р. Н., докторант

*Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет,
ул. А. Султанова, 5, г. Баку, Аз. 1073/1*

flatifov@mail.ru, rufat.83@mail.ru

В предлагаемой статье исследовано свободное колебание подкрепленной перекрестными системами ребер, неоднородной по толщине цилиндрической оболочки, контактирующей с движущейся жидкостью. Используя вариационный принцип Гамильтона-Остроградского, построены системы уравнений движения подкрепленной перекрестными системами ребер, неоднородной по толщине цилиндрической оболочки, контактирующей с движущейся жидкостью. Неоднородность материала оболочки по толщине учтено, принимая, что модуль Юнга и плотность материала оболочки является функциями нормальной координаты. При исследовании свободных колебаний подкрепленной перекрестными системами ребер, неоднородной по толщине цилиндрической оболочки, контактирующей с движущейся жидкостью, рассмотрены две случаи: а) жидкость внутри оболочки находится в покое; б) жидкость внутри оболочки движется с постоянной скоростью. В обоих случаях построены частотные уравнения и реализованы численно. В процессе вычислений для функции неоднородности приняты линейные и параболические законы. Построены характерные кривые зависимости.

Ключевые слова: подкрепленная оболочка, вариационный принцип, жидкость, свободное колебание.

КОЛИВАННЯ ПІДКРІПЛЕНОЇ ПЕРЕХРЕСНИМИ РЕБРАМИ НЕОДНОРІДНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З РУХОМОЮ РІДИНОЮ

Латифов Ф. С., д. ф.-м. н., профессор, Агаев Р. Н., докторант

*Азербайджанський Архітектурно-будівельний університет,
вул. А. Султанова, 5, м. Баку, Аз.1073/1*

flatifov@mail.ru, rufat.83@mail.ru

У пропонованій статті досліджено вільне коливання підкріпленої перехресними системами ребер, неоднорідної за товщиною циліндричної оболонки, що контактує з рухомою рідиною. Використовуючи варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського, побудовані системи рівнянь руху підкріпленої перехресними системами ребер, неоднорідною за товщиною циліндричною оболонкою, що контактує з рухомою рідиною. Неоднорідність матеріалу оболонки за товщиною враховано, приймаючи, що модуль Юнга і щільність матеріалу оболонки є функціями нормальної координати. При дослідженні вільних коливань підкріпленої перехресними системами ребер, неоднорідною за товщиною циліндричною оболонкою, що контактує з рухомою рідиною, розглянуті два випадки: а) рідина всередині оболонки перебуває у спокої; б) рідина всередині оболонки рухається з постійною швидкістю. В обох випадках побудовані частотні рівняння і реалізовані чисельно. У процесі обчислень для функції неоднорідності прийняті лінійні і параболическі закони. Побудовано характерні криві залежності.

Ключові слова: підкріплена оболонка, варіаційний принцип, рідина, вільне коливання.

FLUCTUATIONS OF THE NONUNIFORM CYLINDRICAL ENVELOPE SUPPORTED WITH CROSS EDGES FROM MOVING LIQUID

Latifov F. S., D.Sc. in Physics and Maths, professor, Agayev R. N., doctoral candidate

*Azerbaijani Architectural and Structural University,
A. Sultanov str. 5, Baku, Az. 1073/1*

flatifov@mail.ru, rufat.83@mail.ru

In the offered article the free fluctuation supported with cross systems of edges, the nonuniform on thickness of the cylindrical envelope contacting from moving liquid is investigated. Using the variation principle of Hamilton-Ostrogradsky are constructed the set of equations of driving supported with cross systems of edges, the nonuniform on thickness of the cylindrical envelope contacting from moving

liquid. Inhomogeneity of material of an envelope on thickness it is considered, accepting that the elastic modulus and density of material of an envelope is functions of normal coordinate. At research of the free fluctuations supported with cross systems of edges, the nonuniform on thickness of the cylindrical envelope contacting from moving liquid considered two cases: a) liquid in an envelope dwells; b) liquid in an envelope moves with constant speed. In both cases the frequenciest equations are constructed and realized numerically. In the course of calculations for function of inhomogeneity the linear and parabolic laws are adopted. The reference graphs are constructed.

Key words: the supported envelope, the variation principle, liquid, the free fluctuation.

ВВЕДЕНИЕ

Устойчивость, колебания и расчеты на прочность тонкостенных элементов конструкций оболочечного типа, контактирующие со средой, играют важную роль при проектировании современных аппаратов, машин и сооружений. Для придания большей жесткости оболочки подкрепляются различными ребрами. Такие конструкции могут находиться в контакте с жидкостью и подвергаться не только статическим нагрузкам, но и динамическим. Однако, поведение неоднородных тонкостенных элементов конструкций, имеющих ребра, учет их дискретного расположения, влияние жидкости исследованы недостаточно. Поэтому разработка математических моделей для исследования поведений подкрепленных неоднородных оболочек, наиболее полно учитывающих их работу при динамических нагрузках, и проведение на их основе исследований устойчивости и колебаний, а также выбора рациональных параметров конструкции, контактирующей с жидкостью, являются актуальными задачами.

Отметим, что исследованию свободных колебаний ребристых цилиндрических оболочек, заполненных протекающей жидкостью, посвящены работы [2, 3]. Изучены влияния числа ребер, их жесткости, скорости течения жидкости, различных механических, физических и геометрических размеров оболочки на частоты собственных колебаний и оптимизационного параметра круговой ребристой цилиндрической оболочки. Работы [4-6] посвящены исследованию параметрического колебания нелинейного и неоднородного по толщине прямолинейного стержня в вязкоупругой среде с применением контактной модели Пастернака. Изучено влияние основных факторов – упругости основания, повреждаемости материала стержня и оболочки, зависимости коэффициента сдвига от частоты колебания на характеристики продольных колебаний точек стержня в вязкоупругой среде. Во всех исследуемых случаях построены зависимости зоны динамической устойчивости колебаний стержня в вязкоупругой среде от параметров конструкции на плоскости нагрузка-частота. В работе [7] приведены результаты экспериментального исследования влияния подкрепляющих ребер и присоединенных твердых тел на частоты и формы свободных колебаний тонких упругих конструктивно неоднородных оболочек. В работах [8, 9] с помощью асимптотического метода построены частотные уравнения ребристых цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью, получены приближенные частоты уравнения и простые расчетные формулы, позволяющие находить значения минимальных собственных частот колебаний рассмотренной системы, исследованы вынужденные колебания подкрепленной оболочки, заполненной жидкостью, и определены амплитудно-частотные характеристики рассмотренных колебательных процессов. Вводя параметр определяющего оптимальность подкрепления, придем к оптимизации параметров оболочек, усиленных перекрестной системой ребер и заполненной жидкостью, исследованы влияние степени сжимаемости жидкости на частоты свободных осесимметричных колебаний ребристых цилиндрических оболочек заполненной жидкостью.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ребристая оболочка рассматривается как система, состоящая из собственной оболочки и жестко с ней соединенных по линиям контакта ребер. Принимается, что напряженно-деформированное состояние оболочки можно полностью определить в рамках линейной теории упругих тонких оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява, а для расчета ребер применима теория криволинейных стержней Кирхгофа-Клебша. Система координат

выбрана так, что координатные линии совпадают с линиями главных кривизн срединной поверхности оболочки. При этом предполагается, что ребра размещены вдоль координатных линий, а их края, как и края обшивки, лежат в одной координатной плоскости. Кроме того, предполагается, что все ребра образуют регулярную систему. Под регулярной системой продольных и кольцевых ребер понимается такая система, в которой жесткости всех ребер, их взаимные расстояния равны, а расстояния от края оболочки до ближайшего к нему ребра равно расстоянию между ребрами.

Деформированное состояние обшивки может быть определено через три составляющих перемещений ее срединной поверхности u , ϑ и w . При этом углы поворота нормальных элементов φ_1 , φ_2 относительно координатных линий y и x выражаются через w и ϑ с помощью зависимостей $\varphi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}$, $\varphi_2 = -\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\vartheta}{R}\right)$, где R – радиус срединной поверхности оболочки.

Для описания деформированного состояния ребер, кроме трех составляющих перемещений центров тяжести их поперечных сечений (u_j , v_j , w_j j -го поперечного стержня u_i , v_i , w_i i -го продольного стержня), необходимо определить также углы закручивания φ_{kpi} и φ_{kpj} .

Учитывая, что согласно принятым гипотезам, имеет место постоянство радиальных прогибов по высоте сечений, а также вытекающие из условий жесткого соединения ребер с оболочкой равенства соответствующих углов закручивания, записываем следующие соотношения:

$$u_i(x) = u(x, y_i) + h_i \varphi_1(x, y_i); \quad v_i(x) = v(x, y_i) + h_i \varphi_2(x, y_i); \quad w_i(x) = w(x, y_i);$$

$$\varphi_i = \varphi_1(x, y_i); \quad \varphi_{kpi}(x) = \varphi_2(x, y_i); \quad u_j(y) = u(x_j, y) + h_j \varphi_1(x_j, y);$$

$$v_j(y) = v(x_j, y) + h_j \varphi_2(x_j, y); \quad w_j(y) = w(x_j, y); \quad \varphi_j = \varphi_2(x_j, y); \quad \varphi_{kpj}(y) = \varphi_1(x_j, y).$$

Здесь $h_i = 0,5h + H_i^1$, $h_j = 0,5h + H_j^1$, h – толщина оболочки, H_i^1 и H_j^1 – расстояния от осей i -го продольного и j -го поперечного стержня до поверхности оболочки, x_i и y_i – координаты линий сопряжения ребер с оболочкой, φ_i , φ_{kpi} и φ_j , φ_{kpj} – углы поворота и закручивания поперечных сечений соответственно продольных и поперечных стержней.

Относительно внешних воздействий предполагается, что действующие на ребристую оболочку поверхностные нагрузки со стороны жидкости, могут быть сведены к составляющим q_x , q_y и q_z , приложенным к срединной поверхности оболочки.

Дифференциальные уравнения движения и естественные граничные условия для поперечно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки с жидкостью получим на основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона. Для этого предварительно запишем потенциальную и кинетическую энергии системы.

Для учета неоднородности по толщине цилиндрической оболочки будем исходить из трехмерного функционала. В этом случае функционал полной энергии цилиндрической оболочки имеет вид:

$$V = \frac{1}{2} \iiint_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\sigma_x e_x + \sigma_y e_y + \tau_{xy} e_{xy} + \rho(z) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dx dy dz. \quad (1)$$

Здесь

$$\sigma_x = \frac{T_1}{h} + \frac{12M_1}{h^3} z; \quad \sigma_y = \frac{T_2}{h} + \frac{12M_2}{h^3} z; \quad \tau_{xy} = \frac{S}{h} + \frac{12H}{h^3} z. \quad (2)$$

Существуют различные способы учета неоднородности материала оболочки. Один из них заключается в том, что модуль Юнга и плотность материала оболочки принимаются

функциями нормальной координаты z : $E = E(z)$, $\rho = \rho(z)$. Предполагается, что коэффициент Пуассона постоянный. В этом случае соотношение деформации-напряжения имеет вид:

$$e_x = \frac{1}{E(z)}(\sigma_x - \nu\sigma_y); \quad e_y = \frac{1}{E(z)}(\sigma_y - \nu\sigma_x); \quad e_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E(z)}\sigma_{xy}. \quad (3)$$

Учитывая (2)-(3) и

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int \int \left(\rho(z) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dx dy dz = \int \int \left(\rho_0 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) - \right. \\ \left. - 2\rho_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right) + \rho_2 \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right)^2 \right) \right) dx dy \end{aligned}$$

в (1), можно написать:

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{h} \int \int \left\{ T_1 \left[\frac{1}{E_0} (2T_2 - \nu T_1) + \frac{12}{E_1 h^3} (M_2 - \nu M_1) \right] + \right. \\ \left. + T_2 \left[-\frac{\nu T_2}{E_0} + \frac{12}{E_1 h^3} (M_1 - \nu M_2) \right] + 2(1+\nu)S \left(\frac{S}{E_0} + \frac{12H}{E_1 h^3} \right) + \right. \\ \left. + \frac{72}{E_2 h^6} (2M_1 M_2 - \nu M_1^2 - \nu M_2^2 + 2(1+\nu)H^2) \right\} dx dy + \int \int \left(\rho_0 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) - \right. \\ \left. - 2\rho_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right) + \rho_2 \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right)^2 \right) \right) dx dy. \quad (4) \end{aligned}$$

Выражения для потенциальной энергии упругой деформации i -го продольного и j -го поперечного ребер таковы [10]:

$$\begin{aligned} \Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\tilde{E}_i F_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{yi} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{zi} \left(\frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{G}_i J_{kpi} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial x} \right)^2 \right] dx, \\ \Pi_j = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\tilde{E}_j F_j \left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial y} - \frac{w_j}{R} \right)^2 + \tilde{E}_j J_{xj} \left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{w_j}{R^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \tilde{E}_j J_{zj} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} - \frac{\varphi_{kpi}}{R} \right)^2 + \tilde{G}_j J_{kpi} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_j}{\partial y} \right)^2 \right] dy. \quad (5) \end{aligned}$$

Кинетические энергии ребер записываются в виде [10]:

$$\begin{aligned} K_i = \rho_i F_i \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpi}}{F_i} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial t} \right)^2 \right] dx, \\ K_j = \rho_j F_j \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_j}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpi}}{F_j} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial t} \right)^2 \right] dx. \quad (6) \end{aligned}$$

В выражениях (4) и (6) $F_i, J_{zi}, J_{yi}, J_{kpi}$ – площадь и моменты инерции поперечного сечения i -го продольного стержня соответственно относительно оси Oz и оси, параллельной оси Ou и

проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении; $F_j, J_{zj}, J_{yj}, J_{xpj}$ – аналогичные величины для j -го поперечного стержня; \tilde{E}_i, \tilde{G}_i и \tilde{E}_j, \tilde{G}_j – модули упругости и сдвига материала i -го продольного и j -го поперечного стержня соответственно, и $\rho_i = \int_{-h}^h \rho(z) z^i dz, \frac{1}{E_i} = \int_{-h}^h \frac{z^i dz}{E(z)}$; t – временная координата, ρ_i, ρ_j – соответственно плотности материалов, из которых изготовлены i -й продольный и j -й поперечный стержни.

Потенциальная энергия внешних поверхностных нагрузок, действующих со стороны идеальной жидкости, приложенных к оболочке, определяется как работа, совершаемая этими нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное и представляется в виде:

$$A_0 = - \int_0^L \int_0^{2\pi} q_z w dx dy. \quad (7)$$

Полная энергия системы равна сумме энергий упругих деформаций оболочки и поперечных ребер, а также потенциальных энергий всех внешних нагрузок, действующих со стороны идеальной жидкости:

$$J = V + \sum_{j=1}^{k_2} (\Pi_j + K_j) + \sum_{i=1}^{k_1} (\Pi_i + K_i) + A_0. \quad (8)$$

Здесь k_1 – количество продольных, k_2 – количество поперечных ребер.

Предполагая, что основная скорость потока равна U и отклонения от этой скорости малы, воспользуемся волновым уравнением для потенциала возмущенных скоростей φ по [11]:

$$\Delta \tilde{\varphi} - \frac{1}{a_0^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{R \partial \xi \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{R^2 \partial \xi^2} \right) = 0. \quad (9)$$

Выражение полной энергии системы (8), уравнения движение жидкости (9) дополняются контактными условиями. На контактной поверхности оболочка-жидкость соблюдается непрерывность радиальных скоростей и давлений. Условие непроницаемости или плавности обтекания у стенки среды имеет вид [11]:

$$\vartheta_r|_{r=R} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = - \left(\omega_0 \frac{\partial w}{\partial t_1} + U \frac{\partial w}{R \partial \xi} \right). \quad (10)$$

Равенство радиальных давлений со стороны жидкости на оболочку:

$$q_z = -p|_{r=R}. \quad (11)$$

Частотное уравнение ребристой неоднородной оболочки с протекающей жидкостью получено на основе принципа стационарности действия Остроградского-Гамильтона:

$$\partial W = 0, \quad (12)$$

где $W = \int_{t'}^{t''} J dt$ – действие по Гамильтону, t' и t'' – заданные произвольные моменты времени.

Дополняя контактными условиями полной энергии системы (8) уравнения движения жидкости (9), приходим к задаче о собственных колебаниях подкрепленной перекрестной системой ребер неоднородной цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью. Другими словами, задача о собственных колебаниях подкрепленной перекрестной системой ребер неоднородной цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью сводится к совместному интегрированию выражений для полной энергии системы (8), уравнение движение жидкости (9) при выполнении условий (9) и (10) на поверхности их контакта.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Потенциал возмущенных скоростей φ ищем в виде:

$$\tilde{\varphi}(\xi, r, \theta, t_1) = f(r) \cos n\vartheta \sin \chi\xi \sin \omega_1 t_1. \quad (13)$$

Используя (10) из условия (7), (8), имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= -\Phi_{\alpha n} \left(\omega_0 \frac{\partial w}{\partial t_1} + U \frac{\partial w}{R \partial \xi} \right), \\ p &= \Phi_{\alpha n} \rho_m \left(\omega_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} + 2U\omega_0 \frac{\partial^2 w}{R \partial \xi \partial t_1} + U^2 \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \xi^2} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\Phi_{\alpha n} = \begin{cases} I_n(\beta r)/I'_n(\beta r), & M_1 < 1; \\ J_n(\beta_1 r)/J'_n(\beta_1 r), & M_1 > 1; \\ \frac{R^n}{nR^{n-1}}, & M_1 = 1. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь $M_1 = \frac{U + \omega_0 R \omega_1 / \alpha}{a_0}$, $\beta^2 = R^{-2}(1 - M_1^2)\chi^2$, $\beta_1^2 = R^{-2}(M_1^2 - 1)\chi^2$, I_n – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка n , J_n – функции Бесселя первого рода порядка n , $\omega_0 = \sqrt{\frac{E_0}{(1-v^2)\rho_0 R^2}}$, $\omega_1 = \omega/\omega_0$.

В выражении (8) варьируемыми величинами являются u , ϑ , w , T_1 , T_2 , M_1 , M_2 , S , H . Эти неизвестные величины аппроксимируем следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= \cos \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (u_0 \cos \omega t + u_1 \sin \omega t); \quad \vartheta = \sin \frac{\pi x}{l} \cos(k\varphi) (\vartheta_0 \cos \omega t + \vartheta_1 \sin \omega t); \\ w &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (w_0 \cos \omega t + w_1 \sin \omega t); \end{aligned} \quad (16)$$

$$T_1 = \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (T_{10} \cos \omega t + T_{11} \sin \omega t); \quad T_2 = \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (T_{20} \cos \omega t + T_{21} \sin \omega t);$$

$$S = \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (S_{10} \cos \omega t + S_{11} \sin \omega t); \quad M_1 = \cos \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (M_{10} \cos \omega t + M_{11} \sin \omega t);$$

$$M_2 = \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (M_{20} \cos \omega t + M_{21} \sin \omega t); \quad H = \cos \frac{\pi x}{l} \cos(k\varphi) (H_{10} \cos \omega t + H_{11} \sin \omega t).$$

Подставляя (16) в (8), после интегрирования получим функцию от переменных u_0 , u_1 , ϑ_0 , ϑ_1 , w_0 , w_1 , T_{10} , T_{11} , T_{20} , T_{21} , S_{10} , S_{11} , M_{10} , M_{11} , M_{20} , M_{21} , H_{10} , H_{11} . Стационарное значение полученной функции определяется следующей системой:

$$\begin{aligned} 1) \frac{\partial J}{\partial u_0} &= 0; \quad 2) \frac{\partial J}{\partial u_1} = 0; \quad 3) \frac{\partial J}{\partial \vartheta_0} = 0; \quad 4) \frac{\partial J}{\partial \vartheta_1} = 0; \quad 5) \frac{\partial J}{\partial w_0} = 0; \\ 6) \frac{\partial J}{\partial w_1} &= 0; \quad 7) \frac{\partial J}{\partial T_{10}} = 0; \quad 8) \frac{\partial J}{\partial T_{11}} = 0; \quad 9) \frac{\partial J}{\partial T_{20}} = 0; \quad 10) \frac{\partial J}{\partial T_{21}} = 0; \\ 11) \frac{\partial J}{\partial S_{10}} &= 0; \quad 12) \frac{\partial J}{\partial S_{11}} = 0; \quad 13) \frac{\partial J}{\partial M_{10}} = 0; \quad 14) \frac{\partial J}{\partial M_{11}} = 0; \quad 15) \frac{\partial J}{\partial M_{20}} = 0; \\ 16) \frac{\partial J}{\partial M_{21}} &= 0; \quad 17) \frac{\partial J}{\partial H_{10}} = 0; \quad 18) \frac{\partial J}{\partial H_{11}} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Нетривиальное решение системы линейных алгебраических уравнений (17) восемнадцатого порядка возможно лишь в случае, когда ω_1 – корень ее определителя. Определение ω_1 сводится к трансцендентному уравнению, так как ω_1 входит в аргументы функции Бесселя:

$$\det \|a_{ij}\| = 0, i, j = 1, 18. \quad (18)$$

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Частотное уравнение (18) решено численно при следующих исходных данных: $R = 160$ мм; $E_0 = \tilde{E}_j = \tilde{E}_i = 6,67 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$; $h = 0,45$ мм; $L = 800$ мм; $\rho_0 = \rho_j = \rho_i = 7,8$ г/см³; $F_j = 5,75$ мм²; $I_{xj} = 19,9$ мм⁴; $a_0 = 1430$ м/сек; $I_{kp,j} = 0,48$ мм⁴; $\frac{I_{kp,i}}{2\pi R^3 h} = 0,5305 \cdot 10^{-6}$; $\frac{I_{yi}}{2\pi R^3 h} = 0,8289 \cdot 10^{-6}$; $\frac{F_i}{2\pi R h} = 0,1591 \cdot 10^{-1}$; $\nu = 0,3$.

Рассмотрены два вида законов изменений неоднородности: линейный – $E(z) = E_0 \left[1 + \alpha \left(\frac{z}{h}\right)\right]$ $\rho(z) = \rho_0 \left[1 + \alpha \left(\frac{z}{h}\right)\right]$ и параболический – $E(z) = E_0 \left[1 + \alpha \left(\frac{z}{h}\right)^2\right]$ $\rho(z) = \rho_0 \left[1 + \alpha \left(\frac{z}{h}\right)^2\right]$. Здесь E_0 – модуль Юнга, α – параметр неоднородности. Отметим, что при линейном законе изменение $|\alpha| < 1$, при параболическом изменение α – произвольная.

Результаты счета представлены на рис. 1 и 2. На рис. 1 показаны зависимости параметра частоты ω_1 от относительной скорости потока U^* для различных законов изменений неоднородности по толщине оболочки. Видно, что увеличение скорости приводит к снижению частоты.

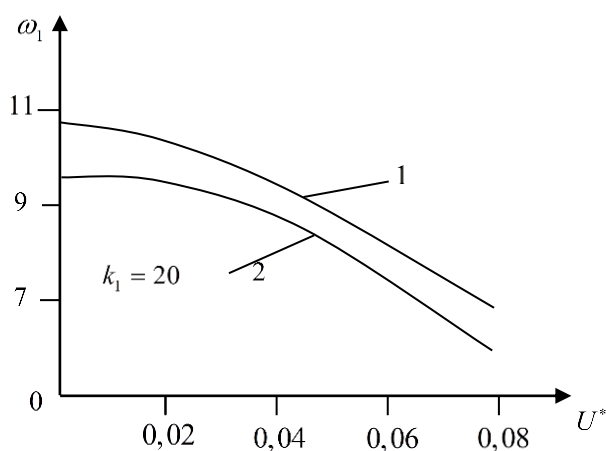


Рис. 1. Зависимость параметра частот колебаний от скорости жидкости: 1 – линейный закон, 2 – параболический закон

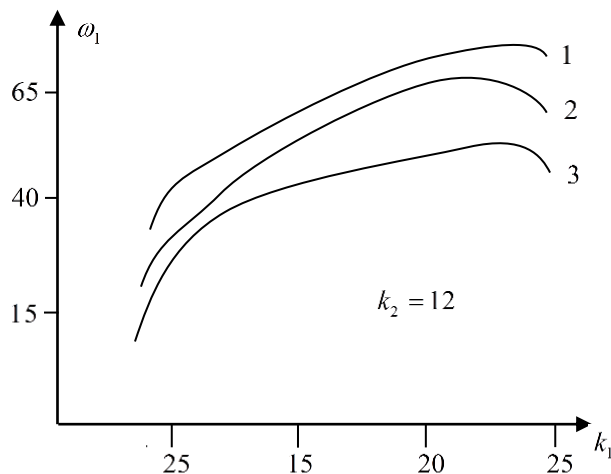


Рис. 2. Зависимость параметра частот от количества продольных ребер: 1 – однородная оболочка, 2 – линейный закон, 3 – параболический закон

Отметим, что $U^* = 0$ соответствует покоящейся жидкости. На рис. 2 иллюстрирует влияние количества продольных ребер k_1 на параметры частоты ω_1 колебаний рассмотренной системы. Видно, что с увеличением k_1 параметры частоты ω_1 колебаний системы сначала увеличиваются, а затем при определенном значении k_1 начинают уменьшаться. Это объясняется тем, что с увеличением k_1 вес стержней увеличивается и это приводит к существенному влиянию их инерционных свойств на процесс колебаний. Сравнения приведенных графиков показывают, что учет неоднородности приводит к снижению значений собственных частот колебаний рассмотренной системы по сравнению собственных частот колебаний этой же системы, когда оболочка однородная.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин В. А. Теория неоднородных тел / В. А. Ломакин. – М. : Изд-во МГУ, 1975. – 355 с.
2. Алиев Ф. Ф. Собственные колебания в бесконечной упругой среде, усиленные перекрестной системой ребер цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью / Ф. Ф. Алиев // Министерство Образования Азербайджанской Республики. Механика и машиностроение. – 2007. – № 2. – С. 10-12.
3. Мустафаев Дж. М. Свободные колебания поперечно подкрепленной цилиндрической оболочки в бесконечной упругой среде с протекающей жидкостью / Дж. М. Мустафаев, Ф. Ф. Алиев // Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук. – 2006. – № 3. – С. 88-94.
4. Пирмамедов И. Т. Параметрические колебания нелинейной и неоднородной по толщине вязкоупругой цилиндрической оболочки при динамическом взаимодействии со средой с учетом трения / И. Т. Пирмамедов // Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук. – 2005. – №1. – С. 82-89.
5. Пирмамедов И. Т. Исследования параметрических колебаний нелинейной и неоднородной по толщине вязкоупругой цилиндрической оболочки с наполнителем с применением модели Пастернака / И. Т. Пирмамедов // Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук. – 2005. – №2. – С. 93-99.
6. Пирмамедов И. Т. Расчет параметрических колебаний неоднородного по толщине вязкоупругого стержня в вязкоупругом грунте / И. Т. Пирмамедов // Международный научно-технический журнал, Объединенный институт машиностроения НАН Белоруси. – 2009. – № 3(8). – С. 52-56.
7. Каиров А. С. Экспериментальное исследование свободных колебаний подкрепленных цилиндрических оболочек с присоединенными твердыми телами / А. С. Каиров, Л. А. Латанская, В. А. Каиров // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2009. – Вип. 13. – С. 107-113.
8. Латифов Ф. С. Асимптотический анализ задачи о свободных неосесимметричных колебаниях в бесконечной упругой среде цилиндрической оболочки, заполненной идеальной жидкостью / Ф. С. Латифов // ДАН Аз. Республики. – 1999. – Т. LV, № 5-6. – С. 8-15.
9. Латифов Ф. С. Колебания оболочек с упругой и жидкой средой / Ф. С. Латифов. – Баку : «Элм», 1999. – 164 с.
10. Амиро И. Я. Теория ребристых оболочек. Методы расчета оболочек / И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий. – К. : Наукова думка, 1980. – 368 с.
11. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1980. – 320 с.

REFERENCES

1. Lomakin, V.A. (1975), *Teoriya neodnorodnykh tel* [The theory of inhomogeneous bodies], Izd-vo MGU, Moscow.
2. Aliev, F.F. (2007), “Natural oscillations in an infinite elastic medium reinforced cross-system edges of a cylindrical shell with a flowing liquid”, *Ministerstvo Obrazovaniya Azerbaydzhanskoy Respubliki, Mekhanika i mashinostroenie*, no. 2, pp. 10-12.
3. Mustafaev, Dzh.M. and Aliev, F.F. (2006), “Free oscillations transversely stiffened cylindrical shell in an infinite elastic medium with a flowing liquid”, *Vestnik Bakinskogo Universiteta, seriya fiziko-matematicheskikh nauk*, no. 3, pp. 88-94.
4. Pirmamedov, I.T. (2005), “Parametric oscillations of nonlinear and non-uniform thickness of viscoelastic cylindrical shell under dynamic interaction with the environment, taking into account the friction”, *Vestnik Bakinskogo Universiteta, seriya fiziko-matematicheskikh nauk*, no. 1, pp. 82-89.
5. Pirmamedov, I.T. (2005), “Research parametric nonlinear vibrations and nonuniform thickness viscoelastic cylindrical shell with a filler with Pasternak model”, *Vestnik Bakinskogo Universiteta, seriya fiziko-matematicheskikh nauk*, no. 2, pp. 93-99.

6. Pirmamedov, I.T. (2009), "Calculation of parametric oscillations of a homogeneous thickness viscoelastic rod in visco elastic ground", *Mezhdunarodnyy nauchno-tekhnicheskyy zhurnal, Ob"edinennyi institut mashinostroeniya NAN Belorusi*, no. 3(8), pp. 52-56.
7. Kairov, A.S., Latanskaya, L.A. and Kairov, V.A. (2009), "Experimental study of free oscillations of cylindrical shells reinforced with attached solids", *Problemy obchyslyval'noyi mekhaniky i mitsnosty konstruksiy*, issue 13, pp. 107-113.
8. Latifov, F.S. (1999), "The asymptotic analysis of the problem of not axisymmetric free vibrations in an infinite elastic medium cylindrical shell filled with an ideal fluid", *DAN Az. Respubliki*, vol. LV, no. 5-6, pp. 8-15.
9. Latifov, F.S. (1999), *Kolebaniya obolochek s uprugoy i zhidkoy sredoy* [Fluctuations shells with elastic and liquid media], Elm, Baku.
10. Amiro, I.Ya. and Zarutskiy, V.A. (1980), *Teoriya rebristykh obolochek. Metody rascheta obolochek* [The theory of ribbed shells. Methods of calculating shells], Naukova dumka, Kiev.
11. Vol'mir, A.S. (1980), *Obolochki v potoke zhidkosti i gaza. Zadachi gidrouprugosti* [Skins in the liquid flow and gas. Tasks hydroelasticity], Nauka, Moscow.

УДК 539.3

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАЗРЫВНОГО РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Левада В. С., к. т. н., доцент, Левицкая Т. И., к. т. н., доцент, Хижняк В. К., к. ф.-м. н., доцент

*Запорожский национальный технический университет,
ул. Жуковского, 64, г. Запорожье, 69063, Украина*

tigr_lev@ukr.net

Опираясь на соотношения, связывающие производные перемещений, как обобщенные функции, с обычными производными, получена система линейных дифференциальных уравнений. В правых частях уравнений содержатся обобщенные функции, зависящие от скачков перемещений и напряжений. Решение системы получено в виде свертки матрицы фундаментальных решений со столбцом правых частей системы.

Ключевые слова: перемещения, напряжение, плоская задача, анизотропия, дефекты, разрывное решение, обобщенная функция, краевая задача.

ИНТЕГРАЛЬНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ РОЗРИВНОГО РОЗВ'ЯЗКА ПЛОСКОЇ ЗАДАЧИ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ АНІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА

Левада В. С., к. т. н., доцент, Левицька Т. І., к. т. н., доцент, Хижняк В. К., к. ф.-м. н., доцент

*Запорізький національний технічний університет,
вул. Жуковського, 64, м. Запоріжжя, 69063, Україна*

tigr_lev@ukr.net

Опираючись на співвідношення, що зв'язують похідні переміщень, як узагальнені функції, зі звичайними похідними, отримана система лінійних диференціальних рівнянь. У правих частинах рівнянь містяться узагальнені функції, що залежать від стрибків переміщень і напружень. Розв'язок системи отримано у вигляді згортки матриці фундаментальних рішень зі стовпцем правих частин системи.

Ключові слова: переміщення, напруга, плоска задача, анизотропія, дефекти, розривний розв'язок, узагальнена функція, крайова задача.

INTEGRAL REPRESENTATIONS OF DISCONTINUOUS SOLUTIONS OF PLANE PROBLEMS OF THEORY OF ELASTICITY FOR AN ANISOTROPIC MEDIUM

Levada V. S., Ph.D. of Technical Science, Associate Professor,
Levitskaya T. I., Ph.D. of Technical Science, Associate Professor,
Khizhnyak V. K., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor

Zaporizhzhya National Technical University,
Zhukovsky str., 64, Zaporozhye, 69063, Ukraine

tigr_lev@ukr.net

The research of stress-strain state of the solid deformable bodies containing defects is an important issue. At the same time the solution of corresponding boundary problems causing serious mathematical difficulties. To solve these problems earlier been proposed generalized method of integral transformations. S. Crouch proposed a method of discontinuous displacements as a variant of the boundary element method (BEM). The corresponding boundary elements for anisotropic media were obtained in [4, 5]. Used in this case the connection between ordinary and generalized derivatives regular generalized functions. This method is used in the present work.

Based on the relations between the derivatives of displacements, as generalized functions with conventional derivatives, obtained a system of linear differential equations. In the right-hand sides of the equations contain generic functions, depending on the jumps of displacements and stresses. The system solution is obtained as of a convolution matrix of fundamental solutions with the column of the right parts of the system. Obtained an integral representation of a discontinuous solution of the plane problem of elasticity theory for an anisotropic medium containing defects (curves on which the discontinuities of the first kind of displacement or stresses). From the found representations integral equations can be obtained, which can be solved by the boundary element.

Key words: displacement, stress, plane problem, anisotropy defects, discontinuous solution, generalized function, the boundary value problem.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование напряженно-деформированного состояния твердых деформируемых тел, содержащих дефекты, является важной проблемой. В то же время решение соответствующих краевых задач вызывает серьезные математические затруднения. Для решения этих задач Г.Я. Поповым был предложен обобщенный метод интегральных преобразований [1]. Этот метод получил развитие в работах Г.А. Мораря [2] и других исследователей. С. Краучем был предложен метод разрывных смещений как вариант метода граничных элементов (МГЭ) [3]. Соответствующие граничные элементы для анизотропных сред были получены в работах [4, 5]. При этом использовалась связь между обычными и обобщенными производными регулярных обобщенных функций. Эта методика применяется и в данной работе.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается следующая задача

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где

$$L_{11} = c_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2c_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad L_{12} = L_{21} = c_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$L_{22} = c_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2c_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

c_{ij} – упругие постоянные, связывающие напряжения и деформации:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$u(x, y)$, $v(x, y)$ – перемещения вдоль осей Ox и Oy , соответственно.

Рассматривается обобщенное плоское напряженное состояние. $(x, y) \in B \subset R^2$, B – ограниченная область, l_0 – кусочно-гладкая граница области B , $l_i = A_i B_i$ ($i = \overline{1, k}$) – гладкие кривые, лежащие в B . На l_0 задаются два граничных условия. Также по два условия задаются на l_i . Кривые l_i моделируют трещины или тонкие включения.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Введем следующие обозначения:

$n^{(0)} = (n_x^{(0)}, n_y^{(0)})$ – единичный внешний нормальный вектор к l_0 ;

$n^{(i)} = (n_x^{(i)}, n_y^{(i)})$ – произвольно направленный единичный внешний нормальный вектор к l_i ($i = \overline{1, k}$).

Если $\gamma \subset B$, то на γ определяется вектор напряжений

$$\sigma_x^n = \sigma_x \cos(n \wedge x) + \tau_{xy} \cos(n \wedge y), \quad \sigma_y^n = \tau_{xy} \cos(n \wedge x) + \sigma_y \cos(n \wedge y),$$

где n – нормальный вектор к γ .

Учитывая (2), получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_x^n(u, v) &= c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n \wedge x) + c_{16} \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n \wedge x) + c_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \cos(n \wedge x) + \\ &+ c_{16} \frac{\partial v}{\partial x} \cos(n \wedge x) + c_{16} \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n \wedge y) + c_{66} \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n \wedge y) + c_{26} \frac{\partial v}{\partial y} \cos(n \wedge y) + c_{66} \frac{\partial v}{\partial x} \cos(n \wedge y); \\ \sigma_y^n(u, v) &= c_{16} \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n \wedge x) + c_{66} \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n \wedge x) + c_{26} \frac{\partial v}{\partial y} \cos(n \wedge x) + \\ &+ c_{66} \frac{\partial v}{\partial x} \cos(n \wedge x) + c_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n \wedge y) + c_{26} \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n \wedge y) + c_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \cos(n \wedge y) + c_{26} \frac{\partial v}{\partial x} \cos(n \wedge y). \end{aligned}$$

Положим $u(x, y) \equiv 0$, $v(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \notin B \cup l_0$. Будем рассматривать u и v как регулярные обобщенные функции. $u \in D'(R^2)$, $v \in D'(R^2)$ [6].

Обозначим: $D^\alpha f(x, y)$ – производная порядка α регулярной обобщенной функции $f(x, y) \in D'(R^2)$; $\{D^\alpha f(x, y)\}$ – обычная производная порядка α функции $f(x, y)$.

Используя связь между $D^\alpha f(x, y)$ и $\{D^\alpha f(x, y)\}$, где $f(x, y) = u(x, y)$ или $f(x, y) = v(x, y)$, получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \right\} + \sum_{i=0}^k [f_i] n_x^{(i)} \delta(l_i); \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \right\} + \sum_{i=0}^k [f_i] n_y^{(i)} \delta(l_i);$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\} + \sum_{i=0}^k \left(\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] n_x^{(i)} \delta(l_i) + \frac{\partial}{\partial x} ([f] n_x^{(i)} \delta(l_i)) \right); \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right\} + \sum_{i=0}^k \left(\left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] n_x^{(i)} \delta(l_i) + \frac{\partial}{\partial x} ([f] n_y^{(i)} \delta(l_i)) \right) = \\ &= \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right\} + \sum_{i=0}^k \left(\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] n_y^{(i)} \delta(l_i) + \frac{\partial}{\partial y} ([f] n_x^{(i)} \delta(l_i)) \right). \end{aligned}$$

Здесь: $[g(x, y)]$ – скачок функции $g(x, y)$ на кривой l_i в направлении нормали $n^{(i)}$; $\delta(l_i)$ – дельта-функция, сосредоточенная на l_i ($i = \overline{0, k}$).

Учитывая (4), получаем:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} g_1 &= \sum_{i=0}^k \left(\left(c_{11} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] n_x^{(i)} + c_{16} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right] n_x^{(i)} + c_{16} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] n_y^{(i)} + c_{66} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right] n_y^{(i)} + \right. \\ &+ c_{16} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right] n_x^{(i)} + c_{12} \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right] n_x^{(i)} + c_{66} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right] n_y^{(i)} + c_{26} \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right] n_y^{(i)} \left. \right) \delta(l_i) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left((c_{11} [u] n_x^{(i)} + c_{16} [u] n_y^{(i)} + c_{16} [v] n_x^{(i)} + c_{12} [v] n_y^{(i)}) \delta(l_i) \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left((c_{16} [u] n_x^{(i)} + c_{66} [u] n_y^{(i)} + c_{66} [v] n_x^{(i)} + c_{26} [v] n_y^{(i)}) \delta(l_i) \right); \\ g_2 &= \sum_{i=0}^k \left(\left(c_{16} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] n_x^{(i)} + c_{12} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right] n_x^{(i)} + c_{66} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] n_y^{(i)} + c_{26} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right] n_y^{(i)} + \right. \\ &+ c_{66} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right] n_x^{(i)} + c_{26} \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right] n_x^{(i)} + c_{26} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right] n_y^{(i)} + c_{22} \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right] n_y^{(i)} \left. \right) \delta(l_i) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left((c_{16} [u] n_x^{(i)} + c_{12} [u] n_y^{(i)} + c_{66} [v] n_x^{(i)} + c_{26} [v] n_y^{(i)}) \delta(l_i) \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left((c_{66} [u] n_x^{(i)} + c_{26} [u] n_y^{(i)} + c_{26} [v] n_x^{(i)} + c_{22} [v] n_y^{(i)}) \delta(l_i) \right). \end{aligned}$$

Учитывая (3), получаем:

$$\begin{aligned} g_1 &= \sum_{i=0}^k \left(\left[\sigma_x^{n^{(i)}}(u, v) \right] \delta(l_i) + \frac{\partial}{\partial x} \left((c_{11} [u] n_x^{(i)} + c_{16} [u] n_y^{(i)} + c_{16} [v] n_x^{(i)} + \right. \right. \\ &+ c_{12} [v] n_y^{(i)}) \delta(l_i) \left. \left. \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((c_{16} [u] n_x^{(i)} + c_{66} [u] n_y^{(i)} + c_{66} [v] n_x^{(i)} + c_{26} [v] n_y^{(i)}) \delta(l_i) \right) \right); \\ g_2 &= \sum_{i=0}^k \left(\left[\sigma_y^{n^{(i)}}(u, v) \right] \delta(l_i) + \frac{\partial}{\partial x} \left((c_{16} [u] n_x^{(i)} + c_{66} [u] n_y^{(i)} + c_{66} [v] n_x^{(i)} + \right. \right. \\ &+ c_{26} [v] n_y^{(i)}) \delta(l_i) \left. \left. \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((c_{12} [u] n_x^{(i)} + c_{26} [u] n_y^{(i)} + c_{26} [v] n_x^{(i)} + c_{22} [v] n_y^{(i)}) \delta(l_i) \right) \right). \end{aligned}$$

$$+ c_{26} [v] n_y^{(i)} \delta(l_i) + \frac{\partial}{\partial y} \left((c_{12} [u] n_x^{(i)} + c_{26} [u] n_y^{(i)} + c_{26} [v] n_x^{(i)} + c_{22} [v] n_y^{(i)}) \delta(l_i) \right).$$

Решение (5) получаем сверткой матрицы фундаментальных решений $\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}$ с матрицей

$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$. Матрица $\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}$ – решение уравнения

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \delta(x) \delta(y), \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}(x, y) & \Gamma_{12}(x, y) \\ \Gamma_{21}(x, y) & \Gamma_{22}(x, y) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Выполнив (7), с учетом (3), получаем:

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \sum_{i=0}^k \left(\int_{l_i} [\sigma_{\xi}^{n_i}(u, v)]_{(\xi, \eta)} \Gamma_{11}(x - \xi, y - \eta) ds_{(\xi, \eta)} + \right. \\ & \left. + \int_{l_i} [\sigma_{\eta}^{n_i}(u, v)]_{(\xi, \eta)} \Gamma_{12}(x - \xi, y - \eta) ds_{(\xi, \eta)} - \right. \\ & \left. - \int_{l_i} [u]_{(\xi, \eta)} \sigma_{\xi}^{n_i}(u, v)(\Gamma_{11}(x - \xi, y - \eta), \Gamma_{21}(x - \xi, y - \eta)) ds_{(\xi, \eta)} - \right. \\ & \left. - \int_{l_i} [v]_{(\xi, \eta)} \sigma_{\eta}^{n_i}(u, v)(\Gamma_{11}(x - \xi, y - \eta), \Gamma_{21}(x - \xi, y - \eta)) ds_{(\xi, \eta)} \right); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} v(x, y) = & \sum_{i=0}^k \left(\int_{l_i} [\sigma_{\xi}^{n_i}(u, v)]_{(\xi, \eta)} \Gamma_{21}(x - \xi, y - \eta) ds_{(\xi, \eta)} + \right. \\ & \left. + \int_{l_i} [\sigma_{\eta}^{n_i}(u, v)]_{(\xi, \eta)} \Gamma_{22}(x - \xi, y - \eta) ds_{(\xi, \eta)} - \right. \\ & \left. - \int_{l_i} [u]_{(\xi, \eta)} \sigma_{\xi}^{n_i}(u, v)(\Gamma_{12}(x - \xi, y - \eta), \Gamma_{22}(x - \xi, y - \eta)) ds_{(\xi, \eta)} - \right. \\ & \left. - \int_{l_i} [v]_{(\xi, \eta)} \sigma_{\eta}^{n_i}(u, v)(\Gamma_{21}(x - \xi, y - \eta), \Gamma_{22}(x - \xi, y - \eta)) ds_{(\xi, \eta)} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Вид матрицы $\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}$ зависит от вида корней алгебраического уравнения [7]

$$\begin{aligned} \mu^4 (c_{11} c_{66} - c_{16}^2) + 2\mu^3 (c_{11} c_{26} - c_{16} c_{12}) + \mu^2 (c_{11} c_{22} + 2c_{16} c_{26} - \\ - c_{12}^2 - 2c_{12} c_{66}) + 2\mu (c_{16} c_{22} - c_{12} c_{26}) + c_{66} c_{22} - c_{26}^2 = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение (10) может иметь следующие варианты корней:

$$1) \mu_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1, \quad \mu_{3,4} = \alpha_2 \pm i\beta_2;$$

$$2) \mu_{1,2} = \alpha + i\beta, \quad \mu_{3,4} = \alpha - i\beta; \quad \beta_1, \beta_2, \beta > 0, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha \in R.$$

Для первого варианта корней:

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{2\pi\beta_1\beta_2 D_1} (\beta_2 H_1(\varphi - \tilde{\varphi}) + \beta_2 H_2 \ln r_1 + \beta_1 \tilde{H}_2 \ln \tilde{r}_1);$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \frac{1}{2\pi\beta_1\beta_2D_1}(\beta_2H_3(\varphi - \tilde{\varphi}) + \beta_2H_4 \ln r_1 + \beta_1\tilde{H}_4 \ln \tilde{r}_1);$$

$$\Gamma_{22} = \frac{1}{2\pi\beta_1\beta_2D_1}(\beta_2H_5(\varphi - \tilde{\varphi}) + \beta_2H_6 \ln r_1 + \beta_1\tilde{H}_6 \ln \tilde{r}_1),$$

где

$$r_1(x, y) = (x^2(\alpha_1^2 + \beta_1^2) + 2\alpha_1xy + y^2)^{1/2},$$

$$\varphi(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x\beta_1} + \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right),$$

$$D_1 = (c_{11}c_{66} - c_{16}^2)(\beta_1^4 + \beta_2^4 + \alpha_1^4 + \alpha_2^4 + 6\alpha_1^2\alpha_2^2 - 2\beta_1^2\beta_2^2 + 2\beta_1^2\alpha_1^2 + 2\beta_1^2\alpha_2^2 - 4\beta_1^2\alpha_1\alpha_2 + 2\beta_2^2\alpha_1^2 + 2\beta_2^2\alpha_2^2 - 4\beta_2^2\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_1^3\alpha_2 - 4\alpha_1\alpha_2^3);$$

$$H_1 = 2c_{66}p_1 - 2c_{26}p_2 - 2c_{22}p_3; \quad H_2 = c_{66}p_4 + 2c_{26}p_5 - c_{22}p_6;$$

$$H_3 = -2c_{16}p_1 + (c_{12} + c_{66})p_2 + 2c_{26}p_3; \quad H_4 = -c_{16}p_4 - (c_{12} + c_{66})p_5 + c_{26}p_6;$$

$$H_5 = 2c_{11}p_1 - 2c_{16}p_2 - 2c_{66}p_3; \quad H_6 = c_{11}p_4 + 2c_{16}p_5 - c_{66}p_6;$$

$$p_1 = -\beta_1^3\alpha_2 - \beta_1\alpha_1^2\alpha_2 + \beta_1\beta_2^2\alpha_1 + \beta_1\alpha_1\alpha_2^2; \quad p_2 = \beta_1^3 - \beta_1\beta_2^2 + \beta_1\alpha_1^2 - \beta_1\alpha_2^2;$$

$$p_3 = \beta_1(\alpha_1 - \alpha_2); \quad p_4 = \beta_1^4 - \beta_1^2\beta_2^2 + 2\beta_1^2\alpha_1^2 - \beta_1^2\alpha_2^2 - 2\beta_1^2\alpha_1\alpha_2 + \beta_2^2\alpha_1^2 + \alpha_1^4 + \alpha_1^2\alpha_2^2 - 2\alpha_1^3\alpha_2;$$

$$p_5 = \beta_1^2\alpha_1 - 2\beta_1^2\alpha_2 + \beta_2^2\alpha_1 + \alpha_1^3 + \alpha_1\alpha_2^2 - 2\alpha_1^2\alpha_2; \quad p_6 = \beta_1^2 - \beta_2^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2;$$

$$\tilde{f}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = f(\alpha_2, \alpha_1, \beta_2, \beta_1).$$

Для второго варианта корней:

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{4\pi D_2}\left(K_1 \ln r - \frac{m_{23}}{r^2}\right);$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \frac{1}{4\pi D_2}\left(K_4 \ln r - \frac{m_{56}}{r^2}\right);$$

$$\Gamma_{22} = \frac{1}{4\pi D_2}\left(K_7 \ln r - \frac{m_{89}}{r^2}\right),$$

где

$$r(x, y) = (x^2(\alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha xy + y^2)^{1/2}, \quad m_{ij} = (K_j\alpha - K_i\beta)x^2 + K_jxy;$$

$$D_2 = \beta^3(c_{11}c_{66} - c_{16}^2);$$

$$K_1 = c_{66}(\beta^2 + \alpha^2) + 2c_{26}\alpha + c_{22}; \quad K_2 = c_{66}(\beta^3 - \beta\alpha^2) - 2c_{26}\beta\alpha - c_{22}\beta;$$

$$K_3 = -2c_{66}\beta^2\alpha - 2c_{26}\beta^2; \quad K_4 = -c_{16}(\beta^2 + \alpha^2) - (c_{12} + c_{66})\alpha - c_{26};$$

$$K_5 = c_{16}(\beta\alpha^2 - \beta^3) + (c_{12} + c_{66})\alpha\beta + c_{26}\beta; \quad K_6 = 2c_{16}\beta^2\alpha + (c_{12} + c_{66})\beta^2;$$

$$K_7 = c_{11}(\beta^2 + \alpha^2) + 2c_{16}\alpha + c_{66}; \quad K_8 = c_{66}(\beta^3 - \alpha^2\beta) - 2c_{16}\alpha\beta - c_{66}\beta;$$

$$K_9 = -2c_{11}\alpha\beta^2 - 2c_{16}\beta^2.$$

Устремляя в (8, 9) точку (x, y) к l_i ($i = \overline{0, k}$) и учитывая заданные условия на l_i , получаем сильно сингулярную систему граничных интегральных уравнений, которую можно решать МГЭ.

ВЫВОДЫ

Получено интегральное представление разрывного решения плоской задачи теории упругости для анизотропной среды, содержащей дефекты (кривые, на которых терпят разрывы первого рода перемещения или напряжения). Полученное представление позволяет свести краевую задачу к системе интегральных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М. : Наука, 1982. – 344 с.
2. Морарь Г. А. Метод разрывных решений в механике деформируемых тел / Г. А. Морарь. – Кишинев : Штинца, 1990. – 130 с.
3. Крауч С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд. – М. : Мир, 1987. – 326 с.
4. Левада В. С. О разрывных решениях в теории анизотропных пластин / В. С. Левада, В. К. Хижняк // Прикладная механика. – 1997. – Т. 33, № 8. – С. 89-91.
5. Левада В. С. О концевом граничном элементе трещины в плоской задаче теории упругости для анизотропных сред (случай разных корней) / В. С. Левада, П. В. Цокотун // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2004. – № 2. – С. 99-102.
6. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 280 с.
7. Левада В. С. Построение матрицы фундаментальных решений для анизотропной упругой плоскости / В. С. Левада. – Запорожье, 1996. – 13 с. – Рукопись. Деп. в ГНТБ Украины №475–Ук96.

REFERENCES

1. Popov, G.Ya. (1982), *Kontsentratsiya uprugih napryazheniy vozle shtampov, razrezov, tonkih vklyucheniy i podkreplenyi* [The elastic stress concentration near the cliches, incisions, thin inclusions and reinforcements], Nauka, Moscow, Russia.
2. Morar, G.A. (1990), *Metod razryivnyih resheniy v mehanike deformiruemyih tel* [The method of discontinuous solutions in the mechanics of deformable bodies], Shtiintsa, Kishinev, Moldova.
3. Crouch, S. and Starfield, A. (1987), *Metody granichnyih elementov v mehanike tverdogo tela* [Boundary element methods in solid mechanics], Mir, Moscow, Russia.
4. Levada, V.S., Khizhnyak, V. K. (1997), “On discontinuous solutions in the theory of anisotropic plates”, *Prikladnaya mekhanika*, vol. 33, no. 8, pp. 89-91.
5. Levada, V.S. and Tsokotun, P.V. (2004) “About the end-capping border element of crack in the flat task of theory of resiliency for anisotropic environments (case of different roots)”, *Novi materialy i tehnologiyi v metalurgiyi ta mashinobuduvanni*, no. 2, pp. 99-102.
6. Vladimirov, V.S. (1976), *Obobshchennyye funktsii v matematicheskoy fizike* [Generalized functions in mathematical physics], Nauka, Moscow, Russia.
7. Levada, V.S. (1996), *Postroenie matritsyi fundamentalnyih resheniy dlya anizotropnoy uprugoy ploskosti* [Construction of a matrix of fundamental solutions for anisotropic elastic plane], Manuscript. Dep. in the GNTB, no. 475, Zaporozhye, Ukraine.

УДК 519.6

ПОБУДОВА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО ПОЛІНОМА 5-ГО СТЕПЕНЯ НА ДОВІЛЬНОМУ ТРИКУТНИКУ З ВИКОРИСТАННЯМ БАЗИСНИХ ПОЛІНОМІВ НА «ОДИНИЧНОМУ» ТРИКУТНИКУ

Литвин О. М., Коваленко Г. В., Денисова О. І.

Українська інженерно-педагогічна академія,
вул. Університетська, 16, м. Харків, 61000, Україна

academ_mail@ukr.net, vmkovalenko@ukr.net

У статті розглядається побудова інтерполяційного полінома Зламала-Женішека 5-го степеня на довільному трикутнику. Запропонована нами схема побудови інтерполяційного полінома базується на використанні базисних поліномів на «одичному» трикутнику (з вершинами в точках $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$). Базисні поліноми на довільному трикутнику визначаються як композиція базисних поліномів на «одичному» трикутнику та лінійних функцій, які задають афінне перетворення площини, що переводить довільний трикутник в «одичний». Знайдено формули для обчислення коефіцієнтів лінійної комбінації базисних поліномів на довільному трикутнику, при яких вона задає інтерполяційний поліном 5-го степеня на відповідному трикутнику.

Ключові слова: інтерполяційний поліном Зламала-Женішека 5-го степеня, базисні поліноми, довільний трикутник, «одичний» трикутник, афінне перетворення.

ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПОЛИНОМА 5-ОЙ СТЕПЕНИ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БАЗИСНЫХ ПОЛИНОМОВ НА «ЕДИНИЧНОМ» ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Литвин О. Н., Коваленко А. В., Денисова О. И.

Украинская инженерно-педагогическая академия,
ул. Университетская, 16, г. Харьков, 61000, Украина

academ_mail@ukr.net, vmkovalenko@ukr.net

В статье рассматривается построение интерполяционного полинома Зламала-Женишека 5-ой степени на произвольном треугольнике. Предложенная нами схема построения интерполяционного полинома базируется на использовании базисных полиномов на «единичном» треугольнике (с вершинами в точках $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$). Базисные полиномы на произвольном треугольнике определяются как композиция базисных полиномов на «единичном» треугольнике и линейных функций, которые задают аффинное преобразование плоскости, переводящее произвольный треугольник в «единичный». Найденны формулы для вычисления коэффициентов линейной комбинации базисных полиномов на произвольном треугольнике, при которых она задаёт интерполяционный полином 5-ой степени на соответствующем треугольнике.

Ключевые слова: интерполяционный полином Зламала-Женишека 5-ой степени, базисные полиномы, произвольный треугольник, «единичный» треугольник, аффинное преобразование.

CONSTRUCTION OF INTERPOLATING POLYNOMIAL OF THE 5TH DEGREE ON ARBITRARY TRIANGLE BY USING BASIS POLYNOMIALS ON THE “UNIT” TRIANGLE

Litvin O. M., Kovalenko G. V., Denisova O. I.

Ukrainian Engineer-pedagogical academy,
Universitetskaya str., 16, Kharkov, 61000, Ukraine

academ_mail@ukr.net, vmkovalenko@ukr.net

In this article, we consider the construction of the interpolating polynomial of Zlamal-Zenisek 5th degree on an arbitrary triangle. The proposed scheme for the construction of the interpolating polynomial is based on the use of the basis polynomials on the “unit” triangle (with vertices $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$). We obtain explicit formulas for all twenty-one basis polynomials. To find these basic polynomials we assume known values of interpolated function and its partial derivatives up to second order in all the vertices of the triangle, and the values of the derivatives in the direction normal to the inner sides of the triangle, calculated in the middle of the sides. Constructed basic polynomials have certain interpolation properties that allows you to record the interpolation polynomial in the form of a linear combination of basis polynomials that their coefficients are exactly equal or function values, or the values of its partial derivatives up to second order in the vertices of a triangle, or the value of the

derivative in the direction of the inward normal to the sides of the triangle, calculated in the middle of the sides.

Basic polynomials on an arbitrary triangle is defined as the composite function of the basis polynomials on “unit” triangle, and linear functions, which define an affine transformation that maps an arbitrary triangle into the “unit” triangle. But coefficients in the expression for the interpolating polynomial will not be exactly equal to the values of the interpolated function and certain of its derivatives. We introduce into consideration an auxiliary operator of interpolation $Sf(x, y)$ for calculating part of these coefficients. This operator is defined as a linear combination of basis polynomials obtained on the basis of 18 basis polynomials for “unit” triangle, which stand at the values of the interpolated function and its partial derivatives. We have obtained expressions for the coefficients of the operator $Sf(x, y)$ at which it satisfies the interpolation conditions: its value and value of its partial derivatives (up to the second order) at the vertices triangle are equal to the corresponding values of the interpolated function and its derivatives. Our main result is the construction of the operator of interpolation $Of(x, y)$, which equal to the sum of operator $Sf(x, y)$ and a linear combination of 3 basis polynomials obtained using basis polynomials for the “unit” triangle. These basis polynomials arranged at the values of the normal derivative of the interpolated function. It is shown that the operator $Of(x, y)$ has all the interpolation properties of the operator $Sf(x, y)$ regardless of the coefficients at the basis polynomials in the difference $Of(x, y) - Sf(x, y)$. We have obtained expressions for these coefficients, at which operator has the interpolation property: value of its derivatives with respect to the direction normal to the inner sides of the triangle, calculated in the middle of the sides are equal to the corresponding derivatives of the interpolated function.

Key words: interpolating polynomial of Zlamal-Zenisek 5th degree, basis polynomials, arbitrary triangle, “unit” triangle, affine transformation.

ВСТУП

Останнім часом постійно збільшується кількість праць, присвячених побудові та дослідженню апроксимаційних властивостей інтерполяційних поліномів ермітового типу для функцій двох змінних на трикутнику. Таке підвищення інтересу до цих об'єктів зумовлено їх зручністю та ефективністю при розв'язуванні прикладних задач, пов'язаних з наближенням функцій. Важливим фактором при цьому є бурхливий розвиток обчислювальної техніки та пакетів прикладних програм, що дозволяє суттєво зменшити час на виконання обчислень при реалізації алгоритмів побудови інтерполяційних поліномів.

Одними з перших ґрунтовних праць, у яких розвивалася теорія побудови інтерполяційних многочленів на трикутнику, є роботи Зламала і Женішека [1-4]. Ідеї, викладені в цих працях, дістали подальшого розвитку та поглиблення в роботах [5-8].

Зокрема, у роботі [6] запропоновано метод побудови інтерполяційного многочлена 5-го степеня на довільному трикутнику \bar{T}_{ijk} з вершинами A_1, A_2, A_3 . Одним з основних результатів цієї роботи є наступна теорема.

Теорема [6]. Для кожної функції $f(x, y) \in C^2(\bar{T}_{ijk})$ оператор

$$S_5 f(x, y) = w(x, y) + \sum_{(i,j) \in Q} \left[\frac{\partial f}{\partial v_{ij}} - \frac{\partial w}{\partial v_{ij}} \right]_{M_{ij}} H_{ij}(x, y), \quad w(x, y) = \sum_{i=1}^3 \sum_{0 \leq |\beta| \leq 2} D^\beta f(A_i) h_{i\beta}(x, y)$$

визначає поліном 5-го степеня з властивостями

$$D^\alpha S_5 f|_{A_p} = D^\alpha f|_{A_p}, \quad p \in \{1, 2, 3\}, \quad 0 \leq |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \leq 2, \quad \frac{\partial S_5 f}{\partial v_{ij}} \Big|_{M_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial v_{ij}} \Big|_{M_{ij}}, \quad (i, j) \in Q,$$

де v_{ij} – одиничний вектор внутрішньої нормалі сторони $A_i A_j$ трикутника; M_{ij} – середина

сторони $A_i A_j$; $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$.

Функції $h_{i\beta}(x, y)$, $i = \overline{1,3}$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, $0 \leq \beta_1 + \beta_2 \leq 2$, $H_{ij}(x, y), (i, j) \in Q = \{(1,2), (2,3), (3,1)\}$ – базисні поліноми, які задовольняють інтерполяційні умови:

$$1) D^\alpha h_{k\beta} \Big|_{A_\ell} = \delta_{k,\ell} \delta_{\alpha,\beta}; \ell, k \in \{1,2,3\}, \delta_{\alpha,\beta} = \delta_{\alpha_1,\beta_1} \delta_{\alpha_2,\beta_2}, \text{ де } \delta_{i,j} \text{ – символ Кронекера;}$$

$$2) D^\alpha H_{ij} \Big|_{A_k} = 0, 0 \leq |\alpha| \leq 2, k \in \{1,2,3\}, k \neq i, j;$$

$$3) \frac{\partial H_{ij}}{\partial v_{ij}} \Big|_{M_{ij}} = 1, \frac{\partial H_{ij}}{\partial v_{ij}} \Big|_{M_{mn}} = 0, (i, j) \neq (m, n); (i, j), (m, n) \in Q.$$

Також було наведено явні вирази для базисних функцій $h_{i\beta}(x, y)$ та $H_{ij}(x, y)$ для «одичного» трикутника з вершинами $X_1(0,0)$, $X_2(1,0)$, $X_3(0,1)$.

У цій роботі було зазначено, що оператор інтерполяції $S_5 f(x, y)$ можна використовувати також в іншій формі

$$S_5 f(x, y) = \sum_{k=1}^3 \sum_{0 \leq |\beta| \leq 2} D^\beta f(A_k) \left(h_{k\beta}(x, y) - \sum_{(i,j) \in Q} \frac{\partial h_{k\beta}}{\partial v_{ij}}(x_{ij}, y_{ij}) H_{ij}(x, y) \right) + \sum_{(i,j) \in Q} \frac{\partial f}{\partial v_{ij}}(x_{ij}, y_{ij}) H_{ij}(x, y).$$

Перевагою цього представлення оператора є те, що при функціях

$$v_{k\beta}(x, y) = h_{k\beta}(x, y) - \sum_{(i,j) \in Q} \frac{\partial h_{k\beta}}{\partial v_{ij}}(x_{ij}, y_{ij}) H_{ij}(x, y) \text{ та } V_{ij}(x, y) = H_{ij}(x, y) \quad (1)$$

знаходяться значення функції, її частинних похідних у вершинах трикутника та похідних за внутрішньою нормаллю до сторін трикутника.

Використовуючи результати роботи [6], можна будувати явні вирази для базисних поліномів 5-го степеня на довільному трикутнику. Проте ці побудови потребують великої кількості обчислень і, як наслідок, значних затрат часу навіть при використанні обчислювальної техніки. З точки зору економії кількості операцій для побудови базисних поліномів на довільному трикутнику ефективними є ідеї роботи [5], у якій запропоновано метод побудови кубічних інтерполяційних поліномів Зламала-Женішека на довільному трикутнику, заснований на використанні базисних поліномів 3-го степеня на «одичному» трикутнику. Нам не відома жодна робота, у якій ця ідея була б реалізована для інтерполяційних поліномів Зламала-Женішека 5-го степеня. Отже, актуальною є **проблема** побудови інтерполяційних поліномів Зламала-Женішека 5-го степеня на довільному трикутнику з використанням базисних поліномів на «одичному» трикутнику.

Метою нашої роботи є побудова інтерполяційного многочлена 5-го степеня на довільному трикутнику $\triangle A_1 A_2 A_3$ з використанням базисних поліномів $v_{k\beta}(x, y)$ та $V_{ij}(x, y)$ на «одичному» трикутнику.

ВИКЛАД ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Використовуючи формули (1) та результати роботи [6], у якій наведено явні формули для функцій $h_{k\beta}(x, y)$, $H_{ij}(x, y)$, можна отримати явні вирази для всіх базисних функцій $v_{k\beta}(x, y)$ та $V_{ij}(x, y)$ для «одичного» трикутника. Наведемо деякі з них:

$$v_{120}(x, y) = \frac{3}{2}x^2y(x+y-1)^2 - \frac{1}{2}x^2(x+y-1)^3, \quad v_{302}(x, y) = \frac{1}{2}y^3(y-1)^2 - \frac{1}{4}x^2y^2(x+y-1),$$

$$V_{12}(x, y) = 16x^2y(x+y-1)^2, \quad V_{23}(x, y) = -8\sqrt{2}x^2y^2(x+y-1), \quad V_{31}(x, y) = 16xy^2(x+y-1)^2.$$

За допомогою безпосередніх обчислень можна переконатися, що ці функції володіють такими інтерполяційними властивостями: $D^{\beta_1, \beta_2} v_{kpq}(x, y)|_{X_l} = \delta_{k,l} \delta_{(\beta_1, \beta_2), (p, q)}$,

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial v_{ij}} \Big|_{M_{ij}} = 1, \quad \frac{\partial V_{ij}}{\partial v_{ij}} \Big|_{M_{mn}} = 0, \quad (m, n) \neq (i, j) \quad (M_{ij} - \text{середина сторони } X_i X_j),$$

$$D^{\beta_1, \beta_2} V_{ij}(x, y)|_{X_l} = 0, \quad \forall l = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq \beta_1 + \beta_2 \leq 2, \quad (i, j) \in Q = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}.$$

Метод, запропонований у роботі [5], базується на використанні афінного перетворення, яке відображає довільний заданий трикутник в «одиничний».

Афінне перетворення σ , яке відображає довільний трикутник $\Delta A_1 A_2 A_3$ в «одиничний» трикутник $\Delta X_1 X_2 X_3$ (причому $\sigma(A_l) = X_l$, $l = \overline{1, 3}$), задається відповідно:

$$\begin{cases} x' = g_1(x, y) = ax + by + c, \\ y' = g_2(x, y) = dx + ey + f, \end{cases}$$

де

$$a = -\frac{y_1 - y_3}{\Delta}, \quad b = \frac{x_1 - x_3}{\Delta}, \quad c = -\frac{x_1 y_3 - x_3 y_1}{\Delta}, \quad d = \frac{y_1 - y_2}{\Delta},$$

$$e = -\frac{x_1 - x_2}{\Delta}, \quad f = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\Delta}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розглянемо функції $w_{kpq}(x, y) = v_{kpq}(g_1(x, y), g_2(x, y))$, $k = \overline{1, 3}$, $p, q \in \{0, 1, 2\}$, $0 \leq p + q \leq 2$.

Теорема 1. Для довільних $k, l \in \overline{1, 3}$ функція $w_{kpq}(x, y)$ задовольняє умови:

$$1) \quad w_{k00}(A_l) = \delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases} \quad (2)$$

$$2) \quad D^{1,0} w_{kpq}(x, y)|_{A_l} = \delta_{k,l} \delta_{(1,0), (p,q)} a + \delta_{k,l} \delta_{(0,1), (p,q)} d = \begin{cases} a, & \text{якщо } k = l, (p, q) = (1, 0), \\ d, & \text{якщо } k = l, (p, q) = (0, 1), \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (3)$$

$$3) \quad D^{0,1} w_{kpq}(x, y)|_{A_l} = \delta_{k,l} \delta_{(1,0), (p,q)} b + \delta_{k,l} \delta_{(0,1), (p,q)} e = \begin{cases} b, & \text{якщо } k = l, (p, q) = (1, 0), \\ e, & \text{якщо } k = l, (p, q) = (0, 1), \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (4)$$

$$4) \quad D^{2,0} w_{kpq}(x, y)|_{A_l} = \delta_{k,l} \delta_{(2,0), (p,q)} a^2 + \delta_{k,l} \delta_{(1,1), (p,q)} 2ad + \delta_{k,l} \delta_{(0,2), (p,q)} d^2 = \quad (5)$$

$$= \begin{cases} a^2, \text{ якщо } k = l, (p, q) = (2, 0), \\ 2ad, \text{ якщо } k = l, (p, q) = (1, 1), \\ d^2, \text{ якщо } k = l, (p, q) = (0, 2), \\ 0, \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

$$5) \quad D^{1,1}w_{kpq}(x, y)|_{A_l} = \delta_{k,l}\delta_{(2,0),(p,q)}ab + \delta_{k,l}\delta_{(1,1),(p,q)}(ae + bd) + \delta_{k,l}\delta_{(0,2),(p,q)}de = \quad (6)$$

$$= \begin{cases} ab, \text{ якщо } k = l, (p, q) = (2, 0), \\ ae + bd, \text{ якщо } k = l, (p, q) = (1, 1), \\ de, \text{ якщо } k = l, (p, q) = (0, 2), \\ 0, \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

$$6) \quad D^{0,2}w_{kpq}(x, y)|_{A_l} = \delta_{k,l}\delta_{(2,0),(p,q)}b^2 + \delta_{k,l}\delta_{(1,1),(p,q)}2be + \delta_{k,l}\delta_{(0,2),(p,q)}e^2 = \quad (7)$$

$$= \begin{cases} b^2, \text{ якщо } k = l, (p, q) = (2, 0), \\ 2be, \text{ якщо } k = l, (p, q) = (1, 1), \\ e^2, \text{ якщо } k = l, (p, q) = (0, 2), \\ 0, \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

Доведення. 1) З означення функцій $w_{kpq}(x, y)$, властивостей афінного перетворення σ та інтерполяційних властивостей базисних функцій $v_{kpq}(x, y)$ випливають рівності:

$$w_{k00}(A_l) = v_{k00}(g_1(A_l), g_2(A_l)) = v_{k00}(X_l) = \delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$$

2) За правилами диференціювання складної функції маємо:

$$\begin{aligned} D^{1,0}w_{kpq}(x, y) &= D^{1,0}v_{kpq}(g_1(x, y), g_2(x, y))D^{1,0}g_1(x, y) + D^{0,1}v_{kpq}(g_1(x, y), g_2(x, y))D^{1,0}g_2(x, y) = \\ &= D^{1,0}v_{kpq}(g_1(x, y), g_2(x, y))a + D^{0,1}v_{kpq}(g_1(x, y), g_2(x, y))d. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} D^{1,0}w_{kpq}(x, y)|_{A_l} &= D^{1,0}v_{kpq}(g_1(x, y), g_2(x, y))|_{A_l} a + D^{0,1}v_{kpq}(g_1(x, y), g_2(x, y))|_{A_l} d = \\ &= D^{1,0}v_{kpq}(x, y)|_{X_l} a + D^{0,1}v_{kpq}(x, y)|_{X_l} d = \delta_{k,l}\delta_{(1,0),(p,q)}a + \delta_{k,l}\delta_{(0,1),(p,q)}d = \\ &= \begin{cases} a, \text{ якщо } k = l, (p, q) = (1, 0), \\ d, \text{ якщо } k = l, (p, q) = (0, 1), \\ 0, \text{ в інших випадках.} \end{cases} \end{aligned}$$

Так само доводиться властивість 3.

$$\begin{aligned} 4) \quad D^{2,0}w_{kpq}(x, y) &= D^{1,0}(D^{1,0}w_{kpq}(x, y)) = D^{1,0}(D^{1,0}v_{kpq}(g_1(x, y), g_2(x, y))D^{1,0}g_1(x, y) + \\ &+ D^{0,1}v_{kpq}(g_1(x, y), g_2(x, y))D^{1,0}g_2(x, y)) = D^{1,0}(D^{1,0}v_{kpq}(g_1(x, y), g_2(x, y))a + \\ &+ D^{0,1}v_{kpq}(g_1(x, y), g_2(x, y))d) = (D^{2,0}v_{kpq}(g_1(x, y), g_2(x, y))D^{1,0}g_1(x, y) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + D^{1,1}v_{kpq}(g_1(x, y), g_2(x, y))D^{1,0}g_2(x, y)a + (D^{1,1}v_{kpq}(g_1(x, y), g_2(x, y))D^{1,0}g_1(x, y) + \\
& + D^{0,2}v_{kpq}(g_1(x, y), g_2(x, y))D^{1,0}g_2(x, y))d = D^{2,0}v_{kpq}(g_1(x, y), g_2(x, y))a^2 + \\
& + D^{1,1}v_{kpq}(g_1(x, y), g_2(x, y))2ad + D^{0,2}v_{kpq}(g_1(x, y), g_2(x, y))d^2.
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
D^{2,0}w_{kpq}(x, y)|_{A_l} & = D^{2,0}v_{kpq}(g_1(x, y), g_2(x, y))|_{A_l} a^2 + D^{1,1}v_{kpq}(g_1(x, y), g_2(x, y))|_{A_l} 2ad + \\
+ D^{0,2}v_{kpq}(g_1(x, y), g_2(x, y))|_{A_l} d^2 & = D^{2,0}v_{kpq}(x, y)|_{X_l} a^2 + D^{1,1}v_{kpq}(x, y)|_{X_l} 2ad + D^{0,2}v_{kpq}(x, y)|_{X_l} d^2 = \\
\delta_{k,l}\delta_{(2,0),(p,q)}a^2 + \delta_{k,l}\delta_{(1,1),(p,q)}2ad + \delta_{k,l}\delta_{(0,2),(p,q)}d^2 & = \begin{cases} a^2, \text{ якщо } k=l, (p, q) = (2, 0), \\ 2ad, \text{ якщо } k=l, (p, q) = (1, 1), \\ d^2, \text{ якщо } k=l, (p, q) = (0, 2), \\ 0, \text{ в інших випадках.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Властивості 5 та 6 доводяться аналогічно. Теорему 1 доведено.

