

ISSN 2413-6549 (Print)
ISSN 2518-1785 (Online)

Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет

Заснований
у 1997 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації
Серія ДК № 5229 від 11 жовтня 2016 р.

Адреса редакції:
вул. Жуковського 66, корп. 1, ауд. 216,
м. Запоріжжя, Україна, 69060

Телефон
для довідок:
+38 066 53 57 687

Вісник

**Запорізького національного
університету**

Фізико-математичні науки

№ 1, 2020



Видавничий дім
«Гельветика»
2020

Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових праць. Фізико-математичні науки. Запоріжжя: Видавничий дім «Гельветика», 2020. № 1. 150 с.

Рекомендовано до друку та поширення через мережу Internet вченою радою ЗНУ (протокол засідання № 3 від 27.10.2020 р.)

На підставі Наказу Міністерства освіти і науки України № 886 від 02.07.2020 р. (додаток 4) збірник включено до Переліку наукових фахових видань України категорії «Б» у галузі фізико-математичних наук (113 – Прикладна математика, 121 – Інженерія програмного забезпечення, 122 – Комп'ютерні науки та інформаційні технології).

Журнал індексується в міжнародній наукометричній базі даних Index Copernicus.

РЕДАКЦІЙНА РАДА:

- Головний редактор** – Гоменюк С. І., доктор технічних наук, професор
Відповідальні редактори:
– Стеганцев Є. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент
– Швидка С. П., кандидат фізико-математичних наук, доцент

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

- Гребенюк С. М. – доктор технічних наук, доцент (Україна)
Гришак В. З. – доктор технічних наук, професор (Україна)
Єрмолаєв В. А. – кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)
Кеберле Н. Г. – кандидат технічних наук, доцент (Україна)
Клименко М. І. – кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)
Козін І. В. – доктор фізико-математичних наук, професор (Україна)
Кудін О. В. – кандидат фізико-математичних наук (Україна)
Панасенко Є. В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)
Чопоров С. В. – доктор технічних наук, доцент (Україна)
Шило Г. М. – доктор технічних наук, доцент (Україна)
Breslavsky I. – PhD in Mechanics, Docent (Канада)
Gerasimov T. – PhD in Mathematics, Docent (Німеччина)
Kolakowski Z. – Doctor of Science in Engineering, Professor (Польща)

ЗМІСТ

РОЗДІЛ І. ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Беженев С. О. <i>ОЦІНЮВАННЯ КРИТЕРІЇВ ГРАНИЧНОГО СТАНУ МАТЕРІАЛІВ АВІАЦІЙНИХ ГТД НА ОСНОВІ АКУСТОЕМІСІЙНОЇ МОДЕЛІ ДЕГРАДУВАННЯ МАТЕРІАЛІВ В УМОВАХ БАГАТОЦИКЛОВОЇ ВТОМИ</i>	7
Богуславська А. М., Гребенюк С. М., Морозов Д. М., Гнєздовський О. В. <i>РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ МЕТАЛЕВИХ ПАЛЬ</i>	14
Вакал Л. П., Вакал Є. С. <i>ЕВОЛЮЦІЙНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ</i>	20
Дудик М. В., Решітник Ю. В., Феньків В. М. <i>АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ БІЛЯ ВЕРШИНИ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ, ЩО ВИХОДИТЬ ІЗ КУТОВОЇ ТОЧКИ ЛАМАНОЇ МЕЖІ РОЗДІЛУ МАТЕРІАЛІВ</i>	27
Ємець О. О., Ємець О. О., Поляков І. М. <i>РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІГРОВИХ ЗАДАЧ З ОБМЕЖЕННЯМИ-ПОЛІРОЗМІЩЕННЯМИ НА СТРАТЕГІЇ ОДНОГО ГРАВЦЯ: ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД ТИПУ БРАУНА-РОБІНСОН</i>	38
Леонтєва В. В., Кондрат'єва Н. О., Єлховська Я. А. <i>ІДЕНТИФІКОВАНІСТЬ ЗА СТАНОМ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ З ГІРОСКОПІЧНОЮ СТРУКТУРОЮ ПРИ ДІЇ ДИСИПАТИВНИХ СИЛ ТА СИЛ РАДІАЛЬНОЇ КОРЕКЦІЇ З УРАХУВАННЯМ ПЕВНОГО НЕЛІНІЙНОГО ЗМІШАНОГО ВИДУ ЗОВНІШНІХ ЗБУРЕНЬ</i>	46
Лещенко Д. Д., Козаченко Т. А. <i>ЕВОЛЮЦІЯ ДВИЖЕНІЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕГО И ВОЗМУЩАЮЩЕГО МОМЕНТОВ СИЛ</i>	55
Невлюдов І. Ш., Ромашов Ю. В. <i>МЕТОД НАПІВДИСКРЕТИЗАЦІЇ ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОГРАМНОГО УПРАВЛІННЯ СИСТЕМАМИ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ</i>	64
Онишкевич В. М., Сулим Г. Т. <i>МОДЕЛЮВАННЯ ЗНОШУВАННЯ ПРИ КОНТАКТІ ПРЯМОКУТНОГО ПЛОСКОГО ШТАМПА І ПРУЖНОЇ ПІВПЛОЩИНИ</i>	72
Слободян М. С., Кузь І. С., Білаш О. В., Шайнога М. І. <i>ЗГІН ІЗ РОЗТЯГОМ ПЛАСТИНИ З ОТВОРОМ ТА СИСТЕМОЮ ТРІЩИН ЗА СМУГОВОГО КОНТАКТУ ЇХНІХ БЕРЕГІВ</i>	77
Стреляєв Ю. М., Тітова О. О. <i>КОНТАКТ ЗІ ЗЧЕПЛЕННЯМ І ПРОКОВЗУВАННЯМ ЦИЛІНДРИЧНОГО ПЛОСКОГО ШТАМПА З ЗАОКРУГЛЕНИМ КРАЄМ ТА ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ</i>	86
Ткаченко І. Г., Антоненко Н. М., Морозов Ю. В. <i>ПЛОСКА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ БАГАТОШАРОВОЇ ОСНОВИ З НЕІДЕАЛЬНИМ ТЕПЛОВИМ КОНТАКТОМ МІЖ ШАРАМИ</i>	93
Турчин І. М., Турчин О. Ю. <i>НЕСТАЦІОНАРНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ В ПІВПРОСТОРІ З ПОКРИТТЯМ ЗА УМОВИ РУХОМОГО ТЕПЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ</i>	100

Халанчук Л. В., Чопоров С. В. <i>ДОСЛІДЖЕННЯ ГЕНЕРАЦІЇ НЕРІВНОМІРНИХ СТРУКТУРОВАНИХ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ ДВОВИМІРНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ</i>	106
Шевельова А. Є., Сіліч-Балгабаєва В. Б., Костенко М. В., Лобода В. В. <i>ПРО ВЗАЄМОДІЮ ВІДКРИТОЇ ТА ЗАКРИТОЇ ТРИЩИН МІЖ ДВОМА МАТЕРІАЛАМИ</i>	113
Ярецька Н. О. <i>КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ ЦИЛІНДРА ТА ШАРУ, ЯКИЙ ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНИЙ ІЗ НЕДЕФОРМОВАНОЮ ОСНОВОЮ</i>	121
РОЗДІЛ II. КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ	
Гальченко А. В., Чопоров С. В. <i>РЕАЛІЗАЦІЯ ЗАПЕРЕЧУВАНОВОГО ШИФРУВАННЯ ДАНИХ НА БАЗІ РОЗПОДІЛЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ</i>	128
Игнатченко М. С., Кудин А. В., Гнездовский А. В. <i>ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ БИБЛИОТЕКИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО АНАЛИЗА НА ЯЗЫКЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ PYTHON</i>	138

CONTENTS

SECTION I. APPLIED MATHEMATICS

Bezhenov S. O. <i>ESTIMATING THE CRITERIA FOR THE LIMITING STATE OF AVIATION GAS TURBINE ENGINE MATERIALS BASED ON THE ACOUSTIC EMISSION MODEL OF MATERIAL DEGRADATION UNDER CONDITIONS OF HIGH-CYCLE FATIGUE</i>	7
Bohuslavskaya A. M., Grebenyuk S. M., Morozov D. M., Hniezdovskyi O. V. <i>CALCULATION OF STRESS-DEFORMED STATE METAL PILLS</i>	14
Vakal L. P., Vakal Ye. S. <i>EVOLUTIONARY APPROACH TO SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ELLIPTIC EQUATIONS</i>	20
Dudyk M. V., Reshitnyk Yu. V., Fenkiv V. M. <i>ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE STRESS-STRAIN STATE NEAR THE TIP OF THE INTERPHACIAL CRACK OUTCOMING FROM ANGULAR POINT OF THE BROKEN INTERPHACE</i>	27
Yemets O. O., Yemets O. O., Polyakov I. M. <i>SOLVING OF GAME PROBLEMS WITH RESTRICTIONS-POLYARRANGEMENTS ON STRATEGIES OF ONE PLAYER: ITERATION METHOD TYPE BROWN-ROBINSON</i>	38
Leontieva V. V., Kondratieva N. A., Yelkhovska Ya. A. <i>STATE IDENTIFIABILITY OF A DYNAMICAL SYSTEM WITH A GYROSCOPIC STRUCTURE UNDER THE ACTION OF DISSIPATIVE FORCES AND FORCES OF RADIAL CORRECTION WITH A CERTAIN NONLINEAR EXTERNAL DISTURBANCES OF MIXED TYPE</i>	46
Leshchenko D. D., Kozachenko T. A. <i>EVOLUTION OF MOTIONS OF A RIGID BODY UNDER THE ACTION OF UNSTEADY RESTORING AND PERTURBATION TORQUES OF FORCES</i>	55
Nevliudov I. Sh., Romashov Yu. V. <i>THE SEMI-DISCRETISATION METHOD FOR OPTIMIZING THE PROGRAM CONTROL OF DISTRIBUTED PARAMETERS SYSTEMS</i>	64
Onyshkevych V. M., Sulym G. T. <i>MODELING OF WEAR AT CONTACT OF RECTANGULAR PLANE PUNCH AND ELASTIC HALF-PLANE</i>	72
Slobodian M. S., Kuz' I. S., Bilash O. V., Shaynoga M. I. <i>BENDING AND TENSION OF A PLATE WITH A HOLE AND SYSTEM OF CRACKS ON THE ASSUMPTION OF STRIPLIKE CRACK CLOSURE</i>	77
Streliaiev Yu. M., Titova O. O. <i>STICK-SLIP CONTACT OF THE CYLINDRICAL FLAT PUNCH WITH A ROUNDED EDGE AND ELASTIC HALF-SPACE</i>	86
Tkachenko I. H., Antonenko N. M., Morozov Yu. V. <i>PLANE THERMAL CONDUCTIVITY PROBLEM FOR A MULTILAYER FOUNDATION WITH NON-IDEAL THERMAL CONTACT BETWEEN ITS LAYERS</i>	93
Turchyn I. M., Turchyn O. Yu. <i>UNSTEADY HEAT CONDUCTIVITY PROBLEM FOR COATED HALF-SPACE UNDER MOVING HEAT LOAD</i>	100
Khalanchuk L. V., Choporov S. V. <i>RESEARCH OF NON-UNIFORM STRUCTURED DISCRETE MODELS GENERATION FOR TWO-DIMENSIONAL DOMAINS</i>	106

Sheveleva A. E., Silich-Balgabaieva V. B., Kostenko M. V., Loboda V. V.
*ON THE INTERACTION OF AN OPEN
 AND CLOSED CRACKS BETWEEN TWO MATERIALS*.....113

Yaretska N. A.
*CONTACT PROBLEM FOR PRE-STRESSED CYLINDER AND LAYER,
 WHICH IS RIGIDLY FIXED WITH THE UNDEFORMED BASIS*.....121

SECTION II. COMPUTER SCIENCE

Halchenko A. V., Choporov S. V.
THE DENIABLE ENCRYPTION BASED ON THE DISTRIBUTED CALCULATIONS.....128

Ihnatchenko M. S., Kudin O. V., Gnezdovskiy O. V.
*OBJECT-ORIENTED IMPLEMENTATION OF THE FINITE ELEMENT
 ANALYSIS LIBRARY IN THE PYTHON PROGRAMMING LANGUAGE*.....138

РОЗДІЛ І. ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

УДК 539.43:620.179.16

DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-01>

ОЦІНЮВАННЯ КРИТЕРІЇВ ГРАНИЧНОГО СТАНУ МАТЕРІАЛІВ АВІАЦІЙНИХ ГТД НА ОСНОВІ АКУСТОЕМІСІЙНОЇ МОДЕЛІ ДЕГРАДУВАННЯ МАТЕРІАЛІВ В УМОВАХ БАГАТОЦИКЛОВОЇ ВТОМИ

Беженов С. О.

*кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри двигунів внутрішнього згорання
Національний університет «Запорізька політехніка»
вул. Жуковського, 64, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0001-7329-356X
bezhenov@zntu.edu.ua*

Ключові слова: втома, деформація, акустична емісія, поверхнєве зміцнення, пошкодження структури матеріалу, стадійність руйнування.

Сучасні вимоги до підвищення термінів експлуатації з одночасним зниженням вартості продукції машинобудування зумовлюють потребу пошуку нових і вдосконалення наявних методів зміцнення конструкційних матеріалів. Урахування різноманітних експлуатаційних, конструкційних і технологічних факторів лише розрахунковими методами не забезпечує необхідної точності прогнозування механічної поведінки виробів в умовах втоми, що потребує проведення довготривалих випробувань задля верифікації результатів розрахунків. Тому актуальним залишається розвиток методик прогнозування граничного стану конструкційних матеріалів на великих базах періодичного навантаження за даними, що не руйнують методів контролю, зокрема методу акустичної емісії (АЕ). Ви рішення поставленого завдання ґрунтується на таких теоретичних передумовах. Використовується акустоемісійна модель циклічного деградування конструкційних матеріалів, яка встановлює зв'язок між характеристикою опору втоми матеріалу та його акустоемісійною активністю. Зазначена модель поєднує авторську модель багатоциклової втоми, динамічну дислокаційну модель пластичності (Т. Екоборі), закон дискретності структурно-енергетичної теорії руйнування матеріалів (В.С. Іванова) і загальноприйняті уявлення про стадійність характеру процесу накопичення пошкоджень при циклічному навантаженні. Досліджувалися модельні зразки сплавів на основі нікелю й титану. Зразки виготовлено як за стандартних технологічних процесів, так і після поверхневого ультразвукового зміцнення. Описано особливості циклічних АЕ характеристик, які є ідентичними для різних класів матеріалів з різною технологічною спадковістю. На основі одержаних результатів встановлено залежності між інформативними параметрами АЕ та критеріями граничного стану досліджуваних матеріалів авіаційних ГТД в умовах багатоциклової втоми. Це дасть можливість оцінювати ефективність видів і режимів технологічних операцій, спрямованих на підвищення ресурсу деталей ГТД, за даними неруйнівного АЕ контролю.

ESTIMATING THE CRITERIA FOR THE LIMITING STATE OF AVIATION GAS TURBINE ENGINE MATERIALS BASED ON THE ACOUSTIC EMISSION MODEL OF MATERIAL DEGRADATION UNDER CONDITIONS OF HIGH-CYCLE FATIGUE

Bezhenov S. O.

*Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Internal Combustion Engines
Zaporizhzhia Polytechnic National University
Zhukovskoho str., 64, Zaporizhzhya, Ukraine
orcid.org/0000-0001-7329-356X
bezhenov@zntu.edu.ua*

Key words: *fatigue, deformation, acoustic emission, hard facing, damages of the material structure, stage-by-stage fracture.*

Modern mechanical engineering products are expected to have increased lifetime at reduced cost. In order to enable this development, new and improved methods of structural materials strengthening have to be found. Mathematical modelling of the mechanical behaviour of the products in the conditions of fatigue, taking into account various operational, design and technological factors does not provide the necessary accuracy and has to be verified in long-term tests. Therefore, development of methodology for predicting the limiting state of structural materials under long-term periodic load by non-destructive control methods, in particular the acoustic emission (AE) method, remains topical.

The solution of this problem is based on the following theoretical assumptions. An acoustic emission model of cyclic degradation of structural materials is used, which establishes a relationship between the fatigue resistance characteristic of the material and its acoustic emission activity. The model combines the author's model of high-cycle fatigue, dynamic dislocation yielding model (by T. Yokobori), the law of discreteness of the structural-energy theory of material destruction (by V.S. Ivanova), and generally accepted ideas about the stage-by-stage process of damage accumulation under cyclic loading.

The studied designed nickel- and titanium-based alloy samples have been studied. The samples were fabricated both in standard technological process and including ultrasonic surface hardening. Features of cyclic AE characteristics that are identical for different classes of materials with different technological inheritance are described. Based on the obtained results, the relationships between the informative parameters of AE and the criteria of the limiting state of the studied materials for aviation gas turbine engines under the high-cycle fatigue conditions are established. This enables assessment of the effectiveness of the technological measures aimed at increasing the life of parts of the gas turbine engine, based on non-destructive AE control.

Вступ. Сучасні вимоги до підвищення термінів експлуатації з одночасним зниженням вартості продукції машинобудування зумовлюють потребу пошуку нових і вдосконалення наявних методів зміцнення конструкційних матеріалів. Водночас, оскільки більшість конструкцій працюють в умовах циклічно діючих навантажень, коли визначальним видом руйнування виявляється втома, актуальним залишається завдання отримання достовірних даних про опір утомі конструкційних матеріалів на великих базах періодичного навантаження. Гострою, зокрема,

є проблема забезпечення необхідної довговічності відповідальних деталей ГТД. Завдання значно ускладнюється, якщо виникає необхідність здійснити вибір та обґрунтувати режими технологічних методів фінішної та зміцнюючої обробки матеріалів деталей машин з достовірним прогнозом їх довговічності в заданих умовах експлуатації [1].

Урахування різноманітних експлуатаційних, конструкційних і технологічних факторів лише розрахунковими методами не забезпечує необхідної точності прогнозування механічної пове-

дінки виробів в умовах втоми [2–4], що потребує проведення довготривалих випробувань задля верифікації результатів розрахунків. Отже, повністю відмовитися від тривалих випробувань на втому сьогодні не є можливим, а матеріальні та часові витрати на забезпечення таких випробувань є очевидними.

Поряд із розвитком методик прогнозування циклічної довговічності конструкційних матеріалів на великих базах періодичного навантаження за даними високочастотних випробувань [5] одним із перспективних напрямів оцінювання технічного стану виробів, що експлуатуються в умовах багатоциклової втоми (БЦВ), є застосування неруйнівних методів контролю, зокрема методу акустичної емісії (АЕ) [6; 7]. Проте через складність визначення реального напружено-деформованого стану (НДС) локальних об'ємів матеріалу, що є відповідальними за його руйнування, усе ще залишається проблемним установлення зв'язку між ступенем деформації конструкційного матеріалу та параметрами АЕ в заданих умовах навантаження.

Метою роботи є дослідження можливості оцінювання граничного стану матеріалів різних класів з різною технологічною спадковістю в умовах багатоциклової втоми на основі даних попереднього неруйнівного контролю методом АЕ.

Теоретичні передумови розв'язання задачі. У роботі використано акустоемісійну модель циклічного деградування конструкційних матеріалів [8], яка встановлює зв'язок між характеристикою опору втомі матеріалу та його акустоемісійною активністю. Модель поєднує модель БЦВ [9], динамічну дислокаційну модель плинності [10], закон дискретності структурно-енергетичної теорії руйнування матеріалів [11], загальноприйняті уявлення про стадійність характеру процесу накопичення пошкоджень при циклічному навантаженні. При цьому важливим є інкубаційний період втоми, так звана стадія нелокалізованого руйнування [12], коли в структурі матеріалу утворюються субмікроскопічні тріщини, випадково розташовані по об'єму.

Згідно з моделлю БЦВ, темп циклічного деградування матеріалу задається величиною параметра m як мірою стійкості локального об'єму до зовнішнього навантаження в умовах БЦВ:

$$m = \frac{\lg(C_{HCF}/N_p)}{\lg \sigma_p}. \quad (1)$$

На основі динамічної дислокаційної моделі плинності інтенсивність АЕ випромінювання пов'язується з інтенсивністю змінювання НДС локального об'єму [13], що не суперечить відомим АЕ моделям. Логарифмічна міра інтенсив-

ності АЕ випромінювання матеріалу при його циклічному навантаженні подається у вигляді:

$$n_{AE} = \frac{\lg(\dot{N}_{\Sigma AE}/\dot{N}_{\Sigma AE(0)})}{\lg(\sigma_a/\sigma_p)}. \quad (2)$$

З позицій структурно-енергетичної теорії руйнування встановлюється зв'язок між граничною мірою пошкодженості матеріалу в одному циклі навантаження та мінімальною мірою швидкості появи сигналів АЕ при накопиченні пошкоджень у матеріалі із заданим законом циклічного навантаження має вигляд:

$$n_{AE} = \mu \cdot m \cdot \frac{\lg \sigma_p}{\lg \Delta \sigma_a}, \quad (3)$$

де μ – коефіцієнт жорсткості напруженого стану матеріалу, який визначає енергетичний бар'єр руйнування останнього, $\Delta \sigma_a$ – крок змінювання амплітуди напружень циклу, за якого маємо усталене реєстрування сигналів АЕ.

Варто зауважити, що наведена акустоемісійна модель циклічного деградування конструкційних матеріалів у вигляді залежності (3) потребує введення певних поправок, оскільки процес накопичення пошкоджень при циклічному навантаженні має стадійний характер і визначається механізмами з різним рівнем енергій. Окрім того, необхідно враховувати наявність концентратора напружень (враховується коефіцієнтом k_a) та зворотні процеси деформування локальних об'ємів, які є характерними для стадії динамічної стабілізації структури (враховуються коефіцієнтом k_N). Важливим фактором також є суттєве розсіювання експериментальних даних, що має місце при випробуваннях натурних виробів (враховується коефіцієнтом k_σ). Отже, остаточно маємо:

$$n_{AE(i)} = \mu_{(i)}^{(j)} \cdot m \cdot \frac{\lg \sigma_p}{\lg \Delta \sigma_a} \cdot k_{a(i)} \cdot k_{N(i)} \cdot k_{\sigma(i)}, \quad (4)$$

де індекс « i » визначає стадію нелокалізованого руйнування, а індекс « j » – порядковий номер енергетичного рівня руйнування ($j = I - VII$, згідно з енергетичним спектром [11]).

Щодо стадійності локальних деформаційних процесів під час циклічного навантаження, то тут загально визначеними є такі стадії [14]: I – стадія динамічної стабілізації структури, коли мають місце зворотні процеси локальної перебудови структури матеріалу; II – стадія мікроплинності, де відбувається часткова локальна незворотна перебудова структури матеріалу; III – стадія деформаційного зміцнення з інтенсивними незворотними процесами локальної перебудови структури матеріалу.

Матеріали та методики експериментальних досліджень. Досліджували циліндричні

спеціальні зразки [15] матеріалів різних класів з різною технологічною спадковістю: нікелевий жароміцний сплав ХН77ТЮР-ВД аустенітного класу ($21\text{Cr} - 2,6\text{Ti} - 0,6\text{Al} - 0,46\text{Fe} - 0,37\text{Cu} - 0,31\text{Si} - 0,29\text{Mn}$) і титановий деформований сплав ВТ8 мартенситного класу ($6,4\text{Al} - 3,3\text{Mo} - 0,3\text{Si}$). Зразки виготовлено як за стандартних технологічних процесів (СТП), так із застосуванням фінішного поверхневого ультразвукового зміцнення (УЗЗ), режими якого наведено в [16].

Циклічні випробування здійснювали на електродинамічному вібростенді консольним згином зразків за методикою, яку наведено в [17]. У процесі ступінчастого змінювання циклічних навантажень зразків реєстрували сигнали АЕ в частотній смузі від 0,2 до 2,0 МГц. За інформативний параметр сигналів АЕ, що характеризує динаміку структурних перебудов конструкційного матеріалу при циклічних навантаженнях, прийнято швидкість рахування акустичної емісії, оскільки за таких умов змінювання НДС локальних об'ємів матеріалу відбувається дуже динамічно [18].

На рис. 1 схематично наведено методику проведення неруйнуючого контролю для одержання АЕ характеристики конкретного виробу, яку суміщено з результатами подальших випробувань його ж на втому. Тут точки, які ілюструють ступінчасте зростання навантаження, простав-

лено через 50 МПа. Тривалість дії циклічних напружень на кожному рівні навантаження виробів не перебільшувала тривалість інкубаційного періоду втомного руйнування ($N_{(AE\ test)} < N_{cr}$). Отже, під час АЕ контролю кожний об'єкт дослідження залишався в межах стадії нелокалізованого руйнування.

Результати експериментальних досліджень і їх обговорення. Під час експлуатації авіаційних ГТД основними параметрами, що будуть визначати надійність і ресурс, є характеристики опору втомі найвідповідальніших елементів. Такими параметрами, згідно з моделлю БЦВ, є параметр m , який характеризує темп накопичення пошкодженостей структури матеріалу від втоми, і значення границі витривалості σ_{-1} , яка обмежує максимальні циклічні навантаження, що можуть допускатися в процесі експлуатації.

У результаті випробувань на втому зразків нікелевого й титанового сплавів одержано названі критерії граничного стану в умовах довготривалої дії періодичних навантажень усіх об'єктів дослідження в різному технічному стані (СТП та УЗЗ). Механічні властивості й характеристики опору багатоциклової втомі досліджуваних матеріалів наведено в таблиці 1.

Ефект зміцнення чітко проявляється у збільшенні границі витривалості σ_{-1} і параметра m . Показано, що УЗЗ підвищує границю витривалості

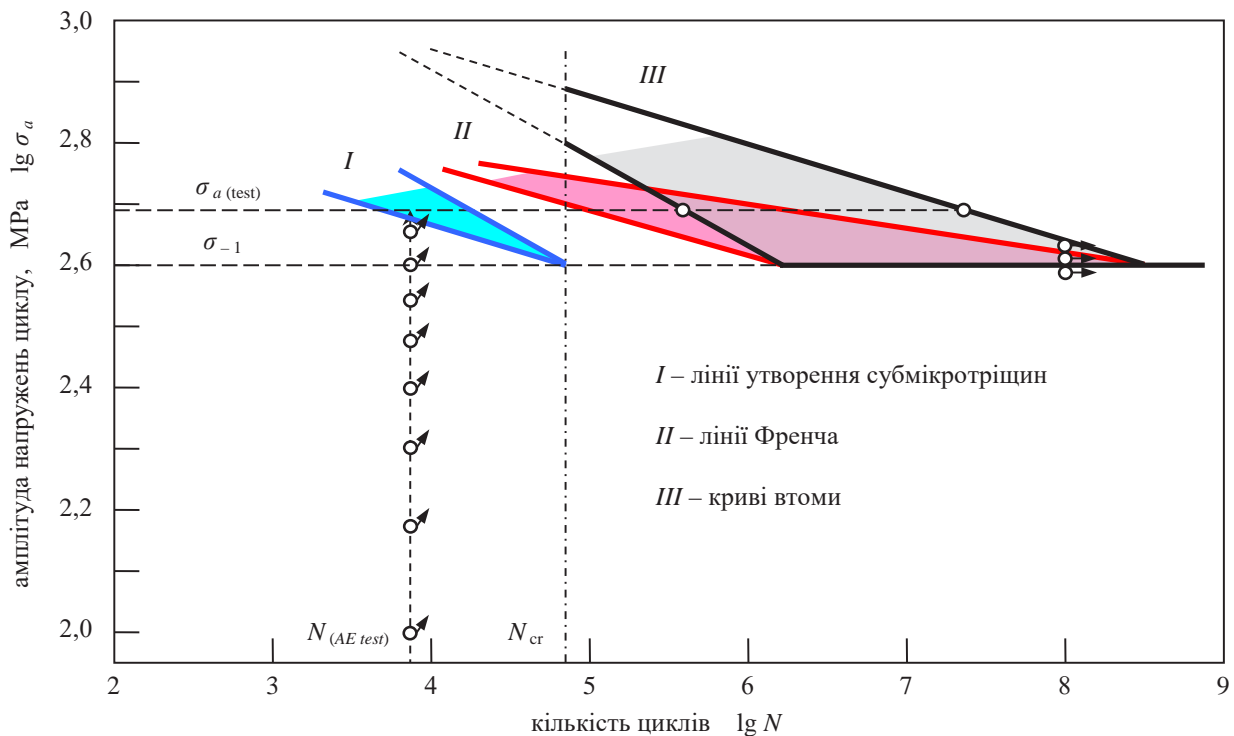


Рис. 1. Схема ступінчастого акустоємісійного тестування виробів з подальшим випробуванням їх на втому

на 30% для сплаву ХН77ТЮР-ВД та на 27,5% для сплаву ВТ8, тоді як границі міцності та пропорційності зазначених матеріалів у різних технічних станах залишаються незмінними.

Для всіх об'єктів дослідження одержано також АЕ характеристики (акустограми), які встановлювали зв'язок між швидкістю сумарного рахунку АЕ (\dot{N}_{AE}) та амплітудою відносних напружень симетричного циклу (σ_a/σ_p) при ступінчастому змінюванні циклічного навантаження. Результатами статистичної обробки результатів експериментів щодо АЕ-контролю всіх об'єктів дослідження стали значення акустоemisійного параметра $n_{AE(i)}$ на різних стадіях утомного пошкодження, а також значення абсцис точок зламу АЕ характеристик σ_{AE}^{**} , які представлено в таблиці 2. Достовірні значення тангенсу кутів нахилу АЕ характеристик досліджуваних об'єктів визначено лише для двох стадій деградування матеріалу виробів під дією циклічного навантаження: мікроплинності (стадія II) та деформаційного зміцнення (стадія III).

Аналіз одержаних циклічних АЕ характеристик виявив певні особливості, які є ідентичними для різних класів матеріалів.

По-перше, це стадійність, яка проявляється в стрибкоподібній зміні темпу зростання АЕ активності матеріалу після досягнення певного значення відносних напружень циклу, яке є пропорційним до границі витривалості:

$$\sigma_{-1} = \gamma \cdot \sigma_{AE}^{**}, \quad (5)$$

з відносно стабільним коефіцієнтом пропорційності γ (див. таблицю 2).

По-друге, це суттєва зміна АЕ активності конкретного матеріалу після обробки УЗЗ на кожній із зафіксованих стадій навантаження: на стадії мікроплинності, так само як і на стадії деформаційного зміцнення, спостерігається збільшення темпу зростання швидкості сумарного рахунку АЕ. Але при цьому змінюється співвідношення тривалості зазначених стадій для матеріалів у різному технічному стані: у зразків після УЗЗ стадія мікроплинності продовжується, а стадія деформаційного зміцнення – скорочується.

Висновки. Показано, що ультразвукове зміцнення поверхні виробів позитивно впливає на характеристики опору втомі як нікелевого, так і титанового сплавів.

Установлено особливості циклічних АЕ характеристик, які є ідентичними для різних класів матеріалів з різною технологічною спадковістю.

Запропоновано емпіричну формулу, яка пов'язує напруження, що відповідає точці зламу циклічної АЕ характеристики модельного зразка матеріалу в певному технічному стані з границею витривалості.

Одержані результати свідчать про адекватність запропонованої раніше акустоemisійної моделі циклічного деградування конструкційних металевих матеріалів. Її застосування дає можливість оцінювати критерії граничного стану конструкційних матеріалів за даними неруйнівного АЕ контролю і приймати оперативні рішення про ефективність видів і режимів технологічних операцій, спрямованих на підвищення ресурсу деталей ГТД.

Таблиця 1

Механічні характеристики й характеристики опору втомі досліджуваних матеріалів

Сплав	Стан поверхні	σ_0 , МПа	$\sigma_{0,2}$, МПа	σ_{-1} , МПа	m
ХН77ТЮР-ВД	СТП	1200	815	530	13,14
	УЗЗ			690	25,13
ВТ8	СТП	980	690	485	8,123
	УЗЗ			630	14,44

Таблиця 2

Параметри циклічних АЕ характеристик зразків досліджуваних матеріалів

Сплав	Стан поверхні	$n_{AE(II)}$	$n_{AE(III)}$	σ_{AE}^{**} , МПа	γ
ХН77ТЮР-ВД	СТП	5,127	15,38	455	1,165
	УЗЗ	8,773	26,32	635	1,087
ВТ8	СТП	2,444	7,113	415	1,169
	УЗЗ	3,890	11,32	580	1,086

Література

1. Петухов А.Н. Особенности формирования свойств поверхностного слоя основных деталей ГТД при применении традиционных и современных методов упрочнения. *Вестник двигателестроения*. 2006. № 2. С. 20–24.
2. Терентьев В.Ф. Усталость металлических материалов. Москва : Наука, 2002. 248 с.
3. Прочность материалов и конструкций. Киев : Ин-т проблем прочности им. Г.С. Писаренко НАН Украины, 2009. Т. 2 : Усталость металлов. Влияние состояния поверхности и контактного взаимодействия / В.Т. Трощенко, Г.В. Цыбанев, Б.А. Грязнов, Ю.С. Налимов. 664 с.
4. Мак-Ивили А.Дж. Анализ аварийных разрушений. Москва : Техносфера, 2010. 416 с.
5. Прогнозування характеристик опору утомі конструкційних матеріалів на великих базах навантажування / Г.Г. Писаренко, Л.Є. Матохнюк, О.В. Войналович, Д.Г. Кофто. *Проблеми міцності*. 2014. № 5. С. 48–53.
6. Скальський В.Р., Андрійків О.Є. Оцінка об'ємної пошкодженості матеріалів методом акустичної емісії. Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2006. 330 с.
7. Гудрамович В.С., Скальський В.Р., Селіванов Ю.М. Голографічне та акустико-емісійне діагностування неоднорідних конструкцій і матеріалів. Львів : Простір-М, 2017. 492 с.
8. Беженев С.О. Акустоемісійна модель циклічного деградування виробів з конструкційних металевих матеріалів. *Пошкодження матеріалів під час експлуатації, методи його діагностування і прогнозування: матеріали IV Міжнародної науково-технічної конференції*. Тернопіль : Вид-во ТНТУ ім. Івана Пулюя, 2015. С. 64–67.
9. Беженев С.А. Модель механического поведения металлических материалов в условиях многоциклового усталости. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. Дніпропетровськ : Ліра, 2012. Вип. 20. С. 66–73.
10. Екобори Т. Научные основы прочности и разрушения материалов. Киев : Наукова думка, 1978. 352 с.
11. Иванова В.С., Терентьев В.Ф. Природа усталости металлов. Москва : Металлургия, 1975. 456 с.
12. Трощенко В.Т., Хамаза Л.А. Условия перехода от рассеянного к локализованному усталостному повреждению металлов и сплавов. Сообщение 2. Продолжительность стадий зарождения и развития усталостных трещин. *Проблемы прочности*. 2014. № 4. С. 5–20.
13. Беженев С.А. Оценка циклической деградации конструкционных материалов с применением метода АЭ. *Вісник Запорізького національного університету: фізико-математичні науки*. 2015. № 3. С. 28–35.
14. Терентьев В.Ф. Усталостная прочность металлов и сплавов. Москва : Интернет Инжиниринг, 2002. 288 с.
15. Беженев С.О. Методика дослідження поверхневого шару конструкційних матеріалів методом акустичної емісії. *Нові матеріали та технології в металургії та машинобудуванні*. 1999. № 1. С. 16–19.
16. Bezhenov S.O., Byalik H.A., Bezhenov O.I. Mechanism of surface hardening of structural carbon steels. *Materials Science*. 2009. Vol. 45. Issue 1. P. 89–96.
17. Беженев С. Застосування методу акустичної емісії для оцінювання впливу поверхневого зміцнення на характеристики опору багаточисловій втомі залізобуглецевих сплавів. *Вісник Тернопільського національного технічного університету*. 2013. № 3 (71). С. 204–214.
18. Андрійків О.Є., Скальський В.Р., Сулим І.Т. Теоретичні основи методу акустичної емісії в механіці руйнування : монографія. Львів : СПОЛІОМ, 2007. 480 с.

REFERENCES

1. Petukhov A.N. (2006) *Osobennosti formirovaniya svoystv poverkhnostnogo sloya osnovnykh detaley GTD pri primenenii traditsionnykh i sovremennykh metodov uprochneniya* [Features of the formation of the properties of the surface layer of the main components of a gas turbine engine using traditional and modern hardening methods]. *Herald of aeroenginebuilding*, no. 2, pp. 20–24.
2. Terent'yev V.F. (2002) *Ustalost' metallicheskih materialov* [Fatigue of the metallic materials]. Moscow: Nauka (in Russian).
3. Prochnost' materialov i konstruktsiy: *Ustalost' metallov. Vliyaniye sostoyaniya poverkhnosti i kontaktnogo vzaimodeystviya* [Strength of the materials and structures: Fatigue of metals. Influence of the surface condition and contact interaction] (2009) / Troshchenko V.T., Tsybanev G.V., Gryaznov B.A., Nalimov Yu.S. vol. 2. Kyiv: Institute of the problems of strength (in Russian).
4. McEvily A.J. (2010) *Analiz aviariynikh razrusheniy* [The analysis of the emergency failures]. Moscow: Technosfera (in Russian).

5. Pisarenko G.G., Matokhnjuck L.E., Vojnalovich O.V., Kofto D.G. (2014) *Prohnozuvannia kharakterystyk oporu utomi konstruktsiinykh materialiv na velykykh bazakh navantazhuvannia* [Prediction of fatigue resistance characteristics of structural materials on large load bases]. *Probl. Prochn.*, no. 5, pp. 48–53.
6. Skalskiy V.R., Andreykiv O.E. (2006) *Otsinka obiemnoi poshkodzhenosti materialiv metodom akustychnoi emisii* [Evaluation of the volume damage of materials by means of the acoustic emission method]. Lviv: Vydavnytchiiy tsentr LNU im. Ivana Franka (in Ukrainian)
7. Hudramovich V.S., Skalskiy V.R., Selivanov Yu.M. (2017) *Holohrafichne ta akustiko-emisiine diahnozuvannia neodnorodnykh konstruktsii i materialiv* [Holographic and acoustic emission diagnostics of inhomogeneous structures and materials]. Lviv: Prostir-M (in Ukrainian).
8. Bezhenov S.O. (2015) *Akustoemisiina model tsyklichnoho dehraduvannia vyrobiv z konstruktsiinykh metalnykh materialiv* [Acoustic emission model of cyclic degradation product of structural metallic materials]. Proceedings of the *In-service Damage of Materials, its Diagnostics and Prediction: IV Int. Conf. (Ukraine, Ternopil, September 21-25, 2015)*, Ternopil: Ternopil Ivan Puluj National Technical University, pp. 64–67.
9. Bezhenov S.A. (2012) *Model' mekhanicheskogo povedeniya metallicheskikh materialov v usloviyakh mnogotsiklovoy ustalosti* [The mechanical behaviour model of the metallic materials under the high-cyclic fatigue conditions]. *Problemy vychislitel'noy mekhaniki i prochnosti konstruktsiy*, Lira, Dnipropetrovsk, iss. 20, pp. 66–73.
10. Yokobori T. (1978) *Nauchniye osnovy prochnosti i razrusheniya materialov* [Scientific backgrounds of the strength and fracture of the materials]. Kiyev: Naukova dumka (in Russian).
11. Ivanova V.S., Terent'yev V.F. (1975) *Priroda ustalosti metallov* [The nature of the fatigue of metals]. Moscow: Metallurgy (in Russian).
12. Troshchenko V.T., Khamaza L.A. (2014) *Usloviya perekhoda ot rasseyannogo k lokalizovannomu ustalostnomu povrezhdeniyu metallov i splavov. Soobshcheniye 2. Prodolzhitel'nost' stadiy zarozhdeniya i razvitiya ustalostnykh treshchin* [Conditions for the Transition from Nonlocalized to Localized Damage in Metals and Alloys. Part 2. Duration Fatigue Crack Initiation and Propagation Stages]. *Probl. Prochn.*, no. 4, pp. 5–20.
13. Bezhenov S.A. (2015) *Otsenka tsiklicheskoj degradatsii konstruktsionnykh materialov s primeneniem metoda AE* [Estimating the cyclic degradation of the structural materials via AE method]. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences*, no. 3, pp. 28–35.
14. Terent'yev V.F. (2002) *Ustalostnaya prochnost' metallov i splavov* [The fatigue strength of the metals and alloys]. Moscow : Internet Engineering (in Russian).
15. Bezhenov S.A. (1999) *Metodyka doslidzhennya poverkhnevoho sharu konstruktsiinykh materialiv metodom akustichnoyi emisiiyi* [The methods of investigation of surface layer of structure materials via acoustic emission method]. *New Material and Technologies in Metallurgy and Mechanical Engineering*, no. 1, pp. 16–19.
16. Bezhenov S.O., Byalik H.A., Bezhenov O.I. (2009) Mechanism of surface hardening of structural carbon steels. *Materials Science*, vol. 45, iss. 1, pp. 89–96.
17. Bezhenov S. (2013) *Zastosuvannia metodu akustychnoi emisii dlia otsiniuvannia vplyvu poverkhnevoho zmitsnennia na kharakterystyky oporu bahatotsyklovii vtomi zalizovuhletsevykh splaviv* [Use of the AE method for estimation of the surface hard facing influence on the high cycle fatigue resistance characteristics of the iron-carbon alloys]. *Visnyk of Ternopil Ivan Puluj National Technical University*, no. 3 (71), pp. 204–214.
18. Andreykiv O.E., Skalskiy V.R., Sulym G.T. (2007) *Teoretychni osnovy metodu akustichnoyi emisiiyi v mekhanitsi ruynuvannia* [The theoretical backgrounds of the acoustic emission method in the field of the fracture mechanics]. Lviv: SPOLOM (in Ukrainian).

РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ МЕТАЛЕВИХ ПАЛЬ**Богуславська А. М.**

*кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри інформаційних технологій в туризмі
Національний університет «Запорізька політехніка»
вул. Жуковського, 64, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-8594-4849
alla_boguslavska@ukr.net*

Гребенюк С. М.

*доктор технічних наук, доцент,
завідувач кафедри фундаментальної математики
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-5247-9004
gsm1212@ukr.net*

Морозов Д. М.

*кандидат технічних наук, доцент,
завідувач кафедри інформаційних технологій в туризмі
Національний університет «Запорізька політехніка»
вул. Жуковського, 64, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0001-9446-8736
ajax3101@gmail.com*

Гнєздовський О. В.

*старший викладач кафедри інформаційних технологій в туризмі
Національний університет «Запорізька політехніка»
вул. Жуковського, 64, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0003-0392-3030
gnezdovskiy.alexey@gmail.com*

Ключові слова: композиційний матеріал, матриця, волокно, термопружні сталі, температурні коефіцієнти лінійного розширення, металева паля.

У роботі визначено напружено-деформований стан металевої палі, що представлена ізотропним композитним матеріалом на основі магнієвої та титанової матриць, армованих борними волокнами. Задачу розглянуто для двох вісесиметричних напрямів армування волокнами: осьового та кругового. При розв'язанні задачі припускалося, що металева паля має циліндричну форму, знаходиться під дією зовнішнього навантаження та зазнає температурного впливу. Розрахунки проведено в програмному комплексі «МІРЕЛА+» на основі методу скінченних елементів. Для отримання чисельних результатів використано паралелепіпедний скінченний елемент для композиційного матеріалу з просторовою орієнтацією волокон на основі моментної схеми скінченного елемента. На низці термопружних задач проведено верифікацію скінченно-елементного підходу до визначення напружено-деформованого стану конструкцій із волокнистого композита, що знаходиться в умовах

температурного впливу. Розрахунок задачі проводився при різних сітках розбиття й показав добру збіжність чисельних результатів. У роботі представлено результати чисельних розрахунків при сітці розбиття на скінченні елементи $5 \times 17 \times 13$. Термопружні сталі композиційного матеріалу, такі як поздовжній і поперечний модулі пружності, коефіцієнти Пуассона, поздовжній і поперечний температурні коефіцієнти лінійного розширення, визначено за допомогою відомих формул.

Отже, у роботі проведено числовий аналіз задачі й побудовано графічні залежності осьових і радіальних деформацій залежно від типу армування, матеріалу матриці та об'ємного вмісту волокна в композиті. З аналізу отриманих результатів видно, що як осьові, так і радіальні деформації зменшуються при збільшенні об'ємної частки волокна в композиті. Зокрема, можна зауважити, що радіальні переміщення є меншими порівняно з осьовими для обох типів армування волокнами. Отримані результати можуть бути використані при будівництві, допомогти розв'язати проблему правильного підбору матеріалів композиту, тим самим уникнути появи тріщин і руйнування споруди в подальшому.

CALCULATION OF STRESS-DEFORMED STATE METAL PILLS

Bohuslavskaya A. M.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor at the Department of Information Technology in Tourism
Zaporizhzhia Polytechnic National University
Zhukovskoho str., 64, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-8594-4849
alla_boguslavskaya@ukr.net*

Grebenyuk S. M.

*Doctor of Technical Sciences, Associate Professor,
Head of the Department of Fundamental Mathematics
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-5247-9004
gsm1212@ukr.net*

Morozov D. M.

*Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Head of the Department of Information Technologies in Tourism
Zaporizhzhia Polytechnic National University
Zhukovskoho str., 64, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0001-9446-8736
ajax3101@gmail.com*

Hniezdovskyi O. V.

*Senior Lecturer at the Department of Information Technology in Tourism
Zaporizhzhia Polytechnic National University
Zhukovskoho str., 64, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0003-0392-3030
gnezdovskiy.alexey@gmail.com*

Key words: *composite material, matrix, fiber, thermoelastic steels, temperature coefficients of linear expansion, metal pile.*

The stress-strain state of a metal pile, which is represented by an isotropic composite material based on magnesium and titanium matrices reinforced with boron fibers, is determined in the work. The problem is considered for two axisymmetric directions of fiber reinforcement: axial and circular. In solving the problem, it was assumed that the metal pile has a cylindrical shape and is under external stress and is exposed to temperature. The MIRELA + software package is used for the calculation, with the help of which a finite element procedure for solving boundary value problems of thermoelasticity for composite materials is implemented. To obtain numerical results, a finite element parallelepiped was used for a composite material with a spatial orientation of the fibers based on the moment diagram of the finite element. Thermoelastic steels of composite material, such as longitudinal modulus, transverse modulus, Poisson's ratios, temperature coefficients of linear expansion are obtained by the method of homogenization.

Numerical analysis of the problem is performed and graphical dependences of axial and radial deformations depending on the type of reinforcement, matrix material and volumetric fiber content in the composite are constructed. Analyzing the results, we can say that the obtained dependences for the metal pile on the basis of both magnesium and titanium matrices have the same character. However, it should be noted that the axial and radial deformations for the titanium matrix are smaller.

Thus, a numerical solution of the problem of deformation of a metal pile based on magnesium and titanium matrices reinforced with boron fibers, which is under conditions of temperature and force loading, is obtained. The results show that both axial and radial deformations decrease with increasing volume fraction of the fiber in the composite. In particular, radial displacements are smaller compared to axial for both types of reinforcement.

Туристична галузь розвивається надзвичайно швидкими темпами. Туризм є одним із важливих чинників стабільного й динамічного збільшення надходжень до бюджету, підвищення зайнятості населення, розвитку в ринкових відносинах.

Основним складником туристської індустрії є готельне господарство. Готелі продовжують будувати й добудовувати. Будівництво ведеться як у гірських місцевостях, так і на піщаних берегах. У зв'язку з цим виникає необхідність укріплення фундаментів. При сучасному будівництві все частіше використовують пальові фундаменти на металевих палях, що виготовлені зі сталевих труб. Пальові фундаменти, як правило, вимагають менше матеріалу для будівництва порівняно з традиційними траншейними засипками, тому вони можуть забезпечити зниження витрат, а також зменшити терміни будівництва. Однією з головних переваг використання пальових фундаментів є те, що вони можуть використовуватися, коли ґрунт має низьку якість і зазвичай уважається занадто слабким, щоб утримувати міцні фундаменти.

Останніми роками фундамент на металевих палях усе частіше використовується при будівництві. Чимало робіт як вітчизняних, так і зарубіжних науковців присвячені цій тематиці. Наприклад, у статті [1] досліджені питання руйнівної сили землетрусів, сейсмостійкості будівель і

споруд, а також сейсмостійкості будівельних конструкцій. У роботі представлено нові ідеї та інженерні рішення проблем про забезпечення сейсмостійкості будівель і споруд, а також принципи проектування будівництва сейсмостійких будівельних конструкцій. Вимоги до проектування фундаментів із різних типів паль у різних інженерно-геологічних умовах і при будь-яких видах будівництва встановлено в роботі [2]. У практичних записках [3; 4] висвітлюється багато важливих елементів проектування, сертифікації, установки й тестування пальових фундаментів. Роботи містять рекомендації, що базуються на результатах передової практики в Новій Зеландії.

Робота [5] присвячена новій техніці чисельного моделювання для проведення установки та завантаження металевих паль. За допомогою методу скінчених елементів здійснюється оцінювання вимог до установки, а також гранична здатність до розтягу та стиску. Чисельне моделювання гвинтових паль традиційно проводиться за допомогою методу скінчених елементів. В огляді [6] основна увага приділяється конструкції металевих паль з осьовим навантаженням при стисканні й розтягуванні. Наведені методи проектування, такі як циліндрична модель зсуву, індивідуальна модель підшипника та співвідношення між моментом установки та несучою здатністю. Проведено їх порівняння.

Оскільки конструкційні елементи з композитних матеріалів часто використовуються в будівництві, при розрахунках необхідно враховувати зміну напружено-деформованого стану під дією температури навколишнього середовища. Зокрема, для дослідження композитних конструкцій на міцність необхідно враховувати дію термонапружень.

Використовуючи метод скінченних елементів визначимо напружено-деформований стан металевої палі, що представлена ізотропним композитним матеріалом на основі магнієвої матриці. Термомеханічні характеристики матриці [7]: модуль пружності $E^* = 45,5 \text{ ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu^* = 0,33$, температурний коефіцієнт лінійного розширення $\alpha^* = 26 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$. Термомеханічні характеристики борних волокон мають такі значення [7]: модуль пружності $E^\circ = 416 \text{ ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu^\circ = 0,23$, температурний коефіцієнт лінійного розширення $\alpha^\circ = 2,4 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$.

Розглянемо циліндричну палю діаметром $d = 0,108 \text{ м}$ і довжиною $l = 2,5 \text{ м}$, що знаходиться під навантаженням 7 тонн.

Для розрахунку використовується програмний комплекс «МІРЕЛА+» [8], за допомогою якого реалізується скінченноелементна процедура розв'язання крайових задач термопружності для композиційних матеріалів. Для отримання чисельних результатів використано паралелепедний скінченний елемент для композиційного матеріалу з просторовою орієнтацією волокон на основі моментної схеми скінченного елемента [9].

Верифікацію скінченно-елементного підходу до визначення напружено-деформованого стану конструкцій із волокнистого композита в умовах температурного впливу проведено на низці задач [10].

Розрахунок задачі проводився при різних сітках розбиття й показав добру збіжність чисельних результатів. У роботі представлено результати чисельних розрахунків при сітці розбиття на скінченні елементи $5 \times 17 \times 13$.

Термопружні сталі композиційного матеріалу визначимо за допомогою відомих формул (1)–(6). Поздовжній модуль E_1 , поперечний модуль E_2 та коефіцієнти Пуассона ν_{12} , ν_{23} обчислимо за формулами [9]:

$$\nu_{12} = \frac{(\alpha - 2\beta\nu_{12}^\circ)\nu_{12}^* + 2E_2^*f(\nu_{12}^\circ - \nu_{12}^*)}{\alpha - 2\beta\nu_{12}^\circ + 2f\nu_{21}^*E_2^\circ(\nu_{12}^\circ - \nu_{12}^*)}; \quad (1)$$

$$E_1 = \frac{(\alpha - 2\nu_{12}^\circ\beta)E_1^*(1-f) + (\alpha - 2\nu_{12}^*\beta)E_1^*f}{\alpha - 2\beta\nu_{12}^\circ + 2f\nu_{21}^*E_2^\circ(\nu_{12}^\circ - \nu_{12}^*)}; \quad (2)$$

$$E_2 = \frac{2\alpha E_2^*}{(\alpha((1+\nu_{23}^*) + 4(\gamma - 2E_2^\circ)(1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*)(f\chi_1 + \chi_2)) + \delta + \eta_1\eta_2)}; \quad (3)$$

$$\nu_{23} = \frac{(\alpha((1+\nu_{23}^*) + 4(\gamma - 2E_2^\circ)(1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*)(f\chi_1 + \chi_2)) - (\delta + \eta_1\eta_2))}{(\alpha((1+\nu_{23}^*) + 4(\gamma - 2E_2^\circ)(1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*)(f\chi_1 + \chi_2)) + (\delta + \eta_1\eta_2))}; \quad (4)$$

де f – об'ємний уміст волокна в композиті,

$$\alpha = E_2^*(1-f)(1-\nu_{23}^\circ) + E_2^\circ(f(1-\nu_{23}^*) + (1+\nu_{23}^*));$$

$$\beta = \nu_{21}^*E_2^*(1-f) + \nu_{21}^*fE_2^\circ; \quad \gamma = E_2^*(1-\nu_{23}^\circ) + E_2^\circ(1+\nu_{23}^*);$$

$$\delta = f(1+\nu_{23}^*)(\gamma - 2E_2^\circ) + \gamma(1-\nu_{23}^*);$$

$$\eta_1 = 2E_1^*E_1^* \times (f-1)f(\nu_{21}^*\gamma - 2\nu_{21}^*E_2^*);$$

$$\eta_2 = 1/\left(E_2^*(\alpha(E_1^*f + E_1^*(1-f)) - 2\beta(\nu_{12}^*E_1^*f + \nu_{12}^*E_1^*(1-f)))\right);$$

$$\chi_1 = \frac{(d_{11} - d_{21})}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}; \quad \chi_2 = \frac{(d_{22} - d_{12})}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}};$$

$$d_{11} = E_2^\circ((4f - 3 - 1/f^2)(1 + \nu_{23}^*) -$$

$$-4f(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*)) - E_2^*\left(\frac{(4f - 1/f^2 - 3)(1 + \nu_{23}^*)}{+4(1/f^2 - f)(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*)}\right); \quad d_{12} =$$

$$= E_2^\circ((1/f - f)(1 + \nu_{23}^*) - 4(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*)) -$$

$$-E_2^*((1/f - f)(1 + \nu_{23}^*) + 4(1 - 1/f)(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*));$$

$$d_{21} = E_2^\circ(4f(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*) + (2f + 1/f^2 - 3)(1 + \nu_{23}^*)) -$$

$$-E_2^*((2f + 1/f^2 - 3)(1 + \nu_{23}^*) +$$

$$+4(f - 1/f^2)(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*));$$

$$d_{22} = E_2^\circ((2 - f - 1/f)(1 + \nu_{23}^*) - 4(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*)) -$$

$$-E_2^*((2 - f - 1/f)(1 + \nu_{23}^*) + 4(1/f - 1)(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*)).$$

Поздовжній і поперечний температурні коефіцієнти лінійного розширення α_{11} , α_{22} композита розрахуємо за формулами [11]:

$$\alpha_{11} = \frac{\gamma d^*}{(d^\circ + f(d^* - d^\circ))(d_1 - d_2)} + \frac{2\nu_{21}^*fE_2^\circ}{d_1 - d_2}(\alpha_{22}^\circ - \alpha_{22}^*) + \alpha_{11}^*; \quad (5)$$

$$\alpha_{22} = -\frac{\gamma f}{(d_1 - d_2)(d^* + f(d^* - d^\circ))}\left(2\nu_{21}^*(1-f) + \frac{\nu_{12}^*(2fE_2^\circ + d_1 - d_2)}{E_1^*}\right) + \frac{2fE_2^\circ}{d_1 - d_2}(\alpha_{22}^\circ - \alpha_{22}^*) + \alpha_{22}^*, \quad (6)$$

де

$$\gamma = (2\nu_{21}^*E_2^*(f-1) - 2\nu_{21}^*E_2^*f)(\alpha_{22}^\circ - \alpha_{22}^*) + (d_1 - d_2)(\alpha_{11}^\circ - \alpha_{11}^*).$$

Символом $^\circ$ позначено величини, що відносяться до матеріалу волокна, а символом * – величини, що відносяться до матеріалу матриці.

Розглянемо цю задачу для двох віссиметричних напрямів армування волокнами: осьового та кругового.

Результати розрахунків для різних схем армування при температурі $T = 50^\circ\text{C}$ наведені на рис. 1–2.