Розглянемо інтерполяційний оператор

$$\begin{aligned}
Sf(x, y) & = \sum_{k=1}^3 f(A_k)w_{k00}(x, y) + \sum_{k=1}^3 C_{k10}(f)w_{k10}(x, y) + \sum_{k=1}^3 C_{k01}(f)w_{k01}(x, y) + \\
& + \sum_{k=1}^3 C_{k20}(f)w_{k20}(x, y) + \sum_{k=1}^3 C_{k11}(f)w_{k11}(x, y) + \sum_{k=1}^3 C_{k02}(f)w_{k02}(x, y).
\end{aligned}$$

Теорема 2. Для того, щоб оператор $Sf(x, y)$ задовольняв умови

$$\begin{aligned}
Sf(x, y)|_{A_l} & = f(x, y)|_{A_l}, \quad D^{1,0}Sf(x, y)|_{A_l} = D^{1,0}f(x, y)|_{A_l}, \quad D^{0,1}Sf(x, y)|_{A_l} = D^{0,1}f(x, y)|_{A_l}, \\
D^{2,0}Sf(x, y)|_{A_l} & = D^{2,0}f(x, y)|_{A_l}, \quad D^{1,1}Sf(x, y)|_{A_l} = D^{1,1}f(x, y)|_{A_l}, \quad D^{0,2}Sf(x, y)|_{A_l} = D^{0,2}f(x, y)|_{A_l},
\end{aligned}$$

$l = \overline{1, 3}$, сталі коефіцієнти $C_{k10}(f)$, $C_{k01}(f)$, $C_{k20}(f)$, $C_{k11}(f)$, $C_{k02}(f)$, $k = \overline{1, 3}$ повинні бути розв'язками таких систем лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} C_{l10}(f)a + C_{l01}(f)d = D^{1,0}f(x, y)|_{A_l}, \\ C_{l10}(f)b + C_{l01}(f)e = D^{0,1}f(x, y)|_{A_l}, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} C_{l20}(f)a^2 + C_{l11}(f)2ad + C_{l02}(f)d^2 = D^{2,0}f(x, y)|_{A_l}, \\ C_{l20}(f)ab + C_{l11}(f)(ae + bd) + C_{l02}(f)de = D^{1,1}f(x, y)|_{A_l}, \quad l = \overline{1, 3}. \\ C_{l20}(f)b^2 + C_{l11}(f)2be + C_{l02}(f)e^2 = D^{0,2}f(x, y)|_{A_l}, \end{cases} \quad (9)$$

Доведення. Згідно з теоремою 1, функції $w_{kpq}(x, y)$ задовольняють умову (3). Тоді

$$D^{1,0}Sf(x, y)|_{A_l} = \sum_{k=1}^3 f(A_k)D^{1,0}w_{k00}(x, y)|_{A_l} + \sum_{k=1}^3 C_{k10}(f)D^{1,0}w_{k10}(x, y)|_{A_l} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^3 C_{k01}(f) D^{1,0} w_{k01}(x, y) \Big|_{A_y} + \sum_{k=1}^3 C_{k20}(f) D^{1,0} w_{k20}(x, y) \Big|_{A_y} + \sum_{k=1}^3 C_{k11}(f) D^{1,0} w_{k11}(x, y) \Big|_{A_y} + \\
 & + \sum_{k=1}^3 C_{k02}(f) D^{1,0} w_{k02}(x, y) \Big|_{A_y} = C_{I10}(f) a + C_{I01}(f) d.
 \end{aligned}$$

Аналогічно, враховуючи умову (4), маємо:

$$\begin{aligned}
 D^{0,1} Sf(x, y) \Big|_{A_y} & = \sum_{k=1}^3 f(A_k) D^{0,1} w_{k00}(x, y) \Big|_{A_y} + \sum_{k=1}^3 C_{k10}(f) D^{0,1} w_{k10}(x, y) \Big|_{A_y} + \\
 & + \sum_{k=1}^3 C_{k01}(f) D^{0,1} w_{k01}(x, y) \Big|_{A_y} + \sum_{k=1}^3 C_{k20}(f) D^{0,1} w_{k20}(x, y) \Big|_{A_y} + \sum_{k=1}^3 C_{k11}(f) D^{0,1} w_{k11}(x, y) \Big|_{A_y} + \\
 & + \sum_{k=1}^3 C_{k02}(f) D^{0,1} w_{k02}(x, y) \Big|_{A_y} = C_{I10}(f) b + C_{I01}(f) e.
 \end{aligned}$$

Отже, інтерполяційні умови $D^{1,0} Sf(x, y) \Big|_{A_y} = D^{1,0} f(x, y) \Big|_{A_y}$, $D^{0,1} Sf(x, y) \Big|_{A_y} = D^{0,1} f(x, y) \Big|_{A_y}$ рівносильні системі лінійних алгебраїчних рівнянь (8).

З виконання умов (5)-(7) для функцій $w_{kpq}(x, y)$ маємо рівності:

$$\begin{aligned}
 D^{2,0} Sf(x, y) \Big|_{A_y} & = \sum_{k=1}^3 f(A_k) D^{2,0} w_{k00}(x, y) \Big|_{A_y} + \sum_{k=1}^3 C_{k10}(f) D^{2,0} w_{k10}(x, y) \Big|_{A_y} + \\
 & + \sum_{k=1}^3 C_{k01}(f) D^{2,0} w_{k01}(x, y) \Big|_{A_y} + \sum_{k=1}^3 C_{k20}(f) D^{2,0} w_{k20}(x, y) \Big|_{A_y} + \sum_{k=1}^3 C_{k11}(f) D^{2,0} w_{k11}(x, y) \Big|_{A_y} + \\
 & + \sum_{k=1}^3 C_{k02}(f) D^{2,0} w_{k02}(x, y) \Big|_{A_y} = C_{I20}(f) a^2 + C_{I11}(f) 2ad + C_{I02}(f) d^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D^{1,1} Sf(x, y) \Big|_{A_y} & = \sum_{k=1}^3 f(A_k) D^{1,1} w_{k00}(x, y) \Big|_{A_y} + \sum_{k=1}^3 C_{k10}(f) D^{1,1} w_{k10}(x, y) \Big|_{A_y} + \\
 & + \sum_{k=1}^3 C_{k01}(f) D^{1,1} w_{k01}(x, y) \Big|_{A_y} + \sum_{k=1}^3 C_{k20}(f) D^{1,1} w_{k20}(x, y) \Big|_{A_y} + \sum_{k=1}^3 C_{k11}(f) D^{1,1} w_{k11}(x, y) \Big|_{A_y} + \\
 & + \sum_{k=1}^3 C_{k02}(f) D^{1,1} w_{k02}(x, y) \Big|_{A_y} = C_{I20}(f) ab + C_{I11}(f) (ae + bd) + C_{I02}(f) de.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D^{0,2} Sf(x, y) \Big|_{A_y} & = \sum_{k=1}^3 f(A_k) D^{0,2} w_{k00}(x, y) \Big|_{A_y} + \sum_{k=1}^3 C_{k10}(f) D^{0,2} w_{k10}(x, y) \Big|_{A_y} + \\
 & + \sum_{k=1}^3 C_{k01}(f) D^{0,2} w_{k01}(x, y) \Big|_{A_y} + \sum_{k=1}^3 C_{k20}(f) D^{0,2} w_{k20}(x, y) \Big|_{A_y} + \sum_{k=1}^3 C_{k11}(f) D^{0,2} w_{k11}(x, y) \Big|_{A_y} + \\
 & + \sum_{k=1}^3 C_{k02}(f) D^{0,2} w_{k02}(x, y) \Big|_{A_y} = C_{I20}(f) b^2 + C_{I11}(f) 2be + C_{I02}(f) e^2.
 \end{aligned}$$

Отже, інтерполяційні умови $D^{2,0} Sf(x, y) \Big|_{A_y} = D^{2,0} f(x, y) \Big|_{A_y}$, $D^{1,1} Sf(x, y) \Big|_{A_y} = D^{1,1} f(x, y) \Big|_{A_y}$, $D^{0,2} Sf(x, y) \Big|_{A_y} = D^{0,2} f(x, y) \Big|_{A_y}$ рівносильні системі лінійних алгебраїчних рівнянь (9). Теорему 2 доведено.

Наслідок 1. Інтерполяційний оператор $Sf(x, y)$ задовольняє інтерполяційним умовам (8)-(9), якщо:

$$C_{l10}(f) = \frac{\begin{vmatrix} D^{1,0}f(x, y)|_{A_l} & d \\ D^{0,1}f(x, y)|_{A_l} & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix}}, \quad C_{l01}(f) = \frac{\begin{vmatrix} a & D^{1,0}f(x, y)|_{A_l} \\ b & D^{0,1}f(x, y)|_{A_l} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix}},$$

$$C_{l20}(f) = \frac{1}{\Delta^*} \begin{vmatrix} D^{2,0}f(x, y)|_{A_l} & 2ad & d^2 \\ D^{1,1}f(x, y)|_{A_l} & ae+bd & de \\ D^{0,2}f(x, y)|_{A_l} & 2be & e^2 \end{vmatrix}, \quad C_{l11}(f) = \frac{1}{\Delta^*} \begin{vmatrix} a^2 & D^{2,0}f(x, y)|_{A_l} & d^2 \\ ab & D^{1,1}f(x, y)|_{A_l} & de \\ b^2 & D^{0,2}f(x, y)|_{A_l} & e^2 \end{vmatrix},$$

$$C_{l02}(f) = \frac{1}{\Delta^*} \begin{vmatrix} a^2 & 2ad & D^{2,0}f(x, y)|_{A_l} \\ ab & ae+bd & D^{1,1}f(x, y)|_{A_l} \\ b^2 & 2be & D^{0,2}f(x, y)|_{A_l} \end{vmatrix}, \quad l = \overline{1, 3}, \quad \text{де } \Delta^* = \begin{vmatrix} a^2 & 2ad & d^2 \\ ab & ae+bd & de \\ b^2 & 2be & e^2 \end{vmatrix}.$$

Розглянемо функції $W_{ij}(x, y) = V_{ij}(g_1(x, y), g_2(x, y))$.

Теорема 3. Для будь-якого $l \in \{1, 2, 3\}$ функції $W_{ij}(x, y)$, $(i, j) \in Q$ задовольняють умови:

$$D^{\gamma_1, \gamma_2} W_{ij}(x, y)|_{A_l} = 0, \quad 0 \leq \gamma_1 + \gamma_2 \leq 2.$$

Доведення. Враховуючи означення функцій $W_{ij}(x, y)$, властивості функцій $V_{ij}(x, y)$, властивості афінного перетворення σ , маємо:

$$D^{0,0}W_{ij}(x, y)|_{A_l} = W_{ij}(x, y)|_{A_l} = V_{ij}(g_1(x, y), g_2(x, y))|_{A_l} = V_{ij}(x, y)|_{X_l} = 0.$$

$$D^{1,0}W_{ij}(x, y)|_{A_l} = D^{1,0}V_{ij}(g_1(x, y), g_2(x, y))|_{A_l} D^{1,0}g_1(x, y)|_{A_l} + D^{0,1}V_{ij}(g_1(x, y), g_2(x, y))|_{A_l} \times \\ \times D^{1,0}g_2(x, y)|_{A_l} = D^{1,0}V_{ij}(x, y)|_{X_l} a + D^{0,1}V_{ij}(x, y)|_{X_l} d = 0 \cdot a + 0 \cdot d = 0.$$

$$D^{0,1}W_{ij}(x, y)|_{A_l} = D^{1,0}V_{ij}(g_1(x, y), g_2(x, y))|_{A_l} D^{0,1}g_1(x, y)|_{A_l} + D^{0,1}V_{ij}(g_1(x, y), g_2(x, y))|_{A_l} \times \\ \times D^{0,1}g_2(x, y)|_{A_l} = D^{1,0}V_{ij}(x, y)|_{X_l} b + D^{0,1}V_{ij}(x, y)|_{X_l} e = 0 \cdot b + 0 \cdot e = 0.$$

$$D^{2,0}W_{ij}(x, y)|_{A_l} = D^{1,0}(D^{1,0}V_{ij}(g_1(x, y), g_2(x, y))D^{1,0}g_1(x, y) + D^{0,1}V_{ij}(g_1(x, y), g_2(x, y))) \times \\ \times D^{1,0}g_2(x, y)|_{A_l} = D^{1,0}(D^{1,0}V_{ij}(g_1(x, y), g_2(x, y))a + D^{0,1}V_{ij}(g_1(x, y), g_2(x, y))d)|_{A_l} = \\ = ((D^{2,0}V_{ij}(g_1(x, y), g_2(x, y))D^{1,0}g_1(x, y) + D^{1,1}V_{ij}(g_1(x, y), g_2(x, y))D^{1,0}g_2(x, y))a + \\ + (D^{1,1}V_{ij}(g_1(x, y), g_2(x, y))D^{1,0}g_1(x, y) + D^{0,2}V_{ij}(g_1(x, y), g_2(x, y))D^{1,0}g_2(x, y))d)|_{A_l} =$$

$$= D^{2,0}V_{ij}(g_1(x,y), g_2(x,y))\Big|_{A_i} a^2 + D^{1,1}V_{ij}(g_1(x,y), g_2(x,y))\Big|_{A_i} 2ad + D^{0,2}V_{ij}(g_1(x,y), g_2(x,y))\Big|_{A_i} d^2 =$$

$$= D^{2,0}V_{ij}(x,y)\Big|_{X_i} a^2 + D^{1,1}V_{ij}(x,y)\Big|_{X_i} 2ad + D^{0,2}V_{ij}(x,y)\Big|_{X_i} d^2 = 0 \cdot a^2 + 0 \cdot 2ad + 0 \cdot d^2 = 0.$$

Аналогічно одержуємо рівності: $D^{1,1}W_{ij}(x,y)\Big|_{A_i} = 0$, $D^{0,2}W_{ij}(x,y)\Big|_{A_i} = 0$. Теорему 3 доведено.

Розглянемо оператор $Of(x,y) = Sf(x,y) + \sum_{(i,j) \in Q} C_{ij}(f)W_{ij}(x,y)$, де $Sf(x,y)$ – оператор, який задовольняє умови теореми 2.

Теорема 4. Оператор $Of(x,y)$ для будь-якого $l \in \{1, 2, 3\}$ та для будь-яких сталих $C_{ij}(f), (i,j) \in Q$ задовольняє умови:

$$D^{\gamma_1, \gamma_2} Of(x,y)\Big|_{A_i} = D^{\gamma_1, \gamma_2} f(x,y)\Big|_{A_i}, \quad 0 \leq \gamma_1 + \gamma_2 \leq 2.$$

Доведення. Згідно з теоремою 3, функції $W_{ij}(x,y), (i,j) \in Q$ дорівнюють нулю (разом з усіма своїми похідними до 2-го порядку включно) у вершинах трикутника $\Delta A_1 A_2 A_3$, тому

$$D^{\gamma_1, \gamma_2} Of(x,y)\Big|_{A_i} = D^{\gamma_1, \gamma_2} Sf(x,y)\Big|_{A_i} + \sum_{(i,j) \in Q} C_{ij}(f) D^{\gamma_1, \gamma_2} W_{ij}(x,y)\Big|_{A_i} = D^{\gamma_1, \gamma_2} Sf(x,y)\Big|_{A_i} +$$

$$+ \sum_{(i,j) \in Q} C_{ij}(f) \cdot 0 = D^{\gamma_1, \gamma_2} Sf(x,y)\Big|_{A_i} = D^{\gamma_1, \gamma_2} f(x,y)\Big|_{A_i}.$$

Теорему 4 доведено.

Теорема 5. Для того, щоб оператор $Of(x,y)$ задовольняв умови $\frac{\partial Of(x,y)}{\partial v_{ij}}\Big|_{P_j} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial v_{ij}}\Big|_{P_j}$,

сталі коефіцієнти $C_{ij}(f), (i,j) \in Q$ повинні визначатися формулами:

$$C_{12}(f) = \frac{\Delta}{\text{sign}(\Delta)|A_1 A_2|} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial v_{12}}\Big|_{P_{12}} - \frac{\partial Sf(x,y)}{\partial v_{12}}\Big|_{P_{12}} \right),$$

$$C_{23}(f) = \frac{\Delta\sqrt{2}}{\text{sign}(\Delta)|A_2 A_3|} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial v_{23}}\Big|_{P_{23}} - \frac{\partial Sf(x,y)}{\partial v_{23}}\Big|_{P_{23}} \right),$$

$$C_{31}(f) = \frac{\Delta}{\text{sign}(\Delta)|A_3 A_1|} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial v_{31}}\Big|_{P_{31}} - \frac{\partial Sf(x,y)}{\partial v_{31}}\Big|_{P_{31}} \right),$$

де $|A_i A_j| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ – довжина відрізка $A_i A_j$, P_{ij} – середина відрізка $A_i A_j$, v_{ij} – внутрішня нормаль до сторони $A_i A_j$ трикутника $\Delta A_1 A_2 A_3$.

Доведення. $\frac{\partial Of(x,y)}{\partial v_{mn}}\Big|_{P_{mn}} = \frac{\partial Sf(x,y)}{\partial v_{mn}}\Big|_{P_{mn}} + \sum_{(i,j) \in Q} C_{ij} \frac{\partial W_{ij}(x,y)}{\partial v_{mn}}\Big|_{P_{mn}} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial v_{mn}}\Big|_{P_{mn}}, \quad (m,n) \in Q.$

Знайдемо значення $\frac{\partial W_{ij}(x,y)}{\partial v_{mn}}\Big|_{P_{mn}}$ для всіх $(i,j), (m,n) \in Q$.

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial W_{12}(x, y)}{\partial v_{12}} \right|_{P_{12}} = \frac{\text{sign}(\Delta_{312})}{|A_1 A_2|} \left((y_1 - y_2) \frac{\partial W_{12}(x, y)}{\partial x} - (x_1 - x_2) \frac{\partial W_{12}(x, y)}{\partial y} \right) \Big|_{P_{12}} = \\
& = \frac{\text{sign}(\Delta)}{|A_1 A_2|} \left((y_1 - y_2) \left(\left. \frac{\partial V_{12}(g_1(x, y), g_2(x, y))}{\partial g_1} \right|_{P_{12}} \frac{\partial g_1}{\partial x} \Big|_{P_{12}} + \left. \frac{\partial V_{12}(g_1(x, y), g_2(x, y))}{\partial g_2} \right|_{P_{12}} \frac{\partial g_2}{\partial x} \Big|_{P_{12}} \right) + \right. \\
& \left. + (x_2 - x_1) \left(\left. \frac{\partial V_{12}(g_1(x, y), g_2(x, y))}{\partial g_1} \right|_{P_{12}} \frac{\partial g_1}{\partial y} \Big|_{P_{12}} + \left. \frac{\partial V_{12}(g_1(x, y), g_2(x, y))}{\partial g_2} \right|_{P_{12}} \frac{\partial g_2}{\partial y} \Big|_{P_{12}} \right) \right) = \\
& = \frac{\text{sign}(\Delta)}{|A_1 A_2|} \left((y_1 - y_2)d + (x_2 - x_1)e \right) = \frac{\text{sign}(\Delta) \left((y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 \right)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{\text{sign}(\Delta) \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{\Delta} = \\
& = \frac{\text{sign}(\Delta) |A_1 A_2|}{\Delta}.
\end{aligned}$$

Ми скористалися тим, що

$$\left. \frac{\partial V_{12}(g_1(x, y), g_2(x, y))}{\partial g_1} \right|_{P_{12}} = \left. \frac{\partial V_{12}(x, y)}{\partial x} \right|_{M_{12}} = 0, \quad \left. \frac{\partial V_{12}(g_1(x, y), g_2(x, y))}{\partial g_2} \right|_{P_{12}} = \left. \frac{\partial V_{12}(x, y)}{\partial y} \right|_{M_{12}} = 1,$$

де $M_{12} \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$ – образ точки P_{12} при перетворенні σ .

Аналогічно одержуємо:

$$\left. \frac{\partial W_{23}(x, y)}{\partial v_{23}} \right|_{P_{23}} = \frac{\text{sign}(\Delta) |A_2 A_3|}{\Delta \sqrt{2}}, \quad \left. \frac{\partial W_{31}(x, y)}{\partial v_{31}} \right|_{P_{31}} = \frac{\text{sign}(\Delta) |A_3 A_1|}{\Delta},$$

$$\left. \frac{\partial W_{23}(x, y)}{\partial v_{12}} \right|_{P_{12}} = \left. \frac{\partial W_{31}(x, y)}{\partial v_{12}} \right|_{P_{12}} = \left. \frac{\partial W_{12}(x, y)}{\partial v_{23}} \right|_{P_{23}} = \left. \frac{\partial W_{31}(x, y)}{\partial v_{23}} \right|_{P_{23}} = \left. \frac{\partial W_{12}(x, y)}{\partial v_{31}} \right|_{P_{31}} = \left. \frac{\partial W_{23}(x, y)}{\partial v_{31}} \right|_{P_{31}} = 0.$$

Отже, $\left. \frac{\partial Of(x, y)}{\partial v_{12}} \right|_{P_{12}} = \left. \frac{\partial Sf(x, y)}{\partial v_{12}} \right|_{P_{12}} + C_{12}(f) \left. \frac{\partial W_{12}(x, y)}{\partial v_{12}} \right|_{P_{12}}$ і рівність $\left. \frac{\partial Of(x, y)}{\partial v_{12}} \right|_{P_{12}} = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial v_{12}} \right|_{P_{12}}$ буде

мати місце при $C_{12}(f) = \frac{\Delta}{\text{sign}(\Delta) |A_1 A_2|} \left(\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial v_{12}} \right|_{P_{12}} - \left. \frac{\partial Sf(x, y)}{\partial v_{12}} \right|_{P_{12}} \right)$.

Аналогічно

$$\left. \frac{\partial Of(x, y)}{\partial v_{23}} \right|_{P_{23}} = \left. \frac{\partial Sf(x, y)}{\partial v_{23}} \right|_{P_{23}} + C_{23}(f) \left. \frac{\partial W_{23}(x, y)}{\partial v_{23}} \right|_{P_{23}}, \quad \left. \frac{\partial Of(x, y)}{\partial v_{31}} \right|_{P_{31}} = \left. \frac{\partial Sf(x, y)}{\partial v_{31}} \right|_{P_{31}} + C_{31}(f) \left. \frac{\partial W_{31}(x, y)}{\partial v_{31}} \right|_{P_{31}}$$

і рівності $\left. \frac{\partial Of(x, y)}{\partial v_{23}} \right|_{P_{23}} = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial v_{23}} \right|_{P_{23}}$, $\left. \frac{\partial Of(x, y)}{\partial v_{31}} \right|_{P_{31}} = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial v_{31}} \right|_{P_{31}}$ будуть мати місце при

$$C_{23}(f) = \frac{\Delta \sqrt{2}}{\text{sign}(\Delta) |A_2 A_3|} \left(\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial v_{23}} \right|_{P_{23}} - \left. \frac{\partial Sf(x, y)}{\partial v_{23}} \right|_{P_{23}} \right), \quad C_{31}(f) = \frac{\Delta}{\text{sign}(\Delta) |A_3 A_1|} \left(\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial v_{31}} \right|_{P_{31}} - \left. \frac{\partial Sf(x, y)}{\partial v_{31}} \right|_{P_{31}} \right).$$

Теорему 5 доведено.

З теорем 2, 4, 5 випливає наступна теорема.

Теорема 6. Оператор $Of(x, y) = Sf(x, y) + \sum_{(i,j) \in Q} C_{ij}(f)W_{ij}(x, y)$, у якому

$$Sf(x, y) = \sum_{k=1}^3 f(A_k)w_{k00}(x, y) + \sum_{k=1}^3 C_{k10}(f)w_{k10}(x, y) + \sum_{k=1}^3 C_{k01}(f)w_{k01}(x, y) + \\ + \sum_{k=1}^3 C_{k20}(f)w_{k20}(x, y) + \sum_{k=1}^3 C_{k11}(f)w_{k11}(x, y) + \sum_{k=1}^3 C_{k02}(f)w_{k02}(x, y),$$

а коефіцієнти $C_{kpq}(f)$ ($k = \overline{1,3}$, $0 \leq p+q \leq 2$), $C_{ij}(f)$ ($(i, j) \in Q$) обчислюються за формулами:

$$C_{l10}(f) = \frac{\begin{vmatrix} D^{1,0}f(x, y)|_{A_l} & d \\ D^{0,1}f(x, y)|_{A_l} & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix}}, \quad C_{l01}(f) = \frac{\begin{vmatrix} a & D^{1,0}f(x, y)|_{A_l} \\ b & D^{0,1}f(x, y)|_{A_l} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix}},$$

$$C_{l20}(f) = \frac{1}{\Delta^*} \begin{vmatrix} D^{2,0}f(x, y)|_{A_l} & 2ad & d^2 \\ D^{1,1}f(x, y)|_{A_l} & ae+bd & de \\ D^{0,2}f(x, y)|_{A_l} & 2be & e^2 \end{vmatrix}, \quad C_{l11}(f) = \frac{1}{\Delta^*} \begin{vmatrix} a^2 & D^{2,0}f(x, y)|_{A_l} & d^2 \\ ab & D^{1,1}f(x, y)|_{A_l} & de \\ b^2 & D^{0,2}f(x, y)|_{A_l} & e^2 \end{vmatrix},$$

$$C_{l02}(f) = \frac{1}{\Delta^*} \begin{vmatrix} a^2 & 2ad & D^{2,0}f(x, y)|_{A_l} \\ ab & ae+bd & D^{1,1}f(x, y)|_{A_l} \\ b^2 & 2be & D^{0,2}f(x, y)|_{A_l} \end{vmatrix}, \quad l = \overline{1,3},$$

$$C_{l2}(f) = \frac{\Delta}{\text{sign}(\Delta)|A_1A_2|} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial v_{12}} \Big|_{P_{12}} - \frac{\partial Sf(x, y)}{\partial v_{12}} \Big|_{P_{12}} \right),$$

$$C_{23}(f) = \frac{\Delta\sqrt{2}}{\text{sign}(\Delta)|A_2A_3|} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial v_{23}} \Big|_{P_{23}} - \frac{\partial Sf(x, y)}{\partial v_{23}} \Big|_{P_{23}} \right),$$

$$C_{31}(f) = \frac{\Delta}{\text{sign}(\Delta)|A_3A_1|} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial v_{31}} \Big|_{P_{31}} - \frac{\partial Sf(x, y)}{\partial v_{31}} \Big|_{P_{31}} \right),$$

володіє властивостями:

1) $D^{\gamma_1, \gamma_2}Of(x, y)|_{A_l} = D^{\gamma_1, \gamma_2}f(x, y)|_{A_l}$, $0 \leq \gamma_1 + \gamma_2 \leq 2$;

2) $\frac{\partial Of(x, y)}{\partial v_{ij}} \Big|_{P_{ij}} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial v_{ij}} \Big|_{P_{ij}}$.

ВИСНОВКИ

У роботі запропоновано побудову інтерполяційного полінома Зламала-Женішека 5-го степеня на довільному трикутнику $\triangle A_1A_2A_3$, що базується на використанні базисних поліномів на “одиничному” трикутнику $\triangle X_1X_2X_3$.

Перспективи подальших наукових розвідок вбачаємо в дослідженні похибки наближення для запропонованих формул та побудові інтерполяційно-апроксимаційних сплайнів 5-го степеня на довільній триангульованій сітці вузлів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Zenisek A. Interpolation polynomials on the triangle / A. Zenisek // *Numer. Math.* – 1970. – Vol. 15. – P. 283-296.
2. Zenisek A. Maximum-angle condition and triangular finite elements of hermite type / A. Zenisek // *Math. Comp.* – 1995. – Vol. 64, no. 211. – P. 929-941.
3. Zlamal M. On the finite element method / M. Zlamal // *Numer. Math.* – 1968. – Vol. 12. – P. 394-409.
4. Bramble J. H. Triangular elements in the finite element method / J. H. Bramble, M. Zlamal // *Math. Comp.* – 1970. – Vol. 24. – P. 809-820.
5. Литвин О. Н. 2D кубические интерполяционные сплайны на нерегулярной сетке узлов / О. Н. Литвин, О. О. Литвин, О. И. Денисова // *Компьютерная математика.* – 2013. – № 1. – С. 100-109.
6. Сергиенко И. В. Явные формулы для интерполяционных сплайнов 5-й степени на треугольнике / И. В. Сергиенко, О. Н. Литвин, О. О. Литвин, О. И. Денисова // *Кибернетика и системный анализ.* – 2014. – Том 50, № 5. – С. 25-33.
7. Байдакова Н. В. Об одном способе эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике / Н. В. Байдакова // *Труды Института математики и механики. Теории функций: Сб. науч. трудов.* – 2005. – № 2. – С. 47-52.
8. Матвеева Ю. В. Об интерполяции кубическими многочленами третьей степени на треугольнике с использованием смешанных производных / Ю. В. Матвеева // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия математика. Механика. Информатика.* – 2007. – Т. 7. – Вып. 1. – С. 28-32.

REFERENCES

1. Zenisek, A. (1970), “Interpolation polynomials on the triangle”, *Numer. Math.*, vol. 15, pp. 283-296.
2. Zenisek, A. (1995), “Maximum-angle condition and triangular finite elements of hermite type”, *Math. Comp.*, vol. 64, no. 211, pp. 929-941.
3. Zlamal, M. (1968), “On the finite element method”, *Numer. Math.*, vol. 12, pp. 394-409.
4. Bramble, J.H. and Zlamal, M. (1970), “Triangular elements in the finite element method”, *Math. Comp.*, vol. 24, pp. 809-820.
5. Litvin, O.N., Litvin, O.O. and Denisova, O.I. (2013), “2D cubic interpolation splines on irregular grid of nodes”, *Kompyuternaya matematika*, no. 1, pp. 100-109.
6. Sergienko, I.V., Litvin, O.N., Litvin, O.O. and Denisova, O.I. (2014), “Explicit formulas for interpolation splines 5th degree on a triangle”, *Kibernetika i sistemnyiy analiz*, vol. 50, no. 5, pp. 25-33.
7. Baydakova, N.V. (2005), “A method of Hermite interpolation by polynomials of the third degree on a triangle”, *Trudyi Instituta matematiki i mehaniki. Teorii funktsiy: Sb. nauch. trudov*, no. 2, pp. 47-52.
8. Matveeva, Yu.V. (2007), “Interpolation by cubic polynomials of the third degree on a triangle using mixed derivatives”, *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya matematika. Mehanika. Informatika*, vol. 7, issue 1, pp. 28-32.

УДК 519.65

О РАВНОМЕРНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ НЕ БОЛЕЕ ДВУХ ТОЧЕК ПЕРЕГИБА

Нечипоренко Н. А., к. ф.-м. н., доцент, Коротунова Е. В., к. т. н., доцент

*Запорожский национальный технический университет,
ул. Жуковского, 64, г. Запорожье, 69063, Украина*

kafedra_pm@zntu.edu.ua

Рассматривается задача восстановления непрерывной функции, заданной своими приближенными значениями в узлах произвольной фиксированной сетки и имеющей в области определения не более двух точек перегиба. В качестве восстанавливающей принимается функция, построенная на основе метода квазиразностей. Приводимые алгоритмы восстановления являются оптимальными по порядку точности на соответствующих классах функций.

Ключевые слова: функция одной переменной, восстановление, изогометрические свойства, оптимальность по точности.

ПРО РІВНОМІРНЕ ВІДНОВЛЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЩО МАЮТЬ НЕ БІЛЬШЕ ДВОХ ТОЧОК ПЕРЕГІНУ

Нечипоренко Н. О., к. ф.-м. н., доцент, Коротунова О. В., к. т. н., доцент

*Запорізький національний технічний університет,
буль. Жуковського, 64, м. Запоріжжя, 69063, Україна*

kafedra_pm@zntu.edu.ua

Розглядається задача відновлення неперервної функції, яка задана своїми наближеними значеннями у вузлах довільної фіксованої сітки і має в області визначення не більше двох точок перегину. Як відновлююча приймається функція, побудована на основі методу квазірозв'язків. Наведені алгоритми відновлення є оптимальними за порядком точності на відповідних класах функцій.

Ключові слова: функція однієї змінної, відновлення, изогометричні властивості, оптимальність за точністю.

ON UNIFORM RESTORATION OF FUNCTIONS WHICH HAVE NO MORE THAN TWO POINTS OF INFLECTION

Nechyporenko N. A., Ph.D., Associate Professor, Korotunova O. V., Ph.D., Associate Professor

*Zaporizhzhya National Technical University,
Zhukovsky street, 64, Zaporizhzhya, 69063, Ukraine*

kafedra_pm@zntu.edu.ua

The problem of tabular data approximation is one of the major problems arising in the processing of the experimental results. In many cases, the experimenter has additional information about the geometric properties of the restored function, which are advisable to take into account and save. Many works are dedicated to the constructing interpolation isogeometric splines problem. However, the application area of these splines is limited to tables containing the exact values of the interpolated function. Generally, in practice there are approximate values that do not match the available priori information about the geometric properties of the functions. Therefore, the problem of restoration functions algorithms constructed by theirs approximate gridded data and a priori information about theirs geometric properties is actual.

This work considers the problem of restoring a continuous function from a class of functions defined by theirs approximate values in arbitrary fixed grid nodes. As a set of functions, were considered the following sets: concave and convex monotone; having a domain not more than two points of inflection and monotone function with the same property. Restoring function is based on the quasi-solutions method. The step-by-step algorithms for restoring the function of each of the classes of functions are provided. The numerical results show that these algorithms can achieve high accuracy of the recovery. If the uncertainty of the input data at the grid is known and the corresponding class of functions is limited, it is possible to construct upper and lower bounds of the corresponding class of functions. Then, as is known, for optimum accuracy of approximation in the class will be a Chebyshev center of a class equal to half the sum of the upper and lower boundaries of the class. However, in this case the desired geometric properties of functions will not be performed, which is unacceptable. Quoted in the work function approximation algorithms retain its geometric properties and are optimal in order of accuracy, with the constant orders not exceeding 2.

Key words: function of one variable, restoration, isogeometric properties, optimality on accuracy.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных задач, возникающих при обработке результатов экспериментов, является задача восстановления функций, заданных таблицами своих приближенных значений. При этом часто возникает необходимость в сохранении восстанавливающей функцией определенных свойств – монотонности, выпуклости и т.д. Эти свойства могут быть получены из априорных представлений о поведении тех или иных физических, экономических процессов или явлений, описываемых искомыми функциями. Использование качественной априорной информации о функции позволяет строить регуляризирующие алгоритмы для широкого класса некорректных задач путем минимизации невязки на классе функций, удовлетворяющих априорным ограничениям [1]. Для реализации этих алгоритмов требуются значительные вычислительные затраты. В работах [2-4] рассмотрены так называемые изогометрические сплайны, которые сохраняют геометрию приближаемой функции, но при очень существенном условии: табличные значения должны соответствовать геометрическим свойствам функции. К сожалению, в эксперименте регистрируются, как правило, «зашумленные» значения функции, которые чаще всего не соответствуют имеющейся априорной информации. Для сглаживающих сплайнов в работе [5] предложена методика учета априорной информации, заданной в виде ограничений на значения функции и ее производных в узлах сетки. Недостатком данной методики является то, что она гарантирует заданное поведение только в узлах сетки, хотя в задачах обработки экспериментальных данных необходимо выполнять априорные ограничения на всем заданном интервале.

Эмпирический анализ большого числа природных, технико-экономических и социокультурных процессов показал, что динамика их роста, развития подчиняется логистическому закону, то есть описывается неубывающими функциями, имеющими одну точку перегиба. Поэтому построение по экспериментальным данным оптимальных алгоритмов восстановления выпуклых функций, а также функций, имеющих одну или две точки перегиба, является актуальной задачей.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть функция $f(x)$, принадлежащая некоторому классу F определенных на $[a, b]$ функций, задана своими приближенными значениями f_j , $j = \overline{1, N}$ в узлах x_j произвольной фиксированной сетки $\Delta: \{a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b\}$. Требуется восстановить эту функцию. В качестве восстанавливающей принимается функция $S(x)$, которая принадлежит классу F и построена на основе метода квазиразрешений, то есть удовлетворяет условию:

$$\delta(S) = \inf_{\phi \in F} \delta(\phi), \quad (1)$$

$$\delta(\phi) = \max_{1 \leq i \leq N} |f_i - \phi(x_i)|,$$

где инфимум берется по всем функциям $\phi(x)$ из класса F .

Пусть $F_{N, \varepsilon}$ – класс функций $f(x) \in F$ и удовлетворяет условию $|f(x_i) - f_i| \leq \varepsilon$, $i = \overline{1, N}$. Так как функция $S(x)$, являющаяся решением задачи (1), принадлежит классу $F_{N, \varepsilon}$, то при условии ограниченности этого класса, восстановление функцией $S(x)$ является оптимальным по порядку точности в классе $F_{N, \varepsilon}$ с константой порядка, не превосходящей 2.

В качестве F рассмотрим следующие классы функций:

- $V_i[a, b]$, $i = 1, 2, 3$ – класс непрерывных функций $f(x)$, $x \in [a, b]$, минимальное число интервалов выпуклости которых на $[a, b]$ не превосходит i ;

– $W_i[a, b]$, $i = 1, 2, 3$ – класс непрерывных функций $f(x) \in V_i[a, b]$ и монотонных на $[a, b]$.

Отметим, что имеющиеся экспериментальные данные f_j , $j = \overline{1, N}$ о функции $f(x)$, как правило, не соответствуют имеющейся априорной информации о геометрических свойствах функции $f(x)$.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВЫПУКЛЫХ И МОНОТОННЫХ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим задачу восстановления непрерывных выпуклых функций: найдем функцию $S(x)$, которая удовлетворяет условию (1) при $F \equiv V_1[a, b]$. Для определенности будем считать, что функции класса $V_1[a, b]$ выпуклые вниз.

Рассмотрим следующий пошаговый

Алгоритм А.

Шаг 1. Положить $s = 1$, $k_0 = 1$.

Шаг 2. Вычислить $\frac{f_{k_s} - f_{k_{s-1}}}{x_{k_s} - x_{k_{s-1}}} = \min_{k_{s-1} < i \leq N} \frac{f_i - f_{k_{s-1}}}{x_i - x_{k_{s-1}}}$ и зафиксировать k_s .

Шаг 3. Найти $\delta_s = 1/2 \max_{k_{s-1} \leq i \leq k_s} (f_i - y_s(x_i))$, где $y_s(x) = f_{k_{s-1}} + \frac{f_{k_s} - f_{k_{s-1}}}{x_{k_s} - x_{k_{s-1}}}(x - x_{k_{s-1}})$.

Шаг 4. Проверить: $k_s = N$? Если да, то перейти к шагу 6, иначе к шагу 5.

Шаг 5. Увеличить s на единицу и перейти к шагу 2.

Шаг 6. Найти $\delta(s) = \max_{1 \leq i \leq s} \delta_i$.

Шаг 7. Положить $z_i(x) = y_i(x) + \delta_i$, $i = \overline{1, s}$.

Шаг 8. Положить $S(x) = \max_{1 \leq i \leq s} z_i(x)$, $x \in [a, b]$ и закончить вычисления.

Доказано, что алгоритм А дает решение задачи (1) при $F \equiv V_1[a, b]$. При этом решение $S(x)$ обладает следующим локальным свойством: $|f_i - S(x_i)| \leq \min_{\varphi \in V_1[a, b]} \max_{k \in K_j} |f_k - \varphi(x_k)|$,

$i \in \{l | x_l \in [\bar{z}_j, \bar{z}_{j+1}], 1 \leq l \leq N\}$, где \bar{z}_p , $p = 1, 2, \dots, m-1$, $m \leq s$ – точки разрыва производной функции $S(x)$, $\bar{z}_0 = x_1$, $\bar{z}_m = x_N$, $K_j = \{l | x_l \in [\bar{z}_{j-1}, \bar{z}_{j+2}], 1 \leq l \leq N\}$, $j = \overline{1, m-2}$.

Рассмотрим теперь задачу восстановления непрерывных выпуклых монотонных функций, то есть задачу (1) при $F \equiv W_1[a, b]$. Для определенности будем считать, что функции класса $W_1[a, b]$ являются непрерывными неубывающими выпуклыми вниз функциями.

Рассмотрим следующий пошаговый

Алгоритм А₁.

Шаг 1. Найти $f_n = \min_{1 \leq i \leq N} f_i$ и зафиксировать n .

Шаг 2. Проверить: $n = 1$? Если да, то перейти к шагу 3, иначе к шагу 4.

Шаг 3. Выполнить шаги 1-8 алгоритма А и закончить вычисления.

Шаг 4. Найти $\delta_1 = 1/2 \max_{1 \leq i \leq n} (f_i - f_n)$ и положить $y_1(x) = f_n$.

Шаг 5. Проверить: $n = N$? Если да, то положить $S(x) = y_1(x) + \delta_1$, $x \in [a, b]$ и закончить вычисления.

Шаг 6. Положить $s = 2$, $k_1 = n$.

Шаг 7. Выполнить шаги 2-8 алгоритма A и закончить вычисления.

Доказано, что алгоритм A_1 дает решение задачи (1) при $F \equiv W_1[a, b]$, при этом решение $S(x)$ обладает таким же локальным свойством, что и в случае $F \equiv V_1[a, b]$.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ НЕ БОЛЕЕ ДВУХ ТОЧЕК ПЕРЕГИБА

Будем говорить, что точка x^* является точкой перегиба функции $f(x)$, если существует число $\delta > 0$ такое, что во всех точках $x \in (x^* - \delta, x^*)$ функция $f(x)$ выпуклая вверх (вниз), а во всех точках $x \in (x^*, x^* + \delta)$ функция $f(x)$ выпуклая вниз (вверх). В соответствии с этим определением минимальное число точек перегиба функций класса $V_2[a, b]$ не превосходит единицы, а функций класса $V_3[a, b]$ – не превосходит двойки.

Построим решение задачи (1) при $F \equiv V_2[a, b]$. Для определенности будем считать, что функции класса $V_2[a, b]$ выпуклые вниз на $[a, x^*)$ и выпуклые вверх на $(x^*, b]$, где x^* – произвольная точка $[a, b]$.

Рассмотрим следующий пошаговый

Алгоритм В.

Шаг 1. Положить $s = 1$, $k_0 = 1$, $p = 1$, $n_0 = N$.

Шаг 2. Вычислить $\frac{f_{k_s} - f_{k_{s-1}}}{x_{k_s} - x_{k_{s-1}}} = \min_{k_{s-1} < i \leq n_{p-1}} \frac{f_i - f_{k_{s-1}}}{x_i - x_{k_{s-1}}}$ и зафиксировать k_s .

Шаг 3. Найти $\delta_s^l = 1/2 \max_{k_{s-1} \leq i \leq k_s} (f_i - y_s^l(x_i))$, где $y_s^l(x) = f_{k_{s-1}} + \frac{f_{k_s} - f_{k_{s-1}}}{x_{k_s} - x_{k_{s-1}}}(x - x_{k_{s-1}})$.

Шаг 4. Вычислить $\frac{f_{n_p} - f_{n_{p-1}}}{x_{n_p} - x_{n_{p-1}}} = \min_{k_{s-1} < i \leq n_{p-1}} \frac{f_i - f_{n_{p-1}}}{x_i - x_{n_{p-1}}}$ и зафиксировать n_p .

Шаг 5. Найти $\delta_p^r = 1/2 \max_{n_p \leq i \leq n_{p-1}} (y_p^r(x_i) - f_i)$, где $y_p^r(x) = f_{n_{p-1}} + \frac{f_{n_p} - f_{n_{p-1}}}{x_{n_p} - x_{n_{p-1}}}(x - x_{n_{p-1}})$.

Шаг 6. Проверить: $\delta_s^l < \delta_p^r$? Если да, то перейти к шагу 7, иначе к шагу 9.

Шаг 7. Вычислить $z_s^l(x) = y_s^l(x) + \delta_s^l$, $S_s^l(x) = \max_{1 \leq i \leq s} z_i^l(x)$.

Шаг 8. Положить $s = s + 1$, $j = 1$ и перейти к шагу 11.

Шаг 9. Вычислить $z_p^r(x) = y_p^r(x) - \delta_p^r$, $S_p^r(x) = \min_{1 \leq i \leq p} z_i^r(x)$.

Шаг 10. Положить $p = p + 1$, $j = 0$.

Шаг 11. Перейти к шагу 13, если $s = 1$ или $p = 1$.

Шаг 12. Проверить: $S_{s-1}^l(x_{k_{s-1}}) > S_{p-1}^r(x_{k_{s-1}})$ и $S_{s-1}^l(x_{n_{p-1}}) > S_{p-1}^r(x_{n_{p-1}})$? Если да, то перейти к шагу 15.

Шаг 13. Проверить: $k_{s-1} + 1 < n_{p-1}$? Если да, то перейти к шагу 2.

Шаг 14. Положить $S(x) = \begin{cases} S_{s-1}^l(x), & \text{если } a \leq x \leq x_{k_{s-1}}; \\ g(x), & \text{если } x_{k_{s-1}} \leq x \leq x_{n_{p-1}}; \\ S_{p-1}^r(x), & \text{если } x_{n_{p-1}} \leq x \leq b, \end{cases}$ где

$$g(x) = g\left(x, x_{k_{s-1}}, S_{s-1}^l(x_{k_{s-1}}), x_{n_{p-1}}, S_{p-1}^r(x_{n_{p-1}})\right), \text{ если } s > 1 \text{ и } p > 1;$$

$$g(x) = g\left(x, x_1, f_1, x_{n_{p-1}}, S_{p-1}^r(x_{n_{p-1}})\right), \text{ если } s = 1;$$

$$g(x) = g\left(x, x_{k_{s-1}}, S_{s-1}^l(x_{k_{s-1}}), x_N, f_N\right), \text{ если } p = 1;$$

$$g(x) = g(x, u_1, v_1, u_2, v_2) = \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1}(x - u_1) + v_1 \text{ и закончить вычисления.}$$

Шаг 15. Проверить: $s = 2$ или $p = 2$? Если да, то положить $w = x_1 \text{sign}(p - 2) + x_N \text{sign}(s - 2)$ и перейти к шагу 21.

Шаг 16. Проверить: $j = 1$? Если да, то перейти к шагу 18.

Шаг 17. Определить w такое, что $S_{p-2}^r(w) = z_{p-1}^r(w)$ и перейти к шагу 19.

Шаг 18. Определить w такое, что $S_{s-2}^l(w) = z_{s-1}^l(w)$.

Шаг 19. Проверить: $S_{s-1}^l(w) \leq S_{p-1}^r(w)$? Если да, то перейти к шагу 21.

Шаг 20. Положить $s = s - 1$, если $j = 1$ и $p = p - 1$, если $j = 0$.

Шаг 21. Положить $S(x) = \begin{cases} S_{s-1}^l(x), & \text{если } x_1 \leq x \leq x^*; \\ S_{p-1}^r(x), & \text{если } x^* \leq x \leq x_N, \end{cases}$ где

$$x^* = \min\left\{x \mid S_{s-1}^l(x) = S_{p-1}^r(x), \min(w, x_{k_{s-2}}) \leq x \leq x_{n_{p-1}}\right\}, \text{ если } j = 1;$$

$$x^* = \max\left\{x \mid S_{s-1}^l(x) = S_{p-1}^r(x), x_{k_{s-1}} \leq x \leq \max(w, x_{n_{p-2}})\right\}, \text{ если } j = 0.$$

Доказано, что функция $S(x)$, построенная в результате выполнения алгоритма B , является решением задачи (1) при $F \equiv V_2[a, b]$.

Построим теперь решение задачи (1) при $F \equiv W_2[a, b]$. Для определенности будем считать, что функции класса $W_2[a, b]$ неубывающие, выпуклые вниз на $[a, x^*]$ и выпуклые вверх на $[x^*, b]$, где x^* – произвольная точка $[a, b]$.

Рассмотрим следующий пошаговый

Алгоритм В₁.

Шаг 1. Положить $s = 1, k_0 = 1, p = 1, n_0 = N$.

Шаг 2. Проверить: $s > 1$? Если да, то перейти к шагу 6.

Шаг 3. Найти $f_{k_s} = \min_{1 \leq i \leq n_{p-1}} f_i$ и зафиксировать k_s .

Шаг 4. Проверить: $k_s = 1$? Если да, то перейти к шагу 6.

Шаг 5. Найти $\delta_1^l = 1/2 \max_{1 \leq i \leq k_s} (f_i - f_{k_s})$, положить $y_1^l(x) = f_{k_s}$ и перейти к шагу 8.

Шаг 6. Вычислить $\frac{f_{k_s} - f_{k_{s-1}}}{x_{k_s} - x_{k_{s-1}}} = \min_{k_{s-1} < i \leq n_{p-1}} \frac{f_i - f_{k_{s-1}}}{x_i - x_{k_{s-1}}}$ и зафиксировать k_s .

Шаг 7. Найти $\delta_s^l = 1/2 \max_{k_{s-1} \leq j \leq k_s} (f_j - y_s^l(x_j))$, где $y_s^l(x) = f_{k_{s-1}} + \frac{f_{k_s} - f_{k_{s-1}}}{x_{k_s} - x_{k_{s-1}}}(x - x_{k_{s-1}})$.

Шаг 8. Проверить: $p > 1$? Если да, то перейти к шагу 12.

Шаг 9. Найти $f_{n_p} = \max_{k_{s-1} \leq i \leq N} f_i$ и зафиксировать n_p .

Шаг 10. Проверить: $n_p = N$? Если да, то перейти к шагу 12.

Шаг 11. Найти $\delta_1^r = 1/2 \max_{n_p \leq i \leq N_s} (f_{n_p} - f_i)$, положить $y_1^r(x) = f_{n_p}$ и перейти к шагу 14.

Шаг 12. Вычислить $\frac{f_{n_p} - f_{n_{p-1}}}{x_{n_p} - x_{n_{p-1}}} = \min_{k_{s-1} \leq i < n_{p-1}} \frac{f_i - f_{n_{p-1}}}{x_i - x_{n_{p-1}}}$ и зафиксировать n_p .

Шаг 13. Найти $\delta_p^r = 1/2 \max_{n_p \leq i \leq n_{p-1}} (y_p^r(x_i) - f_i)$, где $y_p^r(x) = f_{n_{p-1}} + \frac{f_{n_p} - f_{n_{p-1}}}{x_{n_p} - x_{n_{p-1}}}(x - x_{n_{p-1}})$.

Шаг 14. Выполнить шаги 6-21 алгоритма B и закончить вычисления.

Алгоритм B_1 отличается от алгоритма B только определением величин δ_1^l , $y_1^l(x)$ и δ_1^r , $y_1^r(x)$. Это вызвано необходимостью соблюдения условий монотонности функций $S_{s-1}^l(x)$, $S_{p-1}^r(x)$. Доказано, что функция $S(x)$, построенная в результате выполнения алгоритма B_1 , является решением задачи (1) при $F \equiv W_2[a, b]$.

Основываясь на алгоритмах B и B_1 , можно привести алгоритмы, позволяющие найти решение задачи (1) на множествах непрерывных, неубывающих или невозрастающих непрерывных функций при различном расположении участков выпуклости и вогнутости на $[a, b]$. Так, например, решение $\tilde{S}(x)$ задачи (1) на множестве непрерывных функций, выпуклых вверх на $[a, x^*)$ и выпуклых вниз на $(x^*, b]$, где x^* – произвольная точка отрезка $[a, b]$, можно получить в результате выполнения следующего алгоритма \tilde{B} :

Шаг 1. Положить $f_i' = -f_i$, $i = \overline{1, N}$.

Шаг 2. Построить функцию $S(x)$, $x \in [a, b]$, являющуюся результатом применения алгоритма B к входным данным $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, $f = \{f_1', f_2', \dots, f_N'\}$.

Шаг 3. Положить $\tilde{S}(x) \equiv -S(x)$, $x \in [a, b]$.

Аналогично может быть построен алгоритм \tilde{B}_1 решения задачи (1) на множестве неубывающих непрерывных функций, выпуклых вверх на $[a, x^*]$, выпуклых вниз на $(x^*, b]$, где x^* – произвольная точка отрезка $[a, b]$.

В заключение заметим, что основываясь на алгоритмах восстановления выпуклых функций и функций, имеющих не более одной точки перегиба, можно построить алгоритмы восстановления функций, имеющих не более двух точек перегиба, а именно построить алгоритмы решения задачи (1) при $F \equiv V_3[a, b]$ и $F \equiv W_3[a, b]$. Для определенности будем считать, что функции класса $V_3[a, b]$ выпуклые вниз, если $x \in [a, x^*]$ или $x \in (x^{**}, b]$ и выпуклые вверх, если $x \in (x^*, x^{**})$, где x^* и x^{**} – произвольные точки отрезка $[a, b]$, $a \leq x^* \leq x^{**} \leq b$.

Сохраняя обозначения, принятые в алгоритмах A и B , рассмотрим следующий

Алгоритм С.

Шаг 1. Применить алгоритм A к входным данным $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, $f = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ и вычислить k_i , $y_i(x)$, δ_i , $i = \overline{1, s}$.

Шаг 2. Вычислить $\delta^0 = \max_{1 \leq i \leq s} \delta_i$ и зафиксировать m такое, что $\delta^0 = \delta_m$.

Шаг 3. Проверить: $\delta^0 = 0$? Если да, то положить $\alpha = \beta = N$, в противном случае положить $\alpha = k_{m-1}$, $\beta = k_m$.

Шаг 4. Определить $f_v - y_m(x_v) = \max_{\alpha \leq i \leq \beta} (f_i - y_m(x_i))$ и зафиксировать x_v .

Шаг 5. Положить $S_1(x) \equiv S(x)$, $x \in [x_1, x_v]$, где $S(x)$ является результатом применения алгоритма B к входным данным $x = \{x_1, x_2, \dots, x_v\}$, $f = \{f_1, f_2, \dots, f_v\}$.

Шаг 6. Положить $S_2(x) \equiv \tilde{S}(x)$, $x \in [x_v, x_N]$, где $\tilde{S}(x)$ является результатом применения алгоритма \tilde{B} к входным данным $x = \{x_v, x_{v+1}, \dots, x_N\}$, $f = \{f_v, f_{v+1}, \dots, f_N\}$.

Шаг 7. Положить $S(x) = \begin{cases} S_1(x), & x_1 \leq x \leq \tilde{x}, \\ S_2(x), & \tilde{x} < x \leq x_N, \end{cases}$ где $\tilde{x} \in [x_\alpha, x_\beta]$ и является корнем уравнения

$S_1(x) = S_2(x)$, если $\delta^0 > 0$ и $\tilde{x} = x_N$, если $\delta^0 = 0$. Закончить вычисления.

Доказано, что функция $S(x)$, построенная в результате выполнения алгоритма C , является решением задачи (1) при $F \equiv V_3[a, b]$.

Рассмотрим теперь задачу восстановления монотонных функций класса $V_3[a, b]$: построим решение задачи (1) при $F \equiv W_3[a, b]$. Алгоритм C_1 решения этой задачи идентичен алгоритму C решения задачи (1) при $F \equiv V_3[a, b]$. Отличие состоит только в том, что на шагах 1, 5 и 6 алгоритма C алгоритмы A , B , \tilde{B} необходимо заменить на соответствующие алгоритмы A_1 , B_1 , \tilde{B}_1 .

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Опишем некоторые из проведенных численных экспериментов восстановления функций. Пусть функция $f(x)$ принадлежит одному из рассматриваемых классов функций $V_i[a, b]$

или $W_i[a, b]$, $i = 1, 2$. Входная информация для решения задачи восстановления формировалась следующим образом. На отрезке $[a, b]$ выбиралась равномерная с шагом h сетка x_i , $i = \overline{1, N}$. На этой сетке вычислялись значения функции $f(x_i)$, $i = \overline{1, N}$, на которые затем накладывался некоторый вектор ошибок δ_i , $i = \overline{1, N}$ и в качестве исходных данных использовались $y_i = f(x_i) + \delta_i$, $i = \overline{1, N}$. При этом величины δ_i , $i = \overline{1, N}$ являются равномерно распределенными случайными величинами, удовлетворяющими условию $\max_{1 \leq i \leq N} \delta_i = \frac{1}{10} \max_{1 \leq i \leq N} |f(x_i)|$.

В качестве модельных примеров рассматривались следующие: $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [1; 10]$; $f_2(x) = e^x$, $x \in [0; 1; 1]$; $f_3(x) = \ln x$, $x \in [1; 1; 2]$; $f_4(x) = \sin x$, $x \in [0; 1; 35]$; $f_5(x) = \sin x$, $x \in [-1; 1]$; $f_6(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in [-2\pi; -0; 1]$; $f_7(x) = \text{ctg} x$, $x \in [0; 5; 2]$; $f_8(x) = e^{-x^2}$, $x \in [-1; 0]$. С помощью программной реализации приведенных в работе алгоритмов для каждой из функций $f_k(x)$, $k = \overline{1, 8}$ решалась задача восстановления по информации x_i , y_i , $i = \overline{1, N}$ для 30 различных наборов δ_i , $i = \overline{1, N}$, которые формировались с помощью датчика случайных чисел. Обозначим через $S_k^{(j)}(x)$ восстанавливающую функцию, соответствующую j -му набору величин δ_i , $i = \overline{1, N}$. Точность восстановления будем оценивать величиной $E(S_k^{(j)})$, определяемой по формуле

$$E(S_k^{(j)}) = \max_{x \in \bigcup_{i=1}^{N-1} \Delta_i} |f_k(x) - S_k^{(j)}(x)|, \quad k = \overline{1, 8},$$

где Δ_i – равномерная сетка на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ с шагом $(x_{i+1} - x_i)/10$. Для каждой серии из 30 задач восстановления функции $f_k(x)$, $k = \overline{1, 8}$ в процентах определено количество задач $n(f_k)$, для которых величина $E(S_k^{(j)})$, $j = \overline{1, 30}$ принадлежит одному из интервалов $[0; 0, 25\delta]$, $(0, 25\delta; 0, 5\delta]$, $(0, 5\delta; 0, 75\delta]$, $(0, 75\delta; \delta]$, $(\delta; 1, 25\delta]$, где $\delta = \max_{1 \leq i \leq N} \delta_i$. Результаты расчетов при $N = 10$ приведены в таблице 1.

Таблица 1

$n(f_k)$, $k = \overline{1, 8}$	Область изменения $E(S_k^{(j)})$, $j = \overline{1, 30}$				
	$[0; 0, 25\delta]$	$(0, 25\delta; 0, 5\delta]$	$(0, 5\delta; 0, 75\delta]$	$(0, 75\delta; \delta]$	$(\delta; 1, 25\delta]$
$n(f_1)$	3,3	13	50,6	13	20
$n(f_2)$	3,3	30	53,3	10	3,3
$n(f_3)$	3,3	63,3	23,3	10	-
$n(f_4)$	3,3	20	60	16,7	-
$n(f_5)$	-	30	50	20	-
$n(f_6)$	-	20	60	20	-
$n(f_7)$	-	23,3	53,3	23,3	-
$n(f_8)$	-	33,3	46,6	20	-

ВЫВОДЫ

В статье приведены алгоритмы восстановления таблично заданной функции $f(x) \in F$, которые могут быть использованы при обработке экспериментальных данных. Эти алгоритмы позволяют не только сохранить изогеометрические свойства восстанавливаемой функции $f(x)$, но и, как показывают результаты численных экспериментов, достичь достаточно высокой точности восстановления. В качестве восстанавливающей принимается функция $S(x)$, построенная на основе метода квазирешений. Если задана точность ε входных данных $f(x_i)$, $i = \overline{1, N}$ и соответствующий класс функций $F_{N, \varepsilon}$ ограничен, то приведенные алгоритмы являются оптимальными по порядку точности с константой, не превосходящей 2. Отметим также, что используя значения x_i , $S(x_i)$, $i = \overline{1, N}$, можно построить гладкую восстанавливаемую функцию с требуемыми геометрическими свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация / А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола. – М. : Наука, 1983. – 200 с.
2. Квасов Б. И. Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами / Б. И. Квасов. – М. : Физматлит, 2006. – 360 с.
3. Гребенников А. И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений / А. И. Гребенников. – М. : Изд-во МГУ, 1983. – 206 с.
4. Мирошниченко В. Л. Достаточные условия монотонности и выпуклости для интерполяционных кубических сплайнов класса C / В. Л. Мирошниченко // Приближение сплайнами. – Новосибирск, 1990. – Вып. 137 : Вычислительные системы. – С. 31-40.
5. Воскобойников Ю. Е. Дескриптивные сглаживающие сплайны и алгоритмы их построения / Ю. Е. Воскобойников // Моделирование в механике. Сб. научных трудов. Новосибирск, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН. – 1991. – Т. 5, № 5. – С. 30-37.

REFERENCES

1. Tikhonov, A.N., Goncharsky, A.V., Stepanov, V.V. and Yagola, A.G. (1983), *Regulyariziruyushchiye algoritmy i apriornaya informatsiya* [Regularizing algorithms and a priori information], Nauka, Moscow.
2. Kvasov, B.I. (2006), *Metody izogeometricheskoy approksimatsii splaynami* [Isogeometric prior splines approximation methods], FIZMATLIT, Moscow.
3. Grebennikov, A.I. (1983), *Metod splaynov i resheniye nekorrektnykh zadach teorii priblizheniy* [Splines method and some ill-posed problems in approximation theory solution], MGU, Moscow.
4. Miroshnichenko, V.L. (1990), "Sufficient conditions of monotonicity and convexity for interpolating cubic splines C ", *Vychislitel'nyye sistemy*, vol. 137, Novosibirsk, pp. 31-40.
5. Voskoboynikov, Y.E. (1991), "Descriptive smoothing splines and algorithms for their construction", *Modelirovaniye v mekhanike*, vol. 5, no. 5, Novosibirsk, pp. 30-37.

УДК 517.983.27

УМОВИ ФОРМУВАННЯ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНОЇ СИСТЕМИ ЗА ДОПОМОГОЮ ВЕКТОРА КЕРУВАННЯ

¹Новицький В. В., д. ф.-м. н., професор, ²Зінчук М. О., к. техн. н., ³Святовець І. Ф.

^{1,2}Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська, Київ-4, 301601, Україна

³Запорізька державна інженерна академія,
просп. Соборний, 226, Запоріжжя, 69006, Україна

^{1,2}novyc@imath.kiev.ua, ³sv.irina0702@gmail.com

Вивчаються умови побудови майже консервативної системи за допомогою зворотного зв'язку. Наведено приклад формування майже консервативної системи та дослідження її стійкості.

Ключові слова: майже консервативна система, зворотній зв'язок, вектор керувань, стійкість.

УСЛОВИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЧТИ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ ВЕКТОРА УПРАВЛЕНИЯ

¹Новицкий В. В., д. ф.-м. н., профессор, ²Зинчук Н. А., к. техн. н., ³Святовец И. Ф.

^{1,2}Институт математики НАН Украины,
ул. Терещенковская, Киев-4, 301601, Украина

³Запорожская государственная инженерная академия,
просп. Соборный, 226, Запорожье, 69006, Украина

^{1,2}novyc@imath.kiev.ua, ³sv.irina0702@gmail.com

Изучаются условия построения почти консервативной системы с помощью обратной связи. Приведен пример конструирования почти консервативной системы и исследования ее устойчивости.

Ключевые слова: почти консервативная система, обратная связь, вектор управления, устойчивость.

THE CONDITIONS OF CONSTRUCTING OF THE ALMOST CONSERVATIVE SYSTEM USING CONTROLLING VECTOR

¹Novitsky V. V., D.Sc. in Physics and Maths, professor, Zinchuk, M. O., Ph.D.in Engineering,
³Svyatovets I. F.

^{1,2}In-t of Mathematics of NAS of Ukraine,
Tereschenkivska str., Kiev-4, 301601, Ukraine

³Zaporizhzhya State Engineering Academy,
Soborny Ave., 226, Zaporizhzhya, 69006, Ukraine

^{1,2}novyc@imath.kiev.ua, ³sv.irina0702@gmail.com

Controlled linear stationary system even order is considered in this article. Matrix of coefficients of the variable has the form $\tilde{A}_0 + \varepsilon \tilde{A}_1$ where ε is a small parameter. The system is not almost conservative, i.e. conditions of skew and/or nonsingularity of A_0 are not satisfied. To obtain an almost conservative system, the feedback on state in form of two terms sum is constructed. After substitution of the controlling vector into the original system, the closed system is obtained. We use the approach, which is used to stabilize the linear differential system with coefficient matrix in the form of Frobenius, i.e. first construct the necessary matrix of coefficients, and then calculates the vector of feedback.

It was obtained necessary and sufficient conditions on the matrix A_0 elements to produce the desired non-degenerate skew-symmetric matrix, if the matrix at controlling is known.

An example of the transition to almost conservative system by using feedback is shown and the stability of the closed system with the use of the Lyapunov matrix equation is tested.

The approach with an asymptotic decomposition on the small parameter of the matrix which is the solution of the Lyapunov equation was applied.

To find an approximate solution we use an infinite system of matrix equations which is solved by mathematical computer algebra system Maple V.

Key words: almost conservative system, feedback, controlling vector, stability.

ВСТУП

У [1] започатковано дослідження деякого класу лінійних диференціальних систем парного порядку з малим параметром, які можна звести до майже консервативних систем [2] за допомогою зворотного зв'язку. Такий підхід дозволяє застосувати до майже консервативних систем напрацьовані раніше методи визначення стійкості [2, 3], побудови оптимального регулятора [4, 5] та стабілізації системи [6].

1. ОДИН ПІДХІД ДО ФОРМУВАННЯ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНОЇ СИСТЕМИ

Розглянемо повністю керовану лінійну диференціальну систему парного порядку з малим параметром

$$\dot{x} = A(\varepsilon)x + Bu = (\tilde{A}_0 + \varepsilon\tilde{A}_1)x + Bu, \quad (1)$$

причому виконується, принаймні, одна з умов

$$\tilde{A}_0 \neq -\tilde{A}_0^T, \quad \det \tilde{A}_0 = 0, \quad (2)$$

де $x = [x_1, x_2, \dots, x_{2n}]^T \in \mathfrak{R}_{2n}$ – вектор стану, $u = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T \in \mathfrak{R}_m$ – вектор керувань, $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1 \in \mathfrak{R}_{2n \times 2n}$, $B \in \mathfrak{R}_{2n \times m}$, $\text{rang} B = m$, ε – малий параметр. З умов (2) випливає, що система (1) не є майже консервативною [2], а для отримання такої побудуємо зворотній зв'язок по стану.

Як і в [1], вектор керування оберемо у вигляді зворотного зв'язку

$$u = -(K_0 + \varepsilon K_1)x. \quad (3)$$

Після підстановки (3) в (1), отримаємо замкнену систему:

$$\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x, \quad (4)$$

де, якщо існує відповідна матриця K_0 , то

$$A_0 = \tilde{A}_0 - BK_0 = -\tilde{A}_0^T, \quad \det A_0 \neq 0, \quad A_1 = \tilde{A}_1 - BK_1. \quad (5)$$

З умов (5) випливає, що замкнена система (4) є майже консервативною.

Далі використаємо підхід, який застосовується для стабілізації лінійної диференціальної системи з матрицею коефіцієнтів у формі Фробеніуса [7]. У цьому випадку спочатку будується необхідна матриця коефіцієнтів (обмежень на матрицю не має), а потім обчислюється вектор зворотного зв'язку.

Якщо вважати, що невироджена кососиметрична матриця A_0 рівняння (4) задана, то з першого рівняння (5) легко знаходимо матрицю K_0 , оскільки матриця B повного рангу ($\text{rang} B = m$). Отже, маємо

$$K_0 = (B^T B)^{-1} B^T (\tilde{A}_0 - A_0). \quad (6)$$

Тепер підставимо вираз для K_0 з (6) в перше рівняння (5) і отримаємо таку рівність

$$\left(I - B(B^T B)^{-1} B^T \right) \tilde{A}_0 = \left(I - B(B^T B)^{-1} B^T \right) A_0. \quad (7)$$

Зазначимо, що не для всіх кососиметричних матриць A_0 (7) є тотожністю.

Таким самим способом можна отримати матрицю K_1 , якщо задати матрицю A_1

$$K_1 = (B^T B)^{-1} B^T (\tilde{A}_1 - A_1). \quad (8)$$

Далі підставимо (8) у друге рівняння (5) і отримаємо рівність, аналогічну (7), якщо матриця A_1 допустима

$$(I - B(B^T B)^{-1} B^T) \tilde{A}_1 = (I - B(B^T B)^{-1} B^T) A_1. \quad (9)$$

Як і у випадку з матрицею A_0 , не всі матриці A_1 будуть допустимими, тобто тільки деякий клас матриць задовольняє (9).

Матриця $H = B(B^T B)^{-1} B^T$ є матрицею проектування, вона симетрична та ідемпотентна, тобто її власні значення одиничні та нульові [8]. У [9] показано, що $\text{rang} H = \text{rang} B$. Отже, отримана матриця проектування має m власних значень рівних одиниці. Ліва і права частини (7) виконують проектування векторів-стовпців матриць \tilde{A}_0, A_0 на ортогональне доповнення простору стовпців матриці B . Формула (7) буде тотожністю тоді, коли хоча б для однієї косиметричної матриці A_0 проєкції всіх відповідних векторів-стовпців збігаються.

Матрицею проектування буде також матриця $I - H$ [8]. Тоді з рівностей (7), (9) випливає, що матриці коефіцієнтів розімкненої та замкненої динамічних систем пов'язані між собою за допомогою метода найменших квадратів [8]. Цей факт сформулюємо для матриць \tilde{A}_0, A_0 у вигляді наступного твердження, яке виконується також для \tilde{A}_1, A_1 .

Теорема 1.1 Нехай $\tilde{y}_i^0, y_i^0 \in \mathfrak{R}_m$ розв'язки відповідних лінійних алгебраїчних рівнянь

$$B\tilde{y}_i = \tilde{a}_i, \quad B y_i = a_i, \quad i = 1, \dots, 2n, \quad (10)$$

$$\tilde{A}_0 = [\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_{2n}], \quad A_0 = [a_1, a_2, \dots, a_{2n}], \quad \tilde{a}_i, a_i \in \mathfrak{R}_{2n},$$

знайдені за методом найменших квадратів. Тоді для всіх матриць коефіцієнтів A_0 , які можна отримати за допомогою зворотного зв'язку (3), вектори-нев'язки для розв'язків лінійних алгебраїчних рівнянь (10) збігаються

$$B\tilde{y}_i^0 - \tilde{a}_i = B y_i^0 - a_i, \quad i = 1, \dots, 2n. \quad (11)$$

Відзначимо, що формула (11) – це формула (7) у векторному вигляді. Дійсно, обчислюючи розв'язки рівнянь (10) за методом найменших квадратів, отримаємо:

$$\tilde{y}_i^0 = (B^T B)^{-1} B^T \tilde{a}_i, \quad y_i^0 = (B^T B)^{-1} B^T a_i, \quad i = 1, \dots, 2n \quad (12)$$

і, підставляючи їх в (11), прийдемо до (7).

Оскільки зворотній зв'язок дає матрицю, для якої завжди виконується (11), то на неї можна накладати додаткові умови, тобто вибирати її з певного класу матриць (наприклад, косиметричних). Так, відомо [11], що при повній керованості лінійної диференціальної системи завжди можна побудувати оптимальний регулятор зворотного зв'язку, який стабілізує систему, тобто матриця коефіцієнтів замкненої системи вибирається з класу асимптотично стійких матриць.

Для обчислення параметрів косиметричної матриці A_0 необхідно сформулювати систему рівнянь з відповідних елементів матриць $(I - H)\tilde{A}_0 = \{\tilde{m}_{ij}\}_1^{2n}$, $(I - H)A_0 = \{m_{ij}\}_1^{2n}$ рівняння (7)

$$\tilde{m}_{jk} = m_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, 2n. \quad (13)$$

У системі (13) щонайменше $2nm$ лінійно залежних рівнянь. Ранг матриці $I - H$ дорівнює $2n - m$ і матриця \tilde{A}_0 необов'язково невинроджена, тому в кососиметричній невинродженій матриці A_0 загального вигляду з $n(2n - 1)$ вільних параметрів не всі можуть бути зв'язаними рівністю (7) (рівняннями (13)). Вільні параметри матриці A_0 можуть набувати довільних значень у рамках її невинродженості. Якщо таким чином досягти кососиметричності та невинродженості шуканої матриці не можливо, то це можна зробити, якщо є можливість, або переставленням рядків матриці B , або збільшенням числа керувань, що зменшує число зв'язаних параметрів.

Умова однакових проєкцій відповідних стовпців матриць \tilde{A}_0 , A_0 при загальному вигляді матриці B , як видно з (13), не дає ефективного способу отримання кососиметричної матриці. Тому розглянемо випадок, коли в матриці повного рангу B стовпці є одиничними векторами, тобто $B = [e_{i_1} \ e_{i_2} \ \dots \ e_{i_m}]$, де $e_j \in \mathfrak{R}_{2n}$ – вектор з одиницею на j -му місці і нулями на інших місцях. Із структури матриці B впливає рівність $B^T B = I_m$. Запишемо

матрицю B також у такому вигляді $B = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^T \\ \dots \\ \tilde{e}_{2n}^T \end{bmatrix}$, $B^T = [\tilde{e}_1 \ \dots \ \tilde{e}_{2n}]$, $\tilde{e}_i \in \mathfrak{R}_m$, причому тільки

вектори $\tilde{e}_i = e_i$, $i = 1, \dots, m$ є одиничні розмірності m , а інші – нульові. Тоді елементи матриці

$$H = BB^T = \{h_{ij}\}_1^{2n} \text{ дорівнюють } h_{ij} = \tilde{e}_i^T \tilde{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \in \{i_1, \dots, i_m\}, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Визначимо для яких матриць \tilde{A}_0 рівняння (7) буде мати розв'язком, необов'язково невинроджену кососиметричну матрицю A_0 . Оскільки матриця H має ненульовими тільки елементи $(i_1, i_1), (i_2, i_2), \dots, (i_m, i_m)$, то в матриці $I - H$ будуть ненульовими тільки елементи (j, j) , $j \in \{1, \dots, 2n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$. Тоді матриці $(I - H)\tilde{A}_0$, $(I - H)A_0$ матимуть нульовими рядки i_1, i_2, \dots, i_m , причому це будуть відповідно матриці \tilde{A}_0 , A_0 з обнуленими цими рядками. Виходячи з загальної структури невинродженої кососиметричної матриці [10], для виконання (7), очевидно, необхідно і достатньо, щоб для всіх елементів \tilde{a}_{lj} , $l, j \in \{1, \dots, 2n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ матриці $\tilde{A}_0 = \{\tilde{a}_{ij}\}_1^{2n}$ виконувалась умова: $\tilde{a}_{lj} = -\tilde{a}_{jl}$. Тоді зв'язані елементи матриці $A_0 = \{a_{ij}\}_1^{2n}$ такі: $a_{lj} = \tilde{a}_{lj}$, $l \in \{1, \dots, 2n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$, $j = 1, \dots, 2n$. Інші елементи залишаються вільними параметрами, але такими, що не порушують кососиметричність і невинродженість матриці A_0 .

Отже, виконується твердження.

Теорема 1.2 Нехай матриця при керуванні системи (1) має вигляд $B = [e_{i_1} \ e_{i_2} \ \dots \ e_{i_m}]$, $\text{rang} B = m$.

За допомогою зворотного зв'язку (3) можна отримати деяку кососиметричну матрицю $A_0 = \{a_{ij}\}_1^{2n}$ в замкненій системі (4) тоді і тільки тоді, коли елементи \tilde{a}_{lj} , $l, j \in \{1, \dots, 2n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ матриці коефіцієнтів $\tilde{A}_0 = \{\tilde{a}_{ij}\}_1^{2n}$ вихідної системи задовольняють

умови $\tilde{a}_{ij} = -\tilde{a}_{ji}$. При цьому елементи шуканої матриці обчислюються таким чином: $a_{ij} = \tilde{a}_{ij}$, $l \in \{1, \dots, 2n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$, $j = 1, \dots, 2n$, а інші елементи, не порушуючи кососиметричності та невиродженості матриці A_0 , можуть бути довільними.

Розглядаючи рівняння (9), структуру матриці A_1 (також K_1) вибираємо, виходячи з практичної доцільності, наприклад, для стабілізації замкненої системи. З іншого боку – матрицю K_1 можна отримати не з рівняння (8), а при побудові оптимального регулятора зворотного зв'язку для майже консервативної системи [4, 5] чи з системи нерівностей для її стабілізації [6].

2. ЗАСТОСУВАННЯ РОЗГЛЯНУТОГО ВИЩЕ ПІДХОДУ НА ПРАКТИЦІ

Наведемо приклад переходу до майже консервативної системи за допомогою зворотного зв'язку та перевіримо стійкість замкненої системи.

Приклад 2.1 Розглянемо систему (1) з матрицею коефіцієнтів

$$A(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon s_1 & \varepsilon s_2 & \omega_3 & \omega_4 + \varepsilon a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ \varepsilon s_3 & -\omega_4 - \varepsilon a_2 & 0 & -\varepsilon a_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\omega_1 \neq \omega_2, \quad a_1, a_2, a_3 > 0.$$

Тут ε – малий параметр. Необхідно побудувати майже консервативну систему (4) та дослідити її на стійкість за допомогою рівняння Ляпунова.

Зобразимо матрицю $A(\varepsilon)$ у вигляді суми двох матриць $A(\varepsilon) = \tilde{A}_0 + \varepsilon \tilde{A}_1$, де

$$\tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 & \omega_4 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & -\omega_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & s_2 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_3 & -a_2 & 0 & -a_3 \end{bmatrix}.$$

Неважко переконатися за допомогою перевірки, що задана система повністю керована. Матриці B і \tilde{A}_0 задовольняють умови теореми 1.2, тому існує кососиметрична матриця A_0 , яка перетворює рівняння (7) в тотожність.

Легко побачити, що кососиметрична матриця канонічної форми [10]

$$A_0 = \text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 \\ -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \omega_2 \\ -\omega_2 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \det A_0 \neq 0,$$

задовольняє рівняння $(I - H)\tilde{A}_0 = (I - H)A_0$, $H = \text{diag} \{0, 1, 0, 1\}$. При цьому, матриця K_0 буде такою:

$$K_0 = (B^T B)^{-1} B^T (\tilde{A}_0 - A_0) = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \omega_3 & \omega_4 \\ 0 & -\omega_4 & \omega_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для матриці \tilde{A}_1 справедливо $(I - H)\tilde{A}_1 = 0$, тому як матрицю збурення можна вибрати

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & -a_3 \end{bmatrix},$$

при цьому $(I - H)\tilde{A}_1 \equiv (I - H)A_1$ і

$$K_1 = (B^T B)^{-1} B^T (\tilde{A}_1 - A_1) = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & 0 & 0 \\ s_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отже, ми отримали наступну майже консервативну систему

$$\dot{x} = \left(\begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & -\omega_2 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & -a_3 \end{bmatrix} \right) x. \tag{14}$$

Перевіримо побудовану систему на асимптотичну стійкість за допомогою матричного рівняння Ляпунова [11]

$$(A_0 + \varepsilon A_1)^T P + P(A_0 + \varepsilon A_1) = -2Q, \tag{15}$$

де $P, Q \in \mathfrak{R}_{2n \times 2n}$ – деякі симетричні матриці, причому для асимптотично стійкої матриці $A_0 + \varepsilon A_1$ вони додатно визначені. Для пошуку розв’язку матричного рівняння (15) будемо використовувати алгоритм описаний в [3]. Матриці P, Q будемо шукати у вигляді розкладень за малим параметром ε

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots, \quad Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \dots \tag{16}$$

Покажемо, що для сформованої майже консервативної системи (14) існує розв’язок рівняння (15) у рамках розкладень (16) з додатно визначеною матрицею P_0 . Запишемо матричне рівняння Ляпунова у вигляді нескінченної системи рівнянь:

$$A_0 P_0 - P_0 A_0 = 0, \tag{17}$$

$$A_0 P_1 - P_1 A_0 = P_0 A_1 + A_1^T P_0 + 2Q_1, \tag{18}$$

.....

$$A_0 P_i - P_i A_0 = P_{i-1} A_1 + A_1^T P_{i-1} + 2Q_i,$$

.....

Тут $Q_0 = 0$.

Далі за алгоритмом [3] послідовно розв’язуємо рівняння (17), (18). Власні значення A_0 різні, тому $P_0 = \text{diag} \{p_{10}, p_{10}, p_{20}, p_{20}\}$, $p_{10}, p_{20} > 0$. Виберемо $Q_1 = \text{diag} \{q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14}\}$, $q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14} \geq 0$. Перейдемо до розгляду правої частини першого рівняння (18):

$$D_1 = P_0 A_1 + A_1^T P_0 + 2Q_1 = V_1 + 2Q_1,$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{10}a_1 - p_{20}a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{10}a_1 - p_{20}a_2 & 0 & -2a_3p_{20} \end{bmatrix}.$$

Запишемо умови на діагональні елементи матриці $D_1 = \{d_{ij}\}_1^4$:

$$\begin{aligned} d_{11} + d_{22} &= 2q_{11} + 2q_{12} = 0, \\ d_{33} + d_{44} &= 2q_{13} + 2q_{14} - 2a_3p_{20} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Звідси $q_{11} = q_{12} = 0$. Якщо покладемо $p_{10} = a_2$, $p_{20} = a_1$, $Q_1 = \text{diag}\{0, 0, 0, a_1a_3\}$, то $D_1 \equiv 0$ (впливає зі структури матриці V_1). Матриця Q_1 – невід’ємно визначена, а P_0 – додатно визначена, тому матриці $P_k, Q_{k+1}, k = 1, 2, \dots$ можна покласти рівними нулю (див. теорему з [3]).

Отже, розв’язком задачі буде

$$P = \text{diag}\{a_2, a_2, a_1, a_1\} > 0, \quad Q = \varepsilon \text{diag}\{0, 0, 0, a_1a_3\} \geq 0. \quad (20)$$

З розв’язку (20) випливає, що система (14) з сформованими матрицями A_0, A_1 стійка [11]. Для того, щоб показати, що ця система асимптотично стійка, необхідно знайти матрицю – розв’язок $P > 0$ при $Q > 0$.

За допомогою комп’ютерної системи аналітичних обчислень *Maple* будемо шукати розв’язок цієї задачі, коли матриця Q (сума другого ряду (16)) додатно визначена. З рівняння (19) знаходимо: $q_{11} = q_{12} = 0$, $p_{20} = (q_{13} + q_{14})/a_3$, $q_{13}, q_{14} > 0$. Отже, маємо:

$$P_0 = \text{diag}\left\{p_{10}, p_{10}, \frac{q_{13} + q_{14}}{a_3}, \frac{q_{13} + q_{14}}{a_3}\right\}, \quad Q = \text{diag}\{0, 0, q_{13}, q_{14}\},$$

де p_{10} залишається вільним параметром.

Далі, підставляємо P_0 в рівняння

$$A_0P_1 - P_1A_0 = P_0A_1 + A_1^T P_0 + 2Q_1,$$

і знаходимо елементи матриці $P_1 = \{p_{ij}\}_1^4$

$$\begin{aligned} p_{14} &= \frac{\omega_1(p_{10}a_1a_3 - a_2q_{13} - a_2q_{14})}{a_3(\omega_2^2 - \omega_1^2)}, \quad p_{22} = p_{11}, \quad p_{44} = p_{33}, \\ p_{23} &= \frac{\omega_2(p_{10}a_1a_3 - a_2q_{13} - a_2q_{14})}{a_3(\omega_1^2 - \omega_2^2)}, \quad p_{34} = \frac{q_{13}}{\omega_2}, \quad p_{12} = p_{13} = p_{24} = 0, \end{aligned}$$

а p_{11}, p_{33} – вільні параметри.

Виберемо матрицю Q_2 діагональної структури $Q_2 = \text{diag}\{q_{21}, q_{22}, q_{23}, q_{24}\}$, $q_{21}, q_{22}, q_{23}, q_{24} \geq 0$ і обчислимо $D_2 = \{d_{ij}^2\}_1^4 = P_1A_1 + A_1^T P_1 + 2Q_2$ (через громіздкість у явному вигляді її не наводимо). Тепер запишемо умови на діагональні елементи знайденої матриці

$$d_{11}^2 + d_{22}^2 = 2q_{21} + 2q_{22} = 0,$$

$$d_{33}^2 + d_{44}^2 = 2q_{23} + 2q_{24} - 2p_{33}a_3 = 0.$$

З першого рівняння знаходимо $q_{21} = q_{22} = 0$, а в другому рівнянні покладемо $p_{33} = 0$ і обчислюємо $q_{23} = q_{24} = 0$. Параметри p_{11} , p_{10} залишаємо вільними. Далі підставляємо матрицю P_1 в рівняння $A_0P_2 - P_2A_0 = P_1A_1 + A_1^T P_1 + 2Q_2$ і знаходимо елементи матриці $P_2 = \{v_{ij}\}$:

$$v_{13} = \frac{\omega_1 (\omega_2^2 p_{10} a_1 a_3 - 2\omega_2^2 a_2 q_{13} - \omega_2^2 a_2 q_{14} + \omega_1^2 a_2 q_{13})}{\omega_2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)},$$

$$v_{24} = \frac{\omega_1^2 p_{10} a_1 a_3 - \omega_1^2 a_2 q_{14} - \omega_2^2 a_2 q_{13}}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}, \quad v_{14} = -\frac{\omega_1 p_{11} a_1}{\omega_1^2 - \omega_2^2},$$

$$v_{22} = v_{11} + \frac{(p_{10} a_1 a_3 - a_2 q_{13} - a_2 q_{14}) a_2}{a_3 (\omega_1^2 - \omega_2^2)}, \quad v_{23} = \frac{\omega_2 p_{11} a_1}{\omega_1^2 - \omega_2^2},$$

$$v_{44} = v_{33} + \frac{\omega_2^2 a_1^2 p_{10} a_3 - \omega_2^2 a_1 a_2 (q_{13} + q_{14}) - q_{13} a_3^2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)}{a_3 (\omega_1^2 - \omega_2^2) \omega_2^2},$$

$$v_{12} = 0, \quad v_{34} = 0,$$

де v_{11} , v_{33} – вільні параметри.

Тепер вибираємо діагональну матрицю $Q_3 = \text{diag}\{q_{31}, q_{32}, q_{33}, q_{34}\}$, $q_{31}, q_{32}, q_{33}, q_{34} \geq 0$ і обчислюємо $D_3 = \{d_{ij}^3\}_1^4 = P_2 A_1 + A_1^T P_2 + 2Q_3$. Умови на діагональні елементи матриці D_3 набудуть вигляду:

$$\frac{d_{11}^3 + d_{22}^3}{2} = q_{31} - \frac{(\omega_1^2 p_{10} a_1 a_3 - \omega_1^2 a_2 q_{14} - \omega_2^2 a_2 q_{13}) a_2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} + q_{32} = 0,$$

$$\frac{d_{33}^3 + d_{44}^3}{2} = q_{33} + q_{34} + \frac{(\omega_1^2 p_{10} a_1 a_3 - \omega_1^2 a_2 q_{14} - \omega_2^2 a_2 q_{13}) a_1}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} -$$

$$- \frac{\omega_2^2 a_1^2 p_{10} a_3 - \omega_2^2 a_1 a_2 (q_{13} + q_{14}) - q_{13} a_3^2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2) \omega_2^2} - v_{33} a_3 = 0.$$

З першого рівняння знаходимо значення вільного параметра p_{10}

$$p_{10} = \frac{(q_{31} + q_{32})(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + a_2^2 (\omega_1^2 q_{14} + \omega_2^2 q_{13})}{\omega_1^2 a_1 a_2 a_3} > 0,$$

тобто P_0 є додатно визначена матриця. Далі покладемо $q_{33} = q_{34} = 0$ і обчислимо з другого рівняння значення вільного параметра v_{33} матриці P_2

$$v_{33} = \frac{a_2 q_{13} (a_3^2 \omega_1^2 + a_1 a_2 \omega_2^2) + a_1 \omega_2^4 (q_{31} + q_{32})}{a_2 a_3 \omega_1^2 \omega_2^2},$$

а v_{11} залишається вільним параметром.

Отже, $Q_3 = \text{diag}\{q_{31}, q_{32}, 0, 0\}$ і матриця $\varepsilon Q_1 + \varepsilon^3 Q_3$ є додатно визначеною.

З рівняння $A_0 P_3 - P_3 A_0 = P_2 A_1 + A_1^T P_2 + 2Q_3$ знаходимо невідому матрицю $P_3 = \{h_{ij}\}_1^4$:

$$\begin{aligned} h_{13} &= \frac{\omega_1 \omega_2 p_{11} a_1 a_3}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}, & h_{24} &= \frac{\omega_1^2 p_{11} a_1 a_3}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}, & h_{12} &= \frac{q_{31}}{\omega_1}, \\ h_{22} &= h_{11} + \frac{p_{11} a_1 a_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}, & h_{44} &= h_{33} + \frac{p_{11} a_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}, & h_{34} &= 0, \\ h_{14} &= \frac{(a_3^2 \omega_1^2 + a_1 a_2 \omega_2^2)(q_{31} + q_{32}) + a_1 a_2 (a_2^2 q_{13} - v_{11} \omega_1^2 a_3)}{a_2 a_3 (\omega_1^2 - \omega_2^2) \omega_1}, \\ h_{23} &= -\frac{\omega_2 (a_3^2 \omega_1^2 + a_1 a_2 \omega_2^2)(q_{31} + q_{32}) + \omega_2 a_1 a_2 (a_2^2 q_{13} - v_{11} \omega_1^2 a_3)}{a_2 a_3 (\omega_1^2 - \omega_2^2) \omega_1}. \end{aligned}$$

Оскільки P_0 і $\varepsilon Q_1 + \varepsilon^3 Q_3$ – додатно визначені матриці, то згідно з теоремою [3] завершуємо процес розв'язання рівнянь системи (18) і остаточно обчислюємо матрицю Q_4 , зрівнявши з нулем вільні параметри h_{11}, h_{33} матриці P_3 . Також покладемо рівними нулю вільні параметри p_{11}, v_{11} , що спростить обчислення матриць P і Q , але не вплине на їх додатну визначеність.

Отже, маємо:

$$Q_4 = \{s_{ij}\}_1^4 = -\frac{1}{2} P_3 A_1 - \frac{1}{2} A_1^T P_3,$$

де

$$\begin{aligned} s_{12} &= \frac{(a_3^2 \omega_1^2 + a_1 a_2 \omega_2^2)(q_{31} + q_{32}) + a_1 a_2^3 q_{13}}{2a_3 (\omega_1^2 - \omega_2^2) \omega_1}, \\ s_{14} &= -\frac{a_1 q_{31}}{2\omega_1} + \frac{(a_3^2 \omega_1^2 + a_1 a_2 \omega_2^2)(q_{31} + q_{32}) + a_1 a_2^3 q_{13}}{2a_3 (\omega_1^2 - \omega_2^2) \omega_1}, \\ s_{34} &= \frac{(a_3^2 \omega_1^2 + a_1 a_2 \omega_2^2)(q_{31} + q_{32}) a_1 \omega_2 + a_1^2 a_2^3 \omega_2 q_{13}}{2a_2 a_3 (\omega_1^2 - \omega_2^2) \omega_1^2}, \\ s_{11} &= s_{13} = s_{22} = s_{23} = s_{24} = s_{33} = s_{44} = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, ми отримали за скінченне число кроків аналітичний розв'язок рівняння Ляпунова для сформованої асимптотично стійкої матриці $A_0 + \varepsilon A_1$:

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \varepsilon^3 P_3, \quad Q = \varepsilon Q_1 + \varepsilon^3 Q_3 + \varepsilon^4 Q_4.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Святовец І. Ф. Формування майже консервативної системи за допомогою вектора керування / І. Ф. Святовец, О. П. Коломійчук, В. В. Новицький // Аналітична механіка та її застосування : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – Т. 9, № 1. – С. 301-307.

2. Новицький В. В. Рівняння Ляпунова для майже консервативних систем / В. В. Новицький. – Препринт. – К. : Ін-т математики НАН України, 2004. – 34 с.
3. Зінчук М. О. Дослідження рівняння Ляпунова для неперервних майже консервативних систем / М. О. Зінчук, В. В. Новицький, Т. Г. Положий // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – Т. 2, № 1. – С. 84-96.
4. Новицький В. В. Оптимальное управление почти консервативными системами / В. В. Новицький, Хуан Чень // Сучасні проблеми аналітичної механіки : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2004. – Т. 1, № 2. – С. 152-157.
5. Зінчук М. О. Оптимальне керування неперервними майже консервативними системами / М. О. Зінчук, В. В. Новицький // Проблеми аналітичної механіки : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – Т. 3, № 1. – С. 75-89.
6. Зінчук М. О. Стійкість та стабілізація лінійних параметричних динамічних систем / М. О. Зінчук, В. В. Новицький // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2007. – Т. 4, № 2. – С. 58-71.
7. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления / В. Стрейц. – М. : Наука, 1985. – 296 с.
8. Стренг Г. Линейная алгебра и её применения / Г. Стренг. – М. : Мир, 1980. – 456 с.
9. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 656 с.
10. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1988. – 552 с.
11. Barnett S. Introduction to Mathematical Control Theory, Second Edition / S. Barnett, R. G. Cameron. – Oxford : Clarendon press, 1985. – 404 p.

REFERENCES

1. Svyatovets, I.F., Kolomiychuk, O.P. and Novitskiy, V.V. (2012), “Formation almost conservative system using vector control”, *Analitychna mekhanika ta yiyi zastosuvannia, Zbirnyk prats In-tu matematyky NAN Ukrainy*, vol. 9, no. 1, pp. 301-307.
2. Novitskiy, V.V. (2004), “Lyapunov equation for almost conservative systems”, *Preprint, In-t matematyky NAN Ukrainy*, 34 p.
3. Zinchuk, M.O., Novitskiy, V.V. and Polozhyy, T.G. (2005), “Research Lyapunov equations for continuous almost conservative systems”, *Problemy dynamiky ta stiykosti bagatovymirnykh system, Zbirnyk prats In-tu matematyky NAN Ukrainy*, vol. 2, no. 1, pp. 84-96.
4. Novitskiy, V.V. and Khuan Chen (2004), “Optimal control almost conservative systems”, *Suchasni problemy analitychnoyi mekhaniky, Zbirnyk prats In-tu matematyky NAN Ukrainy*, vol. 1, no. 2, pp. 152-157.
5. Zinchuk, M.O. and Novitskiy, V.V. (2006), “Optimal control of continuous almost conservative systems”, *Problemy analitychnoyi mekhaniky, Zbirnyk prats In-tu matematyky NAN Ukrainy*, vol. 3, no. 1, pp. 75-89.
6. Zinchuk, M.O. and Novitskiy, V.V. (2007), “Stability and stabilization of parametric linear dynamical systems”, *Problemy dynamiky ta stiykosti bagatovymirnykh system, Zbirnyk prats In-tu matematyky NAN Ukrainy*, vol. 4, no. 2, pp. 58-71.
7. Streits, V. (1985), *Metod prostranstva sostoyaniy v teorii diskretnykh lineynykh system upravleniya* [Method of state space in the theory of discrete linear control systems], Nauka, Moscow, Russia.
8. Strenг, G. (1980), *Lineynaya algebra i eey primeneniya* [Linear algebra and its application], Mir, Moscow, Russia.
9. Khorn, R. and Dzhonson, Ch. (1989), *Matrichnyy analiz* [Matrix Analysis], Mir, Moscow, Russia.
10. Gantmakher, F.R. (1967), *Teoriya matrits* [Matrix theory], Nauka, Moscow, Russia.
11. Barnett, S. and Cameron, R.G. (1985), [Introduction to Mathematical Control Theory, Second Edition], Clarendon press, Oxford.

УДК 531:383-62:50

СТАБІЛІЗАЦІЯ ТА РОБАСТНА СТІЙКІСТЬ НЕПЕРЕРВНИХ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ

Новицький В. В., д. ф.-м. н., професор, Зінчук М. О., к. ф.-м. н., Тетерятник О. В.

*Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська, 3, Київ-4, 01601, Україна*

Novyc@imath.kiev.ua, E.Teteryatnik@gmail.com

У роботі досліджуються умови стабілізації майже консервативних систем, у яких матриця коефіцієнтів консервативної частини не має кратних власних значень. Крім того, знайдено інтервал, у якому виконуються умови стабілізації для параметра ε , який визначає майже консервативність системи. Наводяться приклади, які ілюструють теоретичний матеріал.

Ключові слова: майже консервативна система, керування, стабілізація, робастна стійкість.

СТАБИЛИЗАЦИЯ И РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕПРЕРЫВНЫХ ПОЧТИ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Новицкий В. В., д. ф.-м. н., профессор, Зинчук Н. А., к. ф.-м. н., Тетерятник Е. В.

*Інститут математики НАН України,
ул. Терещенковская, 3, Киев-4, 01601, Украина*

Novyc@imath.kiev.ua, E.Teteryatnik@gmail.com

В данной работе исследуются условия стабилизации почти консервативных систем, у которых матрица коэффициентов консервативной части не имеет кратных собственных значений. Кроме того, найден интервал, в котором выполняются условия стабилизации для параметра ε , определяющего почти консервативность системы. Приводятся примеры, которые иллюстрируют теоретический материал.

Ключевые слова: почти консервативная система, управление, стабилизация, робастная устойчивость.

STABILIZATION AND ROBUST STABILITY OF CONTINUOUS ALMOST CONSERVATIVE SYSTEMS

Novitsky V. V., D.Sc. in Physics and Maths, professor, Zinchuk M. O., Ph.D in Physics and Maths, Teteryatnik O. V.

*In-t of Mathematics of NAS of Ukraine,
Tereschenkivska str., Kiev-4, 01601, Ukraine*

Novyc@imath.kiev.ua, E.Teteryatnik@gmail.com

Since almost conservative systems research became actual in recent times, it significantly increased the information about the features of such systems and created new means of research. It became known that under certain restrictions on the matrix coefficients of almost conservative system there exists $\varepsilon_0 > 0$ at which the parameter ε from the interval $(0, \varepsilon_0)$ does not affect its stability.

We explored the stabilize conditions of continuous controlled almost continuous conservative system in which the control are occurred by means of linear feedback. A closed system is stabilized, if the coefficient matrix is asymptotically stable, i.e. Lyapunov matrix equation is satisfied. Positively defined matrices are chosen as a power series. Using a special approach, we found the system parameters under which it will be asymptotically stable for sufficiently small values of the parameter, formulated and proved the theorem. An example illustrates the results theorem.

Then it is found interval for parameter ε , in which the conditions of stabilize of the given system are performed. For this, we find a solution Lyapunov matrix equation in a limited decomposition and interval for the parameter in which the matrices are positive definite and formulate another theorem with proof. Example complements the theoretical material.

Key words: almost conservative system, control, stabilization, robust stability.

1. ВСТУП

Оскільки дослідження майже консервативних систем стало актуальним останнім часом, то це значно розширило відомості про особливості таких систем, а також створило нові засоби

досліджень. В [1] було показано, що при деяких обмеженнях на матричні коефіцієнти майже консервативної системи існує таке $\varepsilon_0 > 0$, при якому параметр ε з інтервалу $(0, \varepsilon_0)$ не впливає на її стійкість. Використаємо цей факт при дослідженні умов стабілізованості майже консервативних систем.

Нижче будуть знайдені умови стабілізації майже консервативної системи при достатній малості параметра ε і матриці коефіцієнтів консервативної частини загального вигляду, яка не має кратних власних значень. Далі буде знайдено інтервал для параметра ε , в якому виконуються умови стабілізації даної системи.

2. СТАБІЛІЗАЦІЯ НЕПЕРЕРВНИХ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ

Розглянемо неперервну керовану майже консервативну систему вигляду

$$\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x + \varepsilon B u, \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.1)$$

де $x \in \mathcal{R}_{2n}$ – вектор стану, $A_0 = -A_0^T \in \mathcal{R}_{2n \times 2n}$ – кососиметрична невиврождена матриця, $A_1 \in \mathcal{R}_{2n \times 2n}$ – довільна стала матриця, $u \in \mathcal{R}_m$ – вектор керування, $B \in \mathcal{R}_{2n \times m}$ – матриця при керуванні, ε – малий параметр.

Будемо вважати, що керування системою (2.1) відбувається за допомогою лінійного зворотного зв'язку за станом

$$u = Kx, \quad (2.2)$$

де $K \in \mathcal{R}_{m \times 2n}$ – деяка невідома матриця зі сталими коефіцієнтами.

Замкнена система (2.1), (2.2) буде стабілізованою, якщо за допомогою вибору матриці K матриця коефіцієнтів $A_0 + \varepsilon(A_1 + BK)$ стане асимптотично стійкою, тобто буде справедливим матричне рівняння Ляпунова [2]

$$P[A_0 + \varepsilon(A_1 + BK)] + [A_0 + \varepsilon(A_1 + BK)]^T P = -2Q, \quad (2.3)$$

де P, Q – додатно визначені матриці.

В [3] показано, що матриці P і Q можна вибрати у вигляді степеневих рядів за малим параметром ε

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots, \quad Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \dots. \quad (2.4)$$

Будемо вважати, що ці матричні ряди збіжні.

Позначимо $G = \{g_{ij}\} = [G_1, G_2], H = \{h_{ij}\}; G_1, G_2, H \in \mathcal{R}_{n \times n}$, де

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{2n} (a_{jk}^{i-1})^2, \quad |A_0^{i-1}| \neq 0, \quad A_0^{i-1} = \{a_{jk}^{i-1}\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j, k = \overline{1, 2n},$$

$$h_{ij} = \text{tr} \left[A_0^{2(j-1)} (A_1 + BK) A_0^{i-1} (A_0^T)^{i-1} \right], \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (2.5)$$

Справедливою є наступна теорема.

Теорема 2.1. Нехай загального вигляду кососиметрична матриця A_0 системи (2.1) не має кратних власних значень і $\text{rank } G_1 = n$. Тоді, якщо матриця K і коефіцієнти розкладу

$$P_0 = \alpha_0 I_{2n} + \alpha_2 A_0^2 + \dots + \alpha_{2(n-1)} A_0^{2(n-1)}, \quad (2.6)$$

задовольняють систему нерівностей:

$$0 > G_1^{-1} H \alpha \quad (2.7)$$

і одну з альтернатив

$$\alpha_0 > \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{2n} (j \neq i) |v_{ij}| - v_{ii} \right\}, \quad i = \overline{1, 2n} \quad (2.8)$$

або

Домножимо зліва обидві частини рівняння (2.14) на обернену матрицю G_1^{-1} отримаємо

$$G_1^{-1}H\alpha = -\gamma_1 - G_1^{-1}G_2\gamma_2. \quad (2.17)$$

Отже, завжди існує діагональна додатно визначена матриця Q_1 (2.12) така, що $G_1^{-1}H\alpha = -G_1^{-1}q < 0$, тому що при довільному векторі $\gamma_2 > 0$ вибором $\gamma_1 > 0$ завжди можна отримати $-\gamma_1 - G_1^{-1}G_2\gamma_2 < 0$. З іншої сторони, якщо знайдено вектор $G_1^{-1}H\alpha < 0$, то послідовно спочатку з нерівності $G_1^{-1}H\alpha < -G_1^{-1}G_2\gamma_2$ визначаємо додатний вектор γ_2 , а потім додатний вектор $\gamma_1 = -G_1^{-1}H\alpha - G_1^{-1}G_2\gamma_2$.

Обмеження $rank G_1 = n$ несуттєве, якщо $rank G = n$. За допомогою деякої матриці перестановки $L \in \mathcal{R}_{2n \times 2n}$ завжди можна переставити стовпці матриці G так, щоб виконувалось $rank \widetilde{G}_1 = n$, де $[\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2] = [G_1, G_2]L$. При цьому елементи вектора γ також будуть переставлені, і він дорівнюватиме $L^T \gamma$.

Матриця $P_0 = \{p_{ij}\}_1^{2n}$ має бути додатно визначеною, тому що необхідно побудувати асимптотично стійку матрицю коефіцієнтів замкненої системи (2.1), (2.2). Умови додатної визначеності впливають з теореми Гершгоріна [5]

$$p_{ii} > \sum_{j=1(j \neq i)}^{2n} |p_{ij}|, i = \overline{1, 2n}. \quad (2.18)$$

По аналогії з (2.18) достатню умову для матриці $P_0 = \alpha_0 I_{2n} + V > 0$ можна зобразити через домінуючу діагональ $\alpha_0 I_{2n}$, а саме нерівністю (2.8).

Умову на параметр α_0 можна також записати інакше. Відомо [5], що власні значення додатно визначеної матриці всі додатні, тобто

$$\lambda(P_0) = \lambda(\alpha_0 I_{2n} + V) = \alpha_0 + \lambda(V) > 0,$$

де $\lambda(\cdot)$ - довільне власне значення матриці. Звідси отримуємо умову додатної визначеності матриці P_0 (2.9), яка задає точну нижню грань для параметра α_0 , а умова (2.8) може визначати завищену грань.

Отже, невідомі параметри матриці K і вектора α можна визначити з умов (2.7)-(2.9). Якщо самих параметрів матриці K достатньо для задоволення нерівності (2.7), то спочатку знаходимо конкретну додатно визначену матрицю P_0 з умов (2.8) або (2.9), а потім обчислюємо матрицю K з нерівності (2.7) і вектору $G_1^{-1}H\alpha < 0$ відповідає додатно визначена матриця Q_1 .

Таким чином, маємо додатно визначені матриці P_0, Q_1 і виконується рівність (2.14), тому, у відповідності з розкладами (2.3), матриці $P_i, Q_{i+1}, i = 1, 2, \dots$ не вплинуть на додатну визначеність матриць-розв'язків P, Q . Отже, якщо матриця K задовольняє нерівність (2.7), то матриця коефіцієнтів $A_0 + \varepsilon(A_1 + BK)$ замкненої системи (2.1), (2.2) буде асимптотично стійкою. ■

Відзначимо, що для пошуку матриці K більш підходять формули (2.7), (2.9), коли дані задані в числовому вигляді, а (2.7), (2.8) — в символічному і (або) числовому.

Проілюструємо результати теореми 2.1 на прикладі.

Приклад 2.1. Нехай задана система (2.1), (2.2) з такими параметрами:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K \in \mathcal{R}_{2 \times 4}.$$

Необхідно стабілізувати задану неперервну майже консервативну систему.

Вибираємо матрицю Q_1 діагональної структури $Q_1 = \text{diag}\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ і знаходимо вектор q та матрицю G

$$q = \begin{bmatrix} q_1 + q_2 + q_3 + q_4 \\ q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4 \end{bmatrix}, \quad G = [G_1, G_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матриця A_0 має різні власні значення $\lambda_{1,2} = \pm 1.618033989i$, $\lambda_{3,4} = \pm 0.6180339887i$ і $\text{rank } G_1 = 2$, тому для стабілізації даної системи можна застосувати теорему 2.1.

Далі обчислюємо матриці G_1^{-1} та $G_1^{-1}G$

$$G_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_1^{-1}G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Знаходимо матрицю H і вектор $r = G_1^{-1}H\alpha$, де $K = \{k_{ij}\}$,

$$H = \begin{bmatrix} k_{12} + k_{24} & -2k_{12} - k_{22} - k_{14} - k_{24} \\ 2k_{12} + k_{22} + k_{14} + k_{24} & -5k_{12} - 3k_{22} - 3k_{14} - 2k_{24} \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_2 \end{bmatrix},$$

$$r = \begin{bmatrix} (k_{24} - k_{22} - k_{14})\alpha_0 + (k_{12} + k_{22} + k_{14})\alpha_2 \\ (k_{12} + k_{22} + k_{14})\alpha_0 - (3k_{12} + 2k_{22} + 2k_{14} + 2k_{24})\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

З умов $\alpha_0 > -\lambda_{\min}(V)$, $r < 0$ визначаємо матрицю K і вектор α .

$$r = \begin{bmatrix} -10 \\ -12 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Матриця коефіцієнтів замкненої системи має вигляд

$$A = A_0 + \varepsilon(A_1 + BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -6\varepsilon & -1 + \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 + \varepsilon & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5\varepsilon \end{bmatrix}.$$

Остаточно знаходимо матрицю $P_0 = \alpha_0 I_4 + \alpha_2 A_0 = \text{diag}\{2, 2, 2, 2\}$, а з рівняння $r = -G_1^{-1}G[q_1, q_2, q_3, q_4]^T$ – матрицю $Q_1 = \text{diag}\{6, 7, 5, 4\}$.

3. РОБАСТНА СТІЙКІСТЬ НЕПЕРЕРВНИХ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ

Таким чином, ми знайшли параметри системи (2.1), (2.2), за яких вона буде асимптотично стійкою при достатньо малих значеннях параметра ε . Але бажано знайти інтервал для ε , в якому система асимптотично стійка. Для цього, виходячи з теореми 2.1, необхідно знайти розв'язок матричного рівняння Ляпунова (2.3) в обмеженому розкладі (2.4) та інтервал для параметра ε , в якому матриці P і Q додатно визначені.

Розв'язок цієї задачі дає наступне твердження.

Теорема 3.1. Нехай загального вигляду кососиметрична матриця A_0 не має кратних власних значень, параметри стабілізації системи (2.1), (2.2), знайдені за теоремою 2.1 і симетричні матриці

$$P = P_0 + \varepsilon P_1, \quad Q = \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2, \quad (3.1)$$

задовольняють матричне рівняння Ляпунова (2.3), де матриця $P_0 > 0$ визначається за розкладом (2.6), а $Q_1 > 0$ – з (2.17). Тоді для довільного $\varepsilon \in r(P_0^{-\frac{1}{2}} P_1 P_0^{-\frac{1}{2}}) \cap r(Q_1^{-\frac{1}{2}} Q_2 Q_1^{-\frac{1}{2}})$, де

$$r(\cdot) = \begin{cases} (0, \infty), & \text{якщо } \lambda_{\min}(\cdot) \geq 0, \\ (0, -\lambda_{\min}^{-1}(\cdot)) & \text{якщо } \lambda_{\min}(\cdot) < 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

матриці P , Q будуть додатно визначеними. Тут $\lambda_{\min}(\cdot)$ – мінімальне власне значення матриці.

Доведення. Покажемо, що матриці-розв'язки (3.1) існують.

Матрицю P_0 визначаємо за (2.6) з обчисленими в теоремі 2.1 параметрами α_{2i} , $i = 0, n - 1$ (нерівності (2.8), (2.9) показують її додатну визначеність). Елементи матриці K і вектора α обчислюються з нерівностей (2.7)-(2.9), тому отримуємо від'ємний вектор $G_1^{-1}H\alpha$. В теоремі 2.1 показано, що з рівняння (2.17) при $G_1^{-1}H\alpha < 0$ завжди можна отримати додатно визначену діагональну матрицю Q_1 .

Далі обчислюємо матрицю P_1 з другого рівняння системи (2.11) при відомій правій частині. Вільні параметри покладаємо рівними нулю і прирівнюємо до нуля матриці P_i , Q_{i+1} , $i = 2, 3, \dots$, а матрицю Q_2 обчислюємо за формулою:

$$Q_2 = -\frac{1}{2}P_1(A_1 + BK) - \frac{1}{2}(A_1 + BK)^T P_1, \quad (3.3)$$

Такий спосіб обчислення елементів розкладів (2.4) дає підстави стверджувати, що матриці $P = P_0 + \varepsilon P_1$, $Q = \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2$ задовольняють (2.3).

Тепер знайдемо умови на параметр ε , за яких матриці P , Q будуть додатно визначеними. Від пучка матриць $P_0 + \varepsilon P_1 > 0$ перейдемо до пучка $\bar{P}(\varepsilon) = I + \varepsilon P_0^{-\frac{1}{2}} P_1 P_0^{-\frac{1}{2}} > 0$, який має з першим однакою область значень параметра ε . Дійсно, для будь-якого ненульового вектора $x \in \mathcal{R}_{2n}$ маємо $x^T \bar{P}(\varepsilon)x = x^T P_0^{-\frac{1}{2}} P P_0^{-\frac{1}{2}} x = y^T P y$, де вектор $y = P_0^{-\frac{1}{2}} x \in \mathcal{R}_{2n}$ може набувати довільних значень. Таким чином, знакова визначеність пучка матриць $\bar{P}(\varepsilon)$ впливає зі знакової визначеності пучка P . Зворотне також вірно, тому що $P = P_0^{\frac{1}{2}} \bar{P}(\varepsilon) P_0^{\frac{1}{2}}$.

Матриця $\bar{P}(\varepsilon)$ додатно визначена тоді і тільки тоді, коли всі її власні значення додатні, тобто

$$\lambda(\bar{P}(\varepsilon)) = 1 + \varepsilon \lambda \left(P_0^{-\frac{1}{2}} P_1 P_0^{-\frac{1}{2}} \right) > 0. \quad (3.4)$$

З (3.4) впливає наступне:

а) якщо $\lambda_{\min} \left(P_0^{-\frac{1}{2}} P_1 P_0^{-\frac{1}{2}} \right) < 0$, то $0 < \varepsilon \leq -\lambda_{\min}^{-1} \left(P_0^{-\frac{1}{2}} P_1 P_0^{-\frac{1}{2}} \right)$;

б) якщо $\lambda_{\min} \left(P_0^{-\frac{1}{2}} P_1 P_0^{-\frac{1}{2}} \right) \geq 0$, то $0 < \varepsilon < \infty$.

Випадки а), б) описують інтервали (3.2).

Для пучка матриць $Q_1 + \varepsilon Q_2$ отримуємо аналогічні інтервали. Перетин побудованих інтервалів дає шуканий інтервал. ■

Укажемо на те, що другий інтервал з (3.2) потребує знаходження матриці $P_0^{-\frac{1}{2}}$, що на практиці може бути пов'язане з обчислювальними труднощами. Але, якщо знайти мінімальне додатне власне значення $\lambda_{\min}^+(P(\varepsilon))$ пучка матриць $P(\varepsilon) = P_0 + \varepsilon P_1$, то інтервал $\left(0, -\lambda_{\min}^{-1} \left(P_0^{-\frac{1}{2}} P_1 P_0^{-\frac{1}{2}} \right) \right)$ можна замінити рівним йому $(0, \lambda_{\min}^+(P(\varepsilon)))$. Дійсно, при достатньо малих значеннях параметра ε матриця $P(\varepsilon)$ додатно визначена, тому що для довільного вектора $0 \neq x \in \mathcal{R}_{2n}$ буде виконуватися нерівність $x^T P_0 x + \varepsilon x^T P_1 x > 0$. Рухаючись від початку координат вправо по вісі ε до першого нуля $|P(\varepsilon)|$, визначеність матриці $P(\varepsilon)$ не зміниться, тому що власні значення матриці неперервно залежать від її елементів [5]. Якщо власні значення даного пучка відсутні на строго правій півосі ε , то маємо інтервал $(0, \infty)$. Додатно визначена матриця Q_1 має діагональну структуру (2.12), тому

$$Q_1^{-\frac{1}{2}} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\sqrt{q_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{q_{2n}}} \right\}.$$

Продовжимо розгляд прикладу 2.1.

Приклад 3.1. Знайти інтервал для параметра ε , в якому знайдена в прикладі 2.1 матриця коефіцієнтів замкненої системи (2.1), (2.2) буде асимптотично стійкою.

З другого рівняння системи (2.11) при відомій правій частині

$$P_0(A_1 + BK) + (A_1 + BK)^T P_0 + 2Q_1 = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

знаходимо матрицю $P_1 = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 & -5 \\ 6 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, а матрицю Q_2 обчислюємо за формулою

$$(3.3) Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 18 & -3 & -25/2 \\ 18 & 25 & -5 & -3 \\ -3 & -5 & 1 & 15 \\ -25/2 & -3 & 15 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далі знаходимо мінімальні додатні власні значення пучків матриць $P_0 + \mu P_1$, $Q_1 + \delta Q_2$

$$|P_0 + \mu P_1| = 16 - 328\mu^2 + 64\mu - 784\mu^3 + 385\mu^4,$$

$$|Q_1 + \delta Q_2| = 840 + 3168\delta - 21920.75\delta^2 - 37140\delta^3 + 62721\delta^4,$$

$$\mu_{min}^+ = 0.253342947, \delta_{min}^+ = 0.2431148113.$$

В інтервалах $\varepsilon \in (0, \mu_{min}^+)$ і $\varepsilon \in (0, \delta_{min}^+)$ відповідно матриці $P_0 + \varepsilon P_1$, $Q_1 + \varepsilon Q_2$ будуть додатно визначеними. Їх спільний інтервал $(0, 0.2431148113)$ для параметра ε дасть асимптотично стійку матрицю коефіцієнтів замкненої системи.

ВИСНОВКИ

У роботі досліджено умови стабілізації неперервних керованих майже консервативних систем, у яких матриця коефіцієнтів консервативної частини не має кратних власних значень. Використовуючи спеціальний підхід та розклад в степеневі ряди, знайдено параметри системи, за яких вона буде асимптотично стійкою при достатньо малих значеннях параметра ε .

На основі рівняння Ляпунова знайдено інтервал для параметра ε , в якому виконуються умови стабілізації даних систем. Сформульовані та доведенні відповідні теореми.

Наведено приклади знаходження параметрів системи, при яких вона стабілізована, та знайдено інтервал для параметра ε , в якому замкнена система буде асимптотично стійкою.

Запропоновані теореми та приклади можуть бути використані при дослідженні різних механічних систем, математичними моделями яких є неперервні майже консервативні системи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Зінчук М. О. Стійкість та стабілізація лінійних параметричних динамічних систем / М. О. Зінчук, В. В. Новицький // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2007. – Т. 4, № 2. – С. 58-71.
2. Barnett S. Introduction to Mathematical Control Theory. Second Edition / S. Barnett, R. G. Cameron. – Oxford : Clarendon press, 1985. – 404 p.
3. Новицький В. В. Рівняння Ляпунова для майже консервативних систем / В. В. Новицький. – Київ, 2004. – 34 с. – (Препр. / НАН України. Ін-т математики; 2004.7).
4. Прасолов В. В. Задачи и теоремы линейной алгебры / В. В. Прасолов. – М. : Наука, 1996. – 304 с.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1988. – 552 с.

REFERENCES

1. Zinchuk, M.O. and Novyts'kyu, V.V. (2007), "Stability and stabilization linear parametric dynamic systems", *Zb. prats' In-tu matematyky NAN Ukrainy*, vol. 4, no. 2, pp. 58-71.
2. Barnett, S. and Cameron, R.G. (1985), [Introduction to Mathematical Control Theory. Second Edition], Clarendon press, Oxford.
3. Novyts'kyu, V.V. (2004), *Rivnyannya Lyapunova dlya mayzhe konservatyvnykh system* [Lyapunov equations for almost conservative systems], Prepr. In-t matematyky NAN Ukrainy, Kyiv, Ukraine.
4. Prasolov, V.V. (1996), *Zadachy u teoremy lyneynoy alheby* [Problems and theorems of linear algebra], Nauka, Moscow, Russia.
5. Hantmakher, F.R. (1988), *Teoryya matryts* [Matrix theory], Nauka, Moscow, Russia.

УДК 539.3

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ В ТЕОРИИ ТОНКОСТЕННЫХ СИСТЕМ

Ободан Н. И., д. техн. н., профессор, Адлуцкий В. Я., к. ф.-м. н., с. н. с.,
Громов В. А., к. ф.-м. н., с. н. с.

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара,
просп. Гагарина, 72, Днепропетровск, Украина*

stroller@rambler.ru

В статье рассматривается обратная задача теории бифуркаций в теории тонкостенных систем как задача диагностики предбифуркационного состояния возмущенной тонкостенной системы. Используется топологический предвестник бифуркации, построенный на основе характерных последовательностей форм деформации, полученных путём кластеризации обучающей выборки, сгенерированной на основе закритических решений нелинейной краевой задачи теории оболочек. Предложенный метод решения был применён к идентификации предбифуркационного состояния цилиндрической оболочки, находящейся под действием внешнего давления, близкого к критическому, подвергнутой импульсному воздействию.

Ключевые слова: обратная задача теории бифуркаций, топологический предвестник, структура ветвления решения, тонкостенная оболочка.

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ БІФУРКАЦІЙ У ТЕОРІЇ ТОНКОСТІННИХ СИСТЕМ

Ободан Н. И., д. техн. н., професор, Адлуцкий В. Я., к. ф.-м. н., с. н. с.,
Громов В. О., к. ф.-м. н., с. н. с

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара,
просп. Гагаріна, 72, Дніпропетровськ, Україна*

stroller@rambler.ru

У статті розглянуто обернену задачу теорії бифуркацій у теорії тонкостінних систем як задачу діагностики передбифуркаційного стану збуреної тонкостінної системи. Використовується топологічний передвісник бифуркації, побудований на основі характерних послідовностей форм деформації, одержаних за допомогою навчальної вибірки, згенерованої з закритичних розв'язків нелінійної крайової задачі теорії оболонок. Запропонований метод розв'язання застосовано до ідентифікації передбифуркаційного стану циліндричної оболонки, що знаходиться під дією зовнішнього тиску, близького до критичного, що піддана імпульсному впливу.

Ключові слова: обернена задача теорії бифуркацій, топологічний передвісник, структура галуження розв'язку, тонкостінна оболонка.

INVERSE PROBLEM OF BIFURCATION THEORY FOR THIN-WALLED SYSTEMS THEORY

Obodan N. I., D Sc (Tech.), Adlutcky V. J., Ph D (Phys.-Math.), Gromov V. O., Ph D (Phys.-Math.)

*Oles Honchar Dnepropetrovsk national university,
Gagarina, ave., 72, Dnepropetrovsk, Ukraine*

stroller@rambler.ru

Paper focuses on an inverse bifurcation problem in thin-walled systems theory. The problem implies identification pre-bifurcation state of perturbed thin-walled system. The topological precursor used is based on typical sequences of deformed states extracted from clustered post-critical solutions of non-linear boundary problem of thin-walled systems theory. The proposed approach was employed to identify a pre-bifurcation state of a cylindrical shell under uniform pressure (close to the critical) subjected to a pulse impact.

Key words: inverse problem of bifurcation theory, topological precursor, bifurcation structure, thin-walled shell.

ВВЕДЕНИЕ

Широкий спектр явлений, связанных с качественной сменой поведения нелинейных систем, делает необходимым анализ явлений, непосредственно предшествующих бифуркации: «флагов», «отпечатков пальцев» катастрофы, либо предвестников бифуркации [1]. Именно в определении и анализе предвестников бифуркации и заключается обратная задача теории бифуркаций.

Магистральным направлением здесь является анализ динамических систем с шумами различной природы, причём предвестником бифуркации служит резкое увеличение амплитуды шума при приближении к точке бифуркации, а также изменение его характеристик. Такого рода предвестники получили название шумовых. Здесь возможно построение предвестников бифуркации для детерминированных систем с аддитивным шумом той или иной природы и для стохастических систем [2]. Так, в работе [3] исследуется изменение спектра шума при приближении к аттрактору типа предельный цикл; серия работ [4, 5] посвящена предбифуркационному усилению шума в нелинейных отображениях. Работа [1] ставит цель не просто предсказать приближение бифуркации, но и определить её тип по виду распределения случайных составляющих наблюдаемой системы.

Существенным недостатком шумовых предвестников является необходимость наличия для их вычисления весьма длинных стационарных временных рядов, что невозможно в случае нестационарных или сильно зашумленных данных [2]. Естественно, данное требование несовместимо с необходимостью оперативного принятия решений в системах быстрой оценки живучести.

В некоторой степени указанного недостатка лишены топологические предвестники. Так, в работе [2] рассматривается предвестник, основанный на статистическом анализе структуры последовательности, генерируемой отображением Пуанкаре исследуемой системы. Метод основывается на независимости указанной структуры от конкретного вида дифференциальных уравнений в окрестности той или иной бифуркации и существовании характерных последовательностей наблюдений в данной окрестности. В частности, в указанной статье авторы рассматривают случай бифуркации удвоения периода предельного цикла. В целом, применение топологических предвестников для предсказания бифуркаций в конкретной системе требует знания возможных бифуркаций.

Ещё один способ построения топологических предвестников, связанный с обнаружением неустойчивых предельных циклов (UPO – unstable periodic orbit), представлен в работах [6, 7]. В работе [8] решается обратная задача теории бифуркаций для суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа (бифуркации рождения цикла); представлены результаты вычислительного и натурального эксперимента. Здесь в качестве предвестника бифуркации

выступает явление когерентного резонанса (coherence resonance, CR), состоящее в возникновении согласованности в индуцированных шумом колебаниях различных элементов системы.

В настоящей работе предлагается подход к решению обратной задачи бифуркации в теории тонкостенных систем, в рамках которого в качестве предвестника бифуркации выступают характерные последовательности форм деформации, фиксируемые на закритических ветвях решения нелинейной краевой задачи теории тонкостенных систем. Данный подход предполагает знание полной бифуркационной картины нелинейной краевой задачи теории тонкостенных систем. Указанную картину для случаев тонкостенной цилиндрической оболочки, подвергнутой действию равномерного внешнего давления, и цилиндрической оболочки, подвергнутой действию равномерного осевого сжатия, можно найти в монографии [9].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача о диагностике предбифуркационного состояния тонкостенной системы, подвергнутой воздействию, не предусмотренному проектом; состояние описывается последовательностью форм деформации во времени путём мониторинга указанной системы. Модель изменения наблюдаемой формы деформирования представляет собой последовательность следующих друг за другом форм деформации. Решение обратной задачи путём отыскания предвестников бифуркаций предполагает установление характерных последовательностей форм, ведущих к потере устойчивости.

Массовый численный эксперимент показал, что как в случае колебаний вокруг исходного состояния, так и в случае процесса потери устойчивости наблюдаемые формы деформации по отдельности могут быть весьма схожими, однако последовательности форм, соответствующие первому и второму случаю, весьма отличны друг от друга. Во втором случае последовательность наблюдаемых в течении предбифуркационного процесса форм, может быть соотнесена с формами, наблюдаемыми на некотором участке закритической ветви, в первом – представляют собой хаотическую последовательность форм.

Соответственно, в качестве предвестника бифуркации здесь выступает характерная последовательность форм деформации оболочки, близких к тем, которые наблюдаются на закритических ветвях решения нелинейной краевой задачи теории тонкостенных систем.

Обратная задача определения апостериорного бифуркационного состояния может быть сформулирована как

$$C_{\text{bif}} = \arg \min_{C \in \mathfrak{Z}} \rho_C(C, C^*), \quad (1)$$

где $\rho_C(C, C^*)$ – расстояние в евклидовой метрике между подмножеством C^* последовательности наблюдаемых и последовательностью C возможных закритических состояний тонкостенной оболочки, \mathfrak{Z} – множество предвестников бифуркации.

Наблюдаемая последовательность форм $C^* = \{u^*(t_0), u^*(t_1), \dots, u^*(T)\}$, отражает поведение тонкостенной системы как последовательность состояний $u^*(t_i) = \{u_k^*(t_i)\}$, описываемых с помощью значений перемещений в фиксированных $k = \overline{1, K}$ точках поверхности оболочки в равноотстоящие моменты времени t_i . Здесь и далее T – момент времени, в который осуществляется идентификация.

Предвестник бифуркации также представляет собой характерную последовательность форм деформации $C = \{u_C(T - t_0^{(C)}), u_C(T - t_1^{(C)}), \dots, u_C(T - t_{t_c}^{(C)})\}$, которую можно поставить в соответствие неравноотстоящим моментам времени $T - t_0^{(C)}, T - t_1^{(C)}, \dots, T - t_{t_c}^{(C)}$, где величины

$t_0^{(C)}, t_1^{(C)}, \dots, t_{t_c}^{(C)}$ характерны для данного конкретного предвестника. Эвклидово расстояние $\rho_C(C, C^*)$ в момент времени T вычисляется как сумма эвклидовых расстояний между наблюдаемыми $u^*(T - t_s^{(C)})$ и характерными для данного предвестника $u_C(T - t_s^{(C)})$ формами деформации:

$$\rho_C(C, C^*) = \sum_{s=0}^{t_c} \rho(u_C(T - t_s^{(C)}), u^*(T - t_s^{(C)})). \quad (2)$$

Под моделью обратной задачи будем понимать функциональное отображение $F: C^* \rightarrow \mathfrak{Z}$, ставящее в соответствие последовательности наблюдаемых форм деформации C^* конкретный предвестник из \mathfrak{Z} .

МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Для построения топологических предвестников бифуркации в теории тонкостенных систем осуществлялось выявление характерных последовательностей форм деформации путём кластеризации форм деформации, соответствующих совокупности закритических ветвей решения рассматриваемой нелинейной краевой задачи: в такой постановке каждый кластер будет связан с некоторым участком закритической ветви.

Алгоритм состоит из двух частей. Первая – это кластеризация множества последовательностей закритических форм, составленных из наблюдений, соответствующих множеству предопределённых шаблонов, и последующего выявления характерных последовательностей наблюдений (центры кластеров). Вторая часть предусматривает идентификацию наблюдаемой динамики с использованием полученных характерных последовательностей.

Обучающая выборка для первой части алгоритма формировалась из векторов, составленных из последовательностей закритических форм деформации по определённому шаблону: под шаблоном здесь понимается фиксированная последовательность расстояний между позициями наблюдений в последовательности, которые займут соседние позиции в формируемом векторе наблюдений. Используемый алгоритм кластеризации (модифицированный алгоритм Уишарта [10]) применялся к выборкам, полученным с помощью всех возможных шаблонов длины 4. Для каждой такой выборки формировался свой набор кластеров.

Перед началом кластеризации формы нормировались максимальным значением прогиба w_{\max} , что позволило кластеризовать не характерные амплитуды, но характерные формы деформации. Это приводит к снижению числа кластеров. При сравнении характерных последовательностей (центров кластеров) с последовательностями форм, наблюдаемыми в конечноэлементном расчёте, последние подвергались той же процедуре нормализации. В качестве расстояния везде использовалось эвклидово; векторы формировались из значений наблюдений в точках фиксированной сетки.

Одному участку закритической ветви между двумя соседними экстремумами обычно отвечают один-три кластера. В среднем участок закритической ветви, отвечающий одному кластеру, соответствует 5-7% вариации в значении параметра нагружения.

Таким образом, одному значению параметра внешней нагрузки соответствует число кластеров, равное числу закритических решений нелинейной краевой задачи, существующих для данного значения параметра нагружения, что делает возможным быстрое решение задачи диагностики (для заданного значения параметра нагружения). Общее число кластеров также невелико. Совокупность центров таким образом построенных кластеров образует множество топологических предвестников бифуркации \mathfrak{Z} для обратной задачи бифуркации в теории тонкостенных систем.

Если, при этом алгоритм не может отнести наблюдаемую последовательность форм ни к одному из кластеров (непредсказываемые точки в терминах парадигмы предсказания на основе кластеризации), считается, что наблюдаются колебания системы вокруг формы деформации, соответствующей докритической ветви, – внешнего возмущения оказалось недостаточно, чтобы вывести систему в закритическую область.

Следует подчеркнуть, что центр каждого из кластеров может рассматриваться как усреднённое представление различных вариантов поведения теряющей устойчивость тонкостенной системы в окрестности соответствующего участка закритической ветви. Указанное усреднение приводит к ухудшению качества идентификации за счёт использования средних значений (идентификация осуществляется с использованием центров кластеров), и одновременно к её улучшению, вызванному взаимным уничтожением случайных составляющих противоположных знаков, неизбежно присутствующих в реальных наблюдениях и расчётах. Используемый метод кластеризации задаёт вариант компромисса между этими тенденциями.

При идентификации наблюдаемой последовательности форм (вторая часть алгоритма) использовались центры полученных кластеров, рассчитанные для всех используемых шаблонов. А именно, для текущей позиции (алгоритм пытается осуществить идентификацию, начиная с самого первого наблюдения) из предыдущих наблюдений (форм деформации) составлялись векторы в соответствии с каждым из использованных шаблонов таким образом, чтобы последняя позиция в шаблоне совпадала с позицией, для которой требуется осуществить идентификацию.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СЛУЧАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Приведенный выше алгоритм был применён для идентификации предбифуркационного состояния цилиндрической оболочки, находящейся под действием внешнего давления λ , близкого к критическому, подвергнутой импульсному воздействию. Расчёты проводились в пакете конечноэлементного анализа COSMOSM 2.6. На рис. 1 представлены последовательности форм деформации, отвечающие уровню внешнего давления $\lambda = 0.9$, для первой последовательности амплитуда приложенного импульса составляет $A = 50.0 H$, для второй – $A = 100.0 H$.

Здесь важно отметить, что как в случае сохранения близкого к исходному состояния (см. рис. 1, верхняя последовательность), так и в случае процесса потери устойчивости (нижняя последовательность), наблюдаемые формы деформации по отдельности могут быть весьма схожими, однако последовательности форм, соответствующие первому и второму случаю, весьма отличны друг от друга. Во втором случае последовательность, наблюдаемых в течении предбифуркационного процесса форм, может быть соотнесена с формами, наблюдаемыми на некотором участке закритической ветви, в первом – представляют собой хаотическую последовательность форм.

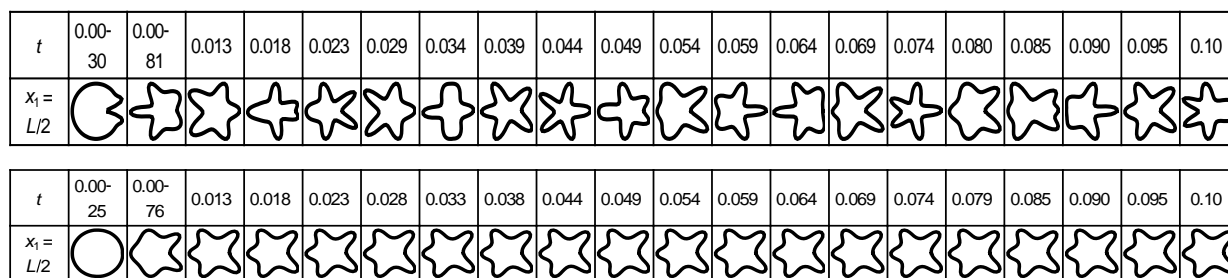


Рис. 1. Характерные последовательности форм деформации: (верхняя) сохранение деформированного состояния, близкого к исходному ($A = 50.0 H$); (нижняя) потеря устойчивости (конечная форма деформации – регулярная, пять волн) ($A = 100.0 H$)

Для сравнения в табл. 1 [9] приведены формы закритической деформации для случая цилиндрической оболочки, подвергнутой действию равномерного внешнего давления, отвечающие указанным в левой колонке значениям нагрузки (нагрузка выражена в долях оценки критической нагрузки, полученной в рамках линейной теории).

Таблица 1 – Характерные закритические формы деформации

Уровень нагрузки	Форма			Форма			Форма			Форма			Форма		
	$\ w\ _{L_2}$	$\frac{\ w\ _{L_2}}{\ w\ _C}$	$\frac{\ w\ _{w^2}}{\ w\ _C}$	$\ w\ _{L_2}$	$\frac{\ w\ _{L_2}}{\ w\ _C}$	$\frac{\ w\ _{w^2}}{\ w\ _C}$	$\ w\ _{L_2}$	$\frac{\ w\ _{L_2}}{\ w\ _C}$	$\frac{\ w\ _{w^2}}{\ w\ _C}$	$\ w\ _{L_2}$	$\frac{\ w\ _{L_2}}{\ w\ _C}$	$\frac{\ w\ _{w^2}}{\ w\ _C}$	$\ w\ _{L_2}$	$\frac{\ w\ _{L_2}}{\ w\ _C}$	$\frac{\ w\ _{w^2}}{\ w\ _C}$
	Описание			Описание			Описание			Описание			Описание		
$\lambda = 0.9$															
	11.2	0.76	14.1	5.94	0.97	17.1	16.5	0.98	8.9	52.1	1.03	6.65	15.1	1.05	25.6
	3l:6 _{min} → 5 _{min}			5 _{max} (5 _{min})			4 _{max} (4 _{min})			3 _{max} (3 _{min})			6 _{max} (6 _{min})		
$\lambda = 0.8$															
	6.67	0.54	8.71	7.14	0.67	5.31	65.9	0.72	4.81	7.12	0.74	12.1	50.5	0.94	8.3
	3l:5 _{min} → 4 _{min}			2l:6 _{min} → 4 _{min}			3l:5 _{max} → 3 _{max}			2l:5 _{min} → 4 _{max}			2l:4 _{max} → 3 _{max}		
	18.4	0.99	9.2	55.1	1.02	7.55	23.0	1.03	15.2						
	48.0	1.02	13.6	64.6	1.07	8.86	10.5	1.04	17.7						
4 _{min} (4 _{max})			3 _{max} (3 _{min})			5 _{max} (5 _{min})									
$\lambda = 0.7$															
	8.48	0.49	7.18	23.2	0.61	6.97	32.2	0.64	8.36	8.82	0.7	10.7	12.7	0.7	10.1
				16.2	0.78	11.5	15.1	0.76	11.6				25.1	0.72	1
													24.8	0.72	7.8
												12.6	0.7	1	
														7.8	
														3	
														10.1	
														1	
3l:5 _{min} → 4 _{min}			3l:5 _{max} → 3 _{max}			3l:5 _{max} → 3 _{max}			2l:5 _{min} → 4 _{max}			2l:5 _{max} → 3 _{min}			
			3l:6 _{min} → 5 _{min}									2l:6 _{min} → 5 _{min}			

Продолжение табл. 1

	13.1 0.77 10.9 13.0 0.77 10.9 15.3 0.81 12.3 15.3 0.81 12.2	36.7 0.81 6.95 35.7 0.81 7.01	79.2 0.98 6.28	20.0 0.99 9.8 44.0 1.03 12.4	52.1 1.03 6.5 62.7 1.06 5 7.8 6
	4l : 5 _{max} → 3 _{min} 2l : 6 _{max} → 5 _{min}	3l : 5 _{max} → 3 _{min} 3l : 6 _{max} → 5 _{min}	2l : 4 _{max} → 3 _{max}	4 _{min} (4 _{max})	3 _{max} (3 _{min})
$\lambda = 0.6$					
	12.4 .49 6.1 22.3 .61 6.2	13.4 0.68 8.91 30.4 0.78 7.07	23.0 0.82 9.67 35.3 0.91 8.01	22.4 0.97 10.4 39.2 1.02 11.3	57.9 1.03 7.1 58.3 1.06 9 7.2 4
	3l : 5 _{min} → 4 _{min}	2l : 5 _{min} → 4 _{max}	3l : 5 _{min} → 3 _{max}	4 _{min} (4 _{max})	3 _{max} (3 _{min})
$\lambda = 0.5$					
	25.8 0.85 8.82	27.3 0.89 9.16	26.2 0.92 10.4	24.5 0.95 10.5 25.1 1.01 10.8	
	2l : 5 _{min} → 4 _{max}	3l : 5 _{min} → 4 _{min}	2l : 6 _{min} → 4 _{min}	4 _{min} (4 _{max})	

Было установлено, что, несмотря на схожесть отдельных форм деформации в двух указанных случаях, последовательности форм, ведущих к потере устойчивости, типичны и отвечают характерным последовательностям, выделенным в процессе кластеризации форм деформации, соответствующих устойчивым участкам закритических ветвей. На рис. 2 представлено сопоставление наблюдаемых форм деформации с характерными последовательностями (центрами кластеров); в средней строке представлены формы, полученные в конечноэлементном расчёте, в последней – центры выбранных алгоритмом кластеров. Здесь первый кластер отвечает регулярной ветви с четырьмя волнами (ср. табл. 1, $\lambda = 0.9$, третья форма слева), второй – с пятью волнами (ср. табл. 1, $\lambda = 0.9$, вторая форма слева), третий – первому восходящему участку локальной ветви (ср. Табл. 1, $\lambda = 0.6$, первая форма слева).

Для корректной идентификация предбифуркационного состояния достаточно осуществлять сопоставление результатов наблюдений с центрами кластеров на временном отрезке $0 < t < t^* \sim 2 \cdot 10^{-2}$ (что существенно меньше времени развития больших перемещений $t \sim 10^{-1}$); при этом классификация осуществляется за время порядка $t_p \sim 10^{-4}$; в случае неотнесения наблюдаемой последовательности форм ни в один из классов считается, что наблюдаются

колебания в окрестности докритического состояния. Это позволяет диагностировать процесс потери устойчивости до его завершения, что актуально для систем автоматической диагностики.

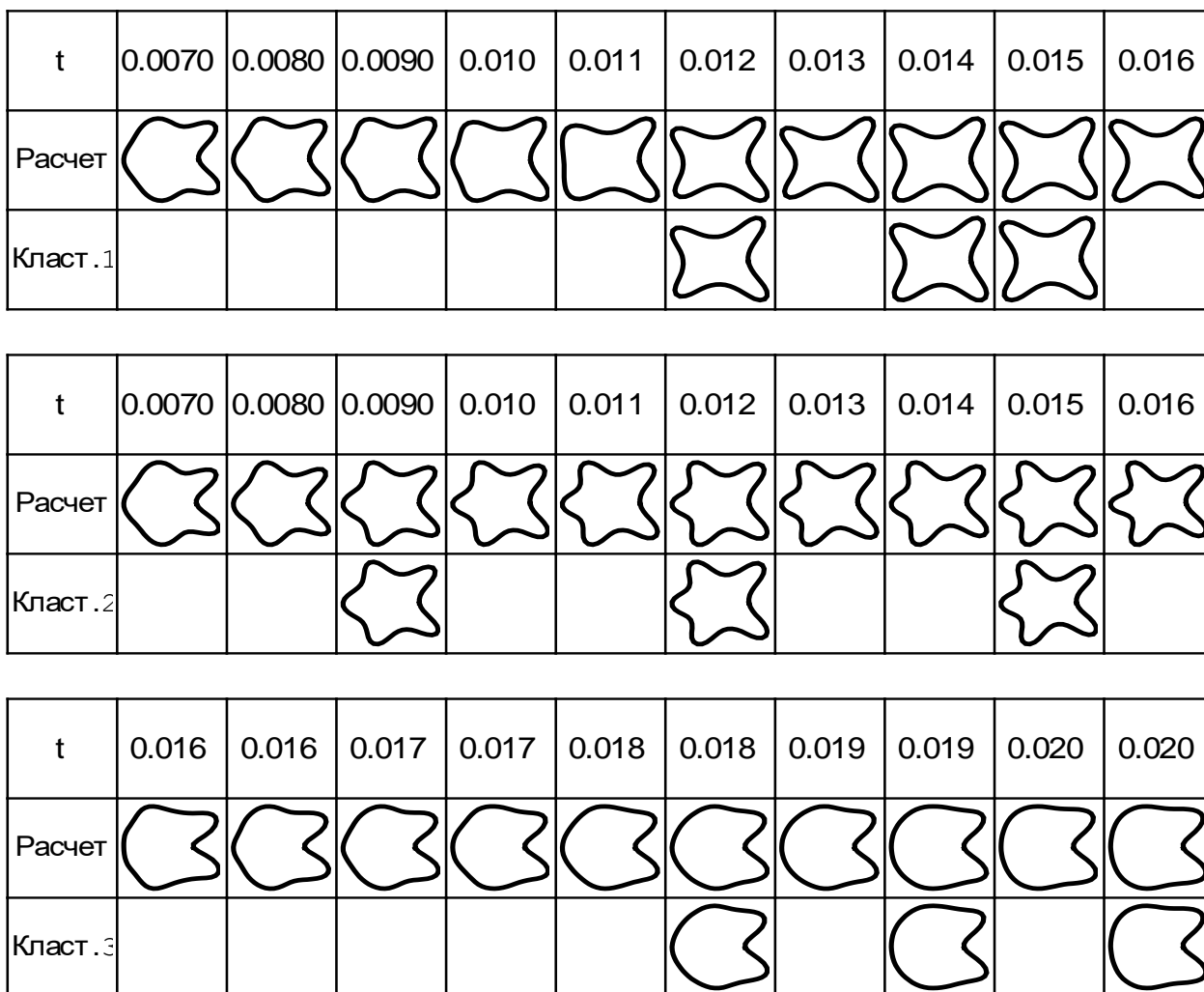


Рис. 3. Сопоставление форм деформации, полученных в конечноэлементном расчёте (средняя строка) с характерными последовательностями

ВЫВОДЫ

1. Для фиксации и оценки предбифуркационного состояния могут быть использованы характерные последовательности форм деформации, полученные путём кластеризации обучающей выборки, сгенерированной на основе закритических решений нелинейной краевой задачи теории оболочек.
2. Необходимым предусловием формирования обучающей выборки является знание полной картины ветвления нелинейной краевой задачи теории тонкостенных систем, что достигается на путях решения прямой задачи теории бифуркаций.
3. Предлагаемый метод прогноза предбифуркационного состояния может быть использован для оценки уязвимости реальных тонкостенных конструкций, находящихся в условиях мониторинга, в процессе эксплуатации при аварийных внешних воздействиях

ЛИТЕРАТУРА

1. Зульпукаров М.-Г. М. Обратная задача теории бифуркаций в динамических системах с шумом / М.-Г. М. Зульпукаров, Г. Г. Малинецкий, А. В. Подлазов // Препринт ИПМ РАН. – 2005. http://keldysh.ru/papers/2005/prep39/prep2005_39.pdf.