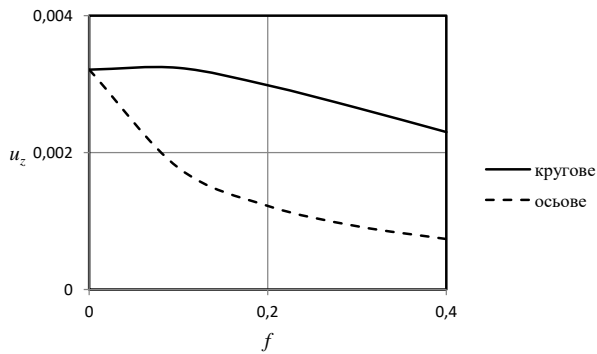


Рис. 1. Розподіл осьових переміщень u_z

Аналізуючи отримані на рис. 1 залежності, можна зауважити, що осьові деформації металеві палі при осьовому армуванні в умовах дії температури є меншими порівняно з деформаціями при круговому армуванні. Крім того, з отриманих залежностей видно, що зі збільшенням об'ємного вмісту волокна в композиті деформації металеві палі зменшуються для обох напрямів армування.

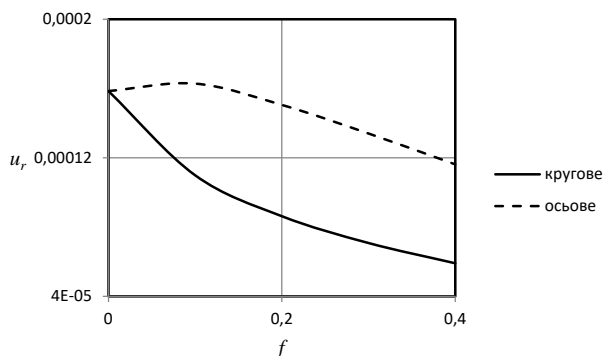


Рис. 2. Розподіл радіальних переміщень u_r

З рис. 2 видно, що при осьовому армуванні функція зазнає більших деформацій, ніж при круговому, а збільшення об'ємного вмісту волокна в композиті призводить до зменшення радіальних переміщень для обох типів армування.

Аналогічно визначимо напружено-деформований стан металеві палі, що представлена ізотропним композитним матеріалом на основі титанової матриці, армованої борними волокнами. Термомеханічні характеристики матриці [7]: модуль пружності $E^* = 113,8 \text{ ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu^* = 0,33$, температурний коефіцієнт лінійного розширення $\alpha^* = 26 \cdot 10^{-6} 1 / ^\circ\text{C}$. Термомеханічні характеристики борних волокон мають такі значення [7]: модуль пружності $E^\circ = 416 \text{ ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu^\circ = 0,23$, температурний коефіцієнт лінійного розширення $\alpha^\circ = 8,4 \cdot 10^{-6} 1 / ^\circ\text{C}$.

Результати розрахунків напружено-деформованого стану металеві палі на основі титанової матриці для кругового й осьового типів армування при температурі $T = 50^\circ\text{C}$ залежно від об'ємного вмісту волокна в композиті f представлено на рис. 3–4.

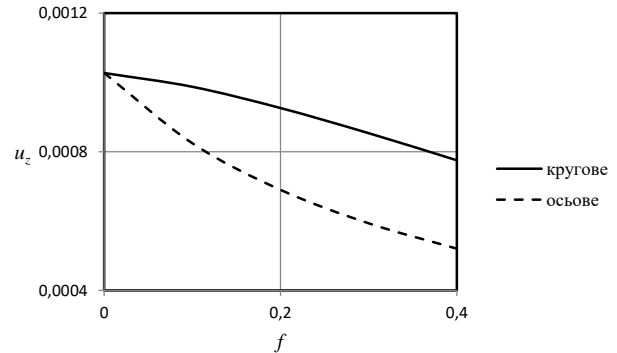


Рис. 3. Розподіл осьових переміщень u_z

Аналізуючи результати, можна сказати, що отримані залежності для металеві палі як на основі магнієвої, так і на основі титанової матриць мають однаковий характер. Проте необхідно зазначити, що осьові та радіальні деформації для титанової матриці є меншими.

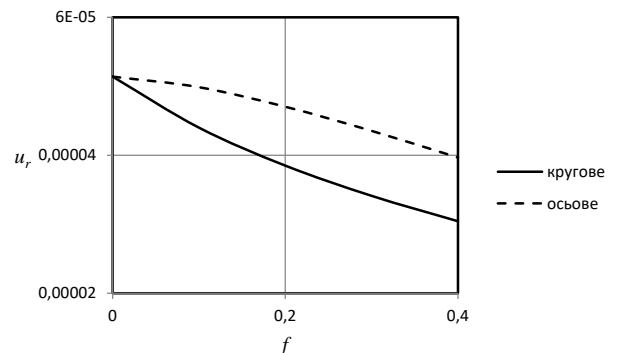


Рис. 4. Розподіл радіальних переміщень u_r

Отже, отримано чисельний розв'язок задачі про деформування металеві палі на основі магнієвої та титанової матриць, армованих борними волокнами, що знаходиться в умовах температурного впливу й силового навантаження. З отриманих результатів видно, що як осьові, так і радіальні деформації зменшуються при збільшенні об'ємної частки волокна в композиті. Зокрема, радіальні переміщення є меншими порівняно з осьовими для обох типів армування.

Отже, правильно підібравши матеріали композиту, можна зменшити осадку палі, тим самим уникнути появи тріщин і руйнування споруди в подальшому, а отже, розв'язати головну проблему технічних норм.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ордобаев Б.С. Инженерные методы по снижению сейсмического риска зданий и сооружений. *Технологии гражданской безопасности*. Москва, 2013. Т. 10. № 4 (38). С. 62–66.
2. Свайные фундаменты: свод правил / составитель В.Н. Калинин. Москва, 2011. 85 с.
3. Screw Piles: Guide lines for Design, Construction & Installation / lead author : Nicola Ridgley. New Zealand, 2015. 48 p.
4. Field description of soil and rock. Guideline for the field classification and description of soil and rock for engineering purposes. *New Zealand geotechnical society INC*. 2005. 39 p.
5. Numerically modeling the installation and loading of screw piles using DEM / Y.U. Sharif, M.J. Brown, M.O. Ciantia, J.A. Knappett, C. Davidson, B. Cerfontaine, S. Robinson. *Civil Engineering, School of Science and Engineering, University of Dundee*. Scotland, 2019. P. 101–108.
6. Abbas Mohajeranin, Dusan Bosnjak, Damon Bromwich. Analysis and design methods of screw piles: A review. *Soils and Foundations*. 2016. Vol. 56 (1). P. 115–128.
7. Карпинос Д.М. Композиционные материалы : справочник. Киев : Наукова думка, 1985. 592 с.
8. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МИРЕЛА+» / В.В. Киричевский, Б.М. Дохняк, Ю.Г. Козуб, С.И. Гоменюк, Р.В. Киричевский, С.Н. Гребенюк. Киев : Наукова думка, 2005. 416 с.
9. Гребенюк С.М. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів : автореф. дис. ... докт. техн. наук : 01.02.04. Запоріжжя, 2016. 35 с.
10. Гребенюк С.М., Клименко М.І., Богуславська А.М. Термопружна задача для порожнистого циліндра з композиційного матеріалу з транслопним волокном. *Вісник Запорізького національного університету*. Запоріжжя, 2017. № 2. С. 82–89.
11. Богуславська А.М. Термомеханічні характеристики волокнистого композиційного матеріалу з анізотропними компонентами : дис. канд. ... фіз.-мат. наук : 01.02.04. Запоріжжя, 2018. 133 с.

REFERENCES

1. Ordobaev B. S. (2013) *Inzhenernye metody po snizheniyu seysmicheskogo riska zdaniy i sooruzheniy* [Engineering methods to reduce the seismic risk of buildings and structures]. *Civil Security Technology*, vol. 10, no. 4 (38), pp. 62–66.
2. Kalinin V. N. (2011) *Pile foundations: svod pravyl* [Pile foundations: a set of rules]. Moskva (in Russian).
3. Nicola Ridgley. (2015) *Screw Piles: Guide lines for Design, Construction & Installation*. New Zealand, 48 p.
4. Field description of soil and rock. Guideline for the field classification and description of soil and rock for engineering purposes. *New Zealand geotechnical society INC*. 2005. 39 p.
5. Y U Sharif, M J Brown, M O Ciantia, J A Knappett, C Davidson, B Cerfontaine, S Robinson. (2019) Numerically modeling the installation and loading of screw piles using DEM. *Civil Engineering, School of Science and Engineering, University of Dundee*. Scotland, pp. 101–108.
6. Abbas Mohajeranin, Dusan Bosnjak, Damon Bromwich. (2016) Analysis and design methods of screw piles: A review. *Soils and Foundations*, vol. 56 (1), pp. 115–128.
7. Karpynos D. M. (1985) *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik* [Composite materials. Directory]. Kyev: Naukova dumka (in Ukrainian).
8. Kyrychevskiy V. V., Dokhniak B. M., Kozub Yu. H., Homeniuk S. Y., Kyrychevskiy R. V., Hrebenuk S. N. (2005) *Metod konechnikh elementov v vychislitel'nom komplekse «MIRELA+»* [Finite element method in the computing complex «MIRELA +»]. Kyiv: Naukova dumka (in Ukrainian).
9. Grebenyuk S. M. (2016) Stress-deformed state of spatial structures on the basis of homogenization of fibrous composites: author's abstract. (Extended abstract of Doctor thesis). Zaporizhzhya National University, Zaporizhzhya, Ukraine.
10. Grebenyuk S. M., Klymenko M. I., Bohuslavskaya A. M. (2017) *Termoprzhna zadacha dlya porozhnistogo tsilindra z kompozitsiynogo materialu z transtopnim voloknom* [Thermal task for a hyper cylinder from transstopropic fiber composite material]. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu*, no. 2. pp. 82–89.
11. Bohuslavskaya A. M. (2018) Thermomechanical characteristics of a fibrous composite material with anisotropic components. (Extended abstract of the candidate dissertation). Zaporizhzhya National University, Zaporizhzhya, Ukraine.

ЕВОЛЮЦІЙНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ

Вакал Л. П.

*кандидат технічних наук,
старший науковий співробітник
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова
пр. Академіка Глушкова, 40, Київ, Україна
orcid.org/0000-0002-1658-5432
lara.vakal@gmail.com*

Вакал Є. С.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математичної фізики
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
вул. Володимирська, 60, Київ, Україна
orcid.org/0000-0001-8581-9098
jvakal@gmail.com*

Ключові слова:

*диференціальні рівняння
в частинних похідних,
чебишовське наближення,
похибка наближення
крайових умов, алгоритм
диференціальної еволюції,
цільова функція, оптимальні
значення параметрів.*

У роботі запропоновано еволюційний підхід до розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь еліптичного типу. Він ґрунтується на застосуванні алгоритму диференціальної еволюції. Згідно із цим підходом, замість точного розв'язку задачі, розглядають близьку до нього функцію, яка при будь-яких значеннях параметрів, що входять у неї, точно задовольняє диференціальне рівняння. Найкращі значення невідомих параметрів визначаються так, щоб похибка наближення крайових умов була мінімальною в чебишовській нормі. Одна із суттєвих переваг застосування найкращих чебишовських наближень при розв'язанні крайових задач для рівнянь еліптичного типу полягає в можливості оцінити похибку наближеного розв'язку першої крайової задачі в усій області на основі похибки апроксимації на її границі. Задача мінімізації похибки розглядається як оптимізаційна задача, для її розв'язання застосовується алгоритм диференціальної еволюції. Такий підхід дає змогу розв'язувати як лінійні, так і нелінійні задачі без унесення змін і залучення чисельних методів. Можливі розв'язки задачі мінімізації представляються в алгоритмі у вигляді популяції векторів, компонентами яких є значення параметрів. У кожному поколінні популяції для вектора-мішені створюється мутантний вектор. Над ним виконується операція схрещування з метою отримання пробного вектора. Далі проводиться селекція. Якщо значення цільової функції пробного вектора менше, ніж у вектора-мішені, то він заміняє його в наступному поколінні. Алгоритм завершується, якщо досягнуто задане максимальне число поколінь або відбувається стагнація еволюційного процесу. Алгоритм реалізовано засобами системи Matlab. Надано рекомендації щодо вибору значень основних параметрів налаштування алгоритму (розміру популяції, коефіцієнтів мутації та схрещування). Проведено обчислювальний експеримент із розв'язання за допомогою алгоритму низки крайових задач. Наведено результати для лінійної задачі про скрут-балки й модельної крайової задачі для нелінійного диференціального рівняння з лінійними крайовими умовами. Обчислювальний експеримент підтвердив ефективність застосування запропонованого алгоритму для розв'язання крайових задач.

EVOLUTIONARY APPROACH TO SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ELLIPTIC EQUATIONS

Vakal L. P.

*Candidate of Technical Sciences,
Senior Research Fellow
V. M. Glushkov Institute of Cybernetics
Academician Glushkov ave., 40, Kyiv, Ukraine
orcid.org/0000-0002-1658-5432
lara.vakal@gmail.com*

Vakal Ye. S.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Mathematical Physics
Taras Shevchenko National University of Kyiv
Volodymyrska str., 60, Kyiv, Ukraine
orcid.org/0000-0001-8581-9098
jvakal@gmail.com*

Key words: *differential equations in partial derivatives, Chebyshev approximation, approximation error of boundary conditions, differential evolution algorithm, objective function, optimal values of parameters..*

In the paper an evolutionary approach to solving boundary value problems for elliptic differential equations is proposed. It is based on using differential evolution algorithm. According to the approach, instead of an exact solution of the problem, we consider a closed function, which for any values of the parameters included in it, exactly satisfies the differential equation. The best values of unknown parameters are determined so that an approximation error of boundary conditions was minimal in Chebyshev norm. One of the significant advantages of using the best Chebyshev approximations in solving boundary value problems for equations of elliptic type is the ability to estimate the approximate solution error for the first boundary value problem in the whole domain based on the approximation error at its boundary. The problem of error minimization is considered as an optimization problem and the algorithm of differential evolution is used to solve it. The proposed approach allows to solve both linear and nonlinear problems without making changes and using numerical methods. In the algorithm possible solutions of the minimization problem are represented in a form of a population of vectors, components of which are values of the parameters. A mutant vector is created for a target vector in each generation of the population. A crossover operation is performed on the mutant vector to obtain a trial vector. Selection is performed after that. If a value of the objective function of the trial vector is less than a value of the objective function of the target vector, it replaces target vector in a next generation. The algorithm is finished if maximum number of generations is reached or the evolutionary process stagnates. The algorithm is implemented in Matlab system. Recommendations for choosing values of the main parameters of the algorithm settings (population size, mutation constant and crossover constant) are given. A computational experiment on solving a number of boundary value problems has been performed using the algorithm. Results of a linear problem of beam torsion and a model boundary value problem for a nonlinear differential equation with linear boundary conditions are presented. The computational experiment has showed the effectiveness of the proposed algorithm for solving boundary value problems.

Вступ. Еволюційні алгоритми (далі – ЕА) – сучасний ефективний інструмент розв’язання оптимізаційних задач. Ідея цих алгоритмів полягає в моделюванні основних еволюційних процесів (мутації, схрещування, селекції) з метою знаходження оптимальних розв’язків складних задач. ЕА успішно застосовуються для розв’язання різноманітних задач, про що свідчать численні публікації в науковій літературі. Що стосується використання ЕА в задачах математичної фізики, то публікацій на цю тему дуже мало [1–5], ідеться в них переважно про крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь. У роботах [1–3] розв’язки цих задач знаходять за допомогою неперервного генетичного алгоритму, у працях [4; 5] – алгоритму диференціальної еволюції. Наведені результати свідчать про ефективність застосування таких алгоритмів до цього класу задач. Диференціальна еволюція (далі – ДЕ) – це один із кращих ЕА, розроблений Р. Сторном і К. Прайсом [6] для розв’язання задач багатовимірної оптимізації. Цільова функція (критерій оптимізації) в алгоритмі ДЕ може бути нелінійною, недиференційовною й багатоекстремальною. Він простий у реалізації та використанні (має мало параметрів, що потребують налаштування).

Мета роботи – розробити на основі ДЕ ефективний і водночас нескладний у реалізації метод знаходження параметрів наближених розв’язків крайових задач для диференціальних рівнянь у частинних похідних (ДРЧП) еліптичного типу. До таких крайових задач приходять при математичному моделюванні стаціонарних процесів різної фізичної природи, наприклад, рівноваги, теплопровідності, потенціального руху нестисливої рідини, стаціонарних електричних і магнітних полів тощо [7].

Формулювання задачі. У випадку двох незалежних змінних x і y крайову задачу для ДРЧП можна записати в такій загальній формі:

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0 \text{ в області } D,$$

$$S\left(u, \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\right) = 0 \text{ на границі } \Gamma \text{ області } D,$$

де \bar{n} – зовнішня нормаль до Γ .

Одним із найпоширеніших методів інтегрування крайових задач для ДРЧП є метод Фур’є. Для його застосування істотною є лінійність як диференціального рівняння, так і крайових умов [7].

Лінійна крайова задача для ДРЧП еліптичного типу формулюється так: потрібно знайти функцію $u = u(x, y)$ класу $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$, яка в області D задовольняє рівняння:

$$\Delta u + p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + r(x, y) u = f(x, y), \quad (1)$$

а на її межі Γ – крайову умову:

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = w(x, y), \quad (2)$$

де Δu – оператор Лапласа, p, q, r, f, w – неперервні функції, α і β – задані числа, причому $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

Для наближеного розв’язання крайових задач (1), (2) ефективний підхід запропоновано в роботах Л. Коллатца [8; 9]. Він ґрунтується на використанні апарату найкращої апроксимації функцій декількох змінних. Замість точного розв’язку u , розглядають близьку до нього функцію $v(x, y; c_1, \dots, c_n)$, яка при будь-яких значеннях параметрів c_1, \dots, c_n точно задовольняє або диференціальне рівняння (перший випадок), або крайові умови (другий випадок). Для функції v намагаються знайти такі значення параметрів c_1, \dots, c_n , при яких вона найкраще (у вибраній нормі) задовольняє крайові умови або, відповідно, найкраще задовольняє диференціальне рівняння.

Розглянемо перший випадок (другий випадок висвітлено у [2]). Функцію $v(x, y; c_1, \dots, c_n)$, яка при довільних значеннях параметрів c_1, \dots, c_n точно задовольняє рівняння (1), підставимо в крайові умови (2) й отримаємо:

$$\alpha v + \beta \frac{\partial v}{\partial \bar{n}} - w(x, y) = \varepsilon(x, y; c_1, \dots, c_n), \quad (3)$$

де ε – функція похибки. Ставиться задача підібрати такі значення параметрів c_1, \dots, c_n , щоб на межі Γ похибка ε була мінімальною у вибраній нормі. Нами обрано чебишовську (рівномірну) норму, використання якої в крайових задачах (1), (2) має певні переваги (див. пояснення нижче).

Покриємо границю Γ двовимірною сіткою $E_m = \{(x_i, y_i), i = 1, \dots, m\}$. Тоді задача визначення невідомих параметрів наближеного розв’язку v зводиться до задачі найкращого чебишовського дискретного наближення:

$$\|\varepsilon(x, y; c_1, \dots, c_n)\| \rightarrow \min_{c_1, \dots, c_n}, \quad (4)$$

$$\|\varepsilon(x, y; c_1, \dots, c_n)\| = \max_{i=1, \dots, m} |\varepsilon(x_i, y_i; c_1, \dots, c_n)|. \quad (5)$$

Позначимо через ρ мінімум норми (5). Значення параметрів c_1, \dots, c_n , на яких досягається цей мінімум, називають найкращими або оптимальними.

Варто зазначити, що з урахуванням принципу максимуму для гармонічних функцій [7, с. 213] використання чебишовських наближень дозволяє оцінити похибку наближеного розв’язку першої крайової задачі ($\beta = 0$) у всій області на основі похибки апроксимації на її границі. У цьому проявляється одна із суттєвих переваг застосування

найкращих чебишовських наближень при розв'язанні крайових задач для ДРЧП еліптичного типу, де для модуля різниці точного u й наближеного v розв'язків має місце теорема про досягнення максимуму на границі області [10, с. 513].

Ураховуючи складність і громіздкість відповідних алгоритмів найкращого чебишовського наближення функцій декількох змінних [11], а також їх недостатню реалізацію в загальнодоступних математичних пакетах, для практичного знаходження наближеного розв'язку задачі (4) застосуємо запропонований у [12–15] підхід, який не потребує залучення чисельних методів і може використовуватись у випадку як лінійної, так і нелінійної апроксимуючої функції. Він полягає в тому, що задача (4), (5) розглядається як оптимізаційна задача пошуку мінімуму чебишовської норми похибки ε (глобальний мінімум дорівнює нулю й досягається на точному розв'язку u крайової задачі), і ця оптимізаційна задача розв'язується за допомогою алгоритму ДЕ.

Можливі розв'язки задачі мінімізації (4), (5) представляються в алгоритмі ДЕ у вигляді популяції векторів, компонентами яких є значення параметрів c_1, \dots, c_n . Чисельність популяції в процесі еволюції не змінюється, однак при переході до нового покоління змінюється її склад. Для кожного вектора поточного покоління – вектора-мішені – створюється мутантний вектор, над яким виконується операція схрещування. Вектор, отриманий у результаті схрещування, називається пробним. Після цього проводиться селекція: якщо його значення цільової функції менше, ніж у вектора-мішені, то в наступне покоління переходить пробний вектор, у протилежному випадку – вектор-мішень. Послідовність кроків – мутація, схрещування, селекція – повторюється до тих пір, поки не виконається термінальна умова (або умови), наприклад, кількість поколінь досягне заданого максимального числа.

Алгоритм розв'язання задачі. Нижче наводиться схема алгоритму ДЕ для пошуку оптимальних значень параметрів наближеного розв'язку крайової задачі (1), (2).

1. Покладається $G = 0$, де G – номер популяції, і генерується початкова популяція векторів $C_i = (c_{i1}, \dots, c_{in})$, $i = 1, \dots, Np$, де Np – розмір популяції. Координати c_{i1}, \dots, c_{in} векторів C_i – випадкові дійсні числа із проміжку $[-1, 1]$ (у процесі еволюції значення координат можуть виходити далеко за межі заданого проміжку).

2. Для векторів C_i , $i = 1, \dots, Np$, початкової популяції обчислюються значення цільової функції за формулою:

$$F(C_i) = \max_{k=1, \dots, m} \varepsilon(x_k, y_k; c_{i1}, \dots, c_{in}). \quad (6)$$

3. Для вектора-мішені C_i створюється мутантний вектор \tilde{C}_i :

$$\tilde{C}_i = C_i + Fm \cdot (C_{r_2} - C_{r_3}), \quad i = 1, \dots, Np,$$

де r_1, r_2, r_3 – випадкові цілі числа із проміжку $[1, Np]$, $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq i$, $Fm \in (0, 2]$ – заданий коефіцієнт мутації.

4. Обчислюються координати пробного вектора \tilde{C}_i за формулою:

$$\tilde{c}_{ij} = \begin{cases} \tilde{c}_{ij}, & \text{якщо } \text{rand}(0, 1) \leq Cr \vee j = j_{rand} \\ c_{ij}, & \text{якщо } \text{rand}(0, 1) > Cr \wedge j \neq j_{rand} \end{cases}, \quad j = 1, \dots, n,$$

де $\text{rand}(0, 1)$ – випадкове число з інтервалу $(0, 1)$, Cr – задана ймовірність схрещування.

5. Для пробного вектора \tilde{C}_i , $i = 1, \dots, Np$ за формулою (6) обчислюється значення цільової функції $F(\tilde{C}_i)$.

6. Селекція. Якщо $F(\tilde{C}_i) < F(C_i)$, то в наступну популяцію з номером $G + 1$ переходить вектор \tilde{C}_i , інакше – вектор C_i .

7. Якщо $G > G_{\max}$, де G_{\max} – задане максимальне число популяцій або виконується умова стагнації еволюційного процесу:

$$\max_{i=1, \dots, Np} F(C_i) - \min_{i=1, \dots, Np} F(C_i) < \delta \cdot \min_{i=1, \dots, Np} F(C_i),$$

то визначається вектор C_{best} , який має найменше значення цільової функції в поточній популяції, й алгоритм завершується. За умовчанням $\delta = 10^{-4}$. Якщо жодна з указаних умов не виконується, то відбувається перехід на п. 3.

Описаний алгоритм реалізовано засобами системи комп'ютерної математики Matlab [16]. Розмір популяції Np , коефіцієнт мутації Fm і ймовірність схрещування Cr є основними параметрами налаштування алгоритму ДЕ. При розв'язанні задачі (1), (2) рекомендується брати $5n \leq Np \leq 10n$, $0,5 \leq Fm \leq 0,6$, $0,9 \leq CR \leq 1$. Вибір значення параметра G_{\max} залежить від числа n , для $n \leq 5$ можна взяти $G_{\max} = 150 - 300$.

Аналіз результатів обчислювального експерименту. За допомогою системи комп'ютерної математики Matlab виконано обчислювальний експеримент із розв'язання низки крайових задач, для яких відомі точні розв'язки. Нижче наведено приклади їх розв'язання.

Приклад 1. Потрібно знайти розв'язок задачі про скрут балки з поперечним перерізом D (рис. 1):

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= -1 \text{ в області } D, \\ u(x, y) &= 0 \text{ на границі } \Gamma. \end{aligned} \quad (7)$$

Границя Γ складається з двох відрізків прямих $y = \pm 1$ для $|x| \leq 1$ і двох дуг півкіл радіуса 1 із центрами в точках $(-1, 0)$ і $(1, 0)$ для $|x| \geq 1$ [17, с. 365].

Наближений розв'язок $v(x, y)$ крайової задачі (7) шукаємо у вигляді:

$$v(x, y; c_1, \dots, c_n) = -\frac{x^2 + y^2}{4} + \sum_{k=1}^n c_k \phi_k(x, y), \quad (8)$$

$$\phi_k(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^{2k-2}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Зокрема, перші п'ять функцій ϕ_k є такими:

$$\phi_1(x, y) = 1, \quad \phi_2(x, y) = x^2 - y^2,$$

$$\phi_3(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4,$$

$$\phi_4(x, y) = x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6,$$

$$\phi_5(x, y) = x^8 - 28x^6y^2 + 70x^4y^4 - 28x^2y^6 + y^8.$$

Невідомі параметри c_1, \dots, c_n визначаємо з умови мінімуму (4), (5). З огляду на властивості симетрії, можна обмежитися чвертю границі Γ (рис. 1).

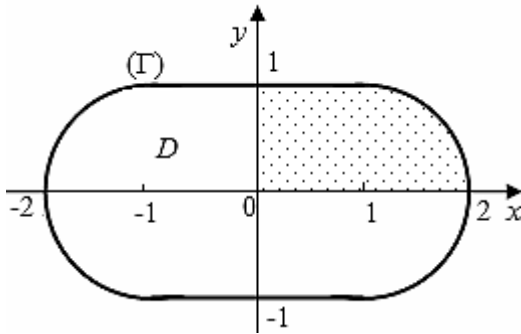


Рис. 1. Поперечний переріз балки

Обчислення виконувалися в системі Matlab на сітці E_{51} :

$$E_{51} = \begin{cases} (x_i, y_i), & x_i = 0,05i; y_i = 1; i = \overline{0,19}, \\ (x_i, y_i), & x_i = 1 + \sin(i - 20)\alpha; y_i = \cos(i - 20)\alpha; \alpha = \pi/60; i = \overline{20,50}. \end{cases}$$

Для випадку $n=5$ отримано такі значення параметрів наближеного розв'язку (8) і похибки найкращого чебишовського наближення:

$$c_1 = 0,4424397; \quad c_2 = 0,1813411; \quad c_3 = -0,0139581;$$

$$c_4 = 0,0008424; \quad c_5 = 0,0000207; \quad \rho = 0,0036812.$$

З урахуванням принципу максимуму для гармонічних функцій маємо $|u - v| \leq 0,0036812$ в усіх точках області $D \cup \Gamma$. Коефіцієнт c_1 дає наближене значення для функції $u(x, y)$ у середній точці [17, с. 366]. Має місце оцінка $c_1 - \rho \leq u(0, 0) \leq c_1 + \rho$, тобто $0,43876 \leq u(0, 0) \leq 0,44612$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Abu-Arquob O., Abo-Hammour Z. Numerical solution of systems of second-order boundary value problems using continuous genetic algorithm. *Information Sciences*. 2014. Vol. 279. P. 396–415.
2. Vakil L.P. Using genetic algorithm for solving boundary value problems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. Vol. 47. № 8. P. 52–62. URL: <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i8.50>.
3. Вакал Л.П. Генетичні алгоритми як інструмент розв'язання нелінійних крайових задач. *Комп'ютерні засоби, мережі та системи*. 2015. № 14. С. 16–23.
4. Biologically inspired computing framework for solving two-point boundary value problems using differential evolution / M.F. Fateh, A. Zameer, N.M. Mirza, S.M. Mirza, M.A.Z. Raja. *Neural Computing and Applications*. 2017. Vol. 28. P. 2165–2179. URL: <https://doi.org/10.1007/s00521-016-2185-z>.

Отримані значення параметрів і похибки наближення збігаються з результатами, знайденими за методом найкращого чебишовського наближення функцій декількох змінних узагальненим поліномом [18]. Цей метод досить складний і застосовний тільки у випадках, коли параметри c_1, \dots, c_n входять у функцію ε лінійно [11]. Алгоритм ДЕ цього обмеження не має, що демонструє наступний приклад.

Приклад 2. Потрібно знайти розв'язок модельної задачі для нелінійного диференціального рівняння з лінійними крайовими умовами:

$$u \cdot \Delta u - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0 \text{ в області } D, \quad (9)$$

$$u(x, y)|_{x=0} = e^{2y}, \quad u(x, y)|_{y=1} = e^{x+2}, \quad u(x, y)|_{x=1} = e^{1+2y}, \\ u(x, y)|_{y=0} = e^x. \quad (10)$$

Область D – квадрат зі стороною 1, границя Γ – контур цього квадрату.

Наближений розв'язок задачі (9), (10) шукаємо у вигляді:

$$v(x, y; c_1, c_2) = e^{c_1 x + c_2 y}. \quad (11)$$

Легко перевірити, що функція (11) точно задовольняє диференціальне рівняння (9) для довільних значень параметрів c_1 і c_2 .

У системі Matlab на рівномірній сітці E_{81} із кроком 0,05 по кожній змінній отримані такі значення шуканих параметрів: $c_1 = 1$, $c_2 = 2$. Вони відповідають точному розв'язку $u(x, y) = e^{x+2y}$ крайової задачі (9), (10).

Висновки. У роботі запропоновано еволюційний підхід до розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь еліптичного типу на основі алгоритму ДЕ. Невідомі параметри наближених розв'язків цих задач визначаються так, щоб похибка наближення крайових умов була мінімальною в чебишовській нормі. Алгоритм ДЕ дає змогу знаходити оптимальні значення параметрів не тільки в лінійному, а й у нелінійному випадках. Результати обчислювального експерименту показали ефективність застосування цього алгоритму для розв'язання крайових задач. У подальшому планується адаптувати алгоритм ДЕ для розв'язання мішаних крайових задач.

5. Вакал Л.П., Вакал Є.С. Розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь за алгоритмом диференціальної еволюції. *Математичні машини і системи*. 2020. № 1. С. 43–52.
6. Storn R., Price K. Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*. 1997. Vol. 11. P. 341–35.
7. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. Київ : Либідь, 2001. 336 с.
8. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. Москва : Из-во иностр. лит., 1953. 460 с.
9. Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. Чебышевские приближения. Москва : Наука, 1978. 272 с.
10. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев : Наук. думка, 1969. 623 с.
11. Каленчук-Порханова А.О., Вакал Л.П. Побудова найкращих рівномірних наближень функцій багатьох змінних. *Комп'ютерні засоби, мережі та системи*. 2007. № 6. С. 141–148.
12. Vakal L.P. Solving uniform nonlinear approximation problem using continuous genetic algorithm. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48. № 6. P. 49–59. URL: <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i6.50>.
13. Вакал Л.П. Апроксимація функцій багатьох змінних із застосуванням алгоритму диференціальної еволюції. *Математичні машини і системи*. 2017. № 1. С. 90–96.
14. Vakal L.P. Seeking Optimal Knots for Segment Approximation. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48. № 11. P. 68–75. URL: <https://doi.org/10.1007/s00521-016-2185-z>.
15. Вакал Л.П., Вакал Є.С. Знаходження оптимальних параметрів емпіричних формул декількох змінних за допомогою еволюційних алгоритмів. *Математичні машини і системи*. 2018. № 3. С. 109–116.
16. Використання математичного пакета Matlab для розв'язування прикладних задач / Б.П. Довгий, Є.С. Вакал, Ю.Є. Вакал, А.В. Попов. Київ : Фітосоціоцентр, 2012. 78 с.
17. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. Москва : Мир, 1969. 447 с.
18. Вакал Л.П. Розв'язання крайових задач з використанням програмних засобів чебишовських наближень. *Комп'ютерні засоби, мережі та системи*. 2010. № 9. С. 47–53.

REFERENCES

1. Abu-Arquab, O., & Abo-Hammour, Z. (2014). Numerical solution of systems of second-order boundary value problems using continuous genetic algorithm. *Information Sciences*, 279, 396–415.
2. Vakal, L.P. (2015). Using genetic algorithm for solving boundary value problems. *Journal of Automation and Information Sciences*, 47(8), 52–62. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i8.50>.
3. Vakal, L.P. (2015). Henetychni alhorytmy yak instrument rozv'iazannia neliniinykh kraiovykh zadach [Genetic algorithms as a tool for solving nonlinear boundary value problems]. *Komp'yuterni zasoby, merezhi ta systemy*, (14), pp. 16–23 (in Ukrainian).
4. Fateh, M.F., Zameer, A., Mirza, N.M., Mirza, S.M., & Raja, M.A.Z. (2017). Biologically inspired computing framework for solving two-point boundary value problems using differential evolution. *Neural Computing and Applications*, 28, 2165–2179. <https://doi.org/10.1007/s00521-016-2185-z>.
5. Vakal, L.P., & Vakal, Ye.S. (2020). Rozv'iazannia kraiovykh zadach dlia zvychainykh dyferentsialnykh rivnian za alhorytmom dyferentsialnoi evoliutsii [The solution of boundary value problems for ordinary differential equations using the differential evolution algorithm]. *Matematychni mashyny i systemy*, (1), 43–52 (in Ukrainian).
6. Storn, R., & Price, K. (1997). Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, 11, 341–35.
7. Perestyuk, M.O., & Marynets, V.V. (2001). *Teoriya rivnyan' matematychnoyi fizyky* [Theory of mathematical physics equations]. Kyiv: Lybid'. (in Ukrainian).
8. Collatz, L. (1953). *Chislennyye metodyi resheniya differentsialnykh uravneniy* [Numerical methods for solving differential equations] Moscow: izdatel'stvo inostranoj literatury (in Russian).
9. Collatz, L., & Krabs, W. (1978). *Teoriya priblizheniy. Chebyshevskie priblizheniya* [Approximation theory. Chebyshev approximations]. Moscow: Nauka (in Russian).
10. Remez, Ye.Ya. (1969). *Osnovy chislennykh metodov chebyshevskogo priblizheniya* [Fundamentals of numerical methods for Chebyshev approximation]. Kiev: Naukova dumka (in Russian).
11. Kalenchuk-Porkhanova, A.O., & Vakal, L.P. (2007). Pobudova naikrashchykh rivnomirnykh nablyzhen funktsii bahatokh zminnykh [Constructing the best uniform approximations for many-variables functions]. *Komp'yuterni zasoby, merezhi ta systemy*, (6), 141–148 (in Ukrainian).
12. Vakal, L.P. (2016). Solving uniform nonlinear approximation problem using continuous genetic algorithm. *Journal of Automation and Information Sciences*, 48(6), 49–59. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i6.50>.

13. Vakal, L.P. (2017). Aproksymatsiia funktsii bahatokh zminnykh iz zastosuvanniam alhorytmu dyferentsialnoi evoliutsii [Approximation of many-variables functions using differential evolution algorithm]. *Matematychni mashyny i systemy*, (1), 90–96 (in Ukrainian).
14. Vakal, L.P. (2016). Seeking Optimal Knots for Segment Approximation. *Journal of Automation and Information Sciences*, 48(11), 68–75. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i6.50>.
15. Vakal, L.P., & Vakal, E.S. (2018). Znakhodzhennia optymalnykh parametriv empirychnykh formul dekilkokh zminnykh za dopomohoiu evoliutsiinykh alhorytmiv [Finding optimal parameters of the empirical formulas of several variables using evolutionary algorithms]. *Matematychni mashyny i systemy*, (3), 109–116 (in Ukrainian).
16. Dovgiy, B.P., Vakal, E.S., Vakal, Yu.E., & Popov, A.V. (2012). *Vykorystannya matemat`chnogo paketa matlab dlya rozv'yazuvannya prykladnyh zadach* [Using the matlab math package to solve application problems]. Kyiv: Fitosociocentr (in Ukrainian).
17. Collatz, L. (1969). *Funktsionalnyi analiz i vyichislitel'naya matematika* [Functional analysis and computational mathematics]. Moscow: Mir (in Russian).
18. Vakal, L.P. (2010). Rozv'iazannia kraiovykh zadach z vykorystanniam prohramnykh zasobiv chebyshevskykh nablyzhen [Solving boundary value problems using software for chebyshev approximations]. *Komp'yuterni zasoby, merezhi ta systemy*, (9), 47–53 (in Ukrainian).

УДК 519.6

DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-04>

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ БІЛЯ ВЕРШИНИ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ, ЩО ВИХОДИТЬ ІЗ КУТОВОЇ ТОЧКИ ЛАМАНОЇ МЕЖІ РОЗДІЛУ МАТЕРІАЛІВ

Дудик М. В.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
професор кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини
вул. Садова, 2, Умань, Черкаська обл., Україна
orcid.org/0000-0002-1399-6367
dudik_m@hotmail.com*

Решітник Ю. В.

*кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини
вул. Садова, 2, Умань, Черкаська обл., Україна
orcid.org/0000-0002-7937-2880
dikhtiarenko_iu@udpu.edu.ua*

Феньків В. М.

*аспірант
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини
вул. Садова, 2, Умань, Черкаська обл., Україна
orcid.org/0000-0002-3848-5686
fenkiv@ukr.net*

Ключові слова: міжфазна тріщина, ламана межа розділу, метод Віґардта-Вільямса, показники сингулярності, контакт берегів.

У статті в умовах плоскої деформації досліджуються локальні поля напружень і переміщень біля куткової точки ламаної межі розділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів, із якої виходить міжфазна тріщина. Моделюючи тріщину математичним розрізом, береги якого вільні від навантажень, за допомогою методу Віґардта-Вільямса розвинень розв'язків рівнянь теорії пружності за власними функціями, знайшли асимптотичні вирази для компонент градієнтів переміщень і тензора напружень біля вершини тріщини. Отримано характеристичне рівняння для визначення показників сингулярності напружень в околі вершини. Здійснено числовий аналіз залежності показників сингулярності від кута зламу межі розділу й відношення модулів Юнга з'єднаних матеріалів і виявлено існування інтервалів кутів зламу, на яких мають місце два комплексно спряжені показники сингулярності. Оскільки наслідком комплексних значень показників сингулярності є просторові осциляції переміщень берегів з фізично некоректним взаємним перетином, для їх усунення передбачено можливість контакту берегів та отримано наближену оцінку довжини ділянки контакту за найбільшою з відстаней до вершини в межах розмірів тріщини, на якій розкриття тріщини обертається в нуль.

Ураховуючи можливий контакт берегів, за допомогою методу Віґардта-Вільямса розв'язали задачу про міжфазну тріщину із взаємодіючими за законом сухого тертя берегами, яка поширюється з куткової точки ламаної межі розділу матеріалів. Отримано рівняння для визначення показників сингулярності біля точки зламу межі розділу й аналітичні вирази для асимптотик полів напружень і переміщень у її околі. Показано, що наявність контакту берегів усуває можливі просторові осциляції переміщень берегів у рамках моделі розкритої міжфазної тріщини. Проте й у рамках моделі тріщини з контактуючими берегами виявлено інтервали кутів зламу межі розділу, для яких залежно від напрямку зсувних переміщень берегів тріщини мають місце комплексні показники сингулярності.

**ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE STRESS-STRAIN STATE NEAR
THE TIP OF THE INTERPHACIAL CRACK OUTCOMING
FROM ANGULAR POINT OF THE BROKEN INTERPHACE**

Dudyk M. V.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Professor at the Department of Physics and Integrative Technologies of Natural Sciences Training
Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University
Sadova str., 2, Uman, Cherkasy region, Ukraine
orcid.org/0000-0002-1399-6367
dudik_m@hotmail.com*

Reshitnyk Yu. V.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor at the Department of Physics and Integrative Technologies
of Natural Sciences Training
Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University
Sadova str., 2, Uman, Cherkasy region, Ukraine
orcid.org/0000-0002-7937-2880
dikhtiarenko_iu@udpu.edu.ua*

Fenkiv V. M.

*Postgraduate Student
Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University
Sadova str., 2, Uman, Cherkasy region, Ukraine
orcid.org/0000-0002-3848-5686
fenkiv@ukr.net*

Key words: *interfacial crack,
broken interface,
Wighardt-Williams method,
stress singularity indexes,
faces contact.*

In the article the local fields of stresses and displacements near the corner point of the broken interface between two different homogeneous isotropic materials, from which the interfacial crack emerges, was investigated under the plane strain deformation. The crack is modelled by a mathematical cut with load-free faces. Using the Wieghardt-Williams method of the solutions expansion of the elasticity theory equations in terms of eigenfunctions, asymptotic expressions for the components of the displacement gradients and the stress tensor at the crack tip were found. A characteristic equation for the calculation of singularity indexes of stresses at the vicinity of the vertex was obtained. A numerical analysis of the dependence of singularity indexes on the kink angle of interface and on the ratio of Young's moduli of joined materials was carried out and the existence of kink angles intervals on which two complex conjugate singularity indexes take place was found out. Since the consequence of complex values of the singularity indexes is spatial oscillations of faces displacements with physically incorrect mutual intersection, we provided for the possibility of faces contact to eliminate this oscillations and obtained an approximate estimate of the length of contact area as the largest distance within a crack length, at which the crack opening becomes zero.

Taking into account the possibility of the faces contact and using the Wieghardt-Williams method, the problem of an interfacial crack with the faces interacting according to the law of dry friction, which extends from the corner point of the broken interface, was solved. Analytical expressions for the asymptotes of stresses and displacements fields and equation for the computation of stress singularity indexes near the corner point of the interface were obtained. It is shown that the presence of faces contact eliminates possible spatial oscillations of faces displacements within the framework of the model of an open interfacial crack. However, within the framework of the model of a crack with contacting faces, the intervals of angles of kink of the interface were found, for which complex singularity indexes take place. The presence of these intervals depends on the direction of shear displacements of the faces crack.

Вступ. Більшість досліджень міжфазних тріщин стосується випадку їх розташування на плоскій межі розділу двох різних матеріалів. Водночас бракує аналогічних досліджень більш загального випадку – міжфазних тріщин, розташованих на ламаній межі розділу. Зокрема, P.S. Theocaris та E.E. Gdoutos [1], використовуючи метод комплексних потенціалів Мусхелішвілі, отримали в явному вигляді характеристичні рівняння для показників сингулярності напружень у рамках першої, другої й змішаної основних задач теорії пружності для міжфазної тріщини, що виходить із кутової точки ламаної межі розділу двох різних однорідних матеріалів. Проте автори обмежилися числовими розрахунками показників сингулярності, відмовившись від пошуку аналітичних виразів для локального поля напружень, які необхідні для аналізу НДС і розрахунку параметрів маломасштабних зон передруйнування в околі вершини тріщини. За певних припущень показники сингулярності напружень у вищезгаданих умовах можуть бути визначені в рамках досліджень [2–7] локальних полів напружень в околі спільної вершини багатоклинової гетерогенної системи. Відзначимо також роботи [8–10], у яких за допомогою інтегрального перетворення Мелліна розв’язано задачу про визначення полів напружень і коефіцієнтів інтенсивності в околі розкритої тріщини скінченої довжини, що лежить на межі з’єднання двох клинів з різними пружними сталими, але на певній відстані від їх спільної вершини.

Метою роботи є дослідження локального поля напружень і переміщень біля кутової точки ламаної межі поділу двох різних матеріалів, з якої виходить міжфазна тріщина. Завдання полягає в знаходженні в умовах плоскої деформації за допомогою методу Віггардта-Вільямса асимптотичних виразів для компонент тензора напружень біля вершини тріщини.

1. НДС біля кутової точки ламаної межі розділу матеріалів, із якої виходить розкрита міжфазна тріщина

В умовах плоскої деформації в рамках статичної задачі теорії пружності для кусково-однорідного ізотропного тіла дослідимо поведінку напружень біля вершини міжфазної тріщини, яка співпадає з кутовою точкою межі розділу двох різних пружних матеріалів. Із цією метою, дотримуючись загальних положень про поведінку напружень поблизу кутових точок пружних тіл, розглянемо однорідну задачу теорії пружності для кусково-однорідної площини з межею розділу матеріалів у формі прямолінійних сторін кута, з вершини якого вздовж однієї зі сторін виходить півнескінченна тріщина (рис. 1).

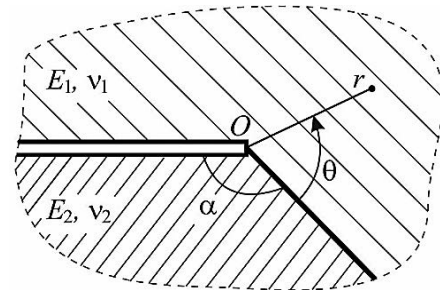


Рис. 1. Розрахункова схема задачі

Виберемо полярну систему координат (r, θ) із початком O у вершині кута зламу межі розділу матеріалів і полярною віссю вздовж лінії з’єднання матеріалів. Припускаючи береги тріщини вільними від навантаження й урахувавши умову неперервності напружень і переміщень на лінії з’єднання матеріалів, доходимо крайової задачі теорії пружності з граничними умовами:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}^1(r, 0) &= \sigma_{\theta}^2(r, 0), \quad \tau_{r\theta}^1(r, 0) = \tau_{r\theta}^2(r, 0), \\ u_{\theta}^1(r, 0) &= u_{\theta}^2(r, 0), \quad u_r^1(r, 0) = u_r^2(r, 0), \\ \sigma_{\theta}^1(r, \beta) &= \sigma_{\theta}^2(r, -\alpha) = 0, \\ \tau_{r\theta}^1(r, \beta) &= \tau_{r\theta}^2(r, -\alpha) = 0 \quad (\beta = 2\pi - \alpha), \end{aligned} \quad (1)$$

де верхні індекси відповідають номеру матеріалу. Оскільки досліджуване тіло є з’єднанням двох пружних клинів, скористаємося методом Віггардта-Вільямса [11; 12] розкладання розв’язків рівнянь теорії пружності за власними функціями й подамо напруження та похідні від переміщень у кожному з матеріалів у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}^n(r, \theta) &= r^{\lambda} [a_1^n \sin(\lambda + 2)\theta + a_2^n \sin \lambda\theta + a_3^n \cos(\lambda + 2)\theta + a_4^n \cos \lambda\theta], \\ \tau_{r\theta}^n(r, \theta) &= -\frac{r^{\lambda}}{(\lambda + 2)} [a_1^n (\lambda + 2) \cos(\lambda + 2)\theta + \\ &+ a_2^n \lambda \cos \lambda\theta - a_3^n (\lambda + 2) \sin(\lambda + 2)\theta - a_4^n \lambda \sin \lambda\theta], \\ \sigma_r^n(r, \theta) &= -\frac{r^{\lambda}}{\lambda + 2} [a_1^n (\lambda + 2) \sin(\lambda + 2)\theta + \\ &+ a_2^n (\lambda - 2) \sin \lambda\theta + a_3^n (\lambda + 2) \cos(\lambda + 2)\theta + a_4^n (\lambda - 2) \cos \lambda\theta], \\ \frac{\partial^2 u_{\theta}^n(r, \theta)}{\partial r^2} &= -\frac{1 + \nu_n}{E_n} \frac{\lambda r^{\lambda-1}}{\lambda + 2} [a_1^n (\lambda + 2) \cos(\lambda + 2)\theta + a_2^n (\lambda + 4 - 4\nu_n) \cos \lambda\theta - \\ &- a_3^n (\lambda + 2) \sin(\lambda + 2)\theta - a_4^n (\lambda + 4 - 4\nu_n) \sin \lambda\theta], \\ \frac{\partial u_r^n(r, \theta)}{\partial r} &= -\frac{1 + \nu_n}{E_n} \frac{r^{\lambda}}{\lambda + 2} [a_1^n (\lambda + 2) \sin(\lambda + 2)\theta + \\ &+ a_2^n (\lambda - 2 + 4\nu_n) \sin \lambda\theta + a_3^n (\lambda + 2) \cos(\lambda + 2)\theta + \\ &+ a_4^n (\lambda - 2 + 4\nu_n) \cos \lambda\theta] \end{aligned} \quad ; \quad (2)$$

де $n=1$ для $0 \leq \theta \leq \beta$ і $n=2$ для $-\alpha \leq \theta \leq 0$. Задовольняючи граничні умови (1) за допомогою формул (2), доходимо системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів a_j^n ($j=1 \div 4$), нетривіальний розв’язок якої вимагає

рівності нулю її детермінанта. Ця умова приводить до характеристичного рівняння задачі для визначення показника λ у функціональній залежності напружень від відстані r до вершини тріщини, яке після розрахунку детермінанта і його алгебраїчних перетворень набуває вигляду:

$$D_0(\lambda) = 0, \quad (3)$$

$$D_0(\lambda) = -(1 + \kappa_1)^2 t_1 - 4(1 + \kappa_1)(e - 1)t_2 - e^2(1 + \kappa_2)^2 t_3 + 4(e - 1)^2 t_4 + 4e(1 + \kappa_2) \times (e - 1)t_5 + 2e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1)t_5,$$

$$t_1 = (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)\alpha,$$

$$t_2 = \sin^2(\lambda + 1)\beta, \quad t_4 = \sin^2(\lambda + 1)\alpha,$$

$$t_3 = (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)\beta,$$

$$t_5 = t_1 + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin 2\lambda \cos \lambda + 1)\beta,$$

$$e = \frac{E_1}{E_2} \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1}, \quad \kappa_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)}.$$

З (2) випливає, що поведінка напружень біля вершини тріщини матиме сингулярний характер, якщо рівняння (3) матиме корені в смугі $-1 < \text{Re } \lambda < 0$. Чисельний аналіз рівняння (3) показав, що таких коренів може бути 2 або 3 (рис. 2), отже, поведінку напружень поблизу вершини визначатимуть 2 або 3 сингулярних доданки.

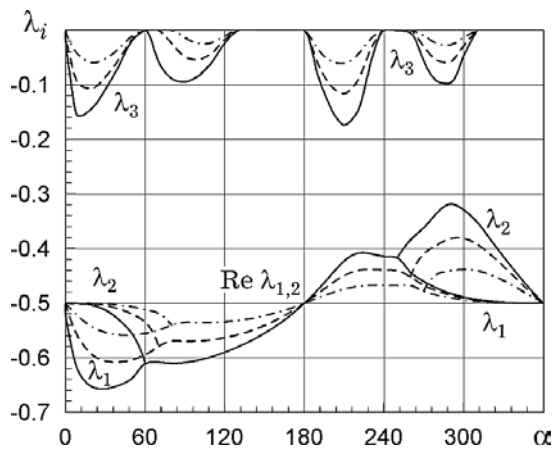


Рис. 2. Залежність показників сингулярності напружень λ_i ($i=1, 2, 3$) від кута зламу межі розділу матеріалів α для $\nu_1=\nu_2=0,3$ і $E_1/E_2=0,1$ (суцільні лінії), $E_1/E_2=0,25$ (штрихові лінії), $E_1/E_2=0,5$ (штрих-пунктирні лінії)

Виявлено також, що існує інтервал кутів зламу ($\alpha_{\min}, \alpha_{\max}$), на якому рівняння (3) має в смугі $-1 < \text{Re } \lambda < 0$ два комплексно спряжені корені $\lambda_1, \lambda_2 = \overline{\lambda_1} \equiv \lambda_r + i\lambda_m$. Значення $\alpha_{\min}, \alpha_{\max}$ для окремих параметрів пружних матеріалів приведені в таблиці 1. У частинному випадку тріщини, що лежить на плоскій межі розділу матеріалів ($\alpha = 180^\circ$), характеристичне рівняння (3) має два комплексно спряжені корені:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\omega, \quad \omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 - \beta_D}{1 + \beta_D}, \quad \beta_D = \frac{(1 + e\kappa_2) - (e + \kappa_1)}{(1 + e\kappa_2) + (e + \kappa_1)}$$

(β_D – параметр Дандерса), що узгоджується з результатами досліджень [13; 14].

Для кожного зі знайдених коренів λ_i рівняння (3) вважатимемо один із коефіцієнтів a_j^n відомим і рівним заданій сталій, а саме: $a_4^n(\lambda_i) = C_i$. Це дає змогу визначити решту коефіцієнтів, виразивши їх через C_i , та отримати шукані формули для локального поля напружень і переміщень біля вершини тріщини, які подамо у вигляді суперпозиції частинних розв’язків задачі:

$$\sigma_\theta(r, \theta) = \sum_i C_i F_1(\lambda_i, \theta) r^{\lambda_i}, \quad \tau_{r\theta}(r, \theta) = \sum_i C_i F_2(\lambda_i, \theta) r^{\lambda_i},$$

$$\sigma_r(r, \theta) = \sum_i C_i F_3(\lambda_i, \theta) r^{\lambda_i},$$

$$\frac{\partial^2 u_\theta(r, \theta)}{\partial r^2} = \sum_i C_i F_4(\lambda_i, \theta) r^{\lambda_i-1}, \quad \frac{\partial u_r(r, \theta)}{\partial r} = \sum_i C_i F_5(\lambda_i, \theta) r^{\lambda_i}$$

$$F_m(\lambda, \theta) = \begin{cases} F_m^1(\lambda, \theta), & 0 \leq \theta \leq 2\pi - \alpha, \\ F_m^2(\lambda, \theta), & -\alpha \leq \theta \leq 0; \end{cases} \quad (m = 1 \div 5)$$

$$F_1^n(\lambda, \theta) = \tilde{a}_1^n(\lambda) \sin(\lambda + 2)\theta + \tilde{a}_2^n(\lambda) \sin \lambda \theta + \tilde{a}_3^n(\lambda) \cos(\lambda + 2)\theta + \tilde{a}_4^n(\lambda) \cos \lambda \theta,$$

$$F_2^n(\lambda, \theta) = -\tilde{a}_1^n(\lambda) \cos(\lambda + 2)\theta - \tilde{a}_2^n(\lambda) \frac{\lambda}{\lambda + 2} \cos \lambda \theta + \tilde{a}_3^n(\lambda) \sin(\lambda + 2)\theta + \tilde{a}_4^n(\lambda) \frac{\lambda}{\lambda + 2} \sin \lambda \theta,$$

$$F_3^n(\lambda, \theta) = -[\tilde{a}_1^n(\lambda) \sin(\lambda + 2)\theta + \tilde{a}_2^n(\lambda) \frac{\lambda - 2}{\lambda + 2} \sin \lambda \theta + \tilde{a}_3^n(\lambda) \cos(\lambda + 2)\theta + \tilde{a}_4^n(\lambda) \frac{\lambda - 2}{\lambda + 2} \cos \lambda \theta],$$

$$F_4^n(\lambda, \theta) = -\frac{1 + \nu_n}{E_n} \frac{\lambda}{\lambda + 2} [\tilde{a}_1^n(\lambda)(\lambda + 2) \cos(\lambda + 2)\theta + \tilde{a}_2^n(\lambda)(\lambda + 4 - 4\nu_n) \cos \lambda \theta - \tilde{a}_3^n(\lambda)(\lambda + 2) \sin(\lambda + 2)\theta - \tilde{a}_4^n(\lambda)(\lambda + 4 - 4\nu_n) \sin \lambda \theta],$$

$$F_5^n(r, \theta) = -\frac{1 + \nu_n}{E_n(\lambda + 2)} [\tilde{a}_1^n(\lambda)(\lambda + 2) \sin(\lambda + 2)\theta + \tilde{a}_2^n(\lambda)(\lambda - 2 + 4\nu_n) \sin \lambda \theta + \tilde{a}_3^n(\lambda)(\lambda + 2) \cos(\lambda + 2)\theta + \tilde{a}_4^n(\lambda)(\lambda - 2 + 4\nu_n) \cos \lambda \theta]. \quad (4)$$

Функції $\tilde{a}_j^n(\lambda)$ подано в додатку А. Отже, формули (4) з точністю до сталих C_i , які залежать від конфігурації кусково-однорідного тіла й прикла-

Таблиця 1

Інтервал кутів зламу межі розділу матеріалів, яким відповідають комплексні показники сингулярності

E1/E2	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\alpha_{\min}, ^\circ$	61	70	75	79	82	84	86	88	89
$\alpha_{\max}, ^\circ$	252	255	258	260	262	264	266	267	268

дених навантажень, повністю визначають поле напружень і переміщень в околі кутової точки ламаної межі розділу матеріалів, з якої виходить міжфазна тріщина.