2. Omberg L. Detecting the onset of bifurcations and their precursors from noisy data / L. Omberg, K. Dolan, A. Neiman, F. Moss // *Physical Review E*. – 2000. – Vol. 61, № 5. – P. 4848-4853.
3. Wiesenfeld K. Virtual Hopf phenomenon: A new precursor of period-doubling bifurcations / K. Wiesenfeld // *Physical Review A*. – 1985. – Vol. 32, № 3. – P. 1744-1751.
4. Kravtsov Yu. A. Nonlinear saturation of prebifurcation noise amplification / Yu. A. Kravtsov, E. D. Surovyatkina // *Physics Letters A*. – 2003. – Vol. 3199, № 3-4. – P. 348-351.
5. Surovyatkina E. Prebifurcation noise amplification and noise-dependent hysteresis as indicators of bifurcations in nonlinear geophysical systems / E. Surovyatkina // *Nonlinear Processes in Geophysics*. – 2005. – Vol. 12. – P. 25-29.
6. Pierson D. Detecting Periodic Unstable Points in Noisy Chaotic and Limit Cycle Attractors with Applications to Biology / D. Pierson, F. Moss // *Phys. Rev. Lett* 75. – 1995. – Vol. 75, № 11. – P. 2124-2135.
7. Pei X. Characterization of low-dimensional dynamics in the crayfish caudal photoreceptor / X. Pei, F. Moss // *Nature*. – 1996. – Vol. 379, № 6566. – P. 618-621.
8. Kiss I. Z. Experiments on coherence resonance: Noisy precursors to Hopf bifurcations / I. Z. Kiss, J. L. Hudson // *Physical Review E*. – 2003. – Vol. 67. – P. 15-19.
9. Obodan N. I. Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells / N. I. Obodan, O. G. Lebedeyev, V. A. Gromov. – N.-Y. : Springer, 2013. – 180 p.
10. Лапко А. В. Непараметрические системы обработки информации / А. В. Лапко, С. В. Ченцов. – Новосибирск : Наука, 2000. – 352 с.

REFERENCES

1. Zulpukarov, M.-G.M., Malinetskii, G.G. and Podlazov, A.V. (2005), “Inverse bifurcation problem for noised dynamical systems with noise”, *Preprint of Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS*.
2. Omberg, L., Dolan, K., Neiman, A. and Moss, F. (2000), “Detecting the onset of bifurcations and their precursors from noisy data”, *Physical Review E*, vol. 61, no. 5, pp. 4848-4853.
3. Wiesenfeld, K. (1985), “Virtual Hopf phenomenon: A new precursor of period-doubling bifurcations”, *Physical Review A*, vol. 32, no. 3, pp. 1744-1751.
4. Kravtsov, Yu.A. and Surovyatkina, E.D. (2003), “Nonlinear saturation of prebifurcation noise amplification”, *Physics Letters A*, vol. 3199, no. 3-4, pp. 348-351.
5. Surovyatkina, E. (2005), “Prebifurcation noise amplification and noise-dependent hysteresis as indicators of bifurcations in nonlinear geophysical systems”, *Nonlinear Processes in Geophysics*, vol. 12, pp. 25-29.
6. Pierson, D. and Moss, F. (1995), “Detecting Periodic Unstable Points in Noisy Chaotic and Limit Cycle Attractors with Applications to Biology”, *Phys. Rev. Lett* 75, vol. 75, no. 11, pp. 2124-2135.
7. Pei, X. and Moss, F. (1996), “Characterization of low-dimensional dynamics in the crayfish caudal photoreceptor”, *Nature*, vol. 379, no. 6566, pp. 618-621.
8. Kiss, I.Z. and Hudson, J.L. (2003), “Experiments on coherence resonance: Noisy precursors to Hopf bifurcations”, *Physical Review E*, vol. 67, pp. 15-19.
9. Obodan, N.I., Lebedeyev, O.G. and Gromov, V.A. (2013), *Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells*, Springer, New-York.
10. Lapko, A.V. and Chentsov, S.V. (2000), *Непараметрические системы обработки информации* [Non-parametric systems of information processing], Nauka, Novosibirsk.

УДК 539.312

НЕСТАЦІОНАРНА ДЕФОРМАЦІЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ У ПРУЖНОМУ ПРОСТОРІ ПІД ДІЄЮ ПОВЕРХНЕВИХ НАВАНТАЖЕНЬ, ЩО РОЗШИРЮЮТЬСЯ

¹Пожуєв А. В., ²Фасоляк А. В.

¹Запорізька державна інженерна академія,
просп. Соборний, 226, Запоріжжя, 69000, Україна

²Запорізький національний технічний університет,
вул. Жуковського, 64, Запоріжжя, 69063, Україна

¹scorpio1@mail.ru, ²antonfasolyak@mail.ru

Розглядається тривимірний пружний простір з циліндричним включенням, підкріпленим оболонкою. Розглянуто випадки, коли на поверхню оболонки діють віссиметричні динамічні нормальні навантаження. Рух простору описувався динамічними рівняннями теорії пружності, а рух оболонки описувався трьома методами: динамічними рівняннями теорії пружності, рівняннями, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко), а також класичними рівняннями теорії тонких оболонок, які ґрунтуються на гіпотезі Кірхгофа-Лява. Задача розв'язана методом інтегральних перетворень Фур'є (за осьюою змінною), та Лапласа (за змінною часу), обертання яких проводилось чисельно. Отримані результати проілюстровано графічно.

Ключові слова: циліндрична оболонка, пружний простір, динамічне навантаження, віссиметрична задача.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСШИРЯЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ НАГРУЗОК

¹Пожуєв А. В., ²Фасоляк А. В.

¹Запорожская государственная инженерная академия,
просп. Соборный, 226, Запорожье, 69000, Украина

²Запорожский национальный технический университет,
ул. Жуковского, 64, Запорожье, 69063, Украина

¹scorpio1@mail.ru, ²antonfasolyak@mail.ru

Рассматривается трехмерное упругое пространство с цилиндрическим включением, подкрепленным оболочкой. Рассмотрены случаи, когда на поверхность оболочки действуют осесимметрические нормальные нагрузки. Движение пространства описывается динамическими уравнениями теории упругости, а движение оболочки описывается тремя методами: динамическими уравнениями теории упругости, уравнениями, которые учитывают поперечный сдвиг и инерцию вращения (оболочка типа Тимошенко), а также классическими уравнениями теории тонких оболочек, которые удовлетворяют гипотезе Кирхгофа-Лява. Задача решена методом интегральных преобразований Фурье (по осевой координате) и Лапласа (по переменной времени), обращение которых проводилось численно. Полученные результаты проиллюстрированы графически.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, упругое пространство, динамическая нагрузка, осесимметрическая задача.

NON-STATIONAR DEFORMATION OF CYLINDRICAL SHELL IN ELASTIC MEDIUM, SUBJECTED TO EXTENDING SURFACE LOADS

¹Pozhuev A. V., ²Fasoliak A. V.

¹Zaporizhzhya state engineering academy,
Sobornyy av., 226, Zaporizhzhya, 69000, Ukraine

²Zaporizhzhya national technical university,
Zhukovsky str, 64, Zaporizhzhya, 69063, Ukraine

¹scorpio1@mail.ru, ²antonfasolyak@mail.ru

Infinite cylindrical shell, embded in three-dimensional elastic space is considered. Case, when extended impulsive axi-symmetrical normal load is subjected to surface of the shell, is studied. Axi-symmetrical

normal load, which depends on time as unit Heaviside function is considered too. For the results to be compared, static load corresponding to the second dynamic load is considered.

Space motion is described by elastic theory dynamic equations. Shell's motions, with purpose to compare results, are described by three methods: elastic theory dynamic equations; equations, that consider transversal shift and rotary inertia (Timoshenko's shell) and classic thin shells theory equations, based on Kirchhoff-Love theory.

Elastic theory dynamic equations are solved by method of two potential functions. Then integral transform technique is used. Fourier transform on axial variable, and Laplace transform on time are used.

Transform solutions for displacements and stresses are inversed numerically. Filon's method (to inverse Fourier transform) and the displaced Legendre's polynoms method (to inverse Laplace transform) are used.

Dependence of shell's radial displacements and stresses on load's extension velocity is studied. It is shown, that shell's radial displacements and stresses aspire to zero in large timescales

Radial displacements and stresses for normal load, that depend on time as unit Heaviside function, are observed to aspire to static solution in large timescales.

Based on the received results, we can conclude that the results of shell's motions approximate descriptive methods and exact solutions are almost coincide with that was shown on graphs. Therefore in the following works we can use only one of the given shell's motions approximate descriptive methods.

Key words: cylindrical shell, elastic space, dynamic loads, axi-symmetrical problem.

ВСТУП

Задачі про стаціонарну динамічну поведінку нескінченно довгих циліндричних оболонок, які знаходяться в необмеженому інерційному пружному середовищі під дією рухомих навантажень, раніше розглядалися в роботах [1-3], а також у монографії [4]. У роботах [5, 6] розглянуті подібні задачі у нестационарній постановці, але розгляд обмежено випадками, коли для оболонки використовуються класичні рівняння, а для опису реакції середовища використовується наближена модель типу Власова-Пастернака, яка не дозволяє знайти напруження і переміщення у пружному просторі, та обмежує дослідження нестационарної поведінки оболонки.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається вісесиметрична нестационарна деформація нескінченно довгої циліндричної оболонки, яка знаходиться в лінійно-пружному, однорідному та ізотропному просторі під дією навантажень, що рухаються вздовж осі оболонки. Нехай оболонка та простір віднесені до нерухомої циліндричної системи координат $\{r, \theta, x\}$, але для цієї вісесиметричної задачі всі величини не залежать від змінної θ . Внутрішній радіус оболонки b , а зовнішній – a . У момент часу $t < 0$ оболонка та простір знаходяться в стані спокою та вільні від напружень. Потім у момент часу $t = 0$ в точці $x = 0$, $r = b$ прикладається імпульсивне нормальне навантаження F_0 і в подальші моменти часу $t > 0$ відбувається розширення навантаженої ділянки з постійною швидкістю c таким чином, що сумарний нормальний тиск у всі моменти часу залишається рівним F_0 . Також розглядається випадок, коли в момент часу $t = 0$ в області $|x| \leq d$, $r = b$ прикладається імпульсивне нормальне навантаження F_0 , яке постійно діє на цій ділянці. Для порівняння результатів при заданому навантаженні розглянута аналогічна статична задача.

У нашій роботі рух оболонки будемо описувати за допомогою динамічних рівнянь теорії пружності, рівнянь, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко), а також класичних рівнянь теорії тонких оболонок, які ґрунтуються на гіпотезі Кірхгофа-Лява. Контакт між простором та оболонкою вважаємо ковзним, а зв'язок – двостороннім. Середовище, що оточує оболонку, описується динамічними рівняннями теорії пружності.

Розглянемо спочатку випадок, коли рух оболонки описується рівняннями теорії пружності.

У векторній формі ці рівняння мають вигляд [9, с.551]:

$$(\lambda_k + 2\mu_k) \text{grad div} \left(\vec{u}^{(-k)} \right) - \mu_k \text{rot rot} \left(\vec{u}^{(-k)} \right) = \rho_k \frac{\partial^2 \vec{u}^{(-k)}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

де $\vec{u}^{(k)} = (u_x^{(k)}, u_r^{(k)})$ – вектор переміщень, де $k=1$ відноситься до оболонки, а $k=2$ – до простору; λ_k, μ_k – параметри Ламе, ρ_k – щільність.

При відсутності масових сил вводимо потенціальні функції $\Phi^{(k)}, \Psi^{(k)}$ за формулами [9, с.565]

$$u_x^{(k)} = \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi^{(k)}}{\partial r} + \frac{\Psi^{(k)}}{r}, \quad u_r^{(k)} = \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial r} - \frac{\partial \Psi^{(k)}}{\partial x}. \quad (2)$$

Підставляючи залежності (2) у рівняння (1), маємо:

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial x^2} = \frac{1}{c_{1k}^2} \frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial^2 \Psi^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi^{(k)}}{\partial x^2} - \frac{\Psi^{(k)}}{r^2} = \frac{1}{c_{2k}^2} \frac{\partial^2 \Psi^{(k)}}{\partial t^2}; \quad (3)$$

$$c_{1k}^2 = \frac{2G_k(1-\nu_k)}{\rho_k(1-2\nu_k)}, \quad c_{2k}^2 = \frac{G_k}{\rho_k}. \quad (4)$$

Граничні умови мають вигляд:

$$\sigma_{rx}^{(1)}(b, x, t) = 0, \quad \sigma_{rr}^{(1)}(b, x, t) = -f_n(x, t),$$

$$\sigma_{rx}^{(1)}(a, x, t) = \sigma_{rx}^{(2)}(a, x, t) = 0, \quad \sigma_{rr}^{(1)}(a, x, t) = \sigma_{rr}^{(2)}(a, x, t), \quad u_r^{(1)}(a, x, t) = u_r^{(2)}(a, x, t), \quad (5)$$

де $f_n(x, t)$ – нормальне навантаження, яке діє на внутрішню поверхню оболонки.

Напруження, необхідні для задоволення граничних умов (5), виражаються через переміщення формулами:

$$\sigma_{rr}^{(k)} = \frac{2G_k \nu_k}{1-2\nu_k} \left(\frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{u_r^{(k)}}{r} \right) + \frac{2G_k(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r},$$

$$\sigma_{rx}^{(k)} = G_k \left(\frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial x} \right). \quad (6)$$

Якщо рух оболонки описується рівняннями, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко), то у віссиметричному випадку рівняння для оболонки мають вигляд [10, с.43]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu_1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} = \rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\nu_1}{a} \frac{\partial u}{\partial x} - k^2 \frac{1-\nu_1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \right) + \frac{w}{a^2} = -\rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1-\nu_1}{2G_1 h} (-f_n + q_r), \\ \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial x^2} - 6k^2 \frac{1-\nu_1}{h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \alpha_x \right) = \rho_1 \frac{1+\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (7)$$

де u, w – осьове та радіальне переміщення серединної поверхні оболонки; α_x – кут повороту нормалі до серединної поверхні оболонки в осьовому напрямку; $q_r = q_r(x, t)$ – нормальна реакція з боку простору на межі контакту з оболонкою.

У цьому випадку граничні умови для простору такі:

$$\sigma_{rx}^{(2)}(a, x, t) = 0, \quad \sigma_{rr}^{(2)}(a, x, t) = -q_r(x, t), \quad u_r^{(2)}(a, x, t) = w(x, t). \quad (8)$$

Якщо рух оболонки описується класичними рівняннями теорії тонких оболонок, які відповідають гіпотезі Кірхгофа-Лява, то у вісесиметричному випадку будемо мати рівняння [10, с.27]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{v_1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} = \rho_1 \frac{1-v_1}{2G_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{v_1}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{w}{a^2} = -\rho_1 \frac{1-v_1}{2G_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1-v_1}{2G_1 h} (-f_n + q_r). \end{cases} \quad (9)$$

Зрозуміло, що в цьому випадку залишаться справедливими граничні умови (8).

Початкові умови у всіх випадках приймаються нульовими, тобто при $t = 0$ шукані величини та їх перші похідні за часом вважаємо рівними нулю.

Зауважимо, що для статичної задачі треба взяти рівними нулю похідні за часом, а всі величини не залежать від змінної t .

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ У ПРОСТОРІ ЗОБРАЖЕНЬ

Для розв'язання задачі будемо використовувати перетворення Лапласа за часовою змінною:

$$f_L(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \quad (10)$$

та перетворення Фур'є за осью координатою:

$$f_F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-isx} dx. \quad (11)$$

Перейдемо до безрозмірних величин:

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{\Phi}^{(k)}, \bar{\Psi}^{(k)} \right\} &= \frac{1}{a^2} \left\{ \Phi^{(k)}, \Psi^{(k)} \right\}; \quad \left\{ U_x^{(k)}, U_r^{(k)}, W, U \right\} = \frac{1}{a} \left\{ u_x^{(k)}, u_r^{(k)}, w, u \right\}; \\ \left\{ \bar{\sigma}_{rr}^{(k)}, \bar{\sigma}_{rx}^{(k)} \right\} &= \frac{1}{G_1} \left\{ \sigma_{rr}^{(k)}, \sigma_{rx}^{(k)} \right\}; \quad \bar{f}_n = \frac{f_n}{G_1}; \quad \left\{ \bar{q}_{r1}, \bar{q}_{r2} \right\} = \frac{1}{G_1} \left\{ q_{r1}, q_{r2} \right\}; \\ \left\{ x_*, r_* \right\} &= \frac{1}{a} \left\{ x, r \right\}; \quad \tau = \frac{c_{21}}{a} t; \quad \kappa = \frac{h}{a}; \quad \gamma = \frac{G_1}{G_2}; \quad \rho^* = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad d_1 = 1 - \kappa. \end{aligned} \quad (12)$$

Застосовуємо перетворення Лапласа за змінною τ та перетворення Фур'є за змінною x_* до рівнянь (3). Отримаємо:

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{LF}^{(k)}}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial \bar{\Phi}_{LF}^{(k)}}{\partial r_*} - \left(s^2 + \eta_1^{(k)} p^2 \right) \bar{\Phi}_{LF}^{(k)} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{LF}^{(k)}}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial \bar{\Psi}_{LF}^{(k)}}{\partial r_*} - \left(s^2 + \eta_2^{(k)} p^2 + \frac{1}{r_*^2} \right) \bar{\Psi}_{LF}^{(k)} = 0, \quad (13)$$

де

$$\eta_1^{(1)} = \frac{c_{21}^2}{c_{11}^2} = \frac{1-2\nu_1}{2(1-\nu_1)}; \quad \eta_2^{(1)} = \frac{c_{21}^2}{c_{21}^2} = 1; \quad \eta_1^{(2)} = \frac{c_{21}^2}{c_{12}^2} = \frac{\gamma}{\rho^*} \frac{1-2\nu_1}{2(1-\nu_1)}; \quad \eta_2^{(2)} = \frac{c_{21}^2}{c_{22}^2} = \frac{\gamma}{\rho^*}.$$

Загальний розв'язок рівнянь (13) з урахуванням умов згасання на нескінченності має вигляд:

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}_{LF}^{(1)}(r_*, s, p) &= C_1(s, p)K_0(m_1 r_*) + C_2(s, p)I_0(m_1 r_*); \\
\bar{\Psi}_{LF}^{(1)}(r_*, s, p) &= C_3(s, p)K_1(m_2 r_*) + C_4(s, p)I_1(m_2 r_*); \\
\bar{\Phi}_{LF}^{(2)}(r_*, s, p) &= C_5(s, p)K_0(m_3 r_*); \\
\bar{\Psi}_{LF}^{(2)}(r_*, s, p) &= C_6(s, p)K_1(m_4 r_*),
\end{aligned} \tag{14}$$

де $m_1 = \sqrt{s^2 + \eta_1^{(1)} p^2}$, $m_2 = \sqrt{s^2 + \eta_2^{(1)} p^2}$, $m_3 = \sqrt{s^2 + \eta_1^{(2)} p^2}$, $m_4 = \sqrt{s^2 + \eta_2^{(2)} p^2}$, а K_0 , I_0 , K_1 , I_1 – модифіковані функції Бесселя.

Застосовуємо перетворення Лапласа за змінною τ та перетворення Фур'є за змінною x_* до рівнянь (2) та (6). Отримуємо вирази для переміщень та напружень у просторі зображень:

$$U_{xLF}^{(k)} = is\bar{\Phi}_{LF}^{(k)} + \frac{d\bar{\Psi}_{LF}^{(k)}}{dr_*} + \frac{\bar{\Psi}_{LF}^{(k)}}{r_*}, \quad U_{rLF}^{(k)} = \frac{d\bar{\Phi}_{LF}^{(k)}}{dr_*} - is\bar{\Psi}_{LF}^{(k)}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{rrLF}^{(1)} &= \frac{2\nu_1}{1-2\nu_1} \left(isU_{xLF}^{(1)} + \frac{U_{rLF}^{(1)}}{r_*} \right) + \frac{2(1-\nu_1)}{1-2\nu_1} \frac{dU_{rLF}^{(1)}}{dr_*}, \\
\bar{\sigma}_{rxLF}^{(1)} &= \left(\frac{dU_{xLF}^{(1)}}{dr_*} + isU_{rLF}^{(1)} \right),
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{rrLF}^{(2)} &= \frac{2\nu_2}{(1-2\nu_2)\gamma} \left(isU_{xLF}^{(2)} + \frac{U_{rLF}^{(2)}}{r_*} \right) + \frac{2(1-\nu_2)}{(1-2\nu_2)\gamma} \frac{dU_{rLF}^{(2)}}{dr_*}, \\
\bar{\sigma}_{rxLF}^{(2)} &= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{dU_{xLF}^{(2)}}{dr_*} + isU_{rLF}^{(2)} \right).
\end{aligned}$$

У просторі зображень граничні умови мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{rxLF}^{(1)}(d_1, s, p) &= 0, \quad \bar{\sigma}_{rrLF}^{(1)}(d_1, s, p) = -\bar{f}_{rLF}(s, p), \\
\bar{\sigma}_{rxLF}^{(1)}(1, s, p) &= \bar{\sigma}_{rxLF}^{(2)}(1, s, p) = 0, \quad \bar{\sigma}_{rrLF}^{(1)}(1, s, p) = \bar{\sigma}_{rrLF}^{(2)}(1, s, p), \quad U_{rLF}^{(1)}(1, s, p) = U_{rLF}^{(2)}(1, s, p).
\end{aligned} \tag{17}$$

У результаті отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно функцій $C_1(s, p), \dots, C_6(s, p)$. Розв'язуючи систему методом Крамера, матимемо:

$$C_j(s, p) = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \quad j = \overline{1, 6}, \tag{18}$$

де $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, 6}$

$$a_{11} = \frac{2(m_1^2 - \nu_1(m_1^2 + s^2))K_0(m_1 d_1)}{(1-2\nu_1)} + \frac{2m_1}{d_1} K_1(m_1 d_1);$$

$$a_{12} = \frac{2(m_1^2 - \nu_1(m_1^2 + s^2))I_0(m_1 d_1)}{(1-2\nu_1)} - \frac{2m_1}{d_1} I_1(m_1 d_1);$$

$$a_{13} = \frac{2is}{d_1} K_1(m_2 d_1) + 2ism_2 K_0(m_2 d_1); \quad a_{14} = \frac{2is}{d_1} I_1(m_2 d_1) - 2ism_2 I_0(m_2 d_1);$$

$$\begin{aligned}
 a_{21} &= -2ism_1K_1(m_1d_1); a_{22} = 2ism_1I_1(m_1d_1); a_{23} = (m_2^2 + s^2)K_1(m_2d_1); a_{24} = (m_2^2 + s^2)I_1(m_2d_1); \\
 a_{31} &= \frac{2(m_1^2 - v_1(m_1^2 + s^2))K_0(m_1)}{(1 - 2v_1)} + 2m_1K_1(m_1); a_{32} = \frac{2(m_1^2 - v_1(m_1^2 + s^2))I_0(m_1)}{(1 - 2v_1)} - 2m_1I_1(m_1); \\
 a_{33} &= 2isK_1(m_2) + 2ism_2K_0(m_2); a_{34} = 2isI_1(m_2) - 2ism_2I_0(m_2); \\
 a_{35} &= \frac{2(v_1(m_1^2 + s^2) - m_1^2)K_0(m_1)}{\gamma(1 - 2v_1)} - \frac{2m_1K_1(m_1)}{\gamma}; a_{36} = -\frac{(ism_4K_1(m_4) + ism_4^2K_0(m_4))}{\gamma}; \\
 a_{41} &= -2ism_1K_1(m_1); a_{42} = 2ism_1I_1(m_1); a_{43} = (m_2^2 + s^2)K_1(m_2); a_{44} = (m_2^2 + s^2)I_1(m_2); \\
 a_{55} &= -\frac{2ism_3K_1(m_3)}{\gamma}; a_{56} = \frac{(m_4^2 + s^2)K_1(m_4)}{\gamma}; a_{61} = -m_1K_1(m_1); a_{62} = m_1I_1(m_1); \\
 a_{63} &= -isK_1(m_2); a_{64} = -isI_1(m_2); a_{65} = m_3K_1(m_3); a_{66} = isK_1(m_4); \\
 a_{15} &= a_{16} = a_{25} = a_{26} = a_{45} = a_{46} = a_{51} = a_{52} = a_{53} = a_{54} = 0.
 \end{aligned}$$

Матриці A_j , $j = \overline{1, 6}$ отримуються з матриці A заміною j -го стовпця вектором з координатами: $(-\overline{f}_{nLF}(s, p), 0, 0, 0, 0, 0)$.

У випадку, коли рух оболонки описується рівняннями, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко) у просторі зображень за Фур'є-Лапласом із (7), приходимо до такої системи:

$$\begin{cases}
 -s^2U_{LF} + v_1isW_{LF} = \frac{1-v_1}{2}U_{LF}p^2; \\
 v_1isU_{LF} - k^2\frac{1-v_1}{2}(-s^2W_{LF} + is\overline{\alpha}_{xLF}) + W_{LF} = -\frac{1-v_1}{2}W_{LF}p^2 - \frac{1-v_1}{2\kappa\gamma}(-\overline{f}_{nLF} + \overline{q}_{rLF}); \\
 -s^2\overline{\alpha}_{xLF} - 6k^2\frac{1-v_1}{\kappa^2}(is\kappa W_{LF} + \overline{\alpha}_{xLF}) = \frac{1+v_1}{2}\overline{\alpha}_{xLF}p^2;
 \end{cases} \quad (19)$$

$$\overline{\sigma}_{rxLF}^{(2)}(1, s, p) = 0, \quad \overline{\sigma}_{rrLF}^{(2)}(1, s, p) = -\overline{q}_{rLF}(s, p), \quad U_{rLF}^{(2)}(1, s, p) = W_{LF}(s, p). \quad (20)$$

Враховуючи граничні умови (20), з першого та третього рівняння системи (19), знаходимо функції $U_{LF}(s, p)$, $\overline{\alpha}_{xLF}(s, p)$ відповідно:

$$U_{LF}(s, p) = \frac{2v_1is}{2s^2 + (1-v_1)p^2}W_{LF}(s, p); \quad (21)$$

$$\overline{\alpha}_{xLF}(s, p) = \frac{-6k^2\frac{1-v_1}{\kappa}is}{s^2 + 6k^2\frac{1-v_1}{\kappa^2} + \frac{1+v_1}{2}p^2}W_{LF}(s, p). \quad (22)$$

Підставляючи (21) та (22) у друге рівняння системи (19) і враховуючи граничні умови (20), отримуємо систему двох рівнянь відносно невідомих $C_1(s, p)$, $C_2(s, p)$.

Якщо рух оболонки описується класичними рівняннями теорії тонких оболонок, що відповідають гіпотезі Кірхгофа-Лява, у просторі зображень отримаємо такі рівняння:

$$\begin{cases} -s^2 U_{LF} + v_1 i s W_{LF} = \frac{1-v_1}{2} U_{LF} P^2; \\ v_1 i s U_{LF} + \frac{\kappa^2}{12} s^4 W_{LF} + W_{LF} = -\frac{1-v_1}{2} W_{LF} P^2 - \frac{1-v_1}{2\kappa} (-\bar{f}_{nLF} + \bar{q}_{rLF}). \end{cases} \quad (23)$$

Граничні умови мають вигляд:

$$\bar{\sigma}_{rxLF}^{(2)}(1, s, p) = 0, \quad \bar{\sigma}_{rrLF}^{(2)}(1, s, p) = -\bar{q}_{rLF}(s, p), \quad U_{rLF}^{(2)}(1, s, p) = W_{LF}(s, p). \quad (24)$$

Враховуючи граничні умови (24), отримуємо систему рівнянь (23) відносно невідомих $C_1(s, p)$, $C_2(s, p)$.

Для відповідної статичної задачі, коли оболонка описується рівняннями теорії пружності, її розв'язок будемо шукати у формі Папковича-Нейбера [9, с.185] через дві гармонічні функції $\varphi_1^{(k)}(r, x)$ і $\varphi_2^{(k)}(r, x)$:

$$\begin{aligned} u_r^{(k)}(r, x) &= \frac{\partial \varphi_1^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_2^{(k)}}{\partial r} x; \\ u_x^{(k)}(r, x) &= -\frac{\partial \varphi_1^{(k)}}{\partial x} - (3-4\nu_k) \varphi_2^{(k)} + x \frac{\partial \varphi_2^{(k)}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (25)$$

Відповідні напруження виражаються через переміщення за формулами (6).

Функції $\varphi_1^{(k)}(r, x)$ і $\varphi_2^{(k)}(r, x)$ задовольняють рівнянням:

$$\nabla^2 \varphi_j^{(k)} = \frac{d^2 \varphi_j^{(k)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \varphi_j^{(k)}}{dr} + \frac{d^2 \varphi_j^{(k)}}{dx^2} = 0, \quad j=1,2; \quad k=1,2. \quad (26)$$

Застосувавши перетворення Фур'є по змінній x_* до рівнянь (26), маємо:

$$r_*^2 \frac{d^2 \bar{\Phi}_{Fj}^{(k)}}{dr_*^2} + r_* \frac{d \bar{\Phi}_{Fj}^{(k)}}{dr_*} - r_*^2 s^2 \bar{\Phi}_{Fj}^{(k)} = 0, \quad j=1,2; \quad k=1,2. \quad (27)$$

Загальний розв'язок рівнянь (27) з урахуванням умов затухання на нескінченності має вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{F1}^{(1)}(r_*, s) &= C_1(s) K_0(sr_*) + C_2(s) I_0(sr_*); \\ \bar{\Phi}_{F2}^{(1)}(r_*, s) &= C_3(s) K_0(sr_*) + C_4(s) I_0(sr_*); \\ \bar{\Phi}_{F1}^{(2)}(r_*, s) &= C_5(s) K_0(sr_*); \\ \bar{\Phi}_{F2}^{(2)}(r_*, s) &= C_6(s) K_0(sr_*). \end{aligned} \quad (28)$$

Застосувавши перетворення Фур'є за змінною x_* до співвідношень (25), враховуючи (12), маємо:

$$\begin{aligned} U_{rF}^{(k)}(r_*, s) &= \frac{\partial \bar{\Phi}_{F1}^{(k)}}{\partial r_*} + i \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{F2}^{(k)}}{\partial s \partial r_*}; \\ U_{xF}^{(k)}(r_*, s) &= i s \bar{\Phi}_{F1}^{(k)} - (3-4\nu_k) \bar{\Phi}_{F2}^{(k)} - s \frac{\partial \bar{\Phi}_{F2}^{(k)}}{\partial s}. \end{aligned} \quad (29)$$

Трансформанти відповідних напружень задаються формулами (16).

Підставляючи співвідношення (28) в (29), а потім співвідношення (29) в граничні умови (17), отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $C_1(s), \dots, C_6(s)$, яка розв'язується за формулами, аналогічними (18).

Розв'язки у випадках, коли оболонка описується рівняннями типу Тимошенко, або рівняннями класичної теорії тонких оболонок, які задовольняють гіпотезі Кірхгофа-Лява, отримуються аналогічно.

РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗА

Розглянемо випадок, коли в початковий момент часу $t=0$ в точці $x=0$, $r=b$ прикладається імпульсивне нормальне навантаження F_0 і у подальший момент часу $t>0$ відбувається розширення навантаженої ділянки циліндричної оболонки з постійною швидкістю c .

Функція навантаження має вигляд:

$$f_n(x, t) = \frac{F_0 H(ct - |x|)}{4\pi c t b}, \tag{30}$$

де $H(x)$ – одинична функція Хевісайда.

Трансформанта навантаження (30) має вигляд:

$$f_{nLF}(s, p) = \frac{F_0}{4\sqrt{2}\pi^2 d_1 s c^*} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{p}{sc^*}\right) \right), \tag{31}$$

де $c^* = \frac{c}{c_{21}}$.

Після оберненого перетворення Фур'є отримуємо вирази для трансформант Лапласа:

$$\frac{U_{rL}^{(2)}(r_*, x_*, p) G_1 a^2}{F_0} = \frac{1}{8\pi^2 d_1 c^*} \int_0^\infty \frac{U_{rLF}^{(2)}(r_*, s, p)}{s} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{p}{sc^*}\right) \right) \cos(sx_*) ds, \tag{32}$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{rrL}^{(2)}(r_*, x_*, p) a^2}{F_0} = \frac{1}{8\pi^2 d_1 c^*} \int_0^\infty \frac{\bar{\sigma}_{rLF}^{(2)}(r_*, s, p)}{s} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{p}{sc^*}\right) \right) \cos(sx_*) ds. \tag{33}$$

Розглянемо тепер випадок, коли в початковий момент часу $t=0$ в області $|x| \leq d$, $r=b$ прикладається імпульсивне нормальне навантаження F_0 , яке постійно діє на цій ділянці.

Функція навантаження має вигляд:

$$f_n(x, t) = F_0 H(|x| - d) H(t). \tag{34}$$

Трансформанта навантаження (34) має вигляд:

$$f_{nLF}(s, p) = \frac{\sqrt{2} F_0 \sin(d^* s)}{\sqrt{\pi} s p}, \tag{35}$$

де $d^* = \frac{d}{a}$.

Після оберненого перетворення Фур'є отримуємо вирази для трансформант Лапласа:

$$\frac{U_{rL}^{(2)}(r_*, x_*, p)G_1}{F_0} = \frac{1}{\pi p} \int_0^\infty \frac{\sin(d^* s) U_{rLF}^{(2)}(r_*, s, p)}{s} \cos(sx_*) ds, \quad (36)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{rrL}^{(2)}(r_*, x_*, p)}{F_0} = \frac{1}{\pi p} \int_0^\infty \frac{\sin(d^* s) \bar{\sigma}_{rrLF}^{(2)}(r_*, s, p)}{s} \cos(sx_*) ds. \quad (37)$$

Відповідне навантаження для статичної задачі має вигляд:

$$f_n(x) = F_0 H(|x| - d), \quad (38)$$

трансформанта Фур'є якого дорівнює:

$$f_{nF}(s) = \frac{\sqrt{2} F_0 \sin(d^* s)}{\sqrt{\pi} s}. \quad (39)$$

Після оберненого перетворення Фур'є отримуємо розв'язок статичної задачі:

$$\frac{U_r^{(2)}(r_*, x_*)G_1}{F_0} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(d^* s) U_{rF}^{(2)}(r_*, s)}{s} \cos(sx_*) ds, \quad (40)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{rr}^{(2)}(r_*, x_*)}{F_0} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(d^* s) \bar{\sigma}_{rrF}^{(2)}(r_*, s)}{s} \cos(sx_*) ds. \quad (41)$$

Обчислення невласних інтегралів у виразах (32), (33), (36), (37), (40), (41) здійснювалося наближено з використанням метода Файлона [7, с.76], обернення перетворення Лапласа здійснювалося чисельно за допомогою зміщених поліномів Лежандра [8, с.42].

Розрахунки проведено для таких значень безрозмірних параметрів: $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $\gamma = 30$, $\rho^* = 4$, $\kappa = 0,02$, $d_1 = 1 - \kappa = 0,98$, $d^* = \frac{1}{2}$. Величини r_* , x_* , τ , c^* – змінювались.

Рис. 1 ілюструє зміну нормальних переміщень за часом на межі контакту оболонки і пружного простору при $r_* = 1$, $x_* = 0$ для різних значень безрозмірної швидкості руху навантаження, при цьому для кривої 1 – $c^* = 0,1$, для 2 – $c^* = 0,25$, 3 – $c^* = 0,4$. При цьому суцільні криві відповідають результатам, коли рух оболонки описується динамічними рівняннями теорії пружності, а пунктиром і штрих-пунктиром відповідають теорії Тимошенко і Кірхгофа-Лява відповідно. На рис. 2 наведені аналогічні результати для нормальних напружень.

На рис. 3 показано, як змінюються радіальні переміщення на межі контакту оболонки і пружного простору ($r_* = 1$) за осьовою координатою у різні моменти часу при $c^* = 0,1$, а рис. 4 ілюструє аналогічний розподіл для більш високої швидкості розповсюдження тиску, коли $c^* = 0,4$.

На рис. 5 і 6 для навантаження (34) зображено зміну за часом нормальних переміщень і напружень у точці $r_* = 1$, $x_* = 0$, при цьому горизонтальні прямі на обох графіках відповідають статичному розв'язку.

Рис. 7 ілюструє зміну нормальних переміщень за осьовою координатою для навантаження (34) при $\tau = 2,5$ при різних значеннях радіальної координати, тобто у пружному просторі при віддаленні від границі контакту з оболонкою.

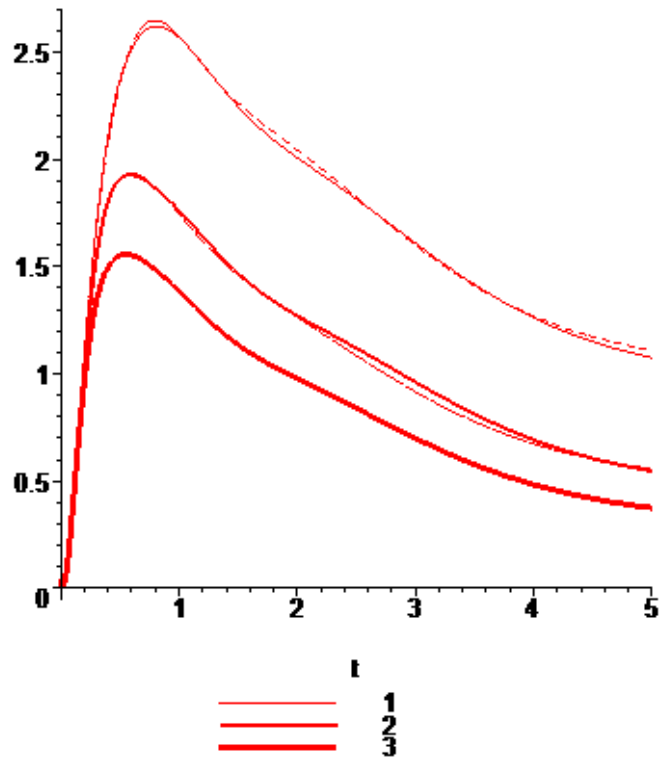


Рис. 1. Зміна нормальних переміщень за часом на межі контакту оболонки і пружного простору для навантаження, що розбігається

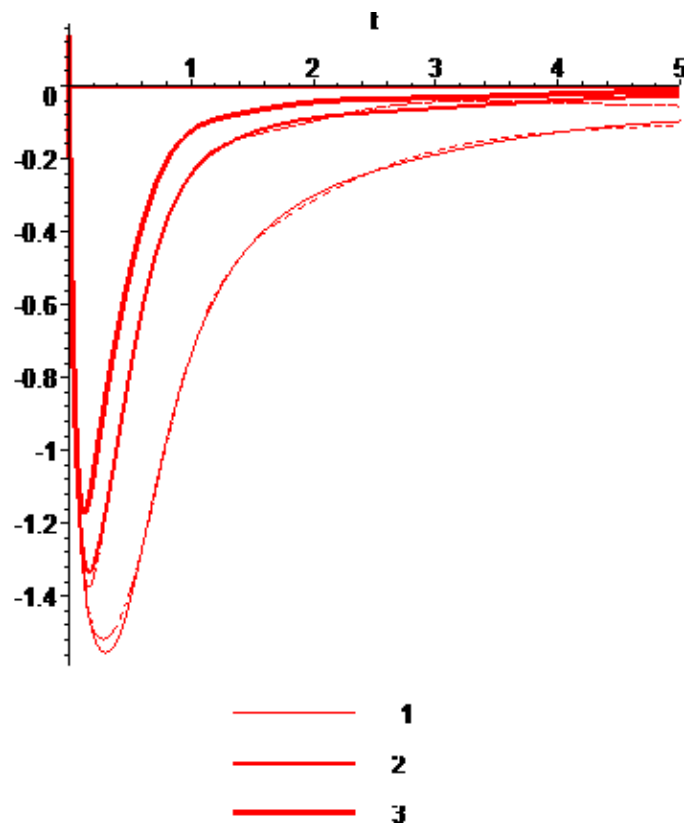


Рис. 2. Зміна нормальних напружень за часом на межі контакту оболонки і пружного простору для навантаження, що розбігається

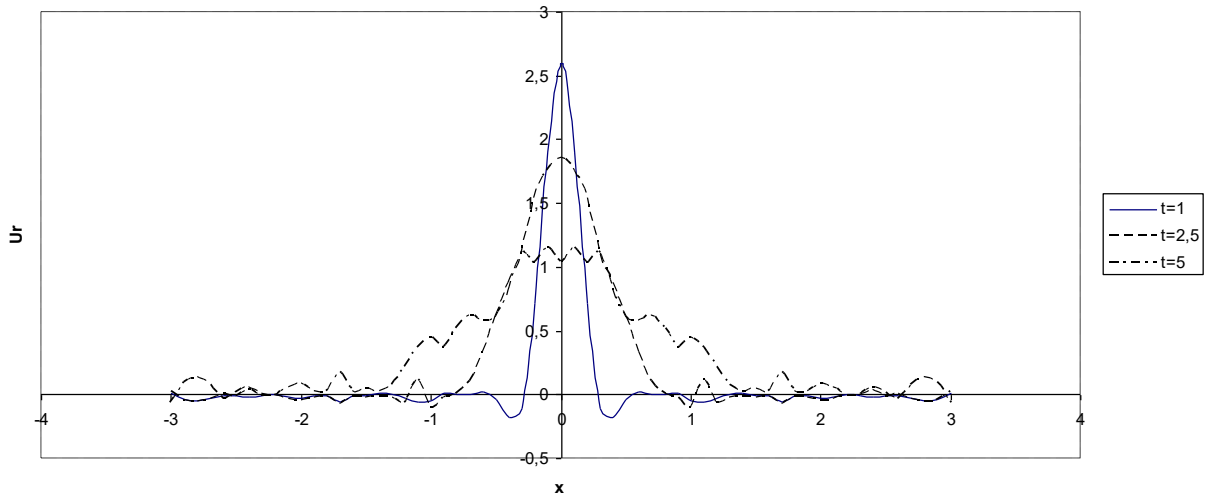


Рис. 3. Зміна нормальних переміщень за осью координатою при різних значень часу на межі контакту оболонки і пружного простору для навантаження, що розбігається

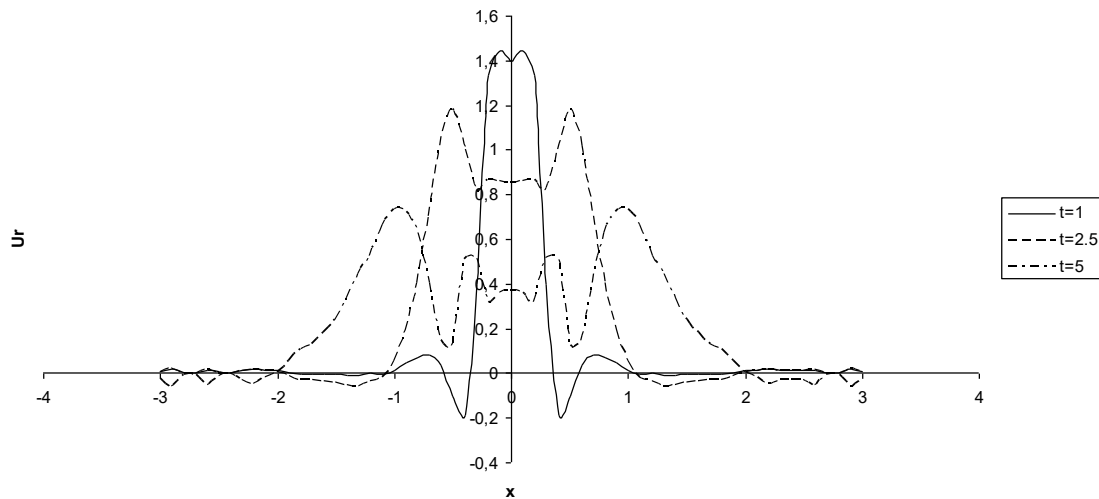


Рис. 4. Зміна нормальних переміщень за осью координатою при різних значень часу на межі контакту оболонки і пружного простору для навантаження, що розбігається

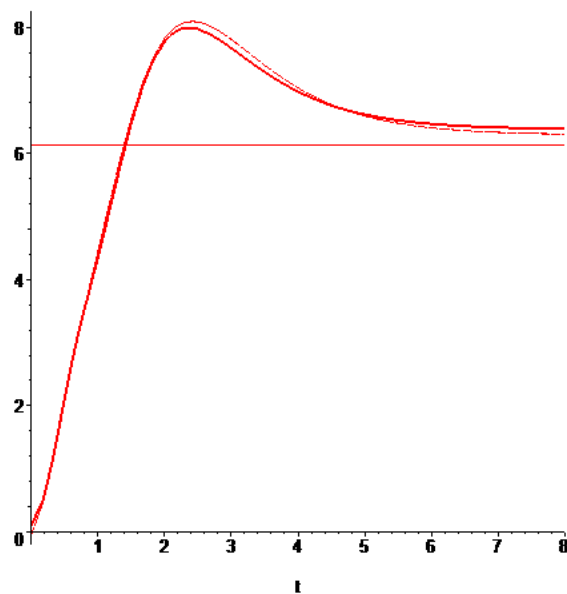


Рис. 5. Зміна нормальних переміщень за часом на межі контакту оболонки і пружного простору для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда

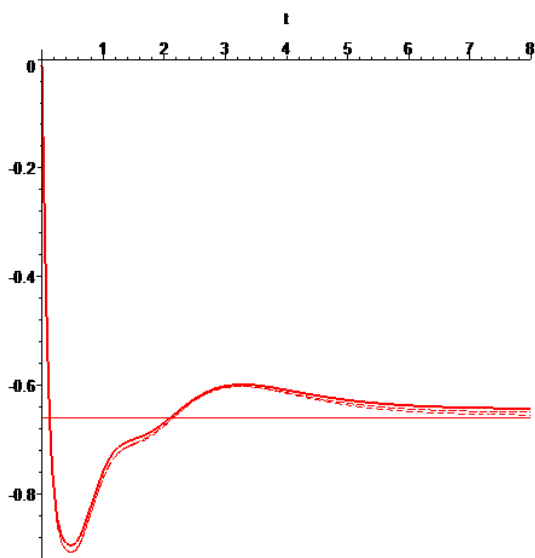


Рис. 6. Зміна нормальних напружень за часом на межі контакту оболонки і пружного простору для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда

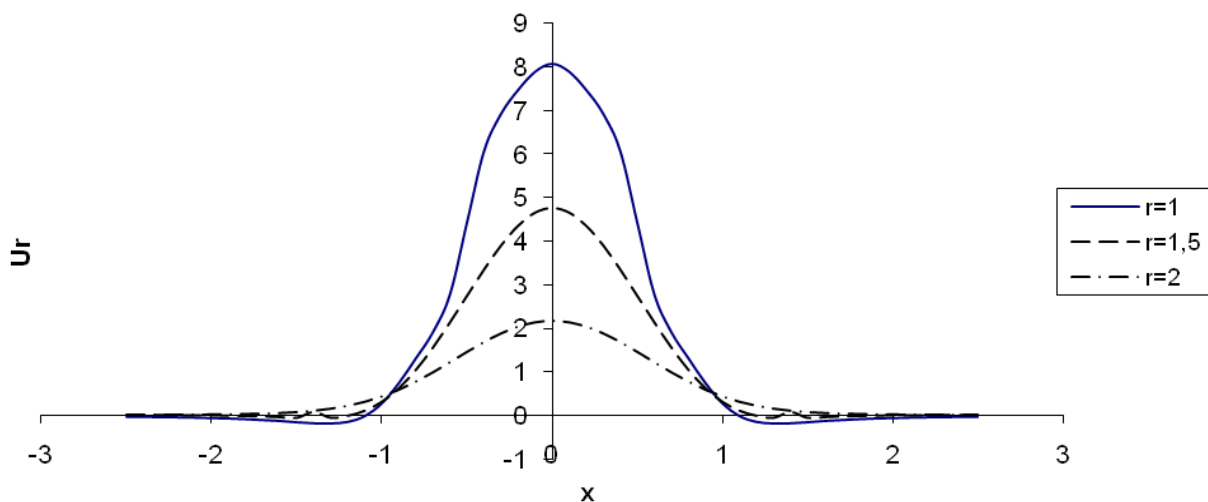


Рис. 7. Зміна нормальних переміщень за осовою координатою при різних значень радіальної координати на межі контакту оболонки і пружного простору для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда

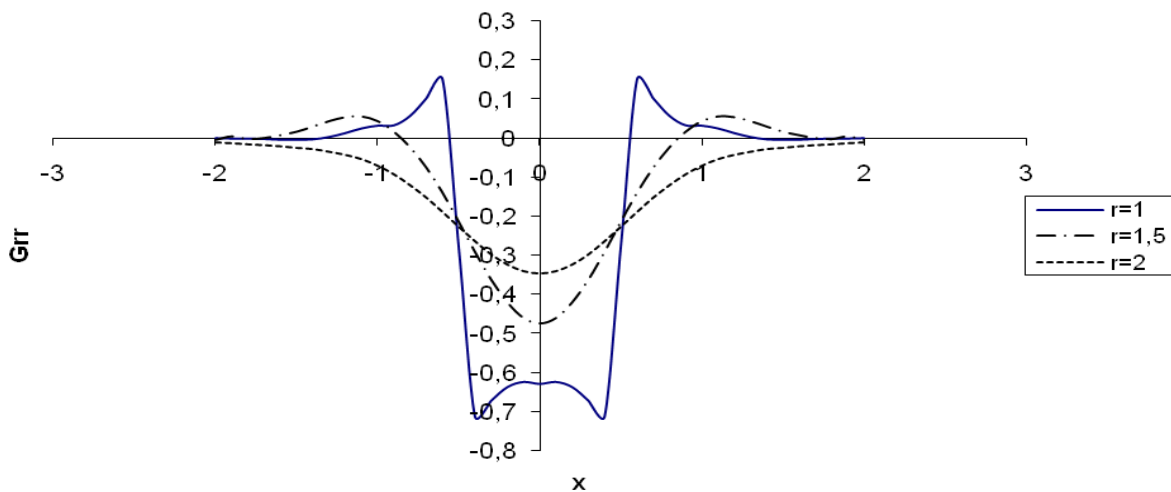


Рис. 8. Зміна нормальних напружень за осовою координатою при різних значеннях радіальної координати на межі контакту оболонки і пружного простору для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда

ВИСНОВКИ

Отримано розв'язок вісесиметричної задачі для циліндричної оболонки, розташованої у пружному просторі, на яку діють навантаження, що розширюється, та навантаження, яке залежить від часу, як одинична функція Хевісайда. Для навантаження, що розбігається, досліджено залежність нормальних переміщень та напружень від швидкості розбігання навантаження, та їх розподілення за осьової координатою в різні моменти часу.

Для навантаження, що залежить від часу як одинична функція Хевісайда, було досліджено розподілення нормальних переміщень та напружень за осьовою та радіальною координатою в різні моменти часу.

Порівняно різні методи описання руху оболонки та показано, що результати, отримані на основі застосування цих методів, мало відрізняються. На основі цього можна зробити висновок, що при розв'язанні більш складних задач можна застосовувати одну з наближених моделей описання руху оболонки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Львовский В. М. Установившиеся колебания цилиндрической оболочки в упругой среде под действием подвижной нагрузки / В. М. Львовский, В. И. Онищенко, В. И. Пожуев // Вопросы прочности и пластичности. – Днепропетровск, 1974. – С. 98-110.
2. Пожуев В. И. Действие подвижной нагрузки на цилиндрическую оболочку в упругой среде / В. И. Пожуев // Строительная механика и расчет сооружений. – 1976. – №1. – С. 44-46.
3. Пожуев В. И. Реакция цилиндрической оболочки, находящейся в трансверсально-изотропной среде, на действие подвижной нагрузки / В. И. Пожуев // Прикладная механика. – 1980. – Т. 16, № 11. – С. 28-35.
4. Горшков А. Г. Пластины и оболочки на инерционном основании при действии подвижных нагрузок / А. Г. Горшков, В. И. Пожуев. – М. : Изд-во МАИ, 1992 – 136 с.
5. Пожуев В. И. Нестационарная реакция цилиндрической оболочки в упругой среде на действие неосесимметрической подвижной нагрузки / В. И. Пожуев, Мохаммед Жибитай // Изв. ВУЗов. Строительство и архитектура. – 1991. – № 6. – С. 33-37.
6. Пожуев В. И. Нестационарные колебания трубопровода конечной длины, односторонне взаимодействующего с инерционной средой / В. И. Пожуев, Мохаммед Жибитай // Изв. ВУЗов. Строительство. – 1992. – № 4. – С. 48-50.
7. Крылов В. И. Справочная книга по численному интегрированию / В. И. Крылов, Л. Т. Шульгина. – М. : Наука, 1966. – 370 с.
8. Крылов В. И. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа / В. И. Крылов, Н. С. Скобля. – М. : Наука, 1974. – 223 с.
9. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 872 с.
10. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1972. – 432 с.

REFERENCES

1. Lvovskiy, V.M., Onishenko, V.I. and Pozhuev, V.I. (1974), "Steady fluctuations of cylindrical shell in elastic medium subjected to moving loads", *Voprosy prochnosti i plastichnosti*, pp. 98-110.
2. Pozhuev, V.I. (1976), "Action moving load on cylindrical shell in elastic medium", *Stroitel'naya mekhanika i raschet konstruksiy*, no. 1, pp. 44-46.
3. Pozhuev, V.I. (1980), "Response of cylindrical shell, situated in transversal and isotropic medium on action moving load", *Prikladnaya mekhanika*, vol. 16, no. 11, pp. 28-35.
4. Gorshkov, A.G. and Pozhuev, V.I. (1992), *Plastiny i obolochki na inertsyalnom osnovanii pri deystvii podvizhnykh nagruzok* [Plates and shells on inertial foundations subjected on moving loads], Moscow, Russia.
5. Pozhuev, V.I. and Zhybitay, Mokhammed (1991), "Non-stationary response of cylindrical shells in elastic medium on non axi-symmetrical moving load", *Izvestiya VUZov, Stroitelstvo i arkhetectura*, no. 6, pp. 33-37.

6. Pozhuev, V.I. and Zhybitay, Mokhammed (1992), "Non-stationary fluctuations of finite length pipeline, unilaterally interacts with inertial medium", *Izvestiya VUZov, Stroitelstvo*, no. 4, pp. 48-50.
7. Krylov, V.I. and Shulina, L.T. (1966), *Spravochnaya kniga po chislennomu integrirovaniyu* [Reference book of numerical integrations], Nauka, Moscow, Russia.
8. Krylov, V.I. and Skoblya, N.S. (1974), *Metody priblizhonnogo preobrazovaniya Furye i obrascheniya preobrazovaniya Laplasya* [Methods of approximately Fourier transform and inverse of Laplace transform], Nauka, Moscow, Russia.
9. Novatskiy, V. (1975), *Teoriya uprugosti* [Elastic theory], Mir, Moscow, Russia.
10. Volmir, A.S. (1972), *Nelineynaya dinamika plastinok i obolochek* [Non-linear dynamic of planes and shells], Nauka, Moscow, Russia.

UDC 512.12+517.987.1

CONDITIONS OF OVERLAPPING WITHIN AN INFINITE SET OF HYPERPARALLELEPIPEDS IN EUCLIDEAN ARITHMETICAL SPACE AND THE FINITE LEBESGUE MEASURE OF THEIR UNION

Romanuke V. V., professor, d. t. s., associate professor

*Khmelnytskyi National University,
Institutska str., 11, Khmelnytskyi, 29016, Ukraine*

romanukevadimv@mail.ru

An infinite set of hyperparallelepipeds in Euclidean arithmetical space is considered. Each hyperparallelepiped is closed. It is defined by five parameters. They are the sequence order number and quadruple of positive integers, giving two numerators and two denominators of two fractions. These fractions are such that the numerator is always less than the denominator. One fraction is subtracted from the sequence order number, another one is added to this number. The denominators are raised to the power which is actually that sequence order number. As a case study, the union of those hyperparallelepipeds is found. The goal is to ascertain whether the ordinary Lebesgue measure of the hyperparallelepipeds' union is finite and, if finite, to calculate it. Besides, it is tasked to find any overlappings within the infinite set of hyperparallelepipeds by the constrained fractions. In the beginning, concepts of overlapping and nonoverlapping are stated. Overlapping and nonoverlapping are conceived at various levels. Number of these levels is defined by the Euclidean arithmetical space dimension. Nonoverlapping, however, does not specify overlapping in lower dimensions. The nonoverlapping is perceived at a level implying the simpler nonoverlappings which correspond to higher dimensions. Thus, nonoverlapping is specified not through all the levels, but just at the basic level which is not implied elsewhere. Further, conditions of when overlapping exists are stated in four theorems. It is revealed that only single overlapping can be, and only first two numbered hyperparallelepipeds can overlap. The ordinary Lebesgue measure of the hyperparallelepipeds' union is always finite. Both for nonoverlapping and overlapping, two formulas for calculating the measure are stated. In the conclusion, it is mentioned about three cases when each hyperparallelepiped is open or half-open. In these cases, hyperparallelepipeds cannot overlap at a single point. Nonetheless, the measure calculation formulas hold.

Key words: infinite set of hyperparallelepipeds, union, overlapping, finite Lebesgue measure.

УСЛОВИЯ ПЕРЕКРЫТИЯ В ОДНОМ БЕСКОНЕЧНОМ МНОЖЕСТВЕ ГИПЕРПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ В ЕВКЛИДОВОМ АРИФМЕТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ И КОНЕЧНАЯ МЕРА ЛЕБЕГА ИХ ОБЪЕДИНЕНИЯ

Романюк В. В., профессор, д. т. н., доцент

*Хмельницький національний університет,
ул. Інститутська, 11, г. Хмельницький, 29016, Україна*

romanukevadimv@mail.ru

Рассматривается бесконечное множество гиперпараллелепипедов в евклидовом арифметическом пространстве. Каждый гиперпараллелепипед замкнут. Он определяется по пяти параметрам. Ими являются порядковый номер последовательности и четвёрка положительных целых чисел,

дающих два числителя и два знаменателя двух дробей. Эти дроби таковы, что числитель всегда меньше знаменателя. Одна дробь вычитается из порядкового номера последовательности, другая — прибавляется к этому номеру. Знаменатели возводятся в степень, которой является тот же порядковый номер последовательности. Для исследования находится объединение рассматриваемых гиперпараллелепипедов. Цель состоит в выяснении того, является ли обычная лебегова мера объединения гиперпараллелепипедов конечной, и, если она конечна, необходимо её вычислить. Кроме того, ставится задание найти всякие перекрытия в бесконечном множестве гиперпараллелепипедов при накладываемых ограничениях на дроби. Вначале излагаются концепции перекрытия и отсутствия перекрытия. Перекрытие и отсутствие перекрытия понимаются на различных уровнях. Количество этих уровней определяется размерностью евклидового арифметического пространства. Однако по отсутствию перекрытия нельзя точно определить наличие перекрытия в нижних размерностях. Отсутствие перекрытия воспринимается на таком уровне, где подразумеваются более простые случаи неперекрывающихся подмножеств, что соответствует высшим размерностям. Соответственно отсутствие перекрытия определяется не по всем уровням, а только на основном уровне, который не подразумевается где-либо ещё. Далее условия того, когда перекрытие существует, излагаются в четырёх теоремах. Оказывается, что может быть только одно перекрытие, и только два первых гиперпараллелепипеда могут перекрываться. Обычная лебегова мера объединения гиперпараллелепипедов всегда конечна. И для случая отсутствия перекрытия, и для случая перекрытия приводятся две формулы, по которым вычисляется эта мера. В заключении упоминается о трёх случаях, где каждый гиперпараллелепипед открыт или полуоткрыт. В этих случаях гиперпараллелепипеды не могут перекрываться лишь в одной точке. Тем не менее, формулы для вычисления меры остаются в силе.

Ключевые слова: бесконечное множество гиперпараллелепипедов, объединение, перекрытие, конечная лебегова мера.

УМОВИ ПЕРЕКРИТТЯ В ОДНІЙ НЕСКІНЧЕННІЙ МНОЖИНІ ГІПЕРПАРАЛЕЛЕПЕДІВ В ЕВКЛІДОВОМУ АРИФМЕТИЧНОМУ ПРОСТОРІ І СКІНЧЕННА МІРА ЛЕБЕГА ЇХ ОБ'ЄДНАННЯ

Романюк В. В., професор, д. т. н., доцент

*Хмельницький національний університет,
вул. Інститутська, 11, м. Хмельницький, 29016, Україна*

romanukevadimv@mail.ru

Розглядається нескінченна множина гіперпараллелепідів в арифметичному евклідовому просторі. Кожен гіперпараллелепід замкнутий. Він визначається за п'ятьма параметрами. Ними є порядковий номер послідовності та четвірка додатних цілих чисел, що дають два чисельники і два знаменники двох дробів. Ці дроби є такими, що чисельник завжди менший за знаменник. Один дріб віднімається від порядкового номера послідовності, інший — додається до цього номера. Знаменники підносяться до степеня, яким є той же порядковий номер послідовності. Для дослідження знаходиться об'єднання даних гіперпараллелепідів. Мета полягає у з'ясуванні того, чи є звичайна лебегова міра об'єднання гіперпараллелепідів скінченною, і, якщо вона скінченна, необхідно її обчислити. Крім того, ставиться завдання знайти всякі перекриття у нескінченній множині гіперпараллелепідів за обмежень, що накладаються на дроби. Спочатку викладаються концепції перекриття і відсутності перекриття. Перекриття і відсутність перекриття розуміються на різних рівнях. Кількість цих рівнів визначається розмірністю арифметичного евклідового простору. Проте по відсутності перекриття не можна точно визначити наявність перекриття в нижчих розмірностях. Відсутність перекриття сприймається на такому рівні, де маються на увазі простіші випадки підмножин, котрі не перекриваються, що відповідає вищим розмірностям. Відповідно відсутність перекриття визначається не по всіх рівнях, а лише на основному рівні, який неможливо визначити десь в іншому місці. Умови того, коли перекриття існує, далі викладаються в чотирьох теоремах. Виявляється, що може бути лише одне перекриття, і лише два перші гіперпараллелепіди можуть перекриватися. Звичайна лебегова міра об'єднання гіперпараллелепідів завжди є скінченною. І для випадку відсутності перекриття, і для випадку перекриття наводяться дві формули, за якими обчислюється ця міра. У висновку згадується про три випадки, де кожен гіперпараллелепід є відкритим або напіввідкритим. У цих випадках гіперпараллелепіди не можуть перекриватися лише в одній точці. Проте формули для обчислення міри залишаються в силі.

Ключові слова: нескінченна множина гіперпараллелепідів, об'єднання, перекриття, скінченна лебегова міра.

AN INFINITE COUNTABLE NONOVERLAPPING ELEMENTS COVER PROBLEM

The set cover problem issues from combinatorics, computer science and complexity theory [1, 2]. Set packing is the dual problem of the set covering [3, 4]. It is a special case when the cover is of infinite countable number of subsets. The set cover problem relates to many similar and dual problems [3, 5, 6], e. g. hitting set, vertex cover, edge cover, set packing hereinbefore mentioned,

maximum coverage problem, dominating set, exact cover problem, closest pair of points problem, nearest neighbor search, etc. However, sometimes it is desirable that any couple of elements in the infinite countable cover have the empty intersection. Such a problem of the infinite countable cover of nonoverlapping elements may be relevant to practicing when the covering (or tiling) must have streaks or strata [7, 8].

INFINITE LEBESGUE-MEASURABLE COVERINGS IN EUCLIDEAN ARITHMETICAL SPACE

If a set $A \subset \mathbb{R}^K$ by $K \in \mathbb{N}$ can be formed from closed or open sets through finite or countable number of operations of unions, intersections, and differences (relative complements), then A is a Borel set [9]. Each Borel set in \mathbb{R}^K is measurable [9]. However, an infinite covering from Borel sets may not have the finite Lebesgue measure.

For the case study, consider the infinite union

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigtimes_{k=1}^K \left[n - \frac{a_k}{b_k^n}; n + \frac{c_k}{d_k^n} \right] \subset \mathbb{R}^K \tag{1}$$

of a sequence of hyperparallelepipeds by some parameters

$$\{a_k, b_k, c_k, d_k\} \tag{2}$$

in the k -th dimension. Speaking generally, these parameters can be taken as real numbers. And then the covering (1) may not have the finite Lebesgue measure in \mathbb{R}^K for a very wide range of cases. If parameters (2) are positive $\forall k = \overline{1, K}$ then a class of infinite coverings (1) having the finite Lebesgue measure is obviously narrower. The cases when the covering (1) turns finitely Lebesgue-measurable constitute a pretty narrow class for integer parameters (2). Beyond finite measurability, another question is whether the infinite countable cover (1) is the union of nonoverlapping elements.

THE ARTICLE GOAL AND ITS TASKS

For definiteness, we take all the parameters (2) in each dimension as natural numbers, which, however, are constrained by the denominators in the statement (1):

$$a_k \in \mathbb{N}, b_k \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{N}, d_k \in \mathbb{N}, a_k < b_k, c_k < d_k \quad \forall k = \overline{1, K}. \tag{3}$$

The cover (1) is Borelean and thus is $\mu_{\mathbb{R}^K}$ -measurable [9]. Denote the n -th hyperparallelepiped as

$$P_n = \bigtimes_{k=1}^K \left[n - \frac{a_k}{b_k^n}; n + \frac{c_k}{d_k^n} \right]. \tag{4}$$

By denotation (4), we have to ascertain whether the measure of the cover (1) is finite and

$$\mu_{\mathbb{R}^K}(P) = \mu_{\mathbb{R}^K} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\mathbb{R}^K}(P_n) \tag{5}$$

or not, i. e. are there any overlappings within the infinite set of hyperparallelepipeds $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ by (3)? Here, the overlapping is understood in the sense of the ordinary Lebesgue measure in \mathbb{R}^K . The strict concept of overlapping should precede conditions of when overlapping exists. The number of the existing overlappings must be estimated. Finally, it ought to be noticed how the measure $\mu_{\mathbb{R}^K}(P)$ should be calculated.

CONCEPTS OF OVERLAPPING AND NONOVERLAPPING

If there is no overlapping, the measure is σ -additive and (5) is true. The overlapping, however, can be conceived at various levels. Even if $K = 1$, the segments $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ may be nonoverlapping in two ways. The neighboring segments P_n and P_{n+1} either do not touch each other $\forall n = \overline{1, \infty}$ or $\exists n \in \{\overline{1, \infty}\}$ such that they have just a single common point (possibly, not for any n).

The condition

$$\mu_{\mathbb{R}^K}(P_{n_1} \cap P_{n_2}) = 0 \quad \forall n_1 = \overline{1, \infty} \quad \text{and} \quad \forall n_2 = \overline{n_1 + 1, \infty} \quad (6)$$

requires that there would not be \mathbb{R}^K -overlapping. Let the statement (6) be the condition of \mathbb{R}^K -nonoverlapping. This is the simplest nonoverlapping. Although, there may be more strict requirements, that there would not be \mathbb{R}^q -overlapping:

$$\begin{aligned} \{P_{n_1} \cap P_{n_2}\} \subset \mathbb{R}^q \quad \text{and} \quad \mu_{\mathbb{R}^q}(P_{n_1} \cap P_{n_2}) = 0 \\ \forall n_1 = \overline{1, \infty} \quad \text{and} \quad \forall n_2 = \overline{n_1 + 1, \infty} \quad \text{for} \quad q \in \{\overline{1, K}\}. \end{aligned} \quad (7)$$

The statement (7) is the condition of \mathbb{R}^q -nonoverlapping. The most strict requirement is \emptyset -overlapping, i. e.

$$P_{n_1} \cap P_{n_2} = \emptyset \quad \forall n_1 = \overline{1, \infty} \quad \text{and} \quad \forall n_2 = \overline{n_1 + 1, \infty} \quad (8)$$

meaning that those hyperparallelepipeds \emptyset -overlap. Else they overlap at least at a single point (SP). Clearly, \emptyset -overlapping implies SP-nonoverlapping, and SP-nonoverlapping itself implies \mathbb{R}^q -nonoverlapping for $q \in \{\overline{1, K}\}$, and \mathbb{R}^q -nonoverlapping implies \mathbb{R}^{q+1} -nonoverlapping for $q \in \{\overline{1, K-1}\}$. Nonoverlapping doesn't specify overlapping (surely, in lower dimensions).

For instance, \mathbb{R} -nonoverlapping implies either SP-overlapping or \emptyset -overlapping, and \mathbb{R}^2 -nonoverlapping may be followed with \mathbb{R} -overlapping, SP-overlapping, or \emptyset -overlapping.

Consequently, the nonoverlapping is perceived at one of its $K+1$ levels implying the simpler (corresponding to higher dimensions) nonoverappings. Thus, when stating about nonoverlapping, it is going to be specified not through all the levels, but just at the basic level which is not implied elsewhere. And when it is spoken that there is no overlapping at a level then this is the nonoverlapping at that level.

CONDITIONS OF WHEN OVERLAPPING EXISTS

Theorem 1. If there is no overlapping in the k -th dimension at some $n = n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$) within the infinite set $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ of hyperparallelepipeds (4) by (3), then there is no overlapping for $n > n_0$.