У поведінці напружень при наближенні до вершини тріщини головну роль відіграватимуть доданки, що відповідають найменшим, близьким за величиною кореням λ_1 і λ_2 (рис. 2). Сталі C_1 і C_2 пов'язані з коефіцієнтами інтенсивності напружень у вершині тріщини K_1, K_2 , які визначаються з розв'язку відповідної задачі теорії пружності [15]. У разі комплексно спряжених коренів $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ для отримання дійсних значень напружень і переміщень покладемо $C_1 = \bar{C}_2$ та подамо С1 через комплексний КІН $K = K_1 + iK_2$, як це зазвичай робиться в теорії міжфазних тріщин [16]:

$$C_1 = \bar{C}_2 = (2\pi)^{\lambda_r} (K_1 + iK_2) L^{-i\lambda_m} = (2\pi)^{\lambda_r} |K| L^{-i\lambda_m} \exp(i\psi), \quad (5)$$

де $\psi = \arg K = \arctg(K_2 / K_1)$ – фазовий кут, що характеризує ступінь змішування мод навантаження. Зауважимо, що через відсутність симетрії в будові кусково-однорідного тіла й викликане цим перемішування мод навантаження біля вершини тріщини величини K_1 і K_2 не можуть бути зіставлені коефіцієнтам інтенсивності напружень при розтягу і зсуві, як у теорії тріщин в однорідному матеріалі. У поданні C_1 для уникнення залежності напружень і переміщень від вибору одиниці вимірювання відстані введено множник $L^{-i\lambda_m}$, який містить деякий характерний розмір задачі L , наприклад, довжину тріщини.

У разі комплексно спряжених коренів $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ характеристичного рівняння (3) формули (4) передбачають фізично некоректні просторові осциляції напружень і переміщень при наближенні до вершини тріщини. Проте, як показує досвід численних досліджень міжфазної тріщини на плоскій межі розділу, це не перешкоджає отримувати фізично коректні результати на відстанях від кутової точки, що перевищують ділянку осциляцій, якщо її розміри значно менші за довжину тріщини.

Використовуючи знайдений розв'язок (4), оцінимо розмір ділянку осциляцій за найбільшою відстанню до вершини в межах розмірів тріщини, на якій передбачається взаємний перетин берегів. Припускаючи малість контактної зони порівняно з розмірами тріщини, обмежимося у виразі для $\partial^2 u_0(r, \theta) / \partial r^2$ лише двома доданками, які дають найбільший вклад при $r \rightarrow 0$. Прийемо також вживане в лінійній механіці руйнування припущення, що вершина тріщини є точкою повернення [17], тобто що береги тріщини у вершині мають спільну дотичну. Тоді, згідно з вимогою дійсного характеру напружень і переміщень, отримаємо для нормальної компоненти переміщення вираз:

$$u_0(r, \theta) = 2 \operatorname{Re} \left(C_1 \cdot \frac{F_4(\lambda_1, \theta)}{\lambda_1(\lambda_1 + 1)} \cdot r^{\lambda_1 + 1} \right),$$

або, враховуючи (5), маємо:

$$u_0(r, \theta) = 2(2\pi)^{\lambda_r} \cdot r^{\lambda_r + 1} \cdot |K| \cdot \left| \frac{F_4(\lambda_1, \theta)}{\lambda_1(\lambda_1 + 1)} \right| \cos \left(\lambda_m \ln \frac{r}{L} + \psi + \varphi \right),$$

де $\varphi = \arg \frac{F_4(\lambda_1, \theta)}{\lambda_1(\lambda_1 + 1)}$. Визначаючи розкриття тріщини як відносне переміщення її берегів $\delta(r) = -u_0(r, 2\pi - \alpha) + u_0(r, -\alpha)$, отримаємо:

$$\delta(r) = 2(2\pi)^{\lambda_r} r^{\lambda_r + 1} |K| a \cos \left(\lambda_m \ln \frac{r}{L} + \psi + \xi \right),$$

де

$$a = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \xi = \arctg(B / A),$$

$$A = \left| \frac{F_4^2(\lambda_1, -\alpha)}{\lambda_1(\lambda_1 + 1)} \right| \cos \varphi_2 - \left| \frac{F_4^1(\lambda_1, 2\pi - \alpha)}{\lambda_1(\lambda_1 + 1)} \right| \cos \varphi_1,$$

$$B = \left| \frac{F_4^2(\lambda_1, -\alpha)}{\lambda_1(\lambda_1 + 1)} \right| \sin \varphi_2 - \left| \frac{F_4^1(\lambda_1, 2\pi - \alpha)}{\lambda_1(\lambda_1 + 1)} \right| \sin \varphi_1,$$

$$\varphi_1 = \arg \left| \frac{F_4^1(\lambda_1, 2\pi - \alpha)}{\lambda_1(\lambda_1 + 1)} \right|, \quad \varphi_2 = \arg \left| \frac{F_4^2(\lambda_1, -\alpha)}{\lambda_1(\lambda_1 + 1)} \right|.$$

Через наявність логарифма під знаком косинуса розкриття аперіодично осилує при зміні r , нескінченну кількість раз змінюючи знак. Для $\delta < 0$ це означає фізично неможливий взаємний перетин протилежних берегів тріщини, що трактується як виникнення контакту берегів на відповідних відрізках. Оцінимо довжину всієї ділянки контакту берегів за найбільшою з відстаней $r_m < L$, на якій розкриття обертається в нуль. Прирівнюючи $\delta(r)$ до нуля, знаходимо:

$$r_m = L \cdot \exp \left(\frac{1}{\lambda_m} \left(\frac{\pi}{2} - \psi - \xi \right) \right). \quad (6)$$

Як показує аналіз формули (6), розмір контактної зони залежить від пружних параметрів матеріалів і кута зламу межі поділу, які входять у r_m через λ_m і ξ , і від конфігурації зовнішнього навантаження, яка представлена фазовим кутом ψ . Також із (6) випливає, що нехтування контактною зоною ($r_m \ll L$), яке дає підстави вважати отриманий вище розв'язок прийнятним для аналізу НДС біля вершини тріщини на відстанях $r_m \ll r \ll L$ у разі комплексних показників сингулярності, є можливим при виконанні нерівності $\frac{1}{\lambda_m} \left(\frac{\pi}{2} - \psi - \xi \right) \ll -1$. Порушення цієї умови призводить до появи значної за розмірами контактної зони й вимагає розв'язання задачі, яка від самого початку вимагає врахування ділянки контакту берегів.

2. Вплив контакту берегів на НДС біля вершини міжфазної тріщини

Згідно з висновками п. 2, припускаємо, що частина берегів тріщини перебуває в контакті з тертям за законом Кулона. Для дослідження впливу контакту берегів на локальне поле напружень

біля вершини тріщини знехтуємо скінченністю розмірів ділянки контакту й дійдемо крайової задачі теорії пружності, аналогічної розглянутій вище, із заміною в (1) останніх двох умов такими:

$$\theta = (2\pi - \alpha) \cup (-\alpha): \quad \langle \sigma_\theta \rangle = 0, \quad \tau_{r,\theta} = -\mu \sigma_\theta, \quad \langle u_\theta \rangle = 0$$

($\langle f \rangle$ – стрибок величини f ; μ – коефіцієнт тертя). Розв’язання цієї крайової задачі виконується за допомогою методу Віггардта-Вільямса аналогічно розв’язанню задачі в п. 2 і приводить до наступного характеристичного рівняння для визначення показників сингулярності:

$$D(\lambda) = 0, \quad D(\lambda) = D_1(\lambda) + \mu D_2(\lambda), \quad (7)$$

$$D_1(\lambda) = (1 - e)[0,5(1 + \kappa_1)D_{11}t_1 - 0,5e(1 + \kappa_2)D_{12}t_3 + e(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2)d_3] + e(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2)D_{13},$$

$$D_2(\lambda) = (1 - e)\{(1 + \kappa_1)D_{21}t_1 - e(1 + \kappa_2)[D_{22}t_3 - (1 + \kappa_1)d_4] + 2(1 - e)^2t_3\} + e(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2)D_{23},$$

$$D_{11}(\lambda) = (1 - e)d_5 + (1 + \kappa_1) \sin 2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha),$$

$$D_{12}(\lambda) = e(1 + \kappa_2) \sin 2(\lambda + 1)\alpha + (1 - e)d_2,$$

$$D_{13}(\lambda) = \sin^2 \lambda \pi [(1 + \kappa_1)d_7 - e(1 + \kappa_2)d_9];$$

$$D_{21}(\lambda) = (1 - e)d_6 - (1 + \kappa_1)t_2,$$

$$D_{22}(\lambda) = e(1 + \kappa_2)t_4 + (1 - e)d_1,$$

$$D_{23}(\lambda) = \sin^2 \lambda \pi [(1 + \kappa_1) - e(1 + \kappa_2)]d_8;$$

$$d_1 = (\lambda + 1) \sin^2 \alpha + 3t_4, \quad d_2 = (\lambda + 1) \sin 2\alpha + \sin 2(\lambda + 1)\alpha,$$

$$d_3 = [(\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin(\lambda + 1)\beta] \sin 2(\lambda + 1)(\alpha - \pi) - 2(\lambda + 1) \sin^2 \lambda \pi \sin 2\alpha \cos^2(\lambda + 1)(\pi - \alpha),$$

$$d_4 = 2[(\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin(\lambda + 1)\beta] \sin^2(\lambda + 1)(\pi - \alpha) - 4 \sin^2 \lambda \pi [(\lambda + 1) \sin^2 \alpha \cos^2(\lambda + 1)(\pi - \alpha) + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin(\lambda + 1)\beta],$$

$$d_5 = (\lambda + 1) \sin 2\alpha - \sin 2(\lambda + 1)\beta, \quad d_6 = (\lambda + 1) \sin^2 \alpha + 3t_2,$$

$$d_7 = (\lambda + 1) \sin \alpha \cos \alpha - \sin(\lambda + 1)\alpha \cos(\lambda + 1)\beta,$$

$$d_8 = (\lambda + 1) \sin^2 \alpha + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin(\lambda + 1)\beta,$$

$$d_9 = (\lambda + 1) \sin \alpha \cos \alpha + \cos(\lambda + 1)\alpha \sin(\lambda + 1)\beta.$$

У випадку $\alpha = \pi$ рівняння (7) із точністю до несуттєвих множників зводиться до відомого результату М. Комніноу [18]:

$$\cos \lambda \pi + \mu \beta_D \sin \lambda \pi = 0,$$

якому відповідає показник сингулярності $\lambda = -\pi^{-1} \operatorname{arctg} |\mu \beta_D|$.

Згідно з розрахунками, рівняння (7) може мати від 1 до 3 коренів у смузї $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$, які визначають сингулярну поведінку напружень при наближенні до вершини тріщини. На рис. 3 показані залежності показників сингулярності λ_1, λ_2 для $E_1/E_2=0,1, \nu_1=\nu_2=0,3$ при $\mu=0$ (суцільна лінія), $\mu=1$ (штрихована лінія) і $\mu=-1$ (штрих-пунктирна лінія); знак μ визначається напрямком зсувних переміщень берегів тріщини. Найменший з цих коренів ν_1 є дійсним для всіх кутів зламу у випадку $\mu \geq 0$, тому напруження біля вершини тріщини мають степеневу особливість і контакт берегів усуває виявлені в п. 2 в рамках класичної моделі міжфазної тріщини просторові осциляції переміщень і напружень біля вершини тріщини при кутах зламу в інтервалі $(\alpha_{\min}, \alpha_{\max})$. Проте для $\mu < 0$ на певних інтервалах кутів зламу $(\alpha_{1\min}, \alpha_{1\max})$, що залежать від відношення модулів Юнга з’єднаних матеріалів і коефіцієнта тертя (таблиця 2), показники сингулярності можуть набувати комплексно спряжених значень $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, які обумовлюють фізично некоректні просторові осциляції переміщень (пунктирна ділянка на графіку для $\mu = -1$, рис. 3). Ширина інтервалу прямує до нуля по мірі зближення пружних характеристик матеріалів і зменшення (за модулем) коефіцієнта тертя (таблиця 2). Отримані результати переносяться на випадок $E_1/E_2 > 1$ шляхом одночасних заміन $E_1 \leftrightarrow E_2, \mu \rightarrow -\mu, \alpha \rightarrow 2\pi - \alpha$.

Отже, модель М. Комніноу міжфазної тріщини з контактом берегів не дає однозначного вирішення проблеми осцилюючої сингулярності. Розв’язання цієї проблеми, згідно з комплексною моделлю міжфазної тріщини [19; 20], убачається в урахуванні утворення зони передруйнування в околі вершини тріщини.

Аналогічно п. 2, визначивши коефіцієнти в розвиненнях (2), доходимо виразів (4) для компонент напружень і похідних від переміщень із функціями $\bar{a}_j^n(\lambda)$, поданими в додатку Б, і довільними множниками C_j , у яких закладена можливість урахування зовнішнього навантаження й

Таблиця 2

Інтервал кутів зламу межі розділу, яким відповідають комплексні показники сингулярності біля вершини міжфазної тріщини з контактуючими берегами ($\nu_1=\nu_2=0,3$)

E_1/E_2	0,1		0,3		0,5		0,7	
μ	-1	-2	-1	-2	-1	-2	-3	-4
$\alpha_{1\min}^\circ$	264	242	274	252	-	267	-	268
$\alpha_{1\max}^\circ$	316	322	305	312	-	305	-	304

будови конкретного кусково-однорідного тіла. На множник C_1 накладається умова $C_1 F_1(\lambda_1, \theta) < 0$, що відповідає дії стискального нормального напруження на береги тріщини та забезпечує їх контакт.

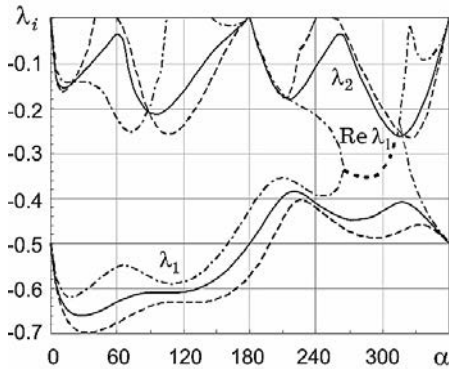


Рис. 3. Залежність показника сингулярності напружень біля вершини міжфазної тріщини з контактуючими берегами від кута зламу межі розділу

Отриманий розв'язок дає змогу оцінити довжину ділянки контакту берегів за відстанню від вершини, на якій нормальне напруження на берегах тріщини обертається в нуль. Обмежуючись у розвиненні $\sigma_\theta(r, 2\pi - \alpha)$ двома першими доданками, знаходимо:

$$s \approx \left(-\frac{C_1 F_1(\lambda_1, 2\pi - \alpha)}{C_2 F_2(\lambda_2, 2\pi - \alpha)} \right)^{1/(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

Оскільки знайдений вище розв'язок описує локальне поле напружень, використання отриманої оцінки довжини контактної зони обмежено вимогою, що розміри зони повинні бути значно меншими порівняно з довжиною тріщини або

будь-якими іншими актуальними довжинами (відстанями від вершини тріщини до найближчої межі конкретного тіла, до найближчої точки прикладання зовнішніх сил тощо).

Висновки. Виконане дослідження в умовах плоскої деформації напружено-деформованого стану біля вершини розкритої міжфазної тріщини, яка виходить кутової точки ламаної межі розділу двох різних матеріалів, виявило існування інтервалів кутів зламу, на яких мають місце комплексно спряжені показники сингулярності напружень. Їх наслідком є просторові осциляції переміщень берегів з фізично некоректним взаємним перетином, що можуть бути усунуті введенням ділянки контакту берегів. Розв'язок задачі про міжфазну тріщину із взаємодіючими за законом сухого тертя берегами, яка поширюється з кутової точки ламаної межі розділу матеріалів, показав, що наявність контакту берегів усуває можливі просторові осциляції переміщень берегів у рамках моделі розкритої міжфазної тріщини. Проте в рамках моделі тріщини з контактуючими берегами виявлено існування інтервалів кутів зламу межі розділу, для яких залежно від напрямку зсувних переміщень берегів тріщини також мають місце комплексні показники сингулярності.

Знайдені в роботі вирази для полів напружень і переміщень в околі вершини міжфазної тріщини можуть бути використані в рамках лінійної механіки руйнування для дослідження параметрів маломасштабних зон передруйнування і граничних навантажень у кусково-однорідних тілах з ламаною межею розділу матеріалів. Частково ця проблема розв'язана для випадку розкритої тріщини [21–23], проте вона залишається актуальною для випадку тріщини з контактуючими берегами.

Додаток А

Власні функції в розвиненнях компонент напружень і похідних від переміщень біля вершини міжфазної тріщини з вільними від навантаження берегами

$$\begin{aligned} \bar{a}_j^1(\lambda) &= \frac{e(1 + \kappa_2) \cdot \Delta_j^1(\lambda)}{(\lambda + 2) \cdot \Delta(\lambda)} \quad (j = 1 \div 4), \\ \bar{a}_1^2(\lambda) &= \frac{\Delta_1^2(\lambda)}{(\lambda + 2) \cdot \Delta(\lambda)}, \quad \bar{a}_2^2(\lambda) = \frac{\Delta_2^2(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad \bar{a}_3^2(\lambda) = \frac{\Delta_3^2(\lambda)}{(\lambda + 2) \cdot \Delta(\lambda)}, \quad \bar{a}_4^2(\lambda) = 1; \\ \Delta_1^1 &= e(1 + \kappa_2) [2t_3 \cos(\lambda + 2)\alpha + \lambda t_9] - (1 + \kappa_1) [2t_3 \cos(\lambda + 2)\alpha + \lambda \sin \alpha \cdot t_7 + \\ &+ 2 \sin 2\lambda\pi \sin(\lambda + 2)\beta] + 2(e - 1) [t_3 t_8 - \lambda((\lambda + 2) \sin \alpha \cdot t_6 - \sin 2\lambda\pi \sin \lambda\beta)], \\ \Delta_2^1 &= 2(e - 1) [(\lambda + 2) \sin \alpha \cdot t_6 - \sin 2\lambda\pi \sin \lambda\beta - t_3 \cos(\lambda + 2)\alpha] + \\ &+ (1 + \kappa_1)(\lambda + 2) \sin \alpha \sin(\lambda + 1)\alpha - e(1 + \kappa_2) t_9, \\ \Delta_3^1 &= 2(e - 1) [(\lambda + 2)(\lambda \sin \alpha \cdot t_{10} - 2 \sin(\lambda + 1)\alpha \cdot t_{11}) - t_3 t_{12}] + \\ &+ e(1 + \kappa_2) [2t_3 \sin(\lambda + 2)\alpha - (\lambda + 2) t_{14}] + \\ &+ (1 + \kappa_1) [(\lambda + 2)(t_{14} - \sin 2\lambda\pi \cos(\lambda + 2)\beta) - 2t_3 \sin(\lambda + 2)\alpha], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_4^1 &= 2(e-1)[t_3 \cdot \sin(\lambda+2)\alpha + 2\sin(\lambda+1)\alpha \cdot t_{11} - \lambda \sin \alpha \cdot t_{10}] + \\
&+ e(1+\kappa_2)t_{14} - (1+\kappa_1)t_{13}, \\
\Delta_2^1 &= e(1+\kappa_2)(1+\kappa_1)[(\lambda+2)t_{15} - 2t_3 \cos(\lambda+2)\alpha] - \\
&- (1+\kappa_1)[(1+\kappa_1) + 4(e-1)t_2]\lambda(\lambda+2)\sin \alpha \sin(\lambda+1)\alpha + \\
&+ 2t_3[2\lambda(\lambda+2)(e-1)^2 \sin \alpha \sin(\lambda+1)\alpha + e(1+\kappa_2)(e-1)t_8 + \\
&+ e^2(1+\kappa_2)^2 \cos(\lambda+2)\alpha], \\
\Delta_2^2 &= (1+\kappa_1)\{[(1+\kappa_1) + 4(e-1)t_2](\lambda+2)\sin \alpha \sin(\lambda+1)\alpha - e(1+\kappa_2)t_9\} - \\
&- 2(e-1)t_3[2(e-1)(\lambda+2)\sin \alpha \sin(\lambda+1)\alpha + e(1+\kappa_2)\cos(\lambda+2)\alpha], \\
\Delta_3^2 &= (\lambda+2)(1+\kappa_1)t_{13}[(1+\kappa_1) + 4(e-1)t_2] - \\
&- e(1+\kappa_2)(1+\kappa_1)[2t_3 \sin(\lambda+2)\alpha + (\lambda+2)t_{16}] - \\
&- 2t_3[2(\lambda+2)(e-1)^2 t_{13} + e(1+\kappa_2)(e-1)t_{12} - e^2(1+\kappa_2)^2 \sin(\lambda+2)\alpha]; \\
\Delta &= 2(e-1)t_3[2(e-1)t_{13} + e(1+\kappa_2)\sin(\lambda+2)\alpha] + e(1+\kappa_2)(1+\kappa_1)t_{14} - \\
&- (1+\kappa_1)t_{13}[4(e-1)t_2 + (1+\kappa_1)]; \\
t_6 &= \cos 2(\lambda+1)(\pi-\alpha)\sin(\lambda+1)\beta + \sin(\lambda+1)\alpha, \\
t_7 &= \lambda \sin(\lambda+1)\alpha - 2\sin(\lambda+1)\cos 2\lambda\pi, \\
t_8 &= (\lambda+2)\cos \lambda\alpha - 2\cos(\lambda+2)\alpha, \\
t_9 &= (\lambda+2)\sin \alpha \sin(\lambda+1)\alpha - \sin 2\lambda\pi \sin \lambda\beta, \\
t_{10} &= \sin(\lambda+1)\beta \sin 2(\lambda+1)\beta, \quad t_{11} = \sin(\lambda+1)\beta \sin \lambda\beta, \\
t_{12} &= (\lambda+2)\sin \lambda\alpha + 2\sin(\lambda+2)\alpha, \\
t_{13} &= \lambda \sin \alpha \cos(\lambda+1)\alpha - \sin \lambda\alpha, \quad t_{14} = \lambda \sin \alpha \cos(\lambda+1)\alpha + \sin \lambda\beta \cos 2\lambda\pi, \\
t_{15} &= \lambda \sin \alpha \sin(\lambda+1)\alpha - \sin 2\lambda\pi \sin(\lambda+2)\beta, \\
t_{16} &= (\lambda+2)\sin \alpha \cos(\lambda+1)\alpha + \cos 2\lambda\pi \sin(\lambda+2)\beta.
\end{aligned}$$

Додаток Б

**Власні функції в розвиненнях компонент напружень і похідних від переміщень
біля вершини міжфазної тріщини з контактуючими берегами**

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_1^2(\lambda) &= \Delta_{12}(\lambda)B_1(\lambda) - \Delta_{22}(\lambda)B_2(\lambda) + \Delta_{32}(\lambda)B_3(\lambda), \\
\tilde{a}_2^2(\lambda) &= -\Delta_{11}(\lambda)B_1(\lambda) + \Delta_{21}(\lambda)B_2(\lambda) - \Delta_{31}(\lambda)B_3(\lambda), \\
\tilde{a}_3^2(\lambda) &= \Delta_{14}(\lambda)B_4(\lambda) + \Delta_{24}(\lambda)B_5(\lambda) + \Delta_{34}(\lambda)B_6(\lambda), \\
\tilde{a}_4^2(\lambda) &= -(\Delta_{13}(\lambda)B_4(\lambda) + \Delta_{23}(\lambda)B_5(\lambda) + \Delta_{33}(\lambda)B_6(\lambda)); \\
\tilde{a}_1^1(\lambda) &= \frac{1}{(1+\kappa_1)} \left[\tilde{a}_1^2(\lambda)((1+\kappa_1) + \lambda(1-e)) + \right. \\
&\quad \left. + \tilde{a}_2^2(\lambda) \frac{\lambda}{\lambda+2} ((1+\kappa_1) + \lambda(1-e) - e(1+\kappa_2)) \right], \\
\tilde{a}_2^1(\lambda) &= \frac{1}{(1+\kappa_1)} \left[-\tilde{a}_1^2(\lambda)(\lambda+2)(1-e) - \tilde{a}_2^2(\lambda)(\lambda(1-e) - e(1+\kappa_2)) \right], \\
\tilde{a}_3^1(\lambda) &= \frac{1}{(1+\kappa_1)} \left[\tilde{a}_3^2(\lambda)((1+\kappa_1) - (\lambda+2)(1-e)) + \right. \\
&\quad \left. + \tilde{a}_4^2(\lambda)((1+\kappa_1) - (\lambda+2)(1-e) - e(1+\kappa_2)) \right], \\
\tilde{a}_4^1(\lambda) &= \frac{1}{(1+\kappa_1)} \left[\tilde{a}_3^2(\lambda)(\lambda+2)(1-e) + \tilde{a}_4^2(\lambda)((\lambda+2)(1-e) + e(1+\kappa_2)) \right]; \\
\Delta_{11}(\lambda) &= (\lambda+2)[\cos(\lambda+2)\alpha + \mu \sin(\lambda+2)\alpha], \\
\Delta_{12}(\lambda) &= \lambda \cos \lambda\alpha + \mu(\lambda+2)\sin \lambda\alpha,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{13}(\lambda) &= (\lambda + 2) [\sin(\lambda + 2)\alpha - \mu \cos(\lambda + 2)\alpha], \\
\Delta_{14}(\lambda) &= \lambda \sin \lambda \alpha - \mu(\lambda + 2) \cos \lambda \alpha; \\
\Delta_{21}(\lambda) &= (1 - e)(\lambda + 2) [\cos \lambda \beta - \cos(\lambda + 2)\alpha], \\
\Delta_{22}(\lambda) &= [\lambda(1 - e) - e(1 + \kappa_2)] (\cos \lambda \beta - \cos \lambda \alpha), \\
\Delta_{23}(\lambda) &= (1 - e)(\lambda + 2) [\sin \lambda \beta - \sin(\lambda + 2)\alpha], \\
\Delta_{24}(\lambda) &= (1 - e) [(\lambda + 2) \sin \lambda \beta - \lambda \sin \lambda \alpha] + e(1 + \kappa_2) (\sin \lambda \alpha + \sin \lambda \beta); \\
\Delta_{31}(\lambda) &= (1 - e) \delta_{11}(\lambda) + (1 + \kappa_1) [\sin(\lambda + 2)\beta + \sin(\lambda + 2)\alpha], \\
\Delta_{32}(\lambda) &= \frac{(1 - e) - e(1 + \kappa_2)}{\lambda + 2} \delta_{11}(\lambda) + \frac{1 + \kappa_1}{\lambda + 2} [\lambda \sin(\lambda + 2)\beta + (\lambda + 2) \sin \lambda \alpha], \\
\Delta_{33}(\lambda) &= (1 - e)(\lambda + 2) \delta_{12}(\lambda) + (1 + \kappa_1) [\cos(\lambda + 2)\beta - \cos(\lambda + 2)\alpha], \\
\Delta_{34}(\lambda) &= [(\lambda + 2)(1 - e) + e(1 + \kappa_2)] \delta_{12}(\lambda) + (1 + \kappa_1) [\cos(\lambda + 2)\beta - \cos \lambda \alpha]; \\
B_1(\lambda) &= (1 - e)^2 B_{11}(\lambda) - e(1 + \kappa_2)(1 - e) B_{12}(\lambda) + (1 + \kappa_1)(1 - e) B_{13}(\lambda) - \\
&\quad - e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1) B_{14}(\lambda), \\
B_{11}(\lambda) &= -(\lambda + 2) \delta_{12}(\lambda) \delta_{13}(\lambda), \quad B_{12}(\lambda) = (\lambda + 2) [\sin \lambda \alpha + \sin(\lambda + 2)\alpha] \delta_{12}(\lambda), \\
B_{13}(\lambda) &= -[(\lambda + 2) \sin \lambda \beta \delta_{22}(\lambda) + \cos(\lambda + 2) \beta \delta_{23}(\lambda)] + \delta_{32}(\lambda), \\
B_{14}(\lambda) &= (\sin \lambda \alpha + \sin \lambda \beta) [\cos(\lambda + 2)\beta - \cos(\lambda + 2)\alpha]; \\
B_2(\lambda) &= (1 - e) B_{21}(\lambda) + e(1 + \kappa_2) B_{22}(\lambda) + (1 + \kappa_1) B_{23}(\lambda), \\
B_{21}(\lambda) &= (\lambda + 2) [\delta_{23}(\lambda) + \mu(\lambda + 2) \delta_{22}(\lambda)] \delta_{12}(\lambda), \\
B_{22}(\lambda) &= (\lambda + 2) [\sin(\lambda + 2)\alpha - \mu \cos(\lambda + 2)\alpha] \delta_{12}(\lambda), \\
B_{23}(\lambda) &= [\delta_{23}(\lambda) + \mu(\lambda + 2) \delta_{22}(\lambda)] \cos(\lambda + 2)\beta - \delta_{32}(\lambda); \\
B_3(\lambda) &= (1 - e) B_{31}(\lambda) + e(1 + \kappa_2) B_{32}(\lambda), \\
B_{31}(\lambda) &= (\lambda + 2) [[\delta_{32}(\lambda) + \mu(\lambda + 2) \delta_{22}(\lambda)] \sin \lambda \beta - \mu \delta_{32}(\lambda)], \\
B_{32}(\lambda) &= (\lambda + 2) (\sin \lambda \beta + \sin \lambda \alpha) [\sin(\lambda + 2)\alpha - \mu \cos(\lambda + 2)\alpha]; \\
B_4(\lambda) &= (1 - e) [(1 - e)\lambda - e(1 + \kappa_2)] B_{41}(\lambda) + (1 + \kappa_1) B_{42}(\lambda) + \\
&\quad + e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1) B_{43}(\lambda), \\
B_{41}(\lambda) &= \delta_{11}(\lambda) \delta_{22}(\lambda), \quad B_{42}(\lambda) = \lambda \sin(\lambda + 2)\beta \delta_{22}(\lambda) - \cos \lambda \beta \delta_{21}(\lambda) - \delta_{31}(\lambda), \\
B_{43}(\lambda) &= [\sin(\lambda + 2)\alpha + \sin(\lambda + 2)\beta] (\cos \lambda \beta - \cos \lambda \alpha); \\
B_5(\lambda) &= (1 - e) B_{51}(\lambda) + e(1 + \kappa_2) B_{52}(\lambda) + (1 + \kappa_1) B_{53}(\lambda), \\
B_{51}(\lambda) &= [\lambda \delta_{22}(\lambda) - \mu \delta_{21}(\lambda)] \delta_{11}(\lambda), \\
B_{52}(\lambda) &= [\cos(\lambda + 2)\alpha + \mu \sin(\lambda + 2)\alpha] \delta_{11}(\lambda), \\
B_{53}(\lambda) &= [\lambda \delta_{22}(\lambda) - \mu \delta_{21}(\lambda)] \sin(\lambda + 2)\beta - \delta_{31}(\lambda); \\
B_6(\lambda) &= (1 - e) B_{61}(\lambda) - e(1 + \kappa_2) B_{62}(\lambda), \\
B_{61}(\lambda) &= (\lambda + 2) [-[\lambda \delta_{22}(\lambda) - \mu \delta_{21}(\lambda)] \cos \lambda \beta + \mu \delta_{31}(\lambda)], \\
B_{62}(\lambda) &= (\lambda + 2) (\cos \lambda \beta - \cos \lambda \alpha) [\cos(\lambda + 2)\alpha + \mu \sin(\lambda + 2)\alpha]; \\
\delta_{11}(\lambda) &= \lambda \sin(\lambda + 2)\beta - (\lambda + 2) \sin \lambda \beta, \quad \delta_{12}(\lambda) = \cos \lambda \beta - \cos(\lambda + 2)\beta, \\
\delta_{13}(\lambda) &= (\lambda + 2) \sin(\lambda + 2)\beta - \lambda \sin \lambda \beta; \\
\delta_{21}(\lambda) &= \lambda \sin(\lambda + 2)\alpha - (\lambda + 2) \sin \lambda \alpha, \quad \delta_{22}(\lambda) = \cos \lambda \alpha - \cos(\lambda + 2)\alpha, \\
\delta_{23}(\lambda) &= (\lambda + 2) \sin(\lambda + 2)\alpha - \lambda \sin \lambda \alpha; \\
\delta_{31}(\lambda) &= -(\lambda + 1) \sin 2\alpha + \sin 2(\lambda + 1)\alpha, \\
\delta_{32}(\lambda) &= (\lambda + 1) \sin 2\alpha + \sin 2(\lambda + 1)\alpha.
\end{aligned}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Theocaris P.S., Gdoutos E.E. Stress singularities in cracked composite full-planes. *Int. J. Fract.* 1977. Vol. 13. № 6. P. 763–773.
2. Махоркін М., Сулим Г. Асимптотики і поля напружень у клиновій системі за умов антиплоскої деформації. *Машинознавство*. 2007. № 1. С. 8–13.
3. Carpinteri A., Paggi M. Analytical study of the singularities arising at multi-material interfaces in 2D linear elastic problems. *Eng. Fract. Mech.* 2007. Vol. 74. P. 59–74.
4. Djoković J.M., Nikolić R.R., Ulewicz R., Hadzima B. Interface crack approaching a three-material joint. *Appl. Sci.* 2020. Vol. 10. P. 416.
5. Linkov A.M., Koshelev V.F. Multi-wedge points and multi-wedge elements in computational mechanics: evaluation of exponent and angular distribution. *Int. J. Solids and Structures*. 2006. Vol. 43. P. 5909–5930.
6. Luo Y., Subbarayan G. A study of multiple singularities in multi-material wedges and their use in analysis microelectronic interconnect structures. *Eng. Fract. Mech.* 2007. Vol. 74. P. 416–430.
7. Pageau S.S., Gadi K.S., Biggers S.B., Joseph P.F. Standardized complex and logarithmic eigensolutions for n -material wedges and junctions. *Int. J. Eng. Fract.* 1996. Vol. 77. P. 51–76.
8. Вальшенбаум В.М., Гольдштейн Р.В., Холмянский М.Л. Плоская задача о трещине на границе соединения двух упругих клиньев. *Механика тв. тела*. 1980. № 5. С. 77–85.
9. Srivastava K.N., Choudhary A., Palaiya R.M. Mellin transform technique for solving Griffith crack problem at the interface of two bonded dissimilar wedges. *Indian J. of Pure and Appl. Mathematics*. 1979. Vol. 10. № 2. P. 147–157.
10. Srivastava K.N., Palaiya R.M., Choudhary A. On a Griffith crack at the interface of two bonded dissimilar elastic wedges. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1979. Vol. 59. № 11. P. 643–646.
11. Wieghardt K. Über das spalten und zerreißen elastischer Körper. *Z. Math. Phys.* 1907. B. 55. S. 60–103.
12. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1952. Vol. 19. № 4. P. 526–535.
13. Williams M. L. The stresses around a fault or crack in dissimilar media. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 1959. Vol. 49. P. 199–204.
14. Erdogan F. Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1965. Vol. 32. № 2. P. 403–410.
15. Дудик М.В. Дослідження напружено-деформованого стану біля кутової точки межі поділу матеріалів, з якої виходить міжфазна тріщина. *Вісник Тернопільського нац. техн. ун-ту*. 2014. № 3 (75). С. 87–98.
16. Rice J.R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1988. Vol. 55. № 3. P. 98–103.
17. Гузь А.Н. О физически некорректных результатах механики разрушения. *Прикладная механика*. 2009. Т. 45. № 10. С. 4–21.
18. Comninou M. Interface crack with friction in the contact zone. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1977. Vol. 44. P. 780–781.
19. Каминский А.А., Кипнис Л.А. О комплексной модели зоны предразрушения в конце трещины на границе раздела упругих сред. *Доповіді НАН України*. 2010. № 2. С. 59–63.
20. Каминский А.А., Кипнис Л.А. О страгивании трещины, расположенной на границе раздела упругих сред. *Доповіді НАН України*. 2011. № 1. С.38-43.
21. Дудик М.В., Діхтяренко Ю.В. Развитие зоны переддуринування від міжфазної тріщини у кутовій точці межі розділу двох пружних середовищ. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2011. Т. 54. № 2. С. 103–114.
22. Дудик М.В., Діхтяренко Ю.В. Дослідження початкового етапу повороту міжфазної тріщини у кутовій точці межі поділу середовищ. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2011. Т. 47. № 5. С. 53–59.
23. Дудик М.В., Діхтяренко Ю.В. Дослідження впливу пластичності матеріалів на міцність композитного з'єднання. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2013. Т. 56. № 1. С. 71–83.

REFERENCES

1. Theocaris P. S., Gdoutos E. E. (1977) Stress singularities in cracked composite full-planes. *Int. J. Fract.*, vol.13, no. 6, pp. 763–773.
2. Makhorkin M., Sulym G. (2007) Asymptotyky i polja napruzenj u klynovij systemi za umov antyplokoji deformaciji [Stresses asymptotics and fields in the wedge system in condition antipflat deformation]. *Mechanical Engineering*, no. 1, pp. 8–13.

3. Carpinteri A., Paggi M. (2007) Analytical study of the singularities arising at multi-material interfaces in 2D linear elastic problems. *Eng. Fract. Mech.*, vol. 74, pp. 59–74.
4. Djoković J. M., Nikolić R. R., Ulewicz R., Hadzima B. (2020) Interface crack approaching a three-material joint. *Appl. Sci.*, vol.10, p. 416.
5. Linkov A. M., Koshelev V. F. (2006) Multi-wedge points and multi-wedge elements in computational mechanics: evaluation of exponent and angular distribution. *Int. J. Solids and Structures*, vol. 43, pp. 5909–5930.
6. Luo Y., Subbarayan G. (2007) A study of multiple singularities in multi-material wedges and their use in analysis microelectronic interconnect structures. *Eng. Fract. Mech.*, vol. 74, pp. 416–430.
7. Pageau S. S., Gadi K. S., Biggers S. B., Joseph P. F. (1996) Standardized complex and logarithmic eigen-solutions for n -material wedges and junctions. *Int. J. Eng. Fract.*, vol.77, pp. 51–76.
8. Walshenbaum V. M., Goldstein R. V., Kholmyansky M. L. (1980) Ploskaya zadacha o treshchine na granitse soedineniya dvukh uprugikh klin'ev [Plane problem of a crack at the interface between two elastic wedges]. *Solid body mechanics*, no. 5, pp. 77–85.
9. Srivastava K. N., Choudhary A., Palaiya R. M. (1979) Mellin transform technique for solving Griffith crack problem at the interface of two bonded dissimilar wedges. *Indian J. of Pure and Appl. Mathematics*, vol. 10, no. 2, pp. 147–157.
10. Srivastava K. N., Palaiya R. M., Choudhary A. (1979) On a Griffith crack at the interface of two bonded dissimilar elastic wedges. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 59, no. 11, pp. 643–646.
11. Wieghardt K. (1907) Über das spalten und zerreißen elastischer Körper. *Z. Math. Phys.*, B. 55, S. 60–103.
12. Williams M. L. (1952) Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, vol. 19, no. 4, pp. 526–535.
13. Williams M. L. (1959) The stresses around a fault or crack in dissimilar media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 49, pp. 199–204.
14. Erdogan F. (1965) Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, vol. 32, no. 2, pp. 403–410.
15. Dudyk M. V. (2014) Doslidzhennja napruzhenno-deformovanogho stanu bilja kutovoji tochky mezhi podilu materialiv, z jakoji vykhodytj mizhfazna trishhyna [Investigation of the stress-strain state near the corner point of interface, from which the interfacial crack is initiated]. *Scientific journal of the Ternopil national technical university*, no. 3 (75), pp. 87–98.
16. Rice J. R. (1988) Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, vol. 55, no. 3, pp. 98–103.
17. Guz A. N. (2009) On physically incorrect results in fracture mechanics. *Int. Appl. Mech.*, vol. 45, pp. 1041–1051.
18. Comninou M. (1977) Interface crack with friction in the contact zone. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, Vol. 44, pp.780–781.
19. Kaminsky A. A., Kipnis L. A. (2010) O kompleksnoy modeli zony predrazrusheniya v kontse treshchiny na granitse razdela uprugikh sred [On a complex model of the pre-fracture zone at the end of a crack on the interface of elastic media]. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, no. 2, pp. 59–63.
20. Kaminsky A. A., Kipnis L. A. (2011) O stragivanii treshchiny, raspolozhennoy na granitse razdela uprugikh sred [On the start of a crack on the interface of elastic media]. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, no. 1, pp. 38–43.
21. Dudyk M. V., Dikhtyarenko Yu. V. (2012) Development of a prefracture zone from an interfacial crack at a corner point of an interface of two elastic media. *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 184, no. 2, pp. 121–135.
22. Dudyk M. V., Dikhtyarenko Yu. V. (2012) Investigation of the initial stage of kinking of an interface crack at an angular point of the interface of two media. *Materials Science*, vol. 47, no. 5, pp. 627–635.
23. Dudyk M. V., Dikhtyarenko Yu. V. (2014) Investigation of the influence of plasticity of materials on the strength of a composite joint. *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 201, no. 1, pp. 83–98.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІГРОВИХ ЗАДАЧ З ОБМЕЖЕННЯМИ-ПОЛІРОЗМІЩЕННЯМИ НА СТРАТЕГІЇ ОДНОГО ГРАВЦЯ: ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД ТИПУ БРАУНА-РОБІНСОН

Ємець О. О.

*доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри математичного моделювання та соціальної інформатики
Полтавський університет економіки і торгівлі
вул. Коваля, 3, Полтава, Україна
orcid.org/0000-0001-9248-9234
yemetsli@ukr.net*

Ємець О. О.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математичного моделювання та соціальної інформатики
Полтавський університет економіки і торгівлі
вул. Коваля, 3, Полтава, Україна
orcid.org/0000-0001-9248-9234
yemets2008@ukr.net*

Поляков І. М.

*аспірант кафедри математичного моделювання та соціальної інформатики
Полтавський університет економіки і торгівлі
вул. Коваля, 3, Полтава, Україна
orcid.org/0000-0003-3273-1206
polyakov_ivan_m@ukr.net*

Ключові слова: комбінаторні ігрові задачі, ітераційні методи, метод типу Брауна-Робінсон, полірозміщення, теорія ігор, комбінаторна оптимізація, задачі евклідової комбінаторної оптимізації.

У статті розглядається така ігрова задача. У регіоні існують і працюють два конкуренти – великі виробники хлібної продукції. Є певна кількість населених пунктів регіону, де є фірмові магазини 1-го виробника, і певна кількість населених пунктів, де є фірмові магазини 2-го виробника. Продукція вважається швидкореалізовуваною. Тому проблема визначення кількості продукції, що розвозиться, виникає щоденно. Першому виробнику в певному місті потрібна відома кількість автомобілів, якими продукція щоранку буде розвозитися в таку ж кількість фірмових магазинів. Автомобілі пропонується вибрати з деякою більшою, ніж потрібно, кількості в цьому місті. Уважається, що вчорашня продукція або реалізована, або непридатна для вживання. Будемо вважати, що другий виробник може розвозити у свої фірмові магазини (які розташовуються в регіоні) таку кількість продукції, яку вважає за потрібне. Прибуток обох підприємців залежить від обсягу хлібної продукції, що завозиться, у кожний фірмовий магазин. Обидва виробники прагнуть отримати якомога більший прибуток, тому вони прагнуть максимально збільшити різницю між своїм прибутком і прибутком конкурента.

У статті для задачі побудована ігрова модель комбінаторного типу з використанням множини полірозміщень, якими є стратегії першого гравця. Для першого гравця його задача є задачею комбінаторної оптимізації на полірозміщеннях. Для другого гравця його задача схожа на задачу гравця у звичайних матричних іграх. Розглядається випадок наявності й відсутності сідлової точки в ігровій моделі. У разі відсутності сідлової точки шукаються мішані стратегії гравців.

Для цього запропоновано метод типу Брауна-Робінсон. При цьому розігрується гра. Один гравець має звичайні мішані стратегії, а інший гравець як стратегії має вибір з елементу з множини полірозміщень. Кроки гравці роблять один за одним. Розраховуються накопичені платежі, за якими й визначається наблизений розв'язок гри. Алгоритм цього методу викладено як у табличній формі, зручній для сприйняття, так і у формі, зручній для програмування. Цей метод ілюструється числовим прикладом.

**SOLVING OF GAME PROBLEMS
WITH RESTRICTIONS-POLYARRANGEMENTS ON STRATEGIES
OF ONE PLAYER: ITERATION METHOD TYPE BROWN-ROBINSON**

Yemets O. O.

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Chief of the Department of Mathematical Simulation and Social Informatics
Poltava University of Economics and Trade, Poltava, Ukraine
Kovalya str., 3, Poltava, Ukraine
orcid.org/0000-0001-9248-9234
yemetsli@ukr.net*

Yemets O. O.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Mathematical Simulation and Social Informatics
Poltava University of Economics and Trade, Poltava, Ukraine
Kovalya str., 3, Poltava, Ukraine
orcid.org/0000-0001-9248-9234
yemets2008@ukr.net*

Polyakov I. M.

*Postgraduate Student at the Department of Mathematical Simulation and Social Informatics
Poltava University of Economics and Trade, Poltava, Ukraine
Kovalya str., 3, Poltava, Ukraine
orcid.org/0000-0003-3273-1206
polyakov_ivan_m@ukr.net*

Key words: *combinatorial gaming problems, iteration methods, method type Brown-Robinson, polyarrangements, game theory, combinatorial optimization, Euclidean combinatorial optimization problems.*

Such a game problem is considered in the article. There are two rivals in the region, large producers of bread products. There are a number of settlements in the region, where there are chain stores of the 1st producer, and a certain number of settlements, where there are chain stores of the 2nd producer. Products are considered to be rapidly sold. Therefore, the problem of determining the quantity of products transported occurs on a daily basis. The first producer in a certain city needs a known number of cars, which products will be shipped to the same number of chain stores every morning. Cars are offered to choose with some more than the required amount in this city. It is considered that yesterday's products are either realized or unsuitable to use. We will assume that the second producer can bring to its chain stores (located in the region) the number of products that it thinks fit. The profits of both entrepreneurs depend on the volume of imported cereal products in each chain store. Both producers seek to get as much profit as possible, so they seek to maximize the difference between their profits and the profit of a competitor. In the article for this problem a game model of a combinatorial type is constructed using a sets of polyarrangements which are the strategies of the first player. For the first player, his task is the task of combinatorial optimization on polyarrangements. For a second player, his task is similar to the task of the player in ordinary matrix games. The case of presence and absence of a saddle point in the gaming model is considered. Mixed combinations of strategies are being searched for in the case of the absence of a saddle point.

For this purpose, the method of Brown-Robinson type is proposed. The game is being played. One player has the usual mixed strategies, and the other player as a strategy has a choice of an element from the set of polyarrangements. The players take steps one after another. Accumulated payments are calculated, which determine the approximate solution of the game. The algorithm of this method is presented in tabular form, convenient for perception, and in the form convenient for programming. This method is illustrated by a numerical example.

Вступ. У роботах [1–8] розглядаються задачі комбінаторної оптимізації, які важливі тим, що є моделями складних задач у різних галузях: прийняття рішень, розкрій матеріалів, розташування об'єктів, планування, проектування тощо.

Ю.Г. Стоян виокремив із них клас так званих задач евклідової комбінаторної оптимізації (дивись, зокрема, [7; 8]). Моделі й методи розв'язування задач цього класу стрімко розвиваються. Стаття присвячена одному новому типу таких задач і їх розв'язанню.

Огляд літератури. Ігрові задачі, у яких наявні комбінаторні обмеження на стратегії, починають розглядатися в праці [9] і подальших роботах О.О. Ємця та Н.Ю. Устьян. Від класичних матричних ігор вони відрізняються тим, що вектор, який є мішаною стратегією, належить множині перестановок або розміщень із певної мультимножини ймовірностей. Далі такі задачі досліджуються в роботах О.О. Ємця та О.В. Ольховської (дивись, зокрема, [10]).

Але, як показує матеріал статті, є й більш складні комбінаторні обмеження, які накладаються на мішані стратегії. Такі задачі, де б ці стратегії були полірозміщеннями чи полісполученнями, не розглядалися й не розв'язувалися раніше, хоча відомі більш пізні [11] роботи, присвячені ігровим задачам комбінаторного типу.

Отже, актуальною є задача, що розглядається в статті. Математичною моделлю цієї задачі є задача теорії ігор, де мішана стратегія є полірозміщенням (або полісполученням).

Запропоновано наближено розв'язувати таку задачу ітераційним методом типу Брауна-Робінсон.

Виклад основного матеріалу.

1. Постановка ігрової комбінаторної задачі та її модель на полікомбінаторних множинах

Задача. У регіоні існують і працюють два конкуренти – великі виробники хлібної продукції. Є s населених пунктів регіону, де є фірмові магазини 1-го, і σ – населених пунктів, де є фірмові магазини 2-го виробника. Продукція вважається швидкореалізовуваною. Тому проблема визначення кількості продукції, що розвозиться, виникає щоденно. Першому виробнику в місті з номером i потрібно k_i автомобілів, якими продукція щоранку буде розвозитися в k_i фірмових магазинів. На вибір пропонується n_i автомобілів в місті i ($n_i \geq k_i \geq 1$). Уважаємо, що вчорашня продукція або реалізована, або непридатна для вживання.

Будемо вважати, що другий виробник може розвозити у свої n фірмових магазинів (які розташовуються в регіоні) таку кількість продукції, яку вважає за потрібне. Прибуток обох підприємств залежить від обсягу хлібної продукції, що завозиться, у кожний фірмовий магазин.

Обидва виробники прагнуть отримати якомога більший прибуток, тому прагнуть максимально

збільшити різницю між своїм прибутком і прибутком конкурента. Складемо матрицю $A' = (a'_{i,j})$, де $a'_{i,j}$ – це різниця прибутків другого і першого виробників, у тому разі якби перший виробник отримував весь прибуток за умови реалізації продукції в магазині i , населеного пункту t , $i \in \{1, 2, \dots, k_i\}$; $t \in \{1, 2, \dots, s\} = J_s$; а другий виробник отримував би весь прибуток за умови реалізації в магазині j .

Нехай P_i^x вектор $P_i^x = (P_{i_1}^x, \dots, P_{i_j}^x, \dots, P_{i_{n_i}}^x)$, де $P_{i_j}^x$ – відношення кількості продукції, яку можна відвести в i -му місті j -им із запропонованих автомобілів, до загальної кількості продукції, що виробляє перший виробник для міста i , $j \in J_{n_i}$; $i \in J_s$. Очевидно, $P_{i_j}^x \geq 0$.

Позначимо

$$m_0 = 0, k_0 = 0; m_i = m_{i-1} + k_{i-1} \quad \forall i \in J_s. \quad (1)$$

Нехай $X_i = (x_{m_i+1}, \dots, x_{m_i+j}, \dots, x_{m_i+k_i})$ – вектор, що визначає обсяги розвезення продукції першим виробником і x_{m_i+j} – j -та координата X_i – є частиною продукції, що завезена в j -ий магазин i -ого населеного пункту. Нехай визначено, що в кожен магазин першого виробника буде завозити продукцію один автомобіль, який запропоновано з n_i автомобілів для i -го населеного пункту. Це дає змогу записати таку комбінаторну умову на вектор X_i :

$$X_i \in E_{n_i, v_i}^{k_i}(P_i^x) \quad \forall i \in J_s, \quad (2)$$

де v_i – кількість різних елементів у P_i^x , тобто кількість елементів основи мультимножини P_i^x , або $v_i = |S(P_i^x)|$, а $E_{n_i, v_i}^{k_i}(P_i^x)$ – евклідова множина розміщень [7].

Якщо позначити G – суму мультимножин P_i^x , тобто $G = \sum P_i^x$, тоді (2) можна, урахувавши означення множини полірозміщень $E_{nv}^{ks}(G)$, записати так:

$$x = (x_1, \dots, x_k) = (X_1, \dots, X_s) \in E_{nv}^{ks}(G), \quad (3)$$

де $E_{nv}^{ks}(G)$ – евклідова множина полірозміщень [7],

$$k = k_1 + \dots + k_s; \quad \eta = \eta_1 + \dots + \eta_s, \quad v = |S(G)|.$$

Крім того, якщо вся продукція в i -му населеному пункті повинна розвозитися в магазин, то ця вимога виражається так:

$$\sum_{j=1}^{k_i} x_{m_i+j} = 1, \quad (4)$$

тобто всі автомобілі, крім останнього, будуть розвозити частину продукції x_{m_i+j} , $j \in J_{k_i-1}$, а останній автомобіль таку частину продукції $1 - \sum_{j=1}^{k_i-1} x_{m_i+j}$. Тому умова (2), якщо позначити $\bar{X}_i = (x_{m_i+1}, \dots, x_{m_i+k_i-1})$, набуде вигляду:

$$\bar{X}_i \in E_{n_i, v_i}^{k_i-1}(P_i^x). \quad (5)$$

Економічно реальною є задача, коли на території виробничих потужностей, що знаходяться

в i -ому населеному пункті, є фірмовий магазин, тобто певна частина продукції не потребує транспортування. Для такого (i -го) населеного пункту умова (4) набуває вигляду:

$$\sum_{j=1}^{k_i} x_{m_i+j} < 1. \quad (6)$$

З економічного погляду можливою є ситуація, коли перший виробник має невеликі пекарні в i -му населеному пункті (які працюють за потреби), продукція яких також розвозиться, якщо доцільно її виробництво в певні («пікові») за навантаження споживання дні – приклад споживання пасок перед Великоднем). У такому разі умова (4) набуває вигляду:

$$\sum_{j=1}^{k_i} x_{m_i+j} > 1. \quad (7)$$

Розглянемо комбінаторну оптимізаційну задачу ігрового типу на множині полірозміщень, у якій комбінаторні обмеження накладаються на стратегії одного (першого) гравця.

Гра полягає в тому, що перший гравець обирає стратегію – вектор $x = (x_1, \dots, x_k) = (X_1, \dots, X_s) \in E_{nv}^{ks}(G)$, а другий обирає стратегію – число $j \in J_n$. Ці стратегії називатимемо чистими. При такому виборі перший гравець платить другому платежі a'_{1j}, \dots, a'_{kj} з імовірностями $x = (x_1, \dots, x_k)$, де a'_{ij} – задані дійсні числа, $A' = (a'_{ij})$. Середній платіж (математичне сподівання) першого гравця другому (при виборі стратегії $x^i = (x_1^i, \dots, x_k^i) = (X_1^i, \dots, X_s^i) \in E_{nv}^{ks}(G)$ і стратегії $j, j \in J_n$, відповідно першим і другим гравцями) виражається платіжною функцією:

$$F(x^i, j) = \sum_{i=1}^k a'_{ij} x_{ii} = a_{ij}, \quad (8)$$

де $i \in J_m$, а m – кількість елементів в $E_{nv}^{ks}(G)$, тобто $m = |E_{nv}^{ks}(G)|$.

Модель. Задача полягає в знаходженні стратегії гравців x^*, j^* , які визначені так:

$$x^* = \arg \min_{x \in E_{nv}^{ks}(G)} (\max_{j \in J_n} F(x, j)), \quad (9)$$

$$j^* = \arg \max_{j \in J_n} (\min_{x \in E_{nv}^{ks}(G)} F(x, j)), \quad (10)$$

де $F(x, j)$ має вигляд (8).

Якщо

$$\max_{j \in J_n} \min_{x \in E_{nv}^{ks}(G)} F(x, j) = \min_{x \in E_{nv}^{ks}(G)} \max_{j \in J_n} F(x, j) = F(x^*, j^*), \quad (11)$$

то, очевидно, що x^*, j^* є оптимальним розв'язком (стратегіями) задачі, а $U = F(x^*, j^*)$ є ціною гри (випадок сідлових точки).

Якщо сідлової точки немає, треба вести пошук мішаних стратегій – імовірностей застосування стратегій $x_k^i \in E_{nv}^{ks}(G)$, $i \in J_n$, і стратегій $j \in J_n$. Це можна робити процедурою типу методу Брауна-Робінсон.

Зауваження. Якщо за економічної доцільності виробник (перший) вимагає розвезення в i -му населеному пункті продукції так, щоб більша частка

доставалася більшому продавцю (чи за якогось іншого ранжування), то з'являється умова вигляду:

$$x_{m_i+1} \geq x_{m_i+2} \geq \dots \geq x_{m_i+j} \geq \dots \geq x_{m_i+k_i}. \quad (12)$$

Умова (12) з умовою (2) означає, що допустимий вектор є елементом евклідової множини сполучень [7], а виконання умов (12) і (3) означає, що допустимим є евклідове полісполучення.

2. Розв'язування комбінаторної ігрової задачі на полірозміщеннях

У роботі запропоновано ітераційний метод типу Брауна-Робінсон (ІМТБР) для ігрової задачі, у якій один гравець має комбінаторні обмеження. Їх сенс у тому, що стратегія є полірозміщенням, у якому кожне розміщення є набором імовірностей із нової групи подій, а ймовірності належать заданій мультимножині. Другий гравець має стратегії, як у звичайній матричній грі.