Proof. In the k -th dimension, denote the difference between the left end of the $(n+1)$ -th segment and the right end of the n -th segment:

$$s(k, n) = n + 1 - \frac{a_k}{b_k^{n+1}} - \left(n + \frac{c_k}{d_k^n} \right) = 1 - \left(\frac{a_k}{b_k^{n+1}} + \frac{c_k}{d_k^n} \right). \quad (9)$$

If at some $n = n_0$ there is no \mathbb{R}^K -overlapping, then

$$\exists k_0 \in \{\overline{1, K}\} \quad \text{such that} \quad s(k_0, n_0) = 0 \quad (10)$$

and

$$\frac{a_{k_0}}{b_{k_0}^{n_0+1}} + \frac{c_{k_0}}{d_{k_0}^{n_0}} = 1 \tag{11}$$

by (9), while

$$s(k, n_0) < 0 \text{ by } k \in \{\overline{\{1, K\}} \setminus \{k_0\}\}.$$

By constraints (3), we have obvious inequalities

$$b_{k_0}^{n_0+1+m} > b_{k_0}^{n_0+1} \text{ and } d_{k_0}^{n_0+m} > d_{k_0}^{n_0} \text{ by } m \in \mathbb{N} \tag{12}$$

letting conclude that

$$\frac{a_{k_0}}{b_{k_0}^{n_0+1+m}} < \frac{a_{k_0}}{b_{k_0}^{n_0+1}} \text{ and } \frac{c_{k_0}}{d_{k_0}^{n_0+m}} < \frac{c_{k_0}}{d_{k_0}^{n_0}}. \tag{13}$$

Consequently,

$$\frac{a_{k_0}}{b_{k_0}^{n_0+1+m}} + \frac{c_{k_0}}{d_{k_0}^{n_0+m}} < \frac{a_{k_0}}{b_{k_0}^{n_0+1}} + \frac{c_{k_0}}{d_{k_0}^{n_0}} = 1. \tag{14}$$

From the double inequality (14) we get

$$\frac{a_{k_0}}{b_{k_0}^{n_0+1+m}} + \frac{c_{k_0}}{d_{k_0}^{n_0+m}} < 1 \tag{15}$$

and

$$s(k_0, n_0 + m) > 0 \text{ by } m \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Therefore,

$$\mu_{\mathbb{R}^K}(P_{n_1} \cap P_{n_2}) = 0 \quad \forall n_1 = \overline{n_0, \infty} \text{ and } \forall n_2 = \overline{n_1 + 1, \infty}. \tag{17}$$

If there is no \mathbb{R}^q -overlapping at some $n = n_0$, then we have different $K - q + 1$ indices

$$\{k_0^{(j)}\}_{j=1}^{K-q+1} \subset \overline{\{1, K\}} \text{ such that}$$

$$s(k_0^{(j)}, n_0) = 0 \quad \forall j = \overline{1, K - q + 1} \tag{18}$$

while

$$s(k, n_0) < 0 \text{ by } k \in \left\{ \overline{\{1, K\}} \setminus \{k_0^{(j)}\}_{j=1}^{K-q+1} \right\}.$$

Then we take $k_0 = k_0^{(j)}$ and go through the deduction (10) — (16) $\forall j = \overline{1, K - q + 1}$. Finally,

$$\{P_{n_1} \cap P_{n_2}\} \subset \mathbb{R}^q \text{ and } \mu_{\mathbb{R}^q}(P_{n_1} \cap P_{n_2}) = 0 \quad \forall n_1 = \overline{n_0, \infty} \text{ and } \forall n_2 = \overline{n_1 + 1, \infty}. \tag{19}$$

If there is no overlapping at all, i. e.

$$P_{n_0} \cap P_{n_0+1} = \emptyset, \tag{20}$$

then

$$s(k_0, n_0) > 0 \quad \forall k_0 = \overline{1, K}. \quad (21)$$

Subsequently, we have

$$\frac{a_{k_0}}{b_{k_0}^{n_0+1}} + \frac{c_{k_0}}{d_{k_0}^{n_0}} < 1 \quad (22)$$

and (12), (13), and

$$\frac{a_{k_0}}{b_{k_0}^{n_0+1+m}} + \frac{c_{k_0}}{d_{k_0}^{n_0+m}} < \frac{a_{k_0}}{b_{k_0}^{n_0+1}} + \frac{c_{k_0}}{d_{k_0}^{n_0}} < 1, \quad (23)$$

whence (15) and (16) issue. Eventually,

$$P_{n_1} \cap P_{n_2} = \emptyset \quad \forall n_1 = \overline{n_0, \infty} \quad \text{and} \quad \forall n_2 = \overline{n_1 + 1, \infty}. \quad (24)$$

The theorem has been proved.

Theorem 2. If there is a couple of identical values among the numbers (3), then there is \emptyset -overlapping within the infinite set $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ of hyperparallelepipeds (4) by (3).

Proof. Here, the four cases are to be considered:

$$b_k = d_k, \quad a_k = c_k, \quad a_k = d_k, \quad b_k = c_k.$$

Owing to Theorem 1, it is sufficient to disclose that

$$\frac{a_k}{b_k^2} + \frac{c_k}{d_k} < 1. \quad (25)$$

The inequality (25) means that $s(k, 1) > 0$ and thus the condition (8) is true.

By $b_k = d_k$, in succession,

$$a_k < b_k, \quad \frac{a_k}{b_k} < \frac{b_k}{b_k},$$

$$\frac{a_k}{b_k^2} < \frac{1}{b_k},$$

$$\frac{c_k}{b_k} < \frac{c_k + 1}{b_k} \leq 1,$$

$$\frac{a_k}{b_k^2} + \frac{c_k}{b_k} < \frac{1}{b_k} + \frac{c_k}{b_k} = \frac{c_k + 1}{b_k} \leq 1,$$

whence

$$\frac{a_k}{b_k^2} + \frac{c_k}{b_k} < 1. \quad (26)$$

The inequality (26) by $b_k = d_k$ is the inequality (25).

By $a_k = c_k$, in succession,

$$a_k < b_k, \quad a_k(a_k + 1) < b_k^2,$$

$$\frac{a_k}{b_k^2} < \frac{1}{a_k + 1}, \quad \frac{a_k}{b_k^2} + 1 - \frac{1}{a_k + 1} < 1,$$

$$\frac{a_k}{b_k^2} + \frac{a_k}{a_k + 1} < 1,$$

$$d_k \geq a_k + 1, \quad \frac{1}{d_k} \leq \frac{1}{a_k + 1},$$

$$\frac{a_k}{d_k} \leq \frac{a_k}{a_k + 1},$$

$$\frac{a_k}{b_k^2} + \frac{a_k}{d_k} \leq \frac{a_k}{b_k^2} + \frac{a_k}{a_k + 1} < 1,$$

whence

$$\frac{a_k}{b_k^2} + \frac{a_k}{d_k} < 1. \tag{27}$$

The inequality (27) by $a_k = c_k$ is the inequality (25).

By $a_k = d_k$, in succession,

$$a_k < b_k, \quad a_k^2 < b_k^2,$$

$$\frac{a_k}{b_k^2} < \frac{1}{a_k}, \quad \frac{a_k}{b_k^2} - \frac{1}{a_k} + 1 < 1,$$

$$\frac{a_k}{b_k^2} + \frac{a_k - 1}{a_k} < 1,$$

$$\frac{c_k}{a_k} \leq \frac{a_k - 1}{a_k},$$

$$\frac{a_k}{b_k^2} + \frac{c_k}{a_k} \leq \frac{a_k}{b_k^2} + \frac{a_k - 1}{a_k} < 1,$$

whence

$$\frac{a_k}{b_k^2} + \frac{c_k}{a_k} < 1. \tag{28}$$

The inequality (28) by $a_k = d_k$ is the inequality (25).

By $b_k = c_k$, in succession,

$$a_k \leq b_k - 1,$$

$$a_k (b_k + 1) \leq (b_k - 1)(b_k + 1),$$

$$a_k (b_k + 1) - b_k^2 \leq (b_k - 1)(b_k + 1) - b_k^2 = -1,$$

$$\frac{a_k (b_k + 1) - b_k^2}{b_k^2 (b_k + 1)} \leq \frac{(b_k - 1)(b_k + 1) - b_k^2}{b_k^2 (b_k + 1)} = -\frac{1}{b_k^2 (b_k + 1)},$$

$$\frac{a_k}{b_k^2} - \frac{1}{b_k + 1} \leq \frac{(b_k - 1)(b_k + 1) - b_k^2}{b_k^2(b_k + 1)} = -\frac{1}{b_k^2(b_k + 1)},$$

$$\frac{a_k}{b_k^2} - \frac{1}{b_k + 1} + 1 \leq \frac{(b_k - 1)(b_k + 1) - b_k^2}{b_k^2(b_k + 1)} + 1 = 1 - \frac{1}{b_k^2(b_k + 1)} < 1,$$

$$\frac{a_k}{b_k^2} + \frac{b_k}{b_k + 1} \leq \frac{(b_k - 1)(b_k + 1) - b_k^2}{b_k^2(b_k + 1)} + 1 = 1 - \frac{1}{b_k^2(b_k + 1)} < 1,$$

$$\frac{a_k}{b_k^2} + \frac{b_k}{b_k + 1} < 1,$$

$$\frac{b_k}{d_k} \leq \frac{b_k}{b_k + 1},$$

$$\frac{a_k}{b_k^2} + \frac{b_k}{d_k} \leq \frac{a_k}{b_k^2} + \frac{b_k}{b_k + 1} < 1,$$

whence

$$\frac{a_k}{b_k^2} + \frac{b_k}{d_k} < 1. \quad (29)$$

The inequality (29) by $b_k = c_k$ is the inequality (25).

The theorem has been proved.

Theorem 3. If $b_k > c_k$, then there is \emptyset -overlapping within the infinite set $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ of hyperparallelepipeds (4) by (3).

Proof. Here,

$$b_k^2 > c_k^2$$

and

$$\frac{a_k}{b_k^2} < \frac{a_k}{c_k^2}.$$

Using the inequality (29), see that

$$\frac{a_k}{b_k^2} + \frac{c_k}{d_k} < \frac{a_k}{c_k^2} + \frac{c_k}{d_k} < 1,$$

whence the inequality (25) issues.

The theorem has been proved.

Theorem 4. If

$$a_k < b_k < c_k < d_k, \quad (30)$$

then there can be an overlapping within the infinite set $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ of hyperparallelepipeds (4) by (3), and this overlapping is of P_1 and P_2 , and this overlapping is the single only.

Proof. It is sufficient to consider a counterexample:

$$\frac{a_k}{(a_k+1)^2} + \frac{a_k+2}{a_k+3} = \frac{a_k^3+5a_k^2+8a_k+2}{a_k^3+5a_k^2+7a_k+3} = 1 + \frac{a_k-1}{a_k^3+5a_k^2+7a_k+3} \geq 1$$

and

$$\frac{a_k}{(a_k+1)^2} + \frac{a_k+2}{a_k+3} > 1 \text{ by } a_k \neq 1. \tag{31}$$

The inequality (31) confirms that the inequality

$$\frac{a_k}{b_k^2} + \frac{c_k}{d_k} > 1 \tag{32}$$

is possible by (30), and thus an overlapping of hyperparallelepipeds P_1 and P_2 exists. If $a_k = 1$ then either SP-overlapping or \mathbb{R}^q -overlapping of P_1 and P_2 is possible for $q \in \{1, K-1\}$.

For proving that the overlapping is the single only along the k -th dimension, we have to show that

$$s(k, n) > 0 \text{ by } n = \overline{2, \infty}.$$

For this, it is sufficient to show, owing to Theorem 1, that

$$\frac{a_k}{b_k^3} + \frac{c_k}{d_k^2} < 1. \tag{33}$$

As

$$a_k \leq b_k - 1, \quad c_k \leq d_k - 1,$$

then

$$\frac{a_k}{b_k^3} + \frac{c_k}{d_k^2} \leq \frac{b_k-1}{b_k^3} + \frac{d_k-1}{d_k^2} < \frac{b_k}{b_k^3} + \frac{d_k}{d_k^2} = \frac{1}{b_k^2} + \frac{1}{d_k}. \tag{34}$$

But

$$b_k \geq 2, \quad \frac{1}{b_k^2} \leq \frac{1}{4},$$

and

$$d_k \geq 4, \quad \frac{1}{d_k} \leq \frac{1}{4}.$$

So (34) is completed at the upper estimation:

$$\frac{b_k-1}{b_k^3} + \frac{d_k-1}{d_k^2} < \frac{b_k}{b_k^3} + \frac{d_k}{d_k^2} = \frac{1}{b_k^2} + \frac{1}{d_k} \leq \frac{1}{2},$$

whence the inequality (33) is confirmed.

The theorem has been proved.

If there is \mathbb{R}^K -nonoverlapping within the infinite set $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ of hyperparallelepipeds (4) by (3), then the measure

$$\mu_{\mathbb{R}^K}(P) = \mu_{\mathbb{R}^K}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\mathbb{R}^K}(P_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^K \left(\frac{c_k}{d_k^n} - \left(-\frac{a_k}{b_k^n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^K \left(\frac{c_k}{d_k^n} + \frac{a_k}{b_k^n}\right) \quad (35)$$

should be calculated via expanding the product in the last term of (35) and finding sums of the corresponding 2^K geometrical progressions. For instance, when $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ are segments,

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{R}}(P) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_1}{d_1^n} + \frac{a_1}{b_1^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_1}{d_1^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1^n} = c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_1^n} + a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_1^n} = \\ &= c_1 \left(\frac{1}{1-\frac{1}{d_1}} - 1\right) + a_1 \left(\frac{1}{1-\frac{1}{b_1}} - 1\right) = \frac{c_1}{d_1-1} + \frac{a_1}{b_1-1}. \end{aligned} \quad (36)$$

When $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ are rectangles,

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{R}^2}(P) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_1}{d_1^n} + \frac{a_1}{b_1^n}\right) \left(\frac{c_2}{d_2^n} + \frac{a_2}{b_2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_1 c_2}{d_1^n d_2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 a_2}{b_1^n b_2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_1 a_2}{d_1^n b_2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 c_2}{b_1^n d_2^n} = \\ &= c_1 c_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(d_1 d_2)^n} + a_1 a_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(b_1 b_2)^n} + c_1 a_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(d_1 b_2)^n} + a_1 c_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(b_1 d_2)^n} = \\ &= \frac{c_1 c_2}{d_1 d_2 - 1} + \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2 - 1} + \frac{c_1 a_2}{d_1 b_2 - 1} + \frac{a_1 c_2}{b_1 d_2 - 1}. \end{aligned} \quad (37)$$

Generally,

$$\mu_{\mathbb{R}^K}(P) = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^K \left(\frac{c_k}{d_k^n} + \frac{a_k}{b_k^n}\right) = \sum_{j=0}^{2^K-1} \frac{\prod_{k=1}^K u_k}{\prod_{k=1}^K w_k - 1}, \quad (38)$$

where $u_k = c_k$ and $w_k = d_k$ if the k -th position of the binary code of the index j is 1, but $u_k = a_k$ and $w_k = b_k$ if the k -th position of the binary code of the index j is 0.

If $\forall k = \overline{1, K}$ the condition (30) is true, and if $\mu_{\mathbb{R}^K}(P_1 \cap P_2) \neq 0$ then the measure

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{R}^K}(P) &= \mu_{\mathbb{R}^K}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\mathbb{R}^K}(P_n) - \mu_{\mathbb{R}^K}(P_1 \cap P_2) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^K \left(\frac{c_k}{d_k^n} + \frac{a_k}{b_k^n}\right) - \prod_{k=1}^K (-s(k, 1)) = \sum_{j=0}^{2^K-1} \frac{\prod_{k=1}^K u_k}{\prod_{k=1}^K w_k - 1} - \prod_{k=1}^K \left(\frac{a_k}{b_k^2} + \frac{c_k}{d_k} - 1\right) \end{aligned} \quad (39)$$

by the $\{u_k, w_k\}$ -convention following the formula (38).

CONCLUSION

By constraints (3), the measure of the cover (1) is finite and the equality (5) holds under conditions of Theorem 2 and Theorem 3. The value (38) is the measure of the union (1) of \mathbb{R}^k -nonoverlapping hyperparallelepipeds. As an exception, there can be an overlapping of just hyperparallelepipeds P_1 and P_2 by (30), and this overlapping is the single only. By the overlapping, the measure of the cover (1) is calculated as (39).

A peculiarity of SP-overlapping concerns three cases when the n -th hyperparallelepiped (4) is substituted with one of those hyperparallelepipeds:

$$P_n = \prod_{k=1}^K \left(n - \frac{a_k}{b_k^n}; n + \frac{c_k}{d_k^n} \right), \quad P_n = \prod_{k=1}^K \left[n - \frac{a_k}{b_k^n}; n + \frac{c_k}{d_k^n} \right], \quad P_n = \prod_{k=1}^K \left(n - \frac{a_k}{b_k^n}; n + \frac{c_k}{d_k^n} \right). \quad (40)$$

In these cases, SP-overlapping doesn't exist. Nonetheless, the measure calculation formulas (38) and (39) hold for (40) as well.

REFERENCES

1. Vazirani V. V. Approximation Algorithms / V. V. Vazirani. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. — 380 p.
2. Korte B. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms (5 ed.) / B. Korte, J. Vygen. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012. — 660 p.
3. Gao C. An efficient local search heuristic with row weighting for the unicast set covering problem / C. Gao, X. Yao, T. Weise, J. Li // European Journal of Operational Research. — 2015. — Volume 246, Issue 3. — P. 750 — 761.
4. Zhang Y.-L. Relationships between generalized rough sets based on covering and reflexive neighborhood system / Y.-L. Zhang, C.-Q. Li, M.-L. Lin, Y.-J. Lin // Information Sciences. — 2015. — Volume 319. — P. 56 — 67.
5. Al-Shihabi S. An improved hybrid algorithm for the set covering problem / S. Al-Shihabi, M. Arafah, M. Barghash // Computers & Industrial Engineering. — 2015. — Volume 85. — P. 328 — 334.
6. Ashik Mathew K. On hypercube packings, blocking sets and a covering problem / K. Ashik Mathew, P. R. J. Östergård // Information Processing Letters. — 2015. — Volume 115, Issue 2. — P. 141 — 145.
7. Agora E. Multi-tiling sets, Riesz bases, and sampling near the critical density in LCA groups / E. Agora, J. Antezana, C. Cabrelli // Advances in Mathematics. — 2015. — Volume 285. — P. 454 — 477.
8. Ciucu M. Proof of two conjectures of Ciucu and Krattenthaler on the enumeration of lozenge tilings of hexagons with cut off corners / M. Ciucu, I. Fischer // Journal of Combinatorial Theory. — 2015. — Series A, Volume 133. — P. 228 — 250.
9. Городецкий В. В. Методы решения задач по функциональному анализу : [учеб. пособие] / В. В. Городецкий, Н. И. Нагнибида, П. П. Настасиев. — К. : Выща школа, 1990. — 479 с.

REFERENCES

1. Vazirani V. V. Approximation Algorithms, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003, 380 p.
2. Korte B., Vygen J. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms (5 ed.), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012, 660 p.
3. Gao C., Yao X., Weise T., Li J. An efficient local search heuristic with row weighting for the unicast set covering problem, European Journal of Operational Research, 2015, Volume 246, Issue 3, pp. 750 — 761.
4. Zhang Y.-L., Li C.-Q., Lin M.-L., Lin Y.-J. Relationships between generalized rough sets based on covering and reflexive neighborhood system, Information Sciences, 2015, Volume 319, pp. 56 — 67.

5. Al-Shihabi S., Arafeh M., Barghash M. An improved hybrid algorithm for the set covering problem, Computers & Industrial Engineering, 2015, Volume 85, pp. 328 — 334.
6. Ashik Mathew K., Östergård P. R. J. On hypercube packings, blocking sets and a covering problem, Information Processing Letters, 2015, Volume 115, Issue 2, pp. 141 — 145.
7. Agora E., Antezana J., Cabrelli C. Multi-tiling sets, Riesz bases, and sampling near the critical density in LCA groups, Advances in Mathematics, 2015, Volume 285, pp. 454 — 477.
8. Ciucu M., Fischer I. Proof of two conjectures of Ciucu and Krattenthaler on the enumeration of lozenge tilings of hexagons with cut off corners, Journal of Combinatorial Theory, 2015, Series A, Volume 133, pp. 228 — 250.
9. Gorodetskiy V. V., Nagnibida N. I., Nastasiyev P. P. Methods of solving tasks of functional analysis, Kyiv, Vyshcha shkola, 1990, 479 p.

УДК 539.3

АНАЛІТИЧНО-ЧИСЕЛЬНА МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ ДОВГИХ НЕКРУГОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З УРАХУВАННЯМ ДЕФОРМАЦІЙ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ

Сторожук Є. А., д. ф.-м. н., професор, Комарчук С. М., Піголь О. В., Яцура А. В.

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна*

stevan@ukr.net

Дано постановку і розроблено аналітично-чисельну методику розв'язання задач статички для композитних нескінченно довгих циліндричних оболонок некругового поперечного перерізу з низькою зсувною жорсткістю. Отримано вирази для внутрішніх силових факторів і узагальнених переміщень замкненої і відкритої оболонок при дії комбінованого навантаження. Інтеграли у вказаних виразах обчислюються чисельно з використанням формули трапецій. Представлено числові результати для оболонки овального перерізу, навантаженої рівномірним внутрішнім тиском.

Ключові слова: довга циліндрична оболонка, некруговий поперечний переріз, комбіноване навантаження, чисельне інтегрування, формула трапецій.

АНАЛИТИЧЕСКИ-ЧИСЛЕННАЯ МЕТОДИКА РАСЧЕТА ДЛИННЫХ НЕКРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИЙ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Сторожук Е. А., д. ф.-м. н., профессор, Комарчук С. Н., Пиголь О. В., Яцура А. В.

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина*

stevan@ukr.net

Дана постановка и разработана аналитически-численная методика решения задач статички для композитных бесконечно длинных цилиндрических оболочек некругового поперечного сечения с низкой сдвиговой жесткостью. Получены выражения для внутренних силовых факторов и обобщенных перемещений замкнутой и открытой оболочек при действии комбинированной нагрузки. Интегралы в указанных выражениях вычисляются численно с использованием формулы трапеций. Представлены численные результаты для оболочки овального сечения, нагруженной равномерным внутренним давлением.

Ключевые слова: длинная цилиндрическая оболочка, некруговое поперечное сечение, комбинированная нагрузка, численное интегрирование, формула трапеций.

ANALYTICAL AND NUMERICAL METHOD OF CALCULATING THE LENGTH OF NONCIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS TAKING INTO ACCOUNT TRANSVERSE SHEAR DEFORMATION

Storozhuk E. A., D.Sc. in Physics and Maths, professor, Komarchuk S. M., Pigol O. V., Yatsura A. V.

*S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine,
Nesterov str. 3, Kyiv, 03057, Ukraine*

stevan@ukr.net

The thin cylindrical shells of circular and non-circular cross section are widely used in various branches of engineering as structural elements of machines and devices. Stress-strain state of cylindrical shell of non-circular (elliptical, oval, parabolic, etc.) cross section is described by the system of differential equations with variable coefficients. Therefore, the solving of boundary value problems for non-circular membranes associated with considerable mathematical difficulties.

Slow convergence of results occurs in the numerical solution of problems for infinitely long cylindrical shell of non-circular cross section due to the membrane circuit. The formulation is given and analytical numerical methodology of solution is proposed for solving of problems of statics for this class of membranes in the paper. The methodology is free from the membrane circuit and provides high accuracy of results.

It is accepted that infinitely long cylindrical non-circular shell is made of orthotropic composite material and loaded by surface and per unit length forces are distributed evenly along the axis of the cylinder. Shell is in the curvilinear orthogonal coordinate system that coincides with the main lines of curvature. Directions of orthotropy of material match with the directions of the axes at each point of the shell. Basic equations (balance equations, geometric and physical ratio) are given based on the refined theory of flat shells, which takes into account the cross-strain shear.

The methodology of solving a system of differential equations describing the stress-strain state non-circular infinitely long cylindrical shell based on the analytical and numerical integration. Integrals in the expressions for internal power factors and generalized displacements are calculated using numerical formula of trapezoids.

The solutions of problems of statics are constructed for such types of long cylindrical non-circular shell as closed shell under the influence of surface pressure and two pairs of opposite transverse forces evenly distributed along the generatings and open shell with hinged or rigid fixed longitudinal edges, stressed by surface forces and transverse force evenly distributed along the generating that is applied at the top of the shell.

Specific numerical results are received for a long closed cylindrical shell of oval cross section loaded by uniform internal pressure using developed techniques and programs. The distribution of internal forces, bending moment, angle of rotation of normal, tangential movement and deflection of the shell along the contour of the cross section are given and the influence of transverse shear deformation at maximum value of components of the stress-strain state are studied. Numerical results are presented in tables.

Key words: long cylindrical shell, non-circular cross section, combined load, numerical integration, trapezoids formula.

ВСТУП

Тонкі циліндричні оболонки кругового і некругового перерізу знаходять широке застосування в різноманітних галузях техніки як конструктивні елементи машин та приладів. Напружено-деформований стан (НДС) циліндричної оболонки некругового (еліптичного, овального, параболічного тощо) перерізу описується системою диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Тому розв'язання крайових задач для некругових оболонок пов'язане зі значними математичними труднощами.

Історично першою працею з розв'язання задач про НДС циліндричної оболонки некругового перерізу була робота [1]. Проте перші розв'язки були надто спрощеними. Коректні результати, напевне, вперше отримав С. Тимошенко [2].

У більшості публікацій з цієї проблеми, які вийшли після зазначених вище робіт, за допомогою чисельних, аналітичних і експериментальних методів досліджено НДС [3-5], стійкість [6, 7] і коливання [8, 9] овальних та еліптичних циліндричних оболонок скінченної довжини при дії різного виду навантажень.

При чисельному розв'язанні крайових задач для нескінченно довгої циліндричної оболонки некругового перерізу спостерігається сповільнена збіжність результатів внаслідок мембранного замикання.

Автори розробили аналітично-чисельну методику розв'язання задач статички для такого класу оболонок, яка базується на аналітичному і чисельному інтегруванні, вільна від мембранного замикання та забезпечує високу точність результатів.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

Розглянемо нескінченно довгу некругову циліндричну оболонку постійної товщини h , яка виготовлена з композитного ортотропного матеріалу і навантажена поверхневими та погонними силами, рівномірно розподіленими вздовж твірних (у напрямку осі) циліндра. Геометрію серединної поверхні оболонки задамо в глобальній декартовій системі координат (X, Y, Z) , вісь OX якої спрямована по осі циліндра. Площину поперечного перерізу оболонки віднесемо до системи координат (Y, Z) , а його рівняння запишемо в параметричній формі:

$$Y = Y(\varphi); \quad Z = Z(\varphi); \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2,$$

де φ – кут між нормаллю до серединної поверхні і вертикальною віссю OZ .

Віднесемо оболонку до криволінійної ортогональної системи координат (s, φ, ζ) . Тут s, ζ – довжини твірної і нормалі до серединної поверхні. Прийmemo, що напрямки ортотропії матеріалу в кожній точці оболонки збігаються з напрямками осей координат (s, φ, ζ) . Деформації і напруження в кожному поперечному перерізі оболонки будуть однаковими, а всі шукані величини будуть залежати тільки від кута φ .

Вихідними при дослідженні НДС даного класу оболонок є загальні рівняння уточненої теорії непологих оболонок, в якій враховуються деформації поперечного зсуву. Основні рівняння оболонки в цьому випадку мають вигляд [10]:

рівняння рівноваги

$$\frac{dN}{rd\varphi} + \frac{Q}{r} + q_\varphi = 0; \quad \frac{dQ}{rd\varphi} - \frac{N}{r} + q_\zeta = 0; \quad \frac{dM}{rd\varphi} - Q = 0; \quad (1)$$

геометричні співвідношення

$$\varepsilon = \frac{du}{rd\varphi} + \frac{w}{r}; \quad \gamma = \vartheta + \frac{dw}{rd\varphi} - \frac{u}{r}; \quad \mu = \frac{d\vartheta}{rd\varphi}; \quad (2)$$

фізичні співвідношення

$$\begin{aligned} N &= D_N \varepsilon; \quad D_N = E_{\varphi\varphi} h / (1 - \nu_{s\varphi} \nu_{\varphi s}); \\ Q &= D_Q \gamma; \quad D_Q = k G_{\varphi\zeta} h; \\ M &= D_M \mu; \quad D_M = E_{\varphi\varphi} h^3 / 12 (1 - \nu_{s\varphi} \nu_{\varphi s}), \end{aligned} \quad (3)$$

де N, Q, M – внутрішні зусилля і момент; r – радіус кривизни поперечного перерізу; ε, γ, μ – мембранна, поперечна зсувна і згинна деформації; u, w – тангенціальне переміщення і прогин точок серединної поверхні оболонки; ϑ – кут повороту нормалі; $E_{\varphi\varphi}$ – модуль пружності матеріалу оболонки в напрямку φ ; $\nu_{s\varphi}, \nu_{\varphi s}$ – коефіцієнти Пуассона; $G_{\varphi\zeta}$ – модуль зсуву в площині поперечного перерізу; k – деяка стала, яка приймає різні значення в різних теоріях.

При розв'язанні конкретних задач до рівнянь рівноваги (1) і геометричних та фізичних співвідношень (2) і (3) потрібно приєднати відповідні крайові умови.

ЗАМКНЕНА НЕСКІНЧЕННО ДОВГА ЦИЛІНДРИЧНА ОБОЛОНКА НЕКРУГОВОГО ПЕРЕРІЗУ

Вважаємо, що поперечний переріз довгої замкненої по напрямній $(-\pi \leq \varphi \leq \pi)$ циліндричної оболонки (труби) має дві взаємно перпендикулярні осі симетрії OY і OZ . Оболонка знаходиться під дією комбінованого навантаження: рівномірно розподілених уздовж твірних двох пар діаметрально протилежних поперечних зусиль $P_a = const$ і $P_b = const$ та нормальних поверхневих сил $q_\zeta = q \neq const$, які прикладені симетрично відносно площин XOY і XOZ (рис. 1).

Враховуючи геометричну і силову симетрію, за розрахункову схему приймемо четверту частину оболонки $(0 \leq \varphi \leq \pi/2)$ і задамо такі крайові умови в точках $\varphi = 0$ і $\varphi = \pi/2$:

$$\begin{aligned} u(0) = \vartheta(0) = 0; \quad Q(0) = \frac{P_b}{2}; \\ u\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vartheta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad Q\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{P_a}{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

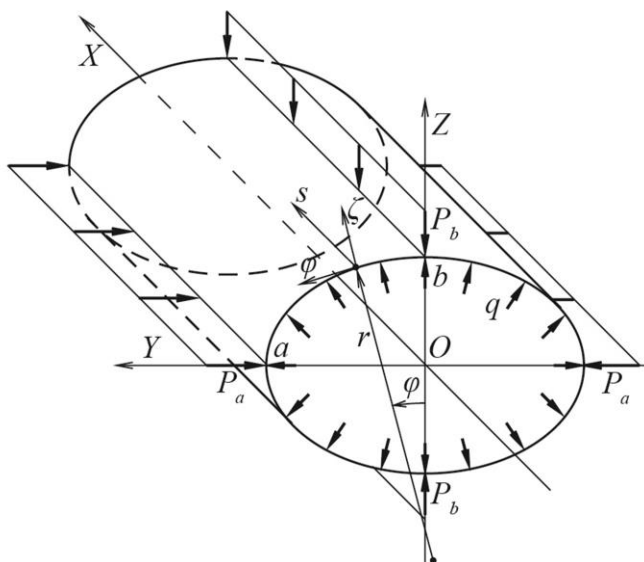


Рис. 1. Замкнена циліндрична оболонка некругового перерізу

Напружено-деформований стан оболонки описується системою рівнянь (1)-(3) і крайовими умовами (4).

З перших двох рівнянь рівноваги (1) отримаємо таке рівняння для знаходження поперечного зусилля:

$$\frac{d^2 Q}{d\varphi^2} + Q = \frac{d(rq)}{d\varphi}. \tag{5}$$

Характеристичне рівняння $k^2 + 1 = 0$ відповідного однорідного рівняння має корені $k_{1,2} = \pm i$, тому загальним розв'язком цього рівняння буде функція $Q^{30} = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi$. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (5) знайдемо методом варіації довільних сталих, а сталі інтегрування C_1 і C_2 визначимо з крайових умов $Q(0) = \frac{P_b}{2}$ і $Q\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{P_a}{2}$. Розв'язок рівняння (5), який задовольняє цим крайовим умовам, має вигляд

$$Q = \frac{P_b}{2} \cos \varphi - \frac{P_a}{2} \sin \varphi + \sin \varphi \int_{\varphi}^{\pi/2} qr \sin x dx - \cos \varphi \int_0^{\varphi} qr \cos x dx. \quad (6)$$

З другого рівняння рівноваги знайдемо тангенціальне зусилля

$$N = -\frac{P_b}{2} \sin \varphi - \frac{P_a}{2} \cos \varphi + \cos \varphi \int_{\varphi}^{\pi/2} qr \sin x dx + \sin \varphi \int_0^{\varphi} qr \cos x dx. \quad (7)$$

За допомогою інтегрування з третього рівняння рівноваги одержимо вираз для моменту

$$M = \int_0^{\varphi} rQ dx + C_3. \quad (8)$$

Використовуючи співвідношення для згинної деформації (2) і закон Гука для моменту (3) та інтегруючи, отримаємо формулу для кута повороту нормалі

$$\mathcal{G} = \frac{1}{D_M} \int_0^{\varphi} rM^* dt + \frac{C_3}{D_M} \int_0^{\varphi} r dt + C_4. \quad (9)$$

З крайових умов $\mathcal{G}(0) = 0$ і $\mathcal{G}(\pi/2) = 0$ визначимо сталі інтегрування:

$$C_3 = -\frac{1}{L} \int_0^{\pi/2} rM^* dt; \quad C_4 = 0. \quad (10)$$

У формулах (9), (10) позначено: $M^* = \int_0^t rQ dx$; $L = \int_0^{\pi/2} r dt$.

Вихідним для знаходження тангенціального переміщення є неоднорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{D_N} \frac{d(rN)}{d\varphi} - \frac{rQ}{D_Q} + r\mathcal{G}. \quad (11)$$

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд $u^{30} = C_5 \cos \varphi + C_6 \sin \varphi$. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (11) знайдемо методом варіації довільних сталих. Після визначення сталих інтегрування з крайових умов $u(0) = 0$ і $u(\pi/2) = 0$ та виконання деяких перетворень розв'язок рівняння (11) набуде вигляду:

$$u = \cos \varphi \int_0^{\varphi} r \left[\frac{N \cos x}{D_N} - \left(\mathcal{G} - \frac{Q}{D_Q} \right) \sin x \right] dx - \sin \varphi \int_{\varphi}^{\pi/2} r \left[\frac{N \sin x}{D_N} + \left(\mathcal{G} - \frac{Q}{D_Q} \right) \cos x \right] dx. \quad (12)$$

Тепер за допомогою співвідношення $w = \frac{rN}{D_N} - \frac{du}{d\varphi}$ запишемо розгорнутий вираз для прогину

$$w = \sin \varphi \int_0^{\varphi} r \left[\frac{N \cos x}{D_N} - \left(\mathcal{G} - \frac{Q}{D_Q} \right) \sin x \right] dx + \cos \varphi \int_{\varphi}^{\pi/2} r \left[\frac{N \sin x}{D_N} + \left(\mathcal{G} - \frac{Q}{D_Q} \right) \cos x \right] dx. \quad (13)$$

ВІДКРИТА ДОВГА ЦИЛІНДРИЧНА ОБОЛОНКА НЕКРУГОВОГО ПЕРЕРІЗУ З ШАРНІРНО ЗАКРІПЛЕНИМИ ПОВЗДОВЖНІМИ КРАЯМИ

Розглянемо відкриту по напрямній ($-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$) нескінченно довгу циліндричну оболонку довільного поперечного перерізу, повздовжні краї $\varphi = \pm \alpha$ якої оперті шарнірно на нерухомі

опори. Оболонка навантажена нормальними $q_\zeta \neq const$ і тангенціальними $q_\varphi \neq const$ поверхневими силами та рівномірно розподіленою вздовж твірної поперечною силою $P = const$, яка прикладена у вершині (рис. 2). Для поперечного перерізу і навантаження має місце симетрія відносно вертикальної площини XOZ .

Розрахунки будемо виконувати для половини оболонки ($0 \leq \varphi \leq \alpha$). На краю $\varphi = \alpha$ задамо умови шарнірно нерухомого опирання ($u = w = M = 0$), а на краю $\varphi = 0$ – такі граничні умови: $u = \vartheta = 0$ і $Q = P/2$.

Знаходження поперечного зусилля зводиться до розв'язання рівняння

$$\frac{d^2 Q}{d\varphi^2} + Q = -r q_\varphi - \frac{d(r q_\zeta)}{d\varphi}. \tag{14}$$

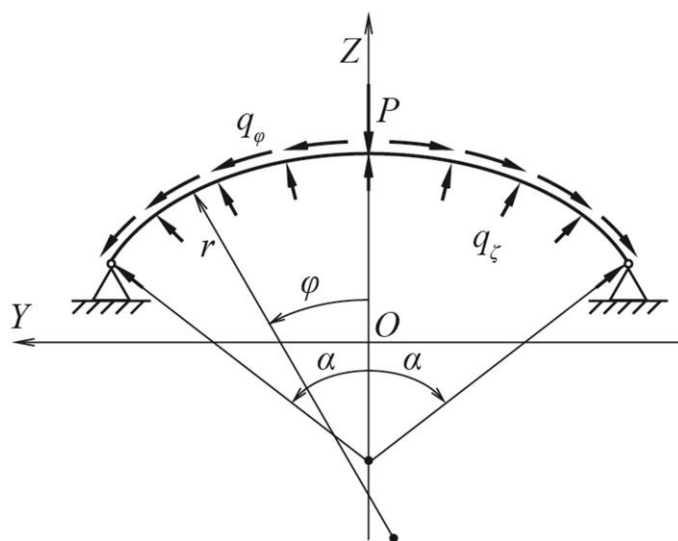


Рис. 2. Відкрита некругова циліндрична оболонка з шарнірно опертими повздовжніми кряями

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$Q = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + \cos \varphi \int_0^\varphi r (q_\varphi \sin x - q_\zeta \cos x) dx - \sin \varphi \int_0^\varphi r (q_\varphi \cos x + q_\zeta \sin x) dx + (r q_\zeta) \Big|_0 \sin \varphi. \tag{15}$$

Для тангенціального зусилля з другого рівняння рівноваги отримаємо вираз

$$N = -C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi - \sin \varphi \int_0^\varphi r (q_\varphi \sin x - q_\zeta \cos x) dx - \cos \varphi \int_0^\varphi r (q_\varphi \cos x + q_\zeta \sin x) dx + (r q_\zeta) \Big|_0 \cos \varphi. \tag{16}$$

З граничної умови $Q(0) = \frac{P}{2}$ визначимо сталу інтегрування $C_1 = \frac{P}{2}$ і представимо внутрішні зусилля у вигляді:

$$Q = C_2 \sin \varphi + Q_1; \quad N = C_2 \cos \varphi + N_1, \tag{17}$$

де C_2 – невідома стала інтегрування;

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{P}{2} \cos \varphi + \cos \varphi \int_0^{\varphi} r(q_\varphi \sin x - q_\zeta \cos x) dx - \sin \varphi \int_0^{\varphi} r(q_\varphi \cos x + q_\zeta \sin x) dx + (rq_\zeta) \Big|_0 \sin \varphi; \\ N_1 &= -\frac{P}{2} \sin \varphi - \sin \varphi \int_0^{\varphi} r(q_\varphi \sin x - q_\zeta \cos x) dx - \cos \varphi \int_0^{\varphi} r(q_\varphi \cos x + q_\zeta \sin x) dx + (rq_\zeta) \Big|_0 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (18)$$

Для моменту з використанням третього рівняння рівноваги маємо вираз

$$M = \int_0^{\varphi} rQ dx + C_3. \quad (19)$$

Підставивши у цей вираз співвідношення (17) для поперечного зусилля, одержимо:

$$M = C_2 l_0 + M_0 + C_3. \quad (20)$$

Тут позначено:

$$l_0 = \int_0^{\varphi} r \sin x dx; \quad M_0 = \int_0^{\varphi} rQ_1 dx. \quad (21)$$

Сталу інтегрування в рівності (20) визначимо з граничної умови $M(\alpha) = 0$:

$$C_3 = -C_2 l_0(\alpha) - M_0(\alpha). \quad (22)$$

У підсумку вираз для моменту набуває вигляду

$$M = C_2 l_1 + M_1, \quad (23)$$

де

$$M_1 = M_0 - M_0(\alpha); \quad l_1 = l_0 - l_0(\alpha). \quad (24)$$

Кут повороту нормалі обчислюється за формулою:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{D_M} \int_0^{\varphi} rM dt + C_4, \quad (25)$$

у якій відповідно до крайової умови $\mathcal{G}(0) = 0$ стала C_4 дорівнює нулю.

За допомогою співвідношення (23) для моменту з формули (25) дістанемо такий вираз для кута повороту нормалі:

$$\mathcal{G} = C_2 l_2 + \mathcal{G}_1. \quad (26)$$

Тут

$$\mathcal{G}_1 = \frac{1}{D_M} \int_0^{\varphi} rM_1 dx; \quad l_2 = \frac{1}{D_M} \int_0^{\varphi} r l_1 dx. \quad (27)$$

Значення тангенціального переміщення u отримаємо, розв'язавши рівняння виду (11). Загальний розв'язок рівняння (11) для задачі має вигляд

$$u = C_5 \cos \varphi + C_6 \sin \varphi - \cos \varphi \int_0^{\varphi} f(x) \sin x dx + \sin \varphi \int_0^{\varphi} f(x) \cos x dx, \quad (28)$$

де $f(x)$ – права частина цього рівняння.

Прогин оболонки визначається за формулою

$$w = \frac{rN}{D_N} + C_5 \sin \varphi - C_6 \cos \varphi - \sin \varphi \int_0^\varphi f(x) \sin x dx - \cos \varphi \int_0^\varphi f(x) \cos x dx. \quad (29)$$

З граничних умов $u(\alpha) = 0$ і $w(\alpha) = 0$ знаходимо сталі інтегрування C_5 і C_6 :

$$C_5 = -\frac{1}{D_N} \int_0^\alpha rN \cos x dx + \int_0^\alpha r \left(\vartheta - \frac{Q}{D_Q} \right) \sin x dx; \quad (30)$$

$$C_6 = -\frac{1}{D_N} \int_0^\alpha rN \sin x dx - \int_0^\alpha r \left(\vartheta - \frac{Q}{D_Q} \right) \cos x dx.$$

У результаті підстановки у співвідношення (28), (29) виразів для сталих інтегрування C_5 і C_6 та виразу для правої частини $f(x)$, виконання інтегрування частинами і деяких перетворень формули для тангенціального переміщення і прогину матимуть вигляд:

$$u = -\cos \varphi \int_\varphi^\alpha r \left[\frac{N \cos x}{D_N} - \left(\vartheta - \frac{Q}{D_Q} \right) \sin x \right] dx - \sin \varphi \int_\varphi^\alpha r \left[\frac{N \sin x}{D_N} + \left(\vartheta - \frac{Q}{D_Q} \right) \cos x \right] dx; \quad (31)$$

$$w = -\sin \varphi \int_\varphi^\alpha r \left[\frac{N \cos x}{D_N} - \left(\vartheta - \frac{Q}{D_Q} \right) \sin x \right] dx + \cos \varphi \int_\varphi^\alpha r \left[\frac{N \sin x}{D_N} + \left(\vartheta - \frac{Q}{D_Q} \right) \cos x \right] dx.$$

Задовольнивши граничну умову $u(0) = 0$, знаходимо сталу інтегрування C_2 :

$$C_2 = -\frac{\int_0^\alpha r \left[\frac{N_1 \cos x}{D_N} - \left(\vartheta_1 - \frac{Q_1}{D_Q} \right) \sin x \right] dx}{\int_0^\alpha r \left[\frac{\cos^2 x}{D_N} - \left(l_2 - \frac{\sin x}{D_Q} \right) \sin x \right] dx}. \quad (32)$$

Після цього за допомогою формул (17), (18), (23), (24), (26), (27) і (31) послідовно обчислюємо внутрішні зусилля (N, Q) , момент (M) , кут повороту нормалі (ϑ) і переміщення (u, w) заданої оболонки.

ВІДКРИТА ДОВГА НЕКРУГОВА ЦИЛІНДРИЧНА ОБОЛОНКА З ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНИМИ ПОВЗДОВЖНІМИ КРАЯМИ

Коротко опишемо основні аспекти визначення компонент НДС відкритої по напрямній $(-\alpha \leq \varphi \leq \alpha)$ нескінченно довгої ортотропної циліндричної оболонки некругового поперечного перерізу, повздовжні краї $\varphi = \pm \alpha$ якої жорстко защемлені. Оболонка знаходиться під дією комбінованого навантаження: поверхневих $q_\zeta \neq const$ і $q_\varphi \neq const$ та погонних $P = const$ сил (рис. 3).

З огляду на геометричну і силову симетрію відносно вертикальної площини XOZ розрахунки достатньо виконати для половини оболонки $(0 \leq \varphi \leq \alpha)$. На краю $\varphi = \alpha$ задамо умови жорсткого защемлення $(u = w = \vartheta = 0)$, а на краю $\varphi = 0$ – змішані граничні умови: $u = \vartheta = 0$ і $Q = P/2$.

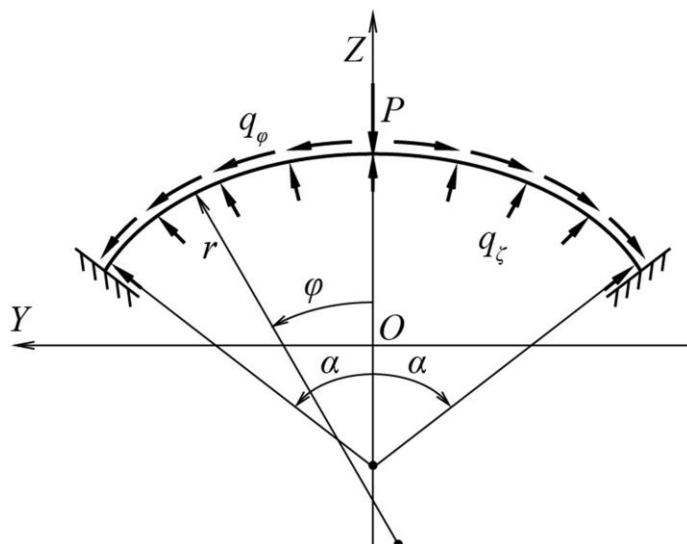


Рис. 3. Відкрита некругова циліндрична оболонка з жорстко закріпленими повздовжніми краями

Зазначимо, що вихідні рівняння (рівняння рівноваги, фізичні та геометричні співвідношення тощо) у цьому випадку такі самі, як і в попередній задачі. Тому при обчисленні внутрішніх зусиль (N, Q), моменту (M), кута повороту нормалі (ϑ) і переміщень (u, w) оболонки можна скористатись формулами (17), (18), (23), (26), (27) і (31), отриманими в попередньому розділі. Відмінності мають місце тільки при знаходженні сталої інтегрування C_3 (22) та складових M_1 і l_1 виразу для моменту (23), які для довгої некругової циліндричної оболонки з жорстко закріпленими повздовжніми краями визначаються таким чином.

1. Підставляючи вираз (20) для моменту у формулу (25) для кута повороту нормалі, отримаємо

$$\vartheta = \frac{C_2}{D_M} \int_0^{\varphi} r l_0 dt + \frac{1}{D_M} \int_0^{\varphi} r M_0 dt + \frac{C_3}{D_M} \int_0^{\varphi} r dt + C_4. \quad (33)$$

З граничної умови $\vartheta(0) = 0$ знаходимо сталу інтегрування $C_4 = 0$, а з умови $\vartheta(\alpha) = 0$ – сталу C_3 :

$$C_3 = -\frac{C_2}{L} \int_0^{\alpha} r l_0 dt - \frac{1}{L} \int_0^{\alpha} r M_0 dt; \quad L = \int_0^{\alpha} r dt. \quad (34)$$

2. За допомогою отриманого співвідношення для сталої інтегрування C_3 складові моменту у формулі (23) подамо у такому вигляді:

$$M_1 = M_0 - \frac{1}{L} \int_0^{\alpha} r M_0 dx; \quad l_1 = l_0 - \frac{1}{L} \int_0^{\alpha} r l_0 dx. \quad (35)$$

ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ У ВИРАЗАХ ДЛЯ ВНУТРІШНІХ СИЛОВИХ ФАКТОРІВ І УЗАГАЛЬНЕНИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Оскільки підінтегральні функції у формулах (6)-(9), (12), (13), (17), (18), (23), (24), (26), (27) і (31) для внутрішніх зусиль, згинного моменту, кута повороту нормалі, тангенціального переміщення і прогину оболонки неперервні, то інтеграли в цих формулах існують, але для більшості поперечних перерізів циліндричної оболонки первісні підінтегральних функцій не

виражаються через елементарні функції. Тому в розробленій методиці зазначені інтеграли обчислюються чисельно з використанням формули трапецій

$$\int_a^b f(x) dx \approx \Delta x \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right]. \quad (36)$$

Тут $x_i = a + i\Delta x$ – вузли інтегрування, які розбивають відрізок $[a, b]$ на n рівних частин довжиною $\Delta x = (b - a)/n$.

Зауважимо, що підінтегральна функція у формулі трапецій може бути задана аналітично або представлена у вигляді таблиці (масиву) значень у вузлах інтегрування.

АНАЛІЗ ЧИСЛОВИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Конкретні результати дослідження НДС представимо для замкненої нескінченно довгої ортотропної циліндричної оболонки овального перерізу, навантаженої рівномірним внутрішнім тиском інтенсивності q .

Прийmemo, що поперечний переріз оболонки має дві осі симетрії і задається параметричними рівняннями виду:

$$Y = r_0 \left[\left(1 + \frac{\xi}{2} \right) \sin \varphi + \frac{\xi}{6} \sin 3\varphi \right]; \quad Z = r_0 \left[\left(1 - \frac{\xi}{2} \right) \cos \varphi + \frac{\xi}{6} \cos 3\varphi \right]; \quad (37)$$

$$r_0 = \frac{a+b}{2}; \quad \xi = 3 \frac{a-b}{a+b}; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi,$$

де a, b – велика і мала півосі поперечного перерізу.

Для радіуса кривини поперечного перерізу з використанням рівностей (37) отримаємо вираз:

$$r = r_0 (1 + \xi \cos 2\varphi). \quad (38)$$

Дослідження проведені при таких значеннях геометричних і фізико-механічних параметрів оболонки:

$$a/h = 12; \quad b/h = 8; \quad E_{ss} = 25,3 \text{ ГПа}; \quad E_{\varphi\varphi} = 38,4 \text{ ГПа};$$

$$G_{s\varphi} = 7,6 \text{ ГПа}; \quad G_{\varphi\zeta} = 2 \text{ ГПа}; \quad \nu_{\varphi s} = 0,238.$$

У табл. 1 наведено розподіл значень внутрішніх силових факторів ($\tilde{N} = N/hq$; $\tilde{Q} = Q/hq$; $\tilde{M} = M/h^2q$) і узагальнених переміщень ($\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}E_{\varphi\varphi}/q$; $\tilde{u} = uE_{\varphi\varphi}/hq$; $\tilde{w} = wE_{\varphi\varphi}/hq$) уздовж контуру поперечного перерізу оболонки. Дані отримані з використанням розробленої аналітично-чисельної методики для трьох варіантів модуля зсуву в площині поперечного перерізу: 1) $G_{\varphi\zeta} = 0,2 \text{ ГПа}$ ($K = 1$); 2) $G_{\varphi\zeta} = 2 \text{ ГПа}$ ($K = 2$); 3) $G_{\varphi\zeta} = \infty$ ($K = 3$). При виконанні розрахунків відрізок інтегрування $[0, \pi/2]$ розбивався на 800 частин.

Результати аналітичного (точного) розв'язання задачі для другого варіанту модуля зсуву ($K = 2$) представлені в табл. 2. Там же в останньому рядку подані відповідні значення компонент НДС циліндричної оболонки кругового поперечного перерізу ($a/h = b/h = 10$).

Наведені в табл. 1, 2 результати свідчать про ефективність запропонованої методики. Так, розбиття відрізка $[0, \pi/2]$ на 800 частин при виконанні чисельного інтегрування забезпечує збіг чотирьох значущих цифр аналітично-чисельного розв'язку задачі для замкненої овальної циліндричної оболонки з аналітичним (точним) розв'язком цієї задачі.

Таблиця 1 – Внутрішні силові фактори і узагальнені переміщення на контурі поперечного перерізу (аналітично-чисельний розв'язок)

К	φ	\tilde{N}	\tilde{Q}	\tilde{M}	\tilde{g}	\tilde{u}	\tilde{w}
1	0	8	0	17	0	0	15817
	$\pi/4$	10	-4	-9	982	-6610	-2147
	$\pi/2$	12	0	-23	0	0	-11135
2	0	8	0	17	0	0	9624
	$\pi/4$	10	-4	-9	982	-3845	-1483
	$\pi/2$	12	0	-23	0	0	-6269
3	0	8	0	17	0	0	8936
	$\pi/4$	10	-4	-9	982	-3538	-1410
	$\pi/2$	12	0	-23	0	0	-5728

Урахування деформацій поперечного зсуву ($K = 1; 2$) при розрахунку оболонки призводить до збільшення абсолютних величин тангенціальних переміщень і прогинів у порівнянні з результатами, отриманими для моделі Кірхгофа-Лява ($K = 3$). Для першого варіанту розрахунку збільшення максимальних тангенціальних переміщень складає 87%, а максимальних прогинів – 77%. У той же час величини внутрішніх силових факторів і кута повороту нормалі для всіх трьох варіантів розрахунку набувають однакових значень.

Із відхиленням форми поперечного перерізу оболонки від кругової суттєво зростають максимальні значення всіх компонент НДС. Так, для другого варіанту розрахунку (дійсних значень модуля зсуву) максимальні прогини зростають у 100 разів.

Таблиця 2 – Внутрішні силові фактори і узагальнені переміщення на контурі поперечного перерізу (аналітичний розв'язок)

К	φ	\tilde{N}	\tilde{Q}	\tilde{M}	\tilde{g}	\tilde{u}	\tilde{w}
2	0	8	0	17	0	0	9624
	$\pi/4$	10	-4	-9	982	-3845	-1483
	$\pi/2$	12	0	-23	0	0	-6269
2	0	10	0	0	0	0	96,26

ВИСНОВКИ

Отже, у роботі розроблено аналітично-чисельну методику розв'язання лінійно-пружних задач статки композитних довгих циліндричних оболонок некругового поперечного перерізу з врахуванням деформацій поперечного зсуву, яка базується на аналітичному і чисельному інтегруванні, вільна від мембранного замикання та забезпечує високу точність результатів. За допомогою запропонованої методики досліджено вплив деформацій поперечного зсуву і відхилення форми поперечного перерізу від кругової на напружено-деформований стан замкненої довгої овальної циліндричної оболонки, навантаженої рівномірним внутрішнім тиском. Представляє подальший інтерес вивчення нелінійного деформування циліндричних оболонок некругового поперечного перерізу як при дії статичного, так і динамічного навантаження.

ЛІТЕРАТУРА

1. Bresse J. A. C. Cours de Mécanique Appliquée. Première Partie. Résistance des matériaux et stabilité des constructions / J. A. C. Bresse. – Deuxième Édition. – Paris : Gauthier-Villars, 1866. – 536 p.
2. Timoshenko S. Strength of Materials. Part II, Advanced Theory and Problems / S. Timoshenko. – New York : D. Van Nostrand Company, 1941. – 510 p.
3. Romano F. Noncircular Rings Under Shear Load / F. Romano, D. Ramlet // Jour. Frank. Instit. – 1967. – 284, No 5. – P. 283-299.
4. Григоренко Я. М. Анализ напряженно-деформированного состояния некруговых цилиндрических оболочек при изменении их толщины и сохранении веса / Я. М. Григоренко, Л. И. Захарийченко // Прикл. механика. – 1999. – 35, № 6. – С. 39-47.
5. Сторожук Є. А. Про аналітичні розв'язки деяких крайових задач для циліндричної оболонки овального перерізу [Електронний ресурс] / Є. А. Сторожук // Математика в сучасному технічному університеті: Збірник науково-методичних праць / Національний технічний університет України «КПІ». – Київ, 2015. – Вип. 1. – С. 72-79. – Режим доступу : <http://mmtu.in.ua/latest>.
6. Коноплев Ю. Г. Теоретико-экспериментальный метод в задаче устойчивости цилиндрической оболочки эллиптического сечения / Ю. Г. Коноплев, А. А. Саченков // Исследования по теории пластин и оболочек: тр. семинара КФТИ КФ АН СССР. – Казань : Изд-во КГУ, 1984. – Вып. 17, ч. 1. – С. 135-142.
7. Железнов Л. П. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии и внутреннем давлении / Л. П. Железнов, В. В. Кабанов // Прикл. механика и техн. физика. – 2002. – 43, № 4. – С. 155-160.
8. Yamada G. Free vibration of non-circular cylindrical shells with variable circumferential profile / G. Yamada, T. Irie, Y. Tagawa // J. Sound and Vibr. – 1984. – 95, №1. – P. 117-126.
9. Мейш В. Ф. Нестационарная динамика продольно подкрепленных цилиндрических оболочек эллиптического поперечного сечения / В. Ф. Мейш, Н. П. Кепенач // Прикл. механика. – 2014. – 50, № 6. – С. 83-89.
10. Григоренко Я. М. Розв'язання задач теорії оболонок на основі дискретно-континуальних методів : навчальний посібник / Я. М. Григоренко, В. Д. Будак, О. Я. Григоренко. – Миколаїв : Ліон, 2010. – 294 с.

REFERENCES

1. Bresse, J.A.C. (1866), [Cours de Mécanique Appliquée. Première Partie. Résistance des matériaux et stabilité des constructions], Gauthier-Villars, Paris.
2. Timoshenko, S. (1941), [Strength of Materials. Part II, Advanced Theory and Problems], D. Van Nostrand Company, New York.
3. Romano, F. and Ramlet, D. (1967), "Noncircular Rings Under Shear Load", *Jour. Frank. Instit*, vol. 284, no. 5, pp. 283-299.
4. Grigorenko, Ya.M. and Zakhariichenko, L.I. (1999), "Analysis of stress-strain state of circular cylindrical shells when changing their thickness and weight saving", *Prikl. mekhanika*, vol. 35, no. 6, pp. 39-47.
5. Storozhuk, E.A. (2015), "On the analytical solutions of some boundary value problems for cylindrical shell oval cross-section", *Matematika v suchasnomu tekhnichnomu universiteti, Zbirnik naukovometodichnikh prats' Natsional'nogo tekhnichnogo universitetu Ukraini "KPI"*, issue 1, pp. 72-79, available at: <http://mmtu.in.ua/latest> (access January 20, 2016).
6. Konoplyev, Yu.G. and Sachenkov, A.A. (1984), "Theoretical and experimental method in the problem of stability of a cylindrical shell elliptical cross-section", *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek: trudy seminar KFTI KF AN SSSR*, Izdatelstvo KGU, Kazan, issue 17, part 1, pp. 135-142.

7. Zheleznov, L.P. and Kabanov, V.V. (2002), "Nonlinear deformation and stability of noncircular cylindrical shells under axial compression and internal pressure", *Prikl. Mekhanika i tekhn. fizika*, vol. 43, no. 4, pp. 155-160.
8. Yamada, G., Irie, T. and Tagawa, Y. (1984), "Free vibration of non-circular cylindrical shells with variable circumferential profile", *J. Sound and Vibr.*, vol. 95, no. 1, pp. 117-126.
9. Meish, V.F. and Kepenach, N.P. (2014), "Transient dynamics longitudinally reinforced cylindrical shells elliptical cross-section", *Prikl. mekhanika*, vol. 50, no. 6, pp. 83-89.
10. Grigorenko, Ya.M., Budak, V.D. and Grigorenko, O.Ya. (2010), *Rozv'yazannya zadach teorii' obolonok na osnovi dyskretno-kontinual'nikh metodiv: navchal'nyj posibnyk* [Solving the problems of membranes based on discrete kontynualnye methods: Tutorial], Ilion, Mykolayiv.

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О СЖАТИИ ДВУХ УПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ КУЛОНА

Стреляев Ю. М., старший преподаватель, Шупчинская К. С., студентка

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

strelkiny@gmail.com, corin-s@rambler.ru

Получено численное решение статической контактной задачи о фрикционном взаимодействии двух упругих бесконечных круговых цилиндров с ортогональными осями. Для учета трения, возникающего в точках поверхности соприкосновения тел, использован закон трения Кулона в перемещениях. Граничные условия контактного взаимодействия задавались в ограниченной области, содержащей неизвестную область контакта при неизвестной границе зоны сцепления и зоны проскальзывания. Задача сведена к решению системы нелинейных граничных интегральных уравнений. Приближенное решение системы получено с помощью дискретизации её уравнений и использования метода простой итерации для решения дискретного аналога системы. Численный анализ посвящен оценке влияния трения на нормальные и касательные контактные напряжения. Установлено, что трение практически не оказывает влияние на нормальные напряжения и размеры зоны контакта. Касательные напряжения достигают максимальных значений на границе зоны сцепления и зоны проскальзывания.

Ключевые слова: контактная задача, упругость, трение Кулона, сцепление, проскальзывание, цилиндры, интегральное уравнение, итерационный метод.

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ПРО СТИСКУВАННЯ ДВОХ ПРУЖНИХ ЦИЛІНДРІВ З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ КУЛОНА

Стреляев Ю. М., старший викладач, Шупчинська К. С., студентка

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

strelkiny@gmail.com, corin-s@rambler.ru

Отримано чисельний розв'язок статичної контактної задачі про фрикційну взаємодію двох пружних нескінченних кругових циліндрів з ортогональними осями. Для урахування тертя, що виникає в точках поверхні зіткнення тіл, використовувався закон тертя Кулона в переміщеннях. Крайові умови контактної взаємодії задавались в обмеженій області, яка містить у собі невідому область контакту при невідомій межі зчеплення і зони проковзування. Задачу зведено до розв'язання системи нелінійних граничних інтегральних рівнянь. Наближений розв'язок системи отримано за допомогою дискретизації її рівнянь і використання метода простої ітерації для розв'язання дискретного аналога системи. Чисельний аналіз присвячено оцінці впливу тертя на нормальні і дотичні контактні напруження. Встановлено, що тертя практично не впливає на

нормальні напруження і розміри зони контакту. Дотичні напруження досягають максимальних значень на межі зони зчеплення і зони проковзування.

Ключові слова: контактна задача, пружність, тертя Кулона, зчеплення, проковзування, циліндри, інтегральне рівняння, ітераційний метод.

CONTACT PROBLEM OF TWO ELASTIC CYLINDERS COMPRESSION TAKING INTO ACCOUNT COULOMB FRICTION

Streliaiev Y. M., Shupchinskaya K. S.

*Zaporizhzhue National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

strelkiny@gmail.com, corin-s@rambler.ru

The subject of the research in this work is to analyze the friction influence on the values of normal and tangential contact stresses that take place at frictional interaction of two linear-elastic bodies at the points of contact surface and also to obtain the contact area, adhesion region and slip page region on this surface. We have considered the static contact problem of compression taking into account friction of two linearly elastic infinite circular cylinders that have various radiuses and orthogonal axes of symmetry. It was supposed that the size of contact area is small in comparison with radiuses of cylinders; the contact area is flat and lies in the limited area of the common tangential plane passing through a point of initial contact of cylinders. We used the elastic half-space approximation of the interacting bodies which allowed us to express the linear integral operators of influence of the surface contact stresses on the surface elastic displacement by means of formulas of Boussinesq and Cerruti. The contact area and the boundary of the regions of adhesion and slip page are not known in advance and must be determined in the course of the problem solution. It was supposed that the friction between the contact surfaces of bodies obeys Coulomb's of friction law in which velocities are substitute by displacements. Boundary conditions were set on limited area of the tangential plane of cylinders which contain unknown area of contact. The contact problem was reduced to obtain unknown normal and tangential contact stresses from a system of non-linear boundary integral equations. Approximate solution of the system of non-linear integral equations is obtained by means of an iterative method. Numerical results were received for various values of the friction coefficient under identical conditions of normal loading of cylinders with various elastic constants. Approximate values of normal contact stresses that obtained at zero value of a friction coefficient were compared to its Hertz's analytical solution values and it showed good compliance. It is also established that in each considered case the contact area has the form of an ellipse, frictional force practically do not influence normal contact stresses and the sizes of contact area. The tangential stresses increase with increase in a friction coefficient and reach a maximum on border of regions of adhesion and a slip page, and the point of a maximum of the tangential stresses is the irregular point on the received curves.

Key words: contact problem, elasticity, Coulomb friction, adhesion, slipping, cylinders, integral equation, iterative method.

ВВЕДЕНИЕ

Начало исследованию контактных задач теории упругости положено Герцем в 1881 году [1]. Теория Герца описывает статические задачи о контакте абсолютно гладких линейно упругих тел, ограниченных поверхностями второго порядка в предположении, что поверхность контакта мала по сравнению с радиусами кривизны контактирующих поверхностей. Теория контактных задач активно развивается с середины XX века по настоящее время. Одним из важных вопросов, возникавших в процессе развития этой теории, являлся вопрос о влиянии поверхностного трения на контактные напряжения, возникающие во взаимодействующих элементах различных механических систем. Основная трудность, связанная с учетом трения в контактных задачах, заключается в том, что граничные условия взаимодействия тел приходится задавать на неизвестной заранее площадке контакта при неизвестной границе зоны сцепления и зоны проскальзывания тел. Это обстоятельство, как правило, приводит к нелинейности математических моделей контактного взаимодействия тел, что существенно усложняет поиск аналитических решений задач рассматриваемого класса. Отметим некоторые важные результаты в развитии теории контактных задач с учетом трения. Впервые аналитический метод решения задач с частичным проскальзыванием был независимо предложен в работах Каттанео [2] и Миндлина [3]. Плоская контактная задача о внедрении с трением прямоугольного штампа в упругую полуплоскость при неизвестной границе областей сцепления и проскальзывания впервые решена Галиным [4]. Решение осесимметрической задачи найдено в работах [5, 6]. На основе соображений подобия Спенс [5] показал, что для одинаковых упругих констант и коэффициентов трения относительные размеры зоны проскальзывания сохраняются для любого индентора с осесимметричным профилем и равны соответствующим значениям для штампа с плоским основанием.

Аналитические решения сингулярных интегральных уравнений некоторых плоских и осесимметрических контактных задач с трением получены в работах [7-9] с использованием обобщенного метода Винера-Хопфа. Наряду с аналитическими методами широкое применение для решения контактных задач с учетом трения получили различные численные методы, основанные на вариационной постановке задачи [10, 11] и на ее сведении к различным операторным уравнениям [12, 13]. В работе [11] приведено численное решение пространственной контактной задачи о вдавлении жесткого конечного цилиндра в упругое полупространство. В работе [13] предложен достаточно простой в реализации эффективный численный метод, позволяющий решать широкий класс статических и квазистатических контактных задач с учетом кулонова трения.

Задача о контакте двух упругих бесконечных ортогональных цилиндров с различными радиусами и различными упругими константами является трехмерной неосесимметрической задачей. Практическая ценность решения этой задачи обусловлена тем, что во многих механических системах и механизмах контактирующие поверхности имеют цилиндрическую форму. Аналитическое решение рассматриваемой задачи [14] в случае отсутствия трения находится в рамках классической теории Герца. В работе рассматривается задача при наличии кулонова трения между цилиндрами в статической постановке. Целью данной статьи является получение приближенного решения этой задачи с учетом взаимного влияния друг на друга нормальных и касательных напряжений, возникающих на поверхности контакта цилиндров, а также оценка влияния сил трения на распределение удельной контактной нагрузки на этой поверхности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим статическую контактную задачу о взаимодействии с кулоновым трением двух линейно-упругих изотропных бесконечных цилиндров с радиусами R_1 , R_2 , оси которых взаимно ортогональны (рис. 1). Будем считать, что цилиндры изготовлены из различных материалов и имеют различные упругие постоянные. Пусть в ненагруженном состоянии цилиндры касаются друг друга в одной точке.

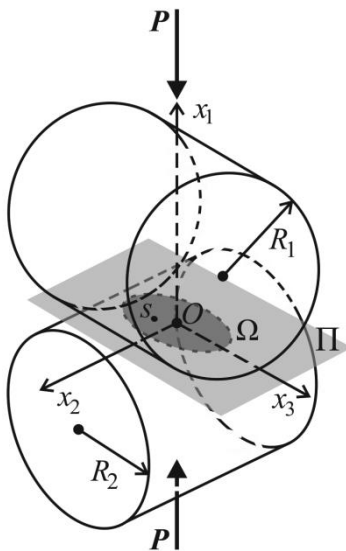


Рис. 1. Схема контактного взаимодействия

Введем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ с началом в точке касания цилиндров, осями x_2 , x_3 , расположенными в их общей касательной плоскости Π параллельно осям цилиндров, и осью x_1 , направленной внутрь верхнего цилиндра (рис. 1). Под действием сжимающей силы P , приложенной вдоль оси x_1 , происходит жесткое поступательное сближение осей цилиндров Δ и в плоскости Π образуется площадка контакта Ω_0 . Будем считать, что размеры площадки контакта малы по сравнению с радиусами цилиндров, а упругие перемещения малы по сравнению с её размерами. В случае, когда цилиндры имеют одинаковые упругие постоянные или являются абсолютно гладкими, поверхность контакта имеет форму эллипса, трение в точках этой поверхности не возникает и распределение нормальных контактных напряжений $p_1(x_2, x_3)$ на ней выражается, согласно теории Герца, формулой [14]:

$$p_1(x_2, x_3) = \frac{3P}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{b^2}}, \quad (1)$$

где положительные постоянные a, b есть полуоси эллипса контакта (формулы для их расчета можно найти в справочнике [15]). Наличие трения между цилиндрами, имеющими различные упругие постоянные, приводит к появлению касательных напряжений $p_2(x_2, x_3), p_3(x_2, x_3)$, действующих в области контакта и направленных параллельно осям x_2, x_3 соответственно. Условия контактного взаимодействия будем задавать в ограниченной области $\Omega \subset \Pi$, содержащей в себе неизвестную область контакта Ω_0 . Обозначим $u_1(x_2, x_3), u_2(x_2, x_3), u_3(x_2, x_3)$ значения в точке $s(x_2, x_3) \in \Omega$ (рис. 1) перемещений вдоль осей x_1, x_2, x_3 точек поверхности верхнего цилиндра относительно противоположащих точек нижнего цилиндра. Для учета трения будем использовать закон трения Кулона в перемещениях [16]. Тогда граничные условия контактного взаимодействия цилиндров в точках области Ω можно выразить системой соотношений [13]

$$\begin{cases} u_1(x_2, x_3) \geq 0, \\ p_1(x_2, x_3) \geq 0, \\ p_1(x_2, x_3) \cdot u_1(x_2, x_3) = 0, \\ \sqrt{p_2^2(x_2, x_3) + p_3^2(x_2, x_3)} \leq \mu p_1(x_2, x_3), \\ p_2(x_2, x_3) \sqrt{u_2^2(x_2, x_3) + u_3^2(x_2, x_3)} + \mu p_1(x_2, x_3) u_2(x_2, x_3) = 0, \\ p_3(x_2, x_3) \sqrt{u_2^2(x_2, x_3) + u_3^2(x_2, x_3)} + \mu p_1(x_2, x_3) u_3(x_2, x_3) = 0; \quad (x_2, x_3) \in \Omega. \end{cases} \quad (2)$$

Первое неравенство системы (2) означает отсутствие взаимного проникания контактирующих поверхностей, второе неравенство означает, что контактное давление не может быть растягивающим. Третье равенство означает отсутствие контактного давления вне области контакта. Последние три соотношения системы (2) выражают закон трения Кулона (неотрицательная константа μ есть коэффициент трения). Заменяя цилиндры упругими полупространствами, связь между поверхностными перемещениями $u_1(x_2, x_3), u_2(x_2, x_3), u_3(x_2, x_3)$ и поверхностными напряжениями $p_1(x_2, x_3), p_2(x_2, x_3), p_3(x_2, x_3)$ в области Ω выразим, используя решения Буссинеска и Черутти [14], следующими соотношениями:

$$\begin{cases} u_1(x_2, x_3) = \sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega} K_{1j}(x_2, x_3, y_2, y_3) p_j(y_2, y_3) dy_2 dy_3 + \delta(x_2, x_3) - \Delta, \\ u_2(x_2, x_3) = \sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega} K_{2j}(x_2, x_3, y_2, y_3) p_j(y_2, y_3) dy_2 dy_3, \\ u_3(x_2, x_3) = \sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega} K_{3j}(x_2, x_3, y_2, y_3) p_j(y_2, y_3) dy_2 dy_3, \end{cases} \quad (3)$$

где функция $\delta(x_1, x_2) = R_1 + R_2 - \sqrt{R_1^2 - x_3^2} - \sqrt{R_2^2 - x_2^2}$ задает первоначальный зазор между цилиндрами, а ядра $K_{ij}(x_2, x_3, y_2, y_3)$ линейных интегральных операторов влияния поверхностных нагрузок на поверхностные упругие перемещения задаются равенствами

$$K_{11}(x_2, x_3, y_2, y_3) = \frac{c_1}{r}, \quad K_{12}(x_2, x_3, y_2, y_3) = \frac{c_2(x_2 - y_2)}{r^2}, \quad K_{13}(x_2, x_3, y_2, y_3) = \frac{c_2(x_3 - y_3)}{r^2},$$

$$K_{21}(x_2, x_3, y_2, y_3) = -K_{12}(x_2, x_3, y_2, y_3), \quad K_{22}(x_2, x_3, y_2, y_3) = \frac{c_1}{r} + \frac{c_3(x_2 - y_2)^2}{r^3},$$

$$\begin{aligned}
K_{23}(x_2, x_3, y_2, y_3) &= \frac{c_3(x_2 - y_2)(x_3 - y_3)}{r^3}, \quad K_{31}(x_2, x_3, y_2, y_3) = -K_{13}(x_2, x_3, y_2, y_3), \\
K_{32}(x_2, x_3, y_2, y_3) &= K_{23}(x_2, x_3, y_2, y_3), \quad K_{33}(x_2, x_3, y_2, y_3) = \frac{c_1}{r} + \frac{c_3(x_3 - y_3)^2}{r^3}, \\
r &= \sqrt{(x_2^2 - y_2^2) + (x_3^2 - y_3^2)}, \quad c_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2}, \quad c_2 = \frac{(1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2)}{2\pi E_2} - \frac{(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)}{2\pi E_1}, \\
c_3 &= \frac{\nu_1(1 + \nu_1)}{\pi E_1} + \frac{\nu_2(1 + \nu_2)}{\pi E_2},
\end{aligned} \tag{4}$$

где E_1, E_2 – модули Юнга, ν_1, ν_2 – коэффициенты Пуассона первого и второго цилиндров соответственно.