ІМТБР для цієї задачі ґрунтується на поетапному розігруванні гри, у якій гравці при виборі стратегії роблять ходи, уважаючи, що «майбутнє схоже на минуле», і враховуючи всю інформацію про платежі, що накопичилася. Тобто розігрується гра, у якій обидва гравці застосовують один за одним свої стратегії. Утворюється певна послідовність ходів. Початок – вибір одного з гравців довільної стратегії на першому ході. Інший відповідає своєю стратегією, оптимізуючи свій вигреш (прогреш). Хід переходить до першого, який його робить, вибираючи стратегію з тих же принципів. Інформація про платежі накопичується й використовується на кожному кроці для вибору найкращого з погляду цієї інформації ходу (стратегії).

Зробивши зупинку за вибраним критерієм (які розглянемо далі), підраховують частоти застосування стратегій, одержавши наближення до ймовірностей їх застосування. Підраховується наближене значення ціни гри.

Розглянемо формалізований алгоритм методу, використовуючи також його табличне представлення для наочності, яке будемо викладати курсивом.

У перший стовпець, назвемо його N , заноситься номер поточного етапу розіграшу гри. На ньому кожен із двох гравців по черзі один за одним здійснюють вибір стратегії.

Крок 0. Початковий номер N ітерацій установлюється одиниця ($N := 1$).

Крок 1. Першу стратегію перший гравець (який має стратегії-полірозміщення) вибирає випадковим чином, тобто вибирає полірозміщення $X \in E_{nv}^{ks}(G, H)$, причому в кожному розміщенні сума координат має дорівнювати одиниці.

Записується полірозміщення X у стовпець, який також назвемо X .

Крок 2. Визначаються скалярні добутки векторів-стовпців платежів, що відповідають стратегіям другого гравця та вектора X – поточної стратегії першого гравця.

У табличному представленні вводяться стовпці $V_1, \dots, V_j, \dots, V_n$ – вектори платежів, що відповідають стратегії j другого гравця, $j = 1, 2, \dots, n$. Вводять також стовпці $V_j X$ – вектор-стовпець, елементів, які є поелементними добутками векторів X і V_j , $j = 1, 2, \dots, n$. Усі вектори (X , V_j , $V_j X$ k -елементні). Наступний рядок позначимо sum_l , де в стовпцях $V_j X$ записуємо результати скалярних добутків векторів V_j та X . (Це суми елементів у кожному стовпці $V_j X$).

Крок 3. Обчислюється SUM_L – накопичені суми скалярних добутків $V_1 X, \dots, V_n X$ (у лівій частині таблиці).

У наступному рядку SUM_L лівої частини таблиці обчислюється сума елементів рядка sum_l та елементів рядка SUM_L із попереднього (тобто $(N - 1)$ -го) етапу. При $N = 1$ рядок SUM_L повторює рядок sum_l , оскільки це перші платежі.

Крок 4. Визначається стратегія другого гравця J_{\max} за критерієм отримання максимального платежу:

$$J_{\max}^* = \arg \max_{1 \leq j \leq n} B_j X,$$

тобто знаходиться $N\bar{v} = B_j X$, а також діленням $N\bar{v}$ на N знаходиться \bar{v} .

У таблиці цей крок означає вибір максимального числа в рядку SUM_L , яке переноситься в клітинку стовпця $N\bar{v}$ цього ж рядка. У клітинку стовпця \bar{v} цього ж рядка записують результат ділення $N\bar{v}$ на N . Стратегія J_{\max}^* є стратегією другого гравця при наступному ході. У стовпець j таблиці заносять J_{\max}^* . Стовпець $B_{J_{\max}^*}$ із лівої частини таблиці (чи з матриці A) покоординатно заноситься в рядок стратегії J_{\max}^* у відповідні стовпці A_j .

На ітерації з $N = 1$ рядок SUM_R правої частини таблиці повторює рядок платежів (числа рядка стратегії) другого гравця – числа стовпців A_j , оскільки попередніх платежів ще не було. На наступних ($N > 1$) ітераціях у рядок SUM_R записується сума елементів рядка SUM_R із попередньої ($(N - 1)$ -ої) ітерації та рядка платежів для поточної стратегії другого гравця (попередній перед рядком SUM_R рядок правої частини таблиці).

Крок 5. Визначається наступна стратегія-полірозміщення $NEXT_X$ першого гравця з умови мінімального сумарного (за N ітерацій) платежу (програшу). На кожній ітерації розв'язується умовна лінійна задача на полірозміщеннях:

$$x^* = \arg \min_{x \in R^k} \sum_{j=1}^k c_j x_j; \quad c^* = \min_{x \in R^k} \sum_{j=1}^k c_j x_j; \quad (13)$$

за комбінаторної умови (3) та додаткових умов (4) $\forall i \in J_s$, де c_1, \dots, c_k – вектор SUM_R . Тут вектор x^* з (13) і є $NEXT_X$, а величина c^* (теж знайдена при розв'язуванні задачі (13)) – це $N\underline{v}$.

Для розв'язування задачі (13) за умов (3) та (4) $\forall i \in J_s$ можна застосувати алгоритм методу гілок і меж.

Знайдений вектор $NEXT_X$ заносять у новий рядок правої частини таблиці (який так і називають $NEXT_X$). Значення $N\underline{v}$ можна обчислити як скалярний добуток елементів вектора SUM_R накопичених платежів та обраної стратегії $NEXT_X$. Величина $N\underline{v}$ – мінімальний (на ітерації N) накопичений програш заносять у стовпець із тією ж назвою $N\underline{v}$. $N\underline{v}$ – це сума елементів, що є попарними добутками відповідних координат векторів SUM_R і $NEXT_X$ (у таблиці – це вектор-рядок σ , а отже, $N\underline{v}$ – сума елементів цього вектора). Діленням $N\underline{v}$ на N знаходять \underline{v} , яке записують у стовпець з такою ж назвою.

Крок 6. Обчислюється $v^* = 0,5(\bar{v} + \underline{v})$. Це число заносять у стовпець v^* .

Крок 7. Перевіряється критерій зупинки алгоритму. Ним може бути виконання однієї з таких умов:

- 1) $\min_{1 \leq i \leq N} \bar{v}_i = \max_{1 \leq i \leq N} \underline{v}_i$, де $\bar{v}_i = \bar{v}$; $\underline{v}_i = \underline{v}$ на ітерації i ;
- 2) N досягло заданої (достатньо великої) величини;
- 3) досягнута задана точність за ціною гри, що може бути визначене так:

$$\Delta = \left| \min_{1 \leq i \leq N} \bar{v}_i - \max_{1 \leq i \leq N} \underline{v}_i \right| \leq \varepsilon,$$

або так:

$$\delta = \frac{\Delta}{0,5 \left| \min_{1 \leq i \leq N} \bar{v}_i + \max_{1 \leq i \leq N} \underline{v}_i \right|} \leq \varepsilon,$$

де $\varepsilon > 0$ задана точність (при обчисленні Δ – в абсолютних величинах, при обчисленні δ – у відносних величинах).

Якщо критерій зупинки не виконано, то перехід на крок 2 алгоритму зі збільшенням на 1 величини N ($N := N + 1$) і вибором за стратегію вектора $NEXT_X$.

При завершенні алгоритму за розв'язок приймається: ціна гри

$$V^* = \frac{1}{2} \left(\min_{1 \leq i \leq N} \bar{v}_i + \max_{1 \leq i \leq N} \underline{v}_i \right),$$

а за ймовірності застосування чистих стратегій (тобто за мішані стратегії) гравців – частоти їх застосування за пройдени N ітерацій методу: для 1-го гравця – частка кількості застосування кожного полірозміщення X за N ітерацій; для гравця 2 – частка кількості застосувань кожної стратегії j , за N ітерацій $j \in J_n$.

Зауваження. Якщо в умові (3) множина полірозміщень така, що якесь k_i з умови (2) дорівнює 2 ($k_i = 2$), то в методі гілок і мед, що застосовується на кроці 5, можна визначити x_{m_i+1} і x_{m_i+2} з (4) згідно з наступним твердженням.

Нехай у (13) при x_{m_i+1} позначено c_{i1} , а при x_{m_i+2} позначено c_{i2} .

Таблиця 1

Перші шість кроків методу типу Брауна-Робінсон для ілюстративного прикладу

N	X	B_1	B_1X	B_2	B_2X	$N\bar{v}$	\bar{v}	j	A_1	A_2	A_3	A_4	Nv	v	v^*
1	0,1	7	0,7	3	2,1			2	3	5	4	2			
	0,9	1	0,9	5	4,5			SUM R	3	5	4	2			
	0,3	3	0,9	4	3,6			NEXT X	0,9	0,1	0,3	0,7			
	0,7	8	2,1	2	4,2			sigma	2,7	0,5	1,2	1,4	5,8	5,8	10,1
	sum I		4,6		14,4										
	SUM L		4,6		14,4	14,4	14,4								
2	0,9	7	6,3	3	2,7			2	3	5	4	2			
	0,1	1	0,1	5	0,5			SUM R	6	10	8	4			
	0,3	3	0,9	4	1,2			NEXT X	0,9	0,1	0,3	0,7			
	0,7	8	5,6	2	1,4			sigma	5,4	1,0	2,4	2,8	11,6	5,8	7,95
	sum I		12,9		5,8										
	SUM L		17,5		20,2	20,2	10,1								
3	0,9	7	6,3	3	2,7			1	7	1	3	8			
	0,1	1	0,1	5	0,5			SUM R	13	11	11	12			
	0,3	3	0,9	4	1,2			NEXT X	0,1	0,9	0,7	0,3			
	0,7	8	5,6	2	1,4			sigma	1,3	9,9	7,7	3,6	22,5	7,5	8,83
	sum I		12,9		5,8										
	SUM L		30,4		26,0	30,4	10,13								
4	0,1	7	0,7	3	0,3			1	7	1	3	8			
	0,9	1	0,9	5	4,5			SUM R	20	12	14	20			
	0,7	3	2,1	4	2,8			NEXT X	0,1	0,9	0,7	0,3			
	0,3	8	2,4	2	0,6			sigma	2,0	9,8	9,8	6,0	27,0	6,75	7,94
	sum I		6,1		8,2										
	SUM L		36,5		34,2	36,5	9,13								
5	0,1	7	0,7	3	0,3			1	7	1	3	8			
	0,9	1	0,9	5	4,5			SUM R	27	13	17	28			
	0,7	3	2,1	4	2,8			NEXT X	0,1	0,9	0,7	0,3			
	0,3	8	2,4	2	0,6			sigma	2,7	11,7	11,9	8,4	34,7	6,94	7,73
	sum I		6,1		8,2										
	SUM L		42,6		42,4	42,6	8,52								
6	0,1	7	0,7	3	0,3			2	3	5	4	2			
	0,9	1	0,9	5	4,5			SUM R	30	18	21	30			
	0,7	3	2,1	4	2,8			NEXT X	0,1	0,9	0,7	0,3			
	0,3	8	2,4	2	0,6			sigma	3,0	16,2	14,7	9,0	32,9	5,48	6,96
	sum I		6,1		8,2										
	SUM L		48,7		50,6	50,6	8,43								
...

Теорема. Якщо в умові (2) $k_i = 2, i \in J_s$, то задача (13) за умови (3) та (4) має таку властивість: при $c_{i1} \geq c_{i2}$ $x_{m_i+1}^* = \min\{x_1^j\}$; $(x_1^j, x_2^j) \in E_{n_i, v_i}^2(P_i^*)$; $x_{m_i+2}^* = 1 - x_{m_i+1}^*$; при $c_{i1}^j < c_{i2}$ $x_{m_i+1}^* = \max\{x_1^j\}$; $(x_1^j, x_2^j) \in E_{n_i, v_i}^2(P_i^*)$; $x_{m_i+2}^* = 1 - x_{m_i+1}^*, j \in J_\tau$, $\tau = |E_{n_i, v_i}^2(P_i^*)|$.

Доведення. Цей факт є наслідком теореми 3.1 [7].

3. Ілюстративний приклад

Нехай задана платіжна матриця:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \\ 3 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Маємо $G = P_1^x + P_2^x$; $|G| = \eta = 10$; $n = 7$; $k = 4$, де

$$P_1^x = (0, 1; 0, 1; 0, 4; 0, 6; 0, 9); P_2^x = (0, 3; 0, 5; 0, 5; 0, 7; 0, 9).$$

Таблиця 2

Інформація про мішані розв’язки, отримані в ілюстративному прикладі

Чиста стратегія	Імовірність застосування
(0,1; 0,9; 0,3; 0,7)	1/6≈0,17
(0,1; 0,9; 0,7; 0,3)	1/2=0,5
(0,1; 0,9; 0,5; 0,5)	0
(0,9; 0,1; 0,3; 0,7)	1/3≈0,33
(0,9; 0,1; 0,7; 0,3)	0
(0,9; 0,1; 0,5; 0,5)	0
(0,4; 0,6; 0,3; 0,7)	0
(0,4; 0,6; 0,7; 0,3)	0
(0,4; 0,6; 0,5; 0,5)	0
(0,6; 0,4; 0,3; 0,7)	0
(0,6; 0,4; 0,7; 0,3)	0
(0,6; 0,4; 0,5; 0,5)	0

Отже,

$$G = (0, 1; 0, 1; 0, 3; 0, 4; 0, 5; 0, 5; 0, 6; 0, 7; 0, 9; 0, 9).$$

Нехай $s = 2$; $k_1 = 2$; $k_2 = 2$; тобто $E_{\eta n}^{ks}(G, H) = E_{10,7}^{4,2}(G, H)$. Нехай $N_1 = \{1, 2, 4, 7, 9\}$, $N_2 = \{3, 5, 6, 8, 10\}$, тоді $H = E_{5,4}^2(P_1^x) \times E_{5,4}^2(P_2^x)$, де $E_{5,4}^2(P_1^x) = \{(0, 1; 0, 9); (0, 9; 0, 1); (0, 4; 0, 6); (0, 6; 0, 4)\}$, $E_{5,4}^2(P_2^x) = \{(0, 3; 0, 7); (0, 7; 0, 3); (0, 5; 0, 5)\}$.

Розв’язування наведено в таблиці 1. За стратегію 1-го гравця на 1-ій ітерації обрано $X = (0, 1; 0, 9; 0, 3; 0, 7)$.

Якщо б алгоритм було зупинено після 6-ти ітерацій, то

$$V^* = \frac{1}{2}(8, 43 + 6, 96) = 7, 96.$$

Мішана стратегія гравця визначається так (таблиця 2).

Мішана стратегія другого гравця: (0,5; 0,5) – тобто ймовірності застосування обох чистих стратегій – по 0,5.

Висновки. У роботі розглянута ігрова комбінаторна задача, модель якої є задачею з комбінаторним обмеженням на стратегію одного гравця. Ця стратегія має бути полірозміщенням. Виявлені умови, що перетворюють її на задачу на евклідовій комбінаторній множині полісполучень.

Запропоновано метод розв’язування цієї задачі в рамках ітераційного підходу типу методу Брауна-Робінсон.

Доведена властивість задачі, що дає змогу спростити розв’язування підзадачі, коли якесь із полірозміщень містить 2 розміщення.

Наведено ілюстративний приклад розв’язування задачі запропонованим методом.

Результати статті розширяють клас ігрових задач і задач комбінаторної оптимізації, що можуть використовуватися на практиці.

ЛІТЕРАТУРА

- Сергиенко И.В., Гуляницкий Л.Ф., Сиренко С.И. Классификация прикладных методов комбинаторной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ*. 2009. Вып. 45. № 5. С. 732–741.
- Korte В., Vygen J. *Combinatorial optimization: Theory and algorithms*. Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 2012. 660 p.
- Pardalos P.M., Du D-Z., Graham R.L. (Eds.) *Handbook of combinatorial optimization*. New York : Springer, 2013. 3399 p.
- Papadimitriou С.Н., Steiglitz К. *Combinatorial optimization: Algorithms and complexity*. Mineola (NY) : Dover Publications, 2013. 528 p.
- Сергиенко И.В., Шило В.П. Современные подходы к решению сложных задач дискретной оптимизации. *Проблемы управления и информатики*. 2016. Вып. 48. № 1. С. 15–24.
- Гуляницкий Л.Ф., Рясна І.І. До формалізації задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах. *Теорія оптимальних рішень* : збірник наукових праць. 2017. Вип. 130. С. 239–250.
- Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. Київ : Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. 188 с. URL: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487>.
- Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Теория и методы евклидовой комбинаторной оптимизации: современное состояние и перспективы. *Кибернетика и системный анализ*. 2020. Вып. 56. № 3. С. 366–379.
- Ємець О.А., Устьян Н.Ю. Решение некоторых задач комбинаторной оптимизации на размещениях и перестановках игрового типа. *Проблемы управления и информатики*. 2006. Вып. 38 № 5. С. 34–45.

10. Емец О.А., Ольховская Е.В. Итерационный метод решения комбинаторных задач игрового типа на размещениях. *Проблемы управления и информатики*. 2011. Вып. 43. № 5. С. 52–63.
11. Морозов В.В., Шалбузов К.Д. О численном решении матричных игр специального вида. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2014. Вып. 54. № 10. С. 1499–1504.
12. Емец О.А. Решение линейной задачи евклидовой комбинаторной оптимизации на размещениях с условием постоянства суммы элементов размещения. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. Вып. 48. № 4. С. 547–557.

REFERENCES

1. Sergienko I. V., Hulianytskyi L. F., Sirenko S. I. (2009) Classification of applied methods of combinatorial optimization. *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 45, no. 5, pp. 732–741.
2. Korte B., Vygen J. (2012) Combinatorial optimization: Theory and algorithms. Berlin; Heidelberg; New York: Springer.
3. Pardalos P. M., Du D-Z., Graham R. L. (2013) (Eds.) Handbook of combinatorial optimization. New York: Springer.
4. Papadimitriou C. H., Steiglitz K. (2013) Combinatorial optimization: Algorithms and complexity. Mineola (NY): Dover Publications.
5. Sergienko I. V., Shylo V. P. (2016) Modern approaches to solving complex discrete optimization problems. *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 48, no. 1, pp. 15–24.
6. Hulianytskyi L., Riasna I. (2017) Formalization and classification of combinatorial optimization problems. *Springer Optimization and Its Applications*, vol. 130, pp. 239–250.
7. Stoyan Yu. G., Emets O. O. (1993) Theory and Methods of Euclidean Combinatorial Optimization. Kyiv: Inst. Syst. Doslidzh. Osvity. URL: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487> (in Ukrainian).
8. Stoyan Y. G., Yakovlev S. V. (2020) Theory and Methods of Euclidian Combinatorial Optimization: Current Status and Prospects. *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 56, no. 3, pp. 366–379.
9. Emets O. A., Ustian N. Yu. (2006) Solving of some problems of combinatorial optimization on arrangements and permutations of game type. *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 38, no. 5, pp. 34–45.
10. Iemets O. A., Olkhovskaja E. V. (2011) Iterative method for solving combinatorial optimization problems of the game-type on arrangements. *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 43, no. 5, pp. 52–63.
11. Morozov V. V., Shalbuzov K. D. (2014) Numerical solution of special matrix games. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 54, no. 10, pp. 1499–1504.
12. Iemets O. O., Yemets O. O. (2012) Solving a linear problem of Euclidean combinatorial optimization on arrangements with the constant sum of the elements. *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 48, no. 4, pp. 547–557.

ІДЕНТИФІКОВАНІСТЬ ЗА СТАНОМ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ З ГІРОСКОПІЧНОЮ СТРУКТУРОЮ ПРИ ДІЇ ДИСИПАТИВНИХ СИЛ ТА СИЛ РАДІАЛЬНОЇ КОРЕКЦІЇ З УРАХУВАННЯМ ПЕВНОГО НЕЛІНІЙНОГО ЗМІШАНОГО ВИДУ ЗОВНІШНІХ ЗБУРЕНЬ

Леонтєва В. В.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри прикладної математики і механіки
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-9863-9712
vleonteva15@gmail.com*

Кондрат'єва Н. О.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри прикладної математики і механіки
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-6994-2536
nkondr100@gmail.com*

Єлховська Я. А.

*аспірант кафедри прикладної математики і механіки
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0003-1066-1577
yana.elka28@gmail.com*

Ключові слова: динамічна система, гіроскопічна система, зовнішні збурення, модель у змінних стану, параметрична ідентифікованість систем, матриця ідентифікованості.

Якщо в процесі вивчення динамічних систем різної фізичної природи, розв'язання задач керування й регулювання динамічними системами, які використовують для опису свого руху математичні моделі, виявляється проблема зміни параметрів моделей досліджуваних систем, що своєю чергою може призводити до зміни статистичних та динамічних властивостей систем, одержання некоректних результатів їх функціонування, а отже, загальної (часткової) невідповідності систем їх призначенню або недостатньої ефективності їх роботи, виникає необхідність ідентифікувати (визначити) змінені параметри математичних моделей досліджуваних систем та зробити їх, таким чином, доступними для подальшого контролю та регулювання. У такій постановці важливим є аналіз ідентифікованості досліджуваних систем, за яким встановлюється принципова можливість безпосереднього відновлення параметрів відповідних математичних моделей.

У роботі проводиться аналіз параметричної ідентифікованості за станом динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень, описуваної за допомогою уточненої математичної моделі у просторі станів, яка подається у вигляді лінійаризованих диференціальних рівнянь зі складеною нелінійною правою частиною та залежно від певних фізичних обмежень об'єкта має дві різні форми подання – при існуючій можливості (неможливості) об'єднання збурюючих сил, що діють на систему. За кожною з одержаних моделей проведено аналіз ідентифікованості системи, на основі якого встановлено умови повної ідентифікованості, причому на результати аналізу ідентифікованості досліджуваної системи впливають тільки результати дослідження однієї з отриманих матриць ідентифікованості, складеної для випадку можливості об'єднання збурюючих сил. Використання іншої форми подання моделі виявилось менш популярним через ускладнення матриці керуваності, а отже, відповідної матриці ідентифікації, а також збігання результатів, отриманих для другої моделі.

**STATE IDENTIFIABILITY OF A DYNAMICAL SYSTEM
WITH A GYROSCOPIC STRUCTURE UNDER THE ACTION OF DISSIPATIVE
FORCES AND FORCES OF RADIAL CORRECTION
WITH A CERTAIN NONLINEAR EXTERNAL DISTURBANCES OF MIXED TYPE**

Leontieva V. V.

*PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor;
Associate Professor at the Department of Applied Mathematics and Mechanics
Zaporizhzhya National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-9863-9712
vleonteva15@gmail.com*

Kondratieva N. A.

*PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor;
Associate Professor at the Department of Applied Mathematics and Mechanics
Zaporizhzhya National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-6994-2536
nkondr100@gmail.com*

Yelkhovska Ya. A.

*Postgraduate Student at the Department of Applied Mathematics and Mechanics
Zaporizhzhya National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0003-1066-1577
yana.elka28@gmail.com*

Key words: *dynamical system, gyroscopic system, external disturbances, state variable model, parametric identifiability of the system, identifiability matrix.*

In the study of dynamical systems of different physical nature, the solving the control problems of dynamical systems, which use mathematical models to describe their motion, it is often appeared a problem of changing the parameters of studied systems' models, which in turn can lead to changes in statistical and dynamical properties of the systems, to obtaining the incorrect results of their functioning, and, consequently, to a general (partial) inconsistency of the systems with its purpose or insufficient efficiency of its work. In such cases, it becomes necessary to correct and identify the changed parameters of mathematical models of the studied system and make it, thus, available for further control and regulation. For solving problems of identification of the systems, it is important to analyze their identifiability, according to which the fundamental possibility of direct restoration of the parameters of studied system' models is established.

This work is devoted to the study of identifiability problem of a dynamical system with a gyroscopic structure under the influence of dissipative and radial correction forces with a certain nonlinear external disturbances of mixed type described with the constructed mathematical state-space model, that is presented in the form of linearized differential equations in two different forms of presentation – with the existing possibility (impossibility) of union of disturbing forces acting on the system. For each of obtained models an analysis of the system's identifiability was carried out. As a result of the analysis the conditions for complete identifiability are satisfied. Moreover, it was determined that results of the analysis of identifiability of studied system are influenced only by the results of the study of one of the obtained identification matrices, compiled for the case of the existing possibility of combining disturbing forces. The use of another form of representation of model turned out to be less popular due to the complication of the controllability matrix, and, consequently, the corresponding identifiability matrix.

Вступ. У процесі дослідження динамічних систем (об'єктів, процесів), розв'язання задач керування й регулювання динамічних систем, які використовують для опису свого руху математичні моделі, досить часто виникає проблема змінування (з огляду на дію окремо визначених факторів) параметрів моделей досліджуваних систем, що своєю чергою може призводити до змінування статистичних й динамічних властивостей систем, одержання некоректних результатів їх функціонування, отже, загальній або частковій невідповідності системи своєму призначенню або недостатній ефективності її роботи. У таких випадках виникає необхідність ідентифікувати (визначити) змінені параметри математичних моделей руху досліджуваної системи та зробити, таким чином, її доступною до здійснення подальшого керування й регулювання, тобто до визначення таких певних впливів на досліджувану систему (об'єкт, процес), щоб вона отримала змогу змінитися таким чином, щоб показники, які її характеризують, відповідали певним (бажаним) вимогам. При цьому для розв'язання задач ідентифікації систем важливе значення має проведення аналізу їх ідентифікованості, за яким встановлюється принципова можливість здійснення безпосередньої ідентифікації (відновлення) параметрів математичних моделей досліджуваної системи [1–6]. Неврахування неідентифікованості систем керування й регулювання може призвести до помилкових висновків [4; 7; 8]. З огляду на це, дослідження ідентифікованості має визначальне значення в розв'язанні задач керування й регулювання [2; 5–11].

У зв'язку з технологіями в області розробки й дослідження динамічних систем з гіроскопічною структурою, що активно розвиваються [12–17], необхідне проведення якісного аналізу їх динамічних характеристик із метою визначення подальших дій, спрямованих на отримання бажаних результатів дослідження. Проведення аналізу властивостей таких систем нині виступає одним з найбільш актуальних, пріоритетних та затребуваних досліджень у зв'язку із розширенням застосування таких систем у різних областях науки й техніки, з встановленням нових вимог як до самих гіроскопічних систем, так і до окремих їх елементів із метою досягнення найкращих значень показників якості функціонування [13; 14; 17].

Необхідність вивчення питання ідентифікованості динамічних систем з гіроскопічною структурою зумовлена тим, що в процесі розв'язання задач керування часто виникають ситуації, коли математичні моделі, які описують їх поведінку, не завжди точно відображають досліджувані процеси і ставиться задача про уточнення структури та/або параметрів зазначених моделей. У цьому випадку

параметрична ідентифікація моделей забезпечує принципову можливість визначення параметрів математичних моделей системи за результатами вимірювання певних вихідних величин протягом деякого інтервалу часу [2; 3; 13; 18; 19].

Ця робота присвячена дослідженню проблеми ідентифікованості динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень, описуваних за допомогою лінійаризованих диференціальних рівнянь зі складеною нелінійною правою частиною.

Мета, об'єкт та предмет дослідження. *Метою роботи* є дослідження ідентифікованості параметрів лінійної математичної моделі динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного змішаного виду зовнішніх збурень, визначення умов, за якими система є повністю та/або частково ідентифікованою й неідентифікованою.

Об'єктом дослідження в роботі виступають математичні моделі динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та змішаного виду зовнішніх збурень, які описуються лінійаризованими неоднорідними диференціальними рівняннями із сталими коефіцієнтами.

Предметом дослідження є властивість ідентифікованості динамічної системи з гіроскопічною структурою.

Для реалізації сформульованої мети були поставлені такі завдання:

- одержання у змінних стану (зі встановленням фазових змінних стану системи та функцій керування) лінійних моделей динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень для випадків, коли враховується об'єднання зовнішніх збурень та їх відокремленість;

- побудова матриць ідентифікованості досліджуваної системи з гіроскопічною структурою, динаміка руху якої описується за допомогою отриманих моделей у змінних стану;

- проведення поелементного аналізу матриць ідентифікованості на відповідність критерію ідентифікованості М.О. Балоніна для лінійних стаціонарних систем керування;

- за результатами проведеного аналізу матриць ідентифікованості визначення умов повної та/або часткової ідентифікованості та неідентифікованості досліджуваної системи з гіроскопічною структурою;

- формулювання загальних висновків за результатами проведеного в роботі дослідження.

Виклад основного матеріалу.

1. Математичні моделі руху досліджуваної динамічної системи з гіроскопічною структурою

Вихідними математичними моделями для проведення дослідження ідентифікованості в роботі виступають лінеаризовані неперервні математичні моделі динамічної системи з гіроскопічною структурою з урахуванням дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та змішаного виду зовнішніх збурень, представлені у змінних стану в стандартній формі та описувані системами лінійних векторно-матричних диференціальних рівнянь відповідно до видів [14]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{X} + \mathbf{F}_1, \\ \mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{X}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{X} + \mathbf{F}_2, \\ \mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{X}, \end{cases} \quad (2)$$

де $\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ – вектор стану системи розмірності $n \times 1$, $\mathbf{X} \in R^n$; $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 = [x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0]^T$ – вектор початкового стану системи розмірності $n \times 1$; $\mathbf{F}_1 = [f_1^1, f_2^1, f_3^1, f_4^1]^T$, $\mathbf{F}_2 = [f_1^2, f_2^2, f_3^2, f_4^2]^T$ – вектори зовнішніх збурень розмірностей $n \times 1$; $\mathbf{Y} = [y_1, y_2]^T$ – вектор виходу системи розмірності $r \times 1$; $\tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{a}_{ij}]_{n \times n}$, $\tilde{\mathbf{C}} = [\tilde{c}_{ij}]_{r \times n}$ – матриці стану та виходу системи відповідно:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{k}{A} & -\frac{b}{A} & \frac{H}{A} \\ -\frac{k}{A} & 0 & -\frac{H}{A} & -\frac{b}{A} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнти матриці $\tilde{\mathbf{A}}$ систем (1) та (2) мають таке тлумачення [12; 14; 15]: A – екваторіальний момент інерції гіроскопічної системи; b – коефіцієнт сил опору; H – власний кінетичний момент гіроскопічної системи; k – крутизна характеристики моментних датчиків.

Вектор-функції $\mathbf{F}_1 = [f_1^1, f_2^1, f_3^1, f_4^1]^T$, $\mathbf{F}_2 = [f_1^2, f_2^2, f_3^2, f_4^2]^T$ часу t , які виступають у ролі зовнішніх збурень у системах (1) та (2), вибираються таким чином [14]. Якщо на фізичному рівні не є можливим об'єднання збурюючих сил $f_i^j(t)$ ($i = \overline{1,4}, j = \overline{1,2}$), що виступають як керування, в моделі у змінних стану використовується вектор-функція $\mathbf{F}_1 = [f_1^1, f_2^1, f_3^1, f_4^1]^T$, яка подається у вигляді

$$\mathbf{F}_1 = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & -\frac{\sin \beta_{cep}}{A} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{A}(u_1(t) - u_2(t) \sin \beta_{cep}) \\ \frac{1}{A}u_3(t) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

у протилежному випадку, коли зазначене об'єднання збурюючих сил є можливим, у моделі

у змінних стану вибирається вектор-функція $\mathbf{F}_2 = [f_1^2, f_2^2, f_3^2, f_4^2]^T$ у вигляді

$$\mathbf{F}_2 = \tilde{\tilde{\mathbf{B}}}\tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{A}\tilde{u}_1(t) \\ \frac{1}{A}u_3(t) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

У співвідношеннях (3), (4) прийнято: $\beta_{cep} = const$ – усереднене відносне значення кута повороту β за термін розглядання руху гіроскопічної системи, отримане в процесі здійснення лінеаризації вихідних рівнянь системи за умови припущення про його мале змінювання в часі у тригонометричних виразах моделі; $\mathbf{U} = [u_1(t), u_2(t), u_3(t)]^T$ – вектор керування розмірності

$m \times 1$, $\mathbf{U} \in R^m$; $u_i(t) = g_i^0 + g_i^1 t + g_i^2 t^2 + g_i^3 \sin(\omega_i t + \varepsilon_i)$, $i = \overline{1,3}$; g_i^j , ω_i , ε_i ($i = \overline{1,3}, j = \overline{0,3}$) – відомі сталі; $\tilde{\mathbf{U}} = [\tilde{u}_1(t), u_3(t)]^T$ – вектор керування розмірності $\tilde{m} \times 1$, $\tilde{\mathbf{U}} \in R^{\tilde{m}}$;

$\tilde{u}_1(t) = \tilde{g}_1^0 + \tilde{g}_1^1 t + \tilde{g}_1^2 t^2 + g_1^3 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + \tilde{g}_2^3 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2)$; $\tilde{g}_1^j = g_1^j - g_2^j \sin \beta_{cep}$, $j = \overline{0,2}$; $\tilde{g}_2^3 = -g_2^3 \sin \beta_{cep}$; $\tilde{\mathbf{B}} = [\tilde{b}_{ij}]_{n \times m}$, $\tilde{\tilde{\mathbf{B}}} = [\tilde{\tilde{b}}_{ij}]_{n \times \tilde{m}}$ – матриці керуючих впливів системи:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & -\frac{\sin \beta_{cep}}{A} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\tilde{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A} \end{bmatrix}.$$

Зауважимо, що представлена системами векторно-матричних рівнянь (1) та (2) досліджувана гіроскопічна система розглядається як система автоматичного керування, в якій вхідними сигналами (входами) виступають моменти сил $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ (для системи (1)) та $\tilde{u}_1(t), u_3(t)$ (для системи (2)), а вихідними сигналами (виходами) – кути повороту α та β гіроскопічної системи навколо відповідної зовнішньої і внутрішньої осей. Для такої форми представлення моделі досліджуваної системи є можливим проведення аналізу основних властивостей систем керування, до яких належить і параметрична ідентифікованість моделей, аналіз якої виступає предметом дослідження роботи. При цьому будемо вважати, що досліджувана динамічна система функціонує в умовах наявності повної інформації про вектор стану об'єкта дослідження. У протилежному випадку необхідне розв'язання додаткової задачі теорії автоматичного керування – задачі спостереження, що дає змогу відновити значення вектора стану та використовувати його для подальших досліджень в області керування й автоматичного регулювання.

2. Дослідження ідентифікованості гіроскопічної системи

У цьому розділі проведемо аналіз параметричної ідентифікованості лінійної модельної структури досліджуваної гіроскопічної системи, представленої в просторі станів системами лініаризованих диференціальних векторно-матричних рівнянь (1) (якщо на фізичному рівні неможливо об'єднати збурюючі сили) та (2) (якщо можливе вказане об'єднання). Проведення зазначеного аналізу дасть змогу визначити, чи є принципова можливість відновлення (ідентифікації) невідомих або змінених у результаті дії зовнішніх факторів параметрів моделей, що своєю чергою дасть змогу визначити існування реальної можливості в заданих умовах отримання адекватних моделей досліджуваної системи, придатних до подальшого використання, або в разі часткової ідентифікованості параметрів моделей визначити додаткові умови, за якими буде встановлена можливість зведення досліджуваних моделей системи до параметрично повністю ідентифікованих.

Перш за все визначимось з основними поняттями та застосовуваними в процесі аналізу критеріями параметричної ідентифікованості.

Спираючись на фундаментальні постулати теорії автоматичного керування [1–6; 9; 10; 18], можна зазначити, що ідентифікованість моделі динамічної системи встановлює, що є можливість визначення параметрів математичної моделі досліджуваної системи за результатами вимірювання певних вхідних та вихідних величин впродовж деякого інтервалу часу, та, крім того, залежить від самих рівнянь моделі, вхідних та вихідних функцій, початкових умов, обмежень, а також часто невідомих істинних значень параметрів моделей.

Нині є багато критеріїв визначення ступеня параметричної ідентифікованості динамічних систем [1–6; 9–11; 19], які в кожній конкретній задачі відповідають на аналізоване питання. У цій роботі питання ідентифікованості параметрів математичних моделей досліджуваної динамічної системи з гіроскопічною структурою, описуваних системами векторно-матричних рівнянь (1) або (2), розглядається з позиції розкриття принципової можливості здійснення процедури параметричної ідентифікації, тобто з позиції визначення ідентифікованості за станом лінійних стаціонарних динамічних систем, описуваних у загальному випадку системами векторно-матричних рівнянь виду

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{G}\mathbf{U}, & \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \\ \mathbf{Y} = \mathbf{P}\mathbf{X} + \mathbf{S}\mathbf{U}. \end{cases} \quad (5)$$

де $\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_n]^T$ – вектор стану;

$\mathbf{U} = [u_1, \dots, u_m]^T$ – вектор керування (входу);

$\mathbf{Y} = [y_1, \dots, y_r]^T$ – вектор виходу; $\mathbf{F} = [f_{ij}]_{n \times n}$,

$\mathbf{G} = [g_{ij}]_{n \times m}$, $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{r \times n}$, $\mathbf{S} = [s_{ij}]_{r \times m}$ – відомі стаціонарні матриці. Для системи (5) передбачається, що всі рівняння моделей (структурно) є заздалегідь відомими, а про вектори стану та керування є повна інформація, тобто вектори стану та керування є повністю доступними для вимірювання.

Для системи виду (5), а отже, до систем (1) та (2), в роботі ставиться наступна задача встановлення ідентифікованості параметрів за станом досліджуваної системи: необхідно визначити умови, за якими задача визначення матриць \mathbf{F}, \mathbf{G} (у системі (5)), матриць $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}$ (у системі (1)) або матриць $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}$ (у системі (2)) за спостереженнями стану $\mathbf{X}(t)$ та входу $\mathbf{U}(t)$ має єдиний розв'язок, що збігається з істинними параметрами відповідних моделей, описуваних системами (5), (1) та (2).

У такій постановці розглядуваної задачі будемо спиратися на таке тлумачення ідентифікованості системи [9; 10]: лінійна стаціонарна система (1), (2) або (5) є повністю ідентифікованою, якщо є таке керування $\mathbf{U}(t)$, що при заданому початковому стані системи $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ відповідні визначувані стаціонарні матриці $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}$ (у системі (1)), матриці $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}$ (у системі (2)) або \mathbf{F}, \mathbf{G} (у системі (5)) можуть бути єдиним чином відновлені за спостереженнями процесу на вході та стану $\mathbf{U}(t)$ та $\mathbf{X}(t)$ на певному кінцевому інтервалі часу ідентифікації. Якщо не всі зазначені матриці можуть бути відновлені за спостереженнями $\mathbf{X}(t)$, $\mathbf{U}(t)$ або жодної з них не може бути визначено в зазначеному смислі, досліджувана система є, відповідно, частково ідентифікованою або неідентифікованою.

Для перевірки ідентифікованості систем у такій постановці М.О. Балоніним розроблено алгебраїчний критерій ідентифікованості [10], за яким лінійна стаціонарна система (5) є повністю ідентифікованою (пара $((\mathbf{F}, \mathbf{G}), \mathbf{X}_0)$ є повністю ідентифікованою) за вектором стану тоді і тільки тоді, коли виконується рангова умова для відповідної матриці ідентифікованості

$$\text{rank} \left[\mathbf{W}_{id_s} \right]_{n \times (n+nm)} = \text{rank} \left[\mathbf{W}_o : \mathbf{W}_{kep} \right]_{n \times (n+nm)} = n, \quad (6)$$

де

$$\mathbf{W}_o = \left[\mathbf{X}_0 : \mathbf{F}\mathbf{X}_0 : \mathbf{F}^2\mathbf{X}_0 : \dots : \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{X}_0 \right]_{n \times n}$$

матриця ідентифікованості однорідної системи $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}\mathbf{X}$;

$$\mathbf{W}_{kep} = \left[\mathbf{G} : \mathbf{F}\mathbf{G} : \mathbf{F}^2\mathbf{G} : \dots : \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{G} \right]_{n \times nm}$$

матриця керуваності; n – розмірність простору стану системи (5).

Використовуючи представлений критерій ідентифікованості до досліджуваної динамічної сис-

теми, описуваної рівняннями у змінних стану (1) та (2), отримано такі матриці ідентифікованості за станом:

$$\tilde{W}_{id_s} = [\tilde{X}_0 : \tilde{A}\tilde{X}_0 : \tilde{A}^2\tilde{X}_0 : \tilde{A}^3\tilde{X}_0 : \tilde{B} : \tilde{A}\tilde{B} : \tilde{A}^2\tilde{B} : \tilde{A}^3\tilde{B}] =$$

$$= [V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4 \ W_1 \ W_2 \ W_3 \ W_4 \ W_5 \ W_6 \ W_7 \ W_8 \ W_9 \ W_{10} \ W_{11} \ W_{12}], \quad (7)$$

$$\tilde{W}_{kep} = [\tilde{X}_0 : \tilde{A}\tilde{X}_0 : \tilde{A}^2\tilde{X}_0 : \tilde{A}^3\tilde{X}_0 : \tilde{B} : \tilde{A}\tilde{B} : \tilde{A}^2\tilde{B} : \tilde{A}^3\tilde{B}] =$$

$$= [V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4 \ W_1 \ W_3 \ W_4 \ W_6 \ W_7 \ W_9 \ W_{10} \ W_{12}], \quad (8)$$

де V_i ($i = \overline{1,4}$) – стовпці матриці ідентифікованості W_o однорідної системи $\dot{X} = AX$, яка є однаковою для обох систем (1) та (2):

$$V_1 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \\ x_4^0 \end{bmatrix}; \quad V_2 = \begin{bmatrix} x_3^0 \\ x_4^0 \\ \frac{k}{A}x_2^0 - \frac{b}{A}x_3^0 + \frac{H}{A}x_4^0 \\ -\frac{k}{A}x_1^0 - \frac{H}{A}x_3^0 - \frac{b}{A}x_4^0 \end{bmatrix};$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} \frac{k}{A}x_2^0 - \frac{b}{A}x_3^0 + \frac{H}{A}x_4^0 \\ -\frac{k}{A}x_1^0 - \frac{H}{A}x_3^0 - \frac{b}{A}x_4^0 \\ -\frac{Hk}{A^2}x_1^0 - \frac{bk}{A^2}x_2^0 + \frac{b^2 - H^2}{A^2}x_3^0 - \frac{2bH - Ak}{A^2}x_4^0 \\ \frac{bk}{A^2}x_1^0 - \frac{Hk}{A^2}x_2^0 + \frac{2bH - Ak}{A^2}x_3^0 + \frac{b^2 - H^2}{A^2}x_4^0 \end{bmatrix};$$

$$V_4 = \begin{bmatrix} -\frac{Hk}{A^2}x_1^0 - \frac{bk}{A^2}x_2^0 + \frac{b^2 - H^2}{A^2}x_3^0 - \frac{2bH - Ak}{A^2}x_4^0 \\ \frac{bk}{A^2}x_1^0 - \frac{Hk}{A^2}x_2^0 + \frac{2bH - Ak}{A^2}x_3^0 + \frac{b^2 - H^2}{A^2}x_4^0 \\ \frac{k(2bH - Ak)}{A^3}x_1^0 + \frac{k(b^2 - H^2)}{A^3}x_2^0 + \frac{-b^2 + 3bH^2 - 2AHk}{A^3}x_3^0 - \frac{H^3 - 3b^2H + 2Abk}{A^3}x_4^0 \\ -\frac{k(b^2 - H^2)}{A^3}x_1^0 + \frac{k(2bH - Ak)}{A^3}x_2^0 + \frac{H^3 - 3b^2H + 2Abk}{A^3}x_3^0 + \frac{-b^2 + 3bH^2 - 2AHk}{A^3}x_4^0 \end{bmatrix};$$

W_i ($i = \overline{1,12}$) – стовпці матриць керованості $\tilde{W}_{kep} = [\tilde{B} : \tilde{A}\tilde{B} : \tilde{A}^2\tilde{B} : \tilde{A}^3\tilde{B}]$ та

$$\tilde{W}_{kep} = [\tilde{B} : \tilde{A}\tilde{B} : \tilde{A}^2\tilde{B} : \tilde{A}^3\tilde{B}] :$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad W_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\sin \beta_{cep}}{A} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad W_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad W_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} \\ 0 \\ -\frac{b}{A^2} \\ -\frac{H}{A^2} \end{bmatrix};$$

$$W_5 = \begin{bmatrix} -\frac{\sin \beta_{cep}}{A} \\ 0 \\ \frac{b \sin \beta_{cep}}{A^2} \\ \frac{H \sin \beta_{cep}}{A^2} \end{bmatrix};$$

$$W_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{A} \\ \frac{H}{A^2} \\ -\frac{b}{A^2} \end{bmatrix}; \quad W_7 = \begin{bmatrix} -\frac{b}{A^2} \\ -\frac{H}{A^2} \\ \frac{H^2 - b^2}{A^3} \\ \frac{2bH - Ak}{A^3} \end{bmatrix};$$

$$W_8 = \begin{bmatrix} \frac{b \sin \beta_{cep}}{A^2} \\ \frac{H \sin \beta_{cep}}{A^2} \\ \frac{(H^2 - b^2) \sin \beta_{cep}}{A^3} \\ \frac{(2bH - Ak) \sin \beta_{cep}}{A^3} \end{bmatrix}; \quad W_9 = \begin{bmatrix} \frac{H}{A^2} \\ -\frac{b}{A^2} \\ -\frac{(2bH - Ak)}{A^3} \\ -\frac{(H^2 - b^2)}{A^3} \end{bmatrix};$$

$$W_{10} = \begin{bmatrix} -\frac{H^2 - b^2}{A^3} \\ \frac{2bH - Ak}{A^3} \\ \frac{-b^3 + 3bH^2 - 2AHk}{A^4} \\ \frac{H^3 - 3b^2H + 2Abk}{A^4} \end{bmatrix};$$

$$W_{11} = \begin{bmatrix} \frac{(H^2 - b^2) \sin \beta_{cep}}{A^3} \\ \frac{(2bH - Ak) \sin \beta_{cep}}{A^3} \\ \frac{(-b^3 + 3bH^2 - 2AHk) \sin \beta_{cep}}{A^4} \\ \frac{(H^3 - 3b^2H + 2Abk) \sin \beta_{cep}}{A^4} \end{bmatrix};$$

$$W_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{2bH - Ak}{A^3} \\ -\frac{H^2 - b^2}{A^3} \\ \frac{H^3 - 3b^2H + 2Abk}{A^4} \\ \frac{-b^3 + 3bH^2 - 2AHk}{A^4} \end{bmatrix}.$$

Проаналізуємо побудовані в (7) та (8) матриці ідентифікованості \tilde{W}_{id_s} та \tilde{W}_{kep} систем, описуваних рівняннями (1) та (2) відповідно. Оскільки умови

$$\text{rank} [\tilde{W}_{id_s}] = \text{rank} [W_o : \tilde{W}_{kep}] = n$$

та

$$\text{rank} [\tilde{W}_{id_s}] = \text{rank} [W_o : \tilde{W}_{kep}] = n$$

означають, що в блокових матрицях \tilde{W}_{id_s} та \tilde{W}_{kep} є n лінійно незалежних векторів-стовпців або векто-

рів-рядків (кількість таких стовпців (рядків) збігається з розмірністю простору стану n систем (1) та (2)), зазначений аналіз буде проводитися саме із цієї позиції.

Розглянемо перші блоки матриць \tilde{W}_{id_s} та \tilde{W}_{id_s} , тобто матрицю $W_o = [V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4]$. У зв'язку з однаковістю однорідної системи $\tilde{X} = \tilde{A}\tilde{X}$ для обох систем (1) та (2) перші чотири стовпці V_i ($i = \overline{1,4}$) в матрицях (7), (8) також є однаковими та за умови, що початкові стани $x_i^0 \neq 0$ ($i = \overline{1,4}$), є лінійно незалежними, в протилежному випадку (при $x_i^0 = 0$ ($i = \overline{1,4}$)) спостерігається лінійна залежність всіх стовпців V_i ($i = \overline{1,4}$), а отже, й виродженість матриці ідентифікованості W_o однорідної системи. Якщо хоча б одне з початкових станів системи є ненульовим, спостерігається також лінійна незалежність стовпців матриці W_o , але за певних умов, які у постановці розглядуваних математичних моделей досліджуваної системи є цілком виправданими. Так, наприклад, при $x_i^0 \neq 0$, $x_i^0 = 0$ ($i = \overline{2,4}$) матриця W_o приймає вигляд

$$W_o = \begin{bmatrix} x_1^0 & 0 & 0 & -\frac{Hk}{A^2} x_1^0 \\ 0 & 0 & -\frac{k}{A} x_1^0 & \frac{bk}{A^2} x_1^0 \\ 0 & 0 & -\frac{Hk}{A^2} x_1^0 & \frac{k(2bH - Ak)}{A^3} x_1^0 \\ 0 & -\frac{k}{A} x_1^0 & \frac{bk}{A^2} x_1^0 & -\frac{k(b^2 - H^2)}{A^3} x_1^0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

Якщо привести матрицю (9) за допомогою елементарних перетворень над рядками до ступінчастої матриці виду

$$Q = \begin{bmatrix} x_1^0 & 0 & 0 & -\frac{Hk}{A^2} x_1^0 \\ 0 & -\frac{k}{A} x_1^0 & \frac{bk}{A^2} x_1^0 & -\frac{k(b^2 - H^2)}{A^3} x_1^0 \\ 0 & 0 & -\frac{k}{A} x_1^0 & \frac{bk}{A^2} x_1^0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k(bH - Ak)}{A^3} x_1^0 \end{bmatrix} = \frac{k^3 (bH - Ak)}{A^5} (x_1^0)^4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{AH}{bH - Ak} \\ 0 & 1 & -\frac{b}{A} & -\frac{(b^2 - H^2)}{bH - Ak} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{Ab}{bH - Ak} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

можна побачити, що для неї

$$\det(Q) = \frac{k^3 (bH - Ak)}{A^5} (x_1^0)^4 \neq 0$$

(при $A \neq 0$, $k \neq 0$ та довільних значеннях сталих H та b), а отже, вказані стовпці тільки за наведених умов є лінійно незалежними і тільки в такому випадку ранг матриці W_o дорівнює числу ненульових строк отриманої ступінчастої матриці Q . При цьому за інших варіацій початкових станів системи лінійна залежність стовпців (рядків) матриці W_o може також спостерігатися за певних значень A, H, b, k . Це означає, що рангова умова

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \tilde{W}_{id_s} \\ W_o \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} \tilde{W}_{id_s} \\ \tilde{W}_{id_s} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} W_o \end{bmatrix}_{n \times n} = n$$

виконується тільки для тих випадків, коли сталі A, H, b, k та хоча б один із початкових станів системи є ненульовими. Тобто розгляд тільки перших чотирьох стовпців матриць \tilde{W}_{id_s} та \tilde{W}_{id_s} не дає загального висновку.

Поряд із цим при $A \neq 0$ та довільних значеннях сталих H, b, k та початкових станів x_i^0 ($i = \overline{1,4}$), згідно з результатами проведених у роботі [14] досліджень властивості керованості в досліджуваній динамічній системі з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та змішаного виду зовнішніх збурень, встановлено, що для неї виконується умова повної керованості, тобто матриці керованості \tilde{W}_{kep} та \tilde{W}_{kep} , що становлять другий блок у відповідних матрицях ідентифікованості \tilde{W}_{id_s} та \tilde{W}_{id_s} , є матрицями повного рангу n_s , тобто рангові умови (6) для матриць \tilde{W}_{id_s} та \tilde{W}_{id_s} виконуються повністю. А оскільки при цьому в роботі визначено, що для досліджуваної динамічної системи не існує випадків, коли вона є не повністю (частково) керованою або некерованою, отже, спираючись на отримані результати, можна зробити висновок, що досліджувана система з гіроскопічною структурою є повністю ідентифікованою. З огляду на те, що повна ідентифікованість систем цілком залежить від їх повної керованості, отримані результати дослідження щодо врахування або неврахування об'єднання зовнішніх сил у математичних моделях досліджуваної системи цілком поширюються і на результати, отримані в цій роботі: на результати аналізу ідентифікованості досліджуваної системи впливають тільки результати дослідження однієї з отриманих матриць ідентифікованості, складеної для випадку існуючої можливості об'єднання збурюючих сил.

Висновки. У роботі проведено дослідження властивості параметричної ідентифікованості за станом динамічної системи з гіроскопічною структурою з урахуванням дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень, динаміка руху якої описується за допомогою побудованої уточненої лінійаризованої неперервної математичної моделі у змінних стану, що являє собою систему

лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі складеною нелінійною правою частиною. Залежно від можливості об'єднання діючих на досліджувану систему зовнішніх збурень отримана в роботі модель динамічної системи представлена у двох можливих її варіантах подання, за кожною з яких своєю чергою проведено аналіз параметричної ідентифікованості за станом досліджуваної системи керування.

За результатами проведеного дослідження в роботі визначено, що аналізувана динамічна система за будь-яких значень власного кінетичного моменту, коефіцієнтів сил дисипації та коефіцієнтів крутизни характеристики моментних датчиків є повністю ідентифікованою за станом, а отже, встановлено принципову можливість відновлення (ідентифікації) невідомих або змінених у результаті дії зовнішніх факторів зазначених параметрів моделей, що своєю чергою визначає існування реальної можливості в заданих умовах отримання адекватних моделей досліджуваної системи, придатних до подальшого використання. Крім того, в

роботі встановлено, що на результати аналізу ідентифікованості досліджуваної системи істотним чином впливають результати дослідження властивості повної її керованості, причому суттєвий вплив на одержувані висновки в цьому випадку справляє аналіз тільки тієї матриці ідентифікованості, яка складається для системи з моделлю, отриманою в умовах, коли є можливим об'єднання збурюючих нелінійних сил, що діють на досліджувану систему. Невраховування об'єднання зовнішніх сил в математичних моделях досліджуваної системи значно ускладнює матрицю керованості, а отже, відповідну матрицю ідентифікованості, складених для випадку, коли об'єднання зовнішніх сил не видається можливим.

Крім того, зауважимо, що отримані в роботі результати можуть бути використані в процесі здійснення подальшого аналізу фундаментальних властивостей динамічних систем та з метою розширення використання досліджуваних математичних моделей у застосуванні різних видів автоматичного керування й регулювання.

ЛІТЕРАТУРА

1. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. Оценивание параметров и состояния. Москва : Мир, 1975. 680 с.
2. Hengl S., Kreutz C., Timmer J., Maiwald T. Data-based identifiability analysis of non-linear dynamical models. *Bioinformatics*. 2007, Vol. 23, No. 19. P. 2612–2618.
3. Гроп Д. Методы идентификации систем. Москва : Мир, 1979. 302 с.
4. Дейч А.М. Методы идентификации динамических объектов. Москва : Энергия, 1979. 240 с.
5. Дилигенская А.Н. Идентификация объектов управления : учебное пособие. Самара : Самар. гос. техн. ун-т., 2009. 136 с.
6. Семенов А.Д., Артамонов Д.В., Брюхачев А.В. Идентификация объектов управления : учебное пособие. Пенза : Пенз. гос. ун-т, 2003. 215 с.
7. Новиков С.И. Практическая идентификация динамических характеристик объектов управления теплоэнергетического оборудования : учеб. пособие. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2004. 64 с.
8. Шэнь К., Неусыпин К.А. Исследование критериев степеней наблюдаемости, управляемости и идентифицируемости линейных динамических систем. *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2016. № 17 (11). С. 723–731.
9. Балонин Н.А. Теоремы идентифицируемости. Санкт-Петербург : Политехника, 2010. 48 с.
10. Балонин Н.А. Новый курс теории управления движением. Санкт-Петербург : Изд-во СПб ун-та, 2000. 160 с.
11. Шумихин А.Г., Бояршинова А.С. Идентификация сложного объекта управления по частотным характеристикам, полученным экспериментально на его нейросетевой динамической модели. *Автоматика и телемеханика*. 2015. № 4. С. 125–134.
12. Лазарэв Ю.Ф., Бондар П.М. Основы теорії чутливих елементів систем орієнтації. Київ : Політех, 2010. 625 с.
13. Леонтьева В.В., Кондратьева Н.А. Вопросы методологии анализа, управления, регулирования, идентификации и наблюдения гироскопических систем. *Вісник Запорізького національного університету : збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*. 2017. № 2. С. 157–169.
14. Леонтьева В.В., Кондратьева Н.А. Керованість динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень. *Вісник Запорізького національного університету : збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*. 2019. № 2. С. 90–100.
15. Меркин Д.Р. Гироскопические системы. Москва : Наука, 1974. 344 с.
16. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. Москва : Наука, 1971. 312 с.
17. Новицкий В.В. Керування гіроскопічними системами та інші задачі аналітичної механіки. *Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування*. Київ : Інститут математики НАН України. 2008. Т. 78. 124 с.

18. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А.А. Красовского. Москва : Наука, 1987. 712 с.
19. Клейман Е.Г. Идентификации нестационарных объектов. *Автоматика и телемеханика*. 1999. № 10. С. 3–45.