Таким образом, рассматриваемая контактная задача состоит в определении неизвестных функций $p_1(x_2, x_3), p_2(x_2, x_3), p_3(x_2, x_3)$, которые в области Ω удовлетворяют системе (2) с учетом соотношений (3)-(4). После нахождения контактных напряжений $p_1(x_2, x_3), p_2(x_2, x_3), p_3(x_2, x_3)$ неизвестную область контакта Ω_0 и её конфигурацию, используя формулы (3)-(4), можно найти из очевидных соотношений

$$\begin{aligned}
\Omega_0 &= \{(x_2, x_3) \in \Omega \mid u_1(x_2, x_3) = 0\}, \\
\Omega_C &= \{(x_2, x_3) \in \Omega \mid u_2^2(x_2, x_3) + u_3^2(x_2, x_3) = 0\}, \\
\Omega_{\Pi} &= \{(x_2, x_3) \in \Omega \mid u_2^2(x_2, x_3) + u_3^2(x_2, x_3) > 0\},
\end{aligned}$$

где Ω_C и Ω_{Π} обозначены, соответственно, зона сцепления и зона проскальзывания, образующиеся в области контакта Ω_0 .

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для получения системы интегральных уравнений рассматриваемой контактной задачи будем использовать две вспомогательные функции [13]:

$$\begin{aligned}
h(x) &= \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \\
q(x, y, z) &= \begin{cases} x, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq z, \\ \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \sqrt{x^2 + y^2} > z. \end{cases}
\end{aligned}$$

Приведем без доказательства две теоремы об очевидных свойствах функций h и q .

Теорема 1. Для любых действительных чисел x, y система

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x \cdot y = 0 \end{cases}$$

эквивалентна равенству $x = h(x - E \cdot y)$, в котором E – произвольное положительное число.

Теорема 2. Для любых действительных чисел x, y, u, v и любого неотрицательного числа z система соотношений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \leq z, \\ x \cdot \sqrt{u^2 + v^2} + z \cdot u = 0, \\ y \cdot \sqrt{u^2 + v^2} + z \cdot v = 0 \end{cases}$$

эквивалентна системе равенств

$$\begin{cases} x = q(x - Eu, y - Ev, z), \\ y = q(y - Ev, x - Eu, z), \end{cases}$$

где E – произвольное положительное число.

Из утверждений теорем 1, 2 следует, что систему соотношений (2) можно записать в такой эквивалентной форме:

$$\begin{cases} p_1(x_2, x_3) = h(p_1(x_2, x_3) - Eu_1(x_2, x_3)); \\ p_2(x_2, x_3) = q(p_2(x_2, x_3) - Eu_2(x_2, x_3), p_3(x_2, x_3) - Eu_3(x_2, x_3), \mu p_1(x_2, x_3)); \\ p_3(x_2, x_3) = q(p_3(x_2, x_3) - Eu_3(x_2, x_3), p_2(x_2, x_3) - Eu_2(x_2, x_3), \mu p_1(x_2, x_3)); \\ (x_1, x_2) \in \Omega, \end{cases} \quad (5)$$

где $u_1(x_2, x_3)$, $u_2(x_2, x_3)$, $u_3(x_2, x_3)$ определяются формулами (3)-(4). С учетом этих формул система (5) представляет собой систему трех нелинейных граничных интегральных уравнений относительно неизвестных в области Ω функций $p_1(x_2, x_3)$, $p_2(x_2, x_3)$, $p_3(x_2, x_3)$, задающих распределение удельной контактной нагрузки в этой области.

Метод численного решения системы (5), детально изложенный в работе [13], состоит в регуляризации нелинейных интегральных уравнений системы, дискретизации регуляризованных уравнений и использовании итерационных процессов для решения дискретного аналога регуляризованной системы (5). Для получения такого дискретного аналога зададим область Ω в виде открытого квадрата с центром в начале координат и сторонами, параллельными осям x_2, x_3 . Разобьем квадрат Ω на l^2 непересекающихся равных квадратных областей $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{l^2}$, ориентированных подобно Ω . Полагая, что неизвестные функции $p_1(x_2, x_3)$, $p_2(x_2, x_3)$, $p_3(x_2, x_3)$ принимают на каждом граничном элементе ω_k постоянные значения $p_{3k-2}, p_{3k-1}, p_{3k}$, сведем нахождение приближенного решения системы (5) к нахождению неизвестных числовых параметров $p_1, p_2, \dots, p_{3l^2}$, удовлетворяющих следующей системе $3l^2$ скалярных уравнений:

$$\begin{cases} p_{3k-2} = h \left(p_{3k-2} - E \left(\sum_{j=1}^{3l^2} a_{3k-2,j} p_j + b_k \right) \right); \\ p_{3k-1} = q \left(p_{3k-1} - E \sum_{j=1}^{3l^2} a_{3k-1,j} p_j, p_{3k} - E \sum_{j=1}^{3l^2} a_{3k,j} p_j, \mu p_{3k-2} \right); \\ p_{3k} = q \left(p_{3k} - E \sum_{j=1}^{3l^2} a_{3k,j} p_j, p_{3k-1} - E \sum_{j=1}^{3l^2} a_{3k-1,j} p_j, \mu p_{3k-2} \right); \\ k = \overline{1, l^2}. \end{cases} \quad (6)$$

При определенных допущениях [13], входящие в систему (6) числовые параметры $a_{k,j}$, b_k можно выразить следующими равенствами:

$$b_k = \delta(\tilde{x}_2^k, \tilde{x}_3^k) - \Delta \quad \forall k = \overline{1, l^2};$$

$$a_{3k-j, 3k-j} = \varepsilon + \iint_{\omega_k} K_{3-j, 3-j}(\tilde{x}_2^k, \tilde{x}_3^k, x_2, x_3) dx_2 dx_3 \quad \forall k = \overline{1, l^2}, \quad \forall j = 0, 1, 2;$$

$$a_{3k-2, 3k-1} = a_{3k-2, 3k} = a_{3k-1, 3k-2} = a_{3k-1, 3k} = a_{3k, 3k-2} = a_{3k, 3k-1} = 0;$$

$$a_{3k-m, 3j-g} = \text{mes}(\omega_j) K_{3-m, 3-g}(\tilde{x}_2^k, \tilde{x}_3^k, \tilde{x}_2^j, \tilde{x}_3^j) \quad \forall k, j = \overline{1, l^2}, k \neq j, \quad \forall m, g = 0, 1, 2,$$

где точка $(\tilde{x}_2^k, \tilde{x}_3^k)$ есть центр квадрата ω_k , $\text{mes}(\omega_j)$ есть площадь ω_j , $\varepsilon > 0$ есть параметр регуляризации [13].

Для нахождения приближенного решения системы (6) можно предложить итерационный процесс, основанный на методе простой итерации

$$\left\{ \begin{array}{l} (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_{3l^2}^{(0)}) \in R^{3l^2}, \quad k = \overline{1, l^2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ p_{3k-2}^{(m+1)} = h \left(p_{3k-2}^{(m)} - E \left(\sum_{j=1}^{3l^2} a_{3k-2, j} p_j^{(m)} + b_k \right) \right); \\ p_{3k-1}^{(m+1)} = q \left(p_{3k-1}^{(m)} - E \sum_{j=1}^{3l^2} a_{3k-1, j} p_j^{(m)}, p_{3k}^{(m)} - E \sum_{j=1}^{3l^2} a_{3k, j} p_j^{(m)}, \mu p_{3k-2}^{(m)} \right); \\ p_{3k}^{(m+1)} = q \left(p_{3k}^{(m)} - E \sum_{j=1}^{3l^2} a_{3k, j} p_j^{(m)}, p_{3k-1}^{(m)} - E \sum_{j=1}^{3l^2} a_{3k-1, j} p_j^{(m)}, \mu p_{3k-2}^{(m)} \right). \end{array} \right. \quad (7)$$

Очевидно, что с помощью итерационного процесса (7), который может сходиться в пространстве R^{3l^2} лишь к решению системы (6), можно получить её приближенное решение с достаточной степенью точности.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При расчетах использовались следующие входные данные: радиусы цилиндров равны $R_1 = 0,265 \text{ м}$ и $R_2 = 0,3 \text{ м}$; жесткое сближение $\Delta = 0,0007 \text{ м}$; модули Юнга равны $E_1 = 3 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $E_2 = 10^5 \text{ МПа}$; коэффициенты Пуассона равны $\nu_1 = \nu_2 = 0,2$. Область Ω разбивалась на $41 \times 41 = 1681$ квадратных граничных элемента ω_k со стороной $0,00025 \text{ м}$. Расчеты производились для значений коэффициента трения μ равных $0, 0,2, 0,4$ и $0,8$. Значения контактных давлений $p_1(x_2, x_3)$, найденные из численного решения задачи при $\mu = 0$, сопоставлялись со значениями, найденными из аналитического решения Герца по формуле (1). Значения нормальных контактных напряжений в узловых точках (центрах квадратов ω_k), расположенных на оси x_3 , приведены в таблице 1 (напряжения $p_1(0, x_3)$ в МПа; координата x_3 в метрах). Первая строка таблицы соответствует решению Герца, вторая – численному решению задачи без учета трения ($\mu = 0$). Третья, четвертая и пятая строки таблицы соответствуют численным решениям задачи с учетом трения, полученным при коэффициентах трения $\mu = 0,2$, $\mu = 0,4$ и $\mu = 0,8$ соответственно.

Таблица 1 – Зависимость нормальных напряжений от расстояния

x_3	0,0000	0,0005	0,0010	0,0015	0,0020	0,0025	0,0030	0,0035	0,0040	0,0045
1	784,96	780,67	767,67	745,50	713,29	669,62	612,03	536,04	432,06	269,43
2	783,89	779,31	765,39	741,60	706,97	659,74	597,01	513,02	394,37	171,45
3	811,57	806,84	792,42	767,70	731,70	680,13	604,80	512,36	385,96	148,65
4	811,24	806,45	791,98	767,26	731,23	682,11	616,7	527,03	384,16	134,94
5	810,97	806,21	791,70	766,70	730,90	681,68	616,18	528,30	400,60	121,25

Данные, приведенные в таблице, свидетельствуют о том, что численное решение рассматриваемой задачи без учета трения несущественно отличается от аналитического решения, найденного по формуле (1). Наибольшее относительное отклонение значений контактных давлений по сравнению с их максимальным значением, найденным согласно (1), составляет приблизительно 12% и достигается в точках, близких к краю пятна контакта, в остальных точках погрешность не превосходит 4%. Существенную погрешность в точках, близких к краю пятна контакта, можно объяснить бесконечным градиентом функции (1) на границе эллипса контакта. Анализ данных, приведенных в третьей, четвертой и пятой строках таблицы 1, показал, что наличие трения в области контакта практически не оказывает влияния на нормальные напряжения. На рис. 2. показаны графики распределения касательного напряжения $p_3(0, x_3)$ вдоль оси x_3 , соответствующие различным значениям коэффициента трения.

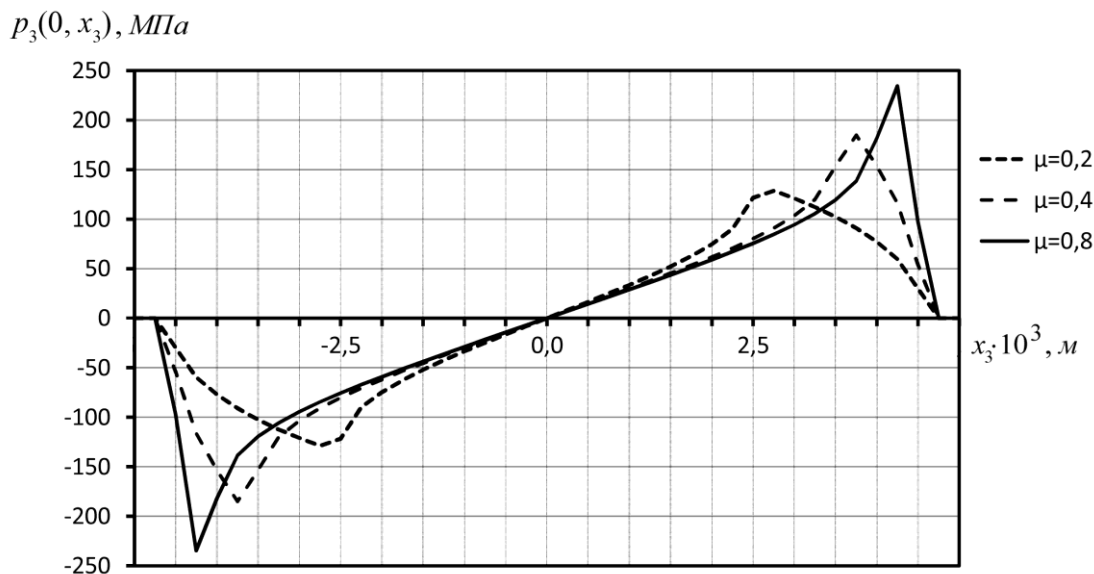


Рис. 2. Зависимость касательных напряжений от расстояния при различных коэффициентах трения

На рис. 3 показаны контактные пятна, состоящие из зоны сцепления (тёмный цвет) и зоны проскальзывания (серый цвет), которые возникают в области Ω при значениях коэффициента трения $\mu = 0,2$, $\mu = 0,4$ и $\mu = 0,8$ (клетки на рисунке соответствуют граничным элементам ω_k).

Анализ результатов, представленных на рис. 2, 3, показал, что касательные напряжения растут с увеличением трения и достигают максимума на границе зоны сцепления и зоны проскальзывания. Причем, точки максимума касательных напряжений являются нерегулярными точками на полученных кривых (рис. 2). Установлено также, что в каждом рассматриваемом случае область контакта имеет форму, близкую к эллипсу (рис. 3),

значения полуосей которого близки к теоретическим значениям, найденным согласно [15], для соответствующей задачи Герца. Как и следовало ожидать, площадь зоны сцепления растет с увеличением коэффициента трения.

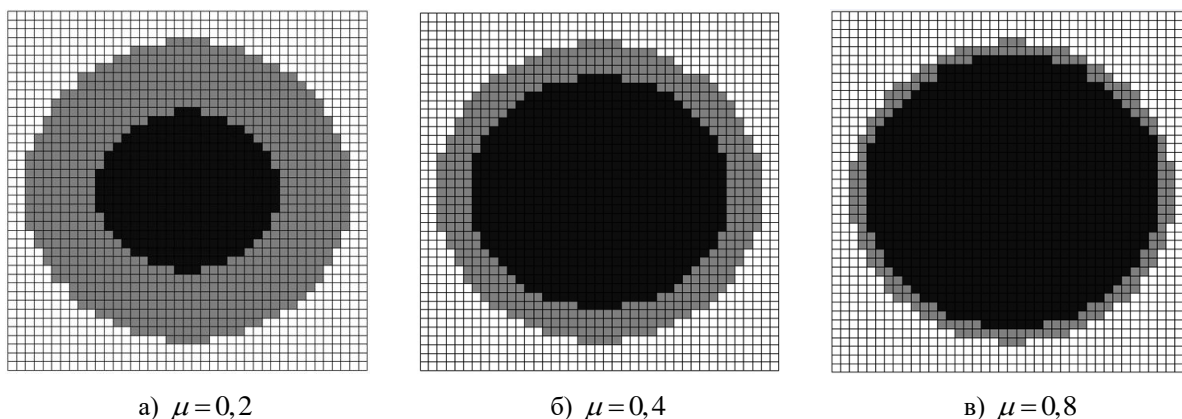


Рис. 3. Конфигурация области контакта

ВЫВОДЫ

Получено численное решение статической контактной задачи о сжатии с трением двух упругих бесконечных круговых цилиндров с ортогональными осями. Для решения задачи был использован метод нелинейных граничных интегральных уравнений, предложенный в работе [13]. Для проверки корректности этого метода результаты численных расчетов в случае отсутствия трения сопоставлялись с известным аналитическим решением рассматриваемой задачи и показали хорошее соответствие. Установлено, что силы трения практически не искажают форму и размеры зоны контакта и не влияют на нормальные напряжения, возникающие в ней. При наличии трения в зоне контакта появляются касательные напряжения, максимальные значения которых увеличиваются с увеличением коэффициента трения и в каждом рассмотренном случае достигаются на границе зон сцепления и проскальзывания.

ЛІТЕРАТУРА

1. Hertz Н. Über die Berührung fester elastischer Körper / Н. Hertz // J Reine und Angewandte Mathematik. – 1882. – Bd. 92. – P. 156-171.
2. Cattaneo С. Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli stozzi / С. Cattaneo // Rend. Dell'Accademia nazionale dei Lincei. – 1938. – Vol. 27, Ser. 6. – P. 342-348, 434-436, 474-478.
3. Mindlin R. D. Compliance of elastic bodies in contact / R. D. Mindlin // Trans. ASME, J. Appl. Mech. – 1949. – Vol. 16, №3. – P 259-268.
4. Галин Л. А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления / Л. А. Галин // Прикл. математика и механика. – 1945. – Т. 9. – Вып. 5. – С. 413-424.
5. Spence D. A. The Hertz contact problem with finite friction / D. A. Spence // J of Elasticity. – 1975. – 5(3-4). – P. 297-319.
6. Моссаковский В. И. Контактные задачи математической теории упругости / В. И. Моссаковский, Н. Е. Качаловская, С. С. Голикова. – К. : Наук. думка, 1985. – 176 с.
7. Zhupanska O. I. Contact with friction of a rigid cylinder with an elastic half-space / O. I. Zhupanska, A. F. Ulitko // J. Mech. Phys. Solids. – 2005. – 53. – P. 975-999.
8. Ostryk V. I. Axially symmetric contact of two elastic bodies with friction and adhesion / V. I. Ostryk, A. F. Ulitko // Materials Science. – 2013. – Vol. 48. – №. 4. – С. 444-455.
9. Острик В. И. Осесимметричный контакт штампа полиномиального профиля с упругим полупространством при наличии трения и сцепления / В. И. Острик // Прикл. математика и механика. – 2013. – Т. 77. – № 4. – С. 605-619.
10. Кравчук А. С. Вариационный метод в контактных задачах. Состояние проблемы, направления развития / А. С. Кравчук // Прикл. математика и механика. – 2009. – Т. 73. – № 3. – С. 492-502.

11. Кравчук А. С. О решении трехмерных контактных задач с трением / А. С. Кравчук // Прикл. математика и механика. – 2008. – Т. 72. – № 3. – С. 485-496.
12. Галанов Б. А. Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта / Б. А. Галанов // Прикл. математика и механика. – 1985. – Т. 49. – № 5. – С. 827-835.
13. Александров А. И. Метод решения пространственной контактной задачи о взаимодействии двух упругих тел при наличии трения между ними / А. И. Александров // Математичні методи і фізико-механічні поля. – 2013. – Т.56. – № 3. – С. 29-42.
14. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / Пер. с англ. В. Э. Наумова, А. А. Спектора ; под ред. Р. В. Гольдштейна. – М. : Мир, – 1989. – 510 с.
15. Писаренко Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – К. : Наукова думка, 1988. – 736 с.
16. Кравчук А. С. К постановке краевых задач теории упругости с трением на границе / А. С. Кравчук // Механика деформируемого твердого тела. – Куйбышев : Изд-во Куйбыш. ун-та, 1976. – С. 102-105.

REFERENCES

1. Hertz, H. (1882), “Über die Berührung fester elastischer Körper”, *J Reine und Angewandte Mathematik*, bd. 92, pp. 156-171.
2. Cattaneo, C. (1938), “Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli stozzi”, *Rend. Dell'Accademia nazionale dei Lincei*, vol. 27, ser. 6, pp. 342-348, 434-436, 474-478.
3. Mindlin, R.D. (1949), “Compliance of elastic bodies in contact”, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, vol 16, no. 3, pp. 259-268.
4. Galin, L.A. (1945), “The indentation of a punch in the presence of friction and adhesion”, *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. 9, no. 5, pp. 413-24.
5. Spence, D.A. (1975), “The Hertz contact problem with finite friction”, *J of Elasticity*, 5(3-4), pp. 297-319.
6. Mossakovskii, V.I., Kachalovskaya, N.Ye. and Golikova, S.S. (1985), *Kontaknyye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Contact Problems of the Mathematical theory of Elasticity], Naukova Dumka, Kiev.
7. Zhupanska, O.I. and Ulitko, A.F. (2005), “Contact with friction of a rigid cylinder with an elastic half-space”, *J. Mech. Phys. Solids*, 53, pp. 975-999.
8. Ostryk, V.I. and Ulitko, F. (2013) “Axially symmetric contact of two elastic bodies with friction and adhesion”, *Materials Science*, vol. 48, no. 4, pp. 444-455.
9. Ostryk, V.I. (2013), “Axisymmetric contact of a punch of polynomial profile with an elastic half-space when there is friction and adhesion”, *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. 77, no. 4, pp. 433-444.
10. Kravchuk, A.S. (2009), “The variational method in contact problems. The present state of the problem and trends in its development”, *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. 73, no. 3, pp. 351-357.
11. Kravchuk, A.S. (2008), “The solution of three-dimensional friction contact problems”, *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. 72, no. 3, pp. 338-346.
12. Galanov, B.A. (1985) “The method of boundary equations of the Hammerstein-type for contact problems of the theory of elasticity when the regions of contact are not known”, *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. 49, no. 5, pp. 634-640.
13. Aleksandrov, A.I. (2015), “A Method for the Solution of a Three-Dimensional Contact Problem of Interaction of Two Elastic Bodies in the Presence of Friction”, *Matematychni metody i fizyko-mekhanichni polya*, vol. 205, no. 4, pp. 518-534.
14. Johnson, K.L. (1985), [Contact Mechanics], Cambridge Univ. Press, Cambridge.
15. Pisarenko, G.S., Yakovlev, A.P. and Matveev, V.V. (1988), *Spravochnik po soprotivleniiu materialov* [Reference book on strength of materials], Naukova dumka, Kiev.
16. Kravchuk, A. S. (1976) “By the formulation of boundary value problems of the theory of elasticity with boundary friction”, *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela*, Izd-vo Kuibyshev. Univ., Kuibyshev, pp. 102-105.

УДК 669.71:669.058:539.24'25

ВПЛИВ ШВИДКОСТІ ОХОЛОДЖЕННЯ НА ФОРМУВАННЯ СТРУКТУРИ СПЛАВУ СИСТЕМИ AL-MN

Танцюра І. В., к. ф.-м. н.

Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

taniv14@gmail.com

Досліджено структурно-фазовий стан сплаву $Al_{86}Mn_{14}$ в області існування квазікристалічної ікосаедричної фази. Встановлено, що різке зростання швидкості охолодження розплаву за рахунок охолодження в клиновидну відливку призводить до зсуву евтектичної точки в бік тугоплавкого компонента та до утворення квазіевтектичної структури скелетного типу. Припущено, що основною причиною формування квазікристалічної ψ -фази при високих швидкостях охолодження розплаву є зміна механізму кристалізації з перитектичного на механізм безпосередньої кристалізації з розплаву.

Ключові слова: квазікристалічна фаза, квазіевтектика, дендрит, перитектична реакція, заевтектичний сплав.

ВЛИЯНИЕ СКОРОСТИ ОХЛАЖДЕНИЯ НА ФОРМИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ СПЛАВА СИСТЕМЫ Al-Mn

Танцюра І. В., к. ф.-м. н.

Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина

taniv14@gmail.com

Исследовано структурно-фазовое состояние сплава $Al_{86}Mn_{14}$ в области существования квазикристаллической икосаэдрической фазы. Установлено, что резкое увеличение скорости охлаждения расплава за счет охлаждения в клиновидную форму приводит к смещению эвтектической точки в сторону тугоплавкого компонента и к формированию квазіевтектической структуры скелетного типа. Сделано предположение, что основной причиной формирования квазіевтектической ψ -фазы при высоких скоростях охлаждения расплава является изменение механизма кристаллизации с перитектического на механизм непосредственной кристаллизации из расплава.

Ключевые слова: квазикристаллическая фаза, квазіевтектика, дендрит, перитектическая реакция, заевтектический сплав.

INFLUENCE OF COOLING RATE ON STRUCTURE FORMATION OF ALLOY SYSTEM Al-Mn

Tantsura I.V.

Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporozhzhye, 69600, Ukraine

taniv14@gmail.com

Structurally-phase condition of alloy $Al_{86}Mn_{14}$ in the region of existence of quasi-crystalline icosahedral phase has been investigated. It is found that an abrupt increase in the cooling rate of the melt by cooling in a wedge shape leads to a shift of the eutectic point in the direction of the refractory component and the formation of the quasi-eutectic structure of the skeletal type. It is suggested that the main reason for the formation of quasi-crystalline ψ - phase it is high cooling rates of liquid is a change in the mechanism of crystallization on the mechanism of peritectic direct crystallization from the liquid. High cooling rates of liquid has the potential for substantial improvements of mechanical properties through extension of solid solubility limits, the refinement of microstructure, and dispersion of the secondary phases. Furthermore, by this method it is possible to produce metastable phases such as quasi-crystals, nanocrystals, and amorphous whose presence in an alloy leads to beneficial improvements in mechanical, magnetic, electrical, and other properties. Al-Mn is an important system in which the occurrence of a quasi-crystalline non-equilibrium phase. The icosahedral quasicrystal discovered by Shechtman in rapidly solidified Al-Mn alloys has a unique symmetry and striking morphology which is different from that of the crystal. In consequence this has stimulated considerable interest. However, a few studies centered on the formation of the unique morphology of icosahedral quasicrystal, especially on the relation between a cooling rate and morphology. Some facts are well established, e.g. the need for high cooling rates for the production of most icosahedral phases; the dendritic morphology of the

quasicrystals which often coexist with a supersaturated f.c.c. solid solution; the apparently random nucleation of the phase. Some other points are still in debate, in particular, the atomic structure of the icosahedral phase is unsolved.

Inspection of the Al-Mn phase diagram which has been recently redetermined and critically reinterpreted, shows that many intermetallic compounds are involved in the solidification of aluminium-rich alloys. For example, in equilibrium conditions the first solid to form from the liquid at the $Al_{86}Mn_{14}$ composition is the μ -phase at 1191 K, followed by the peritectic formation of Al_6Mn at 978K. It is well established that in this case the phase competing with the formation of quasicrystals during rapid solidification is Al_6Mn . Though this is expected because it has the same composition as the alloy, its peritectic formation occurs 200 K below the liquidus where both λ - Al_4Mn and should have a substantial driving force for nucleation. In $Al_{80}Mn_{20}$ a metastable decagonal phase (T-phase) is competing. However, considering the metastable extrapolation of the Al_6Mn -liquid and Al_4Mn -liquid phase boundaries, congruent melting points close to each other were derived for Al_6Mn at 1113K and for Al_4Mn at 1153K. At these temperatures the free energy of the compounds equals that of the liquid and a possibility for their nucleation exists just below these points. Under these circumstances it is easy to understand that the partitionless solidification of Al_6Mn from the undercooled liquid should be favored with respect to the segregation of the liquid giving 2- Al_4Mn . The solidification pattern in Al-Mn is therefore the result of the competition among various phases of similar free energy. The icosahedral phase must be inserted among these and, although a higher free energy should be expected for it, it should not be too different in stability from the equilibrium phases.

The nominal composition of $Al_{86}Mn_{14}$ alloy was prepared by melting. High purity elements of Al and Mn were used. The structure and phase composition of the alloy was studied by X-ray diffraction (DRON-3M, Cu-K α -radiation) and metallography (Axio Imager A1m/M1m). The microhardness distribution was determined using a PMT-3 device.

Keywords: quasi-crystal phase, quasi-eutectic, dendrite, peritectic reaction, hypereutectic alloy.

ВСТУП

Сучасний етап розвитку виробництва вимагає створення нових матеріалів з поліпшеними фізико-механічними властивостями. У цьому аспекті відкриті нещодавно металеві сплави, названі квазікристалами (QC) [1, 2], які характеризуються незвичайними для металевих сплавів властивостями, викликають значну зацікавленість не лише дослідників, а й інженерів та технологів.

Особливістю будови QC є нетрадиційний тип кристалічної ґратки, який ґрунтується на квазіперіодичній симетрії та має заборонені з точки зору класичної кристалографії ротаційні осі симетрії 5-го, 8-го, 10-го і 12-го порядків. Така будова послужила причиною зміни властивостей цих матеріалів порівняно з кристалічними аналогами.

Перша QC-фаза була відкрита у 1984 році Шехтманом при швидкому гартуванні сплавів системи Al-Mn в інтервалі концентрацій марганцю від 25 до 9 ат. % [3]. Симетрія цієї фази виявилася ікосаедричною. У науковій літературі вона часто позначається, як ψ -фаза [4]. Окрім ікосаедричної фази в AlMn-сплавах було виявлено також існування декагональної фази (D-фази) з віссю симетрії 10-го порядку [4].

Діаграма фазових рівноваг системи Al-Mn не містить QC-фаз [5]. Це означає, що їх формування пов'язано зі значними швидкостями охолодження розплаву, тобто може відбуватися лише у високонерівноважних умовах. Питання ж щодо кінетики фазоутворення в означеній системі вивчені ще недостатньо. Тому метою даної роботи було дослідження процесів фазоутворення у класичному алюміній-марганцевому сплаві, який за певних умов кристалізації може містити ψ -фазу, при різних швидкостях охолодження розплаву.

МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ

За об'єкт дослідження було обрано алюмінієвий сплав $Al_{86}Mn_{14}$, який виплавлявся у плавильній печі у відкритій атмосфері. Сплав виготовлявся з алюмінію та марганцю технічної чистоти у відповідному співвідношенні між компонентами. Хімічний елементів шихти наведено в таблиці 1.

Для захисту від окислення під час плавлення застосували рафінування, яке полягало в обробленні розплаву алюмінію сіллю хлористого марганцю $MnCl_2$. Просушену сіль вводили у розплав тигля у кількості 0,02...0,05% при температурі 973...1003 K. Після рафінування у розплав алюмінію додавали порошок марганцю шляхом занурення його через трубку в середину розплаву. Після досягнення розплавом температури 1473 K виконувалася витримка

близько 30 хвилин (до повного розчину компонентів). Готовий розплав виливався у сталевий кокіль з подальшим охолодженням в атмосфері повітря. Для детального дослідження сплаву отриманий зливочок був порізаний за схемою, наведеною на рис. 1.

Таблиця 1 – Хімічний склад шихти

Елемент	Кількість, не менше, ат. %	Сума домішок, не більше, ат. %	Нормативний документ
Технічний алюміній А85	99,85	0,15	ГОСТ 11069-74
Електролітичний порошок Mn	99,7	$C \leq 0.04, S \leq 0.05, Fe \leq 0.05, P \leq 0.004, Se \leq 0.08, Si \leq 0.0035$	No CAS: 7439-96-5

Дослідні зразки вирізалися з верхньої, середньої та нижньої областей зливу і мали розміри $20 \times 15 \times 10$ мм (верхня та середня частини зливку), і $2 \times 15 \times 10$ мм (нижня частина зливку) (рис. 1).

Структурно-фазовий склад зразків досліджувався методами рентгеноструктурного (ДРОН-3, $Cu-K_{\alpha}$ -випромінювання) та металографічного (ЕРІQUANT) аналізів. Значення мікротвердості визначалися за допомогою мікротвердоміру ПМТ-3.

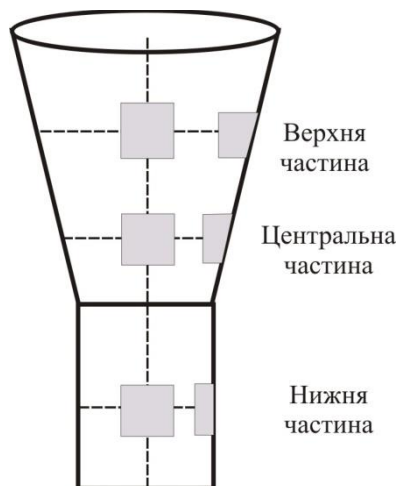


Рис. 1. Схема виготовлення зразків для досліджень з кокилю

РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЇХ ОБГОВОРЕННЯ

У рівноважному стані структура заевтектичного сплаву $Al_{86}Mn_{14}$ при кімнатній температурі складається з евтектики (α -фаза + Al_6Mn) та первинних кристалів фази Al_6Mn [5].

Різна швидкість відводу тепла за поперечним перетином клиновидної виливки призвела до формування структур різного типу в різних її частинах.

Структура верхньої центральної частини виливки – це евтектика $Al + Al_6Mn$ та первинні кристали Al_6Mn , морфологія яких змінювалася від шестигранної форми до пластинчастої (рис. 2).

При цьому значення мікротвердості евтектичної складової не перевищували ~ 510 МПа, а первинних кристалів Al_6Mn – 3,5 ГПа. Необхідно зазначити, що первинні кристали фази Al_6Mn формою росту у вигляді шестигранника мали «оболонкову будову» (рис. 2, а), тобто внутрішня частина шестигранника

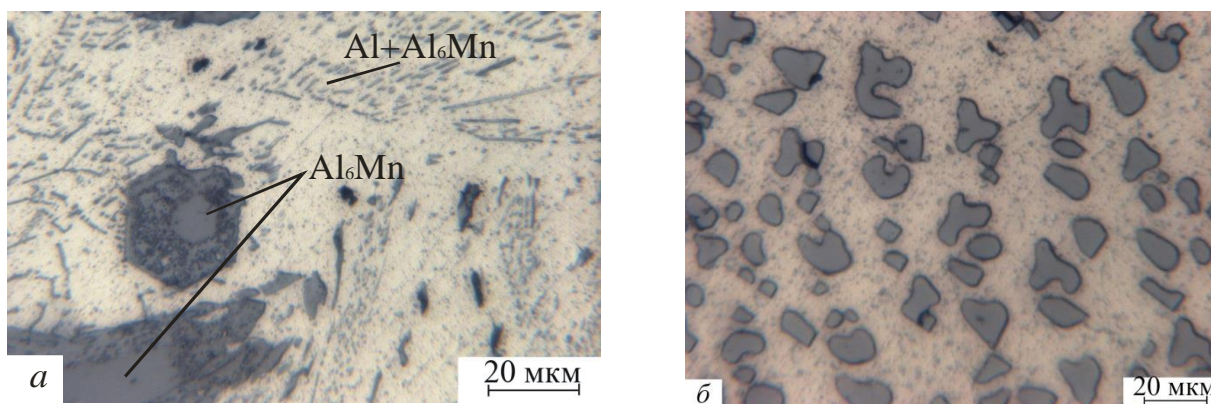


Рис. 2. Структура верхньої центральної (а) та крайової (б) частини відливки сплаву $Al_{86}Mn_{14}$

була оточена другою фазою, яка витравлювалася іншим кольором. Формування подібної структури можна пояснити, якщо враховувати, що в системі $Al-Mn$ квазікристалічна фаза формується за перитектичним механізмом за участю саме кристалічної фази Al_6Mn . При тих

швидкостях охолодження розплаву, які досягалися у верхній середній частині зливку, перитектична реакція відбувалася не до кінця. Тому на мікроструктурах фіксувалися дві фази – інтерметалева та квазікристалічна ψ -фаза. Проте стверджувати однозначно щодо фазового складу кристалів шестигранної форми росту досить складно, оскільки дифракційні максимуми від ґраток цих фаз практично співпадали (рис. 3, а).

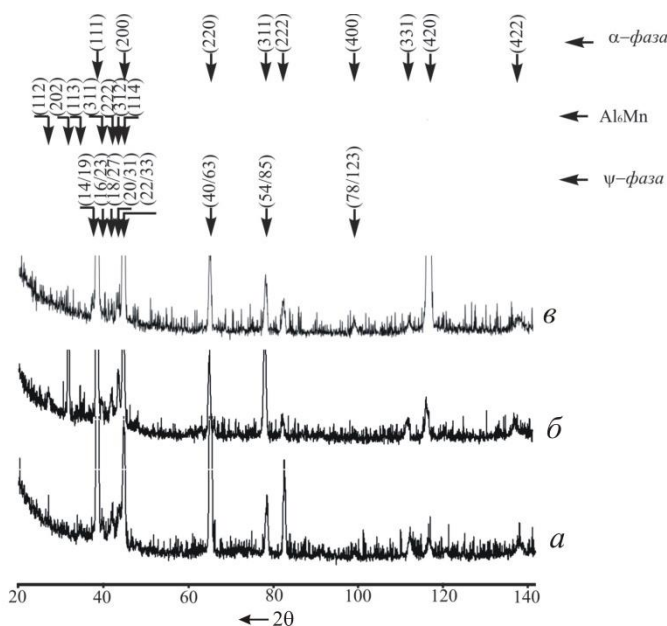


Рис. 3. Дифрактограми від поверхневих шарів сплаву $Al_{86}Mn_{14}$: верхня (а), центральна (б), нижня (в) частина кокілю

Периферійні ділянки верхньої частини відливки характеризувалися рівномірним розподілом первинних кристалів фази Al_6Mn (рис. 2, б) в евтектиці та практичною відсутністю як кристалів шестигранної форми росту, так і оболонкової структури, що пов'язано зі зростанням швидкості охолодження розплаву. Оскільки швидкість охолодження у відливці є максимальною на границі розплаву з формою виливки, то можна припустити, що евтектика, яка формується у цій зоні, є виродженою. Центральна частина виливки (рис. 4) була подібною за структурою до верхньої частини. Проте, зважаючи на те, що швидкості охолодження розплаву у цих ділянках, порівняно з розглянутими вище, зросли на порядок, структури все ж дещо відрізнялися: по-перше, змінилася

морфологія первинних кристалів фази Al_6Mn (вони мали більш грубу, неправильну форму росту); по-друге, пригнічувалося формування оболонкової структури у тих небагатьох кристалах, форма росту яких залишилася близькою до шестигранної (рис. 4, б). У периферійній же області цієї частини відливки, де швидкість охолодження була ще більшою, кристали інтерметаліду Al_6Mn мали прямокутну форму, а їхня форма росту нагадувала дендритну (рис. 4, в). При цьому явних ознак формування квазікристалічної фази не фіксувалося, що було підтверджено також рентгенографічно (рис. 3, б).



Рис. 4. Структура центральної частини виливки: центр зони (а), мікроструктура первинних кристалів (б), крайова частина зони (в)

Різка підвищення швидкості охолодження розплаву (до $\sim 10^5$ K/c) у нижній частині відливки призвело до суттєвих змін структури. Нижню ділянку кокілю умовно було також поділено на дві частини – центральну та периферійну.

Відомо [6], що при збільшенні переохолодження розплаву за рахунок зростання швидкості його охолодження в сплавах неевтектичного складу швидкість росту евтектичної складової є вищою, ніж швидкість росту окремих первинних фаз. У зв'язку з цим, в залежності від значень швидкості охолодження, заевтектичний сплав може ставати або квазіевтектичним, або навіть квазідоевтектичним. При цьому твердий розчин на основі алюмінію може містити у собі більш високу концентрацію марганцю, ніж при рівноважних умовах кристалізації. Виходячи з цього та аналізуючи мікроструктуру заевтектичного (при рівноважних умовах

кристалізації) сплаву системи Al–Mn в центральній частині виливки, можна вважати, що він, при досягненні швидкості охолодження розплаву $\sim 10^5$ К/с, стає квазіевтектичним (рис. 5). Сформована квазіевтектика була дисперсною з вираженою скелетною будовою.

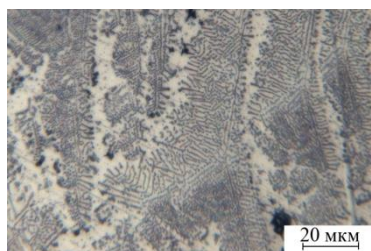


Рис. 5. Мікроструктура нижньої центральної частини виливки.

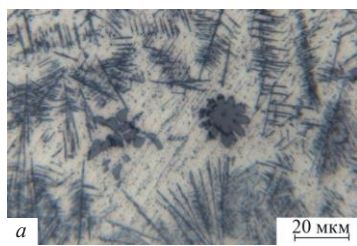
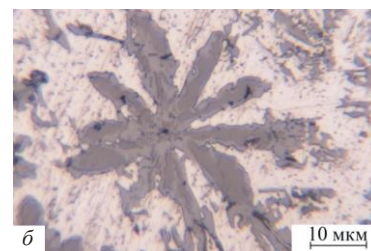


Рис. 6. Структура нижньої частини виливки: крайова зона (а), квазікристалічна «квіткоподібна» фаза (б)



У периферійній частині відливки фіксувалися структури, які були подібними до структур швидко загартованих сплавів систем Al–Mn (рис. 6, а). При цьому однією зі складових структури були кристали, які мали квіткоподібну форму росту (рис. 6, б), описану в [7]. Аналізуючи дані металографічного аналізу верхньої та центральної частини виливки, можна дійти висновку, що структура є трифазною, оскільки три структурні складові після травлення мають різний колір. Можна припустити, що фаза з квіткоподібною формою росту є квазікристалічною, виходячи з таких міркувань. Вище було показано, що зі зростанням швидкості охолодження розплаву кількість квазікристалічної фази зменшується, що пов'язано з досить тривалим у часі перитектичним перетворенням типу $L + Al_6Mn \rightarrow \psi$ -фаза. Дещо парадоксальне формування квазікристалічної фази при зростанні швидкості охолодження розплаву до $\sim 10^5$ К/с може бути пояснено можливістю фіксації при кімнатній температурі більш високотемпературного фазового складу. А за таких умов ψ -фаза могла формуватися вже не за перитектичним механізмом, а безпосередньо з розплаву.

Стверджувати однозначно про формування квазікристалічної фази ψ -фаза за даними рентгенівського фазового аналізу було дуже складно внаслідок описаної вище причини – дифракційні максимуми від ґраток інтерметаліду Al_6Mn та ψ -фази практично співпадали (рис. 3, в). Для повної відповіді щодо існування ψ -фази необхідне використання більш тонких структурних методів дослідження, зокрема трансмісійної електронної мікроскопії.

ВИСНОВКИ

Високі швидкості охолодження розплаву системи Al–Mn призводять до зсуву евтектичної точки у бік тугоплавкого компоненту та до утворення квазіевтектичної структури скелетного типу.

Формування квазікристалічної ψ -фази при високих швидкостях охолодження заевтектичного Al–Mn-сплаву пов'язано зі зміною механізму кристалізації з перитектичного на механізм безпосередньої кристалізації з розплаву.

ЛІТЕРАТУРА

1. Адеєва Л. І. Квазікристалічні сплави як новий перспективний матеріал для захисних покриттів / Л. І. Адеєва, А. Л. Борисова // Фізика і хімія твердого тіла. – 2002. – Т.3, № 3. – С. 454-465.
2. Борисов Ю. С. Газотермічні покриття, що містять квазікристалічну фазу, властивості і застосування (огляд) / Ю. С. Борисов, А. Л. Борисова, Л. І. Адеєва, А. Ю. Туник, М. Т. Панько // Фізика і хімія твердого тіла. – 2005. – Т. 6, № 1. – С. 124-136.
3. Karel Saksl. Quasicrystal–crystal structural transformation in Al–5 wt. % Mn alloy / Karel Saksl, Dalibor Vojteřch, Hermann Franz // J Mater Sci. – 2007. – № 42. – P. 7198-7201.
4. Steurer W. Single-crystal X-ray study of the decagonal phase of the system Al–Mn / W. Steurer, J. Mayert // Acta Cryst. – 1989. – Vol. B45. – P. 355-359.
5. Лякишев Н. П. Диаграммы состояния двойных металлических систем : в 2т. / Н. П. Лякишев. – М. : Машиностроение, 1996. – 1024 с. – Т.1.

6. Спиридонова І. М. Особливості квазіевтектичної кристалізації / І. М. Спиридонова, О. Ю. Береза, О. П. Ващенко // *Металлофізика і новітні технології*. – 2005. – Т. 27, № 4. – С. 447-455.
7. Шульга А. В. Метастабильные равновесия и образование выделений квазикристаллической фазы в быстрозакаленных сплавах системы Al-Mn [Электронный ресурс] / А. В. Шульга. – 2010. – Режим доступа : <http://litterref.ru/bewmerqasrnaotrna.html/>.

REFERENCE

1. Adeeva, L.I. and Borisova, A.L. (2002), “Quasicrystal alloys as a new perspective material to protection covers”, *Fizyka i khimiya tverdoho tila*, vol. 3, no. 3, pp. 454-465.
2. Borisov, Y.S., Borisov, A.L., Adeeva, L.I., Tunik, A.Y. and Panko, M.T. (2002), “Thermal coatings containing quasicrystalline phase, properties and application (review)”, *Fizyka i khimiya tverdoho tila*, vol. 6, no. 1, pp. 124-136.
3. Karel Saksl, Dalibor Vojteřch and Hermann Franz (2007), “Quasicrystal–crystal structural transformation in Al–5 wt.% Mn alloy”, *J Mater Sci.*, no. 42, pp. 7198-7201.
4. Steurer, W. and Mayert, J. (1989), “Single-crystal X-ray study of the decagonal phase of the system Al–Mn”, *Acta Cryst.*, vol. B45, pp. 355-359.
5. Liakishev, N.P (1996), *Diagrammy sostoyaniya dvoynykh metallicheskih system: v 2 t.* [The phase diagrams of binary metallic systems: in 2 vol.], vol, 2, Mashinostroenie, Moscow.
6. Spiridonov, I.O., Bereza, O.Y. and Vashchenko, O.P. (2005), “Features quasi eutectic crystallization”, *Metalofizyka i novitni tekhnolohiyi*, vol. 27, no. 4, pp. 447-455.
7. Shulga, A.B. (2010), “Metastable equilibrium and the formation of precipitates quasicrystalline phase in rapidly quenched alloys of the Al-Mn”, available at: <http://litterref.ru/bewmerqasrnaotrna.html/>.

УДК 539.3

ВПЛИВ ПЕРІОДИЧНОГО ЗОВНІШНЬОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА КОЛИВАННЯ ФГМ ПОЛОГИХ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ ЗІ ЗМІННОЮ ЗА ЧАСОМ ТОВЩИНОЮ

Фатєєва Ю. О.

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

fateevajulia@gmail.com

У роботі розглядається наближений аналітичний розв'язок задачі динаміки пологої оболонки із функціонально-градієнтного матеріалу (ФГМ) і змінною за часом товщиною при наявності періодичного зовнішнього навантаження. Рух конструкції описується на основі класичної теорії оболонок. До цього напрямку досліджень можна віднести публікації [1-3]. Особлива увага в роботі приділяється дослідженню впливу характеру зміни товщини оболонки за часом на динамічну поведінку при заданих початкових умовах. Основні залежності «деформації – переміщення» базуються на теорії Кармана. Проблема зводиться до сингулярного нелінійного диференціального рівняння другого порядку зі змінною за часом правою частиною. Проведено порівняння здобутого аналітичного розв'язку для деяких параметрів конструкції з прямим чисельним інтегруванням початкового рівняння задачі.

Ключові слова: тонкостінні оболонки з ФГМ, нелінійні коливання, теорія Кармана, метод ВКБ.

ВЛИЯНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ НА КОЛЕБАНИЯ ФГМ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ПЕРЕМЕННОЙ ПО ВРЕМЕНИ ТОЛЩИНОЙ

Фатеева Ю. А.

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

fateevajulia@gmail.com

В работе представлено приближенное аналитическое решение линейной задачи динамики пологой оболочки из функционально-градиентного материала (ФГМ) при наличии внешней динамической нагрузки на основе методов возмущений и фазовых интегралов (метод ВКБ). Движение конструкции описывается на основе классической теории оболочек. Особое внимание уделяется исследованию характера внешней нагрузки и свойств материала на динамическое поведение при заданных начальных условиях. Нелинейные зависимости «деформации–перемещения» базируются на теории Кармана. Проблема сводится к сингулярному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка с переменными по времени коэффициентами. Проведено сравнение полученного аналитического решения для некоторых параметров конструкции с прямым численным интегрированием основного уравнения задачи.

Ключевые слова: тонкостенные оболочки из ФГМ, нелинейные колебания, теория Кармана, метод ВКБ.

INFLUENCE OF EXTERNAL PERIODIC OSCILLATION OF A SHALLOW SHELL STRUCTURES MADE OF FGM WITH VARIABLE THICKNESS IN TIME

Fatieieva Yu.

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporozhzye, 69600, Ukraine*

fateevajulia@gmail.com

This paper deals with non-linear vibration of shallow spherical shell with initial imperfection made of functionally graded material (FGM) and under an external dynamic loading. The equations of motion, compatibility and stability of the construction are described by the classical theory of shells (Karman theory). It is assumed that the shell base surface as geometrical middle surface. In this paper, we analyze the most popular case of functionally graded shell which top surface is ceramic and bottom surface is metal.

The properties of construction are graded in the thickness direction according to the given power law distribution in the terms of volume fraction of the constituents of the construction and initial conditions. Special attention is paid to study of influence external load and material properties on the dynamic behavior construction with given initial conditions. Discussed problem leads to the singular linear non homogeneous second order differential equation with time dependent parameters.

An approximate analytical solution for forced oscillations of geometrically non-linear FGM imperfect shallow cylindrical shells with time dependent parameters on the basis of hybrid perturbation WKB approximation method are obtained. The analytical solution was compared with direct numerical integration of initial equation of the problem. For some particular parameters of structure an analytical solutions are in a good enough correlations with direct numerical solutions.

Key words: FGM shell, nonlinear vibration, Karman theory, WKB approximation method.

Основне диференціальне рівняння нелінійних коливань ФГМ пологих оболонок при наявності динамічного зовнішнього навантаження і товщиною, залежною від часу

Нелінійний аналіз динаміки базується на системі рівнянь згідно до роботи [1]. Вважається, що ФГМ полого оболонка шарнірно закріплена на кінцях, під дією зовнішнього тиску $q_0(t)$ і стискаючих зусиль $r_0(t)$, $p_0(t)$. Вважається, що модуль пружності і масова щільність змінюються по товщині, коефіцієнт Пуассона є величиною постійною, а товщина оболонки є функцією часу. При цьому

$$V_m + V_c = 1, \quad (1)$$

$$V_c = \left(\frac{2z+h(t)}{2h} \right)^k, \quad (2)$$

де V_m, V_c – відповідно об’ємні фракції металу та кераміки; $h(t)$ – товщина оболонки; k – показник фракцій компонентів матеріалу.

Модуль пружності, масова щільність і коефіцієнт Пуассона для ФГМ можуть бути знайдені за наступними залежностями [2]

$$\begin{aligned} E(z) &= E_m V_m + E_c V_c = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{2z+h(t)}{2h(t)} \right)^k, \\ \rho(z) &= \rho_m V_m + \rho_c V_c = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{2z+h(t)}{2h(t)} \right)^k, \\ v(z) &= \text{const}. \end{aligned} \tag{3}$$

Застосовуються геометрично нелінійні залежності для деформацій і відносно великих переміщень відповідно до теорії Кармана:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^0 &= \frac{\partial u}{\partial x_1} - k_1 w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2, \quad \chi_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \\ \varepsilon_2^0 &= \frac{\partial u}{\partial x_2} - k_2 w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2, \quad \chi_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \\ \gamma_{12}^0 &= \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad \chi_{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Рівняння сумісності деформацій мають вигляд

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1^0}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2^0}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{12}^0}{\partial x_1 \partial x_2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}. \tag{5}$$

Залежності внутрішніх сил, їх інверсія та моментів даються у формі:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{E_1}{1-\nu^2} (\varepsilon_1^0 + \nu \varepsilon_2^0) - \frac{E_2}{1-\nu^2} (\chi_1 + \nu \chi_2), \\ N_2 &= \frac{E_1}{1-\nu^2} (\varepsilon_2^0 + \nu \varepsilon_1^0) - \frac{E_2}{1-\nu^2} (\chi_2 + \nu \chi_1), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} N_{12} &= \frac{E_1}{2(1-\nu)} \lambda_{12}^0 - \frac{E_2}{1-\nu} \chi_{12}, \\ \varepsilon_1^0 &= \frac{1}{E_1} (N_1 - \nu N_2) + \frac{E_2}{E_1} \chi_1, \\ \varepsilon_2^0 &= \frac{1}{E_1} (N_2 - \nu N_1) + \frac{E_2}{E_1} \chi_2, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{12}^0 &= \frac{2(1+\nu)}{E_1} N_{12} + \frac{2E_2}{E_1} \chi_{12}, \\ M_1 &= \frac{E_2}{E_1} N_1 - \frac{E_1 E_3 - E_2^2}{E_1(1-\nu^2)} (\chi_1 + \nu \chi_2), \\ M_2 &= \frac{E_2}{E_1} N_2 - \frac{E_1 E_3 - E_2^2}{E_1(1-\nu^2)} (\chi_2 + \nu \chi_1), \end{aligned} \tag{8}$$

$$M_{12} = \frac{E_2}{E_1} N_{12} - \frac{E_1 E_3 - E_2^2}{E_1(1-\nu^2)} \chi_{12},$$

де

$$\begin{aligned} E_1 &= \left(E_m + \frac{E_c - E_m}{k+1} \right) h(t), \\ E_2 &= \frac{(E_c - E_m) k h(t)^2}{2(k+1)(k+2)}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$E_3 = \left[\frac{E_m}{12} + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4k+4} \right) \right] h(t)^3.$$

Відповідно до Кірхгоффа-Лява теорії оболонок рівняння руху зводяться до залежностей

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} &= \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} &= \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(N_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} + N_{12} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(N_{12} \frac{\partial w}{\partial x_1} + N_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \\ + k_1 N_1 + k_2 N_2 + q_0 = \rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\end{aligned}$$

де

$$\rho_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz = \left(\rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{k+1} \right) h(t). \quad (11)$$

Беручи до уваги лише сили інерції у напрямку, ортогональному до серединної поверхні оболонки ($u \ll w$, $v \ll w$), тобто враховуючи, що $\rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rightarrow 0$ і $\rho_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \rightarrow 0$, а також вводячи функцію напруги φ співвідношеннями

$$N_1 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}, \quad N_2 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, \quad N_{12} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (12)$$

залежності (3.10) будуть мати вигляд:

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} + N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2 N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + N_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + k_1 N_1 + k_2 N_2 + q_0 = \rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (13)$$

З урахуванням залежностей (7)-(13), а також наявності початкових недосконалостей у серединній поверхні оболонки, отримаємо систему нелінійних диференціальних рівнянь відносно функцій напруги і нормального переміщення:

$$\begin{aligned}\frac{1}{E_1} \Delta \Delta \varphi &= -k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \\ \rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{E_1 E_3 - E_2^2}{E_1 (1 - \nu^2)} \Delta \Delta w + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - k_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - k_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} &= q_0, \quad (14) \\ \frac{1}{E_1} \Delta \Delta \varphi &= -k_1 \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x_2^2} - k_2 \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x_1^2} + \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right] - \left[\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_2^2} \right] = 0, \\ \rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{E_1 E_3 - E_2^2}{E_1 (1 - \nu^2)} \Delta \Delta (w - w_0) + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - k_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - k_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} &= q_0.\end{aligned}$$

Застосовуючи Бубнова-Гальоркіна процедуру з припущенням, що функція деформування оболонки $w = (x_1, x_2, t)$ задається у формі

$$w = (x_1, x_2, t) = f(t) \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}, \quad (15)$$

що відповідає граничним умовам шарнірного обпирання оболонки, основне рівняння зводиться до форми:

$$\begin{aligned}\rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left[\frac{E_1 E_3 - E_2^2}{E_1 (1 - \nu^2)} \frac{(m^2 + n^2 \lambda^2) \pi^4}{a^4} + \frac{E_1 (k_1 n^2 \lambda^2 + k_2 m^2)}{(m^2 + n^2 \lambda^2)^2} \right] (f - f_0) - \\ - \frac{16 E_1 m n \lambda^2 (k_1 n^2 \lambda^2 + k_2 m^2)}{3 a^2 (m^2 + n^2 \lambda^2)^2} [f^2 - f_0^2 + 2f(f - f_0)] + \\ + \frac{512 E_1 m^2 n^2 \lambda^4}{9 a^4 (m^2 + n^2 \lambda^2)^2} f (f^2 - f_0^2) = \frac{16 Q \sin \Omega t}{\pi^2 m n (1 - \nu^2)}.\end{aligned}\quad (16)$$

АНАЛІТИКО-ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ПЕРІОДИЧНИХ КОЛИВАНЬ

За умови відсутності початкових недосконалостей і заданих параметрів зовнішнього навантаження

$$q_0(t) = Q \sin \Omega t, \tag{17}$$

$$r_0 = p_0 = 0, \tag{18}$$

$$a = b = 2m; \quad h = 0,01m; \quad k_1 = k_2 = \frac{1}{R}; \quad R = 5m, \tag{19}$$

а також параметрів жорсткості оболонки у відповідності до роботи [1], рівняння задачі дається у вигляді:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + 2,78 \cdot 10^6 f(t) = \frac{0,075 \cdot 10^6 \sin(1,6 \cdot 10^3 t)}{1-16t}. \tag{20}$$

Аналітичний розв’язок рівняння (20) за початковими умовами

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0 \tag{21}$$

має вигляд:

$$f(t) = \sin K(t) (c_1 + \vec{c}_1(t)) + \cos K(t) (c_2 + \vec{c}_2(t)), \tag{22}$$

де

$$K(t) = 1,67 \cdot 10^3 t, \tag{23}$$

$$\vec{c}_1(t) = 0,677((0,51) \text{CosIntegral}[100 - 1600t] + 0,862 \text{SinIntegral}[100 - 1600t]),$$

$$\vec{c}_2(t) = 2,724((0,506) \text{CosIntegral}[100 - 1600t] + 0,862 \text{SinIntegral}[100 - 1600t]).$$

Результати чисельного аналізу основного рівняння задачі наведені на рис. 1-3.

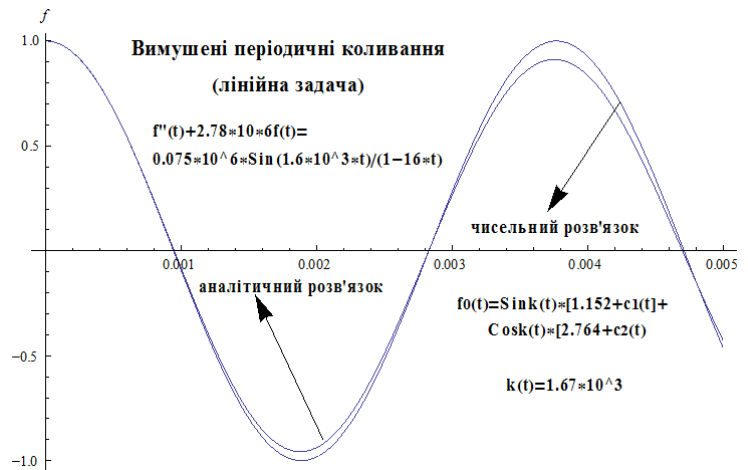


Рис. 1. Розв’язок задачі про вимушені коливання ФГМ полової оболонки з періодичним зовнішнім навантаженням

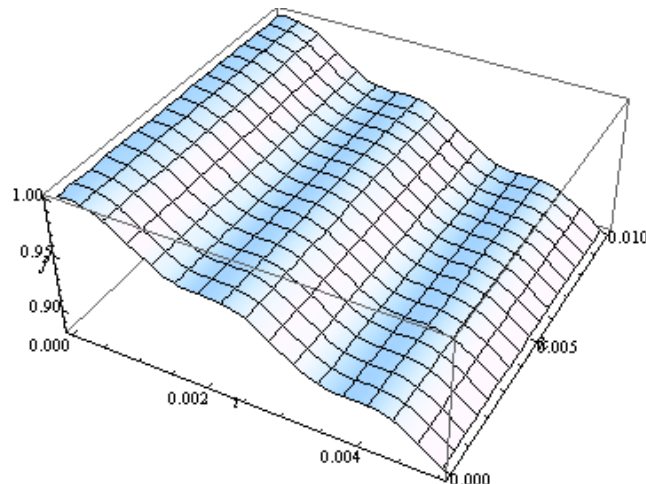


Рис. 2. Вплив коефіцієнту K_0 на характер динамічного процесу

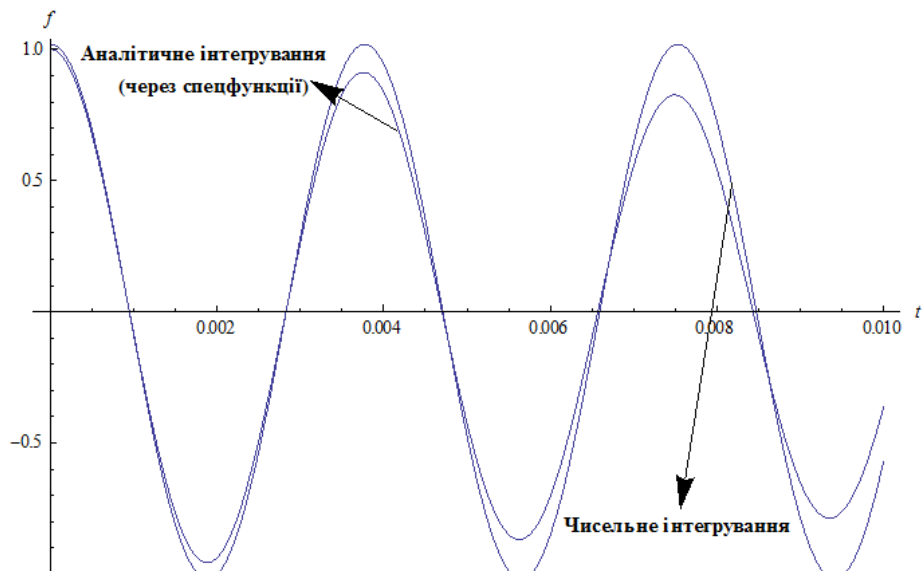


Рис. 3. Порівняння аналітичного і чисельного інтегрування у аналізі вимушених коливань

ВИСНОВОК

У роботі запропоновано розв'язок задачі про вимушені коливання пологої оболонки зі змінною за лінійним законом у часі товщиною і періодичною функцією зовнішнього навантаження. Надано чисельний аналіз вимушених коливань для оболонки із заданими параметрами жорсткості.

ЛІТЕРАТУРА

1. Dao Huy Bich. Nonlinear Dynamical Analysis of Imperfect Functionally Graded Materials Shallow Shells / Dao Huy Bich, Yu Do Long // Vietnam Journal of Mechanics, VAST. – 2010. – Vol. 32. – No 1. –P. 1-14.
2. Vu Thi Thuy Anh. Nonlinear Axisymmetric Response of Thin FGM Shallow Spherical Shells with Ceramic-Metal-Ceramic Layers under External Pressure and Temperature / Vu Thi Thuy Anh, Nguyen Dinh Duc // VNU Journal of Mathematics – physics. – 2013. – Vol. 29. – No 2. –P. 1-15.
3. Kowal-Michalska K. Static and Dynamic Thermomechanical Buckling Load of Functionally Graded Plate / Katarzyna Kowal-Michalska, Radoslaw J. Mania // Mechanics and Mechanical Engineering. – 2013. – Vol. 17. – No 1. –P. 99-112.

REFERENCES

1. Dao Huy Bich and Yu Do Long (2010), "Nonlinear Dynamical Analysis of Imperfect Functionally Graded Materials Shallow Shells", *Vietnam Journal of Mechanics, VAST*, vol. 32, no. 1, pp. 1-14.
2. Vu Thi Thuy Anh and Nguyen Dinh Duc (2013), "Nonlinear Axisymmetric Response of Thin FGM Shallow Spherical Shells with Ceramic-Metal-Ceramic Layers under External Pressure and Temperature", *VNU Journal of Mathematics – physics*, vol. 29, no. 2, pp. 1-15.
3. Kowal-Michalska, K. and Mania, Radoslaw J. (2013), "Static and Dynamic Thermomechanical Buckling Load of Functionally Graded Plate", *Mechanics and Mechanical Engineering*, vol. 17, no. 1, pp. 99-112.

УДК 517.944

УМОВИ ІСНУВАННЯ 2π -ПЕРІОДИЧНОГО ГЛАДКОГО РОЗВ'ЯЗКУ КВАЗІЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

¹Хома Н. Г., к. ф.-м. н., доцент, ¹Хома–Могильська С. Г., к. ф.-м. н., доцент,
²Хохлова Л. Г., к. ф.-м. н., доцент

¹Тернопільський національний економічний університет,
вул. Львівська, 11, м. Тернопіль, 46020, Україна

²Тернопільський національний педагогічний університет ім. Володимира Гнатюка,
вул. М. Кривоноса, 2, м. Тернопіль, 46027, Україна

khoma.nadiya@gmail.com, sv_khoma@ukr.net, larysa_khokhlova@ukr.net

У роботі розглядається квазілінійне рівняння гіперболічного типу. Встановлено умови існування розв'язку крайової періодичної задачі для квазілінійного рівняння гіперболічного типу. Доведено теорему існування і єдиності 2π -періодичного гладкого розв'язку крайової задачі для квазілінійного гіперболічного рівняння другого порядку. Сформульовано теорему існування і єдиності 2π -періодичного гладкого розв'язку крайової задачі для нелінійного рівняння з малим параметром.

Ключові слова: квазілінійне рівняння, крайова задача, умови існування гладкого розв'язку, інтегральний оператор.

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ 2π -ПЕРИОДИЧЕСКОГО ГЛАДКОГО РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

¹Хома Н. Г., к. ф.-м. н., доцент, ¹Хома–Могильская С. Г., к. ф.-м. н., доцент,
²Хохлова Л. Г., к. ф.-м. н., доцент

¹Тернопольский национальный экономический университет,
ул. Львовская, 11, г. Тернополь, 46020, Украина

²Тернопольский национальный педагогический университет им. Владимира Гнатюка,
ул. М. Кривоноса, 2, г. Тернополь, 46027, Украина

khoma.nadiya@gmail.com, sv_khoma@ukr.net, larysa_khokhlova@ukr.net

В работе рассматривается квазилинейное уравнение гиперболического типа. Установлены условия существования решения краевой периодической задачи для квазилинейного уравнения гиперболического типа. Доказана теорема существования и единственности 2π -периодического гладкого решения краевой задачи для квазилинейного гиперболического уравнения второго порядка. Сформулирована теорема существования и единственности 2π -периодического гладкого решения краевой задачи для нелинейного уравнения с малым параметром.

Ключевые слова: квазилинейное уравнение, условия существования гладкого решения, граничная задача, интегральный оператор.

EXISTENCE CONDITIONS OF 2π -PERIODIC SMOOTH SOLUTION TO THE QUASI-LINEAR EQUATION OF HYPERBOLIC TYPE

¹Khoma N. H., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor,
¹Khoma-Mohylska S. H., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor,
²Khokhlova L. H., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor

¹Ternopil national economic university,
Lvivs'ka str., 11, Ternopil', 46020, Ukraine

²Ternopil Volodymyr Hnatiuk national pedagogical university,
M. Krivonos str., 2, Ternopil', 46027, Ukraine

khoma.nadiya@gmail.com, sv_khoma@ukr.net, larysa_khokhlova@ukr.net

Today the theory of differential equations in partial derivatives is developing dynamically. The hyperbolic equations are significant. The requirements to research of hyperbolic equations are due to the needs of applied nature. The hyperbolic equations describe many physical operations such as the wave processes, oscillating characteristics of radio-electronic circuits, the movement of liquids and gases in certain circumstances.

In the plan of the research given equations are difficult object. Therefore of great interest is the development of new methods for constructing analytical and approximate solutions of quasi-linear differential equations in partial derivatives and study their properties.

The aim of the investigation is to establish the existence and uniqueness conditions of smooth 2π -periodic solution of boundary-value $(u(0,t)=u(\pi,t)=0, t \in \mathbf{R})$ periodic $(u(x,t+2\pi)=u(x,t), 0 \leq x \leq \pi, t \in \mathbf{R})$ problem for quasi-linear hyperbolic second order equation $u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t]$, $0 < x < \pi, t \in \mathbf{R}$. Given operator $F[u, u_t]$ generally speaking is nonlinear and maps smooth function $u(x,t)$ in scalar function $F[u, u_t](x,t)$.

At first we specify functional spaces which are necessary for problem. Further we examine boundary-value $(u(0,t)=u(\pi,t)=0, t \in \mathbf{R})$ periodic $(u(x,t+2\pi)=u(x,t), 0 \leq x \leq \pi, t \in \mathbf{R})$ problem for linear non-homogeneous hyperbolic second order equation $u_{tt} - u_{xx} = g(x,t)$. It is known that in class

$A_2^+ = \{g : g(x,t) = -g(\pi-x,t) = -g(x,\pi-t) = g(x,-t)\}$ the corresponding homogeneous boundary-value periodic problem has unique trivial solution. The operator R_2^+ which maps class A_2^+ in A_2^+ makes it possible to construct classic solution for linear non-homogeneous boundary-value periodic problem.

Since problem for the investigation is similar with last problem, then we use operator R_2^+ for finding of its solution. Analogous with linear case we consider integral equation system. Uninterrupted solution (u, u_t, u_x) , $u \in A_2^+$, of this system is smooth solution of basic boundary-value periodic problem. Principal result is in theorem, which asserts that quasi-linear problem has unique smooth solution in class A_2^+ at certain conditions, which right part of quasi-linear hyperbolic equation must satisfy. We argue this with the help of the contraction mapping principle. The conditions of theorem guarantee the observance of all requirements of indicated principle. Therefore the basic problem has unique smooth solution in $[0, \pi] \times \mathbf{R}$.

The method of construction of smooth solution of quasi-linear problem makes it possible to investigate the conditions for the existence of smooth solution of non-linear boundary-value periodic problem with small parameter.

Key words: quasi-linear equation, boundary-value problem, existence conditions of smooth solution, integral operator.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

На сьогодні теорія диференціальних рівнянь у частинних похідних найбільш динамічно розвивається. Суттєві відмінності притаманні різним типам диференціальних рівнянь (еліптичним, параболічним, гіперболічним). Окремий тип рівнянь володіє істотно відмінними рисами в питаннях, які стосуються побудови розв'язку визначеного класу задач: задачі Коші, мішаних, крайових задач. Необхідність дослідження саме гіперболічних рівнянь зумовлена потребами прикладного характеру. Багато фізичних явищ описуються цими рівняннями, а саме, різні хвильові процеси, як однорідних, так і неоднорідних середовищ, коливні характеристики радіоелектронних контурів, рух рідин та газів у заданих умовах.

Гіперболічні рівняння є складним об'єктом дослідження, а тому значний інтерес становить розробка нових методів побудови аналітичних і наближених розв'язків квазілінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними та вивчення їх властивостей.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Аналізуючи стан розвитку теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними, можна стверджувати, що комплекс питань, пов'язаних з проблемою дослідження розв'язків цих задач, ще недостатньо вивчений. Наразі в теорії гіперболічних рівнянь особливо неоднозначно стоїть питання існування періодичних розв'язків крайових задач для квазілінійних гіперболічних рівнянь другого порядку, як з малим параметром у правих частинах, так і для загального випадку. Вказаній задачі присвячені роботи Г. Брезіса, Д. Корона, Л. Ніренберга, П. Рабиновича, І. Рудакова, О. Вейводи, М. Штедри [1-4].

У ряді робіт з диференціальних рівнянь гіперболічного типу, які опубліковані наприкінці ХХ – початку ХХІ ст., широка бібліографія яких наведена в роботах [5-6], вивчається одномірне гіперболічне рівняння, лінійна частина якого – оператор Даламбера, а нелінійність має вигляд $F[u](x,t,\varepsilon) = f(x,t,u,u_t,u_x,\varepsilon)$, де ε – малий параметр. При цьому для встановлення теорем існування розв'язку використовуються методи нелінійного функціонального аналізу, теорії неявних функцій, варіаційні методи, а також теорія монотонних операторів. У 80-х

роках започатковано новий напрямок дослідження крайових періодичних задач для гіперболічних рівнянь другого порядку. У роботах О. Вейводи, М. Штедри, Ю. Митропольського, Г. Хоми та його учнів (Я. Петрівського, Л. Хохлової, Н. Хоми, А. Ботюка та ін.) [4, 7-10], будуються інтегральні оператори і розв'язок шукається у спеціально визначених просторах неперервно диференційованих функцій для конкретних випадків періодичності.