REFERENCES

1. Eikkhoff P. (1975) *Osnovy identifikatsii sistem upravleniya. Otsenivaniye parametrov i sostoyaniya* [Control system identification basics. Parameters and state estimation]. Moscow: Mir. (in Russian).
2. Hengl S., Kreutz C., Timmer, J., Maiwald, T. (2007) Data-based identifiability analysis of non-linear dynamical models. *Bioinformatics*, vol. 23, no. 19, pp. 2612–2618.
3. Grope D. (1979) *Metody identifikatsii sistem* [Methods of identification systems]. Moscow: Mir. (in Russian).
4. Deitch A. M. (1979) *Metody identifikatsii dinamicheskikh obyektov* [Methods for the identification of dynamic objects]. Moscow, Energiya. (in Russian).
5. Diligenskaya A. N. (2009) *Identifikatsiya obyektov upravleniya* [Identification of the objects of control]. Samara: Samara State Technical University. (in Russian).
6. Semenov A. D., Artamonov D. V., Bryukhachev, A. V. (2003) *Identifikatsiya obyektov upravleniya* [Identification of the objects of control]. Penza: Publishing house Penza State University. (in Russian).
7. Novikov S. I. (2004) *Prakticheskaya identifikatsiya dinamicheskikh kharakteristik obyektov upravleniya teploenergeticheskogo oborudovaniya* [Practical identification of dynamic characteristics of heat power equipment control objects]. Novosibirsk: Publ. NGTU. (in Russian).
8. Shen K., Neusypin K. A. (2016) *Issledovaniye kriteriyev stepeney nablyudayemosti, upravlyayemosti i identifikatsionnosti lineynykh dinamicheskikh sistem* [Study of the Criteria for the Degrees of Observability, Controllability and Identifiability of the Linear Dynamical Systems]. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie* [Mechatronics, automation, control], no. 17 (11), pp. 723–731. (in Russian).
9. Balonin N. A. (2010) *Teoremy identifikatsionnosti* [Theorems of Identifiability]. Saint Petersburg: Politehnika. (in Russian).
10. Balonin N. A. (2000) *Novyy kurs teorii upravleniya dvizheniyem* [New Course on the Theory of Motion Control]. Saint Petersburg : Saint Petersburg State University. (in Russian).
11. Shumikhin A. G., Boiarshinova A. S. (2015) *Identifikatsiya slozhnogo obyektu upravleniya po chastotnym kharakteristikam, poluchennym eksperimental'no na yego neyrosetevoy dinamicheskoy modeli* [Application of neural network models for automated management of complex chemicalengineering system]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and telemechanics], no. 4, pp. 125–134. (in Russian).
12. Lazarev Yu. F., Bondar P. M. (2010) *Osnovy teorii chutlyvykh elementiv system oriyentatsiyi* [Fundamentals of the theory of sensitive elements of orientation systems]. Kiev: Polytech. (in Ukrainian).
13. Leontieva V. V., Kondratieva N. A. (2017) *Voprosy metodologii analiza, upravleniya, regulirovaniya, identifikatsii i nablyudeniya giroskopicheskikh sistem* [Questions about methodology of analysis, control, regulation, identification and observation of gyroscopic systems]. *Visnyk zaporiz'koho natsional'noho universytetu: zb. nauk. statey. Fizyko-matematychni nauky*. Zaporizhzhya: ZNU, no. 2, pp. 157–169. (in Russian).
14. Leontieva V. V., Kondratieva N. A. (2019) *Kerovanist' dynamichnoyi systemy z hiroskopichnoyu strukturoyu pry diyi dysypatyvnykh syl ta syl radial'noyi korektsiyi z urakhuvannyam pevnoho neliniynoho zmishanoho vydu zovnishnikh zburin'* [Controllability of a dynamical system with a gyroscopic structure under the action of dissipative forces and forces of radial correction with a certain nonlinear external disturbances of mixed type]. *Visnyk zaporiz'koho natsional'noho universytetu: zb. nauk. statey. Fizyko-matematychni nauky*. Zaporizhzhya: ZNU. no. 2, pp. 90–100. (in Ukrainian).
15. Merkin D. R. (1974) *Giroskopicheskiye sistemy* [Gyroscopic systems]. Moscow: Nauka. (in Russian).
16. Merkin D. R. (1971) *Vvedeniye v teoriyu ustoychivosti dvizheniya* [Introduction to Motion Stability Theory]. Moscow: Nauka. (in Russian).
17. Novitsky V. V. (2008) *Keruvannya hiroskopichnyimi systemamy ta inshi zadachi analitychnoyi mekhaniky* [Control of gyroscopic systems and other problems of analytical mechanics]. *Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*. Matematika ta yiyi zastosuvannya. Kiev: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, vol. 78. (in Ukrainian).
18. *Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravleniya* [A handbook on the theory of automatic control] (1987) / Ed. A.A. Krasovsky. Moscow: Nauka. (in Russian).
19. Kleiman E. G. (1999) *Identifikatsii nestatsionarnykh obyektov* [Identification of non-stationary objects]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and telemechanics], no. 10, pp. 3–45 (in Russian).

УДК 531.383

DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-07>

ЭВОЛЮЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕГО И ВОЗМУЩАЮЩЕГО МОМЕНТОВ СИЛ

Лещенко Д. Д.

*доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой теоретической механики
Одесская государственная академия строительства и архитектуры
ул. Дидрихсона, 4, Одесса, Украина
orcid.org/0000-0003-2436-221X
leshchenko_d@ukr.net*

Козаченко Т. А.

*кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры теоретической механики
Одесская государственная академия строительства и архитектуры
ул. Дидрихсона, 4, Одесса, Украина
orcid.org/0000-0001-9034-3776
kushpil.t.a@gmail.com*

Ключевые слова: *случай
Лагранжа, метод усреднения,
сопротивление среды.*

Анализ вращательных движений тел относительно неподвижной точки важен для решения задач космонавтики, входа летательных аппаратов в атмосферу, движения вращающегося снаряда, гироскопии. При этом во многих случаях в качестве порождающего движения твердого тела, учитываемого основные моменты сил, действующих на тело, может рассматриваться движение Лагранжа. Напомним, что в этом случае тело предполагается имеющим неподвижную точку и находящимся в поле силы тяжести, причем центр масс тела и неподвижная точка лежат на оси динамической симметрии тела. В работе исследуются возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, под действием восстанавливающего и возмущающего моментов сил, зависящих от медленного времени. Кроме того, величина восстанавливающего момента зависит от малого угла нутации. Рассматривается асимптотическое поведение решений системы уравнений движения при значениях малого параметра, отличных от нуля, на достаточно большом интервале времени. Для анализа нелинейной системы уравнений движения применяется метод усреднения. В отличие от процедуры усреднения по движению Эйлера-Пуансо, усреднение по движению Лагранжа позволяет нам рассматривать движение с немалыми по абсолютной величине моментами внешних сил как порождающее движение. Выделяются медленно и быстро меняющиеся переменные. Приведены условия возможности усреднения уравнений движения по фазе угла нутации и описана процедура усреднения для медленных переменных возмущенного движения твердого тела в первом приближении. С помощью метода усреднения уменьшается порядок системы с шести до трех, делая систему автономной и содержащей только медленно меняющиеся переменные. В качестве примера развитой методики рассматривается возмущенное движение, близкое к случаю Лагранжа, с учетом моментов сил, действующих на твердое тело со стороны внешней среды. Усредненная система интегрируется численно при разных начальных условиях и параметрах задачи. Исследован новый класс вращательных движений динамически симметричного твердого тела относительно неподвижной точки с учетом возмущающего и восстанавливающего моментов сил.

ЕВОЛЮЦІЯ РУХІВ ТВЕРДОГО ТІЛА ПІД ДІЄЮ НЕСТАЦІОНАРНИХ ВІДНОВЛЮЮЧОГО ТА ЗБУРЮЮЧОГО МОМЕНТІВ СИЛ

Лещенко Д. Д.

*доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри теоретичної механіки
Одеська державна академія будівництва та архітектури
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна
orcid.org/0000-0003-2436-221X
leshchenko_d@ukr.net*

Козаченко Т. О.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри теоретичної механіки
Одеська державна академія будівництва та архітектури
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна
orcid.org/0000-0001-9034-3776
kushpil.t.a@gmail.com*

Ключові слова: випадок
Лагранжа, метод
усереднення, опір середовища.

Аналіз обертальних рухів тіл навколо нерухомої точки важливий для розв'язування задач космонавтики, входу літальних апаратів в атмосферу, руху снаряда, що обертається, та гіроскопії. У багатьох випадках як породжувальний рух твердого тіла, що враховує основні моменти сил, які діють на тіло, може розглядатися рух у випадку Лагранжа. Нагадаємо, що в цьому випадку тіло має нерухому точку і знаходиться в полі сили ваги, причому центр мас тіла та нерухома точка розташовані на осі динамічної симетрії. У роботі досліджується рух динамічно симетричного твердого тіла навколо нерухомої точки під дією відновлюючого і збурюючого моментів сил, які повільно змінюються з часом. Крім того, величина відновлюючого моменту залежить від малого кута нутації. Ставиться задача дослідження асимптотичної поведінки розв'язків системи рівнянь руху твердого тіла при значеннях малого параметра, відмінних від нуля, на досить великому проміжку часу. Для аналізу нелінійної системи рівнянь руху застосовується метод усереднення. На відміну від процедури усереднення по руху Ейлера-Пуансо, усереднення по руху Лагранжа дає нам змогу розглядати рух із невеликими за абсолютною величиною моментами зовнішніх сил як породжувальний рух. Використовуючи низку перетворень, розділяємо змінні на повільні та швидкі. Наведені умови можливості усереднення рівнянь руху за фазою кута нутації. Одержана усереднена система рівнянь першого наближення для повільних змінних. За допомогою метода усереднення порядок системи зменшується з шести до трьох, що робить систему автономною та полегшує розв'язання задачі. Як приклад запропонованої методики розглянуто збурений рух, близький до випадку Лагранжа, під дією зовнішнього середовища. Усереднена система проінтегрована чисельно при різних початкових умовах і параметрах задачі. Під дією дисипативного моменту тіло прагне до стійкого нижнього положення рівноваги. Досліджено новий клас обертальних рухів динамічно симетричного твердого тіла з урахуванням відновлюючого і збурюючого моментів сил.

EVOLUTION OF MOTIONS OF A RIGID BODY UNDER THE ACTION OF UNSTEADY RESTORING AND PERTURBATION TORQUES OF FORCES

Leshchenko D. D.

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Head of the Department of Theoretical Mechanics
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
Didrikhsona str., 4, Odessa, Ukraine
orcid.org/0000-0003-2436-221X
leshchenko_d@ukr.net*

Kozachenko T. A.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Theoretical Mechanics
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
Didrikhsona str., 4, Odessa, Ukraine
orcid.org/0000-0001-9034-3776
kushpil.t.a@gmail.com*

Key words: *Lagrange's case, averaging method, resisting medium.*

The analysis of rotational motions of the bodies about a fixed point is important for solving the problems of astronautics, the problems of the entry of flying vehicles into the atmosphere, and the motion of a rotating projectile and gyroscopy. Moreover, in many cases, the motion in Lagrange case can be regarded as a generating motion of a rigid body, which takes into account the main torques acting on the body. Perturbed motion of a rigid body, close to the Lagrange case, under the action of restoring and perturbation torques that of forces are slowly varying in time is investigated in the work. Recall that in this case the body is assumed to have a fixed point and to be in the gravitational field, with the center of mass of the body lying on the dynamic symmetry axis of the body. The value of the restoring torques also depends on the small nutation angle. The problem is formulated of studying the behavior of the solution of system of equations of motion for the values of small parameter different from zero on a sufficiently large interval of time. To analyze a nonlinear system of equations of motion, the averaging method is used. In contrast to the procedure of averaging with respect to the Euler-Poinsot motion, averaging with respect to Lagrange motion permits us to examine the motion with external force torques, large in absolute value, as a generating motion. The problem can be decomposed into slowly and quickly changing variables. Conditions for the possibility of averaging the equations of motion with respect to the nutation phase angle are presented and averaging procedure for slow variables of a perturbed motion of a rigid body in the first approximation is described. The averaging technique reduces the system order from six to three, making the system autonomous, and contains only slowly changing variables. As an example of the developed procedure, we investigate a perturbed motion, close to Lagrange case, taking into account the torques acting on a rigid body from the external medium. The averaged system is integrated numerically for various initial conditions and parameters of the problem. A new class of rotational motions of a dynamically symmetric rigid body about a fixed point has been investigated with restoring and perturbation torques of forces being taken into account.

Введение. В теоретическом аспекте исследование эволюции движений твердого тела относительно неподвижной точки представляет интерес для специалистов в области теоретической механики. Они могут быть строго сформулированы в рамках динамических моделей твердого тела в случае Лагранжа, который является порождающим. Исследованию движения волчка Лагранжа с неподвижной точкой посвящен ряд работ [1; 2]. Уточнение исследуемых моделей проводится путем учета возмущающих факторов различной физической природы, как внутренних, так и внешних, а также соответствующих предположений относительно порождающего решения. Восстанавливающий момент сил, аналогичный моменту силы тяжести, создается также аэродинамическими силами, которые действуют на тело в потоке газа. Поэтому движения, близкие к случаю Лагранжа, рассматривались в работах по динамике неуправляемого тела в атмосфере, где учитывались восстанавливающий и возмущающие моменты различной природы [3]. Исследовалось движение вращающегося твердого тела в атмосфере под действием синусоидального или бигармонического аэродинамического момента, зависящего от времени, и малых возмущающих моментов [4].

Анализ состояния проблемы. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, исследованы в ряде работ [2; 5–18]. Обзор результатов по проблеме эволюции вращательных движений твердого тела, близких к случаю Лагранжа, дается в некоторых трудах [2; 5–10]. В работах [2; 5–9] приведены условия возможности усреднения уравнений движения тела, близких к случаю Лагранжа, по фазе угла нутации, получена усредненная система уравнений и рассмотрено движение тела в среде с линейной диссипацией. Исследованы возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, под действием момента сил, медленно изменяющегося во времени. Рассмотрены возмущенные вращения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, при разных порядках малости проекций вектора возмущающего момента сил. Исследована эволюция вращений тела, близких к регулярной прецессии, под действием нестационарного возмущающего момента и восстанавливающего момента, медленно изменяющегося во времени и зависящего от угла нутации.

Рассматривалось движение симметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки под действием сил трения, обусловленных внешней диссипативной средой [11]. Статья Б.П. Иващенко [12] посвящена исследованию движения симметричного волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в поле сил тяжести,

когда ось волчка отклонена от вертикали. Изучалось асимптотическое поведение движений волчка Лагранжа, близких к регулярным прецессиям, под действием малого возмущающего момента [13; 14].

В работе [15] была предпринята попытка применить предложенную в [2; 5] процедуру усреднения по движению Лагранжа для исследования движения динамически симметричного твердого тела под действием возмущающих моментов, гиристатического момента и ньютоновского силового поля.

Рассматривалось пространственное движение динамически симметричных спутников-гиростатов под действием внешнего магнитного момента сил, являющегося восстанавливающим (опрокидывающим) [16]. В этом смысле задача близка к случаю Лагранжа. В работе В.Г. Демина и Л.И. Конкиной [17] введены канонические переменные «действие-угол» для волчка Лагранжа. Исследованы периодические движения волчка Лагранжа при малом смещении его центра тяжести или при малом нарушении его осевой динамической симметрии. В работе Ю.М. Заболотнова [18] рассматриваются резонансы низших порядков при движении волчка Лагранжа с малой массовой асимметрией.

Цель и задачи исследования. Исследуется новый, по мнению авторов, класс задач, для которых возмущенное движение относительно неподвижной точки динамически симметричного тяжелого твердого тела происходит под действием восстанавливающего момента, зависящего от медленного времени $\tau = \varepsilon t$, изменяющегося на ограниченном (при $\varepsilon \rightarrow 0$) интервале времени, и малого угла нутации $\lambda = \varepsilon \theta$, а также возмущающего момента, зависящего от медленного времени. Здесь t – время, θ – угол нутации, ε – малый параметр, характеризующий величину возмущений. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= \mu(\tau, \lambda) \sin \theta \cos \varphi + \varepsilon M_1, \\ A\dot{q} + (A - C)pr &= -\mu(\tau, \lambda) \sin \theta \sin \varphi + \varepsilon M_2, \\ C\dot{r} &= \varepsilon M_3, \quad M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad i = 1, 2, 3, \\ \dot{\psi} &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, \quad \tau = \varepsilon t, \quad \lambda = \varepsilon \theta, \\ \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь p, q, r – проекции вектора угловой скорости на главные оси инерции тела, проходящие через неподвижную точку. Величины εM_i ($i = 1, 2, 3$) – проекции вектора возмущающего момента на те же оси, они зависят от медленного времени $\tau = \varepsilon t$, $\varepsilon \ll 1$; ψ, θ, φ – углы Эйлера; A – экваториальный, а C – осевой моменты инерции относительно неподвижной точки, $A \neq C$. Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент $\mu(\tau, \lambda)$, зависящий от двух медленных переменных: медленного времени τ

и переменной $\lambda = \varepsilon\theta$ (соответствующей малому углу нутации). Восстанавливающий момент является дифференцируемой функцией от двух переменных. При $\varepsilon = 0$ восстанавливающий момент не зависит от τ и λ , тогда $\mu_0 = \mu(0,0) = mgl$ (случай тяжелого волчка) и система (1) описывает движение в случае Лагранжа. Здесь m – масса тела, g – ускорение силы тяжести, l – расстояние от неподвижной точки до центра тяжести тела.

Ставится задача исследовать асимптотическое поведение решений системы (1) при значениях малого параметра ε , отличных от нуля, на достаточно большом интервале времени порядка ε^{-1} с помощью метода усреднения [19]. В работе Л.Д. Акуленко, Т.А. Козаченко, Д.Д. Лещенко [9] система уравнений (1) исследована для частного случая возмущенного движения быстро закрученного тела, близкого к волчку Лагранжа, когда две проекции вектора возмущающего момента малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья – одного с ним порядка.

Процедура усреднения. В дальнейшем применяется модифицированная процедура усреднения [2; 5]. Она используется для усреднения системы (1) по фазе угла нутации θ вдоль траекторий изменения $\theta(t)$ при движении тела под действием восстанавливающего и возмущающего моментов. Первыми интегралами для невозмущенной системы (1) при $\varepsilon = 0$ являются величины [1; 2]

$$\begin{aligned} G_z &= A \sin \theta (p \sin \varphi + q \cos \varphi) + Cr \cos \theta = c_1, \\ H &= \frac{1}{2} [A(p^2 + q^2) + Cr^2] + \mu \cos \theta = c_2, \quad r = c_3, \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь G_z – проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz , H – полная энергия тела, r – проекция вектора угловой скорости на ось динамической симметрии, $\mu = \mu_0 = \text{const}$, c_i , $i = 1, 2, 3$ – произвольные постоянные, причем $c_2 \geq -\mu$.

Используя соотношения (2) как формулы преобразования от переменных $(p, q, r, \psi, \theta, \varphi)$ к переменным $(G_z, H, r, \psi, \theta, \varphi)$, приведем первые три уравнения (1) к виду:

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= \varepsilon [(M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi) \sin \theta + M_3 \cos \theta], \\ \dot{r} &= \varepsilon C^{-1} M_3, \\ \dot{H} &= \varepsilon [(M_1 p + M_2 q + M_3 r) + \mu' \cos \theta], \\ M_i &= M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{d\mu(\tau, \lambda)}{dt} &= \varepsilon \frac{\partial \mu(\tau, \lambda)}{\partial \tau} + \varepsilon \dot{\theta} \cdot \frac{\partial \mu(\tau, \lambda)}{\partial \lambda}, \\ \mu' &= \frac{\partial \mu}{\partial \tau} + \dot{\theta} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \lambda}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и в трёх последних кинематических уравнениях (1) подразумевается, что переменные p, q, r при помощи (2) выражены как функции $G_z, H, r, \psi, \theta, \varphi, \tau$ и подставлены в (1), (3).

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений [19] $\dot{x} = \varepsilon X(x, y, t, \varepsilon)$, $\dot{y} = Y(x, y, t, \varepsilon)$. Здесь x, X – n -мерные, а y, Y – m -мерные векторные функции, ε – малый положительный параметр. Переменные x – медленные, так как $\dot{x} \sim \varepsilon$, а переменные y – быстрые (относительно x), поскольку $\dot{y} \sim 1$.

Правые части уравнений (3) содержат три быстрые переменные – углы собственного вращения φ , нутации θ и прецессии ψ , периодические по t . Это затрудняет применение метода усреднения (проблема резонанса). Для исключения этой трудности потребуем, чтобы выражения в правых частях уравнений (3) могли быть представлены как функции медленных переменных G_z, H, r и угла нутации θ , периодические по фазе угла θ с периодом 2π , и имели следующие структурные свойства возмущающего момента сил (см. соотношения для первых интегралов (2)):

$$\begin{aligned} M_1^* &= M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi, \quad M_2^* = M_1 p + M_2 q, \quad M_3^* = M_3, \\ M_i^* &= M_i^*(G_z, H, r, \tau, \theta), \quad i = 1, 2, 3, \\ M_i &= pf, \quad M_1 = qf, \quad M_3 = M_3^*, \quad f = f(G_z, H, r, \theta, \tau). \end{aligned} \quad (4)$$

Система (3) уравнений возмущенного движения твердого тела, близкого к случаю Лагранжа может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= \varepsilon F_1(G_z, H, r, \tau, \theta), \quad F_1 = M_1^* \sin \theta + M_3^* \cos \theta, \\ \dot{H} &= \varepsilon F_2(G_z, H, r, \tau, \theta), \quad F_2 = M_2^* + M_3^* r + \mu' \cos \theta, \\ \dot{r} &= \varepsilon F_3(G_z, H, r, \tau, \theta), \quad F_3 = C^{-1} M_3^*. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $F_i = F_i(G_z, H, r, \tau, \theta)$ ($i = 1, 2, 3$) – 2π -периодические функции фазы угла θ .

Известно выражение для угла нутации θ в невозмущенном движении Лагранжа как функции времени t , интегралов движения (2) и произвольной фазовой постоянной β [1; 2]:

$$\begin{aligned} u = \cos \theta &= u_1 + (u_2 - u_1) \text{sn}^2(\alpha t + \beta), \\ \dot{\theta} &= -\frac{\dot{u}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \alpha = \left[\frac{\mu(u_3 - u_1)}{2A} \right]^{1/2}, \\ \text{sn}(\alpha t + \beta) &= \sin \text{am}(\alpha t + \beta, k), \quad k^2 = (u_2 - u_1)(u_3 - u_1)^{-1}, \quad 0 \leq k^2 \leq 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\mu = \mu_0$, u – периодическая функция t с периодом $K(k)/\alpha$, $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода; sn и am – эллиптические синус и амплитуда [20], k – модуль эллиптических функций, u_1, u_2, u_3 – вещественные корни кубического многочлена

$$Q(u) = A^{-2} [(2H - Cr^2 - 2\mu u)(1 - u^2)A - (G_z - Cru)^2]. \quad (7)$$

Соотношения между его корнями и первыми интегралами (2) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &= \frac{H}{\mu} - \frac{Cr^2}{2\mu} + \frac{C^2 r^2}{2A\mu}, \quad u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3 = \frac{G_z Cr}{A\mu} - 1, \\ u_1 u_2 u_3 &= -\frac{H}{\mu} + \frac{Cr^2}{2\mu} + \frac{G_z^2}{2A\mu}, \quad -1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1 < u_3 < +\infty. \end{aligned} \quad (8)$$

Предполагается проводить исследование возмущенного движения в медленных переменных $u_i, i = 1, 2, 3$. Медленные переменные G_z, H, r удаётся выразить через u_i из (8) следующим образом:

$$\begin{aligned} G_z &= \delta_1 (\Omega + \delta_2 R)^{1/2} \delta_3, & r &= \delta_1 C^{-1} (\Omega - \delta_2 R)^{1/2}, \\ H &= \frac{1}{2} \mu_0 [(u_1 + u_2 + u_3)(1 + AC^{-1}) + (\delta_2 R - u_1 u_2 u_3)(1 - AC^{-1})], \\ R &= [(1 - u_1^2)(1 - u_2^2)(u_3^2 - 1)]^{1/2}, & \Omega &= u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3, & 0 \leq \{R, \Omega\}, \\ \delta_1 &= (A\mu_0)^{1/2} \text{sign } r, & \delta_2 &= \text{sign}(G_z^2 - C^2 r^2), \\ \delta_3 &= \text{sign}(1 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3). \end{aligned} \tag{9}$$

Величины δ_1 и δ_2 в начальный момент определяются по начальным условиям для G_z и r . Если в процессе движения одна или обе величины $G_z^2 - C^2 r^2$ и r проходят через нуль, то возможна смена знаков δ_1 и δ_2 , для определения которых можно воспользоваться исходной системой (5). После ряда преобразований искомая система уравнений для медленных переменных $u_i, i = 1, 2, 3$ принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= \varepsilon V_i(u_1, u_2, u_3, \tau, \lambda, \theta), & u_i(0) &= u_i^0, & i &= 1, 2, 3, \\ V_i &= V_{i1} F_1^* + V_{i2} F_2^* + V_{i3} F_3^* + V_{i4} \mu', \\ V_{ij} &= V_{ij}(u_1, u_2, u_3, \tau, \lambda), & j &= 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} V_{11} &= \frac{G_z - Cr u_1}{A\Delta}; & \mu &= \mu(\tau, \lambda), & \mu' &= \frac{\partial \mu}{\partial \tau} + \dot{\theta} \frac{\partial \mu}{\partial \lambda}; \\ V_{12} &= \frac{u_1^2 - 1}{\Delta}; & V_{13} &= \frac{C}{A\Delta} [Ar(1 - u_1^2) - u_1(G_z - Cr u_1)]; \\ V_{14} &= \frac{[A(u_1^2 - 1)(Cr^2 - 2H) - (G_z - Cr u_1)^2]}{2A\mu\Delta}; \\ \Delta &= \mu(u_1 - u_2)(u_1 - u_3), & \Delta &\neq 0. \end{aligned}$$

Здесь функции $V_{2j}, V_{3j}, j = 1, 2, 3, 4$ получаются из соответствующих выражений (10) для V_{ij} при $i = 1$ путем циклической перестановки индекса i в величинах u_i . Функции F_i^* получаются подстановкой в F_i из (5) выражений (9). Начальные значения для переменных u_i вычисляются по начальным данным G_z^0, H^0, r^0 при помощи соотношений (9).

Далее в правые части системы (10) подставим быструю переменную θ и ее производную $\dot{\theta}$ из выражения (6) для невозмущенного движения. Тогда правые части системы (10) будут периодическими функциями t с периодом $2K(k)/\alpha$, где величины k и α определены соотношениями (6) и являются медленными переменными. Усредняя правые части полученной системы по фазе угла нутации, получим в медленном времени $\tau = \varepsilon t$ усредненную систему первого приближения:

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{d\tau} &= U_i(u_1, u_2, u_3, \tau, \lambda), & u_i(0) &= u_i^0, & i &= 1, 2, 3, \\ U_i &= \frac{\alpha}{2K(k)} \int_0^{2K/\alpha} V_i(u_1, u_2, u_3, \tau, \lambda, \theta(t)) dt. \end{aligned} \tag{11}$$

После исследования и решения системы (11) для u_i медленные переменные G_z, H, r восстанавливаются по формулам (9).

Результаты исследований. В качестве примера развитой методики рассмотрим возмущенное движение, близкое к случаю Лагранжа, под действием внешней среды. Возмущающие моменты $\varepsilon M_i, i = 1, 2, 3$ имеют вид [21]:

$$\begin{aligned} M_1 &= -a(\tau)p, & M_2 &= -a(\tau)q, \\ M_3 &= -b(\tau)r, & a(\tau), b(\tau) &> 0, & \tau &= \varepsilon t. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $a(\tau), b(\tau)$ – интегрируемые функции, зависящие от свойств среды и формы тела. Моменты (12) удовлетворяют условиям (4) возможности усреднения по фазе угла нутации θ . Система (3) при данных возмущениях записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= -\varepsilon [a(\tau)(p \sin \varphi + q \cos \varphi) \sin \theta + b(\tau)r \cos \theta], \\ \dot{H} &= -\varepsilon [a(\tau)(p^2 + q^2) + b(\tau)r^2 + \mu' \cos \theta], \\ \dot{r} &= -\varepsilon C^{-1} b(\tau)r. \end{aligned} \tag{13}$$

Проинтегрировав третье уравнение (13), получим (r^0 – произвольное начальное значение осевой скорости вращения):

$$r = r^0 \exp(-\varepsilon C^{-1} \int_0^t b(\varepsilon t) dt). \tag{14}$$

Согласно процедуре п. 4 переходим к новым медленным переменным и получим усредненную систему (11) с учетом возмущающих моментов (12) вида:

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{d\tau} &= \frac{-1}{\Delta} \{ a(\tau) A^{-1} [A^{-1} (G_z - Cr u_i)(G_z - Cr v) + \\ &+ (u_i^2 - 1)(2H - Cr^2 - 2\mu_0 v)] + A^{-1} b(\tau) r (G_z - Cr u_i)(v - u_i) - \\ &- \frac{\partial \mu(\tau, \lambda)}{\partial \tau} [u_i^2 - 1] \left(v + \frac{1}{2\mu} (Cr^2 - 2H) \right) - \frac{1}{2A\mu} (G_z - Cr u_i)^2 \} \\ v &= u_3 - (u_3 - u_i) E(k) / K(k). \end{aligned} \tag{15}$$

Символ (123) означает, что уравнения для u_2, u_3 получаются из уравнения (15) для u_1 циклической перестановкой индексов 1, 2, 3. Однако при этой перестановке выражения для v , где $K(k), E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода [20], следует оставить неизменными во всех трех уравнениях. Вместо G_z, H, r, k подставляются их выражения из (6), (9).

Рассмотрим случай, когда функции $a(\tau), b(\tau), \mu(\tau, \lambda)$ имеют удобный для анализа вид:

$$\begin{aligned} a(\tau) &= a_0 + a_1 \tau, & b(\tau) &= b_0 + b_1 \tau, \\ \mu &= \mu(\tau, \lambda) = \mu_0 + \mu_1 (\tau + 2A \cos \lambda), \\ \{a_0, a_1, b_0, b_1, \mu_0, \mu_1\} &= \text{const}, \\ a_0 > 0, b_0 > 0, \mu_0 > 0, a_1 \geq 0, b_1 \geq 0, \mu_1 \geq 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Усреднённая система (15) с учетом (16) проинтегрирована численно для $\tau \geq 0$ при различных начальных условиях и параметрах задачи. Предполагается, что в начальный момент времени

$t = 0$ волчок Лагранжа получил угловую скорость вращения вокруг оси динамической симметрии, равную r^0 и отклонение на угол θ^0 от вертикали. Принимаем, кроме того, $A = 1.8$, $C = 1$, $\mu_0 = 0.8$, $\mu_1 = 0.01$, $a_0 = 0.125$, $b_0 = 0.1$, $\varepsilon = 0.1$, $a_1 = b_1 = 1$, $u_2^0 = \cos \theta^0$.

Рассмотрим два случая, соответствующие начальным данным (табл. 1).

Таблица 1

Начальные значения u_1, u_2, u_3, θ, r

Случай	u_1^0	u_2^0	u_3^0	θ^0	r^0
1	-0.089	0.866	1.13	30°	1.73
2	-0.485	0.819	1.07	35°	1.3

Величины G_z, H, r находим по формулам (9) используя значения u_i , найденные в результате численного интегрирования.

Обсуждение результатов. На рис. 1–4 изображены графики функций G_z, H, r, u_i ($i = 1, 2, 3$) для рассмотренных случаев. Полная энергия тела H , проекция вектора кинетического момента на вертикаль G_z и угловая скорость вращения относительно оси динамической симметрии r убывают.

Величина u_3 достаточно быстро асимптотически стремится к единице. Переменные u_1 и u_2 монотонно убывают и стремятся к -1 . При этом, как следует из первого равенства (3), имеем $\cos \theta \rightarrow -1$ при $\theta \rightarrow \pi$. Полная энергия H монотонно убывает, асимптотически приближаясь к значению $H = -0.8$.

Выводы. При сравнении полученных результатов с результатами [2; 5], где μ и M_i не зависят от медленного времени τ и [6], где M_i медленно изменяется во времени, можно отметить их ясное механическое содержание. Зависимость восстанавливающего момента от медленного времени и малого угла нутации и возмущающего момента от времени τ приводит к появлению в усредненной системе уравнений для медленных переменных функций $a(\tau), b(\tau)$ и $\mu(\tau, \lambda)$, зависящих от медленного времени и малого угла нутации, которые при численном интегрировании сглаживают поведение u_i ($i = 1, 2, 3$), G_z, H . Под действием диссипативного момента (12) тело стремится к устойчивому нижнему положению равновесия быстрее, чем в рассмотренных случаях [2; 5; 6], что следует из задания коэффициентов (16).

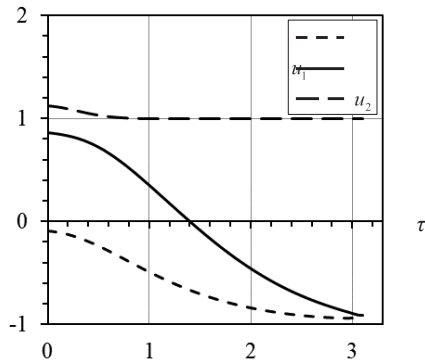


Рис. 1. Графики u_1, u_2, u_3 (случай 1)

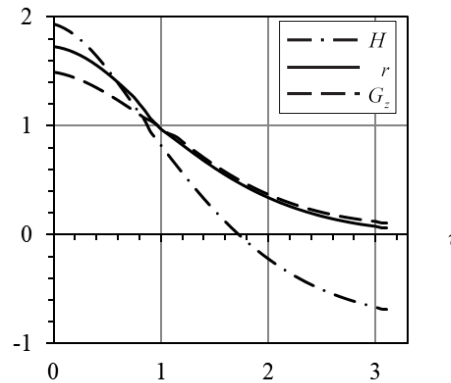


Рис. 2. Графики H, r, G_z (случай 1)

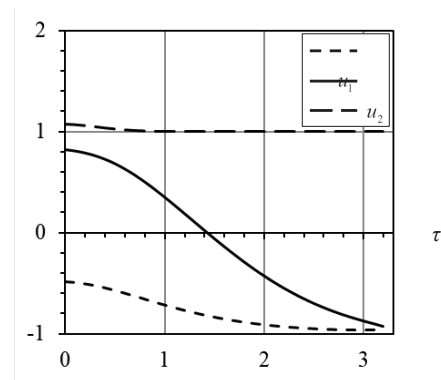


Рис. 3. Графики u_1, u_2, u_3 (случай 2)

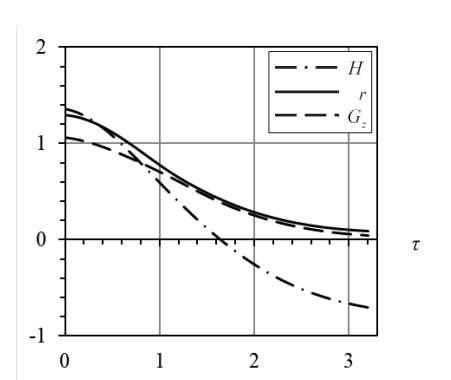


Рис. 4. Графики H, r, G_z (случай 2)

Корректность счета подтверждается тем, что полученные по численным данным и формулам (9) значения r практически совпадают с точным решением (14).

Таким образом, решена конкретная задача динамики твердого тела, имеющая значение для приложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Суслов Г.К. Теоретическая механика. Москва; Ленинград : Гостехиздат, 1946. 655 с.
2. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Cham : Springer, 2017. 241 p.
3. Кузмак Г.Е. Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. Москва : Наука, 1970. 348 с.
4. Aslanov V.S. Rigid Body Dynamics for Space Applications. Oxford : Butterworth-Heinemann, 2017. 400 p.
5. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа. *Прикладная математика и механика*. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 771–778.
6. Акуленко Л.Д., Зинкевич Я.С., Козаченко Т.А., Лещенко Д.Д. Эволюция движений твердого тела, близких к случаю Лагранжа, под действием нестационарного момента сил. *Прикладная математика и механика*. 2017. Т. 81. Вып. 2. С. 115–122.
7. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. 1986. № 5. С. 3–10.
8. Akulenko L., Leshchenko D., Kushpil T., Timoshenko I. Problems of evolution of rotations of a rigid body under the action of perturbing moments. *Multibody System Dynamics*. 2001. Vol. 6, No. 1. P. 3–16.
9. Акуленко Л.Д., Козаченко Т.А., Лещенко Д.Д. Эволюция вращений твердого тела под действием восстанавливающего и управляющего моментов. *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2002. № 6. С. 32–38.
10. Ershkov S.V., Leshchenko D.D. On a new type of solving procedure for Euler-Poisson equations (rigid body rotation over a fixed point). *Acta Mechanica*. 2019. Vol. 230, No. 3. P. 871–883.
11. Simpson H.C., Gunzburger M.D. A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction. *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik*. 1986. Vol. 37. No. 6. P. 867–894.
12. Иващенко Б.П. О движении симметричного волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью. *Докл. АН УССР. Сер. А*. 1976. № 9. С. 794–797.
13. Сазонов В.В., Сидоренко В.В. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярным прецессиям Лагранжа. *Прикладная математика и механика*. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 951–957.
14. Sidorenko V.V. Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium. *Journal of Nonlinear Science*. 1994. Vol. 4. P. 35–57.
15. Amer W. S. The dynamical motion of a gyroscope subjected to applied moments. *Results in Physics*. 2019. Vol. 12. P. 1429-1435.
16. Doroshin A.V. Analytical solutions for dynamics of dual-spin spacecraft and gyrostat-satellites under magnetic attitude control in omega-regimes. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2017. Vol. 96. P. 64–74.
17. Демин В.Г., Конкина Л.И. Новые методы в динамике твердого тела. Фрунзе: Илим, 1989. 182с.
18. Заболотнов Ю.М. Резонансные движения статически устойчивого волчка Лагранжа. *Прикладная математика и механика*. 2019. Т. 83. Вып. 4. С. 615–635.
19. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Москва : Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
20. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва : Наука, 1971. 1108 с.
21. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: аналитические методы. Москва : Наука, 1985. 288 с.

REFERENCES

1. Suslov G. K. (1946). *Teoreticheskaya mekhanika* [Theoretical mechanics]. Moscow-Leningrad: Gostekhizdat.
2. Chernousko F. L., Akulenko L. D., Leshchenko, D. D. (2017). Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Cham: Springer.
3. Kuzmak G. E. (1970). *Dinamika neupravlyаемого dvizheniya letatel'nykh apparatov pri vkhode v atmosferu* [The Dynamics of the Uncontrolled Motion of a Vehicle during Atmospheric Re-Entry]. Moscow: Nauka. (in Russian).

4. Aslanov V. S. (2017). *Rigid Body Dynamics for Space Applications*. Oxford: Butterworth-Heinemann.
5. Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Chernousko, F. L. (1979). *Vozmushchennye dvizheniya tverdogo tela, blizkie k sluchayu Lagranzha* [Perturbed motions of a rigid body, close to the Lagrange case]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 43, no. 5, pp. 829–837.
6. Akulenko, L. D., Zinkevich, Ya. S., Kozachenko, T. A. & Leshchenko, D. D. (2017). The evolution of motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 82, no. 2, pp. 79–84.
7. Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Chernousko, F. L. (1986). Perturbed motion of a rigid body, that are close to regular precession. *Mechanics of Solids*, vol. 21, no. 5, pp. 1–8.
8. Akulenko L., Leshchenko D., Kushpil T., Timoshenko, I. (2001). Problems of evolution of rotations of a rigid body under the action of perturbing moments. *Multibody System Dynamics*, vol. 6, no. 1, pp. 3–16.
9. Akulenko L. D., Kozachenko T. A., Leshchenko D. D. (2002). Evolution of rotations of a rigid body under the action of restoring and control moments. *Journal of Computer and System Sciences International*, vol. 41, no. 5, pp. 868–874.
10. Ershkov S. V., Leshchenko D. (2019). On a new type of solving procedure for Euler-Poisson equations (rigid body rotation over a fixed point). *Acta Mechanica*, vol. 230, no. 3, pp. 871–883.
11. Simpson H. C., Gunzburger M. D. (1986). A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction. *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik*, vol. 37, no. 6, pp. 867–894.
12. Ivashchenko B. P. (1976). *O dvizhenii simmetrichnogo volchka s polost'yu, zapolnennoy vyazkoy zhidkost'yu* [On the motion of a symmetric gyroscope with a cavity filled with viscous fluid]. *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR. Ser. A*, no. 9, pp. 794–797 (in Russian).
13. Sazonov V. V., Sidorenko V. V. (1990). The perturbed motions of a solid close to regular Lagrangian precessions. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 54, no. 6, pp. 781–787.
14. Sidorenko V. V. (1994). Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium. *Journal of Nonlinear Science*, vol. 4, pp. 35–57.
15. Amer W. S. (2019). The dynamical motion of a gyroscope subjected to applied moments. *Results in Physics*, vol. 12, pp. 1429–1435.
16. Doroshin A. V. (2017). Analytical solutions for dynamics of dual-spin spacecraft and gyrostatt-satellites under magnetic attitude control in omega-regimes. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 96, pp. 64–74.
17. Demin V. G., Konkina L. I. (1989). *Novye metody v dinamike tverdogo tela* [New Methods in Dynamics of a Rigid Body]. Frunze: Ilim (in Russian).
18. Zabolotnov Yu. M. (2019). Resonant motions of the statically stable Lagrange spinning top. *Mechanics of Solids*, vol. 54, no.5, pp. 652–658.
19. Volosov V. M., Morgunov B. I. (1971). *Metod osredneniya v teorii nelineynykh kolebatel'nykh sistem* [Method of Averaging in the Theory of Non-linear Oscillatory Systems]. Moscow: Moscow State Univer. (in Russian).
20. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. (2000). *Tables of Integrals, Sums, Series and Products*, Academic Press, San Diego, CA.
21. Koshlyakov V. N. (1985). *Zadachi dinamiki tverdogo tela i prikladnoy teorii giroskopov: Analiticheskie metody* [Problems in Rigid Body Dynamics and the Applied Theory of Gyroscopes: Analytical Methods]. Moscow: Nauka (in Russian).

МЕТОД НАПІВДИСКРЕТИЗАЦІЇ ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОГРАМНОГО УПРАВЛІННЯ СИСТЕМАМИ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Невлюдов І. Ш.

*доктор технічних наук, професор,
завідувач кафедри комп'ютерно-інтегрованих технологій, автоматизації та мехатроніки
Харківський національний університет радіоелектроніки
пр. Науки, 14, Харків, Україна
orcid.org/0000-0002-9837-2309
igor.nevliudov@nure.ua*

Ромашов Ю. В.

*доктор технічних наук, доцент,
професор кафедри комп'ютерно-інтегрованих технологій, автоматизації та мехатроніки
Харківський національний університет радіоелектроніки
пр. Науки, 14, м. Харків, Україна,
професор кафедри прикладної математики
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майд. Свободи, 4, Харків, Україна
orcid.org/0000-0001-8376-3510
yu.v.romashov@gmail.com*

Ключові слова: *перехідний процес, керованість, дискретизація, теплопровідність, обчислювальний розв'язок.*

У статті розглянуто використання методу напівдискретизації для оптимізації програмного управління системами з розподіленими параметрами. Метою методу напівдискретизації (також відомого як метод прямих) у статті є не розв'язування початково-крайової задачі, що становить систему з розподіленими параметрами, а зведення цієї початково-крайової задачі до початкової задачі, що становить дискретну апроксимацію досліджуваної розподіленої системи, для подальшого розв'язування задачі оптимізації програмного управління відомими методами, наприклад, на основі принципу максимуму Понтрягіна. Оптимізація процесу нагрівання плоскої стінки з урахуванням обмежень міцності розглядається як приклад використання запропонованого підходу. У цьому прикладі необхідно визначити програму нагріву, яка дасть змогу збільшити температуру плоскої стінки від нижчого заданого значення до більшого заданого значення протягом мінімального часу з урахуванням обмежень міцності, щоб виключити руйнування цієї плоскої стінки через температурні напруження, що виникають у процесі нагріву внаслідок різних температур на крайових поверхнях. Розглядається випадок програми управління температурою нагрівання на одній крайній поверхні й ураховується теплова ізоляція іншої крайньої поверхні плоскої стінки. Теплопровідність розглядається як нестационарний розподілений уздовж товщини плоскої стінки процес, математична модель якого представлена відомим рівнянням теплопровідності, яке є диференціальним рівнянням у частинних похідних, що має розглядатися з необхідними початковими й граничними умовами. Методом напівдискретизації одержано дискретну апроксимацію рівняння теплопровідності плоскої стінки та сформульовано задачу щодо керованості відповідної системи звичайних диференціальних рівнянь. Для розв'язання цієї задачі керованості введено додаткове диференціальне рівняння для управління й за результатами багаторазового інтегрування відповідних звичайних диференціальних рівнянь визначено оптимальну програму нагрівання плоскої стінки.

THE SEMI-DISCRETISATION METHOD FOR OPTIMIZING THE PROGRAM CONTROL OF DISTRIBUTED PARAMETERS SYSTEMS

Nevliudov I. Sh.

*Doctor of Technical Sciences, Professor,
Head of the Department of Computer-Integrated Technologies, Automation and Mechatronics
Kharkiv National University of Radio Electronics
14 Nauky Ave., Kharkiv, Ukraine
orcid.org/0000-0002-9837-2309
igor.nevliudov@nure.ua*

Romashov Yu. V.

*Doctor of Engineering Science, Docent,
Professor at the Department of Computer-Integrated Technologies, Automation and Mechatronics
Kharkiv National University of Radio Electronics
14 Nauky Ave., Kharkiv, Ukraine,
Professor at the Department of Applied Mathematics
V. N. Karazin Kharkiv National University
4 Svobody Sq., Kharkiv, Ukraine
orcid.org/0000-0001-8376-3510
yu.v.romashov@gmail.com*

Key words: *transition modes, controllability, discretisation, heat conduction, numerical solving.*

Using the semi-discretisation method for optimising the program control of distributed parameters systems is considered. The semi-discretisation method (also well-known as the method of lines) is used not to solve the initial-boundary-value problem representing the distributed parameters system, but to reduce this initial-boundary-value problem to the initial-value problem such that to represent the discretisation of the researched distributed parameters system and to solve the problem about optimising the program control by using the well-known methods like the Pontryagin's maximum principle for example. Optimising of heating processes of the planar wall taking into account the strength restrictions is considered as application example of using the proposed approach. This example deals with defining the heating program which will allow increasing the given smaller temperature to the given higher temperature of the planar wall during the minimum time considering with the strength restrictions due to the thermal stresses occurring under the heating process accompanying by the different temperatures of the wall's edges. The control program for the heating temperature on one edge under the heat isolation of the other edge of the planar wall is considered. The heat conduction in the planar wall is considered as the unsteady and spacial distributed process, and the mathematical model of this process is represented using the well-known heat conduction equation which is the partial differential equation must be considered with initial and boundary conditions. The discrete approximation of the heat conduction equation for the planar wall is obtained by using the semi-discretisation method, and the controllability problem for the corresponding ordinal differential equations is formulated. It is built the additional ordinary differential equation for defining the control to solve this controllability problem and the optimal control of heating the planar wall is constructed by means of many time numerical integrating of these built ordinary differential equations.

Постановка проблеми в загальному вигляді.

Програмне управління використовується переважно для автоматизованої або автоматичної зміни стану в процесі експлуатації об'єктів автоматизації з урахуванням притаманних таким об'єктам обмежень. Проблема оптимізації програмного управління пов'язана з глобальними завданнями підвищення ефективності експлуатації технічних об'єктів і систем різного призначення, наприклад, за рахунок забезпечення більш високої якості продукції [1] і зменшення витрат часу або споживаної енергії [2], зменшення вичерпання ресурсу устаткування [3]. Проблема оптимізації програмного управління системами з розподіленими параметрами є більш складною, ніж для дискретних систем, і розв'язання цієї проблеми вважається сьогодні однією з найголовніших для вдосконалення автоматизації сучасних виробничих комп'ютерно-інтегрованих систем [4; 5].

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Найбільш дослідженими та розробленими сьогодні є питання щодо керованості дискретних систем [6–8], саме які і є теоретичною основою оптимізації програмного керування такими системами. Водночас питання керованості щодо систем із розподіленими параметрами сьогодні є вивченими недостатньо повно, тому інтенсивно вивчаються [9–11].

Формулювання мети дослідження. Метод напівдискретизації, відомий також як метод прямих [12], полягає у використанні методу сіток виключно щодо просторових змінних для зведення вихідних диференціальних рівнянь у частинних похідних до звичайних диференціальних рівнянь, які можна розв'язати за допомогою високоефективних методів покрокового інтегрування. Цей метод використовують зазвичай для наближеного аналізу систем із розподіленими параметрами при розв'язуванні технічних питань [13; 14], але можливе його використання для апроксимації задач керованості систем із розподіленими параметрами [15]. Метою дослідження є розроблення узагальненого підходу щодо оптимізації програмного управління системами з розподіленими параметрами на основі поєднання методу напівдискретизації та добре розроблених методів розв'язування задач керованості дискретних систем.

Математичне формулювання задачі. Система з розподіленими параметрами в кожний момент часу $t \geq t_0$, де $t_0 \geq 0$ – заданий момент часу, розглядається як задана сукупність нескінченного кількості точок в евклідовому не більш ніж тривимірному просторі E . Положення точок системи відносно заданої точки простору визначаємо за допомогою радіус-векторів \vec{r} , що належать векторному простору \vec{E} , який породжується про-

стором E . Отже, система з розподіленими параметрами представляється у вигляді сукупності точок \vec{r} , які займають ділянку \vec{Y} з границею \vec{u} , де $\vec{Y} \subset \vec{E}$, $\vec{u} \subset \vec{Y}$.

Стан досліджуваної системи з розподіленими параметрами визначаємо за допомогою вектора $\vec{x} = \vec{x}(\vec{r}, t)$, а програму управління цієї системи – відповідно, вектора $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$, де $\vec{r} \in \vec{Y}$, які мають належати до певних функціональних просторів, узгоджених зі змістом задачі, що розглядається. Математичні моделі систем із розподіленими параметрами можуть бути представлені у вигляді диференціальних рівнянь із частинними похідними, початковими, а також граничними умовами, які в узагальненому вигляді можна записати так:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}), \quad \vec{x}(\vec{r}, t_0) = \vec{x}_0(\vec{r}) \quad \forall \vec{r} \in \vec{C}_{r,u}, \quad (1)$$

$$\vec{p}(\vec{x}, \vec{u}) = \vec{0}, \quad \forall \vec{r} \in \vec{u}, \quad (2)$$

де $\vec{f}(\vec{x}, \vec{u})$ – заданий закон швидкості зміни стану системи; $\vec{x}_0(\vec{r})$ – заданий стан системи в момент часу $t = t_0$; $\vec{C}_{r,u}$ – доповнення \vec{u} до \vec{Y} , яке становить частину ділянки \vec{Y} , що не належить до її границі \vec{u} ; $\vec{p}(\vec{x}, \vec{u})$ – заданий закон стану системи в граничних точках; $\vec{0}$ – нульовий елемент відповідного функціонального простору.

Позначимо множину \vec{U} програм управління $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$ таких, що для $\forall \vec{u} \in \vec{U}$ існує єдиний розв'язок $\vec{x} = \vec{x}(\vec{r}, t)$ задачі (1), (2), і далі розглядаємо тільки програми управління $\vec{u} \in \vec{U}$. Нехай $\vec{x}_1(\vec{r})$ – заданий стан системи. Уважаємо, що для цього заданого стану $\vec{x}_1(\vec{r})$ системи існує підмножина $\vec{U}_1 \subset \vec{U}$ програм управління $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$, для кожного елемента якої існує відповідний йому момент часу $t_1 > t_0$, у якому розв'язок задачі (1), (2) задовольняє умові $\vec{x}(\vec{r}, t_1) = \vec{x}_1(\vec{r})$. Задача оптимізації програмного управління полягає в тому, щоб для заданого стану $\vec{x}_1(\vec{r})$ системи знайти таку програму управління $\vec{u} \in \vec{U}_1$, щоб різниця $t_1 - t_0$ була мінімальною при виконанні додаткових обмежень:

$$\vec{Q}(\vec{x}, \vec{u}) \geq 0, \quad (3)$$

де $\vec{Q}(\vec{x}, \vec{u})$ – деякий заданий функціонал.

Використання методу напівдискретизації. Відповідно до методу напівдискретизації [12], у досліджуваній ділянці \vec{Y} з границею \vec{u} вводимо сітку:

$$\vec{r}_k \in \vec{Y}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

де \vec{r}_k – вузол сітки; n – кількість вузлів сітки.

Завдяки введеній сітці (4) маємо можливість, замість неперервних функцій $\vec{x} = \vec{x}(\vec{r}, t)$ та $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$, розглядати вузлові значення, які визначатимуть стан системи і програму управління:

$$\vec{x}_k(t) = \vec{x}(\vec{r}_k, t), \quad \vec{u}_k(t) = \vec{u}(\vec{r}_k, t), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

З використанням відомих формул обчислювального диференціювання й методу сіток (скінченних різностей), замість диференціальних рівнянь, у частинних похідних (1), (2) одержимо звичайні диференціальні рівняння з початковою умовою:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (6)$$

де

$\mathbf{x} = (\tilde{\mathbf{x}}_1^T \ \tilde{\mathbf{x}}_2^T \ \dots \ \tilde{\mathbf{x}}_n^T)^T$, $\mathbf{u} = (\tilde{\mathbf{u}}_1^T \ \tilde{\mathbf{u}}_2^T \ \dots \ \tilde{\mathbf{u}}_n^T)^T$ – вектори вузлових значень; $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ – дискретна апроксимація заданого закону $\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$ швидкості зміни стану системи; \mathbf{x}_0 – вектор вузлових значень у момент часу $t = t_0$.

Таким же чином за допомогою техніки скінченних різностей одержимо дискретну апроксимацію умови (3):

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq 0, \quad (7)$$

де $Q(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ – деякий функціонал, що становить дискретну апроксимацію заданого функціоналу $\tilde{Q}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$ з умови (3).

Отже, за допомогою методу напівдискретизації вихідна система з розподіленими параметрами (1), (2) представлена дискретною апроксимацією (6), що дасть змогу використовувати добре розроблені методи оптимізації програмного управління дискретними системами. Так, наприклад, без урахування додаткової умови (7) можемо використовувати відомий принцип максимуму [6]. У разі лінійного закону $\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$ швидкості зміни стану системи рівняння (6) набуде найпростішого вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (8)$$

де \mathbf{A} та \mathbf{B} – задані матриці.

Приклад використання запропонованого підходу щодо оптимізації програмного управління нагрівом пластини. Розглянемо як приклад модельну задачу оптимізації програмного

управління нагрівом тонкої однорідної пластини з урахуванням обмежень щодо міцності. Уважаємо, що в пластини (рис. 1а) розмір l уздовж осі z , $0 \leq z \leq l$ набагато менший за інші розміри. Ураховуємо тільки теплові потоки уздовж осі z та такої пластини визначатимемо полем температури $T = T(z, t)$; поверхню $z = l$ пластини вважаємо теплоізолюваною. Спочатку в момент часу $t = t_0$ пластини мала задану температуру $T_{(0)} = const$ і температуру пластини варто підвищити до заданого значення $T_{(1)} = const$ шляхом зміни температури $u(t)$ її поверхні $z = 0$. Необхідно знайти закон зміни в часі температури $u(t)$, який забезпечує найшвидший нагрів пластини за умови виконання обмеження її міцності:

$$u(t) - T(l, t) \leq \frac{2[\sigma]}{E\alpha}, \quad (9)$$

де $u(t) \leq T(l, t)$ за змістом задачі; $[\sigma]$, E та α – задані допустимі напруження, модуль Юнга та коефіцієнт температурного розширення матеріалу пластини.

Походження обмеження міцності (9) не є темою дослідження, але зазначимо, що нерівність (9) відповідає обмеженню температурних напружень в однорідній пластині із закріпленими поверхнями $z = 0$ та $z = l$. Закон зміни $u(t)$ температури поверхні $z = 0$ розглядаємо як програму управління станом пластини, тоді температурний стан пластини, відповідний програмі управління $u(t)$, визначається так [15]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad T(z, t_0) = T_{(0)}, \quad 0 < z < l, \quad (10)$$

$$T(0, t) = u(t), \quad \frac{\partial T(l, t)}{\partial z} = 0, \quad (11)$$

де a – коефіцієнт температуропровідності матеріалу пластини.

Зрозуміло, що система (10), (11) із розподіленими параметрами є окремим випадком узагальненої математичної моделі (1), (2), у якому

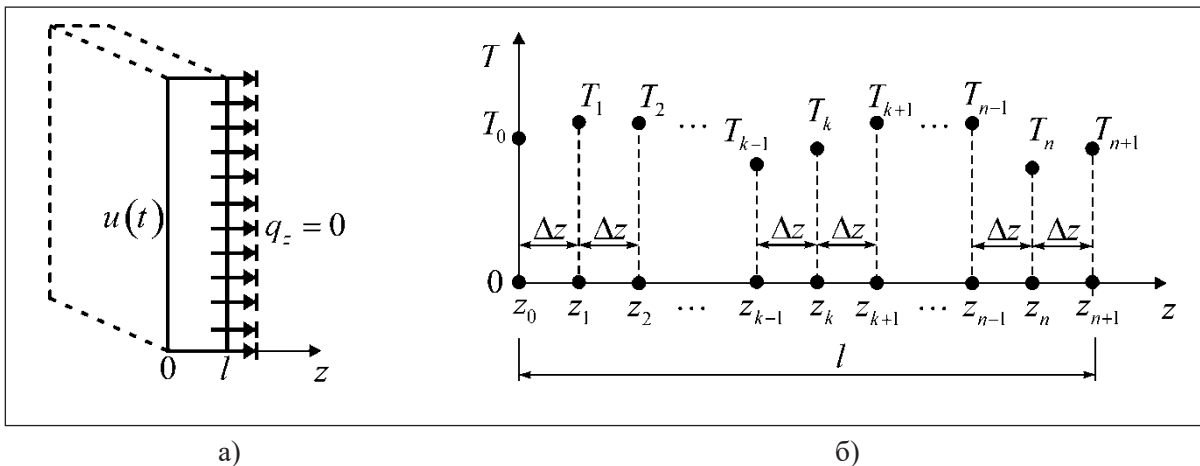


Рис. 1. Пластина (а) та дискретизація її температурного поля (б)

ділянці Υ відповідає відрізок $0 \leq z \leq l$, а границі υ – точки $z = 0$ та $z = l$; вектори $\tilde{\mathbf{x}}$ та $\tilde{\mathbf{u}}$ при цьому зводяться до температури $T(z, t)$ в точках пластини й температури $u(t)$ її поверхні $z = 0$, а обмеження (9) є окремим випадком обмеження (3) загального вигляду. Для розв'язування сформульованої задачі (10), (11), відповідно до методу напівдискретизації, уводимо в ділянки $0 \leq z \leq l$ сітку з кількістю n «внутрішніх» вузлів (рис. 16), які визначаються так:

$$z_k = k\Delta z, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, n+1, \quad (12)$$

де $\Delta z = \frac{l}{n+1}$ – крок сітки.

Використовуємо такі формули обчислювального диференціювання:

$$\frac{\partial^2 T_k}{\partial z^2} \approx \frac{T_{k-1} - 2T_k + T_{k+1}}{\Delta z^2}, \quad \frac{\partial T_k}{\partial z} \approx \frac{3T_k - 4T_{k-1} + T_{k-2}}{2\Delta z}. \quad (13)$$

Друга формула (13) разом із другою граничною умовою (11) дає змогу записати:

$$T_{n+1} = \frac{4}{3}T_n - \frac{1}{3}T_{n-1}. \quad (14)$$

Першу формулу (13) використовуємо у «внутрішніх» вузлах $k = 1, 2, \dots, n$, за допомогою виразу (14) виключаємо з розгляду температуру T_{n+1} у рівнянні для вузла $k = n$. У результаті одержимо дискретну апроксимацію рівнянь (10), (11) у вигляді (8), у якому:

$$\mathbf{x} = (T_1 \quad T_2 \quad \dots \quad T_n)^T, \quad \mathbf{x}_0 = (T_{(0)} \quad T_{(0)} \quad \dots \quad T_{(0)})^T, \quad \mathbf{u} = (u),$$

$$\mathbf{A} = \frac{a}{\Delta z^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{a}{\Delta z^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Для побудови програми управління диференціальні рівняння (15) будемо розглядати разом із додатковими диференціальними рівняннями:

$$\frac{du}{dt} = F(t, u, T_1, T_2, \dots, T_{n+1}), \quad u(t_0) = T_{(0)} + \frac{2\sigma_T}{E\alpha}, \quad (16)$$

$$\frac{dT_{n+1}}{dt} = \frac{4}{3} \frac{dT_n}{dt} - \frac{1}{3} \frac{dT_{n-1}}{dt}, \quad T_{n+1}(t_0) = T_{(0)}, \quad (17)$$

де $F(t, u, T_1, T_2, \dots, T_{n+1})$ – функція, яку варто підібрати так, щоб задовольнялася умова (9) і щоб пластина нагрівалася за найшвидший час.

Завдяки введенню диференціальних рівнянь (16), (17) розв'язування задачі оптимізації програмного управління нагрівом пластини зводиться до вибору функції $F(t, u, T_1, T_2, \dots, T_{n+1})$. Розглянемо далі множину таких функцій:

$$F(t, u, T_1, T_2, \dots, T_{n+1}) = \begin{cases} \frac{dT_{n+1}}{dt}, & t \leq t_m^{\text{рег}} \\ -\theta(u_m^{\text{рег}} - T_{(1)})e^{-\theta(t-t_m^{\text{рег}})}, & t > t_m^{\text{рег}}, \end{cases} \quad (18)$$

де $t_m^{\text{рег}}$ та $u_m^{\text{рег}}$ – момент часу та амплітуда стрибкоподібного зменшення температури $u(t)$, які визначаються для заданого номеру $m \in [0, n+1]$ вузла сітки (12) з умов $T(z_m, t_m^{\text{рег}}) = T_{(1)}$ та $u_m^{\text{рег}} = u(t_m^{\text{рег}})$; $\theta = 10$ – числовий параметр, прийнятий для експоненціальної апроксимації стрибкоподібного зменшення температури $u(t)$.

У вигляді (18) маємо скінченну підмножину $n+2$ відповідних значенням параметру $m \in [0, n+1]$ програм управління $\tilde{U}_1 \subset \tilde{U}$.

Розглянемо результати розрахунків для наступних вихідних даних:

$$a = 15 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}, \quad l = 0,02 \text{ м}, \quad t_0 = 0, \quad T_{(0)} = 290\text{К}, \quad T_{(1)} = 790\text{К}, \\ \alpha = 10 \cdot 10^{-6} \text{ 1/К}, \quad E = 195\text{ГПа}, \quad [\sigma] = 160\text{МПа}. \quad (19)$$

Для наближеного інтегрування звичайних диференціальних рівнянь (15)–(17) використовуємо відомий метод Рунге-Куты 4-го порядку [16]; кількість вузлів n і крок інтегрування в часі Δt обираємо так:

$$n = 31, \quad \Delta t = 0,01 \text{ с}. \quad (20)$$

Збільшення кількості вузлів обмежено часом машинного розрахунку, який помітно збільшується при збільшеній кількості $n > 35$ через необхідність зменшення кроку інтегрування в часі; водночас результати розв'язування задачі теплопровідності для кількості вузлів $n > 35$ не мають помітних відмінностей від результатів, що відповідають значенню (20), і не містять додаткової корисної інформації щодо температурного поля в пластині.

Деякі результати розв'язування диференціальних рівнянь (15)–(18) для вихідних даних (19), (20) і значень $m = 0$, $m = n+1$, $m = 19$ представлені на рис. 2. Програми управління $u(t)$, які відповідні значенням $m = 0$ (рис. 2а) та $m = n+1$ (рис. 2б), забезпечують розігрів пластини за час $t_1 \approx 80$ с; різниця між ними полягає в тому, що в разі $m = 0$ збільшення температури $u(t)$ обмежується величиною $T_{(1)}$ (рис. 2а), а у випадку разі $m = n+1$ збільшення температури $u(t)$ здійснюється до повного розігріву пластини відповідно до умови $T_{n+1} = T_{(1)}$, а потім змінюється шляхом стрибкового зменшення до значення $T_{(1)}$ (рис. 2б). Програма управління $u(t)$, яка відповідає значенню $m = 19$, забезпечує розігрів пластини за найкоротший час $t_1 \approx 40$ с (рис. 2в); у цій програмі збільшення температури $u(t)$ здійснюється до прогріву приблизно 57% товщини пластини до температури $T_{(1)}$, а потім змінюється шляхом стрибкового зменшення до значення $T_{(1)}$ (рис. 2в).

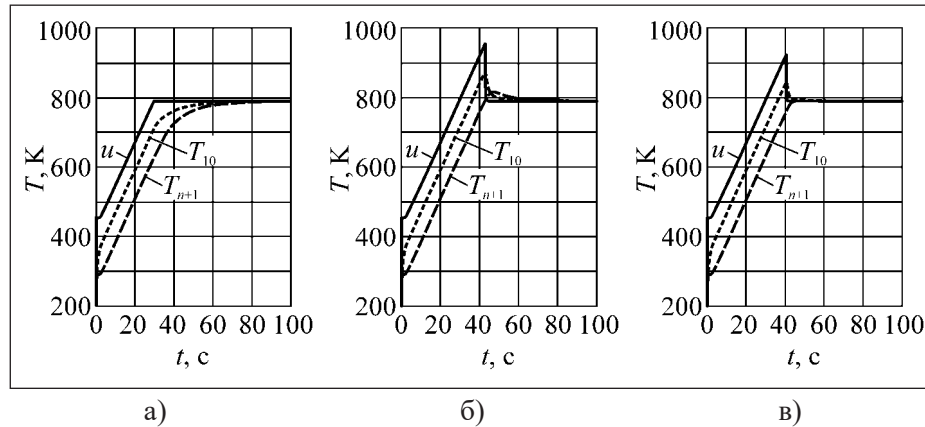


Рис. 2. Результати розрахунків для $m = 0$ (а), $m = n + 1$ (б) та $m = 19$ (в)

Висновки та перспективи подальших досліджень. Одержані результати дають змогу зробити такі висновки.

Розроблено узагальнений підхід до оптимізації програмного управління системами з розподіленими параметрами на основі поєднання методу напівдискретизації та методів покрокового інтегрування звичайних диференціальних рівнянь з початковими умовами.

Показано, що використання методу напівдискретизації дає змогу звести задачу оптимізації програмного управління системами з розподіленими параметрами до задачі оптимізації програмного управління еквівалентної дискретної системи, яка представлена звичайними диференціальними рівняннями, як це передбачається при формулюванні принципу максимуму Понтрягіна.

Розглянутий приклад задачі оптимізації управління нагрівом пластини – «плоскої стінки» показує можливість запропонованого узагальненого підходу до його практичного використання. Показано, що найшвидший розігрів пластини вимагає збільшення управляючої температури впритул до розігріву близько 57% товщини пластини, а потім стрибкового зменшення управляючої температури до потрібного умовою розігріву пластини значення. Одержані результати розв'язування модельної задачі дають змогу стверджувати, що зменшення похибки оптимізації програмного управління

потребує збільшення кількості вузлів просторової дискретизації порівняно з кількістю вузлів, яка забезпечує достатню точність розв'язування задачі теплопровідності. Суттєвим недоліком розв'язку модельної задачі оптимізації програмного управління нагрівом пластини є відсутність автоматизації вибору значення m у виразі (18), тому в подальшому планується здійснити автоматизацію визначення значення m у виразі (18) і дослідити вплив кількості вузлів на похибку розв'язування задачі оптимізації програмного управління.

Розроблений узагальнений підхід до оптимізації програмного управління системами з розподіленими параметрами є досить перспективним із погляду розв'язування низки прикладних задач щодо автоматизації керування певними експлуатаційними режимами енергоустановок з урахуванням обмежень щодо їх міцності й ресурсу. У зв'язку із цим у подальшому передбачається розглянути низку прикладних задач щодо оптимального управління температурними полями в циліндричних тілах із різними типами граничних умов та умов обмеження міцності, які відповідають схематизації надважливих елементів теплових і ядерних енергоустановок: оболонок твелів і корпусів ядерних реакторів і трубопроводів ядерних енергоустановок, теплообмінних труб і барабанів парових котлів, теплообмінних труб і корпусів парогенераторів реакторних установок.

ЛІТЕРАТУРА

1. Matsuda T., Muta H., Tanaka K. Optimization of heating profile for densification of fuel pellets using Monte Carlo simulation. *Computational Materials Science*. 2017. Vol. 138. P. 346–352.
2. Almena A., Goode K.R., Bakalis S., Fryer P.J., Lopez-Quiroga E. Optimising food dehydration processes: energy-efficient drum-dryer operation. *Energy Procedia*. Vol. 161. P. 174–181.
3. Maia L.K.K., Drünert L., La Mantia F., Zondervan E. Expanding the lifetime of Li-ion batteries through optimization of charging profiles. *Journal of Cleaner Production*. 2019. Vol. 225. P. 928–938.
4. Hulkó G., Belavý C., Ondrejkoivič K., Bartalský L., Bartko M. Control of technological and production processes as distributed parameter systems based on advanced numerical modelling. *Control Engineering Practice*. 2017. Vol. 66. P. 23–38.

5. Aguilar-Leal O., Fuentes-Aguilar R. Q., Chairez I., García-González A., Huegel J.C. Distributed parameter system identification using finite element differential neural networks. *Applied Soft Computing*. 2016. Vol. 43. P. 633–642.
6. Boltyanski V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F., Pontryagin L.S. The maximum principle in the theory of optimal processes of control. *IFAC Proceedings Volumes*. 1960. Vol. 1. № 1. P. 464–469.
7. Korobov V.I., Pavlichkov S.S., Schmidt W.H. Global robust controllability of the triangular integro-differential Volterra systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2005. Vol. 309. № 215. P. 743–760.
8. Rouff M. Non Linear Optimal Robot Control with Ordinary Differential Equations. *IFAC Proceedings Volumes*. 1985. Vol. 18. № 16. P. 125–128.
9. Fardigola L.V. Transformation operators in controllability problems for the wave equations with variable coefficients on a half-axis controlled by the Diriclet boundary condition. *Mathematical Control and Related Fields*. 2015. Vol. 5. P. 31–53.
10. Faugeras B., Blum J., Heumann H., Boulbe C. Optimal control of a coupled partial and ordinary differential equations system for the assimilation of polarimetry Stokes vector measurements in tokamak free-boundary equilibrium reconstruction with application to ITER. *Computer Physics Communications*. 2017. Vol. 217. P. 43–57.
11. Pesch H.J. Optimal Control of Dynamical Systems Governed by Partial Differential Equations: A Perspective from Real-life Applications. *IFAC Proceedings Volumes*. 2012. Vol. 45. № 2. P. 1–12.
12. Fletcher C.A.J. Computational techniques for fluid dynamics. 1 Fundamental and General Techniques. Berlin : Springer Verlag, 1991. 404 p.
13. Sarker P., Chakravarty U.K. A generalization of the method of lines for the numerical solution of coupled, forced vibration of beams. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2020. Vol. 170. P. 115–142.
14. Ferreira S.R. Freezing time of a slab using the method of lines. *International Journal of Refrigeration*. 2017. Vol. 75. P. 77–94.
15. Speedy C.B., Brown R.F., Goodwin G.C. Control theory: identification and optimal control. Edinburgh : Oliver and Boyd, 1970. 293 p.
16. Lance G.N. Numerical methods for high speed computers. London : Iliffe & sons Ltd, 1960. 166 p.

REFERENCES

1. Matsuda T., Muta H., Tanaka K. Optimization of heating profile for densification of fuel pellets using Monte Carlo simulation. *Computational Materials Science*. 2017. Vol. 138. P. 346–352.
2. Almena A., Goode K.R., Bakalis S., Fryer P.J., Lopez-Quiroga E. Optimising food dehydration processes: energy-efficient drum-dryer operation. *Energy Procedia*. Vol. 161. P. 174–181.
3. Maia L. K. K., Drünert L., La Mantia F., Zondervan E. Expanding the lifetime of Li-ion batteries through optimization of charging profiles. *Journal of Cleaner Production*. 2019. Vol. 225. P. 928–938.
4. Hulkó G., Belavý C., Ondrejkoivič K., Bartalský L., Bartko M. Control of technological and production processes as distributed parameter systems based on advanced numerical modelling. *Control Engineering Practice*. 2017. Vol. 66. P. 23–38.
5. Aguilar-Leal O., Fuentes-Aguilar R. Q., Chairez I., García-González A., Huegel J. C. Distributed parameter system identification using finite element differential neural networks. *Applied Soft Computing*. 2016. Vol. 43. P. 633–642.
6. Boltyanski V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F., Pontryagin L.S. The maximum principle in the theory of optimal processes of control. *IFAC Proceedings Volumes*. 1960. Vol. 1, No 1. P. 464–469.
7. Korobov V. I., Pavlichkov S. S., Schmidt W. H. Global robust controllability of the triangular integro-differential Volterra systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2005. Vol. 309, No 215. P. 743–760.
8. Rouff M. Non Linear Optimal Robot Control with Ordinary Differential Equations. *IFAC Proceedings Volumes*. 1985. Vol. 18, No 16. P. 125–128.
9. Fardigola L.V. Transformation operators in controllability problems for the wave equations with variable coefficients on a half-axis controlled by the Diriclet boundary condition. *Mathematical Control and Related Fields*. 2015. Vol. 5. P. 31–53.
10. Faugeras B., Blum J., Heumann H., Boulbe C. Optimal control of a coupled partial and ordinary differential equations system for the assimilation of polarimetry Stokes vector measurements in tokamak free-boundary equilibrium reconstruction with application to ITER. *Computer Physics Communications*. 2017. Vol. 217. P. 43–57.

11. Pesch H.J. Optimal Control of Dynamical Systems Governed by Partial Differential Equations: A Perspective from Real-life Applications. *IFAC Proceedings Volumes*. 2012. Vol. 45, No 2. P. 1–12.
12. Fletcher C. A. J. Computational techniques for fluid dynamics. 1 Fundamental and General Techniques. Berlin : Springer Verlag, 1991. 404 p.
13. Sarker P., Chakravarty U.K. A generalization of the method of lines for the numerical solution of coupled, forced vibration of beams. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2020. Vol. 170. P. 115–142.
14. Ferreira S.R. Freezing time of a slab using the method of lines. *International Journal of Refrigeration*. 2017. Vol. 75. P. 77–94.
15. Speedy C.B., Brown R.F., Goodwin G.C. Control theory: identification and optimal control. Edinburgh : Oliver and Boyd, 1970. 293 p.
16. Lance G. N. Numerical methods for high speed computers. London : Iliffe & sons Ltd, 1960. 166 p.

МОДЕЛЮВАННЯ ЗНОШУВАННЯ ПРИ КОНТАКТІ ПРЯМОКУТНОГО ПЛОСКОГО ШТАМПА І ПРУЖНОЇ ПІВПЛОЩИНИ

Онишкевич В. М.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики і фізики
Національний лісотехнічний університет України
вул. Генерала Чупринки, 103, Львів, Україна
orcid.org/0000-0002-4657-5462
onyshkevych@nltu.edu.ua*

Сулим Г. Т.

*доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри механіки
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, Львів, Україна
orcid.org/0000-0003-2223-8645
gtsulym@gmail.com*

Ключові слова: *теорія пружності, контакт, тертя, зношування, парні інтегральні рівняння.*

Проблема дослідження контактної поведінки тіл за наявності тертя, фрикційного проковзування, зношування та їх впливу на контактну міцність і деформативність структур набуває все більшої актуальності. Збільшення довговічності й надійності має й економічне значення, адже більшість відмов машин відбувається внаслідок зношування їх окремих вузлів.

Розглядається плоска задача про зношування пружного півпростору під дією прямокутного в перерізі штампа, що рухається вздовж твірної з постійною швидкістю. Поза штампом поверхня півплощини не завантажена. Температурними ефектами, які неминуче виникають, нехтуємо, оскільки задача розглядається в стаціонарній постановці. Відповідно, зношування розглядається у вигляді лінійної функції. При цьому введення нової функції «старіння» дає змогу феноменологічно врахувати ті складні перетворення і зміни, які відбуваються в так званому «третьому» тілі – тонкому приповерхневому шарі, фізичні, хімічні й трибологічні властивості якого суттєво відрізняються від властивостей основних матеріалів контактуючих тіл.

Розв'язок задачі теорії пружності будується за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Контактні напруження шукаються у вигляді ряду Фур'є, коефіцієнти розвинення якого задовольняють парним інтегральним рівнянням. Використавши метод точкової колокації, для знаходження невідомих коефіцієнтів отримали систему нелінійних алгебричних рівнянь. Невласні інтегралі обчислювалися згідно з теоремою Коші про лишки, здійснювалося інтегрування по відповідному контуру. Граничні випадки становлять найбільший інтерес, оскільки дають можливість обчислити найменше й найбільше зношування. В інших випадках розв'язок буде міститися між розв'язками цих задач. Для розв'язання нелінійної системи рівнянь використано метод простої ітерації, за нульове наближення вибрано середнє значення розв'язків обох крайніх випадків.

Отримано еволюцію контактних напружень, зношування і стирання в часі. Для частинних випадків виявлено зростання або постійність вертикальних переміщень відповідно. У граничному випадку отримані результати співпадають із відомими в літературі.

MODELING OF WEAR AT CONTACT OF RECTANGULAR PLANE PUNCH AND ELASTIC HALF-PLANE

Onyshkevych V. M.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Physics and Mathematics
Ukrainian National Forestry University
General Chuprynka str., 103, Lviv, Ukraine
orcid.org/0000-0002-4657-5462
onyshkevych@nltu.edu.ua*

Sulym G. T.

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Professor at the Department of Mechanics
Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str., 1, Lviv, Ukraine
orcid.org/0000-0003-2223-8645
gtsulym@gmail.com*

Key words: *theory of elasticity, contact, frictions, wear, dual integral equations.*

Investigation of thermal stresses and wear in the contact couple is an important problem for many engineering researches. The steady problem of thermoelasticity currently is sufficiently investigated. However, taking into account the actual operating conditions, in particular wear, leads to complication of statement and mathematical modeling of problem. This is due to mathematical difficulties that arise in the solution of dual integral equations. The authors of this paper developed a method of constructing solutions of contact problems with wear.

In this work the plane contact problem on wear of elastic half-plane by a rigid punch has been considered. The punch moves with constant velocity. Arising thermal effects are neglected because the problem is investigated in stationary statement. We use this model for plane contact problem of rectangular punch and elastic half-plane consideration in stationary statement, therefore wear is representative by linear function with time. Introduction of new function “ageing” gives the opportunity to take account of difficult transformations and changes, which takes place in what is called “third body”. “Third body” is a thin near surface layer with its physical, chemical and tribotechnical properties, which differ from properties of main material of contacting bodies. In this case the crumpling of the nonhomogeneities of the surfaces and abrasion of half-plane take place. Out of the punch the surface of half-plane is free of load.

The solution for problem of theory of elasticity is constructed by means of Fourier integral transformation. Contact stresses are found in Fourier series which coefficients satisfy the dual integral equations. It leads to the system of nonlinear algebraic equations for unknown coefficients by a method of collocations. Cauchy theorem about residuals is used for computing integrals. This system is reduced to linear system in the partial most interesting cases for computing of largest and smallest wear. This system is reduced to linear system in the partial most interesting cases for computing of maximum and minimum wear. The iterative scheme is considered for investigation of other nonlinear cases, for initial approximation the mean value of boundary cases is used. The evolutions of contact stresses, wear and abrasion in the time are given. For both last cases increase or invariable of vertical displacement correspondently is obtained. In the boundary cases coincidence of results with known is obtained.

Вступ. У зв'язку з прикладними запитами мікромеханіки, трибології, біомеханіки все більшої актуальності набуває проблема дослідження контактної поведінки тіл за наявності тертя, фрикційного проковзування, зношування та їх впливу на контактну міцність і деформативність структур. Проблема довговічності й надійності має й економічне значення: унаслідок зношування окремих вузлів відбувається 80–90% відмов машин, витрати на ремонт і технічне обслуговування становлять 10–15% вартості обладнання, а витрати в машинобудуванні внаслідок зношування й тертя в технічно розвинутих країнах досягають 4–5% національного доходу. У всьому світі опір тертю поглинає 30–40% енергії, що виробляється протягом року, причому енергія при терті не просто губиться, а перетворюється в тепло, яке нагріває механізми й вузли машин, що призводить до відмов та аварій.

Задачі з урахуванням зносу вперше досліджені в працях [1; 2], а математичні моделі зношування запропоновано в роботі [3]. Розв'язок контактної осесиметричної задачі зі зношуванням для кругового штампа і півпростору наведено в праці [4]. Задача про термопружний контакт півплощини з прямокутним штампом за теплоутворення від тертя досліджувалася в роботі [5]. Класичним аналітичним методом побудови розв'язку задачі теорії пружності в плоскій постановці є застосування інтегрального перетворення Фур'є [6]. Однак урахування зношування ускладнює математичну постановку задачі і створює труднощі при розв'язуванні системи парних інтегральних рівнянь.

Метою роботи є розроблення методики побудови розв'язку задачі про контакт штампа з пружною півплощиною з урахуванням зношування, яка ґрунтується на використанні інтегрального перетворення Фур'є, до визначенні невідомої функції, розв'язуванні системи парних інтегральних рівнянь методом поточної колокації та зведенні задачі до системи нелінійних алгебричних рівнянь.

Формулювання задачі. Розглянемо плоску задачу про зношування пружного півпростору під дією прямокутного в перерізі штампа, що рухається вздовж твірної з постійною швидкістю. Температурними ефектами, які неминуче виникають, нехтуємо, оскільки задача розглядається в стаціонарній постановці. Відповідно, зношування розглядається у вигляді лінійної функції. При цьому введення нової функції «старіння» дає змогу феноменологічно врахувати ті складні перетворення й зміни, які відбуваються в так званому «третьому» тілі – тонкому приповерхневому шарі, фізичні, хімічні і трибологічні властивості якого суттєво відрізняються від властивостей основних матеріалів контактуючих тіл.

Нехай до моменту часу $\tau = 0$ під утиснутим силою P у пружну півплощину штампом тиск ста-

ціонарно розподілявся, змінюючи мікронерівності поверхні. З моменту часу $\tau = 0$ штамп рухається з постійною швидкістю V_0 і відбувається стирання півплощини. Поза штампом поверхня півплощини не завантажена. Для розв'язання задачі необхідно проінтегрувати рівняння теорії пружності:

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \partial \theta / \partial x = 0, \quad (1)$$

$$\mu \Delta v + (\lambda + \mu) \partial \theta / \partial y = 0, \quad (2)$$

де $\theta = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y$, u і v – компоненти вектора переміщень, λ і μ – коефіцієнти Ламе, за таких граничних умов при $y = 0$:

$$v = f(x) + (k_1 V_0 \tau / H_b + k_2) |\sigma_y(x)|^\alpha, \quad |x| \leq a, \quad (3)$$

$$\sigma_y(x) = 0, \quad |x| \geq a, \quad (4)$$

$$\tau_{xy}(x) = 0, \quad |x| < \infty. \quad (5)$$

Тут $f(x)$ – задані переміщення під штампом, a – півширина штампа, H_b – твердість за Брінелем матеріалу півплощини, τ – час. Процес зношування визначається параметрами [7] k_1 , k_2 , $0 \leq \alpha \leq 1$.

Побудова розв'язку задачі. Застосовуючи до рівнянь (1)–(2) інтегральне перетворення Фур'є та задовольняючи граничним умовам (3)–(5), отримуємо парні інтегральні рівняння:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu) C_1 \xi^2 e^{-i\xi x} / \lambda d\xi = f(x) + (k_1 V_0 \tau / H_b + k_2) |\sigma_y(x)|^\alpha, \quad |x| \leq a \quad (6)$$

$$-\frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda + \mu)^2 C_1 \xi^2 |\xi| e^{-i\xi x} / \lambda d\xi = 0, \quad |x| > a. \quad (7)$$

Продовжимо (7) на всю вісь x за допомогою функції Хевісайда:

$$-\frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda + \mu)^2 C_1 \xi^2 |\xi| e^{-i\xi x} / \lambda d\xi = \sigma_y(x) H(a - |x|). \quad (8)$$

Тоді згідно з прямою формулою інтегрального перетворення Фур'є:

$$C_1 = \frac{\lambda}{2\mu(\lambda + \mu)^2 \xi^2 |\xi|} \int_{-a}^{+a} \sigma_y(x) e^{i\xi x} dx.$$

Представимо нормальні напруження у вигляді ряду Фур'є:

$$\sigma_y(x) = \sum_{n=-N}^N a_n \exp(i\pi n x / a), \quad (9)$$

Отримаємо:

$$\int_{-a}^{+a} \sigma_y(x) e^{i\xi x} dx = 2 \sum_{n=-N}^N a_n \frac{\sin(\xi a + \pi n)}{\xi + \pi n / a},$$

звідки:

$$C_1 = \frac{\lambda}{\mu(\lambda + \mu)^2 \xi^2 |\xi|} \sum_{n=-N}^N a_n \frac{\sin(\xi a + \pi n)}{\xi + \pi n / a}.$$

Замінивши в інтегральному рівнянні (6) C_1 його значенням, зі співвідношень (6)–(7) отримаємо:

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \sum_{n=-N}^N a_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi a + \pi n)}{|\xi|(\xi + \pi n/a)} e^{-i\xi x} d\xi + 2\pi \left(\frac{k_1 V_0 \tau}{H_B} + k_2 \right) \left(\sum_{n=-N}^N a_n \exp \frac{i\pi n x}{a} \right)^\alpha = -2\pi f(x)$$

Використавши метод точкової колокації при $x = x_j = -a + a(j-1)/N$, ($j = \overline{1, 2N+1}$), для знаходження невідомих коефіцієнтів a_n , ($n = \overline{1, 2N+1}$) отримаємо систему нелінійних алгебричних рівнянь:

$$\bar{z} \|A\| + C (\bar{z} \|D\|)^\alpha = \bar{b}, \quad (10)$$

де

$$\bar{z} = (a_{-N}, a_{-N+1}, \dots, a_{N-1}, a_N) = (z_1, z_2, \dots, z_{2N+1}),$$

$$a_{k,j} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi a + \pi n)}{|\xi|(\xi + \pi k/a)} e^{-i\xi x_j} d\xi, \quad b_j = -2\pi f(x_j),$$

$$d_{k,j} = \exp(i\pi k x_j/a), \quad (k, j = \overline{1, 2N+1}), \quad C = 2\pi(k_1 V_0 \tau / H_B + k_2).$$

Невласні інтеграли обчислювалися згідно з теоремою Коші про лишки, здійснювалося інтегрування по відповідному контуру.

При $\alpha = 1$ та $\alpha = 0$ нелінійна система рівнянь (10) перетворюється в лінійну й, відповідно, набуває вигляду:

$$\bar{z}_1 (\|A\| + C \|D\|) = \bar{b} \quad (11)$$

та

$$\bar{z}_0 \|A\| = \bar{b} - \bar{c}. \quad (12)$$

Граничні випадки ($\alpha = 0$, $\alpha = 1$) становлять найбільший інтерес, оскільки дають можливість обчислити найменше й найбільше зношення. При $0 < \alpha < 1$ розв'язок (10) буде міститися між розв'язками задач (11) і (12).

Для розв'язання нелінійної системи рівнянь (10) використаємо метод простої ітерації. Представимо систему у вигляді $\bar{z} = \bar{g}(\bar{z})$ або $z_j = g_j(z_1, z_2, \dots, z_k)$, ($k = 2N+1$), де

$$g_j(z_1, z_2, \dots, z_k) = -\frac{1}{a_{j,j}} \left\{ \sum_{m=j+1}^{j-1} a_{j,m} z_m + \sum_{m=1}^k a_{j,m} z_m + C \left(\sum_{m=1}^k a_{j,m} z_m \right)^\alpha \right\} + b_j.$$

Ітерація проводилася за формулою $\bar{z}^{(n+1)} = \bar{g}(\bar{z}^{(n)})$, тобто $z_j^{(n+1)} = g_j(z_1^{(n)}, \dots, z_k^{(n)})$, ($j = \overline{1, k}$), або інакше

$$\begin{cases} z_1^{(n+1)} = g_1(z_1^{(n)}, \dots, z_k^{(n)}) \\ z_2^{(n+1)} = g_2(z_1^{(n)}, \dots, z_k^{(n)}) \\ \dots \\ z_k^{(n+1)} = g_k(z_1^{(n)}, \dots, z_k^{(n)}) \end{cases} \quad (13)$$

За нульове наближення вибираємо середнє значення $\bar{z}^{(0)} = (\bar{z}_0 + \bar{z}_1)/2$ між розв'язком задачі (11) і (12).

Висновки. Числові результати отримано при таких значеннях вхідних параметрів: матеріал півплощини – алюміній ($\lambda = 5.6 \times 10^{10}$ Па, $\mu = 2.6 \times 10^{10}$ Па), $V_0 = 0.25$ м/с, $a = 0.25$ м, $H_B = 11.3$ кПа/мм², $k_1 = 10^{-10}$, $k_2 = 10^{-11}$, $f(x) = const = 0.01$ м, $N = 23$. Розподіл переміщень v та приведених напружень σ_y^* = $2\sigma_y a / P$ наведено на рис. 1, відповідно, при $\tau = 0$ і $\tau = 100$ с. Криві 1 відповідають $\alpha = 0$, а криві 2 – $\alpha = 1$. Значення сили P обчислювалося за формулою:

$$P = -\int_{-a}^{+a} \sigma_y(x) dx = -\int_{-a}^{+a} \sum_{k=-N}^N z_{N+k+1} \exp \frac{i\pi k x}{a} = -2a z_{N+1}.$$

У випадку $\alpha = 1$ зі збільшенням часу взаємодії вертикальні переміщення зростають, що свідчить про збільшення величини зношення матеріалу (криві 2 на рис. 1). Випадку $\alpha = 0$ відповідають постійні переміщення v (криві 1 на рис. 1).

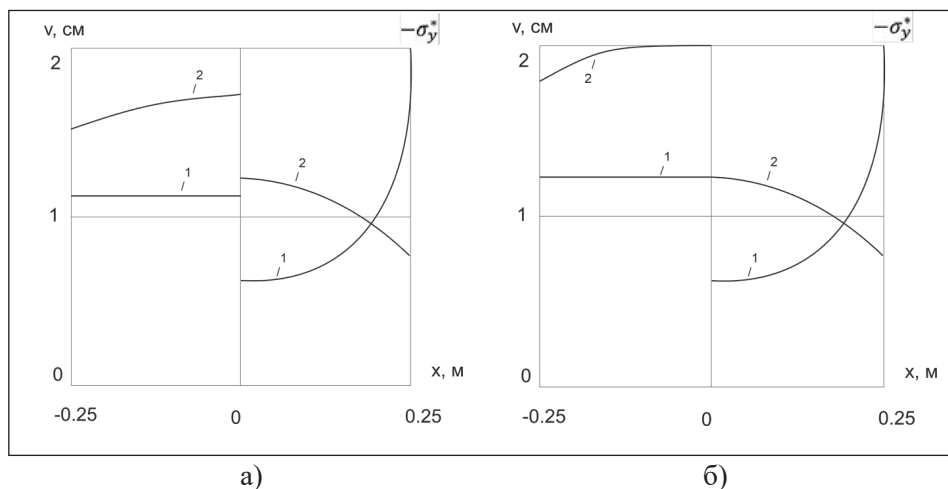


Рис. 1. Розподіл переміщень і приведених напружень при $\tau = 0$ (а) та $\tau = 100$ с (б) відповідно (криві 1 при $\alpha = 0$, криві 2 при $\alpha = 1$)

Отримані результати для граничного випадку $\alpha = 0$, $\tau = 0$ співпадають із відомими в літературі [1]. На одержаний розв'язок потрібно накласти розв'язок антиплоскої задачі, коли до півплощини прикладено дотичні напруження $\tau_{yz} = f_T \sigma_y$, де f_T – коефіцієнт тертя, а σ_y визначаються формулою (9).

ЛІТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости при наличии износа. *ПММ*. 1976. Т. 40. № 6. С. 981–989.
2. Коровчинский М.В. Локальный контакт упругих тел при изнашивании их поверхностей. *Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа*. Москва, 1971. С. 130–140.
3. Александров В.М. О постановке плоских контактных задач теории упругости при износе взаимодействующих тел. *ДАН СССР*. 1983. Т. 271. № 4. С. 827–831.
4. Левицький В.П., Онишкевич В.М. Осесиметрична контактна задача із зношуванням. *Вісник Львівського університету. Серія «Механіко-математична»*. 1993. Вип. 38. С. 60–63.
5. Онишкевич В.М., Сулим Г.Т. Задача про термопружний контакт півплощини з прямокутним штампом за теплоутворення від тертя. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія «Фізико-математичні науки»*. 2017. № 3. С. 165–168.
6. Levytskyi V.P., Onyshkevych V.M. Plane contact problem with heat generation account of friction. *Int. J. Engng Sci.* 1996. Vol. 34. № 1. P. 101–112.
7. Гавриков М.В., Мазинг Р.И. Наследственно-стареющая модель изнашивания и ее применение к задачам с монотонно растущей зоной контакта. *Трение и износ*. 1988. Т. 9. № 2. С. 274–279.

REFERENCES

1. Galin L.A. (1976) Kontaknyie zadachi teoryi uprugosti pri nalichiyi iznosa [Contact problems of theory of elasticity with wear]. *PMM*, vol. 40, no. 6, pp. 981–989.
2. Korovchinskyi M.V. (1971) Lokalnyi kontakt uprugih tel pri iznashivaniyi ih poverhnostey [Local contact of elastic bodies with wear of surfaces]. *Kontaktnoye vzaimodeystviye tverdyh tel i raschet sil treniya i iznosa* [Solids contact interaction and frictional forces and wear computing]. Moscow: Nauka, pp. 130–140.
3. Aleksandrov V.M. (1983) O postanovke ploskih kontaknyih zadach teoryi uprugosti pri iznose vzaimodeystvuyushchih tel [About statement of plane problems of theory of elasticity with wear of interactive bodies]. *DAN SSSR*, vol. 271, no 4, pp. 827–831.
4. Levytskyi V.P., Onyshkevych V.M. (1993) Osesymetrychna kontaktna zadacha iz znoshuvannyam [Axisymmetric contact problem with wear]. *Bulletin of Lviv University. Series: Mechanics and Mathematics*, vol. 38, pp. 60-63.
5. Onyshkevych V. M., Sulym G. T. (2017) Zadacha pro termopruznyi kontakt pivploshchyny z priamokutnym shtampom za teploutvorenniya vid tertya [Problem about thermoelastic contact of half-plane and rectangular punch with heat generation account of friction]. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics*, vol. 3, pp. 165–168.
6. Levytskyi V.P., Onyshkevych V.M. (1996) Plane contact problem with heat generation account of friction. *Int. J. Engng Sci.*, vol. 34, no 1, pp. 101–112.
7. Gavrikov M.V., Mazing R.I. (1988) Nasledstvenno-stareyushchaya model iznashivaniya i eyo primeneniye k zadacham s monotonno rastushchey zonooy kontakta [Inherited-aging model model of wear for problems with monotonically increasing contact area]. *Treniye i iznos*, vol. 9, no 2, pp. 274–279.

УДК 539.3
DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-10>

ЗГИН ІЗ РОЗТЯГОМ ПЛАСТИНИ З ОТВОРОМ ТА СИСТЕМОЮ ТРІЩИН ЗА СМУГОВОГО КОНТАКТУ ЇХНІХ БЕРЕГІВ

Слободян М. С.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри механіки
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, Львів, Україна,
orcid.org/0000-0001-5357-8584
slobkolia@gmail.com*

Кузь І. С.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри механіки
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, Львів, Україна
orcid.org/0000-0003-1885-2474
ihorkuz24@gmail.com*

Білаш О. В.

*кандидат економічних наук,
доцент кафедри інженерної механіки
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
вул. Героїв Майдану, 32, Львів, Україна
orcid.org/0000-0001-7515-7641
oksana.opanasovych@gmail.com*

Шайнога М. І.

*студент
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, Львів, Україна
orcid.org/0000-0001-8174-5706
maksym028@gmail.com*

Ключові слова: тріщина, розтяг, згин, круговий отвір, ізотропна пластинка, контакт, комплексні потенціали, контактні зусилля, коефіцієнти інтенсивності.

У роботі побудовано розв'язок задачі про двовісний згин із розтягом нескінченної ізотропної пластини з круговим отвором та системою наскрізних прямолінійних тріщин. Межа кругового отвору та береги тріщини вільні від зовнішнього навантаження. Під час розв'язування задачі припускається, що під дією рівномірно розподіленого згинального та розтягувального навантажень береги тріщин контактують по області сталої ширини (смуговий контакт) на верхній основі пластини по всій довжині тріщин. Задача розв'язана за таких крайових умов: $M_r = 0$, $P_r = 0$, $\sigma_{rr} = 0$, $\tau_{rr0} = 0$, $x \in L$; $P^\pm = 0$, $M_{y_k}^\pm = \beta_k h N_k$, $\tau_{yx, y_k}^\pm = 0$, $\sigma_{yx, y_k}^\pm = -0,5 N_k / h$, $\beta_k = 1 - \gamma_k / 3$, $\partial[v_{rr}] / \partial x_k + \alpha_k h [\partial^2 w / \partial x_k \partial y_k] = 0$, $\alpha_k = 0,5 (1 + (1 - \gamma_k)^2)$, $\gamma_k = h_k / h$, $x_k \in L_k$, $k = 1, M$, де M_r – згинальний момент, P_r – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізуювальна сила, σ_{rr} і σ_{rr0} – компоненти тензора напружень у полярній системі координат, N_k – контактне зусилля між

берегами k -тої тріщини, h – товщина пластини, h_k – висота контакту k -ої тріщини, w – прогин пластини, σ_{μ_k, y_k} і τ_{μ_k, y_k} – компоненти тензора напружень у декартовій системі координат, v_{μ} – компонента вектора переміщень; $[f] = f^+ - f^-$, значками “+” і “-” позначені граничні значення функцій при прямуванні точки площини до k -тої тріщини при $y_k \rightarrow \pm 0$.

Через контакт берегів тріщин розв’язок задачі будемо шукати у вигляді розв’язків двох взаємопов’язаних задач: задачі згину пластини, використовуючи теорію Кірхгофа-Лява, та плоскої задачі. З використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів Колосова-Мусхелішвілі побудовано задачі лінійного спряження. Отримані задачі лінійного спряження розв’язані аналітично та отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь щодо стрибків переміщень у плоскій задачі та стрибків кутів повороту у задачі згину на берегах тріщин. Ця система сингулярних інтегральних рівнянь за допомогою методу механічних квадратур зведена до системи алгебраїчних рівнянь, яка розв’язана чисельно за допомогою методу Гауса. Проведено числовий аналіз задачі та побудовані графічні залежності контактних зусиль та коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів при різних геометричних параметрах задачі та різних значеннях рівномірно розподіленого розтягувального та згинного навантаження на нескінченності. У часткових випадках результати зійшлися з відомими результатами, отриманими в наукових працях іншими авторами.

BENDING AND TENSION OF A PLATE WITH A HOLE AND SYSTEM OF CRACKS ON THE ASSUMPTION OF STRIPLIKE CRACK CLOSURE

Slobodian M. S.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Mechanics
Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str., 1, Lviv, Ukraine
orcid.org/0000-0001-5357-8584
slobkolia@gmail.com*

Kuz’ I. S.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Mechanics
Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str., 1, Lviv, Ukraine
orcid.org/0000-0003-1885-2474
ihorkuz24@gmail.com*

Bilash O. V.

*Candidate of Economic Sciences,
Associate Professor at the Department of Engineering Mechanics
Hetman Petro Sahaidachnyi National Army Academy
Heroiv Maydana str., 32, Lviv, Ukraine
orcid.org/0000-0001-7515-7641
oksana.opanasovych@gmail.com*

Shaynoga M. I.

*Student
Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str., 1, Lviv, Ukraine
orcid.org/0000-0001-8174-5706
maksym028@gmail.com*

Key words: crack, tension, bending, circular hole, isotropic plate, contact, complex potentials, contact force, intensity factors.

The solution of biaxial tensile-bending problem for an infinite isotropic plate with circular hole and straight through cracks is constructed. Crack faces and hole boundary are free from external load. It is assumed that uniform bending and tensile loads cause crack closure zone of constant width (strip contact) on the upper surface of the plate along the entire length of the cracks. The problem is solved under the following boundary conditions: $M_r = 0$, $P_r = 0$, $\sigma_{rr} = 0$, $\tau_{rr\theta} = 0$, $x \in L$; $P^\pm = 0$, $M_k^\pm = \beta_k h N_k$, $\tau_{r_k y_k}^\pm = 0$, $\sigma_{r_k y_k}^\pm = -0,5 N_k / h$, $\beta_k = 1 - \gamma_k / 3$, $\partial[v_{rr}] / \partial x_k + \alpha_k h [\partial^2 w / \partial x_k \partial y_k] = 0$, $\alpha_k = 0,5(1 + (1 - \gamma_k)^2)$, $\gamma_k = h_k / h$, $x_k \in L_k$, $k = \overline{1, M}$, where M_r – bending moment, P_r – generalized Kirchhoff shear force, σ_{rr} and $\sigma_{rr\theta}$ – stress tensor components in the polar coordinate system, N_k – contact force between faces of k -th crack, h – plate thickness, h_k – the height of contact zone of k -th crack, w – plate deflection, $\sigma_{r_k y_k}$ and $\tau_{r_k y_k}$ – stress tensor components in the cartesian coordinate system, v_{rr} – displacement vector component; $[f] = f^+ - f^-$, superscripts “+” and “-” stand for limits of functions as a point of the plane approaches k -th crack ($y_k \rightarrow \pm 0$).

Due to the crack closure the solution is sought as superposition of solutions of two interrelated problems: Kirchhoff-Love plate bending problem and plane problem of the elasticity theory. Using the theory of functions of a complex variable and Kolosov-Muskhelishvili complex potentials linear conjugation problems are constructed. These problems are solved analytically. The systems of singular integral equations in unknown displacement discontinuity (plane problem) and angular displacement discontinuity (bending problem) at crack faces are obtained. Using mechanical quadrature method these systems are reduced to the system of linear algebraic equations, which is numerically solved by Gaussian method. Graphical representations of numerical results are presented for the contact forces, forces and moments intensity factors at various geometrical parameters and values of uniform tensile and bending loads at infinity. In partial cases, the results coincide with the known ones obtained in scientific works by other researchers.

Вступ. У багатьох галузях техніки широко використовують пластинчасті елементи конструкцій. Їхні експлуатаційні характеристики залежать від тріщиноподібних дефектів і отворів, які знижують діапазон допустимого навантаження. Під час експлуатації пластинчатих елементів важливо знати, яким чином такі дефекти впливають на міцність та механічні характеристики конструкції.

Розв’язками плоских задач і задач згину пластин з отворами та тріщинами займалось багато авторів. Їхні узагальнення і методи їх розв’язування подано в монографіях [1–8]. Але в цих роботах не враховано контакт берегів тріщин при дії зовнішнього навантаження. Експерименти, проведені в роботі Дж. Кальтгофа, І. Шацького, А. Бюргеля [9], показують значний вплив контакту берегів тріщини при згині пластини на її напружено-деформований стан. Модель гладкого контакту берегів тріщин по лінії по всій довжині тріщин (лінійний контакт) використано у роботах [10–13]. Модель гладкого контакту берегів тріщин по області сталої ширини (смуговий контакт) використано у працях [14–18].

У цій роботі досліджується задача про згин із розтягом нескінченної ізотропної пластини з круговим отвором та системою довільно розта-

шованих тріщин, береги яких гладко контактують по області сталої ширини по всій їх довжині на верхній основі пластини.

Формулювання задачі. Розглянемо безмежну ізотропну пластину завтовшки $2h$, яка містить круговий отвір радіуса R та систему M довільно орієнтованих прямолінійних наскрізних тріщин довжиною $2l_k$ ($k = \overline{1, M}$) кожна. У серединній площині пластини виберемо декартову систему координат $Oxuz$, а її початок виберемо в центрі кругового отвору. У площині Oxu введемо полярну систему координат r і θ з полюсом у точці O та полярною віссю Ox . Центри тріщин розміщені в точках O_k з координатами (x_{0k}, y_{0k}) , а α_k – кут нахилу лінії k -тої тріщини до осі Ox ($k = \overline{1, M}$). У точці O_k виберемо початок декартової системи координат $O_k x_k y_k$, яка буде пов’язана з k -тою тріщиною. Нехай на безмежності пластини згинається рівномірно розподіленими моментами M_x^∞ і M_y^∞ та розтягується зусиллями P_1 та P_2 . Через S^+ позначимо область всередині кругового отвору, а через S^- – ззовні, через L_k – лінію, де розміщена k -та тріщина, а через L – коло (див. рис. 1).

Нехай за такого навантаження береги тріщин контактують по області сталої ширини (смуговий контакт) на верхній основі пластини по всій

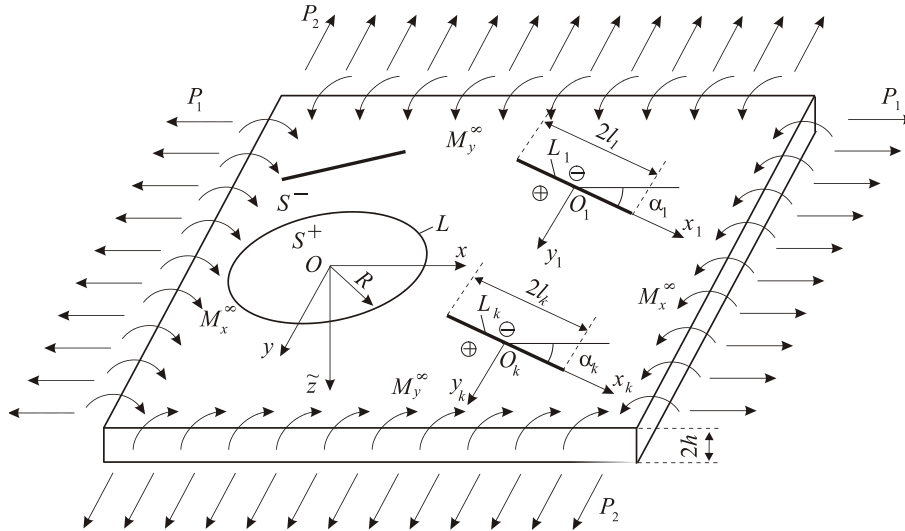


Рис. 1. Безмежна пластина з круговим отвором та системою довільно розташованих тріщин

довжині тріщин. Через контакт берегів тріщин розв’язок задачі будемо шукати у вигляді розв’язків двох взаємопов’язаних задач: задачі згину пластины, використовуючи теорію Кірхгофа-Лява, та плоскої задачі.

На межі отвору матимемо такі крайові умови

$$M_r = 0, P_r = 0, \sigma_{rr} = 0, \tau_{rr\theta} = 0, x \in L, \quad (1)$$

де M_r – згинальний момент, P_r – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила, σ_{rr} і $\tau_{rr\theta}$ – компоненти тензора напружень у полярній системі координат.

Крайові умови смугового контакту берегів тріщин будуть такими [14–16]

$$P^\pm = 0, M_{y_k}^\pm = \beta_k h N_k, \tau_{lx_k y_k}^\pm = 0, \sigma_{ly_k y_k}^\pm = -\frac{N_k}{2h},$$

$$\beta_k = 1 - \frac{\gamma_k}{3}, x_k \in L_k, \quad (2)$$

$$\frac{\partial [v_{ll}]}{\partial x_k} + \alpha_k h \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial y_k} \right] = 0, \alpha_k = \frac{1}{2} (1 + (1 - \gamma_k)^2), \gamma_k = \frac{h_k}{h},$$

$$x_k \in L_k, k = \overline{1, M}, \quad (3)$$

де N_k – контактне зусилля між берегами k -тої тріщини, h_k – висота контакту k -ої тріщини, w – прогин пластины, $\sigma_{ly_k y_k}$ і $\tau_{lx_k y_k}$ – компоненти тензора напружень у декартовій системі координат, v_{ll} – компонента вектора переміщень; $[f] = f^+ - f^-$, значками “+” і “-” позначені граничні значення функцій при прямування точки площини до k -тої тріщини при $y_k \rightarrow \pm 0$.