МЕТА

У роботі розглянемо квазілінійне рівняння гіперболічного типу $u_{tt} - u_{xx} = f(x, t, u, u_t)$. Встановимо умови існування 2π -періодичного гладкого розв'язку вказаного рівняння.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ ТА ОБҐРУНТУВАННЯ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Скористаємося позначеннями:

C_π – простір функцій двох змінних x і t , неперервних і обмежених на $[0, \pi] \times \mathbf{R}$.

$C_\pi^{k,l}$ – простір функцій $u \in C_\pi$, таких, що $D_t^k D_x^l u \in C_\pi$.

G_π – простір функцій двох змінних x і t , неперервних і обмежених на $[0, \pi] \times \mathbf{R}$ разом із похідною по t .

Q_ω – простір функцій $g(x, t)$, які задовольняють на $[0, \pi] \times \mathbf{R}$ співвідношення $g(x, t + \omega) = g(x, t)$. Сюди будемо включати і ω -періодичні функції $\mu = \mu(t)$ однієї змінної.

$L(X, Y)$ – простір лінійних і обмежених відображень X в Y .

$A_2^+ = \{g : g(x, t) = -g(\pi - x, t) = -g(x, \pi - t) = g(x, -t)\}$.

Використовуючи результати, одержані в роботі [10], для лінійної неоднорідної крайової 2π -періодичної задачі, наприклад той факт, що у класі функцій A_2^+ відповідна лінійна однорідна крайова 2π -періодична задача має лише тривіальний розв'язок, ми можемо на підставі знайденого оператора R_2^+ дати відповідь на поставлену задачу. Оскільки оператор R_2^+ відображає вказаний клас функцій A_2^+ самого в себе і лінійна однорідна задача в цьому класі має єдиний тривіальний розв'язок, то найпростіше побудувати алгоритм знаходження розв'язку квазілінійної крайової періодичної задачі в цьому класі.

Розглянемо таку крайову періодичну задачу:

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}, \tag{2}$$

$$u(x, t + \omega) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Теорема 1 [10, с. 918]. *Якщо $g \in G_\pi \cap A_2^+$, то функція $u(x, t) = (R_2^+ g)(x, t)$, яка визначена формулою*

$$u(x, t) = (R_2^+ g)(x, t) \equiv (Sg)(x, t) + \frac{\pi - 2x}{4\pi} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi, \tau) d\tau, \tag{4}$$

є єдиною функцією із простору $C_\pi^{2,2} \cap A_2^+$, яка задовольняє умови крайової періодичної задачі (1)-(3) при $\omega = 2\pi$. Крім цього, $R_2^+ \in L(C_\pi \cap A_2^+, C_\pi^{1,1} \cap A_2^+)$, $R_2^+ \in L(G_\pi \cap A_2^+, C_\pi^{2,2} \cap A_2^+)$, при цьому

$$\begin{aligned} \|(R_2^+ g)(x, t)\|_{C_\pi} &\leq \frac{\pi^2}{2} \|g(x, t)\|_{C_\pi}; \\ \|(R_2^+ g)_t(x, t)\|_{C_\pi} &\leq \frac{\pi}{2} \|g(x, t)\|_{C_\pi}; \\ \|(R_2^+ g)_x(x, t)\|_{C_\pi} &\leq \pi \|g(x, t)\|_{C_\pi}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\partial e \|\varphi(x, t)\|_{C_\pi} = \sup_{(x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}} |\varphi(x, t)|.$$

Розглянемо тепер таку квазілінійну крайову періодичну задачу:

$$u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t], \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (6)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (7)$$

$$u(x, t + 2\pi) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (8)$$

Заданий тут оператор $F[u, u_t]$, загалом, нелінійний, переводить гладку ($u \in C^1([0, \pi] \times \mathbf{R})$) функцію $u(x, t)$ у скалярну функцію $F[u, u_t](x, t)$, визначену на $[0, \pi] \times \mathbf{R}$.

За аналогією з лінійним випадком розглянемо таку систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (R_2^+ F[u, u_t])(x, t) \equiv (SF[u, u_t])(x, t) + \frac{\pi - 2x}{4\pi} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} F[u, u_t](\xi, \tau) d\tau, \\ u_t(x, t) &= (R_2^+ F[u, u_t])_t(x, t) \equiv (SF[u, u_t])_t(x, t), \end{aligned} \quad (9)$$

$$u_x(x, t) = \lim_{x \rightarrow \infty} (R_2^+ F[u, u_t])_x(x, t) \equiv (SF[u, u_t])_x(x, t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} F[u, u_t](\xi, \tau) d\tau,$$

де

$$(SF[u, u_t])(x, t) = -\frac{1}{4} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} F[u, u_t](\xi, \tau) d\tau - \frac{1}{4} \int_x^\pi d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} F[u, u_t](\xi, \tau) d\tau,$$

$F[u, u_t](x, t) = f(x, t, u(x, t), u_t(x, t))$ – значення оператора F , а $f(x, t, u, u_t)$ – вираз нелінійності правої частини рівняння (6).

Означення 1. Неперервний розв'язок (u, u_t, u_x) , $u \in A_2^+$ системи інтегральних рівнянь (9) будемо називати гладким розв'язком крайової періодичної задачі (6)-(8).

Використовуючи інтегральне зображення (4) розв'язку $u(x, t) = (R_2^+ g)(x, t)$ лінійної неоднорідної крайової періодичної задачі (1)-(3) при $\omega = 2\pi$, на підставі теореми 1, переконуємося у справедливості такого твердження:

Лема 1. Нехай $g \in C_\pi \cap A_2^+$. Тоді лінійна крайова задача (1)-(3) при $\omega = 2\pi$ має єдиний гладкий розв'язок $u = R_2^+ g$, для якого справедливі оцінки (5).

Теорема 2. Нехай скалярна функція

$$F[u, u_t](x, t) = f(x, t, u(x, t), u_t(x, t))$$

задовольняє такі умови:

$$1) \quad f(x, t, u, u_t) \in C_\pi \left([0, \pi] \times \mathbf{R} \times \|u\|_{C_\pi} < \infty \times \|u_t\|_{C_\pi} < \infty \right); \quad (10)$$

$$2) \quad 0 < \|F[0, 0](x, t)\|_{C_\pi} = \Gamma < \infty; \quad (11)$$

$$3) \quad \left| F[\tilde{u}, \tilde{u}_t](x, t) - F[\tilde{u}, \tilde{u}_t](x, t) \right| \leq N_1 |\tilde{u}(x, t) - \tilde{u}(x, t)| + N_2 |\tilde{u}_t(x, t) - \tilde{u}_t(x, t)|; \quad (12)$$

$$4) \quad F[0, 0](x, t) \in A_2^+; \quad (13)$$

$$5) \quad \text{для всіх } u(x, t) \in A_2^+ \cap C_\pi^{1,1} \quad F[u, u_t](x, t) \in A_2^+ \cap C_\pi. \quad (14)$$

Тоді при виконанні умови

$$\frac{\pi^2}{2} N_1 + \frac{\pi}{2} N_2 < \frac{1}{2} \quad (15)$$

задача (6)-(8) має єдиний гладкий ($u \in C_\pi^{1,1} \cap A_2^+$) розв'язок.

Доведення. Означимо нульове наближення за такою формулою:

$$u_0(x, t) = (R_2^+ F[0, 0])(x, t) \equiv (SF[0, 0])(x, t) + \frac{\pi - 2x}{4\pi} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} F[0, 0](\xi, \tau) d\tau. \quad (16)$$

Використовуючи оцінки (5), (11), (13) на підставі властивостей лінійного оператора (16), маємо, що $u_0(x, t) \in A_2^+ \cap C_\pi^{1,1}([0, \pi] \times \mathbf{R})$ і

$$\|u_0(x, t)\| \leq \frac{\Gamma \pi^2}{2} = K_1; \quad \frac{\pi}{2} \|u_{0,t}(x, t)\| \leq K_1.$$

Візьмемо число M таке, що $M > 2K_1$.

У банаховому просторі функцій $D = \left\{ u \in A_2^+ \cap C_\pi^{1,1}([0, \pi] \times \mathbf{R}) : \|u\|_{C_\pi^{1,1}} \leq M \right\}$ з нормою $\|u\|_{C_\pi^{1,1}} = \max \left\{ \|u\|_{C_\pi}, \pi \|u_t\|_{C_\pi} \right\}$ розглянемо оператор R_2^+ , що визначається за допомогою правої частини першого інтегрального рівняння системи (9):

$$\left(R_2^+ F[u, u_t] \right)(x, t) = (SF[u, u_t])(x, t) + \frac{\pi - 2x}{4\pi} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} F[u, u_t](\xi, \tau) d\tau. \quad (17)$$

На підставі (10), (14) одержимо

$$\left(R_2^+ F[u, u_t] \right)(x, t) \in A_2^+ \cap C_\pi^{1,1}([0, \pi] \times \mathbf{R}).$$

Тепер для довільного $u(x, t) \in D$ будемо мати:

$$\begin{aligned} \left(R_2^+ F[u, u_t] \right)(x, t) &= u_0(x, t) + \left(S(F[u, u_t] - F[0, 0]) \right)(x, t) + \\ &+ \frac{\pi - 2x}{4\pi} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} (F[u, u_t] - F[0, 0])(\xi, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Звідси, враховуючи (9), (12), знаходимо:

$$\begin{aligned} |(R_2^+ F[u, u_t])(x, t)| &\leq |u_0(x, t)| + \frac{\pi^2}{2} (N_1 \|u\|_{C_\pi} + N_2 \|u_t\|_{C_\pi}), \\ |(R_2^+ F[u, u_t])_t(x, t)| &\leq |u_{0t}(x, t)| + \frac{\pi}{2} (N_1 \|u\|_{C_\pi} + N_2 \|u_t\|_{C_\pi}). \end{aligned}$$

Якщо останню нерівність помножити на π , а $\left(N_2 \frac{\pi^2}{2}\right) \|u_t\|_{C_\pi}$ переписати у вигляді $\left(N_2 \frac{\pi}{2}\right) (\pi \|u_t\|_{C_\pi})$, то ми одержуємо:

$$\|(R_2^+ F[u, u_t])(x, t)\|_{C_\pi^{1,1}} \leq K_1 + \left(\frac{\pi^2}{2} N_1 + \frac{\pi}{2} N_2\right) \|u\|_{C_\pi^{1,1}} \leq K_1 + \left(\frac{\pi^2}{2} N_1 + \frac{\pi}{2} N_2\right) M. \quad (18)$$

Якщо вибрати константи Ліпшиця N_1, N_2 такими, щоб виконувалася умова (15) теореми 2, то з нерівності (18), беручи до уваги, що $K_1 < M/2$, знаходимо

$$\|(R_2^+ F[u, u_t])(x, t)\|_{C_\pi^{1,1}} \leq K_1 + M/2 < M.$$

Отже, при вибраних N_1, N_2 , що задовольняють нерівність (15), отримуємо, що коли $u(x, t) \in D$, то $(R_2^+ F[u, u_t])(x, t) \in D$.

Уведемо для функцій $u(x, t)$ і $z(x, t)$ відстань $\rho(u, z)$, покладаючи

$$\rho(u, z) = \|u(x, t) - z(x, t)\|_{C_\pi^{1,1}}.$$

Тоді D буде метричним простором, до того ж, цей простір повний.

Тепер переконаємося, що при виконанні умови (15) відображення $R_2^+ F[u, u_t]$ буде стисненим. Справді, якщо $u(x, t) \in D$ і $z(x, t) \in D$, то з формули (17) і формули

$$(R_2^+ F[z, z_t])(x, t) = (SF[z, z_t])(x, t) + \frac{\pi - 2x}{4\pi} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} F[z, z_t](\xi, \tau) d\tau,$$

використовуючи умову Ліпшиця (12), отримаємо:

$$\begin{aligned} |(R_2^+ F[u, u_t])(x, t) - (R_2^+ F[z, z_t])(x, t)| &\leq \frac{\pi^2}{2} (N_1 \|u - z\|_{C_\pi} + N_2 \|u_t - z_t\|_{C_\pi}), \\ \pi |(R_2^+ F[u, u_t])_t(x, t) - (R_2^+ F[z, z_t])_t(x, t)| &\leq \frac{\pi^2}{2} (N_1 \|u - z\|_{C_\pi} + N_2 \|u_t - z_t\|_{C_\pi}). \end{aligned}$$

Звідси маємо

$$\rho(R_2^+ F[u, u_t], R_2^+ F[z, z_t]) \leq \left(\frac{\pi^2}{2} N_1 + \frac{\pi}{2} N_2\right) \rho(u, z) \equiv \alpha \rho(u, z), \quad \text{де } 0 < \alpha < \frac{1}{2}.$$

Отже, виконуються всі умови принципу стиснених відображень. Це означає, що існує єдиний неперервний обмежений на $[0, \pi] \times \mathbf{R}$ розв'язок $(u(x, t), u_t(x, t))$ системи інтегральних рівнянь (9), а отже, і гладкий розв'язок $(u \in A_2^+ \cap C^{1,1}([0, \pi] \times \mathbf{R}))$ крайової періодичної задачі вигляду (6)-(8), до того ж

$$\|u(x, t)\|_{C_x^{1,1}} \leq M.$$

Теорему 2 доведено.

Зауваження. Умову (15) можна послабити, якщо доведення теореми 2 проводити на підставі теореми 0.1 [11, с. 475]. Більш того, для нелінійної задачі з малим параметром вигляду

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon F[u, u_t], \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (19)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (20)$$

$$u(x, t + 2\pi) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (21)$$

справедливе твердження.

Теорема 3. Нехай виконуються умови 1)-5) теореми 2. Тоді при достатньо малому параметрі ε ($0 < \varepsilon < \varepsilon_0$), задача (19)-(21) має єдиний гладкий розв'язок $(u(x, t) \in A_2^+ \cap C_\pi^{1,1}([0, \pi] \times \mathbf{R}))$.

ВИСНОВКИ

На основі принципу стиснених відображень у роботі встановлено умови існування розв'язку квазілінійного рівняння гіперболічного типу. Доведено теорему існування і єдиності 2π -періодичного гладкого розв'язку вказаного рівняння. Для рівнянь з малим параметром проведено уточнення даних умов.

ЛІТЕРАТУРА

1. Brezis H. Free vibrations for a nonlinear wave equations and a theorem of P. Rabinowitz / H. Brezis, J. M. Coron, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math. – 1980. – Vol. **33**. – P. 667-689.
2. Rabinowitz P. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations / P. Rabinowitz // Comm. Pure Appl. Math. – 1967. – **20**, № 1. – P. 145-205.
3. Рудаков И. А. Нелинейные колебания струны / И. А. Рудаков // Вестник Моск. ун-та. – Сер. 1. Математика и механика. – 1984. – № 2. – С. 9-13.
4. Вейвода О. Существование классических периодических решений волнового уравнения. Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений / О. Вейвода, М. Штедры // Дифференциальные уравнения. – 1984. – **XX**, № 10. – С. 1733-1739.
5. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / Б. И. Пташник. – К. : Наукова думка, 1984. – 264 с.
6. Пташник Б. Й. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / Б. Й. Пташник, В. С. Ільків, І. Я. Кміть, В. М. Поліщук. – К. : Наукова думка, 2002. – 416 с.
7. Митропольский Ю. А. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа / Ю. А. Митропольский, Г. П. Хома, М. И. Громяк. – К. : Наук. думка, 1991. – 232 с.
8. Хохлова Л. Г. Тривіальні розв'язки однорідної крайової періодичної задачі / Л. Г. Хохлова, Н. Г. Хома, Я. Б. Петрівський // Волинський матем. вісник. – 1995. – Вип. 2. – С. 179-182.
9. Самойленко А. М. Властивості 2π -періодичних розв'язків крайової задачі / А. М. Самойленко, Н. Г. Хома, С. Г. Хома-Могильська // Доповіді НАН України. – 2010. – № 10. – С. 27-32.
10. Митропольский Ю. О. Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку / Ю. О. Митропольский, С. Г. Хома-Могильська // Укр. Мат. журн. – 2005. – **57**, № 7. – С. 912-921.
11. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М. : Мир, 1970. – 720 с.

REFERENCES

1. Brezis, H., Coron, J.M. and Nirenberg, L. (1980), "Free vibrations for a nonlinear wave equations and a theorem of P. Rabinowitz", *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. **33**, pp. 667-689.
2. Rabinowitz, P. (1967), "Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations", *Comm. Pure Appl. Math.*, **20**, no. 1, pp. 145-205.
3. Rudakov, I.A. (1984), "Nonlinear vibration of a string", *Vestnik Mosk. un-ta, Ser. 1. Matematika i mekhanika*, no. 2, pp. 9-13.
4. Veyvoda, O. and Shtedry, M. (1984), "The existence of periodic solutions of the classical wave equation. Contact number-theoretic nature of the period and the geometric properties of solutions", *Differentsialnyye uravneniya*, **XX**, no. 10, pp. 1733-1739.
5. Ptashnik, B.I. (1984), *Nekorrektnyye granichnyye zadachi dlya differentsialnykh uravneniy z chastnymi proizvodnymi* [Ill-posed boundary value problems for differential equations with partial derivatives], Naukova dumka, Kiev.
6. Ptashnyk, B.Y., Ilkiv, V.S., Kmit, I.Ya. and Polishchuk, V.M. (2002), *Nelokalni kraiovi zadachi dlia rivnian iz chastynnyy pokhidnyy* [Nonlocal boundary value problems for partial differential equations], Naukova dumka, Kiyv.
7. Mitropolskiy, Yu.A., Khoma, G.P. and Gromyak, M.I. (1991), *Asimptoticheskiye metody issledovaniya kvazivolnovykh uravneniy giperbolicheskogo tipa* [Asymptotic methods of investigation of quasi-wave equations of hyperbolic type], Nauk. dumka, Kiev.
8. Khokhlova, L.H., Khoma, N.H. and Petrivskiy, Ya.B. (1995), "Trivial solutions homogeneous boundary periodic problem", *Volynskiy matem. visnyk*, issue 2, pp. 179-182.
9. Samoilenko, A.M., Khoma, N.H. and Khoma-Mohylska, S.H. (2010), "Properties 2π -periodic solutions of the boundary problem", *Dopovidi NAN Ukrainy*, no. 10, pp. 27-32.
10. Mytropolskiy, Yu.O. and Khoma-Mohylska, S.H. (2005), "Existence conditions of boundary periodic problem for linear inhomogeneous hyperbolic equations of second order. I", *Ukr. Mat. zhurn.*, **57**, no. 7, pp. 912-921.
11. Khartman, F. (1970), *Obyknovennyye differentsyalnyye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Mir, Moscow.

УДК 539.374

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ НА ПЛОЩАДКЕ ТЕКУЧЕСТИ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Черняков Ю. А., д. ф.-м. н., профессор, Шевченко А. Г., аспирант

*Днепропетровский национальный университет им. Олесь Гончара,
просп. Гагарина, 72, г. Днепропетровск, 49000, Украина*

artur_shev91@mail.ru, yu.chernyakov@gmail.com

Исследуется вопрос о локализации пластической деформации в форме образования шейки для материалов с площадкой текучести в условиях плоского напряженного состояния. Установлено, что длина шейки может быть конечной и определяется в зависимости от действующего в теле максимального напряжения, а также, верхнего и нижнего пределов текучести, которые характерны для диаграмм одноосного нагружения материала с площадкой текучести при жестком нагружении.

Ключевые слова: локализация пластической деформации, плоское напряженное состояние, шейкообразование, разрыв перемещений, дислокации, полосы Людерса-Чернова.

ЛОКАЛІЗАЦІЯ ПЛАСТИЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ НА ПЛОЩАДЦІ ТЕКУЧОСТІ В УМОВАХ ПЛОСКОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

Черняков Ю. А., д. ф.-м. н., професор, Шевченко А. Г., аспірант

*Дніпропетровський національний університет ім. Олеса Гончара,
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49000, Україна*

artur_shev91@mail.ru, yu.chernyakov@gmail.com

Досліджується питання про локалізацію пластичної деформації у формі утворення шийки для матеріалів з площадкою текучості в умовах плоского напруженого стану. Встановлено, що довжина шийки може бути кінцевою і визначається залежно від діючого в тілі максимального напруження, а також, верхньої і нижньої меж текучості, які характерні для діаграм одноосного навантаження матеріалу з площадкою текучості при жорсткому навантаженні.

Ключові слова: локалізація пластичної деформації, плоский напружений стан, шийкоутворення, розрив переміщень, дислокації, смуги Людерса-Чернова.

LOCALIZATION OF PLASTIC DEFORMATION ON YIELD PLATFORM IN PLANE STRESS CONDITIONS

Chernyakov Y. A., D.Sc. in Physics and Maths, Professor, Shevchenko A. G., Graduate Student

*Oles Honchar Dnepropetrovsk national university,
Gagarina av., 72, Dnepropetrovsk, 49000, Ukraine*

artur_shev91@mail.ru, yu.chernyakov@gmail.com

The problem of localization of plastic deformation in the form of a shear band has been well studied for plane strain cases and for plane stress. In [1] was shown that the localization band can have a limited length. In [2] is noted that angle-Chernoff Lüders lines is significantly different from the angle that can be observed in "compact" form samples for tensile test specimens of wide flat metal having a well-defined yield point. Such localization associated with formation of a neck, which leads to thinning of the plate in a direction parallel to the smallest dimension of the cross section

In this article investigates the possibility localization limited length neck in the infinite plate under tensile load. It is differs from the case of plane strain described previously in [1]. With the plane stress should be allowed the opportunity to jump not only in shear, but also in the normal displacement component.

Plate material during hard loading (with deformation control) will be characterized by a diagram with a "peak-tooth" (OABCE curve) as shown in Fig.1. The stresses corresponding to points A and B will be called the upper and lower yield points, respectively.

The occurrence of the initial localization region, in the interpretation adopted here, is considered as a loss of stability "in the large" of the body under homogeneous strain conditions in the form of the formation localized plastic yielding band (like clap effect in the shell). When the lower yield stress plate can be in two states of equilibrium - in homogeneous elastic or elastic strip with localized plastic deformation, as shown in Fig. 1.

The occurrence of the initial localization is considered as a loss of stability "in the large" of homogeneous deformation of the body in the form of the localized plastic yield neck. When it has reached the lower yield stress the plate can be in two states of equilibrium - in homogeneous elastic or in elastic with localized plastic deformation, as shown in Fig. 2.

To solve this problem one can use the method of discontinuous gaps according to which localization of the neck can be represented as a set of dislocations with the corresponding Burgers vector [5]. The problem is reduced to two singular equations with the Cauchy kernel on a limited interval. Their solution exists under the condition of limited integrand. For the formulation an additional condition that will determine the length of localization area, notice that the deformation in the band should be limited to the value related to the length of yield area BC, since the above solution is valid only before the strain hardening reached area at point C.

These results demonstrates that for plates with clearly defined peak-tooth on the material diagram under uniaxial tensile conditions localized necking region has a finite length. Introducing the conditional band thickness which has the order of the grain size of the polycrystalline material, one can found the dependence of the neck length from the upper and lower yield point and current load.

Keywords: localization of plastic deformation, necking, dislocations, Luders-Chernof's bands.

ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о локализации пластической деформации в форме сдвига хорошо изучен как для случаев плоской деформации, так и для плоского напряженного состояния. В работе [1] было

показано, что полоса локализации может иметь ограниченную длину. В работе [2] отмечается, что при испытаниях на растяжение широких плоских образцов из металлов, имеющих хорошо выраженный предел текучести, угол наклона линий Людерса-Чернова значительно отличается от угла, который можно наблюдать на образцах «компактной» формы. Такую локализацию связывают с образованием шейки, то есть с утоньшением пластинки в направлении, параллельном наименьшему размеру сечения.

В настоящей работе анализируется возможность образования шейки ограниченной длины в бесконечной растянутой пластине.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим бесконечную пластинку, находящуюся в условиях однородного плоского напряженного состояния. Пластинка подвержена одноосному растяжению. Материал пластинки при жестком нагружении (с контролем деформации) будем характеризовать диаграммой $\sigma_u \sim \varepsilon_u$ с «пиком-зубом» (кривая OABCE), показанной на рис. 1. Напряжения, отвечающие точкам А и В, будем называть верхним σ_u^{up} и нижним σ_u^{low} пределами текучести, соответственно.

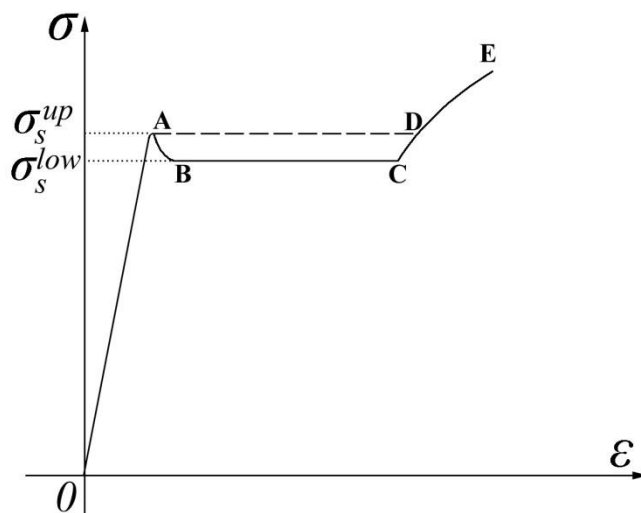


Рис. 1. Диаграмма материала

Возникновение начальной области локализации, в принятой здесь трактовке, рассматривается как потеря устойчивости «в большой» однородной деформации тела в форме образования локализованной полосы пластического течения (подобно эффекту хлопка в оболочке).

При достижении нижнего предела текучести σ_u^{low} пластинка может находиться в двух состояниях равновесия – в упругом однородном или в упругом с локализованной полосой пластической деформации, как показано на рис. 1.

Свяжем пластинку с декартовой системой координат Oxy и будем считать известными компоненты тензора напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} .

Рассмотрим некоторую линию разрыва перемещений L . В отличие от случая плоской деформации, рассмотренного ранее в работе [1], при плоском напряженном состоянии следует допустить возможность скачка не только в сдвиговой, но и в нормальной составляющей перемещений. Подобный скачок приводит к резкому утоньшению («шейка») или утолщению («валик») пластинки вдоль линии разрыва. Такая линия является математической идеализацией наблюдаемого в опытах локального образования шейки.

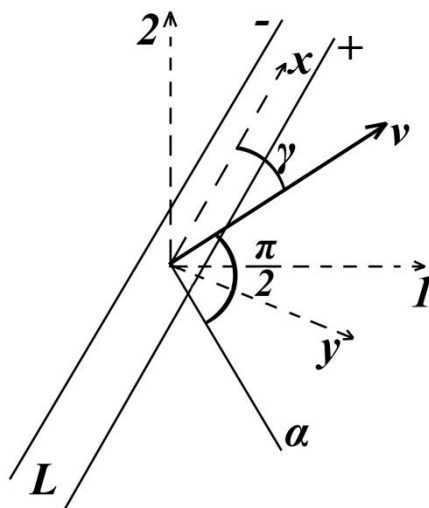


Рис. 2. Линия образования шейки в пластинке

Ориентация линии, вдоль которой имеет место скачок перемещений, связана определенными условиями с напряженным состоянием и в соответствии с [2] можем записать: $\sigma_2 = 0$, $\gamma = \arcsin \frac{1}{3} = 19^\circ 28'$, а $\psi = 54^\circ 44'$.

В пределах полосы разрыва перемещений действуют касательные и нормальные напряжения. Учитывая диаграмму $\sigma_s \sim \varepsilon_s$ (рис. 1), можно допустить, что на берегах полосы локализации на участке $|x| \leq l$ действуют нормальные и касательные напряжения $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = \sigma_{low}$ и $\tau_{xy} = \tau_{low}$, а на участках $l \leq |x| \leq b$ значения σ_s^{low} , τ_s^{low} могут изменяться до σ_s^{up} , τ_s^{up} и напряжения $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = \sigma_{up}$ и $\tau_{xy} = \tau_{up}$, удовлетворяющие условиям текучести Губера-Мизеса:

$$\sqrt{\sigma_{low}^2 + 3\tau_{low}^2} = \sigma_s^{low}, \quad \sqrt{\sigma_{up}^2 + 3\tau_{up}^2} = \sigma_s^{up}.$$

В дальнейшем примем

$$\frac{\sigma_{up}}{\sigma_{low}} = \frac{\tau_{up}}{\tau_{low}} = \frac{\sigma_s^{up}}{\sigma_s^{low}} = \alpha.$$

Рассмотрим кусочно-постоянную схему нагружения берегов полосы (рис. 3). Такая схема нагружения берегов полосы напоминает модель Леонова-Панасюка [3] и Дагдейла [4], но с тем существенным отличием, что напряжения в пределах полосы не равны нулю.

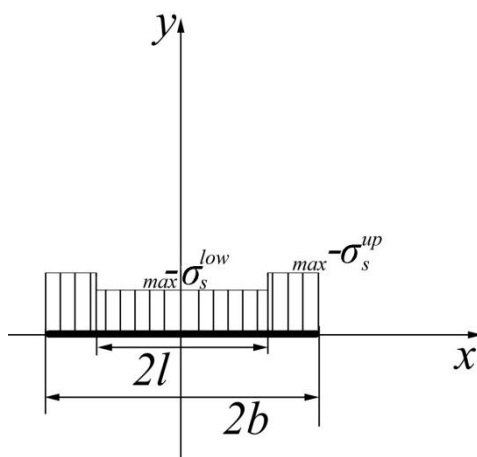


Рис. 3

Требуется определить длины l и b , определяющие размеры полосы разрыва.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для решения задачи воспользуемся методом разрывных смещений, по которому локализацию в виде шейки представим в виде некоторой совокупности дислокаций, с соответствующим вектором Бюргерса b_0 .

Известно [5], что разрыв смещений в начале координат, в пределах малого отрезка $d\xi$ в точке $(\xi, 0)$, вызывает напряжения в упругой пластинке в точке $(x, 0)$, которые могут быть представлены следующим образом:

$$d\sigma_y = \frac{Af_\sigma(\xi)}{\xi - x} d\xi, \quad d\tau_{xy} = \frac{Af_\tau(\xi)}{\xi - x} d\xi,$$

где $A = 3\mu b_0 / (4\pi)$, μ – упругий модуль сдвига.

На основании этих формул можем записать:

$$\int_{-b}^b \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi = \frac{\sigma(x)}{A}, \quad \int_{-b}^b \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi = \frac{\tau(x)}{A}, \quad (1)$$

где:

$$\tau(x) = \begin{cases} -\tau_1 \equiv \tau_{xy}^\infty - \tau_{up}, & l < |x| < b, \\ \tau_0 \equiv \tau_{xy}^\infty - \tau_{low}, & 0 < |x| < l, \end{cases} \quad \sigma(x) = \begin{cases} -\sigma_1 \equiv \sigma_y^\infty - \sigma_{up}, & l < |x| < b, \\ \sigma_0 \equiv \sigma_y^\infty - \sigma_{low}, & 0 < |x| < l. \end{cases}$$

Уравнения(1) являются сингулярными уравнениями первого рода с ядром Коши на ограниченном отрезке. Решение их существует при условии ограниченности функции $f(\xi)$:

$$\int_{-b}^b \frac{\tau(\xi)}{\sqrt{b^2 - \xi^2}} d\xi = 0, \quad \int_{-b}^b \frac{\sigma(\xi)}{\sqrt{b^2 - \xi^2}} d\xi = 0. \quad (2)$$

Известно [5], что функция распределения разрывов смещений имеет вид:

$$\begin{cases} \delta_\tau(x) = \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{A} \int_{-b}^b \frac{\tau(\xi)}{(\xi - x)\sqrt{b^2 - \xi^2}} d\xi, \\ \delta_\sigma(x) = \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{A} \int_{-b}^b \frac{\sigma(\xi)}{(\xi - x)\sqrt{b^2 - \xi^2}} d\xi. \end{cases} \quad (3)$$

После подстановки в уравнения (2) распределений напряжений $\sigma(x)$, $\tau(x)$, получаем уравнения для определения α , β при заданном относительном размере $\theta = b/l$:

$$\pi(\beta - \alpha) + 2(\alpha - 1)\arccos\left(\frac{1}{\theta}\right) = 0,$$

где обозначено:

$$\beta = \tau_{xy}^\infty / \tau_s^{up} = \sigma_y^\infty / \sigma_s^{up}.$$

Запишем условия интенсивности напряжений:

$$\sigma_u^{low} = \sqrt{\sigma_s^{low} + 3\tau_s^{low}}, \quad \sigma_u^{up} = \sqrt{\sigma_s^{up} + 3\tau_s^{up}}.$$

При этом:

$$\sigma_y^\infty = \frac{\sigma_{11}^\infty}{2}(1 + \cos 2\beta), \quad \tau_{xy}^\infty = \frac{\sigma_{11}^\infty}{2} \sin 2\beta.$$

С учетом принятых обозначений получаем:

$$\frac{l}{b} = \cos \left(\frac{\pi \left(\beta \cos(\beta) \sqrt{\cos^2(\beta) + 3\sin^2(\beta)} - \alpha \right)}{2(1-\alpha)} \right).$$

Для формулировки дополнительного условия, которое позволит определить длину локализованной области, заметим, что деформация в полосе должна быть ограничена значением, связанным с длиной площадки текучести BC , т.к. приведенное выше решение допустимо только до достижения деформацией участка упрочнения в точке C .

Максимальный разрыв перемещений будет достигаться в средней точке линии разрыва и определится по формуле:

$$\delta = \sqrt{\delta_\tau^2 + \delta_\sigma^2}, \quad \delta_\tau = b_0 \int_b^0 \delta_\tau(\xi) d\xi, \quad \delta_\sigma = b_0 \int_b^0 \delta_\sigma(\xi) d\xi. \quad (4)$$

Если учесть построенные выше решения (3) для функций распределения дислокаций, то для безразмерного разрыва перемещений $\bar{\delta} = \delta/b$ получим:

$$\begin{cases} \bar{\delta}_\tau = \frac{8\gamma_s}{3\pi}(1-\alpha) \frac{\ln(\theta + \sqrt{\theta^2 - 1})}{\theta}, \\ \bar{\delta}_\sigma = \frac{8\varepsilon_s}{\pi}(1-\alpha) \frac{\ln(\theta + \sqrt{\theta^2 - 1})}{\theta}. \end{cases}$$

Таким образом можно записать:

$$\bar{\delta} = \sqrt{\bar{\delta}_\tau^2 + \bar{\delta}_\sigma^2} = \frac{16(1-\alpha)}{3\pi} \frac{\ln(\theta + \sqrt{\theta^2 - 1})}{\theta} \gamma_s.$$

Здесь γ_s – предел текучести по деформациям.

На рис. 4 представлены зависимости величины безразмерного разрыва перемещений $\bar{\delta}/\gamma_s$ от параметра нагрузки β для некоторых фиксированных значений параметра α , характеризующего различие верхнего и нижнего пределов текучести. Из приведенных графиков следует, что для каждого α существует два различных значения β для одного и того же отношения $\bar{\delta}/\gamma_s$. Кроме того, кривые, отвечающие фиксированному значению $\bar{\delta}$, имеют явно выраженный максимум. Это означает, что для каждого α можно найти максимальное отношение $\bar{\delta}/\gamma_s$, которое определит минимальную длину полосы локализации.

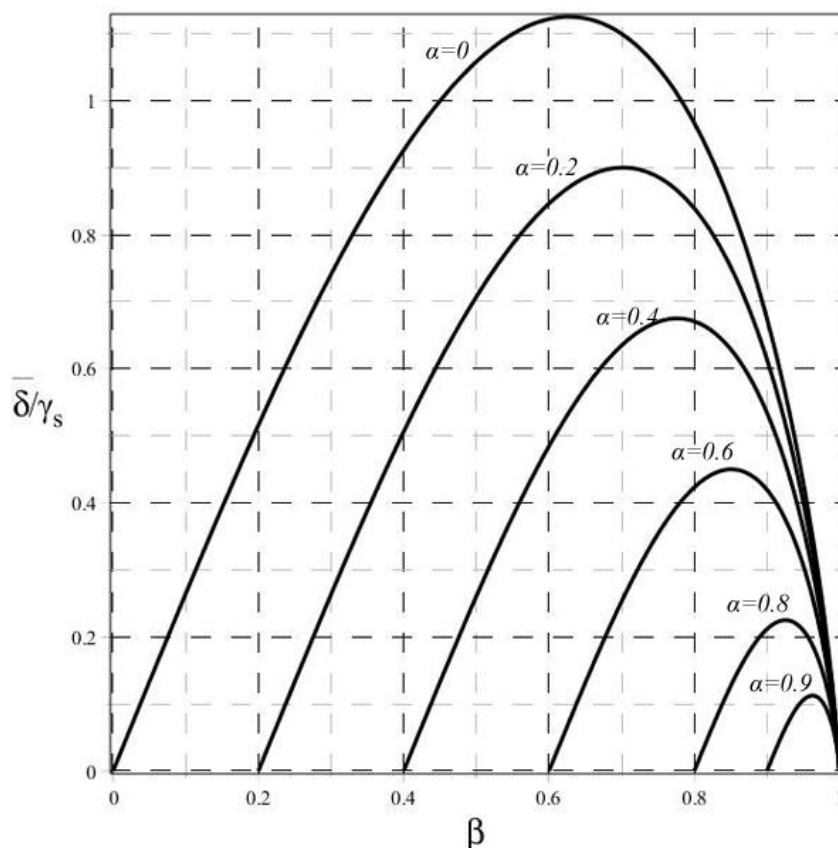


Рис. 4. Графики зависимости $\bar{\delta}/\gamma_s$ от параметра β для различных значений α для несжимаемого материала. Дадим количественную оценку минимальной длины полосы локализации. Для этого представим δ в следующем виде:

$$\delta = h\varepsilon_c, \quad (5)$$

где h – условная толщина полосы, $\varepsilon_c = \gamma_c/\sqrt{3}$ – деформация сдвига на площадке текучести (деформация Людерса). В таком случае длина линии разрыва будет определяться по формуле:

$$b = \frac{\gamma_c h}{\sqrt{3}\gamma_s \bar{\delta}(\beta)}.$$

По данным для стали 1045, приведенным в работе [6], имеем $\gamma_c = 1.5 \times 10^{-2}$, $\gamma_s = 2.5 \times 10^{-3}$. Сложнее обстоит дело с величиной h . Для ее определения будем исходить из того, что характерная ширина полосы локализации материала определяется средним размером зерна поликристаллического материала, поскольку размер зерна оказывает большое влияние на деформацию Людерса и морфологию полос, особенно для малоуглеродистых сталей [7] и [8]. В соответствии с данными, приведенными в статье [6], средний размер зерна стали 1045 порядка 10 мкм. Исходя из изложенного, принимаем $h \approx 10$ мкм. Тогда отношение $\bar{\delta}/\gamma_s$, к примеру, для $\alpha = 0$, будет порядка 1.125 и получаем длину полосы b порядка 53 мкм.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные результаты показывают, что для пластин с явно выраженным пик-зубом на диаграмме материала при одноосном растяжении область локализации шейки имеет конечную длину. С введением условной толщины полосы, порядка размера зерна

поликристаллического материала, получена зависимость длины шейки от соотношения верхнего и нижнего предела текучести и действующей нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черняков Ю. А. Локализация пластической деформации в форме ограниченной полосы разрыва перемещений / Ю. А. Черняков, А. Г. Шевченко // Доповіді Національної академії наук України. – 2013. – № 11. – С. 61-66.
2. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надаи. – М. : Издательство иностранной литературы, 1954. – 647 с.
3. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В. В. Панасюк. – К. : Наукова думка, 1968. – 246 с.
4. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits / D. S. Dugdale // J. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – 8. – P. 100-104.
5. Сиратори М. Вычислительная механика разрушения / М. Сиратори, Т. Миёси, Х. Мацусита. – М. : Мир, 1986. – 334 с.
6. Zhang J. Lüders bands propagation of 1045 steel under multiaxial stress state / J. Zhang, Y. Jiang // International Journal of Plasticity 21. – 2005. – P. 651-670.
7. Hall E. O. The deformation and aging of mild steel: II. Characteristics of the Lüders deformation. III. Discussion of results / E. O. Hall // Proc. Phys. Soc. – 1961. – B 64. – P. 742-753.
8. Morrison W. B. Examination of the Lüders front in a low-carbon steel by transmission electron microscopy / W. B. Morrison, R. C. Glenn // J. Iron Steel Inst. – 1968. – 206. – P. 611-612.

REFERENCE

1. Chernyakov, Yu.A. and Shevchenko, A.G. (2013), “The localization of plastic deformation in the form of a limited displacement gap band”, *Dopovidi Natsional'noyi akademiyi nauk Ukrayiny*, no. 11, pp. 61-66.
2. Nadai, A. (1954), *Plastichnost i razrushenie tverdykh tel* [Plasticity and fracture of solids], Izdatel'stvo inostrannoy literatury, Moskow.
3. Panasyuk, V.V. (1968), *Predel'noye ravnovesiye khrupkikh tel s treshchinami* [Limit equilibrium of brittle bodies with cracks], Naukova dumka, Kiev.
4. Dugdale, D.S. (1960), “Yielding of steel sheets containing slits”, *J. Mech. and Phys. Solids*, 8, pp. 100-104.
5. Siratori, M., Miyosi, T. and Matsusita, Kh. (1986), *Vychislitelnaia mekhanika razrusheniia* [Computational fracture mechanics], Mir, Moskow.
6. Zhang, J. and Jiang, Y. (2005), “Lüders bands propagation of 1045 steel under multiaxial stress state”, *International Journal of Plasticity* 21, pp. 651-670.
7. Hall, E.O. (1961), “The deformation and aging of mild steel: II. Characteristics of the Lüders deformation. III. Discussion of results”, *Proc. Phys. Soc.*, B 64, pp.742-753.
8. Morrison, W.B. and Glenn, R.C. (1968), “Examination of the Lüders front in a low-carbon steel by transmission electron microscopy”, *J. Iron Steel Inst.*, 206, pp. 611-612.

УДК 004.942: 519.6

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ: СТРУКТУРИРОВАННЫЕ И БЛОЧНО-СТРУКТУРИРОВАННЫЕ СЕТКИ

Чопоров С. В., к. т. н., доцент, Гоменюк С. И., д. т. н., профессор, Алатамнех Х. Х., аспирант,
Оспищев К. С., аспирант

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, Запорожье, 69600, Украина*

s.choporoff@znu.edu.ua

В статье проведен обзор актуальных подходов и методов построения структурированных и блочно-структурированных дискретных моделей. В частности, выполнен анализ методов на основе алгебраических преобразований и методов на основе дифференциальных уравнений. Также рассмотрены методы построения блочно-структурированных моделей.

Ключевые слова: дискретная модель, сетка, конечный элемент, структурированная сетка, блочно-структурированная сетка.

МЕТОДИ ПОБУДОВИ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ: СТРУКТУРОВАНИ ТА БЛОЧНО-СТРУКТУРОВАНИ СІТКИ

Чопоров С. В., к. т. н., доцент, Гоменюк С. И., д. т. н., профессор, Алатамнех Х. Х., аспирант,
Оспищев К. С., аспирант

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, 69600, Україна*

s.choporoff@znu.edu.ua

У статті проведено огляд актуальних підходів і методів побудови структурованих і блочно-структурованих дискретних моделей. Зокрема, виконано аналіз методів на основі алгебраїчних перетворень і методів на основі диференціальних рівнянь. Також розглянуто методи побудови блочно-структурованих дискретних моделей.

Ключові слова: дискретна модель, сітка, скінченний елемент, структурована сітка, блочно-структурована сітка.

DISCRETE MODELS GENERATION METHODS: STRUCTURED AND BLOCK-STRUCTURED GRIDS

Choporov S. V., PhD in Engineering, Gonenyuk S.I., DSc in Engineering, Alathamneh H. K.,
postgraduate, Ospishchev K.S., postgraduate

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, Ukraine, 69600*

s.choporoff@znu.edu.au

Numerical simulations are now widely employed in various engineering fields. A lot of numerical simulations uses models based on partial differential equations (PDE). In the most frequently used numerical methods (e.g. the finite element method), a continuous problem is replaced by a discrete model. The discrete model approximates solution of the initial partial differential equations. Thus the first step of a discrete simulation involves mesh generation techniques.

A mesh (aka grid) is a set of points distributed over a calculation field. A mesh is a replacement of a continuous region by a finite union of simple element such as triangles, quads, tetrahedrons, hexahedrals, etc. The mesh can be structured or unstructured. In the first case points neighborhood is similar to the neighborhood of elements in a matrix. In the second case points arbitrary connected into edges. In structured meshes edges are related to coordinate directions a curvilinear coordinate system. In contrast, unstructured meshes are usually formed with no relation to coordinate directions. Structured grids usually consist of quadrilaterals or hexahedrals (topological cubes). Unstructured meshes also use triangles and tetrahedrons.

Structured grids are usually formed using an algebraic grid generation or a PDE-based grid generation. The first one is a transformation from a rectangular computational domain into an arbitrary shaped

physical domain. It widely uses transfinite interpolation. Transfinite interpolation is an interpolation procedure that generates conformed to specified boundaries grids. Linear, Lagrangian and Hermit blending functions are used to interpolate in the coordinate directions. Grid spacing can be controlled using an intermediate control domain between the computational domain and the physical domain. An algebraic grid generation is easily programmed and computationally effective.

A PDE-based grid generation uses partial differential equations to obtain correspondence between a computational domain and a physical domain. Grids are computed by solving the system of partial differential equations. PDE-based methods can be classified into three types: elliptic, parabolic and hyperbolic. The most widely used is elliptic second order partial differential equations are so-called Poisson systems.

This article is a review of automatic grid generation approaches. Particularly, the review includes following approaches: an algebraic grid generation, an elliptic generation and a hyperbolic generation.

The approaches to block-structured grid generation are described also.

Key words: discrete model, mesh, grid, structured, block-structured.

ВВЕДЕНИЕ

Современное проектирование активно применяет методы математического моделирования для исследования свойств разрабатываемого объекта. Многие математические модели, используемые в проектировании, основаны на решении систем дифференциальных уравнений в частных производных. При этом в наиболее распространенных численных методах (например, методе конечных элементов) непрерывная модель заменяется ее дискретным аналогом. Дискретная модель аппроксимирует решение исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных. Соответственно, на первом шаге такого моделирования задействуются методы построения дискретных моделей.

Дискретная модель геометрического объекта (или сетка) – это множество точек, распределенных в исследуемой области, и связей между ними. По сути, дискретная модель геометрического объекта – это замена исходной непрерывной области конечным объединением простейших фигур: треугольников, четырехугольников, тетраэдров, шестигранников и т. п. По размерности пространства дискретные модели делятся на одномерные, двумерные и трехмерные. Также дискретные модели бывают структурированными и неструктурированными (рис. 1). В первом случае соседство между точками аналогично соседству элементов в матрице, во втором – ребра могут произвольным образом соединять узлы. В структурированных дискретных моделях ребра соответствуют координатным направлениям некоторой (в общем случае криволинейной) системы координат. Напротив, в неструктурированных дискретных моделях выбор ребер не имеет привязки к координатным направлениям. В структурированных дискретных моделях наибольшее распространение получили четырехугольники и шестигранники, а в неструктурированных часто используются треугольники и тетраэдры. Существенным преимуществом структурированных дискретных моделей является относительная простота их программирования, а также их высокая вычислительная эффективность.

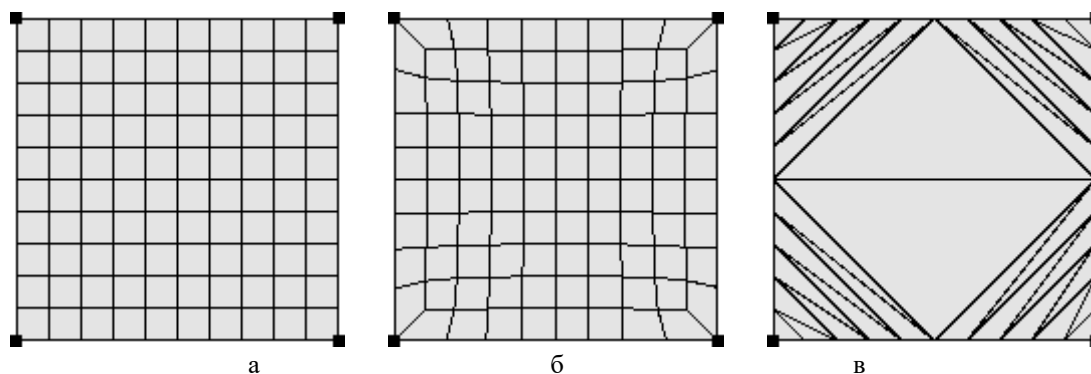


Рис. 1. Дискретные модели: а – структурированная, б – неструктурированная (четыреугольники), в – неструктурированная (треугольники)

Таким образом, целью данной работы является исследование актуального состояния проблемы автоматического построения структурированных дискретных моделей.

ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К ПОСТРОЕНИЮ СТРУКТУРИРОВАННЫХ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Структурированные дискретные модели возникли в качестве основы метода конечных разностей. Они используют идею трансформации сетки, определенной на единичном квадрате (кубе в трехмерном случае), в геометрию объекта при помощи отображения $F : [0, 1]^n \rightarrow \Omega$ (n – размерность пространства). Отображение F может быть определено явно (изопараметрическое или конформное отображение) или неявно (решение эллиптических или гиперболических уравнений в частных производных). Актуальные научные исследования в области построения таких сеток сосредоточены на поиске отображения F .

При построении структурированных сеток принято рассматривать две координатные области: физическую и расчетную. Физическая область – это область Ω , для которой строится дискретная модель. Расчетной областью выступает единичный квадрат (куб). Можно принять, что в расчетной области определена прямоугольная система координат, а в физической – криволинейная. Если физическая область является прямоугольником, то построение расчетной сетки является тривиальным:

$$x_i = x_0 + \frac{w}{n}(i-1), \quad i = \overline{1, n},$$

$$y_j = y_0 + \frac{h}{m}(j-1), \quad j = \overline{1, m},$$

где (x_0, y_0) – координаты нижнего левого угла прямоугольника; w – ширина прямоугольника; h – высота прямоугольника; n – количество узлов вдоль оси абсцисс; m – количество узлов вдоль оси ординат.

Для криволинейных областей необходимо находить соответствующие преобразования координат. Например, если принять, что физическая область ограничена двумя радиусами $r_0 \leq r \leq r_1$ и углами $0 \leq \alpha \leq \theta$, то преобразование

$$x(\xi, \eta) = [r_0 + (r_1 - r_0)\eta] \cos(\theta\xi),$$

$$y(\xi, \eta) = [r_0 + (r_1 - r_0)\eta] \sin(\theta\xi)$$

установит соответствие с расчетной областью в системе координат (ξ, η) (рис. 2).

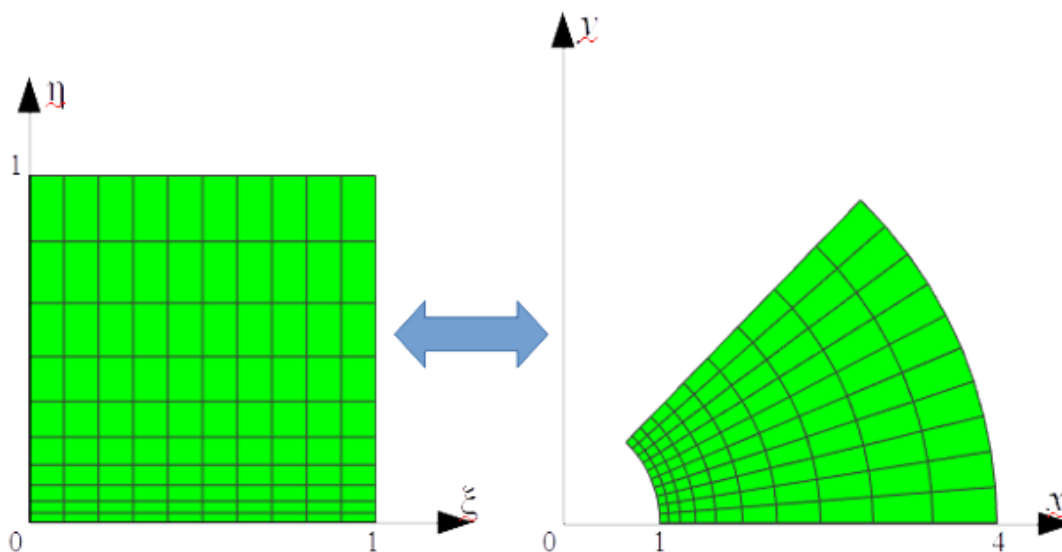


Рис. 2. Расчетная и физическая область для кольцевого объекта

В случаях, когда подобную аналитическую связь между расчетной и физической областями установить затруднительно, используют методы интерполяции. Например, если область ограничена двумя параметрическими кривыми, то для установления соответствия между физической и расчетной областями, может быть использована однонаправленная интерполяция:

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= (1 - \xi)x_l(\eta) + \xi x_r(\eta), \\ y(\xi, \eta) &= (1 - \xi)y_l(\eta) + \xi y_r(\eta), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\begin{cases} x_l(\eta), \\ y_l(\eta) \end{cases}$ и $\begin{cases} x_r(\eta), \\ y_r(\eta) \end{cases}$ – параметрическое представление, соответственно, «левой» и

«правой» кривых для случая, когда интерполяция носит горизонтальный характер (рис. 3, а). Если интерполяция носит вертикальный характер (рис. 3, б), то формулы будут аналогичными.

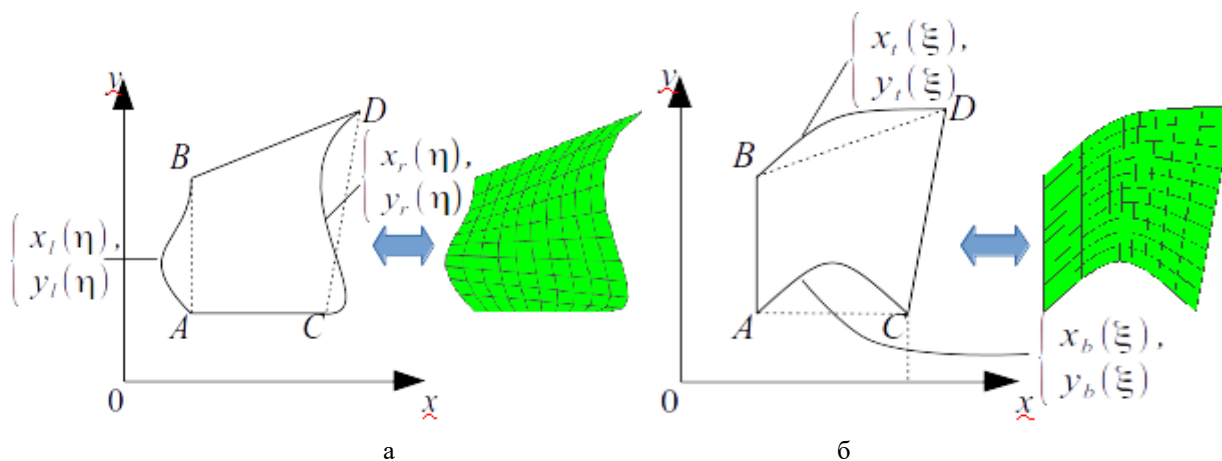


Рис. 3. Однонаправленная интерполяция: а – горизонтальная, б – вертикальная

Если область ограничена четырьмя кривыми, то возможно определить отображение, которое ставит в соответствие квадрат $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$, определенный в расчетной системе координат, физической области $ABCD$ (рис. 4). Такое отображение может быть получено последовательным применением отображений вида (1) в каждом координатном направлении с вычитанием результатов билинейной интерполяции:

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= (1 - \xi)x_l(\eta) + \xi x_r(\eta) + (1 - \eta)x_b(\xi) + \eta x_t(\xi) - \\ &\quad - (1 - \xi)(1 - \eta)x_b(0) - (1 - \xi)\eta x_t(0) - \xi(1 - \eta)x_b(1) - \xi\eta x_t(1), \\ y(\xi, \eta) &= (1 - \xi)y_l(\eta) + \xi y_r(\eta) + (1 - \eta)y_b(\xi) + \eta y_t(\xi) - \\ &\quad - (1 - \xi)(1 - \eta)y_b(0) - (1 - \xi)\eta y_t(0) - \xi(1 - \eta)y_b(1) - \xi\eta y_t(1). \end{aligned} \tag{2}$$

Формулы, аналогичные (1) и (2), могут быть получены для интерполяции трехмерных физических областей как на основе трилинейной интерполяции, так и на основе интерполяции Лагранжа или Эрмита [1]. Методы на основе подобных преобразований называются алгебраическими, один из первых таких подходов, основанный на обобщенных криволинейных координатах, был предложен в работе [2]. Аналогичные формулы для построения трехмерных структурированных дискретных моделей на базе трансфинитной интерполяции рассмотрены в работах [3-5].

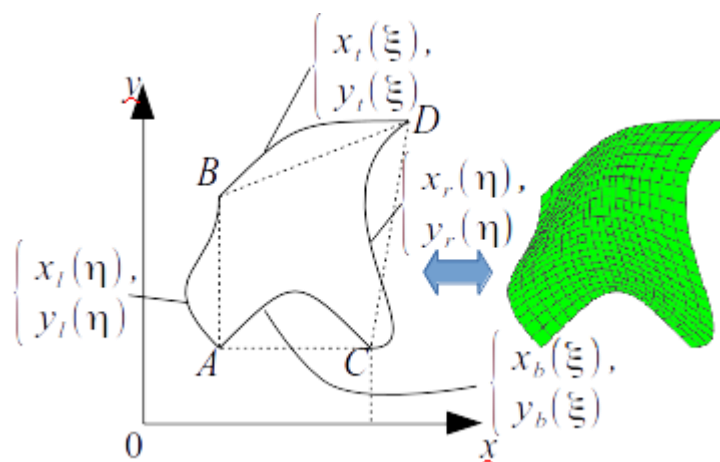


Рис. 4. Билинейная трансфинитная интерполяция

Для контроля распределения внутренних узлов при построении дискретных моделей на основе алгебраических методов используются различные функции растяжения [6] (например, экспоненциальные, гиперболические и другие [1]), а также методы, основанные на методе многих поверхностей [7, 1], в которых вводятся промежуточные поверхности (кривые) для построения интерполяционных схем более высокого порядка.

Также в работах [8-11] предлагаются алгебраические методы, основанные на использовании барицентрических координат, для построения и оптимизации дискретных моделей. Такие схемы преимущественно используются для разбиения на элементы областей, определенных многоугольниками (пример, на рис. 5) или многогранниками. Для разбиения областей, определенных невыпуклыми многоугольниками, разрабатывается аппарат обобщенных барицентрических координат [10].

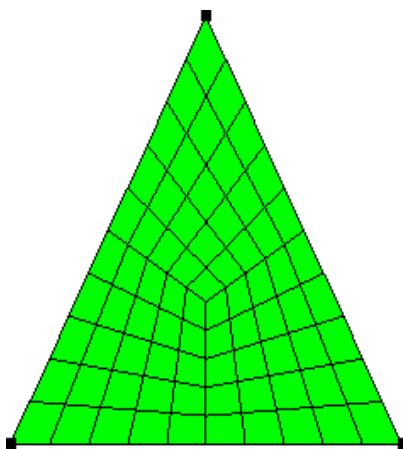


Рис. 5. Пример разбиения треугольной области на базе барицентрических координат

Основными недостатками алгебраических методов является в общем случае отсутствие ортогональности и сложность контроля размера соседних ячеек. Все это отрицательно влияет на точность решений, полученных с использованием таких дискретных моделей.

Альтернативой алгебраическим методам для построения структурированных дискретных моделей являются подходы, основанные на решении краевой задачи для дифференциальных уравнений в частных производных. Такие методы иногда называют дифференциальными, их в зависимости от типа базовой системы дифференциальных уравнений можно разделить на эллиптические, параболические и гиперболические.

Один из наиболее общих подходов к построению дискретных моделей с использованием уравнений в частных производных основан на решении уравнения Пуассона [12-21], записанного в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} &= P(\xi, \eta), \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} &= Q(\xi, \eta),\end{aligned}\tag{3}$$

где P и Q – некоторые функции, используемые для контроля сгущения внутренних точек сетки. Решение уравнения (3) находится в расчетной области системы координат (ξ, η) , поэтому оно преобразуется к виду [7]

$$\begin{aligned}g_{22} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + g \left(P \frac{\partial x}{\partial \xi} + Q \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) &= 0, \\ g_{22} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + g \left(P \frac{\partial y}{\partial \xi} + Q \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) &= 0,\end{aligned}\tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}g_{11} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2, \\ g_{12} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \\ g_{22} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2, \\ g &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2.\end{aligned}$$

Уравнение (4) решается численно, как правило, используя конечно-разностные схемы, с граничными условиями, соответствующим значениям координат узлов на границах физической области. Дискретные модели, полученные на основе таких систем дифференциальных уравнений, называются эллиптическими. Также возможно строить структурированные модели путем решения гиперболических или параболических систем [1]. Аналогичные уравнения могут быть записаны для трехмерных тел (начальными данными будут положения узлов на граничных поверхностях) [13-16]. При этом для неравномерного начального распределения узлов на границах физической области часто используются алгебраические методы для дискретизации кривых [22] и/или двумерные дифференциальные уравнения для дискретизации поверхностей [1].

Одним из наиболее существенных преимуществ использования уравнений в частных производных является возможность обеспечения ортогональности линий сетки границам области [12, 19-21, 23], совпадения с линиями тока эквивалентной задачи потенциального обтекания [7], а также гладкости внутренней части сетки при наличии разрывов границ. В результате методы генерации сеток, основанные на решении дифференциальных уравнений, получили распространение в задачах исследования динамики газов и жидкостей [4, 7, 13-16].

Описанные выше методы применимы для кубоподобных тел (в топологическом смысле). В случае, если тело обладает геометрической конфигурацией, которую невозможно отобразить на куб, то используют методы блочной декомпозиции (рис. 6). Основная идея таких методов – разделение исходной геометрии объекта на кубоподобные области, к каждой из которых применяются методы генерации структурированных дискретных моделей.

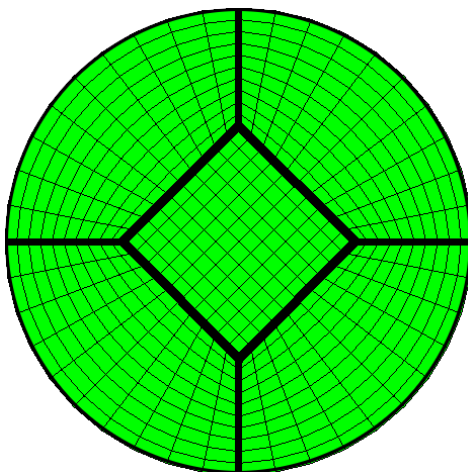


Рис. 6. Блочно-структурированная дискретная модель

Один из первых методов блочной декомпозиции основан на использовании октодеревьев и шаблонов для адаптации блоков [24]. Область рекурсивно разбивается на кубоподобные блоки, которые в литературе часто называют октантами. Итерация по глубине рекурсии выполняется, как правило, в окрестности особой точки (например, рис. 7) или границы с высокой кривизной. На заключительном шаге при помощи специальных шаблонов восстанавливается корректность топологии и производится построение структурированных сеток для каждого из блоков. Развитие этой идеи представлено в [25-27], обобщение для дискретизации трехмерных объектов в [28-32].

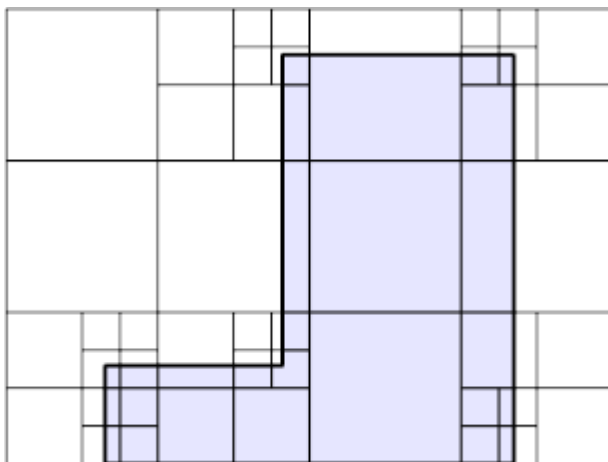


Рис. 7. Общая идея рекурсивного разбиения на блоки

Другим весьма распространенным способом декомпозиции на блоки является использование метода срединных осей [33-35]. Срединные оси связаны с определением «скелет многоугольника», под которым понимается геометрическое место точек кривой, образованной центрами вписанных окружностей максимального радиуса, касающихся границ объекта. Вписанная окружность должна касаться, по меньшей мере, двух точек границы объекта. В противном случае – должна существовать другая вписанная окружность, полностью удовлетворяющая этим требованиям. Представление области в виде срединных осей является исходным, расщепление на блоки производится в области излома срединной оси (пример на рис. 8). Этот подход имеет обобщение для трехмерного случая под названием срединные поверхности. Стоит отметить, что построение срединных осей или поверхностей является самостоятельной весьма сложной задачей, методы решения которой часто используют триангуляцию Делоне или диаграммы Воронова.

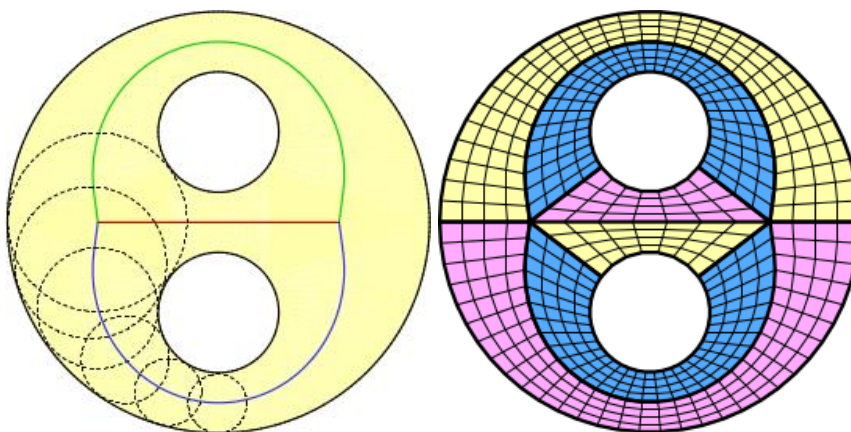


Рис. 8. Срединные оси: исходная область и полученные блоки [35]

Также разрабатываются методы декомпозиции области на блоки на основе нечеткой логики [36-38], методы на основе закругления (coarsening) исходной сетки [39] и их развитие [40-41]. Алгоритмы на основе нечеткой логики выглядят весьма перспективными, однако их практическое применение усложняется трудностью их формализации. Методы на основе закругления в качестве исходных данных используют начальную достаточно густую дискретную модель, в которой блоки формируются путем объединения соседних элементов на основе некоторых правил, что позволяет их использовать для перестроения модели по результатам расчета.

Одним из преимуществ блочной декомпозиции является возможность использования технологий параллельных вычислений при обработке блоков (особенности реализации таких методов для различных типов параллельных компьютерных систем рассмотрены в [42-44]).

ВЫВОДЫ

Таким образом, можно выделить ряд преимуществ и недостатков использования структурированных дискретных моделей. К преимуществам можно отнести возможность использования более высокого порядка аппроксимации (в приложениях к задачам газодинамики и исследования течений жидкостей и газов), необходимость использования меньшего количества вычислительных ресурсов (не требуются хранение и обработка информации о соседних вершинах, ребрах, гранях и т.п., необходимой для неструктурированных моделей). Однако, адаптация структурированных или блочно-структурированных моделей к сложным телам весьма трудоемка и возможно появление вырожденных элементов. Декомпозиция на блоки применима при использовании методов твердотельной геометрии (блоки и границы представлены явным образом). Однако, в случае тел очень сложной формы или при функциональном представлении тела, методы декомпозиции на блоки практически не применимы (ввиду слабой формализации блоков и отсутствия явного представления границ), а их вычислительная сложность при этом становится сравнимой с вычислительной сложностью методов получения неструктурированных моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Thompson J. F. Handbook of grid generation / J. F. Thompson, B. Sony, N. Weatherill. – New York : CRC Press, 1999. – 1136 p.
2. Gordon W. N. Construction of curvilinear coordinate systems and application to mesh generation / W. N. Gordon, C. A. Hall // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1973. – Vol. 7. – P. 461-477.
3. Cook W. A. Body oriented (natural) co-ordinates for generating three dimensional meshes / W. A. Cook // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1974. – Vol. 8. – P. 27-43.

4. Haber R. A general two-dimensional, graphical finite element preprocessor utilizing discrete transfinite mapping / R. Haber, M. S. Shephard, J. F. Abel, R. H. Gallagher, D. P. Greenberg // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 1982. – Vol. 17. – P. 1015-1044.
5. Haber R. Discrete transfinite mappings for description and meshing of three-dimensional surfaces using interactive computer graphics / R. Haber, J. F. Abel // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 1982. – Vol. 18. – P. 41-66.
6. Eiseman P. R. A multi-surface method of coordinate generation / P. R. Eiseman // *Journal of Computational Physics*. – 1979. – Vol. 33, iss. 1. – P. 118-150.
7. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей / К. Флетчер. – М. : Мир, 1991. – Т. 2 : Методы расчета различных течений. – 552 с.
8. Floater M. S. Parametrization and smooth approximation of surface triangulations / M. S. Floater // *Computer Aided Geometric Design*. – 1997. – Vol. 14, iss. 3. – P. 231-250.
9. Floater M. S. A general construction of barycentric coordinates over convex polygons / M. S. Floater, K. Hormann, G. Kós // *Advances in Computational Mathematics*. – 2006. – Vol. 24, iss. 1. – P. 311-331.
10. Meyer M. Generalized barycentric coordinates on irregular polygons / M. Meyer, A. Barr, H. Lee, M. Desbrun // *Journal of Graphics Tools*. – 2002. – Vol. 7, iss. 1. – P. 13-22.
11. Warren J. Barycentric coordinates for convex polytopes / J. Warren // *Advances in Computational Mathematics*. – 1996. – Vol. 6, iss. 1. – P. 97-108.
12. Akinlar M. A. A Method for Orthogonal Grid Generation / M. A. Akinlar, S. Salako, G. Liao // *General Mathematics Notes*. – 2011. – Vol. 3. – No 1. – P. 55-72.
13. Мартюшов С. Н. Расчет пространственных задач обтекания на основе TVD схемы Хартена / С. Н. Мартюшов // *Вычислительные технологии*. – 1995. – Т. 14. – № 12. – С. 219-228.
14. Мартюшов С. Н. Построение дву- и трехмерных сеток для задач газодинамики на основе уравнения Пуассона / С. Н. Мартюшов // *Известия высших учебных заведений. Математика*. – 1997. – № 4. – С. 108-110.
15. Мартюшов С. Н. Численное моделирование струйных течений методом конечного объема на основе TVD-схемы 2-го порядка точности / С. Н. Мартюшов, Я. Г. Мартюшова // *Вычислительные технологии*. – 2004. – Т. 9. – № 4. – С. 57-65.
16. Мартюшов С. Н. Численное моделирование течений детонации газовых смесей методом конечного объема / С. Н. Мартюшов, Я. Г. Мартюшова // *Вычислительные технологии*. – 2008. – Т. 13. – № 1. – С. 88-98.
17. Ashrafizadeh A. Direct Design Solution of the Elliptic Grid Generation Equations / A. Ashrafizadeh, G. D. Raithby // *Numerical Heat Transfer*. – 2006. – Vol. 50. – P. 217-230.
18. Ashrafizadeh A. Structured Grid Generation Via Constraint on Displacement of Internal Nodes / A. Ashrafizadeh, R. Jalalabadi // *International Journal of Basic & Applied Science*. – 2011. – Vol. 11, No 4. – P. 79-87.
19. Zhang Y. 2D Nearly Orthogonal Mesh Generation / Y. Zhang, Y. Jia, S. S. Y. Wang // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. – 2004. – Vol. 46, iss. 7. – P. 685-707.
20. Zhang Y. 2D Nearly Orthogonal Mesh Generation with Controls of Distortion Function / Y. Zhang, Y. Jia, S. S. Y. Wang // *Journal of Computational Physics*. – 2006. – Vol. 218, iss. 2. – P. 549-571.
21. Zhang Y. Structured Mesh Generation with Smoothness Controls / Y. Zhang, Y. Jia, S. S. Y. Wang // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. – 2006. – Vol. 51, iss. 11. – P. 1255-1276.
22. Lehtimaki R. An Algebraic Boundary Orthogonalization Procedure for Structured Grids / R. Lehtimaki // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. – 2000. – Vol. 32, iss. 5. – P. 605-618.
23. Zhou Q. A Simple Grid Generation Method / Q. Zhou // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. – 1998. – Vol. 26, iss. 6. – P. 713-724.
24. Yerry M. A. A modified quadtree approach to finite element mesh generation / M. A. Yerry, M. S. Shephard // *IEEE Computer Graphics and Applications*. – 1983. – Vol. 3, iss. 1. – P. 39-46.
25. Baehmann P. L. Robust, geometrically based, automatic two-dimensional mesh generation / P. L. Baehmann, S. L. Wittchen, M. S. Shephard, K. R. Grice, M. A. Yerry // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 1987. – Vol. 24, iss. 6. – P. 1043-1078.