Розв’язок задачі. З використанням комплексних потенціалів плоскої задачі [4] та задачі згину пластины [6], задовольняючи крайові умови (1)–(3), розв’язок задачі зведений до задач лінійного спряження, на підставі яких отримано

систему сингулярних інтегральних рівнянь щодо невідомих стрибків переміщень $G_j(\eta)$ та стрибків кутів повороту $Y_j(\eta)$ на берегах тріщин, яка набуде вигляду

$$\text{Im} \left(\sum_{j=1}^M \int_{-1}^1 \{ K_{mj}(\eta, \xi) Y_j(\eta) + L_{mj}(\eta, \xi) \overline{Y_j(\eta)} \} d\eta \right) - \text{Im} \left(\frac{ie^{-2i\alpha_m} \tilde{c}'_0}{\tilde{X}_m^2} \right) =$$

$$= \tilde{c}'_m + \text{Im} \tilde{P}_m(\xi), \xi \in [-1, 1], m = \overline{1, M}, \quad (4)$$

$$\text{Re} \left(\sum_{j=1}^M \int_{-1}^1 \{ K_{mj}(\eta, \xi) Y_j(\eta) + L_{mj}(\eta, \xi) \overline{Y_j(\eta)} \} d\eta \right) - \text{Re} \left(\frac{ie^{-2i\alpha_m} \tilde{c}'_0}{\tilde{X}_m^2} \right) +$$

$$+ \frac{q}{2} \text{Re} \left(\sum_{j=1}^M \int_{-1}^1 \{ R_{mj}(\eta, \xi) G_j(\eta) + S_{mj}(\eta, \xi) \overline{G_j(\eta)} \} d\eta \right) =$$

$$= \text{Re} (\tilde{P}_m(\xi) + \tilde{H}_m(\xi)), \xi \in [-1, 1], m = \overline{1, M}, \quad (5)$$

$$\text{Im} \left(\sum_{j=1}^M \int_{-1}^1 \{ R_{mj}(\eta, \xi) G_j(\eta) + S_{mj}(\eta, \xi) \overline{G_j(\eta)} \} d\eta \right) =$$

$$\text{Im} \tilde{H}_m(\xi), \xi \in [-1, 1], \quad (6)$$

де

$$R_{mj}(\eta, \xi) = \begin{cases} 1/(\pi(\eta - \xi)) + \tilde{R}_{mj}(\eta, \xi), & m = j, \\ \tilde{R}_{mj}(\eta, \xi) + R_{mj}^V(\eta, \xi), & m \neq j, \end{cases}$$

$$S_{mj}(\eta, \xi) = \begin{cases} \tilde{S}_{mj}(\eta, \xi), & m = j, \\ \tilde{S}_{mj}(\eta, \xi) + S_{mj}^V(\eta, \xi), & m \neq j, \end{cases}$$

$$\tilde{R}_{mj}(\eta, \xi) = R_{mj}^I(\eta, \xi) + \left(1 + \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\tilde{X}_m^2} \right) R_{mj}^{II}(\eta, \xi) + e^{-2i\alpha_m} \left(X_m - \frac{1}{X_m} \right) R_{mj}^{III}(\eta, \xi) +$$

$$+ \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\tilde{X}_m^2} R_{mj}^{IV}(\eta, \xi),$$

$$\tilde{S}_{mj}(\eta, \xi) = S_{mj}^I(\eta, \xi) + \left(1 + \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\tilde{X}_m^2} \right) S_{mj}^{II}(\eta, \xi) +$$

$$\begin{aligned}
& +e^{-2i\alpha_m} \left(X_m - \frac{1}{\bar{X}_m} \right) S_{mj}^{III}(\eta, \xi) + \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\bar{X}_m^2} S_{mj}^{IV}(\eta, \xi), & \left. \frac{X_m^2 + e^{2i\alpha_j}}{\bar{T}_j X_m - 1} \right\}, \\
& R_{mj}^I(\eta, \xi) = \frac{1}{2\pi X_m} \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j}}{\bar{T}_j X_m - 1}, & K_{mj}^{II}(\eta, \xi) = -\frac{1}{2\pi i \tilde{\kappa}} \left\{ \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j}}{T_j} + \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j} \bar{F}_{mj}}{(T_j \bar{X}_m - 1)^2} - \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j} \bar{X}_m^2 + e^{2i\alpha_j}}{\bar{X}_m} \frac{1}{T_j \bar{X}_m - 1} \right\}, \\
& S_{mj}^I(\eta, \xi) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{\bar{T}_j} + \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j} F_{mj}}{(\bar{T}_j X_m - 1)^2} - \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{X_m} \right. & K_{mj}^I(\eta, \xi) = \frac{1}{2\pi i X_m} \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j}}{\bar{T}_j X_m - 1}, \\
& \left. \frac{X_m^2 + e^{-2i\alpha_j}}{\bar{T}_j X_m - 1} \right\}, & L_{mj}^{II}(\eta, \xi) = -\frac{1}{2\pi i \bar{X}_m} \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{T_j \bar{X}_m - 1}, \\
& R_{mj}^{III}(\eta, \xi) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j}}{T_j} + \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j} \bar{F}_{mj}}{(T_j \bar{X}_m - 1)^2} - \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j} \bar{X}_m^2 + e^{2i\alpha_j}}{\bar{X}_m} \frac{1}{T_j \bar{X}_m - 1} \right\}, & K_{mj}^{III}(\eta, \xi) = -\frac{1}{\pi i \tilde{\kappa}} \frac{\lambda_j}{(T_j \bar{X}_m - 1)^2} \left\{ e^{i\alpha_j} + \frac{e^{-i\alpha_j}}{\bar{X}_m^2} + \right. \\
& S_{mj}^{II}(\eta, \xi) = \frac{1}{2\pi \bar{X}_m} \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{T_j \bar{X}_m - 1}, & \left. \frac{T_j \bar{X}_m - 1}{\bar{X}_m^2} e^{-i\alpha_j} - \frac{e^{i\alpha_j} \bar{F}_{mj}}{\bar{X}_m} - \frac{e^{i\alpha_j}}{\bar{X}_m} \frac{\bar{F}_{mj}}{T_j \bar{X}_m - 1} \right\}, \\
& R_{mj}^{III}(\eta, \xi) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda_j}{(T_j \bar{X}_m - 1)^2} \left\{ e^{i\alpha_j} + \frac{e^{-i\alpha_j}}{\bar{X}_m^2} + \frac{T_j \bar{X}_m - 1}{\bar{X}_m^2} e^{-i\alpha_j} - \right. & L_{mj}^{III}(\eta, \xi) = \frac{1}{\pi i \bar{X}_m^2} \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{T_j \bar{X}_m - 1} \left(1 + \frac{1}{2(T_j \bar{X}_m - 1)} \right), \\
& \left. \frac{e^{i\alpha_j} \bar{F}_{mj}}{\bar{X}_m} - \frac{e^{i\alpha_j}}{\bar{X}_m} \frac{\bar{F}_{mj}}{T_j \bar{X}_m - 1} \right\}, & K_{mj}^{IV}(\eta, \xi) = -\frac{\tilde{\kappa} \lambda_j \bar{X}_m e^{i\alpha_j}}{2\pi i (T_j \bar{X}_m - 1)}, \\
& S_{mj}^{III}(\eta, \xi) = -\frac{1}{\pi \bar{X}_m^2} \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{T_j \bar{X}_m - 1} \left(1 + \frac{1}{2(T_j \bar{X}_m - 1)} \right), & L_{mj}^{IV}(\eta, \xi) = -\frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{2\pi i \bar{T}_j}, \\
& R_{mj}^{IV}(\eta, \xi) = \frac{\lambda_j \bar{X}_m e^{i\alpha_j}}{2\pi (T_j \bar{X}_m - 1)}, \quad S_{mj}^{IV}(\eta, \xi) = \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{2\pi \bar{T}_j}, & K_{mj}^V(\eta, \xi) = \frac{\tilde{\kappa} \lambda_j e^{i\alpha_j}}{2\pi i} \left(\frac{1}{T_j - X_m} + \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\bar{T}_j - \bar{X}_m} \right), \\
& K_{mj}(\eta, \xi) = \begin{cases} \frac{\tilde{\kappa}}{\pi i (\eta - \xi)} + \tilde{K}_{mj}(\eta, \xi), & m = j, \\ \tilde{K}_{mj}(\eta, \xi) + K_{mj}^V(\eta, \xi), & m \neq j, \end{cases} & L_{mj}^V(\eta, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{\bar{T}_j - \bar{X}_m} \left(1 - \frac{T_j - X_m}{\bar{T}_j - \bar{X}_m} e^{-2i\alpha_m} \right), \\
& L_{mj}(\eta, \xi) = \begin{cases} \tilde{L}_{mj}(\eta, \xi), & m = j, \\ \tilde{L}_{mj}(\eta, \xi) + L_{mj}^V(\eta, \xi), & m \neq j, \end{cases} & \tilde{H}_m(\xi) = 2\gamma + \frac{\gamma'}{\bar{X}_m^2} + \frac{\gamma'}{\bar{X}_m^2} - e^{-2i\alpha_m} \left(\frac{\gamma'}{\bar{X}_m^4} + \frac{\gamma}{\bar{X}_m^2} + \frac{2(X_m \bar{X}_m - 1)}{\bar{X}_m^4} \gamma' - \gamma' - \frac{\gamma}{\bar{X}_m^2} \right), \\
& R_{mj}^V(\eta, \xi) = \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j}}{2\pi} \left(\frac{1}{T_j - X_m} + \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\bar{T}_j - \bar{X}_m} \right), & \gamma = \frac{p_1 + p_2}{4}, \quad \gamma' = -\frac{p_1 - p_2}{2}, \quad p_1 = \frac{hP_1}{M_y}, \quad p_2 = \frac{hP_2}{M_y^\infty}, \\
& S_{mj}^V(\eta, \xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{\bar{T}_j - \bar{X}_m} \left(1 - \frac{T_j - X_m}{\bar{T}_j - \bar{X}_m} e^{-2i\alpha_m} \right), & \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \\
& \tilde{K}_{mj}(\eta, \xi) = \tilde{\kappa} K_{mj}^I(\eta, \xi) - \left(1 + \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\bar{X}_m^2} \right) K_{mj}^{II}(\eta, \xi) - e^{-2i\alpha_m} \left(X_m - \frac{1}{\bar{X}_m} \right) K_{mj}^{III}(\eta, \xi) - & \tilde{P}_m(\xi) = -\tilde{\kappa} A + \frac{B}{\bar{X}_m^2} + A - \frac{B}{\tilde{\kappa} \bar{X}_m^2} - e^{-2i\alpha_m} \left\{ \frac{B}{\tilde{\kappa} \bar{X}_m^4} - \frac{A}{\bar{X}_m^2} - \frac{2B}{\tilde{\kappa}} \frac{X_m \bar{X}_m - 1}{\bar{X}_m^4} - B + \frac{\tilde{\kappa} A}{\bar{X}_m^2} \right\}, \\
& \quad - \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\bar{X}_m^2} K_{mj}^{IV}(\eta, \xi), & A = -0.375(1+\rho)(1-\nu), \quad B = 0.75(1-\rho)(1+\nu), \\
& \tilde{L}_{mj}(\eta, \xi) = \tilde{\kappa} L_{mj}^I(\eta, \xi) - \left(1 + \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\bar{X}_m^2} \right) L_{mj}^{II}(\eta, \xi) - & \rho = M_x^\infty / M_y^\infty, \\
& \quad - e^{-2i\alpha_m} \left(X_m - \frac{1}{\bar{X}_m} \right) L_{mj}^{III}(\eta, \xi) - \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\bar{X}_m^2} L_{mj}^{IV}(\eta, \xi), & Z_{0j} = \frac{z_{0j}}{R} = \frac{x_{0j}}{R} + i \frac{y_{0j}}{R}, \quad x_j = l_j \xi, \quad t = l_j \eta, \quad \lambda_j = \frac{l_j}{R}, \\
& L_{mj}^I(\eta, \xi) = \frac{1}{2\pi i \tilde{\kappa}} \left\{ \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{\bar{T}_j} + \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j} F_{mj}}{(\bar{T}_j X_m - 1)^2} - \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{X_m} \right. & q = -\frac{3}{2}(1+\nu), \\
& \left. \frac{X_m^2 + e^{-2i\alpha_j}}{\bar{T}_j X_m - 1} \right\}, & T_j = Z_{0j} + \lambda_j \eta e^{i\alpha_j}, \quad X_j = Z_{0j} + \lambda_j \xi e^{i\alpha_j}, \\
& & F_{mj} = X_m - Z_{0j} - \frac{e^{2i\alpha_j}}{X_m} + \bar{Z}_{0j} e^{2i\alpha_j}, \\
& & g'_m(t) = \frac{M_y^\infty G_m(l_m \eta)}{h^2} = \frac{2\mu}{(1+\kappa)i} \left[\frac{\partial(u_{II} + iv_{II})}{\partial x_m} \right],
\end{aligned}$$

$$G_m(\eta) = G_{m1}(\eta) + iG_{m2}(\eta),$$

$$y_m(\xi) = \frac{M_y^\infty Y_m(l_m \eta)}{Eh^3} = \frac{1}{1 + \bar{\kappa}} \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial x_m} \right],$$

$$Y_m(\eta) = Y_{m1}(\eta) + iY_{m2}(\eta), \quad m = \overline{1, M},$$

де $Y_{m1}(\eta)$, $Y_{m2}(\eta)$, $G_{m1}(\eta)$, $G_{m2}(\eta)$ – дійсні невідомі функції; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона.

З крайової умови (3) будемо мати

$$G_{m1}(\eta) + \frac{1 + \bar{\kappa}}{(1 + \kappa)(1 + \nu)} Y_{m2}(\eta) = 0, \quad \eta \in [-1, 1], \quad m = \overline{1, M}, \quad (7)$$

Також додаємо додаткові умови

$$\int_{-1}^1 Y_m(\eta) d\eta = 0, \quad \int_{-1}^1 \eta Y_{m1}(\eta) d\eta = 0, \quad \int_{-1}^1 G_m(\eta) d\eta = 0, \quad m = \overline{1, M}, \quad (8)$$

які впливають з однозначності кутів повороту, прогину пластини та переміщень при обході контуру кожної тріщини.

Щоб визначити сталу \bar{c}'_0 , використаємо умову однозначності прогину пластини при обході контуру отвору

$$\bar{c}'_0 = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^M \int_{-1}^1 \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j} Y_j(\eta)}{T_j} d\eta, \quad (9)$$

Таким чином, щоб визначити невідомі функції $Y_m(\eta)$, $G_m(\eta)$, $m = \overline{1, M}$, ми маємо систему сингулярних інтегральних рівнянь (4)–(9), яку будемо розв'язувати числово методом механічних квадратур [5, 7].

Обезрозмірене контактне зусилля $N_m^*(\xi)$ ($m = \overline{1, M}$) між берегами тріщин визначимо за формулами

$$N_m^*(\xi) = \frac{hN_m(\xi)}{2M_y^\infty} = \operatorname{Re} \left(\bar{H}_m(\xi) - \sum_{j=1}^M \int_{-1}^1 \left\{ R_{mj}(\eta, \xi) G_j(\eta) + S_{mj}(\eta, \xi) \overline{G_j(\eta)} \right\} d\eta \right), \quad (10)$$

Числовий аналіз та висновки. При числових розрахунках $\nu = 0.3$, $\gamma_k = h_k / h = 0.13$ ($k = \overline{1, M}$) кількість вузлів у методі механічних квадратур – 200.

На рис. 2 побудовані графіки зведеного контактного зусилля $N^* = hN/M_y^\infty$ між берегами тріщини

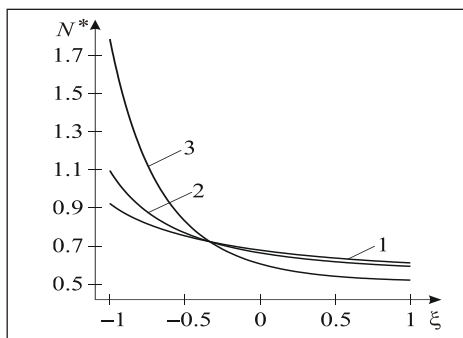


Рис. 2. Графіки контактної сили при різних значеннях навантаження p_2

від безрозмірної координати $\xi = x_i/l$ для випадку однієї радіальної тріщини (тобто коли $\alpha = 0$) при $X_0 = x_0/R = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon = d/R = 1$, $\lambda = d/R = 0.8$, $\rho = M_x^\infty/M_y^\infty = 1$, $p_2 = 0$. Крива 1 побудована при навантаженні $p_1 = 0$, крива 2 – при $p_1 = 1$, крива 3 – при $p_1 = 5$. Бачимо, що величина N^* є більшою у ближній до отвору вершині, ніж у дальній вершині. Крім того, в разі збільшення навантаження p_1 величина контактної сили N^* у ближній до отвору вершині збільшується, а у дальній вершині зменшується.

На рис. 3 зображено графіки зведеного контактної сили $N_i^*(\xi) = hN_i/M_y^\infty$ для випадку двох тріщин, центри яких лежать на осі Ox по різні сторони щодо отвору, між берегами i -ї тріщини від безрозмірної координати $\xi = x_i/l_i$ ($i = 1, 2$) при $\rho = M_x^\infty/M_y^\infty = 0$, $p_1 = hP_1/M_y^\infty = 0$, $p_2 = hP_2/M_y^\infty = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.8$, $\alpha_2 = 0$, $X_{0i} = x_{0i}/R = 1 + \varepsilon_i$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, причому суцільні лінії відповідають першій тріщині, а штрихові – другій. Крива 1 побудована при $\alpha_1 = 30^\circ$, крива 2 – при $\alpha_1 = 45^\circ$, крива 3 – при $\alpha_1 = 60^\circ$. З рис. 3 бачимо, що при $\alpha_1 > 71^\circ$ відбувається відставання берегів першої тріщини.

На рис. 4 показано безрозмірні коефіцієнти інтенсивності зусиль k_2 і моментів K_1, K_2 для випадку двох тріщин, центри яких лежать на осі Ox по різні сторони щодо отвору, у дальній вершині першої тріщини при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.8$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $p_1 = hP_1/M_y^\infty = 0$, $p_2 = hP_2/M_y^\infty = 0$ від кута $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Криві 1 отримані при $\rho = M_x^\infty/M_y^\infty = 1$, криві 2 – при $\rho = 3$, криві 3 – при $\rho = 5$. З рисунка бачимо, що K_1 при $\rho = 1$ і $0^\circ < \alpha < 106^\circ$, при $\rho = 3$ і $84^\circ < \alpha < 151^\circ$, при $\rho = 5$ і $86^\circ < \alpha < 161^\circ$ спадає із збільшенням α , а при $\rho = 1$ і $106^\circ < \alpha < 180^\circ$, при $\rho = 3$ і $\alpha \in (0^\circ, 84^\circ) \cup (151^\circ, 180^\circ)$, при $\rho = 5$ і

$\alpha \in (0^\circ, 86^\circ) \cup (161^\circ, 180^\circ)$ зростає із збільшенням α ; а K_2 при $\rho = 1$ і $\alpha \in (0^\circ, 30^\circ) \cup (99^\circ, 158^\circ)$, при $\rho = 3$ і $\alpha \in (0^\circ, 31^\circ) \cup (95^\circ, 156^\circ)$, при $\rho = 5$ і $\alpha \in (0^\circ, 33^\circ) \cup (94^\circ, 155^\circ)$ зростає із збільшенням α , а при $\rho = 1$ і $\alpha \in (30^\circ, 99^\circ) \cup (158^\circ, 180^\circ)$, при $\rho = 3$ і $\alpha \in (31^\circ, 95^\circ) \cup (156^\circ, 180^\circ)$, при $\rho = 5$ і $\alpha \in (33^\circ, 94^\circ) \cup (155^\circ, 180^\circ)$ спадає із збільшенням α .

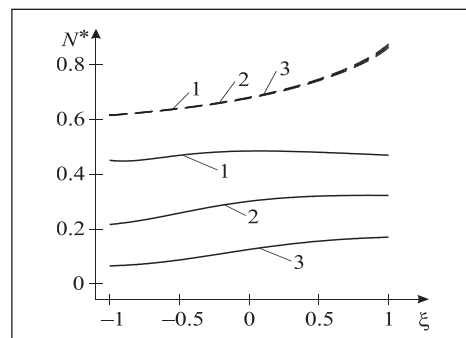


Рис. 3. Графіки контактної сили при різних кутах нахилу другої тріщини α_2

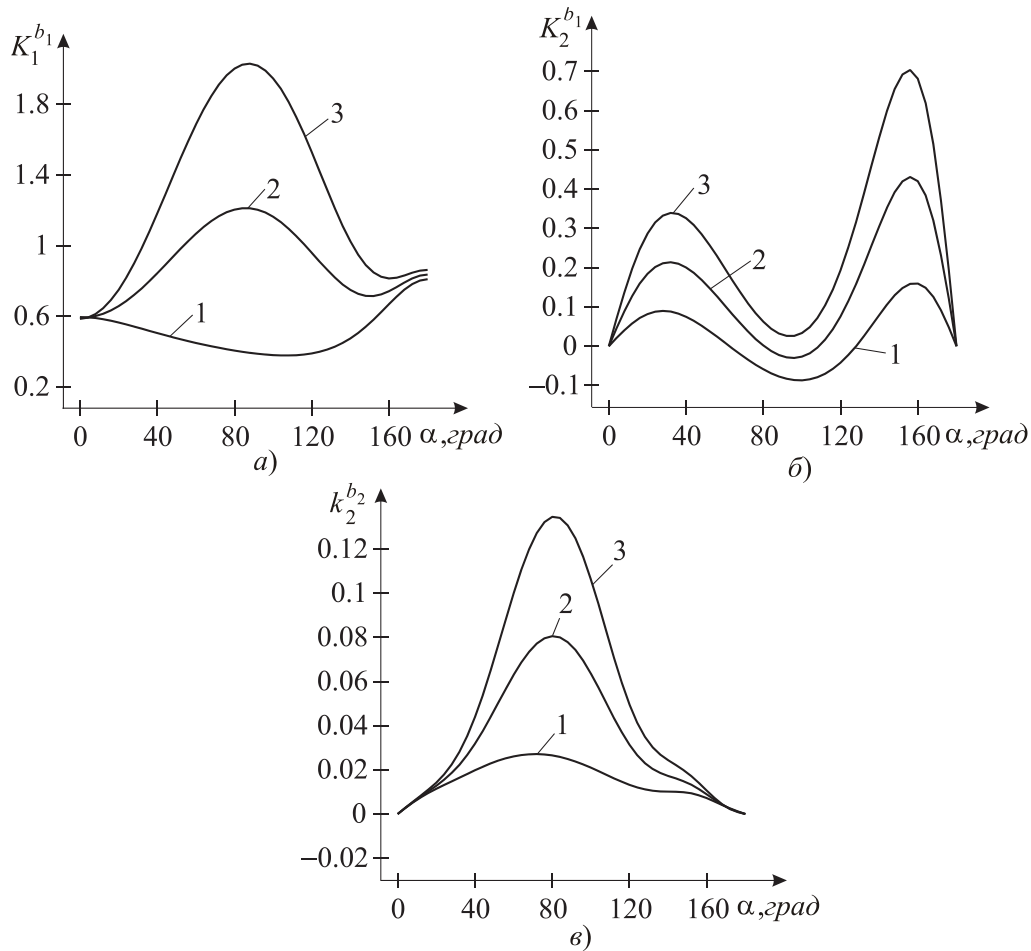


Рис. 4. Графіки коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів кута нахилу при різних значеннях ρ

ЛІТЕРАТУРА

1. Андрейкив А.Е. Пространственные задачи теории трещин. Киев : Наукова думка, 1982. 348 с.
2. Бережницький Л.Т., Делявський М.В., Панасюк В.В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. Киев : Наукова думка, 1979. 400 с.
3. Кушнір Р.М., Николишин М.М., Осадчук В.А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. Львів : СПОЛОМ, 2003. 320 с.
4. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва : Наука, 1966.
5. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распространение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев : Наукова думка, 1976. 444 с.
6. Прусов И.А. Метод сопряжения в теории плит. Минск : Белорусский государственный университет, 1975. 256 с.
7. Саврук М.П., Зеленьяк В.М. Двовимірні задачі теорії пружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами. Львів : РАСТР, 2009. 212 с.
8. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев : Наукова думка. 1981. 324 с.
9. Кальтгоф Дж.Ф., Шацький І.П., Бюргель А. Експериментальне підтвердження контакту берегів тріщини при згині пластини. *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: В 3-х т. / Під заг. ред. В.В. Панасюка*. Львів : Каменяр, 1999. Т. 1. С. 72–74.
10. Шацький І.П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами. *Доповіді Академії наук УРСР. Серія А. Фізико-математичні та технічні науки*. 1988. № 7. С. 49–51.
11. Young M., Sun C. Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates. *International Journal of Fracture*. 1992. Vol. 55. P. 81–93.

12. Опанасович В.К., Слободян М.С. Двосторонній згин пластини з круговим отвором та тріщиною з врахуванням контакту її берегів. *Вісник Донецького університету. Серія А. Природничі науки.* № 1, 2005. С. 85–89.
13. Опанасович В.К., Слободян М.С. Двовісний згин пластини з круговим отвором і двома радіальними тріщинами, береги яких контактують. *Математичні методи та фізико-механічні поля.* 2006. Т. 49. № 3. С. 106–119.
14. Dempsey J.P., Shekhtman I.I., Slepian L.L. Closure of a through crack in a plate under bending. *International Journal of Solids and Structures.* 1998. Vol. 35. P. 4077–4089.
15. Slepian L.I., Dempsey J.P., Shekhtman I.I. Asymptotic solutions for crack closure in an elastic plate under combined extension and bending. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 1995. № 43. P. 1727–1749.
16. Опанасович В.К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь. *Наукові нотатки Луцького технічного університету.* 2007. Вип. 20 (2). С. 123–127.
17. Опанасович В.К., Слободян М.С., Звізло І.С. Двовісний згин пластини з круговим отвором та крайовою радіальною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2015. № 1. С. 127–135.
18. Опанасович В.К., Слободян М.С., Бедрій В.Я. Двовісний згин ізотропної пластини з прямокутною жорствою шайбою та прямолінійною наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математична.* 2015. № 3. С. 21–24.

REFERENCES

1. Andreykiv A.E. (1982) *Prostranstvennye zadachi teorii treshchin* [Spatial problems of crack theory]. Kiev: Naukova dumka. (in Russian)
2. Berezhnits'kiy L.T., Delyavskiy M.V., Panasyuk V.V. (1979) *Izhib tonkikh plastin s defektami tipa treshchin* [Bending of thin plates with defects such as cracks]. Kiev: Naukova dumka. (in Russian)
3. Kushnir R.M., Nykolyshyn M.M., Osadchuk V.A. (2003) *Pruzhnyi ta pruzhno-plastychnyi hranychnyi stan obolonok z defektamy* [Elastic and elastic-plastic shells with boundary condition defects]. Lviv: SPOLOM. (in Ukrainian)
4. Muskhelishvili N.I. (1966) *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Moskva: Nauka. (in Russian)
5. Panasyuk V.V., Savruk M.P., Datsyshin A.P. (1976) *Rasprostraneniye napryazheniy okolo treshchin v plastinakh i obolochkakh* [Distribution of stresses around cracks in plates and shells]. Kiev: Naukova dumka. (in Russian)
6. Prusov I.A. (1975) *Metod sopryazheniya v teorii plit* [The conjugation method in plate theory]. Minsk: Belorusskiy gosudarstvennyy universitet. (in Russian)
7. Savruk M.P., Zeleniak V.M. (2009) *Dvovymirni zadachi teorii pruzhnosti dlia kuskovo-odnorodnykh til z trishchynamy* [Two-dimensional problems of the theory of elasticity for piecewise homogeneous bodies with cracks]. Lviv: RASTR. (in Ukrainian)
8. Savruk M.P. (1981) *Dvumernye zadachi uprugosti dlya tel s treshchinami* [Two-dimensional elasticity problems for bodies with cracks]. Kiev: Naukova dumka. (in Russian)
9. Kalthof Dzh.F., Shatskiy I.P., Biurhel A. (1999) *Eksperymentalne pidtverdzhennia kontaktu berehiv trishchyny pry zghyni plastyny* [Experimental confirmation of the contact of the crack]. *Mekhanika ruinvannia materialiv i mitsnist konstruktsii* [Mechanics of fracture of materials and strength of structures] (eds V.V. Panasiuk). Lviv: Kameniar, 1999, vol. 1, pp. 72–74. (in Ukrainian)
10. Shatskiy I.P. (1988) *Zghyn plastyny, oslablenoi rozrizom z kontaktuiuchymy berehamy* [Bending of a plate weakened by a section with contacting shores]. *Dopovidi Akademii nauk URSS. Seriya A. Fizyko-matematychni ta tekhnichni nauky* [Report of the USSR Academy of Sciences. Ser. A. Phys.-Math. and Tech. Science], no. 7, pp. 49–51. (in Ukrainian)
11. Young M., Sun C. (1992) Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates. *International Journal of Fracture*, vol. 55, pp. 81–93.
12. Opanasovych V.K., Slobodian M.S. (2005) *Dvostoronniy zghyn plastyny z kruhovym otvorom ta trishchynoiu z vrakhuvanniam kontaktu yii berehiv* [Bilateral bending of a plate with a circular hole and a crack taking into account the contact of its banks]. *Visnyk Donetskoho universytetu. Seriya A. Pryrodnychi nauky* [Visnyk of Donetsk National University], no 1, pp. 85–89. (in Ukrainian)

13. Opanasovych V.K., Slobodian M.S. (2006) *Dvovisnyi zghyn plastyny z kruhovym otvorom i dvoma radialnymi trishchynamy, berehy yakykh kontaktuiut* [Biaxial bending of a plate with a circular hole and two radial cracks, the shores of which are in contact]. *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polia* [Mathematical methods and physical and mechanical fields], vol. 49, no. 3, pp. 106–119. (in Ukrainian)
14. Dempsey J.P., Shekhtman I.I., Slepyan L.L. (1998) Closure of a through crack in a plate under bending. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 35, pp. 4077–4089.
15. Slepyan L.I., Dempsey J.P., Shekhtman I.I. (1995) Asymptotic solutions for crack closure in an elastic plate under combined extension and bending. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, no 43, pp. 1727–1749.
16. Opanasovych V. K. (2007) *Zghyn plastyny z naskriznoiu priamoliniinoiu trishchynoiu z urakhuvanniam shyryny oblasti kontaktu yii poverkhon* [Bending of a plate with a through rectilinear crack taking into account the width of the contact area of its surfaces]. *Naukovi notatky Lutskoho tekhnichnoho universytetu* [Scientific Notes of Lutsk Technical University], vol. 20 (2), pp. 123–127. (in Ukrainian)
17. Opanasovych V.K., Slobodian M.S., Zvizlo I.S. (2015) *Dvovisnyi zghyn plastyny z kruhovym otvorom ta kraiovoiu radialnoiu trishchynoiu z urakhuvanniam shyryny oblasti kontaktu yii berehiv* [Biaxial bending of a plate with a circular hole and an edge radial crack taking into account the width of the contact area of its shores]. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Fizyko-matematychni nauky* [Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical sciences], no 1, pp. 127–135. (in Ukrainian)
18. Opanasovych V.K., Slobodian M.S., Bedrii V.Ya. (2015) *Dvovisnyi zghyn izotropnoi plastyny z priamokutnoiu zhorstvoiu shaiboju ta priamoliniinoiu naskriznoiu trishchynoiu z urakhuvanniam shyryny oblasti kontaktu yii berehiv* [Biaxial bending of an isotropic plate with a rectangular rigid washer and a rectilinear through crack, taking into account the width of the contact area of its shores]. *Visnyk Kyivskoho natsionalnoho universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Seriya fizyko-matematychna* [Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physical and mathematical series], no. 3, pp. 21–24. (in Ukrainian)

КОНТАКТ ЗІ ЗЧЕПЛЕННЯМ І ПРОКОВЗУВАННЯМ ЦИЛІНДРИЧНОГО ПЛОСКОГО ШТАМПА З ЗАОКРУГЛЕНИМ КРАЄМ ТА ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ

Стреляєв Ю. М.

*кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри фундаментальної математики
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-4400-7824
strelkiny@gmail.com*

Тітова О. О.

*кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри фундаментальної математики
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0001-8471-0867
toa7676@gmail.com*

Ключові слова: *контактна задача, штамп із заокругленим краєм, тертя Кулона, квазістатична задача, інтегральне рівняння, числовий розв'язок.*

Розглянуто контактну задачу про вдавлювання жорсткого кругового циліндричного штампа в лінійно пружний ізотропний півпростір за наявності тертя. Межі зон зчеплення і проковзування заздалегідь невідомі. Поверхня, яка обмежує основу штампа, складалась із плоскої кругової ділянки в центрі і сферичного заокруглення в кільцевій області біля краю основи штампа. Навантаження тіл відбувалось за рахунок діючої вздовж осі симетрії штампа монотонно зростаючої нормальної сили. Задача формулювалася у квазістатичній постановці. Процес навантаження складався з скінченного числа кроків. Для урахування тертя використовувався закон Кулона в класичній неспрошеній формі. Граничні умови контактної взаємодії визначені системою рівностей і нерівностей у заданій обмеженій області, яка априорі включає в себе поверхню контакту на всіх етапах навантаження. Задачу зведено до розв'язання послідовності одностипних систем нелінійних граничних інтегральних рівнянь, які відповідають послідовним крокам дискретного процесу навантаження. Чисельний метод розв'язання одержаних систем полягав в їх регуляризації, потім дискретизації і застосуванні ітераційного процесу для наближеного розв'язання дискретизованих систем. Запропонованим методом одержано числові розв'язки контактної задачі при різних значеннях радіуса плоскої центральної ділянки основи штампа. Виконано порівняння одержаних розв'язків із числовими розв'язками відповідних статичних задач при однокроковому миттєвому навантаженні. Встановлено, що при малих радіусах плоскої ділянки розв'язки істотно відрізняються. Похибка, за якої задача може бути сформульована в статичній постановці, досягається за умови, що радіус плоскої частини становить не менше 80% радіуса штампа.

STICK-SLIP CONTACT OF THE CYLINDRICAL FLAT PUNCH WITH A ROUNDED EDGE AND ELASTIC HALF-SPACE

Streliaiev Yu. M.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor at the Department of Fundamental Mathematics
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-4400-7824
strelkiny@gmail.com*

Titova O. O.

*Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Fundamental Mathematics
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0001-8471-0867
toa7676@gmail.com*

Key words: *contact problem,
punch with rounded edge,
Coulomb friction, quasi-static
problem, integral equation,
numerical solution.*

The contact problem on indentation of a rigid circular cylindrical punch into a linearly elastic isotropic half-space in the presence of friction is considered. The boundary between stick and slip zones is unknown in advance. The boundary surface of the punch base consisted of a flat circular area in the center and a spherical rounded annular area near the boundary. The bodies were loaded by the monotonically increasing normal force applied along the axis of symmetry of the punch. The loading process consisted of a finite number of steps. To take into account friction, we used the Coulomb law in classical unsimplified form. The problem was formulated in the modified quasi-static statement. This statement is based on the original hypothesis of the possibility of a small perturbation of the loading conditions in quasistatic frictional contact problems of elasticity. The boundary conditions for contact interaction of bodies at each step of discrete loading process are expressed as a system of equalities and inequalities. Mechanical meaning of this modification is an introduction of a small delay in action of normal contact stresses with respect to tangential contact stresses at each step of loading process. The boundary conditions of contact interaction are given by a system of equalities and inequalities in a prescribed bounded region containing the contact surface at all stages of loading. The problem is reduced to a sequence of similar systems of nonlinear boundary integral equations, corresponding to successive steps of the discrete loading process. The numerical method is applied. The analyzed system of equations is regularized. Then the corresponding regularized system is discretized. The iterative process for solving the resulting systems is constructed. Using this method, we obtained numerical solutions of the contact problem for different values of the radius of the flat central area of the base of the punch. The obtained solutions are compared with the numerical solutions of the corresponding static problems for a one-step instantaneous load. It has been established that for small radii of the flat area the solutions are significantly different. The error at which the problem can be formulated in the static statement is achieved if the radius of the flat area of base is not less than 80% of the radius of the punch.

Вступ. Задача про контактну взаємодію пружних тіл є важливою задачею механіки деформованого твердого тіла і має широке технічне застосування в машинобудуванні, транспорті, будівельній механіці та інших галузях. Актуальність цієї задачі зумовлена питаннями міцності і зносостійкості різних механічних систем і конструкцій. У процесі визначення контактних напружень у взаємодіючих елементах таких систем часто виникає необхідність враховувати тертя між контактуючими поверхнями цих елементів. Для врахування тертя в контактних задачах теорії пружності, як правило, використовують закон Кулона [1].

Складність таких задач пов'язана з тим, що поверхня контакту і виникаючі на ній зчеплення і проковзування заздалегідь невідомі і можуть мати складну непрогнозовану форму. Ці обставини призводять до необхідності використання геометричних та фізичних нелінійностей у процесі формулювання таких задач, що істотно ускладнює отримання їх аналітичних розв'язків.

Аналіз стану проблеми. Нині для розв'язання контактних задач про взаємодію пружних тіл з урахуванням тертя використовують точні та наближені аналітичні методи [1–3], а також чисельні методи, які базуються на варіаційній постановці задачі [4–6] та зведенні її до різних операторних рівнянь [7–12]. На відміну від аналітичних, чисельні методи орієнтовані на розв'язання контактних задач, для яких ділянка контакту, зони зчеплення і проковзування заздалегідь невідомі і можуть мати складну, не прогнозовану конфігурацію. Труднощі, які виникають при чисельній реалізації варіаційних методів розв'язання таких складних контактних задач, відсутні при використанні методів [9–12], заснованих на застосуванні нелінійних операторних рівнянь для моделювання контактної взаємодії тіл.

Нелінійні інтегральні рівняння [10; 11] дають змогу (на відміну від інших аналогічних рівнянь [7; 8]) враховувати наявність проковзування і зчеплення між контактуючими поверхнями тіл. Але при використанні цих рівнянь достатньо складно виразити умови єдиності розв'язку контактної задачі, виконати регуляризацію цих рівнянь та довести збіжність ітераційних процесів, які використовуються для отримання розв'язку. У роботі [12] одержано нелінійні операторні рівняння, для яких вдалося довести єдиність їх розв'язку і суворо обґрунтувати основні етапи методу їх наближеного розв'язання.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є дослідження розподілів контактного навантаження, що виникає в процесі фрикційного вдавлювання циліндричних штампів із криволінійною основою у пружній півпростір.

Реалізація цієї мети передбачала виконання таких завдань:

- методом крайових нелінійних інтегральних рівнянь [12] одержати наближений розв'язок квазістатичної контактної задачі про вдавлювання в лінійно пружний півпростір плоского циліндричного штампа, підшова якого має заокруглення біля краю;

- проаналізувати залежність параметрів контакту від величини радіусу плоскої ділянки основи штампа;

- перевірити коректність отриманих результатів шляхом їх порівняння з відомими даними та альтернативними числовими розрахунками.

Метод числового розв'язання просторової квазістатичної контактної задачі. Розглянемо загальну постановку тривимірної квазістатичної контактної задачі про взаємодію двох лінійно пружних ізотропних тіл. У випадку, коли одне із тіл є абсолютно жорстким, будемо вважати його умовно пружним із нескінченним модулем Юнга. Будемо вважати, що взаємодія тіл супроводжується тертям Кулона [1]. Навантаження тіл здійснюються повільно і складається із скінченної кількості l послідовних станів рівноваги (кроків навантаження). Задача полягає в знаходженні на кожному кроці навантаження ділянок контакту тіл і розподілів контактних напружень на цих ділянках.

При певних припущеннях [12] крайові умови контактної взаємодії на i -ому кроці навантаження можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} p_i(s) \geq 0; \quad u_i(s) \geq 0; \quad p_i(s) \cdot u_i(s) &= 0; \\ \sqrt{p_{2i}^2(s) + p_{3i}^2(s)} &\leq \mu \cdot p_i(s); \\ \sqrt{[\dot{u}_{2i}(s)]^2 + [\dot{u}_{3i}(s)]^2} \cdot p_{2i}(s) &= \\ &= -\mu \cdot p_i(s) \cdot \dot{u}_{2i}(s); \\ \sqrt{[\dot{u}_{2i}(s)]^2 + [\dot{u}_{3i}(s)]^2} \cdot p_{3i}(s) &= \\ &= -\mu \cdot p_i(s) \cdot \dot{u}_{3i}(s), \end{aligned} \quad (1)$$

де:

Ω – обмежена плоска область, яка містить невідому площадку контакту;

$u_i(s), u_{2i}(s), u_{3i}(s)$ – відносні переміщення взаємодіючих тіл у точці $s \in \Omega$;

$p_i(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s)$ – контактні напруження в точці $s \in \Omega$;

$\dot{u}_{2i}(s), \dot{u}_{3i}(s)$ – компоненти вектора швидкості відносного проковзування в точці $s \in \Omega$;

μ – коефіцієнт тертя.

Надалі будемо вважати, що вектор-функції $p_i(s) = (p_i(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s))$ та $u_i(s) = (u_i(s), u_{2i}(s), u_{3i}(s))$ належать гільбертовому простору $L_2^3(\Omega)$ [10]. Зв'язок між компонентами цих вектор-функцій визначається співвідношеннями [12]:

$$u_{ki}(s) = \sum_{j=1}^3 A_{kj}(p_{ji})_s - f_{ki}(s) \equiv F_k(p_i, \Delta_{ki})_s, \quad (2)$$

де:

$$f_{ki}(s) \in L_2(\Omega), \quad f_{1i}(s) = -\delta_0(s) - \Delta_{1i}, \quad f_{2i}(s) = -\Delta_{2i}, \\ f_{3i}(s) = -\Delta_{3i};$$

$\delta_0(s) \in L_2(\Omega)$ – початковий зазор між тілами;
 Δ_{ki} – відносні зміщення віддалених точок тіл на i -ому кроці навантаження.

Інтегральні оператори впливу $A_{kj} : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, які входять у співвідношення (2), мають вигляд

$$A_{kj}(x)_s = \int_{\Omega} K_{kj}(s, s') \cdot x(s') ds', \quad (k, j = \overline{1, 3}), \quad (3)$$

У разі апроксимації тіл пружними півпросторами функції $K_{kj}(s, s')$ відомі із розв'язків Буссінеска і Черруті [13].

Таким чином, контактна задача зводиться до визначення на кожному i -ому кроці навантаження невідомих функцій $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s) \in L_2(\Omega)$, які майже скрізь на Ω задовольняють співвідношення (1) з урахуванням (2), (3).

Згідно з підходом, запропонованим в [12], крайові умови (1) можна записати у спрощеній формі:

$$p_{1i}(s) \geq 0; \quad F_1(p_i, \Delta_{1i})_s \geq 0; \\ p_{1i}(s) \cdot F_1(p_i, \Delta_{1i})_s = 0; \\ \sqrt{p_{2i}^2(s) + p_{3i}^2(s)} \leq \mu \cdot p_{1i-1}(s); \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{2i}(s) = \\ = -\mu \cdot p_{1i-1}(s) \cdot F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s; \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{3i}(s) = \\ = -\mu \cdot p_{1i-1}(s) \cdot F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s, \quad (4)$$

де:

$$\tilde{\Delta}_{2i}(s) = \Delta_{2i} - \sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_{ji-1})_s - \Delta_{2i-1}; \\ \tilde{\Delta}_{3i}(s) = \Delta_{3i} - \sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_{ji-1})_s - \Delta_{3i-1}.$$

Систему співвідношень (4) можна звести до операторного рівняння [12]

$$p_i = G_{\mu p_{i-1}}(p_i - E \cdot (A(p_i) - \tilde{f}_i)), \quad (5)$$

де: $i = \overline{1, l}$; E – довільна додатна константа;

$$\tilde{f}_i(s) = (-\delta_0(s) - \Delta_{1i}, -\tilde{\Delta}_{2i}(s), -\tilde{\Delta}_{3i}(s)).$$

Лінійний обмежений оператор впливу $A : L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$ визначено співвідношеннями

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3) \in L_2^3(\Omega); \\ y = A(x), \quad y_k = \sum_{j=1}^3 A_{kj}(x_j) \quad \forall k = \overline{1, 3}. \end{cases} \quad (6)$$

Неперервний нелінійний оператор $G_{\mu g} : L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$ задано рівностями

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3) \in L_2^3(\Omega); \\ y = G_{\mu g}(x), \\ y_1(s) = h(x_1(s)), \\ y_2(s) = q(x_2(s), x_3(s), \mu g(s)), \\ y_3(s) = q(x_3(s), x_2(s), \mu g(s)), \quad s \in \Omega, \end{cases} \quad (7)$$

в яких функції h і q мають вигляд

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0; \end{cases} \quad (8)$$

$$q(x, y, z) = \begin{cases} x, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq z; \\ x \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \sqrt{x^2 + y^2} > z. \end{cases} \quad (9)$$

Операторне рівняння (5) є системою трьох нелінійних крайових інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s) \in L_2(\Omega)$.

Метод чисельного розв'язання таких рівнянь детально викладено в роботі [12]. Він полягає в регуляризації нелінійних інтегральних рівнянь, дискретизації регуляризованих рівнянь і використанні ітераційного методу для одержання наближеного розв'язку отриманих систем нелінійних скалярних рівнянь.

Результати дослідження. За допомогою викладеного методу було одержано чисельний розв'язок просторової квазістатичної контактної задачі про вдавлення у пружній півпростір жорсткого кругового штампа радіуса R . Поверхня основи штампа складалась із плоскої кругової ділянки радіуса R_1 в центрі і сферичного закруглення радіуса R_2 в кільцевій зоні, біля краю основи (рис. 1).

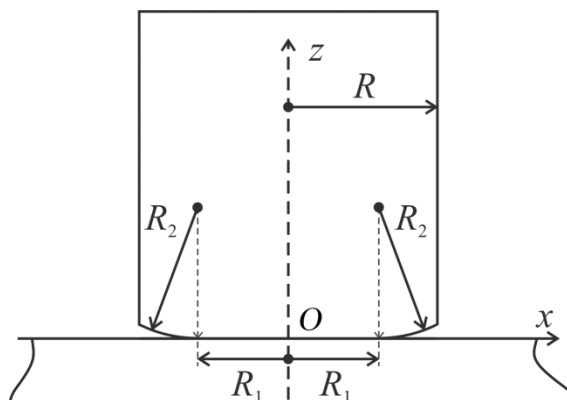


Рис. 1. Осьовий переріз штампа

Процес навантаження тіл виконувався за $l = 40$ кроків відповідно до закону зміни зміщення штампа:

$$\Delta_{ii} = -\frac{|\Delta_i|}{l} \cdot i, \quad i = \overline{1, l}, \quad (10)$$

де $|\Delta_i|$ – кінцеве значення абсолютної величини нормального переміщення штампа. Дотичні переміщення Δ_{2i} і Δ_{3i} дорівнювали нулю на всіх кроках навантаження.

Використовувались такі вихідні данні: модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона півпростору рівні $3,5 \cdot 10^4$ МПа і 0,44 відповідно; коефіцієнт тертя $\mu = 0,07$.

Числові розв’язки, одержані при різних значеннях параметра $\alpha = R_1/R$, порівнювались із числовими розв’язками відповідних статичних і квазістатичних задач немодифікованої постановці [11]. У випадку $\alpha = 1$ результати порівнювались із відомим розв’язком задачі [4]. Радіус R_2 обирали так, щоб радіус площадки контакту a на останньому кроці навантаження дорівнював $0,95 \cdot R$. Одержані результати представлені на рис. 2–5. Тут p і q – нормальна і дотична складові частини питомого контактного навантаження в точках осі x , a – радіус площадки контакту, $p(0)$ – тиск

у центрі ділянки контакту. Тут квадрати відповідають одержаному числовому розв’язку, круги – числовому розв’язку квазістатичної задачі в немодифікованій постановці [11], одержаному при $l = 20$ в законі (9), пунктирна лінія – числовому розв’язку статичної задачі [11] при $l = 1$. Суцільна лінія на рис. 5 відповідає розв’язку [4].

Обговорення результатів. Аналіз одержаних результатів показав, що при значеннях α із проміжку від 0 до 0,7 числовий розв’язок квазістатичної задачі істотно відрізняється від розв’язку відповідної статичної задачі. Так, у випадку сферичної основи штампа ($\alpha = 0$) максимальне відхилення квазістатичного розв’язку щодо його статичного аналога становило приблизно 35% (рис. 2). При $\alpha = 0,5$ це відхилення дорівнює 14% (Рис. 3). При значеннях α із проміжку від 0,8 до 1 це відхилення стає несуттєвим і не перевищує 3% (рис. 4, 5).

Порівняння одержаних числових розв’язків (квадрати на рис. 2–5) із числовими розв’язками цієї задачі в немодифікованій квазістатичній постановці (круги на рис. 2–5) показало, що максимальна відносна розбіжність цих розв’язків не перевищує 5% при усіх α . У випадку плоского

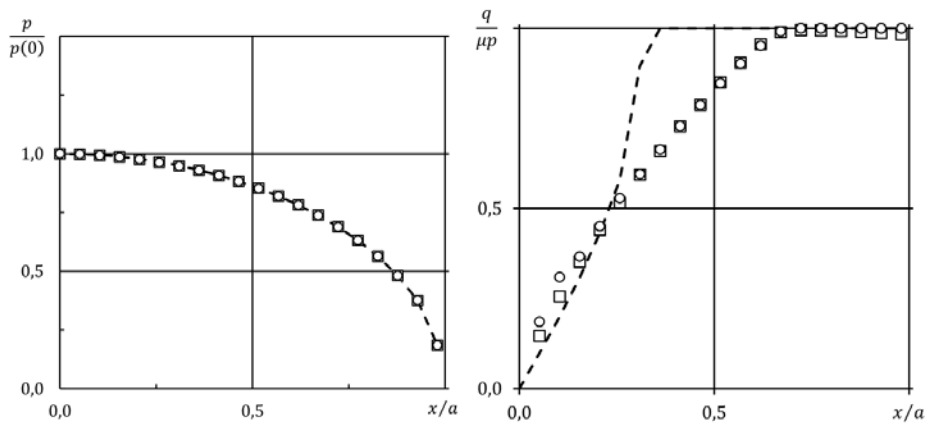


Рис. 2. Розподіли контактних зусиль при $\alpha = 0$ (сферичний штамп)

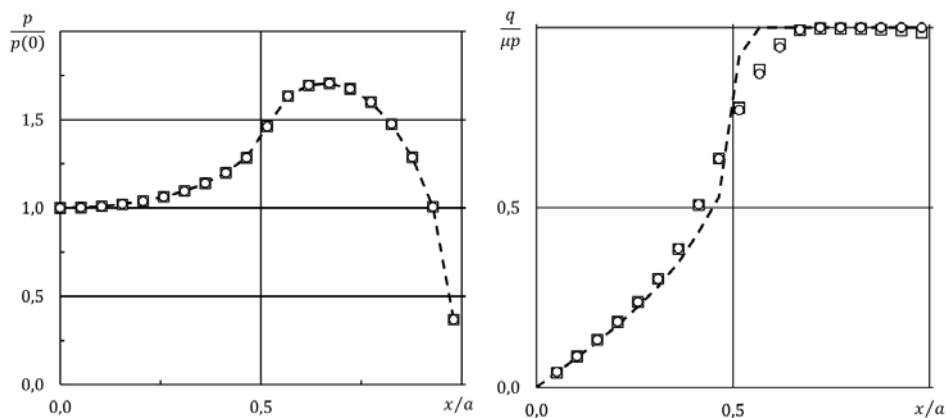


Рис. 3. Розподіли контактних зусиль при $\alpha = 0,5$

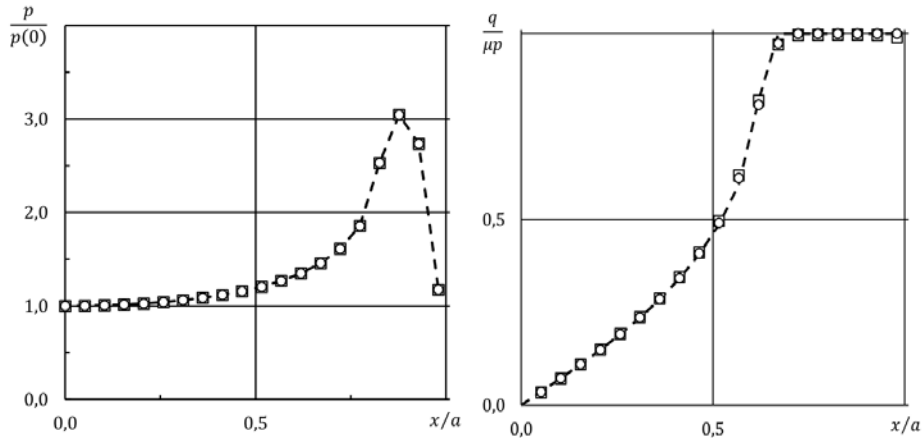


Рис. 4. Розподіли контактних зусиль при $\alpha = 0,8$

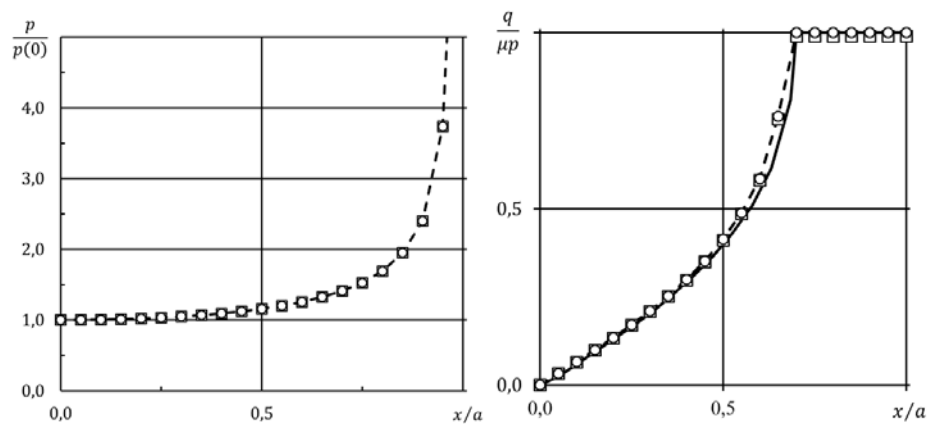


Рис. 5. Розподіли контактних зусиль при $\alpha = 1$
(плоский штамп з гострим краєм)

штампа (рис. 5) максимальне відхилення одержаного числового розв'язку від відомого розв'язку [4] становить 5%, а в більшості точок не перевищує 2%. Похибка 5% досягається в точці, розташованій поблизу границі зон зчеплення і проковзування (рис. 5). Таку похибку можна пояснити високим градієнтом функції $q/\mu p$ біля цієї границі.

Висновки. Розглянуто квазістатичну контактну задачу про фрикційне вдавлювання в лінійно пружний півпростір циліндричного штампа, підшва якого має плоску ділянку в центрі і сферичне закруглення біля краю. Методом крайових нелінійних інтегральних рівнянь знайдено розподіли пито-

мого контактного навантаження, що діє на основу штампа при різних розмірах її плоскої ділянки. Порівняння отриманих результатів із розв'язками статичних задач (при миттєвому навантаженні) показало, що розглянуту задачу можна формулювати в статичній постановці лише за умови, що радіус плоскої ділянки основи штампа становить не менш ніж 0,8 від радіусу його основи. В інших випадках цю задачу варто розглядати в квазістатичній постановці при покроковому навантаженні. Про коректність отриманих результатів свідчить їх добра відповідність іншим відомим розв'язкам та чисельним розрахункам.

ЛІТЕРАТУРА

1. Popov V.L. Contact Mechanics and Friction. Physical Principles and Applications. Berlin : Springer, 2017. 391p.
2. Zhupanska O.I. Contact problem for elastic spheres: Applicability of the Hertz theory to non-small contact areas. *International Journal of Engineering Science*. 2011. 49(7). P. 576–588.
3. Острик В.І. Метод факторизації та його узагальнення у змішаних задачах теорії пружності. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2018. 480 с.

4. Turner J.R. The frictional unloading problem on linear elastic half-space. *IMA Journal of Applied Mathematics*. 1979. Vol. 24. P. 439–469.
5. Kravchuk A.S. The variational method in contact problems. The present state of the problem and trends in its development. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2009. № 73(3). P. 351–357.
6. Andresen H., Hills D. A., Barber J. R., Vazquez J. Frictional half-plane contact problems subject to alternating normal and shear loads and tension in the steady state. *International Journal of Solids and Structures*. 2019. № 168. P. 166–171.
7. Galanov B.A. The method of boundary equations of the Hammerstein-type for contact problems of the theory of elasticity when the regions of contact are not known. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1985. 49(5). P. 634–640.
8. Aleksandrov V.M., Pozharskii D.A. Three-dimensional contact problems taking friction and non-linear roughness into account. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2004. № 68(3). P. 463–472.
9. Стреляев Ю.М., Клименко М.І., Стреляев О.Ю. Контакт плоского циліндричного штампа з пружним півпростором при немонотонному навантажуванні з урахуванням тертя. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2018. № 2. С. 142–151.
10. Александров А.И. Метод решения пространственной контактной задачи о взаимодействии двух упругих тел при наличии трения между ними. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2013. Т. 56, № 3. С. 29–42.
11. Александров А.И., Стреляев Ю.М. Метод нелинейных граничных интегральных уравнений для контактных задач теории упругости. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2014. № 3 (7). С. 36–40.
12. Стреляев Ю.М. Метод нелинейных граничных интегральных уравнений для решения квазистатической контактной задачи о взаимодействии упругих тел при наличии кулонова трения. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки*. 2016. Т. 20, № 2. С. 306–327.
13. Johnson K.L. *Contact Mechanics*. Cambridge : Cambridge University Press, 1985. 452 p.

REFERENCES

1. Popov, V. L. (2017) *Contact Mechanics and Friction. Physical Principles and Applications*. Berlin: Springer, 391.
2. Zhupanska, O. I. (2011). Contact problem for elastic spheres: Applicability of the Hertz theory to non-small contact areas. *International Journal of Engineering Science*, 49(7), pp. 576–588.
3. Ostryk V. I. (2018). *Metod faktoryzatsii ta yoho uzahalnennia u zmishanykh zadachakh teorii pruzhnosti* [Factorization method and its generalization in mixed problems of elasticity]. Kyiv: VPTs Kyivskiyi universytet. (in Ukrainian)
4. Turner, J. R. (1979). The frictional unloading problem on linear elastic half-space. *J. Inst. Math. and its Appl.*, vol. 24, pp. 439–469.
5. Kravchuk, A. S. (2009). The variational method in contact problems. The present state of the problem and trends in its development. *J. Appl. Math. Mech.*, 73(3), pp. 351–357.
6. Andresen, H., Hills, D. A., Barber, J. R., & Vazquez, J. (2019). Frictional half-plane contact problems subject to alternating normal and shear loads and tension in the steady state. *International Journal of Solids and Structures*, 168, pp. 166–171.
7. Galanov, B. A. (1985). The method of boundary equations of the Hammerstein-type for contact problems of the theory of elasticity when the regions of contact are not known. *J. Appl. Math. Mech.*, 49(5), pp. 634–640.
8. Aleksandrov, V. M., & Pozharskii, D. A. (2004). Three-dimensional contact problems taking friction and non-linear roughness into account. *Journal of applied mathematics and mechanics*, 68(3), pp. 463–472.
9. Streliaiev, Yu. M., Klymenko, M. I., & Streliaiev, O. Yu. (2018). Kontakt ploskoho tsylindrychnoho shtampa z pruzhnym pivprostorum pry nemo-notonnomu navantazhuvanni z urakhuvanniam tertia [Contact with friction of a flat cylindrical punch with an elastic half-space under nonmonotonic loading]. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences*, 2, pp. 142–151.
10. Aleksandrov, A. I. (2015). A Method for the Solution of a Three-Dimensional Contact Problem of Interaction of Two Elastic Bodies in the Presence of Friction. *Journal of Mathematical Sciences*, 205(4), pp. 518–534.
11. Alexandrov, A., & Streliaiev, Y. (2014). Metod nelinejnyh granichnyh integral'nyh uravnenij dlja kontakt'nyh zadach teorii uprugosti [Nonlinear boundary integral equation's method for elastic contact problems]. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 3(7), pp. 36–40.
12. Streliaiev, Yu. M. (2016). Metod nelinejnyh granichnyh integral'nyh uravnenij dlja reshenija kvazi-staticheskoy kontaktojnogo zadachi o vzaimodejstvii uprugih tel pri nalichii kulonova trenija [A nonlinear boundary integral equations method for the solving of quasistatic elastic contact problem with Coulomb friction]. *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, 20(2), pp. 306–327.
13. Johnson, K. L. (1985). *Contact Mechanics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 452.

УДК 539.3
DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-12>

ПЛОСКА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ БАГАТОШАРОВОЇ ОСНОВИ З НЕІДЕАЛЬНИМ ТЕПЛОВИМ КОНТАКТОМ МІЖ ШАРАМИ

Ткаченко І. Г.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри фундаментальної математики
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-4232-2484
tig.phd81@gmail.com*

Антоненко Н. М.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри вищої математики
Національний університет «Запорізька політехніка»
вул. Жуковського, 64, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-0427-6499
antonenkonina.ua@gmail.com*

Морозов Ю. В.

*аспірант кафедри фундаментальної математики
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-8234-6544
yuliysamiy@gmail.com*

Ключові слова: температура, теплопровідність, пружний шар, функції податливості, інтегральне перетворення Фур'є.