26. Liang X. Guaranteed-quality all-quadrilateral mesh generation with feature preservation / X. Liang, M. S. Ebeida, Y. Zhang // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2010. – Vol. 199. – P. 2072-2083.
27. Yiu K. F. C. Quadtree grid generation: information handling, boundary fitting and CFD applications / K. F. C. Yiu, D. M. Greaves, S. Cruz, A. Saalehi, A. G. L. Borthwick // *Computers & Fluids*. – 1996. – Vol. 25, iss. 8. – P. 759-769.
28. Ito Y. Octree-based reasonable-quality hexahedral mesh generation using a new set of refinement templates / Y. Ito, A. M. Shih, B. K. Soni // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2009. – Vol. 77. – P. 1809-1833.
29. Kolšek T. Generation of block-structured grids in complex computational domains using templates / T. Kolšek, M. Šubelj, J. Duhovnik // *Finite Elements in Analysis and Design*. – 2003. – Vol. 39. – P. 1139-1154.
30. Miranda A. C. O. Hierarchical template-based quadrilateral mesh generation / A. C. O. Miranda, L. F. Martha // *Engineering with Computers*. – 2015. – Vol. 31. – P. 1-15.
31. Yerry M. A. Automatic three-dimensional mesh generation by the modified-octree technique / M. A. Yerry, M. S. Shephard // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 1984. – Vol. 20, iss. 11. – P. 1965-1990.
32. Zhang H. Adaptive hexahedral mesh generation based on local domain curvature and thickness using a modified grid-based method / H. Zhang, G. Zhao // *Finite Elements in Analysis and Design*. – 2007. – Vol. 43, iss. 9. – P. 691-704.
33. Quadros W. R. LayTracks: a new approach to automated geometry adaptive quadrilateral mesh generation using medial axis transform / W. R. Quadros, K. Ramaswami, F. B. Prinz, B. Gurumoorthy // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2004. – Vol. 61, iss. 2. – P. 209-237.
34. Tam T. K. H. 2D finite element mesh generation by medial axis subdivision / T. K. H. Tam, C. G. Armstrong // *Advances in Engineering Software and Workstations*. – 1991. – Vol. 13. – No 5-6. – P. 313-324.
35. Guoy D. Automatic Blocking Scheme for Structured Meshing in 2D Multiphase Flow Simulation / D. Guoy, J. Erickson // *The 13th International Meshing Roundtable: International Conference, Williamsburg, Virginia, USA, September 19-22, 2004: proceedings*. – Sandia: Sandia National Laboratories, 2004. – P. 121-132.
36. Taghavi R. Automatic block decomposition using fuzzy logic analysis / R. Taghavi // *The 9th International meshing roundtable: International Conference, New Orleans, Louisiana, USA, 2-5 October 2000: proceedings*. – Sandia: Sandia National Laboratories, 2000. – P. 187-192.
37. Takahashi H. A general purpose automatic mesh generation using shape recognition technique / H. Takahashi, H. Shimizu // *ASME Computers in Engineering*. – 1991. – Vol. 1. – P. 519-526.
38. Takahashi H. A Three-Dimensional Automatic Mesh Generation System Using Shape Recognition Technique / H. Takahashi, H. Shimizu, H. Moriyama, Y. Yamashita, N. Chiba // *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*. – 1993. – Vol. 59. – No 560. – Series A. – P. 1161-1167.
39. Müller-Hannemann M. High quality quadrilateral surface meshing without template restrictions: a new approach based on network flow techniques / M. Müller-Hannemann // *The International Journal of Computational Geometry and Applications*. – 1999. – Vol. 10, iss. 3. – P. 285-307.
40. Jablonowski C. Block-structured adaptive meshes and reduced grids for atmospheric general circulation models / C. Jablonowski, R. C. Oehmke, Q. F. Stout // *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. – 2009. – Vol. 367. – P. 4497-4522.
41. Zheng J. Z. X. Block-Based Adaptive Mesh Refinement Finite-volume Scheme for Hybrid Multi-Block Meshes / J. Z. X. Zheng, C. P. T. Groth // *Seventh International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD7): International Conference, Big Island, Hawaii, July 9-13, 2012: proceedings*. – Hawaii: 2012. – P. 1-19.
42. Ahusborde E. A 2D Block-structured Mesh Partitioner for Accurate Flow Simulations on Non-rectangular Geometries / E. Ahusborde, S. Glockner // *Computers & Fluids*. – 2011. – Vol. 43. – P. 2-13.
43. Steensland J. A partitioner-centric model for structured adaptive mesh refinement partitioning trade-off optimization: Part I / J. Steensland, J. Ray // *The International Journal of High Performance Computing Applications*. – 2005. – Vol. 19. – No 4. – P. 409-422.

44. Steensland J. A partitioner-centric model for structured adaptive mesh refinement partitioning trade-off optimization: Part II / J. Steensland, J. Ray // Parallel Processing Workshops : International Conference, Montreal, QC, Canada, 15-18 Aug 2004 : proceedings. – 2004. – P. 231-238.

REFERENCES

1. Thompson, J.F., Sony, B. and Weatherill, N. (1999), *Handbook of grid generation*, CRC Press, New York.
2. Gordon, W.N. and Hall, C.A. (1973), “Construction of curvilinear coordinate systems and application to mesh generation”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 7, pp. 461-477.
3. Cook, W.A. (1974), “Body oriented (natural) co-ordinates for generating three dimensional meshes”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 8, pp. 27-43.
4. Haber, R., Shephard, M.S., Abel, J.F., Gallagher, R.H. and Greenberg, D.P. (1982), “A general two-dimensional, graphical finite element preprocessor utilizing discrete transfinite mapping”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 17, pp. 1015-1044.
5. Haber, R. and Abel, J.F. (1982), “Discrete transfinite mappings for description and meshing of three-dimensional surfaces using interactive computer graphics”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 18, pp. 41-66.
6. Eiseman, P.R. (1979), “A multi-surface method of coordinate generation”, *Journal of Computational Physics*, vol. 33, iss. 1, pp. 118-150.
7. Fletcher, C. (1991), *Computational techniques for fluid dynamics*, Springer, Berlin.
8. Floater, M.S. (1997), “Parametrization and smooth approximation of surface triangulations”, *Computer Aided Geometric Design*, vol. 14, iss. 3, pp. 231-250.
9. Floater, M.S., Hormann, K. and Kós, G. (2006), “A general construction of barycentric coordinates over convex polygons”, *Advances in Computational Mathematics*, vol. 24, iss. 1, pp. 311-331.
10. Meyer, M., Barr, A., Lee, H. and Desbrun, M. (2002), “Generalized barycentric coordinates on irregular polygons”, *Journal of Graphics Tools*, vol. 7, iss. 1, pp. 13-22.
11. Warren, J. (1999), “Barycentric coordinates for convex polytopes”, *Advances in Computational Mathematics*, vol. 6, iss. 1, pp. 97-108.
12. Akinlar, M.A., Salako, S. and Liao, G. (2011), “A Method for Orthogonal Grid Generation”, *General Mathematics Notes*, vol. 3, no. 1, pp. 55-72.
13. Martyushov, S.N. (1995), “Calculation of spatial flow problems using TVD Harten scheme”, *Vychislitel'nye tekhnologii*, vol. 14, no. 12, pp. 219-228.
14. Martyushov, S.N. (1997), “Construction of two- and three-dimensional grids for problems of gas dynamics using the Poisson equation”, *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika*, no. 4, pp. 108-110.
15. Martyushov, S.N. and Martyushova, Ya.G. (2004), “Numerical simulation of jet flows using the finite volume method on the basis of second order accuracy TVD-scheme”, *Vychislitel'nye tekhnologii*, vol. 9, no. 4, pp. 57-65.
16. Martyushov, S.N. and Martyushova, Ya.G. (2008), “Numerical simulation of gas mixtures detonations using the finite volume method”, *Vychislitel'nye tekhnologii*, vol. 13, no. 1, pp. 88-98.
17. Ashrafizadeh, A. and Raithby, G.D. (2006), “Direct Design Solution of the Elliptic Grid Generation Equations”, *Numerical Heat Transfer*, vol. 50, pp. 217-230.
18. Ashrafizadeh, A. and Jalalabadi, R. (2011), “Structured Grid Generation Via Constraint on Displacement of Internal Nodes”, *International Journal of Basic & Applied Science*, vol. 11, no. 4, pp. 79-87.
19. Zhang, Y., Jia, Y. and Wang, S.S.Y. (2004), “2D Nearly Orthogonal Mesh Generation”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 46, iss. 7, pp. 685-707.
20. Zhang, Y., Jia, Y. and Wang, S.S.Y. (2006), “2D Nearly Orthogonal Mesh Generation with Controls of Distortion Function”, *Journal of Computational Physics*, vol. 218, iss. 2, pp. 549-571.
21. Zhang, Y., Jia, Y. and Wang, S.S.Y. (2006), “Structured Mesh Generation with Smoothness Controls”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 51, iss. 11, pp. 1255-1276.

22. Lehtimaki, R. (2000), "An Algebraic Boundary Orthogonalization Procedure for Structured Grids", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 32, iss. 5, pp. 605-618.
23. Zhou, Q. (1998), "A Simple Grid Generation Method", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 26, iss. 6, pp. 713-724.
24. Yerry, M.A. and Shephard, M.S. (1983), "A modified quadtree approach to finite element mesh generation", *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 3, iss. 1, pp. 39-46.
25. Baehmann, P.L., Wittchen, S.L., Shephard, M.S., Grice, K.R. and Yerry, M.A. (1987), "Robust, geometrically based, automatic two-dimensional mesh generation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, iss. 6, pp. 1043-1078.
26. Liang, X., Ebeida, M.S. and Zhang, Y. (2010) "Guaranteed-quality all-quadrilateral mesh generation with feature preservation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, pp. 2072-2083.
27. Yiu, K.F.C., Greaves, D.M., Cruz, S., Saalehi, A. and Borthwick, A.G.L. (1996), "Quadtree grid generation: information handling, boundary fitting and CFD applications", *Computers & Fluids*, vol. 25, iss. 8, pp. 759-769.
28. Ito, Y., Shih, A.M. and Soni, B.K. (2009), "Octree-based reasonable-quality hexahedral mesh generation using a new set of refinement templates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 77, pp. 1809-1833.
29. Kolšek, T., Šubelj, M. and Duhovnik, J. (2003), "Generation of block-structured grids in complex computational domains using templates", *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 39, pp. 1139-1154.
30. Miranda, A.C.O. and Martha, L.F. (2015), "Hierarchical template-based quadrilateral mesh generation", *Engineering with Computers*, vol. 31, pp. 1-15.
31. Yerry, M.A. and Shephard, M.S. (1984), "Automatic three-dimensional mesh generation by the modified-octree technique", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 20, iss. 11, pp. 1965-1990.
32. Zhang, H. and Zhao, G. (2007), "Adaptive hexahedral mesh generation based on local domain curvature and thickness using a modified grid-based method", *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 43, iss. 9, pp. 691-704.
33. Quadros, W.R., Ramaswami, K., Prinz, F.B. and Gurumoorthy, B. (2004), "LayTracks: a new approach to automated geometry adaptive quadrilateral mesh generation using medial axis transform", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 61, iss. 2, pp. 209-237.
34. Tam, T.K.H. and Armstrong, C.G. (1991), "2D finite element mesh generation by medial axis subdivision", *Advances in Engineering Software and Workstations*, vol. 13, no. 5-6, pp. 313-324.
35. Guoy, D. and Erickson, J. (2004), "Automatic Blocking Scheme for Structured Meshing in 2D Multiphase Flow Simulation", *Proceedings of the 13th International Meshing Roundtable*, Williamsburg, Virginia, USA, September 19-22, 2004, pp. 121-132.
36. Taghavi, R. (2000), "Automatic block decomposition using fuzzy logic analysis", *Proceedings of the 9th International meshing roundtable*, New Orleans, Louisiana, USA, 2-5 October 2000, pp. 187-192.
37. Takahashi, H. and Shimizu, H. (1991), "A general purpose automatic mesh generation using shape recognition technique", *ASME Computers in Engineering*, vol. 1, pp. 519-526.
38. Takahashi, H., Shimizu, H., Moriyama, H., Yamashita, Y. and Chiba, N. (1993), "A Three-Dimensional Automatic Mesh Generation System Using Shape Recognition Technique", *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, vol. 59, no. 560, series A, pp. 1161-1167.
39. Müller-Hannemann, M. (1999), "High quality quadrilateral surface meshing without template restrictions: a new approach based on network flow techniques", *The International Journal of Computational Geometry and Applications*, vol. 10, iss. 3, pp. 285-307.
40. Jablonowski, C., Oehmke, R.C. and Stout, Q.F. (2009), "Block-structured adaptive meshes and reduced grids for atmospheric general circulation models", *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, vol. 367, pp. 4497-4522.
41. Zheng, J.Z.X. and Groth, C.P.T. (2012), "Block-Based Adaptive Mesh Refinement Finite -vol. Scheme for Hybrid Multi-Block Meshes", *Proceedings of the Seventh International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD7)*, Big Island, Hawaii, July 9-13, 2012, pp. 1-19.

42. Ahusborde, E. and Glockner, S. (2011), "A 2D Block-structured Mesh Partitioner for Accurate Flow Simulations on Non-rectangular Geometries", *Computers & Fluids*, vol. 43, pp. 2-13.
43. Steensland, J. and Ray, J. (2005), "A partitioner-centric model for structured adaptive mesh refinement partitioning trade-off optimization: Part I", *The International Journal of High Performance Computing Applications*, vol. 19, no. 4, pp. 409-422.
44. Steensland, J. and Ray, J. (2004), "A partitioner-centric model for structured adaptive mesh refinement partitioning trade-off optimization: Part II", *Proceedings of Parallel Processing Workshops*, Montreal, QC, Canada, 15-18 Aug 2004, pp. 231-238.

УДК 519.17

КРАТКИЙ ОБЗОР МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ ГРАЦИОЗНЫХ ГРАФОВ

Шерман З. А., аспирант

*Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины,
просп. Академика Глушкова, 40, Киев, 03680 МСП, Украина*

sherman.zoya@rambler.ru

В данной работе предложен краткий обзор методов построения грациозной разметки деревьев, а также других классов графов с целью их систематизации. Выделены частные конструктивные методы для деревьев. Детально описан один из универсальных методов нахождения грациозной разметки графов, в основе которого лежат алгоритмы линейного целочисленного программирования. Рассмотрены методы с аналитическим подходом для графов, порожденных циклами.

Ключевые слова: грациозная разметка, метод переноса ветвей и ребер, метод Δ -построения, целочисленное программирование, циклы с хордами.

КОРОТКИЙ ОГЛЯД МЕТОДІВ ПОБУДОВИ ГРАЦІЙНОЇ РОЗМІТКИ ГРАФІВ

Шерман З. О., аспірант

*Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України,
просп. Академіка Глушкова, 40, Київ, 03680 МСП, Україна*

sherman.zoya@rambler.ru

У наведеній роботі запропоновано огляд методів граційної розмітки дерев, а також інших класів графів з метою їх систематизації. Виділені приватні конструктивні методи для дерев. Детально описаний один з універсальних методів знаходження граційної розмітки графів, що має за основу алгоритми лінійного цілочисельного програмування. Розглянуті методи з аналітичним підходом для графів, породжених циклами.

Ключові слова: граційна розмітка, метод перенесення гілок і ребер, метод Δ -побудови, цілочисельне програмування, цикли з хордами.

A BRIEF REVIEW OF GRACEFUL GRAPHS CONSTRUCTION METHODS

Sherman Z. O.

*V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of National Academy of Sciences of Ukraine,
40 Glushkov ave., Kyiv, Ukraine, 03187*

sherman.zoya@rambler.ru

The paper presents a brief review of methods for constructing graceful labeling of trees, as well as other classes of graphs for their systematization. For trees among the most famous and used methods those that are developing and have not lost their relevance are highlighted. They are method of transferring branches, edges and Δ -construction method. Section 3 describes in detail one of the universal methods of finding a graceful labeling of small orders graphs. The basis of this method is in linear integer programming algorithms. Special attention in this paper is given to publications which deal with graphs generated by cycles. They all have a general similarity – analytical approach in labeling construction.

Section 2 analyzes methods of graceful graphs construction in the order of their occurrence. The constructive method of graceful trees construction presented by P. Hrnčiar and A. Haviar is distinguished. The authors proposed to transfer a certain amount of end-edges and subtrees emanating from one vertex of the graceful tree to another vertex of it. They proved that all the trees of diameter 4 and some trees of diameter 5 are graceful. Further development of transferring methods was done by M. Superdock in 2014, who suggested the use of certain sequences of transferring end-edges to construct some classes of graceful trees of diameter 6.

Section 3.2 deals with a particular constructive approach of defining graceful trees of large size among known graceful trees. K. Koh, D. Rogers, T. Tan completed the construction of the new graph, adding to the disjoint union of isomorphic copies of this graceful graph T , the additional vertices connected by edges with the isomorphic image of a vertex T . The method is used for the gracefulness study of symmetrical trees. The same authors summarized this method, identifying isomorphic images of the vertices of T with an additional vertex, as well. In 1979, the construction of graceful tree was implemented by a given pair of graceful trees and was called Δ -construction. Using it, K. Koh and others have proved gracefulness of the full m -ary tree. In 1998 M. Burzio, G. Ferrarese made additions to the algorithm of Δ -construction and called it $\Delta+1$ -construction. Using the method of $\Delta+1$ -construction the subdivision graph gracefulness was proved.

Section 4 describes a universal method of graceful label constructing for different classes of graphs. In 2003 T. Redl based algorithm for finding the graceful labeling of Petersen graphs and double cones on one of the methods of linear integer programming. Similar results were obtained in K. Eshghi and P. Azimi's studies. The disadvantages of this method are related to the limited size of the graphs.

Section 5 distinguishes the graceful labeling methods for constructing graphs with a cyclic structure. The basis of some of them is in the findings of a certain functional dependence, and that of the others is in a recursive method. A. Rosa having considered gracefulness of cycle C_n was the founder of this direction. In 1977 R. Bodendiek, H. Schumacher and H. Wagner first studied the cycles with a chord and constructed graceful labeling for some special cases of such cycles. Their research was summarized by C. Delorme, M. Maheo, K. Koh, H. Tan in 1980 and K. Ma and C. Feng in 1984 who proved that any cycle with chord is graceful. In 1985 K. Koh and others offered a method of graceful labeling construction for cycles with P_k -chords for $k=3$ and hypothesized that all cycles with P_k -chords are graceful. In 2005 G. Sethuraman and A. Elumalai presented a recursive method of constructing graceful labelings for cycles C_n ($n \geq 6$) with parallel P_k -chords, with $k=3, 4, 6, 8, 10$, and suggested that the cycles C_n with parallel P_k -chords were graceful for any even k . In 2013 G. Sethuraman A. Elumalai studied methods of constructing graceful C_n ($n \geq 8$) cycles with zigzag chords, which link the alternating tops of the cycle. In 2014 Kaneria V.J., Makadia H.M. and Meghapara M. studied the cycles with double chords. They provided a method of constructing graceful labeling for any cycle C_n with a double chord where $n \equiv 2 \pmod{4}$.

Key words: graceful labeling, method of transferring branches and edges, Δ -construction, integer programming, cycles with chords.

ВВЕДЕНИЕ

Математическими моделями многих задач выступают графы. В основе методов решения некоторых из них в таких областях, как рентгеновская кристаллография, теория кодирования, радиолокация, астрономия, проектирование схем и сетей, управление базами данных, лежит теория разметок графов. Ее зарождение началось в 1963 году с гипотезы Г. Рингеля. Он предположил, что граф K_{2n+1} можно разложить на $2n + 1$ подграфа, каждый из которых изоморфный заданному дереву с n ребрами [1]. При решении этой гипотезы А. Роса в 1967 году ввел понятие β -оценки графа, а также ряд других оценок, как инструмент для разложения графа на изоморфные подграфы [2]. В 1978 году в работах С. Голомба появился термин грациозная разметка, являющийся тождественным β -оценке. Первоначально А. Роса изучал только грациозность деревьев и выдвинул предположение о том, что все деревья грациозные. На данный момент не существует общего подхода нахождения грациозной разметки для всех классов деревьев и поэтому проблема грациозности деревьев, известная как гипотеза Рингеля-Котцига-Роса, остается открытой.

Анализ публикаций по данной тематике показал, что все методы построения грациозной разметки деревьев можно разделить на универсальные и частные. Целью данной работы является краткий обзор методов построения грациозной разметки деревьев, а также других классов графов для осуществления их систематизации. Для деревьев, среди известных и наиболее применяемых частных методов, выделим те, которые сегодня развиваются и не утратили свою актуальность. Это метод переноса ветвей, ребер и метод Δ -построения. Возможно, в будущем их можно использовать для построения грациозных разметок других классов графов. Учитывая широкое использование систем программирования, в разделе 3 детально описан один из универсальных методов нахождения грациозной разметки графов

малых порядков. В основе этого метода лежат алгоритмы линейного целочисленного программирования. Отдельное внимание в данной работе уделено публикациям, в которых рассматриваются графы, порожденные циклами. Все они имеют общее сходство – аналитический подход построения грациозной разметки.

В разделе 2 анализ методов построения грациозных графов осуществлен в порядке их возникновения. Цепи – это исторически первый класс деревьев, для которого найдена грациозная разметка [2]. Затем рассматривались деревья гусеницы, звезды, грациозные разметки для них найдены с помощью простых алгоритмов. Авторы работы [4] использовали более сложный способ построения новых грациозных деревьев. Они предложили метод переносов некоторого количества висячих ребер, а также поддеревьев, исходящих из одной вершины грациозного дерева в другую его вершину. Доказали, что все деревья диаметра 4 и некоторые деревья диаметра 5 являются грациозными. Данный метод относится к частным и представлен в разделе 2.1. Его дальнейшее развитие осуществил М. Сайпердок в 2014 году, предложив использовать определенные последовательности переноса висячих ребер, для построения некоторых классов грациозных деревьев диаметра 6.

В разделе 2.2 рассмотрен один из конструктивных подходов нахождения грациозных деревьев больших размеров из известных грациозных деревьев. Его применяли Р. Стентон, С. Занке [8], К. Кох, Д. Роджерс и Т. Тан [9-11]. К. Кох, Д. Роджерс и Т. Тан выполнили построение нового графа, добавив к дизъюнктивному объединению изоморфных копий данного грациозного графа T дополнительную вершину, соединенную ребрами с изоморфными образами некоторой фиксированной вершины T . Данный метод использован при исследовании на грациозность симметричных деревьев. Эти же авторы обобщили указанный метод, отождествив изоморфные образы фиксированной вершины графа T с дополнительной вершиной. В работе [10] построение грациозного дерева реализовано по заданной паре грациозных деревьев и названо Δ -построением. Используя его, К. Кох и др. доказали грациозность полного n -арного дерева. В 1998 году М. Буржио и Г. Феррерас внесли дополнения в алгоритм Δ -построения [10] и назвали его Δ_{+1} -построением. Используя метод Δ_{+1} -построения, доказана грациозность графа подразбиений.

В разделе 3 речь идет об универсальном методе построения грациозных разметок различных классов графов, представленном в работах [12-14]. В 2003 году Т. Редл в основу алгоритма нахождения грациозной разметки графов Петерсона и двойных конусов положил один из методов линейного целочисленного программирования. Аналогичные результаты получены К. Эшти и П. Азими в работах [13, 14]. Недостатки этого метода связаны с ограничением размеров графов.

Все графы, кроме деревьев, содержат в качестве подграфов циклы, поэтому раздел 4 посвящен методам построения грациозной разметки графов с циклической структурой. В их основу положен вывод определенной функциональной зависимости, чаще всего с элементами рекурсии. А. Роса в работе [2], рассмотрев грациозность цикла C_n , стал основоположником данного направления. В 1977 году Р. Бодендик, Г. Шумахер и Г. Вагнер впервые изучили циклы с хордой и построили грациозную разметку для некоторых частных случаев. Обобщили их исследования С. Делорн, Г. Махео, К. Кох, Г. Тан в 1980 году, а К. Ма, С. Фенг в 1984 году доказали, что любой цикл с хордой является грациозным. В 1985 году К. Кох и К. Яп предложили метод построения грациозной разметки для циклов с P_k -цепью для $k = 3$ и выдвинули гипотезу, что все циклы с P_k -цепью являются грациозными. В 2005 году Г. Сесурамен и А. Елумалай представили рекурсивный метод построения грациозной разметки для циклов C_n ($n \geq 6$) с параллельными P_k -цепями, где $k = 3, 4, 6, 8, 10$ и предположили, что циклы C_n с параллельными P_k -цепями грациозные для любого четного k . В 2013 году А. Елумалай и А. Ефремнес рассмотрели метод построения грациозных циклов C_n ($n \geq 8$) с зигзагообразными хордами, которые связывают чередующиеся вершины в цикле. В 2014 году В. Канерия, Г. Макадия и М. Мегхапара [18] изучали циклы с двойными хордами. Они представили метод построения грациозной разметки для любого цикла C_n с

двойной хордой, где $n \equiv 2 \pmod{4}$. В работе [19] речь идет о графах, полученных дублированием вершины (ребра) в цикле. Их грациозность находится с помощью функциональных зависимостей, выведенных авторами.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Под графом будем понимать конечный неориентированный граф без кратных ребер и петель. Пусть $G = (V, E)$ – граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)$. Число $|V(G)|$ вершин графа G называют порядком, а число $|E(G)|$ ребер – его размером.

Напомним определения и теоретические результаты, которые будут использованы в следующих разделах.

Определение 1.1. Грациозной разметкой графа $G = (V, E)$ называют инъекцию $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$, которая порождает разметку ребер $f^*(u, v) = |f(u) - f(v)|$, где u, v – вершины графа G , при этом f^* – биекция из $E(G)$ на множество $\{1, 2, \dots, n\}$.

Граф, допускающий грациозную разметку, называется грациозным графом.

Определение 1.2. Пусть u – вершина графа G . Построим граф $G + u_0$ добавлением вершины u_0 и ребер u_0v_i таким образом, что вершина $v_i \in V(G)$ соединяют новую вершину со всеми вершинами, смежными с вершиной u . Говорят, что граф $G + u_0$ получен дублированием вершины u , а саму операцию называют дублирование вершины в графе.

Определение 1.3. Пусть uv – ребро графа G . Построим граф $G + u_0v_0$ добавлением ребер u_0v_0, u_0v_i, u_0v_j таким образом, что вершины $v_i, v_j \in V(G)$ будут смежными концевым вершинам ребра uv . Говорят, что граф $G + u_0v_0$ получен дублированием ребра uv , а саму операцию называют дублирование ребра в графе.

Лемма 1.1 [4]. Пусть дерево T имеет грациозную разметку f и вершина u будет смежная с вершинами u_1, u_2 . Пусть в поддереве T' дерева T определено множество вершин $V(T') = \left(V(T) - \left(V(T_{u,u_1}) \cup V(T_{u,u_2}) \right) \right) \cup \{u\}$ и вершина $v \in V(T')$, где $v \neq u$.

- а). Если $u_1 \neq u_2$, $f(u_1) + f(u_2) = f(u) + f(v)$ и дерево T'' получено путем отождествления вершины v дерева T' с вершиной u деревьев T_{u,u_1} и T_{u,u_2} , то f – грациозная разметка и для дерева T'' ;
- б). Если $u_1 = u_2$, $2f(u_1) = f(u) + f(v)$ и дерево T'' получено путем отождествления вершины v дерева T' с вершиной u дерева T_{u,u_1} , то f – грациозная разметка и для дерева T'' .

2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ГРАЦИОЗНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

Работы, рассматривающие решение проблемы грациозности деревьев, связаны двумя подходами. Один из них математический, заключается в том, чтобы показать, что все деревья, имеющие определенную структуру, являются грациозными. Второй подход использует вычислительную технику, и направлен на исследование грациозности деревьев с определенным числом вершин. Для него наиболее существенный недавний результат – это доказательство того факта, что все деревья, у которых число вершин не больше 40 – грациозные. В данном разделе описаны основные методы построения грациозных деревьев, относящиеся к первому подходу.

2.1. Метод переносов. В 1978 году А. Котциг предложил идею преобразования одного грациозного дерева в другое путем удаления одного висячего ребра в этом дереве и добавления другого висячего ребра в другую его вершину с той же индуцированной меткой (Г. Бермонд [3]).

В 2001 году П. Гончар и А. Хавьер [4] расширили этот метод А. Котцига. Они предложили выполнять перенос некоторого количества висячих ребер, а также поддеревьев, исходящих из одной вершины грациозного дерева в другую его вершину.

Рассмотрим метод построения грациозного дерева, предложенный П. Гончар и А. Хавьер в работе [4] для произвольного грациозного дерева T порядка n . Пусть ребро $uv \in E(T)$. Обозначим $T_{u,v}$ – поддерево дерева T с множеством вершин $V(T_{u,v}) = \{w \in V(T), \text{ где } w = u \text{ или } v \text{ находятся на цепи } u - w\}$. Реализуем метод по следующим правилам:

- метка каждой вершины назначается в соответствии с ее номером;
- для переноса ветвей из вершины u в вершину v используется обозначение $u \rightarrow v$.

Выполним преобразование грациозного дерева T для получения нового грациозного дерева T'' того же порядка. Для этого необходимо перенести поддеревья T_{u,u_1} и T_{u,u_2} из вершины u в вершину v согласно условиям, представленным в лемме 1.1 (рис. 1). Для реализации данного переноса висячих ребер в работе [4] используется два типа переноса висячих ребер. К первому относится перенос $u \rightarrow v$ конечного числа тех висячих ребер, у которых висячие вершины имеют метки $k, k + 1, \dots, k + m$. Перенос $u \rightarrow v$ выполняется согласно леммы 1.1, при условии $u + v = k + (k + m)$ (поскольку $k + (k + m) = k + 1 + (k + m - 1) = k + 2 + (k + m - 2) = \dots$). После переноса ветвей первого типа остается нечетное число висячих ребер, инцидентных вершине u . Перенос $u \rightarrow v$ второго типа – это перенос двух подмножеств конечного числа тех висячих ребер, у которых висячие вершины имеют метки $k, k + 1, \dots, k + m$ и $l, l + 1, \dots, l + m$. Перенос второго типа $u \rightarrow v$ выполняется согласно леммы 1.1, при условии $u + v = k + l + m$ (поскольку $k + 1 + (l + m - 1) = k + 2 + (l + m - 2) = \dots$). В этом случае вершине будет инцидентно нечетное или четное число висячих ребер.

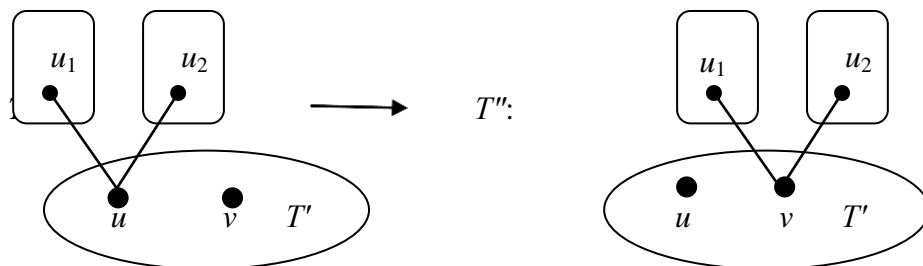


Рис. 1. Преобразование дерева T

Если выполняется перенос висячих ребер первого типа из вершины u , то следующим из этой вершины может быть перенос висячих ребер первого или второго типов, а после переноса второго типа – возможен перенос висячих ребер только второго типа.

Проиллюстрируем на грациозном дереве порядка 16 (для $k = 3$) применение всех типов переносов. Первоначальное дерево $K_{1,15}$ изображено на рисунке 2.

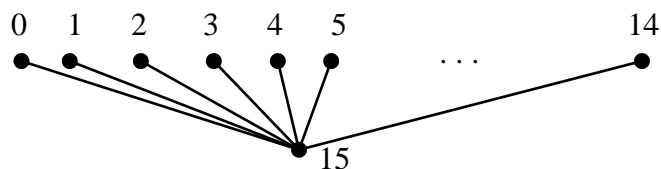


Рис. 2. Грациозное дерево $K_{1,15}$

Выполним перенос первого типа $15 \rightarrow 0$. Так как $15 + 0 = 3 + 1 + (15 - 3 - 1) = 4 + 11$, то переносим в вершину 0 висячие ребра, инцидентные висячими вершинами 4, 5, ..., 11. Этот перенос $15 \rightarrow 0$ представлен на рисунке 3.

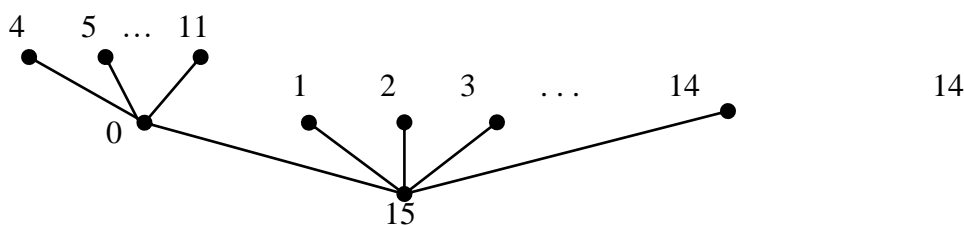


Рис. 3. Грациозное дерево

Аналогично выполняются переносы первого типа $0 \rightarrow 14$ и $14 \rightarrow 1$. Затем выполняется перенос второго типа $1 \rightarrow 13$. Схема переносов ветвей показана на рисунке 4.

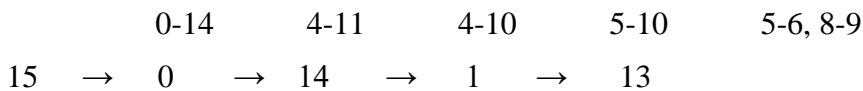


Рис. 4. Схема переносов ветвей

В результате имеем дерево T с грациозной разметкой, у которого все метки ребер различны (рис. 5).

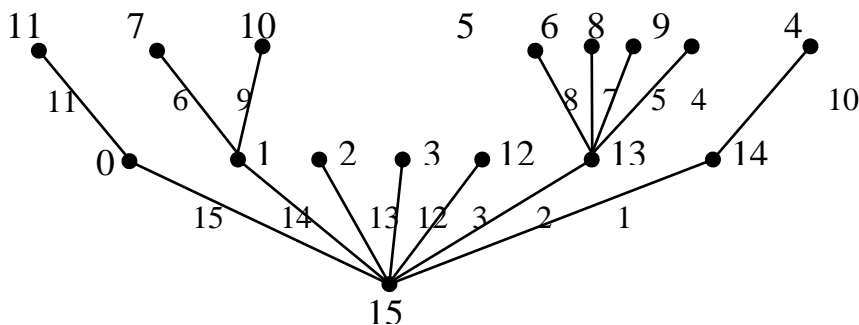


Рис. 5. Грациозное дерево T

П. Гончар и А. Хавьер применили данный метод переноса висячих ребер для построения грациозной разметки всех деревьев диаметра 4 [5]. Затем определили третий тип переноса, который назвали *backwards double 8-transfer*. Он включает в себя восемь переносов первого типа:

$$0 \rightarrow n \rightarrow 1 \rightarrow n-1 \rightarrow 0 \rightarrow n \rightarrow 1 \rightarrow n-1 \rightarrow 2.$$

Эта последовательность переносов оставляет четное количество висячих ребер на каждой вершине с меткой $0, n, 1, n-1$. Затем выполняется возврат к основной последовательности переносов $2 \rightarrow n-2 \rightarrow 3 \dots$ первого или второго типа. Используя третий тип переноса авторы построили грациозную разметку всех деревьев диаметра 5. П. Гончар и Г. Моножова в 2007 году [6] методом переносов построили грациозное обобщенное банановое дерево.

В 2014 году М. Сайпердок показал, что любой перенос может быть заменен на перенос первого типа и определил новые последовательности, состоящие только из переносов первого типа, для реализации грациозной разметки некоторых деревьев диаметра 6.

Таким образом, дальнейшее развитие метода переносов зависит от организации новых перспективных последовательностей переносов поддеревьев и висячих ребер.

2.2. Метод Δ -построения грациозных деревьев. В 1976 году И. Джахит [7] выдвинул гипотезу о том, что все полные бинарные деревья грациозные. Это послужило толчком к разработке новых методов порождения грациозных деревьев из деревьев меньших порядков.

Первый алгоритм построения грациозных деревьев больших порядков из грациозных деревьев меньших порядков встречается у Р. Стентона и С. Занке в работе [7]. Независимо К. Кох, Д. Роджерс и Т. Тан получили аналогичные результаты, усовершенствовали их, представив новые возможности для порождения грациозных деревьев [8-10].

Рассмотрим метод, предложенный К. Кохом, Д. Роджерсом и Т. Таном в 1977 году [8], названный Δ -построением. В данном методе за основу берется грациозное дерево T порядка $|V(T)| = n$ с разметкой f . Пусть вершина w дерева T имеет наибольшую метку n , т.е. $f(w) = n$. Построение происходит путем дизъюнктивного объединения изоморфных копий T_i дерева T с помощью новой вершины w_0 и ребер $w_0w_1, w_0w_2, \dots, w_0w_p$, где $p \geq 1$ и $w_i \in V(T_i)$ – изоморфные образы вершины w . Новое дерево обозначается T_w^p (рис. 6). Граф T_w^p с множеством вершин $pn + 1$ имеет грациозную разметку f^* , которая определяется следующим образом: $f^*(w_0) = pn + 1$ и для каждой вершины $v \in V(T_i)$, где $i = 1, 2, \dots, p$

$$f^*(v) = \begin{cases} in + 1 - f(v), & \text{если } d(w, v) \text{ – четное в графе } T(n), \\ (p + 1 - i)n + 1 - f(v), & \text{если } d(w, v) \text{ – нечетное в графе } T(n). \end{cases}$$

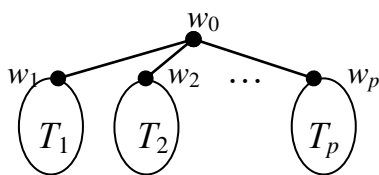


Рис. 6. Грациозное дерево T_w^p

Следующие две модификации метода Δ -построения предложили в 1979 году К. Кох, Д. Роджерс и Т. Тан в работе [10]. Одна из них заключается в том, что в дизъюнктивном объединении изоморфных копий T_i грациозного дерева T вершины w_1, w_2, \dots, w_p отождествляются, то есть $w_1 = w_2 = \dots = w_p = w_0$. Во втором варианте используется два произвольных грациозных дерева S и T . Рассмотрим его более детально.

Пусть $|V(S)| = m$, $|V(T)| = n$ и $V(S) = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$, $V(T) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Обозначим через f_m, f_n – грациозные разметки графов S и T , соответственно. Возьмем дерево S в качестве основы. В дереве T зафиксируем произвольную вершину v^* . Отождествим каждую вершину w_i , где $i = 1, 2, \dots, m$ графа S с образом вершины v^* в каждой копии T_i изоморфной дереву T . Новое дерево имеет mn вершин и обозначается $S\Delta T$. Для каждой вершины v дерева T_i , $i = 1, 2, \dots, n$ зададим функцию:

$$f^*(v) = \begin{cases} (f_m(w_i) - 1) - f_n(v), & \text{где } d(v^*, v) \text{ – четное в графе } T(n), \\ (m - f_m(w_i))n + f_n(v), & \text{где } d(v^*, v) \text{ – нечетное в графе } T(n). \end{cases}$$

Функция f^* удовлетворяет условиям определения 1. Таким образом, $S\Delta T$ – грациозное дерево. Алгоритм построения $S\Delta T$ носит название Δ -построения.

Покажем использование данного метода на примере. Пусть графы S и T – грациозно размеченные деревья, представленные на рисунке 7. В результате Δ -построения образуется грациозное дерево $S\Delta T$ порядка 15 (рис. 8).

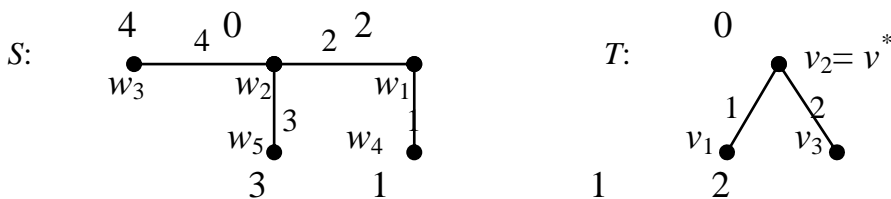


Рис.7. Грациозные деревья S и T

В 1998 году М. Буржио и Г. Ферерас [11] обобщили алгоритм Δ -построения. Они предложили T_i и T_j копии дерева T соединять произвольным ребром $v^i v^j$, а не фиксированным ребром $w_i w_j$ дерева S . На рисунке 9 представлено обобщенное Δ -построение дерева $S\Delta T$.

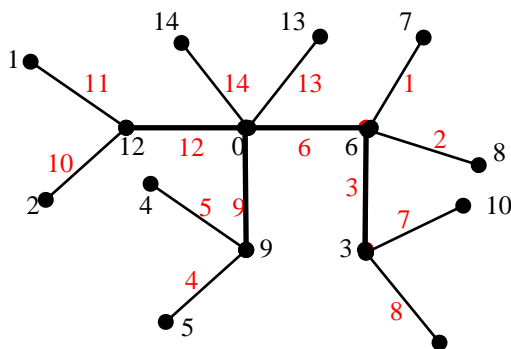


Рис.8. Грациозная разметка $S\Delta T$

М. Буржио и Г. Ферерас в работе [11] внесли изменения в метод Δ -построения. Они используют два грациозных дерева S и T , одно из которых берется в качестве основы. Авторы назвали его h -деревом, а другое дерево в виде копий. Алгоритм Δ -построения выполняется на всех вершинах $host$ -дерева, кроме корневой вершины с наибольшей меткой. Корневая вершина помечается $(m-1)n + 1$, а все остальные метки согласно метода Δ -построения. Полученное дерево обозначается как $S\Delta_{+1}T$, а сам метод называется Δ_{+1} -построение.

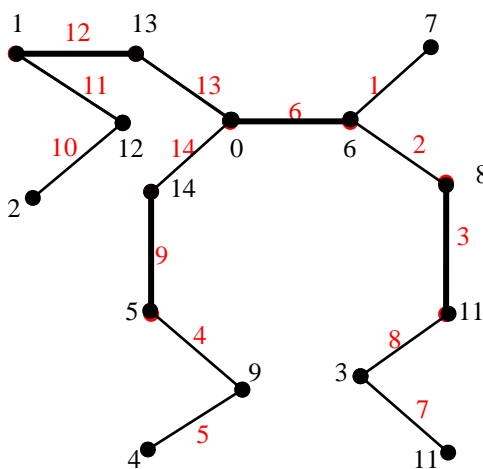


Рис. 9. Обобщенное Δ -построение

Рассмотрим его на примере. Пусть графы S и T – грациозно размеченные деревья, представленные на рисунке 10. В результате Δ_{+1} -построения образуется грациозное дерево $S\Delta_{+1}T$ порядка 7, как показано на рисунке 11.

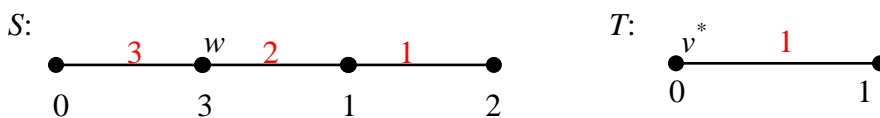
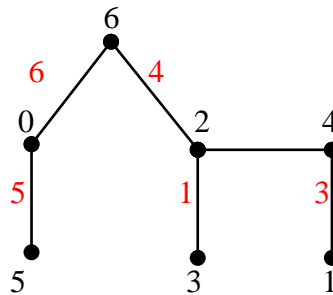


Рис. 10. Грациозные деревья S и T

Рис. 11. Грациозное дерево $S\Delta_{+1}T$

Используя Δ -построение, доказана грациозность m -арного дерева для любого натурального m . Это доказательство стало ответом на гипотезу И. Джахита [7] о том, что все полные бинарные деревья грациозны.

3. МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПОСТРОЕНИЯ ГРАЦИОЗНЫХ ГРАФОВ

В данном разделе анализируются публикации, в которых использовались универсальные методы построения грациозной разметки графов. Т. Редл в работе [12], К. Ешти и П. Азими в работах [13] и [14] рассмотрели задачу построения грациозной разметки разных классов графов с применением методов линейного целочисленного программирования. Первоначально один из методов был применен для нахождения грациозной разметки графов Петерсона и двойных конусов в 2003 году в работе [12]. Опишем метод, представленный К. Ешти и П. Азими в 2004 году.

Пусть задан граф $G = (V, E)$ порядка m и размера n , не содержащий кратных ребер и петель. Введем ряд переменных, необходимых для составления ограничений:

x_i – метка i -той вершины графа G , $i = 1, \dots, m$;

e_{ij} – метка ребра ij , $e_{ij} \neq 0$, $i \neq j$;

r_{ijlp} – разность меток ребер ij и lp , $ij \neq lp$, $r_{ijlp} \neq 0$;

s_{ijlp} – сумма меток ребер ij и lp , $s_{ijlp} \neq 0$, $e_{ij} \neq -e_{lp}$;

t_{ij} – разность меток вершин i и j , $i, j \notin V(G)$,

где $i, j, l, p = 1, 2, \dots, m$.

Сформулируем задачу:

- 1) $x_i - x_j = e_{ij}$, для всех $i, j \in V(G)$, $(i, j) \in E(G)$, $i \neq j$;
- 2) $e_{ij} - e_{lp} = r_{ijlp}$, для всех $r_{ijlp} \neq 0$, $(i, j), (l, p) \in E(G)$, $(i, j) \neq (l, p)$;
- 3) $e_{ij} + e_{lp} = s_{ijlp}$, для всех $s_{ijlp} \neq 0$, $(i, j), (l, p) \in E(G)$, $(i, j) \neq (l, p)$;
- 4) $x_i - x_j = t_{ij}$, для всех $(i, j) \notin E(G)$, $i \neq j$;
- 5) $0 \leq x_i \leq m$, где x_i – целые числа;
- 6) $e_{ij}, r_{ijlp}, s_{ijlp}, t_{ij}$ – ненулевые числа,

где $i, j, l, p = 1, 2, \dots, m$.

Полученные ограничения гарантируют выполнение условий грациозности, если $e_{ij} \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ при $i, j \in V(G)$. Число введенных ограничений 1)-4) в постановке задачи

приводят к $((n - 1)^2 + 1/2n^2 - (n - 1) - n/2)$ уравнениям [13], что значительно затрудняет поиск решения при увеличении значения n . Предлагаемый в этой работе способ модификации метода «Ветвей и границ» дает возможность не только отбросить условие целочисленности и ограничение б), а так же особым образом выбрать переменную для ветвления. Этот выбор выполняется по стратегии «jumptracking» [13]. Согласно этой стратегии, в каждое полученное решение входят все выше описанные переменные, которые заносятся в список оптимальных решений. При этом все нецелочисленные и нулевые переменные каждого текущего решения распределяются в множества: $P_1 = \{e_{ij}, t_{ij} | e_{ij} = 0 \text{ или } t_{ij} = 0\}$, $P_2 = \{r_{ijlp}, s_{ijlp} | r_{ijlp} = 0 \text{ или } s_{ijlp} = 0\}$, $P_3 = \{x_i | x_i - \text{имеет не целое значение}\}$. Переменная, выбранная из множества P_1 , имеет больший приоритет над переменной из P_2 . Аналогично, переменная из множества P_2 имеет больший приоритет над переменной из P_3 . Если выбирается переменная из множеств P_1 или P_2 , то решаем две новые подзадачи линейного программирования с дополнительными ограничениями (например: $x \geq 1$ и $x \leq -1$). Если выбирается переменная из множества P_3 , то две новые подзадачи имеют следующие ограничения: в первой подзадаче дробную переменную x , уменьшая до $\lfloor x \rfloor$, получаем дополнительное ограничение: $x \leq \lfloor x \rfloor$; во второй подзадаче дробную переменную x увеличивая до $\lfloor x \rfloor + 1$, получаем дополнительное ограничение: $x \geq \lfloor x \rfloor + 1$.

Если из списка оптимальных решений несколько раз выбирается переменная, которая не приводит к нужному результату, то данное решение удаляется из списка. Приведенный способ позволяет ускорить процесс нахождения оптимального решения задачи. Чем меньше мощность множества $|P_1| + |P_2| + |P_3|$, тем быстрее получим допустимое решение задачи.

В работах [13] и [14], используя выше описанный алгоритм, построена грациозная разметка для деревьев с 35, 40 вершинами, а так же определена грациозность определенных классов графов, выбранных произвольно.

4. КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ ГРАЦИОЗНЫХ ГРАФОВ, ПОРОЖДЕННЫХ ЦИКЛАМИ

Впервые грациозная разметка циклов C_n была представлена в работе А. Роса [2]. Такие виды графов, порожденные циклами, как циклы с хордами, циклы с P_k -цепью, циклы с двойными хордами, циклы с зигзагообразными хордами, циклы с дублированием вершины (ребра) выделим в одну группу. Их грациозность доказана с использованием однотипных функциональных зависимостей. Иной тип рекурсии в функциональной зависимости приводит к грациозной разметке циклов с параллельными хордами.

4.1. Циклы с хордами. В 1977 году Р. Бодендик, Г. Шумахер и Г. Вагнер приступили к исследованию на грациозность циклов с хордой. В 1984 году К. Ма, С. Фен в работе [15] представили метод построения грациозной разметки цикла с хордой (рис. 12). Остановимся на описании этого метода.

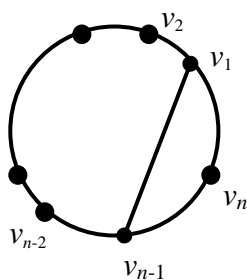


Рис. 12. Схема разметки графа $C_6 + v_{n-1}v_1$

Пусть дан граф $G = C_n + v_{n-1}v_1$, где $v_{n-1}v_1$ – хорда цикла C_n . Для каждой вершины v_i графа $G = C_n + v_{n-1}v_1$, где $n \equiv 1 \pmod{4}$, определим на множестве вершин функцию $f: V \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n+1\}$ следующим образом:

$$f(v_n) = n + 1; \quad f(v_{n-1}) = 0; \quad f(v_n) = n - k;$$

$$f(v_{2k+1}) = n - k, \quad \text{где } k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-3}{2};$$

$$f(v_{2k}) = k, \quad \text{где } k = 1, 2, \dots, \frac{n-5}{4};$$

$$f(v_{2k}) = k + 1, \quad \text{где } k = \frac{n-1}{4}, \frac{n-1}{4} + 1, \dots, \frac{n-3}{2}.$$

Функция f будет инъективной, а индуцированная ею функция f^* на множестве ребер, в соответствии с определением 1.1, представляет собой биекцию. Таким образом, f порождает грациозную разметку в $G = C_n + v_{n-1}v_1$.

Для $n \equiv 2, 3, 0 \pmod{4}$ аналогичные результаты получены в работе [15] (рис. 13а).

Идея порождения грациозной разметки, описанная выше, была распространена на циклы с k хордами. Частным случаем является цикл с двойной хордой (рис. 13б). Для него грациозная разметка построена В. Канерием и др. в 2014 году [16].

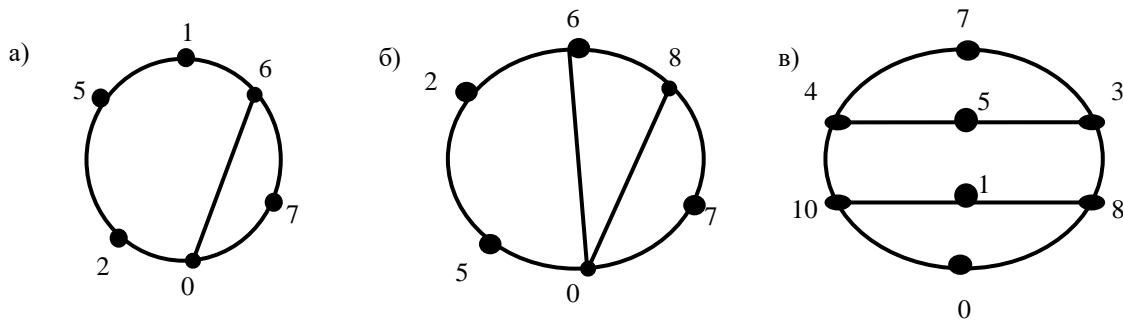


Рис. 13. Грациозная разметка цикла C_6 : а) с хордой; б) с двойной хордой; в) с параллельными P_3 -цепями

В 2005 году Г. Сесурамен и А. Елумалай представили рекурсивный метод построения грациозной разметки для циклов C_n ($n \geq 6$) с параллельными P_k -цепями, где $k = 3, 4, 6, 8, 10$. Рассмотрим его для цикла C_n с P_3 -цепями. Обозначим $V(C_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ и соединим пары вершин v_i, v_{n-i} цикла, где $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ с концевыми вершинами P_3 -цепей. Получим граф G , который имеет гамильтонову цепь с началом в вершине цикла v_0 и концом – v_α , где $\alpha = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, если n – нечетное и $\alpha = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, если n – четное. Выполним разметку вершин, согласно теореме 1 [17]. Пример грациозной разметки цикла C_6 с параллельными P_3 -цепями представлен на рисунке 13в.

4.2 Дублирование вершины (ребра) в цикле. Разработкой методов построения грациозной разметки графов, порожденных дублированием вершины (ребра) в циклах, занимались С. Вайдя, Л. Буюкумар, К. Секар. В 2002 году К. Секар представил метод дублирования вершины для цикла C_n , где $n \equiv 1$ или $2 \pmod{4}$ [18]. С. Вайдя и Л. Буюкумар в 2011 году в работе [19] обобщили данный метод и доказали, что дублирование вершины (определение 1.2) можно применять для цикла любого порядка. Кроме этого они изучали графы, полученные дублированием ребра в циклах, и доказали, что они имеют грациозную разметку только для циклов четных порядков. Рассмотрим этот метод на примере. Обозначим $V(C_6) = \{v_0, v_1, \dots, v_5\}$ вершины цикла C_6 (рис. 14а). Выполним дублирование ребра v_0v_1 , используя определение 1.3. Получим граф G (рис. 14б). Разметку вершин осуществим, согласно теореме 2.3 [18].

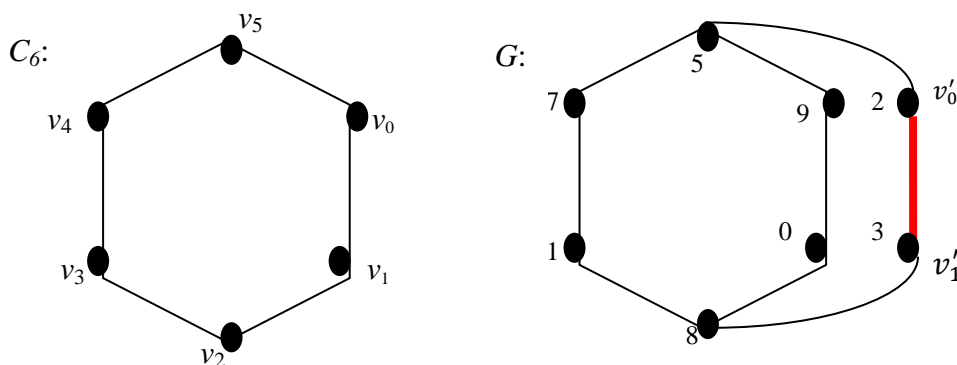


Рис. 14: а) разметка цикла C_6 ; б) грациозная разметка графа G

ВЫВОДЫ

В результате проведенного анализа выделены частные и универсальные методы построения грациозной разметки графов, которые нашли применение во многих областях, таких как теория чисел, теория кодирования, радиолокация, радиоастрономия, схемотехника. Выполненная систематизация, отображенная на схеме (рис. 15), позволяет свободно ориентироваться в разнообразии методов порождения грациозной разметки.



Рис. 15. Схема графов и методов построения грациозной разметки

ЛИТЕРАТУРА

1. Ringel G. Problem 25 / G. Ringel // In Theory of Graphs and Its Applications. Proceeding of the Symposium held in Smolenice in June 1963. Publishing House of the Czech. Acad. of Science. Prague. – 1964. – P. 162.
2. Rosa A. On certain valuations of the vertices of a graph / A. Rosa // Theory of Graphs. International Symposium, Rome, July. – 1966. – Gordon and Breach, New York and Dunod Paris. – 1967. – P. 349-355.
3. Bermond J. Graceful graphs, radio antennae and French windmills / J. Bermond // Graph Theory and Combinatorics. – 1979. – P. 18-37.
4. Hrnčiar P. All trees of diameter five are graceful / P. Hrnčiar, A. Haviar // Discrete Mathematics. – 2001. – № 233 – P. 133-150.
5. Hrnčiar P. A new family of graceful trees / P. Hrnčiar, G. Monoszova // preprint. Combinatorica o.p.s. Department of Applied Mathematics. VfB – Technical University Ostrava, 2007.
6. Cahit I. Are all complete binary trees graceful? / I. Cahit // American Mathematical Monthly. – 1976. – Vol. 83. – P. 35-37.
7. Stanton R. Labeling of balanced trees / R. Stanton, C. Zarnke // Proc. 4th Southeast Conf. Combin. Graph Theory, Computing. – 1973. – P. 479-495.

8. Koh K. M. On graceful trees / K. M. Koh, D. G. Rogers, T. Tan // *Nanta Mathematics*. – 1977. – Vol. 10, № 2. – P. 207-211.
9. Koh K. M. Two theorems on graceful trees / K. M. Koh, D. G. Rogers, T. Tan // *Discrete Mathematics*. – 1979. – Vol. 25. – P. 141-148.
10. Koh K. M. Products of graceful trees / K. M. Koh, D. G. Rogers, T. Tan // *Discrete Mathematic*. – 1980. – Vol. 31. – P. 279-292.
11. Burzio M. The Subdivision Graph of a Graceful Tree is a Graceful Tree / M. Burzio, G. Ferrarese // *Discrete Mathematics*. – 1998. – Vol. 181, № 1-3. – P. 275-281.
12. Redl T. A. Graceful graphs and graceful labelings: two mathematical programming formulations and some other new results / T. A. Redl // *Tech. Report TR03-01, CAAM Department, Rice University*. – Texas, 2003.
13. Eshghi K. Applications of mathematical programming in graceful labeling of graphs / K. Eshghi, P. Azimi // *Journal of Applied Mathematics*. – 2004. – Vol. 1. – P. 1-8.
14. Eshghi K. An algorithm for finding a feasible solution of graph labeling problems / K. Eshghi, P. Azimi // *Utilitas Mathematica*. – 2007. – Vol. 72. – P. 163-174.
15. Ma K. J. About the Bodendiek's conjecture of graceful graph / K. J. Ma, C. J. Feng // *Journal. Mathematical Research and Exposition*. – 1984. – Vol. 4. – P. 15-18.
16. Kaneria V. J. Some graceful graphs / V. J. Kaneria, H. M. Makadia, M. Meghapara // *International Journal of Mathematics and Soft Computing*. – 2014. – Vol. 4, № 2. – P. 165-172.
17. Sethuraman G. Gracefulness of a cycle with parallel P_k -chords / G. Sethuraman, A. Elumalai // *Australasian Journal of Combinatorics*. – 2005. – Vol. 32. – P. 2005-2011.
18. Sekar C. *Studies in Graph Theory* / C. Sekar // Ph.D. Thesis. Madurai Kamaraj University. – 2002.
19. Vaidya S. K. Some new graceful graphs / S. K. Vaidya, L. Bijukumar // *International Journal of Mathematics and Soft Computing*. – 2011. – Vol. 1, № 1. – P. 37-45.

REFERENCES

1. Ringel, G. (1964), "Problem 25", *In Theory of Graphs and Its Applications. Proc. Symp. Smolenice 1963, Czech. Acad. Sci.*, p. 162.
2. Rosa, A. (1967), "On certain valuations of the vertices of a graph", *Theory of Graphs. International Symposium, Rome, July – 1966, Gordon and Breach, New York and Dunod Paris*. pp. 349-355.
3. Bermond, J. (1979), "Graceful graphs, radio antennae and French windmills", *Graph Theory and Combinatorics*, pp. 18-37.
4. Hrnčiar, P. and Haviar, A. (2001), "All trees of diameter five are graceful", *Discrete Mathematics*, no. 233, pp. 133-150.
5. Hrnčiar, P. and Monoszova, G. (2007), "A new family of graceful trees, preprint", *Combinatorica o.p.s., Department of Applied Mathematics. VfB – Technical University Ostrava*.
6. Cahit, I. (1976), "Are all complete binary trees graceful?", *American Mathematical Monthly*, vol. 83, pp. 35-37.
7. Stanton, R. and Zarnke, C. (1973), "Labeling of balanced trees", *Proc. 4th Southeast Conf. Combin. Graph Theory, Computing*. pp. 479-495.
8. Koh, K.M., Rogers, D.G. and Tan, T. (1977), "On graceful trees", *Nanta Mathematics*, vol. 10, no. 2, pp. 207-211.
9. Koh, K.M., Rogers, D.G. and Tan, T. (1979), "Two theorems on graceful trees", *Discrete Mathematics*, vol. 25, pp. 41-148.
10. Koh, K.M., Rogers, D.G. and Tan, T. (1980), "Products of graceful trees", *Discrete Mathematics*, vol. 31, pp. 279-292.

11. Burzio, M. and Ferrarese, G. (1998), "The Subdivision Graph of a Graceful Tree is a Graceful Tree", *Discrete Mathematics*, vol. 181, no. 1-3, pp. 275-281.
12. Redl, T.A. (2003), "Graceful graphs and graceful labelings: two mathematical programming formulations and some other new results", *Tech. Report TR03-01*, CAAM Department, Rice University, Texas.
13. Eshghi, K. and Azimi, P. (2004), "Applications of mathematical programming in graceful labeling of graphs", *Journal of Applied Mathematics*, vol. 1, pp. 1-8.
14. Eshghi, K. and Azimi, P. (2007), "An algorithm for finding a feasible solution of graph labeling problems", *Utilitas Mathematica*, vol. 72, pp.163-174.
15. Ma, K.J. and Feng, C.J. (1984), "About the Bodendiek's conjecture of graceful graph", *Journal of Mathematical Research and Exposition*, vol. 4, pp. 15-18.
16. Kaneria, V.J. Makadia, H.M. and Meghapara, M. (2014), "Some graceful graphs", *International Journal of Mathematics and Soft Computing*, vol. 4, no. 2, pp. 165-172.
17. Sethuraman, G., Sethuraman, G. and Elumalai, A. (2005), "Gracefulness of a cycle with parallel P_k -chords", *Australasian Journal of Combinatorics*, vol. 32, pp. 2005-2011.
18. Sekar, C. (2002), "Studies in Graph Theory", *Ph.D. Thesis*, Madurai Kamaraj University.
19. Vaidya, S.K. and Bijukumar, L. (2011). "Some new graceful graphs. *International Journal of Mathematics and Soft Computing*", vol. 1, no. 1, pp. 37-45.

УДК

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У «ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ» ЗА ФАХОМ «ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ»

Іванов І. І., д. ф.-м. н., професор

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

ivan@mail.ru

До друку будуть прийматися лише наукові статті, де присутні такі необхідні елементи

(п. 3 Постанови президії ВАК України № 7 – 05 / 1 від 15 січня 2003 р.):

- **Постановка проблеми** у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями.
- **Аналіз останніх досліджень і публікацій**, в яких започатковано порушення даної проблеми і на які спирається автор.
- **Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми**, яким присвячується стаття.
- **Формулювання цілей статті** (постановка завдання).
- **Виклад основного матеріалу дослідження** з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів.
- **Висновки з даного дослідження і перспективи** подальших розвідок у даному напрямку.

1. МАКЕТ СТОРІНКИ

Для оригінал-макета використовується формат А4 з такими полями:

з усіх боків – 2 см.

Шрифт набору – Times New Roman.

У разі необхідності для шрифтових виділень у таблицях і рисунках дозволяється застосовувати шрифт Courier New (наприклад, для ілюстрації текстів програм для ЕОМ). Для стилістичного виділення фрагментів тексту слід вживати начертання *курсив*, **напівжирний**, *напівжирний курсив* зі збереженням гарнітури, розміру шрифту та інтервалу абзацу.

Гарнітури, розміри шрифтів та начертання:

- a) для УДК: Times New Roman, – 14 пт, усі літери прописні;
- b) для заголовку статті: Times New Roman, – 14 пт, напівжирний, усі літери прописні;
- c) для підзаголовків: Times New Roman, – 12 пт, напівжирний, усі літери прописні;
- d) для прізвищ, ініціалів авторів, адреси електронної пошти: Times New Roman – 12 пт, усі строчні;
- e) для назв і адрес організацій: Times New Roman – 12 пт, курсив, усі строчні;
- f) для анотацій, виносок, посилань, підписів до рисунків та надписів над таблицями: Times New Roman – 10 пт;
- g) для ключових слів: Times New Roman – 10 пт, курсив;
- h) для основного тексту: Times New Roman – 12 пт, як у реченні.

Інтервал між абзацами – 6 пт, міжрядковий інтервал – одинарний.

2. ТИПОГРАФСЬКІ ПОГОДЖЕННЯ ТА СТИЛІ

УДК вказується в першому рядку сторінки і вирівнюється за лівим краєм. Заголовок статті набирається в наступному за УДК рядку і вирівнюється по центру. У третьому рядку з вирівнюванням по центру зазначаються прізвища, ініціали авторів. У наступному рядку розміщується інформація про назву та адресу організації, де працює (навчається) автор, яка також вирівнюється по центру. Четвертий рядок містить адресу електронної пошти авторів, розміщену по центру. Далі розташовується анотація (3-5 речень) і ключові слова мовою оригіналу та анотація українською або російською мовами (залежно від мови оригіналу). З наступного абзацу послідовно набираються і вирівнюються по центру заголовки статті англійською мовою, транслітеровані прізвища, ініціали авторів, назви і адреси організацій, які повинні бути подані англійською мовою, із зазначенням міста і країни, без назви вулиці, яка подається транслітерацією. З наступного рядка розміщується розширена (обсягом не менше 3,5 тис. знаків) анотація із ключовими словами англійською мовою. Після анотацій з абзацу викладається основний текст статті.

Заголовки наукових статей повинні бути інформативними та містити тільки загальноприйняті скорочення. У перекладі заголовків статей англійською мовою не повинно бути жодних транслітерацій, окрім неперекладних назв власних імен, приладів та інших об'єктів, що мають власні назви; також не використовується неперекладний сленг. Це стосується також анотацій і ключових слів.

Початок абзацу основного тексту виділяється збільшеним інтервалом між абзацами і не виділяється відступом або пустим рядком.

Ілюстрації мають бути оригінальними рисунками або фотографіями. Фотографії скануються у 256 градаціях сірого. Ілюстрації розміщуються у відповідних місцях тексту статті (по можливості вгорі сторінки) і повинні бути підписані та послідовно пронумеровані арабськими цифрами: Рис. 1, Рис. 2. Номер рисунка та підпис розміщуються безпосередньо під рисунком. Кожен рисунок та підпис до нього включаються до тексту публікації. Створення графічних об'єктів може здійснюватися будь-яким графічним редактором у форматі ВМР файлів. Виконання рисунків засобами Microsoft Word здійснюється через використання команд панелі «Рисование». Підписи здійснюються командою «Надпись». Усі графічні компоненти рисунка і підписи об'єднуються командою «Группировать» (меню «Действия» на панелі «Рисование») і подаються у вигляді одного графічного об'єкта, прив'язаного до тексту з об'єктом «В тексте». Ілюстрації готують та масштабують так, щоб розміри букв тексту на ілюстраціях не перевищували розмір літер основного тексту статті більше, ніж на 50%.

Ілюстрації, так само як і підписи до них, вирівнюються на середину рядка (за виключенням невеликих рисунків – не більш 7 см, які можуть розташовуватися по декілька в ряд).

Таблиці розміщуються у відповідних місцях тексту статті (по можливості вгорі сторінки) і повинні містити назву та бути послідовно пронумерованими арабськими цифрами: Таблица 1, Таблица 2. Номер та назва таблиці розміщують над таблицями.

Посилання на літературні джерела послідовно нумеруються арабськими цифрами в порядку появи в тексті статті і зазначаються у квадратних дужках, де вказуються порядковий номер джерела та через кому конкретна сторінка [8, с.16]. Перелік літературних джерел мовою оригіналу подається в порядку їх нумерації після основного тексту статті з підзаголовком «ЛИТЕРАТУРА», який вирівнюється по центру. Список літератури оформлюється відповідно до ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 «Система стандартів з інформації, бібліотечної та видавничої справи. Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання».

З наступного абзацу подається перелік літературних джерел латиницею з підзаголовком «REFERENCES», який вирівнюється по центру.

3. СТИЛІСТИЧНІ ПОГОДЖЕННЯ

- Не допускається закінчення сторінки одним або декількома пустими рядками, за винятком випадків, спричинених необхідністю дотримання попереднього пункту (висячі підзаголовки і початок абзацу) та кінця статті.
- Не допускається починати сторінку незакінченим рядком (переноси в останньому рядковій заборонені).
- Не дозволяється підкреслювання в заголовках, підписах і надписах.
- Слід дотримуватися правила про мінімальні зміни в шрифтовому та стильовому оформленні сторінки для того, щоб максимально уникнути різноманітності макета і зберегти єдиний стиль збірника.
- Не допускається часте використання виносок (виноска повинна розглядатися як виняток і вживатися тільки у випадку дійсної необхідності).
- Ілюстрації мають бути підготовані та масштабовані таким чином, щоб розміри букв тексту на ілюстраціях не перевищували розмір букв основного тексту статті більш ніж на 50%.
- Сторінки тексту статті слід пронумерувати.
- Диск треба підписати, вказавши прізвище, ініціали автора, імена файлів.
- На диску повинно бути **два файли**:
 - ✓ **перший** – із текстом статті та анотацій з ключовими словами,
 - ✓ **другий** – із відомостями про авторів (прізвище, ім'я, по батькові; посада; вчений ступінь; учене звання; місце роботи або навчання; адреса електронної пошти; домашня адреса; номери контактних телефонів).

4. ДЛЯ ОПУБЛІКУВАННЯ СТАТТІ АВТОРУ НЕОБХІДНО ПОДАТИ ДО РЕДАКЦІЇ ЗБІРНИКА:

1. Роздрукований текст статті з анотаціями та ключовими словами.
2. Відомості про авторів.
3. Витяг з протоколу засідання кафедри або факультету.
4. Зовнішню рецензію.
5. Диск із текстом статті, анотацій, ключовими словами та відомостями про авторів.

Адреса редакції: Україна, 69600, м. Запоріжжя, МСП-41, вул. Жуковського, 66

Довідки за телефонами:

(061) 289-12-52 – відповідальний за випуск (технічний редактор)

(061) 289-12-26 – редакційно-видавничий відділ (IV корпус, кімн. 323)

Адреса електронної пошти:

kpmf.mf@znu.edu.ua

Збірник наукових праць

Вісник Запорізького національного університету
Фізико-математичні науки
№ 1, 2016

Технічний редактор – *Н.В. Ярош*

Верстка, дизайн-проробка, оригінал-макет і друк виконані
в редакційно-видавничому відділі
Запорізького національного університету
тел. (061) 228-75-47

Підписано до друку 13.10.2016. Формат 60 × 90/8.

Папір Data Copy. Гарнітура «Таймс».

Умовн.-друк. арк. 41,3

Замовлення № 240. Наклад 100 прим.

Запорізький національний університет
69600, м. Запоріжжя, МСП-41
вул. Жуковського, 66

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 5229 від 11.10.2016