У запропонованій статті авторами отримано аналітичний розв'язок (у вигляді невластних інтегралів Фур'є) двовимірної стаціонарної задачі про визначення температурного поля в точках істотно багат шарової основи з неідеальним тепловим контактом між її шарами. У цій роботі розглянуто два типи крайових умов задачі, що розв'язується: на верхній межі багат шарової основи відомий закон розподілу температури (задача I) або на верхній межі основи відомий температурний потік (задача II). На нижній межі основи підтримується нульова температура, інші навантаження відсутні. Поставлена задача розв'язується за допомогою метода функцій податливості в просторі трансформант Фур'є. Раніше вказаний метод застосовувався лише до задач пружності, теплопровідності та термопружності для багат шарових основ та плит з ідеальним тепловим контактом між їх шарами. Для поставлених у роботі задач отримано аналітичні вирази для обчислення температури в точках шарів основи. Для чисельної реалізації отриманих результатів уведено модифіковані функції податливості, які являють собою різницю границі функції податливості та самої цієї функції, що дало змогу виділити слабо та швидко збіжні доданки у виразах для обчислення температури в кожному шарі багат шарової основи. Для верхнього шару перший доданок у виразі для температури може бути обчислений точно, використовуючи спеціальні таблиці інтегралів. Чисельні розрахунки виконано за допомогою математичного пакета Maple.

Як приклад було розглянуто чотиришарову основу, що складається з шарів однакової товщини, які мають різні механічні властивості. За результатами розрахунків було побудовано графіки розподілу температури за товщиною першого та четвертого шарів основи, що ілюструють вплив коефіцієнтів теплопровідності та теплового опору на розподіл температури в точках заданої чотиришарової основи. Аналіз отриманих результатів показав, що одночасне збільшення коефіцієнтів теплового опору призводить до збільшення температури в точках першого шару основи, а в четвертому шарі при цьому температура зменшується.

PLANE THERMAL CONDUCTIVITY PROBLEM FOR A MULTILAYER FOUNDATION WITH NON-IDEAL THERMAL CONTACT BETWEEN ITS LAYERS

Tkachenko I. H.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Pure Mathematics
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-4232-2484
tig.phd81@gmail.com*

Antonenko N. M.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Higher Mathematics
Zaporizhzhia Polytechnic National University
Zhukovskoho str., 64, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-0427-6499
antonenkonina.ua@gmail.com*

Morozov Yu. V.

*Postgraduate Student at the Department of Pure Mathematics
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-8234-6544
yuliysamiy@gmail.com*

Key words: *temperature, thermal conductivity, elastic layer, compliance functions, Fourier transform.*

An analytical solution (in the form of the improper Fourier integrals) of a two-dimensional stationary problem of determining temperature field at the points of a multilayer foundation with non-ideal thermal contact between its layers is obtained. The two types of boundary conditions are considered: either the temperature distribution law is known on the upper boundary (problem I) or the heat flux is known on the upper boundary (problem II). On the lower boundary of the foundation the temperature equals to zero is kept, there are no other loads. The considered problem is solved by the compliance functions method in the Fourier transforms space. Previously, this method was applied only to the problems of elasticity, thermal conductivity and thermoelasticity for foundations and plates with ideal thermal contact between their layers. The modified compliance functions were introduced for numerical realization of the obtained results. They are equal to the differences between the limits of the compliance functions and those functions themselves. The introduction of these functions allows to isolate weakly and rapidly convergent terms in the expressions for temperature in each foundation layer. For the considered problems, the analytical expressions for the temperature at the points of the foundation layers are obtained. The first term in the upper layer temperature

expression can be calculated exactly using special tables of integrals. The numerical calculations were made in the Maple mathematical package.

The numerical results for the four-layer foundation which consists of the same thickness layers with different mechanical properties are obtained. The graphs of temperature distributions over the thickness of the first and fourth layers are constructed. They are illustrated the influence of the thermal conductivity and thermal resistance coefficients on the temperature distribution at the points of the considered foundation. The analysis of the results enables us to make the following conclusions: the simultaneous increase of the thermal resistance coefficients leads to the increase (decrease) of temperature at the points of the first (fourth) layer of the foundation.

Вступ. Різні задачі геології, машинобудування та ракетобудування зводяться до розв’язання задач теплопровідності та термопружності для багат шарових плит, основ та пластин з ідеальним тепловим контактом між шарами [1–8]. Під час виготовлення шаруватих конструкцій важко забезпечити ідеальне з’єднання шарів. Між шарами, що контактують, може знаходитись тонкий проміжний шар деякого матеріалу з термопружними властивостями, які істотно відрізняються від подібних характеристик шарів, тому серед крайових задач термопружності істотний інтерес становлять задачі для багат шарових структур з неідеальним тепловим контактом між шарами. Різні типи моделювання неідеального теплового контакту між шарами використані в низці робіт, присвячених вивченню теплових процесів у шаруватих тілах [9–11].

У цій роботі метод функцій податливості [12] застосовано до розв’язування задачі про визначення температурного поля в точках багат шарової основи з неідеальним тепловим контактом між шарами [13]. Раніше цим методом було розв’язано задачу про термопружну деформацію багат шарової основи з ідеальним тепловим контактом між шарами [8].

Постановка задачі. Розглядається плоска задача теплопровідності для n -шарової основи (пакет зчеплених між собою пружних шарів, що лежать на абсолютно жорсткій півплощині) з неідеальним тепловим контактом між її шарами: на стиках сусідніх шарів різниці температур відповідних точок пропорційні їхнім тепловим потокам. Шари нумеруємо зверху вниз, починаючи з одиниці, півплощині присвоїмо номер $n + 1$. Кожен шар характеризується товщиною h_k , коефіцієнтом теплопровідності k_{Tk} та теплового розширення α_{Tk} , коефіцієнтами Ламе λ_k, μ_k . На верхній межі основи задана температура (задача I) або тепловий потік (задача II). На нижній межі основи підтримується нульова температура.

Метою статті є отримання аналітичного виразу для температури в точках багат шарової основи за умови неідеального теплового контакту між її шарами та представлення його у зручному для чисельної реалізації вигляді.

У кожному шарі вводимо декартову систему координат $O_k x z_k$ так, як показано на рис. 1.

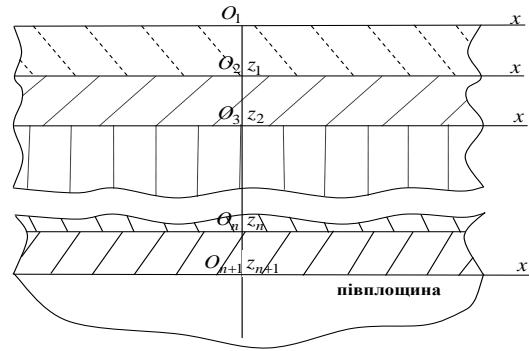


Рис. 1. Багат шарова основа

Крайові умови задачі I: $T_1(x, 0) = f(x), T_{n+1}(x, 0) = 0.$

Крайові умови задачі II: $\frac{\partial T_1(x, 0)}{\partial z} = g(x), T_{n+1}(x, 0) = 0.$

Умови на спільних межах шарів [13]:

$$k_{Tk} \frac{\partial T_k}{\partial z}(x, h_k) = \frac{1}{R_k} [T_{k+1}(x, 0) - T_k(x, h_k)],$$

$$k_{T_{k+1}} \frac{\partial T_{k+1}}{\partial z}(x, 0) = k_{Tk} \frac{\partial T_k}{\partial z}(x, h_k), \tag{1}$$

де R_k – коефіцієнт теплового опору.

Метод розв’язання. Задача визначення температурного поля для стаціонарного ізотропного тіла зводиться до розв’язання диференціального рівняння [14]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0.$$

У просторі трансформант Фур’є температуру в точках кожного шару можна представити у вигляді лінійної комбінації двох допоміжних функцій $\eta_k(\xi) = \bar{T}_k(\xi, 0)$ та $\varepsilon_k(\xi) = \frac{1}{p} \frac{d\bar{T}_k}{dz}(\xi, 0)$ цього шару [8]:

$$\bar{T}_k(\xi, z) = \text{ch}pz \eta_k + \text{sh}pz \varepsilon_k,$$

де $p = |\xi|$.

У роботі [15] отримано формули для обчислення допоміжних функцій кожного з шарів основи та доведено, що мають місце співвідношення:

$$\varepsilon_k = -r_k \eta_k, r_n = \text{cth } p_n, r_k = \frac{\Delta_k S_k + r_{k+1} (C_k + L_k p S_k)}{\Delta_k C_k + r_{k+1} (S_k + L_k p C_k)},$$

$$k = \overline{1, n-1}, \tag{2}$$

де $r_k = r_k(p)$ – функції податливості термопружної основи, $S_k = \text{sh}p_k$, $C_k = \text{ch}p_k$, $p_k = p h_k$, $L_k = R_k k_{T_k}$.

Оскільки $\lim_{p \rightarrow \infty} r_k = 1$, то для чисельної реалізації зручно ввести модифіковані функції податливості:

$$\tilde{r}_k = 1 - r_k.$$

З урахуванням формул (2) отримуємо:

$$\tilde{r}_n = -\frac{e^{-p_n}}{S_n}, \quad \tilde{r}_k = \frac{[\Delta_k + (1 - \tilde{r}_{k+1})(L_k p - 1)] e^{-p_k}}{\Delta_k C_k + (1 - \tilde{r}_{k+1})(S_k + L_k p C_k)},$$

$$k = \overline{1, n-1}.$$

Якщо на верхній межі основи задано тепловий потік, то для розв'язання задачі II зручно ввести функції податливості $d_k = \frac{1}{r_k}$, $k = \overline{1, n}$. Враховуючи, що $\lim_{p \rightarrow \infty} d_k = 1$, то для чисельної реалізації також зручно ввести модифіковані функції \tilde{d}_k :

$$\tilde{d}_k = 1 - d_k.$$

Вони матимуть вигляд:

$$\tilde{d}_n = \frac{e^{-p_n}}{C_n}, \quad \tilde{d}_k = \frac{[1 - L_k p - \Delta_k (1 - \tilde{d}_{k+1})] e^{-p_k}}{C_k + L_k p S_k + \Delta_k S_k (1 - \tilde{d}_{k+1})},$$

$$k = \overline{1, n-1}.$$

Наведемо формули, які дають змогу обчислити функції $\bar{T}_k(\xi, z)$ для будь-якого шару, якщо відома лише одна з допоміжних функцій цього шару:

$$\bar{T}_k(\xi, z) = (e^{-pz} + \tilde{r}_k \text{sh}pz) \eta_k \quad (\text{задача I}), \quad (3)$$

$$\bar{T}_k(\xi, z) = (\tilde{d}_k \text{ch}pz - e^{-pz}) \varepsilon_k \quad (\text{задача II}), \quad (4)$$

Представлення $\bar{T}_k(\xi, z)$ у формах (3) та (4) дає змогу спростити процес знаходження оригіналів температури:

$$T_k(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_k e^{-pz} e^{-i\xi x} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_k \tilde{r}_k \text{sh}pz e^{-i\xi x} d\xi, \quad (5)$$

$$T_k(x, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_k e^{-pz} e^{-i\xi x} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_k \tilde{d}_k \text{ch}pz e^{-i\xi x} d\xi.$$

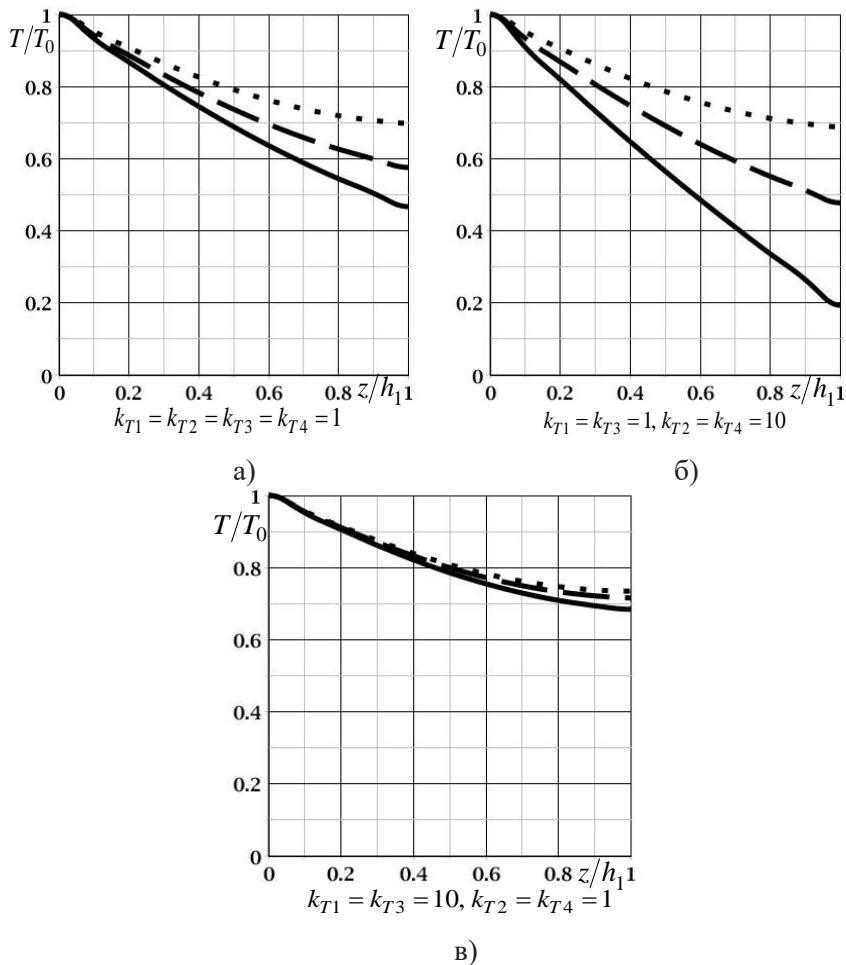


Рис. 2. Розподіл температури за товщиною першого шару (суцільна лінія – ідеальний контакт, пунктирна лінія – $R_1 = R_2 = R_3 = 1$, точкова лінія – $R_1 = R_2 = R_3 = 10$)

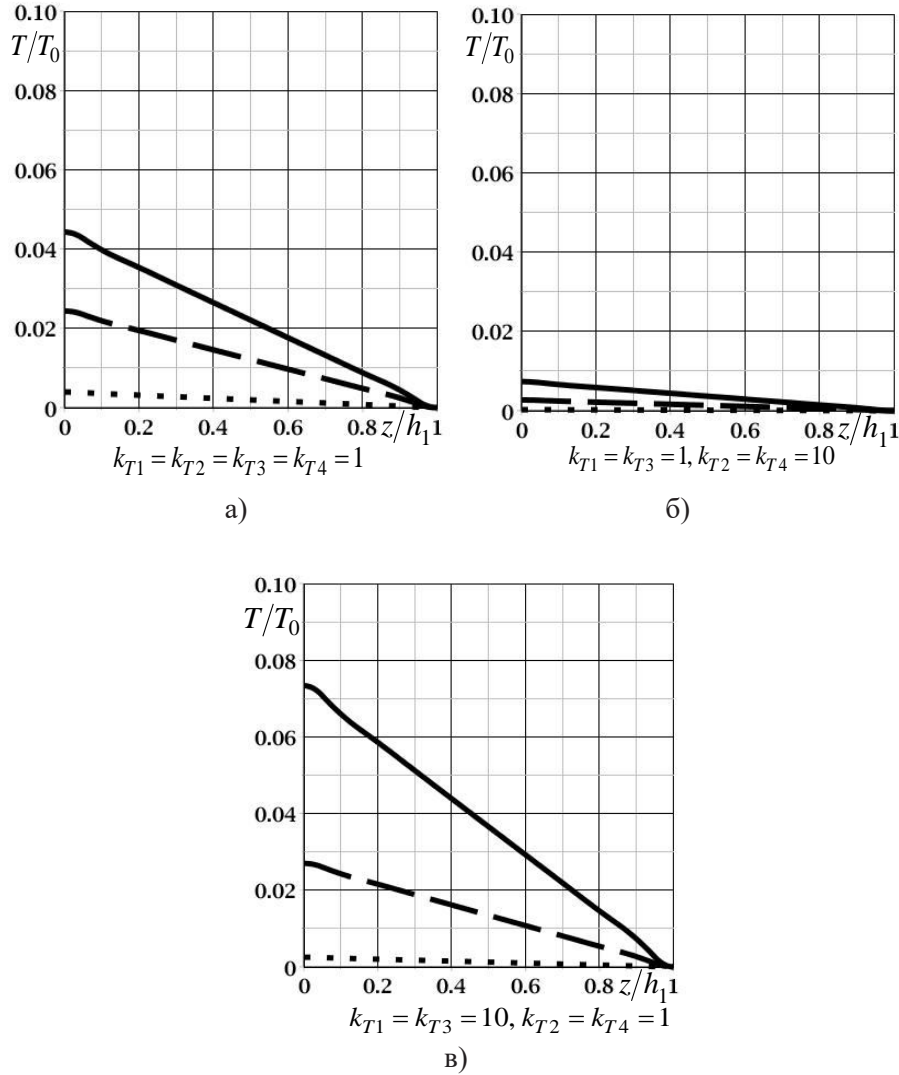


Рис. 3. Розподіл температури за товщиною четвертого шару (суцільна лінія – ідеальний контакт, пунктирна лінія – $R_1 = R_2 = R_3 = 1$, точкова лінія – $R_1 = R_2 = R_3 = 10$)

Для верхнього шару основи перший доданок кожної з двох останніх формул можна обчислити точно, використовуючи спеціальні таблиці [16], а другий легко інтегрується за допомогою математичних пакетів.

Результати чисельних досліджень та висновки. Чисельні розрахунки проведено для чотиришарової основи з параметрами шарів $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 1$ за крайових умов

$$T_1(x, 0) = \begin{cases} T_0, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Для заданого типу теплового навантаження:

$$\eta_1(\xi) = \int_{-1}^1 T_0 e^{i\xi x} dx = 2T_0 \int_0^1 \cos pxdx = \frac{2T_0 \sin p}{p}.$$

Для верхнього шару перший доданок формули (5) обчислюємо точно [16]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_1 e^{-pz} e^{-i\xi x} d\xi &= \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-pz} \sin p \cos(px)}{p} dp = \\ &= \frac{T_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-pz} \sin p(1-x) + \sin p(1+x)}{p} dp = \\ &= \frac{T_0}{\pi} \left(\arctg \frac{1-x}{z} + \arctg \frac{1+x}{z} \right) \end{aligned}$$

На рис. 2 (рис. 3) наведено розподіли температури за товщиною першого (четвертого) шару при $x=0$, які ілюструють вплив коефіцієнтів теплового опору та теплопровідності на ці розподіли.

Таким чином, можна зробити такі висновки: для розглянутих типів основ одночасне збільшення коефіцієнтів теплового опору призводить до збільшення температури в точках першого шару основи, а в четвертому шарі – до зменшення температури; найбільш суттєвий вплив коефіцієнта

теплового опору для першого шару спостерігається для основи з такими значеннями коефіцієнтів теплопровідності $k_{T1} = k_{T3} = 1$, $k_{T2} = k_{T4} = 10$, а для четвертого шару – для основи з коефіцієнтами теплопровідності $k_{T1} = k_{T3} = 10$, $k_{T2} = k_{T4} = 1$.

Отже, у статті побудовано точний аналітичний розв'язок задачі теплопровідності для бага-

тошарової основи за умови неідеального теплового контакту між її шарами. Отримані чисельні результати добре узгоджуються з фізичним сенсом. Надалі планується застосувати зазначений метод до багатошарових основ із більш істотною кількістю шарів та інших законів розподілу температури на поверхні основи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Brischetto S., Carrera E. Coupled thermo-mechanical analysis of one-layered and multilayered plates. *Composite Structures*. 2010. Vol. 92, No 8. P. 1793–1812. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.01.020>.
2. Cetkovic M. Thermo-mechanical bending of laminated composite and sandwich plates using layerwise displacement model. *Composite Structures*. 2015. Vol. 125. P. 388–399. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.01.051>.
3. Ma Ch.-Ch., Chang Sh.-W. Analytical exact solutions of heat conduction problems for anisotropic multi-layered media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2004. Vol. 47, No 8-9. P. 1643–1655. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2003.10.022>.
4. Ma Ch.-Ch., Chen Y.-T. Theoretical analysis of heat conduction problems of nonhomogeneous functionally graded materials for a layer sandwiched between two half-planes. *Acta Mechanica*. 2011. Vol. 221, No 3. P. 223–237. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00707-011-0498-7>.
5. Vel S.S., Batra R.C. Generalized Plane Strain Thermoelastic Deformation of Laminated Anisotropic Thick Plates. *International Journal of Solids and Structures*. 2001. Vol. 38, No 8. P. 1395–1414. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00108-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00108-6).
6. Zenkour A.M., Maturi D.A. Thermoelastic bending response of laminated plate resting on elastic foundations. *Scientia Iranica*. 2015. Vol. 22, No 2. P. 287–298.
7. Бойко С.Б., Величко О.В. Аналітичний метод визначення теплових стаціонарних полів у шаруватих конструкціях. *Вісник ТНТУ*. 2015. Т. 77, № 1. С. 257–266.
8. Величко І.Г., Ткаченко І.Г. Плоска термопружна деформація багатошарової основи. *Вісник Дніпропетровського ун-ту. Механіка*. 2004. Вип. 8, Т. 1, № 6. С. 154–161.
9. Беляков Н.С., Носко А.П. Неидеальный тепловой контакт тел при трении. Москва : Книжный дом «Либроком», 2010. 104 с.
10. Гера Б.В. Математичне моделювання умов неідеального теплового контакту шарів через тонке включення з джерелами тепла. *Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології*. 2013. Вип. 8. С. 61–72.
11. Каримбаев Т.Д., Рапилбекова Н.С. К решению задачи управления направлением тепловых потоков в сплошных средах. *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*. 2014. Т. 16, № 6. С. 263–269.
12. Приварников А.К. Решение граничных задач теории упругости для многослойных оснований. Днепропетровск : ДГУ, 1976. 60 с.
13. Boley V.A., Weiner J.H. Theory of thermal stresses. New York-London : John Wiley and sons, 1960. 586 p.
14. Коваленко А.Д. Термоупругость. Киев : Вища школа, 1975. 216 с.
15. Antonenko N., Tkachenko I. Plane Thermoelastic Deformation of a Multilayer Foundation with Non-ideal Thermal Contact Between its Layers. *Materials Science Forum*. 2019. Vol. 968. P. 486–495. DOI: <http://dx.doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.486>.
16. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды: в 3 т. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. Т. 1. 623 с.

REFERENCES

1. Brischetto S., Carrera E. (2010) Coupled thermo-mechanical analysis of one-layered and multilayered plates. *Composite Structures*, vol. 92, no. 8, pp. 1793–1812. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.01.020>.
2. Cetkovic M. (2015) Thermo-mechanical bending of laminated composite and sandwich plates using layerwise displacement model. *Composite Structures*, vol. 125, pp. 388–399. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.01.051>.
3. Ma Ch.-Ch., Chang Sh.-W. (2004) Analytical exact solutions of heat conduction problems for anisotropic multi-layered media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 47, no. 8–9, pp. 1643–1655. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2003.10.022>.

4. Ma Ch.-Ch., Chen Y.-T. (2011) Theoretical analysis of heat conduction problems of nonhomogeneous functionally graded materials for a layer sandwiched between two half-planes. *Acta Mechanica*, vol. 221, no. 3, pp. 223–237. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00707-011-0498-7>.
5. Vel S. S., Batra R. C. (2001) Generalized Plane Strain Thermoelastic Deformation of Laminated Anisotropic Thick Plates. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, no. 8, pp. 1395–1414. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00108-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00108-6).
6. Zenkour A. M., Maturi D. A. (2015) Thermoelastic bending response of laminated plate resting on elastic foundations. *Scientia Iranica*, vol. 22, no. 2, pp. 287–298.
7. Bojko S.B., Velychko H.V. (2015) Analitichnyj metod vyznachennja teplovykh stacionarnykh poliv u sharuvatykh konstrukcijakh [Analytical method for determining the stationary thermal fields in layered structures]. *Scientific Journal of TNTU*, vol. 77, no. 1, pp. 257–266. (in Ukrainian).
8. Velychko I.G., Tkachenko I.G. (2014) Ploska termoprzhna deformacija baghatosharovoji osnovy [Plane thermoelastic deformation of multilayer foundation]. *Bulletin of Dnipropetrovsk University. Series: Mechanics*, vol. 1, no. 6, pp. 154–161. (in Ukrainian).
9. Beliakov N. S., Nosko A. P. (2010) Neideal'nyy teplovoy kontakt tel pri trenii [Nonperfect thermal contact of friction bodies]. Moscow: Knizhnyy dom «Librokom». (in Russian).
10. Ghera B. (2013) Matematychno modeljuvannja umov neidealjnogho teplovogho kontaktu shariv cherez tonke vkljuchennja z dzherelamy tepla [Mathematical modelling of nonideal conditions for thermal contact of layers through thing inclusion with heat source]. *Physico-mathematical modeling and informational technologies*, vol. 8, pp. 61–72. (in Ukrainian).
11. Karimbaev T. D., Rapolbekova N. S. (2014) K resheniyu zadachi upravleniya napravleniem teplovykh potokov v sploshnykh sredakh [To problem solving of managing by thermal streams in solid structures]. *Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, vol. 16, no. 6, pp. 263–269. (in Russian).
12. Privarnikov A. K. (1976) Reshenie granichnykh zadach teorii uprugosti dlya mnogoslonykh osnovaniy [The solution of boundary problems of the theory of elasticity for multilayer foundations]. Dnepropetrovsk: DNU. (in Russian).
13. Boley B.A., Weiner J. H. (1960) Theory of thermal stresses. New York-London: John Wiley and sons.
14. Kovalenko A.D. (1975) Termouprugost' [Thermoelasticity]. Kiev: Vishcha shkola. (in Russian).
15. Antonenko N., Tkachenko I. (2019) Plane Thermoelastic Deformation of a Multilayer Foundation with Non-ideal Thermal Contact Between its Layers. *Materials Science Forum*, vol. 968, pp. 486–495. DOI: <http://dx.doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.486>.
16. Prudnikov A. P., Brychkov Iu. A., Marichev O. I. (2002) Integraly i ryady [Integrals and Series] (vol. 1). Moscow: FIZMATLIT. (in Russian).

НЕСТАЦІОНАРНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ В ПІВПРОСТОРИ З ПОКРИТТЯМ ЗА УМОВИ РУХОМОГО ТЕПЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Турчин І. М.

*доктор фізико-математичних наук, доцент,
професор кафедри механіки
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, Львів, Україна
orcid.org/0000-0003-0345-1467
ihorturchyn@gmail.com*

Турчин О. Ю.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики і фізики
Національний лісотехнічний університет України
вул. Ген. Чупринки, 103, Львів, Україна
orcid.org/0000-0002-0046-3131
turchyn@nltu.edu.ua*

Ключові слова: *нестаціонарна
задача теплопровідності,
рухоме теплове
навантаження,
неоднорідний півпростір,
поліноми Лагерра,
інтегральне
перетворення Фур'є.*

Вивчення процесу поширення тепла в тілах із покриттями має застосування в багатьох інженерних дослідженнях. У багатьох випадках для більш адекватного моделювання варто враховувати нестаціонарність процесу. При побудові точних аналітичних розв'язків нестаціонарних задач теплопровідності дослідників чекають значні труднощі математичного характеру, пов'язані із застосуванням інтегрального перетворення Лапласа. Особливо це стосується випадків, коли розміри одного із складових частин значно перевищують розміри інших і цей складник моделюється півбезмежним тілом, наприклад півпростором. У роботі до таких задач пропонується застосовувати новий метод – інтегральне перетворення Лагерра.

Розглянуто нестаціонарну задачу теплопровідності про нагрів масивного тіла з покриттям тепловим потоком, який рухається по поверхні покриття. На межі покриття і основи виконуються умови ідеального теплового контакту. Основа при цьому моделюється півпростором, а покриття – шаром. До рівняння нестаціонарної теплопровідності і крайових умов застосовано спочатку інтегральне перетворення Лагерра за часовою змінною, а потім інтегральне перетворення Фур'є за просторовою змінною. У результаті отримано трикутну послідовність звичайних диференціальних рівнянь. Загальний розв'язок цієї послідовності отримано у вигляді алгебричної згортки фундаментальних розв'язків та набору сталих. Фундаментальні розв'язки трикутних послідовностей побудовано методом невизначених коефіцієнтів, а набір сталих визначено із трансформованих за Лагерром і Фур'є крайових умов та умов ідеального теплового контакту основи і покриття у вигляді рекурентних співвідношень. Зрештою, остаточний розв'язок вихідної задачі записаний у вигляді ряду за поліномами Лагерра з коефіцієнтами у вигляді інтегралів Фур'є.

Числовий експеримент проведено для півпростору з тепловими властивостями алюмінієвого стопу та покриття, виготовленого з кераміки. Виявлено фізично обґрунтовані закономірності нестаціонарного поширення тепла в неоднорідних тілах при рухомому тепловому навантаженні.

UNSTEADY HEAT CONDUCTIVITY PROBLEM FOR COATED HALF-SPACE UNDER MOVING HEAT LOAD

Turchyn I. M.

*Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor,
Professor at the Department of Mechanics
Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str., 1, Lviv, Ukraine
orcid.org/0000-0003-0345-1467
ihorturchyn@gmail.com*

Turchyn O. Yu.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Mathematic and Physic
Ukrainian Forestry National University
Gen. Chuprynyky str., 103, Lviv, Ukraine
orcid.org/0000-0002-0046-3131
turchyn@nltu.edu.ua*

Key words: *unsteady heat conductivity problem, moving heat load, inhomogeneous half-space, Laguerre polynomials, Fourier transform.*

The study of the process of heat propagation in coated bodies is used in many engineering studies. In many cases, for more adequate modeling, the nonstationarity of the process should be taken into account. When constructing accurate analytical solutions of nonstationary problems of thermal conductivity, researchers face significant mathematical difficulties associated with the application of the Laplace integral transformation. This is especially true when the size of one of the components is much larger than the size of the others and this component is modeled by a half-boundless body, such as half-space. In this paper, we propose to apply a new method – integral Laguerre transformation. The nonstationary problem of thermal conductivity about the heating of a massive body with a covering by a heat stream, that is moving on a covering surface considers. At the boundary of the coating and the base, we have the conditions of ideal thermal contact. The basis is modeled by a half-space and a covering – a layer. The equation of nonstationary thermal conductivity and boundary conditions is applied first by the integral Laguerre transform with respect to the time variable, and then by the integral Fourier transform with respect to the spatial variable. The result is a triangular sequence of ordinary differential equations. The general solution of this sequence obtains in the form of an algebraic convolution of fundamental solutions and a set of constants. We propose to construct the fundamental solutions of triangular sequences by the method of indeterminate coefficients and to determine the set of constants from the boundary conditions transformed by Laguerre and Fourier and the conditions of ideal thermal contact of the base and coating in the form of recurrent relations. Ultimately, the final solution of the initial problem writes in the form of a series of Laguerre polynomials with coefficients in the form of Fourier integrals.

A numerical experiment for a half-space with thermal properties of aluminum alloy and a coating made of ceramics performs. Physically substantiated regularities of nonstationary heat distribution in inhomogeneous bodies under moving heat load reveals.

Вступ. Покриття як засоби захисту деталей конструкцій від високих температур та агресивних середовищ широко використовуються в сучасній інженерній практиці [1]. Математичне моделювання термічного стану в тілах із покриттями часто використовує певні спрощення, пов'язані з малою відносною товщиною покриття. Схема розв'язування задач про перенесення тепла в тілах із тонкими покриттями полягає у поданні покриття математичною поверхнею розривів параметрів температурного стану тіла. Таким чином, покриття з розгляду виключається, а його наявність моделюється деякими умовами взаємодії, тобто певною математичною залежністю між функціями температури і теплових потоків, на граничних із середовищем поверхнях.

Якщо елементи неоднорідного тіла не вдається описати за допомогою теорій пластин чи оболонок, доводиться використовувати просторові постановки [2; 3]. Традиційний підхід до побудови розв'язків задач теплопровідності шаруватих тіл і, зокрема, тіл із покриттями ґрунтується на розгляді відповідних рівнянь для кожного елемента композита з подальшим узгодженням розв'язків через умови теплового контакту.

Проте в процесі розгляду нестационарних задач теплопровідності вказані підходи під час застосування класичного методу інтегрального перетворення Лапласа [2; 7] приводять до значних труднощів обчислювального характеру, оскільки рівняння на визначення нулів знаменника трансформанти та його корені, що використовується під час обернення інтегрального перетворення Лапласа, залежить ще й від параметра вибраного інтегрального перетворення за просторовою змінною [7]. Особливо це стосується випадків, коли один із складових елементів композитного тіла значно перевищує їх за розмірами і тому моделюється півпростором, що приводить до появи в характеристичному рівнянні точок галузження. У таких випадках спільне числове обернення інтегрального перетворення Лапласа та інтегрального перетворення за просторовою змінною (Фур'є, Ханкеля тощо) може суттєво впливати на точність та, головне, достовірність одержаних результатів.

Метою цієї роботи є розробка ефективної аналітичної методики побудови розв'язку нестационарних задач теплопровідності для тіл із покриттями за змінних у часі умов нагрівання, яка ґрунтується на використанні інтегрального перетворення Лагерра [4–6] і дослідження на її основі перехідних температурних полів у півпросторі із покриттям, зумовлених умовами рухомого нагрівання.

Формулювання задачі. Розглянемо шар товщиною h , що лежить на масивному тілі (моделюється півпростором) з іншими теплофізичними

характеристиками. Шар із певного моменту часу починає нагріватися джерелами тепла, що рухаються по його вільній поверхні прямолінійно в додатному напрямі осі Oy з постійною швидкістю v . Тепловий контакт між шаром і півпростором будемо вважати ідеальним, а початкову температуру шару і півпростору – рівною нулю. Крім того, припустимо, що розміри джерела тепла в напрямі, перпендикулярному напрямку руху, значно більші за товщину шару, а тому зміною температури в цьому напрямі знехтуємо (плоска задача).

Таким чином, задача полягає у відшуванні розв'язку двох рівнянь нестационарної теплопровідності:

$$\partial_{\eta\eta}^2 T^{(i)} + \partial_{\zeta\zeta}^2 T^{(i)} = \tilde{a}_i^{-1} \partial_{\tau} T^{(i)}, \quad i = 1, 2; \quad (1)$$

при початкових:

$$T^{(i)}(\eta, \zeta, 0) = 0, \quad i = 1, 2; \quad (2)$$

крайових:

$$\tilde{\lambda}_T^{(1)} \partial_{\zeta} T^{(1)} = -q(\eta, \tau), \quad \zeta = 0; \quad (3)$$

$$T^{(2)} = 0, \quad \zeta \rightarrow \infty; \quad (4)$$

та умовах спряження

$$T^{(1)} = T^{(2)}; \quad \tilde{\lambda}_T^{(1)} \partial_{\zeta} T^{(1)} = \tilde{\lambda}_T^{(2)} \partial_{\zeta} T^{(2)}, \quad \zeta = 1, \quad (5)$$

Тут і надалі всі функції і величини з індексом «1» належать до шару, а з індексом «2» – до півпростору, $T^{(i)}(\eta, \zeta, \tau)$ – температура, $\eta = y/h$, $\zeta = y/h$, $\tau = a_0 t/h^2$, $\tilde{a}_i = a_i/a_0$, $\tilde{\lambda}_T^{(i)} = \lambda_T^{(i)}/\lambda_T^{(0)}$, $\lambda_T^{(i)}$, a_i – відповідно, коефіцієнти тепло- і температуропровідності, $l = l/h$, l – півдовжина рухомої смуги, на якій розташовані джерела тепла, $q(\eta)$ – закон розподілу густини джерел тепла по рухомій області, $v^* = v/h/a_0$ – безрозмірна швидкість, $\lambda_T^{(0)}$, a_0 – деякі розмірні величини, які вибираємо згідно із завданнями числового аналізу.

Побудова розв'язку задачі. Застосовуючи до рівнянь (1), крайових умов (3), (4) та умов спряження (5) інтегральне перетворення Фур'є за змінною η та інтегральне перетворення Лагерра за змінною τ , після врахування початкових умов (2) одержимо трикутну послідовність крайових задач

$$d_n^2 \bar{T}_n^{(i)} - \omega_i^2 \bar{T}_n^{(i)} = \beta_i \sum_{m=0}^{n-1} \bar{T}_m^{(i)}, \quad i = 1, 2; \quad (6)$$

$$\tilde{\lambda}_T^{(1)} d_{\zeta} \bar{T}_n^{(1)} \Big|_{\zeta=0} = -\bar{q}_n(\xi); \quad (7)$$

$$\bar{T}_n^{(2)} \Big|_{\zeta \rightarrow \infty} = 0; \quad (8)$$

$$\bar{T}_n^{(1)} = \bar{T}_n^{(2)}; \quad \tilde{\lambda}_T^{(1)} d_{\zeta} \bar{T}_n^{(1)} = \tilde{\lambda}_T^{(2)} d_{\zeta} \bar{T}_n^{(2)}, \quad \zeta = 1. \quad (9)$$

У формулах (6)–(9)

$$\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \zeta) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} T^{(i)}(\eta, \zeta, \tau) e^{i\xi\eta} d\eta \right] L_n(\lambda\tau) d\tau,$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ – зображення за Лагерром, і Фур’є,
 $L_n(\cdot)$ – поліноми Лагерра, $\omega_i = \sqrt{\xi^2 + \beta_i}$, $\beta_i = \lambda/\tilde{\alpha}_i$
 $\bar{q}_n(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau} \left[\int_{v^*\tau-\tilde{l}}^{v^*\tau+\tilde{l}} q(\eta) e^{i\xi\eta} d\eta \right] L_n(\lambda\tau) d\tau$ λ –

масштабний множник.

Загальний розв’язок трикутної послідовності (6) подамо у вигляді алгебричної згортки:

$$\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \zeta) = \sum_{j=0}^n [A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi, \zeta) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi, \zeta)], \quad (10)$$

$i = 1, 2; \quad n = 0, 1, 2, \dots$

де

$$G_j^{(i)}(\zeta, \omega_i) = e^{-\omega_i\zeta} \sum_{k=0}^j a_{j,k}^i \frac{(\omega_i\zeta)^k}{k!}; W_j^{(i)}(\zeta, \omega_i) = e^{\omega_i\zeta} \sum_{k=0}^j a_{j,k}^i \frac{(-\omega_i\zeta)^k}{k!}. \quad (11)$$

Коефіцієнти $a_{j,k}^i(\xi)$ при цьому задовольняють рекурентним співвідношенням:

$$a_{j,k+1}^i = 0.5 \left(a_{j,k+2}^i - \frac{\beta_i}{\omega_i^2} \sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k}^i \right), \quad (12)$$

де $a_{j,k}^i \equiv 0$, при $k > j$, а $a_{j,0}^i$ – довільні.

Задовольняючи умові на безмежності (8), одержимо, що

$$B_n^{(2)}(\xi) \equiv 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Покладемо $a_{0,0}^i(\xi) \equiv 1$, $a_{j,0}^i \equiv 0$, $j = 1, 2, \dots$. Тоді задовольняючи крайовій умові (7) та умовам спряження (9), одержимо трикутну послідовність систем алгебричних рівнянь:

$$\begin{pmatrix} -\omega_1 & \omega_1 & 0 \\ e^{-\omega_1} & e^{\omega_1} & -e^{-\omega_2} \\ -\tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 e^{-\omega_1} & \tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 e^{\omega_1} & \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_2 e^{-\omega_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^{(1)} \\ B_n^{(1)} \\ A_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n^{(1)} \\ f_n^{(2)} \\ f_n^{(3)} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

де

$$f_n^{(1)}(\xi) = -\bar{q}_n(\xi) - \sum_{j=1}^n [A_{n-j}^{(1)}(\xi) G_j^{(1)}(\xi, 0) + B_{n-j}^{(1)}(\xi) W_j^{(1)}(\xi, 0)];$$

$$f_n^{(2)}(\xi) = \sum_{j=1}^n [A_{n-j}^{(2)}(\xi) G_j^{(2)}(\xi, 1) - A_{n-j}^{(1)}(\xi) G_j^{(1)}(\xi, 1) - B_{n-j}^{(1)}(\xi) W_j^{(1)}(\xi, 1)];$$

$$f_n^{(3)}(\xi) = \sum_{j=1}^n [\tilde{\lambda}_T^{(2)} A_{n-j}^{(2)}(\xi) \partial_\zeta G_j^{(2)}(\xi, 1) - \tilde{\lambda}_T^{(1)} A_{n-j}^{(1)}(\xi) \partial_\zeta G_j^{(1)}(\xi, 1) - \tilde{\lambda}_T^{(1)} B_{n-j}^{(1)}(\xi) \partial_\zeta W_j^{(1)}(\xi, 1)].$$

З систем (14) невідомі $A_n^{(1)}(\xi), B_n^{(1)}(\xi), A_n^{(2)}(\xi)$ отримаємо у вигляді:

$$A_n^{(1)}(\xi) = \frac{-e^{\omega_1} (\tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 + \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_2) f_n^{(1)} + \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_1 \omega_2 f_n^{(2)} + \omega_1 f_n^{(3)}}{2\omega_1 (\tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 sh(\omega_1) + \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_2 ch(\omega_1))};$$

$$B_n^{(1)}(\xi) = \frac{e^{-\omega_1} (\tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 - \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_2) f_n^{(1)} + \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_1 \omega_2 f_n^{(2)} + \omega_1 f_n^{(3)}}{2\omega_1 (\tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 sh(\omega_1) + \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_2 ch(\omega_1))}; \quad (15)$$

$$A_n^{(2)}(\xi) = \frac{-\tilde{\lambda}_T^{(1)} f_n^{(1)} - \tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 sh(\omega_1) f_n^{(2)} + ch(\omega_1) f_n^{(3)}}{e^{-\omega_2} (\tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 sh(\omega_1) + \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_2 ch(\omega_1))}.$$

Легко переконатись, що знаменник у формулах (15) (визначник матриці систем (14)) не перетворюється на нуль при довільних додатних дійсних значеннях ω_1, ω_2 , а тому за формулами (15) можна послідовно визначити всі невідомі $A_n^{(1)}(\xi), B_n^{(1)}(\xi), A_n^{(2)}(\xi)$.

При цьому розв’язок вихідної задачі (1) – (5) одержимо у вигляді ряду за поліномами Лагерра:

$$T^{(i)}(\eta, \zeta, \tau) = \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \zeta) e^{-i\xi\eta} d\xi \right] L_n(\lambda\tau). \quad (16)$$

Прийmemo, що густина джерел тепла є постійною. Тоді:

$$\bar{q}_n(\xi) = q^* \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau} \left[\int_{v^*\tau-\tilde{l}}^{v^*\tau+\tilde{l}} e^{i\xi\eta} d\eta \right] L_n(\lambda\tau) d\tau = q^* \frac{2\sin(\xi\tilde{l})}{\xi} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-i^*\xi)\tau} L_n(\lambda\tau) d\tau =$$

$$= q^* \frac{2\sin(\xi\tilde{l})}{\xi} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau} \cos(v^*\xi\tau) L_n(\lambda\tau) d\tau + i \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau} \sin(v^*\xi\tau) L_n(\lambda\tau) d\tau \right) =$$

$$= q^* \frac{2\sin(\xi\tilde{l})}{\xi} (y_{c,n}(\xi) + iy_{s,n}(\xi)). \quad (17)$$

Інтеграли $y_{c,n}(\xi)$ і $y_{s,n}(\xi)$ у формулі (17) можна обчислити, проте зручніше використати те, що ці інтеграли є трансформантами за Лагерром від функцій $\cos(v^*\xi\tau)$ і $\sin(v^*\xi\tau)$ – розв’язків відповідних задач Коші:

$$\ddot{y}_c + x^2 y_c = 0; y_c(0) = 1; \dot{y}_c(0) = 0; \quad (18)$$

$$\ddot{y}_s + x^2 y_s = 0; y_s(0) = 0; \dot{y}_s(0) = x, \quad (19)$$

де $x = v^*\xi$.

Застосувавши до диференціальних рівнянь у (18) і (19) інтегральне перетворення Лагерра і врахувавши при цьому відповідні початкові умови, одержимо трикутні послідовності рівнянь:

$$\lambda^2 \sum_{m=0}^n (n-m+1) y_{c,m} + x^2 y_{c,n} = \lambda(n+1);$$

$$\lambda^2 \sum_{m=0}^n (n-m+1) y_{s,m} + x^2 y_{s,n} = x.$$

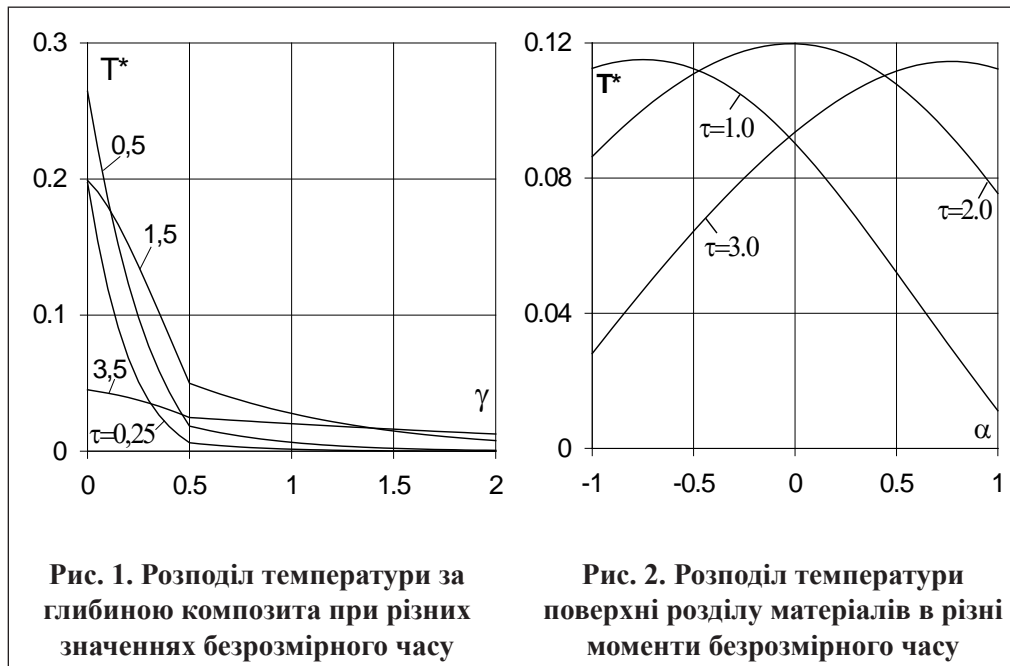
Звідси одержимо формули для визначення функцій $y_{c,n}(\xi)$ і $y_{s,n}(\xi)$:

$$y_{c,n}(\xi) = \frac{\lambda(n+1) - \lambda^2 \sum_{m=0}^{n-1} (n-m+1) y_{c,m}}{\lambda^2 + (v^*\xi)^2};$$

$$y_{s,n}(\xi) = \frac{v^*\xi - \lambda^2 \sum_{m=0}^{n-1} (n-m+1) y_{s,m}}{\lambda^2 + (v^*\xi)^2}$$

Числові результати. Числовий аналіз проводився для півпростору з властивостями алюмінієвого стопу ($a_2 = 11,9 \times 10^{-6} \frac{M}{C}$, $\lambda_T^{(2)} = 36 \frac{BT}{C}$) та покриття, виготовленого з кераміки ($a_1 = 90,6 \times 10^{-6} \frac{M}{C}$, $\lambda_T^{(1)} = 222 \frac{BT}{M \cdot K}$). Теплове навантаження границі покриття було задано співвідношенням:

$$q(\eta, \tau) = q^* \left[S_+ (\eta + \eta_0 + \tilde{l} - v^*\tau) - S_- (\eta + \eta_0 - \tilde{l} - v^*\tau) \right],$$



де q^* – деяка розмірна величина, $S_{\pm}(\cdot)$ – асиметрична функція Хевісайда, η_0 – знерозмірена координата центру джерела нагрівання. При числових значеннях $\eta_0 = 2$, $\nu^* = 1$, $\tilde{l} = 1$ було розраховано температурне поле в композиті.

На рис. 1 показано зміну безрозмірної температури за глибиною композита при різних значеннях безрозмірного часу.

Як видно з наведених результатів, найбільшого значення температура набуває на вільній поверхні композита при наближенні до області заміру краю джерела тепла ($\tau \approx 1.0$). У той же час на лінії розділу матеріалів максимальна температура досягається в момент часу, коли середина плями нагріву сягає області заміру ($\tau \approx 2.0$). Цю закономірність

добре видно на рис. 2, де зображено розподіл температурного поля поверхні розділу матеріалів у різні моменти безрозмірного часу.

Висновки. Таким чином, у роботі отримано точний аналітичний розв'язок плоскої нестационарної задачі теплопровідності для системи шар-півпростір, що нагрівається на обмеженій частині граничної поверхні рухомим тепловим потоком. Розв'язок отримано із використанням інтегрального перетворення Лагерра за часовою змінною та інтегрального перетворення Фур'є у вигляді ряду за поліномами Лагерра. Коефіцієнти цього ряду знаходяться з рекурентних співвідношень. Наведено результати тестового прикладу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Tamarin Y. Protective coatings for turbine blades: monograph. USA: ASM International, 2002. 248 p.
2. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела : монографія. Київ : Наук. думка, 1992. 280 с.
3. Sneddon I. Fourier transforms: monograph. New York : McCraw-Hill Book Company, 1951. 542 p.
4. Galazyuk V.A., Turchyn I.M. Quasistatic thermal stress state of a layer with mixed heating conditions *International Applied Mechanics*. 1998. V. 34. No 9. P. 886–893.
5. Turchin I.M. Nonstationary end heating of a multilayer semiinfinite plate. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2012. Vol. 85. Iss. 6. P. 1453–1462.
6. Turchin I.M., Timar I., Kolodiy Yu.O. Nonstationary axisymmetric temperature field in a two-layer slab under mixed heating conditions. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2015. Vol. 88. Iss. 5. P. 1135–1144.

REFERENCES

1. Tamarin Y. (2002). Protective coatings for turbine blades. ASM International, USA.
2. Kolyano Yu. M. (1992). Metody teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela. [Methods of thermal conductivity and thermoelasticity of an inhomogeneous body]. Kiev: Naukova Dumka. (In Russian)
3. Sneddon I. (1951). Fourier transforms. McCraw-Hill Book Company. New York.

4. Galazyuk V.A. & Turchin I.M. (1998). Quasistatic thermal stress state of a layer with mixed heating conditions. *International Applied Mechanics*, Volume 34, No 9, pp. 886–893.
5. Turchin I.M. (2012). Nonstationary end heating of a multilayer semiinfinite plate. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, Volume 85, Issue 6, pp. 1453–1462.
6. Turchin I.M., Timar I. & Kolodiy Yu.O. (2015). Nonstationary axisymmetric temperature field in a two-layer slab under mixed heating conditions. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, Volume 88, Issue 5, pp. 1135–1144.

ДОСЛІДЖЕННЯ ГЕНЕРАЦІЇ НЕРІВНОМІРНИХ СТРУКТУРОВАНИХ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ ДВОВИМІРНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Халанчук Л. В.

асистент кафедри вищої математики і фізики

Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного

пр. Богдана Хмельницького, 18, Мелітополь, Запорізька обл., Україна

orcid.org/0000-0002-6055-6233

larysa.khalanchuk@tsatu.edu.ua

Чопоров С. В.

доктор технічних наук, доцент,

професор кафедри програмної інженерії

Запорізький національний університет

вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна

orcid.org/0000-0001-5932-952X

s.choporoff@znu.edu.ua

Ключові слова:

*структурована сітка,
згущення сітки, контрольні
функції, ортогональність
сітки.*

Під час розв'язання прикладних задач математичне моделювання процесів у різних конструкціях має певні труднощі через складність геометричної форми досліджуваної області, що враховує велику кількість компонентів і зв'язків між ними. Дискретна модель геометричного об'єкта замінює вихідну неперервну область кінцевим набором простих фігур. Розробка методів створення дискретних моделей, кінцеві елементи яких згущуються в місцях концентрації напружень і в місцях, де конструкція має особливу форму, є актуальною задачею, наприклад, для вивчення міцності та довговічності інженерних конструкцій, що є важливою складовою частиною сучасних технологій. Дослідження згущення було проведено на структурованих сітках. У статті розглянуто алгебраїчні та диференціальні методи побудови структурованих дискретних моделей, досліджено їхні недоліки та переваги. Розроблено математичний апарат для побудови структурованих сіток із заданими параметрами згущення вузлів сітки. Досліджено вплив параметрів контрольних функцій на згущення вузлів сітки і геометричні характеристики в структурованій сітці. Визначено, що алгебраїчні методи забезпечують швидку побудову сітки, контроль густоти і нахилу координатних ліній за допомогою перехідних коефіцієнтів у формулах трансфінітної інтерполяції. Для диференціального методу з використанням еліптичного рівняння Пуассона досліджено вплив параметрів контрольних функцій на якість побудованої сітки, а саме її ортогональність. Для розв'язання рівняння Пуассона було написано код програми, де застосовано різницьеві схеми і метод Зейделя. У статті також наведено фрагмент коду програми побудови згущення для сітки по вертикальних та горизонтальних лініях, що була реалізована у вільно поширюваному пакеті програм Scilab. Значення максимального кута кожного елемента досліджено на прикладі сітки з двома колами у тому випадку, коли значення параметрів для одного кола будуть дорівнювати параметрам іншого. Встановлено, що якість сітки (її ортогональність) краща, якщо збільшити значення другого параметра досліджуваних функцій управління.

RESEARCH OF NON-UNIFORM STRUCTURED DISCRETE MODELS GENERATION FOR TWO-DIMENSIONAL DOMAINS

Khalanchuk L. V.

*Assistant at the Department of Higher Mathematics and Physics
Dmytro Motornyi Tavria State Agrotechnological University
B. Khmelnytsky Ave, 18, Melitopol, Zaporizhia region, Ukraine
orcid.org/0000-0002-6055-6233
larysa.khalanchuk@tsatu.edu.ua*

Choporov S. V.

*Doctor of Technical Sciences, Associate Professor,
Professor at the Department of Software Engineering
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0001-5932-952X
s.choporoff@znu.edu.ua*

Key words: *structured grid, grid thickening, control functions, grid orthogonality.*

Mathematical modeling of processes in different constructions has certain difficulties due to the complexity of the geometric shape of the respective areas. A discrete model of a geometric object replaces the original continuous domain with a finite set of simple figures. The development of methods for generating discrete models, the finite elements of which condense in places of stress concentration and in places where the structure has a special shape, is relevant, for example, to study the strength and durability of engineering structures, which is an important component of modern technology. The article considers algebraic and differential methods of constructing structured discrete models, their disadvantages and advantages. A mathematical apparatus for constructing structured grids with given parameters of grid node thickening has been developed. The influence of the parameters of control functions on the thickening of the grid nodes and geometrical characteristics in the structured grid is investigated. It is determined that algebraic methods provide fast grid construction, control of density and inclination of coordinate lines by means of transition coefficients in transfinite interpolation formulas. Differential methods based on elliptic and parabolic equations give smooth internal coordinate lines, so it is possible to build orthogonal lines and condensed lines. The influence of the parameters of the control functions of the elliptic method on the quality of the constructed grid, namely its orthogonality, is investigated. The article also presents a fragment of the code of the program for constructing condensation for the grid on vertical and horizontal lines, which was implemented in a freely distributed software package Scilab. The value of the maximum angle of each element was measured on the example of a grid with two circles in the case when the values of the parameters for one circle will be equal to the parameters of the other. It is found that the quality of the grid (its orthogonality) is better if you increase the value of the second parameter of the control functions.

Постановка проблеми. Нині в інженерних додатках одне із провідних місць займають дослідження, які виконуються із застосуванням комп'ютерного моделювання різноманітних реальних процесів, оскільки комп'ютерне моделювання за своїми витратами в багато разів економічно вигідніше, ніж побудова фізичної моделі. Сучасні проекти мають дедалі складніший характер, оскільки використовують конструкції, що складаються з досить великої кількості компонентів і зв'язків між ними. Математичне моделювання процесів у таких конструкціях має певні труднощі, пов'язані зі складністю геометричної форми відповідних областей.

Дискретною моделлю геометричного об'єкта (сіткою) називають множину точок, що розподілені в досліджуваній області, разом зі зв'язками між цими точками (вузлами). Дискретна модель геометричного об'єкта замінює вихідну неперервну область скінченною множиною простих фігур [1]. Розрізняють структуровані та неструктуровані сітки. Неструктуровані сітки визначаються звичайним набором вузлів. Логічний зв'язок між вузлами сітки визначається довільним чином, тобто кожен вузол може мати довільну кількість «сусідів». На відміну від неструктурованої сітки, в структурованій всі внутрішні вершини топологічно еквівалентні між собою. Наприклад, чотирикутні структуровані сітки топологічно еквівалентні стандартним прямокутним сіткам.

Розробка методів генерації дискретних моделей, скінченні елементи яких згущуються в місцях концентрації напруг і в місцях, де конструкція має особливу форму, є актуальною, наприклад, для дослідження міцності та витривалості інженерних конструкцій, що є важливою складовою частиною сучасної техніки.

Огляд актуальних підходів і методів автоматичної генерації структурованих сіток (дискретних моделей геометричних об'єктів) наведено в роботі [2]. Дослідження генерації сіток алгебраїчними методами, контроль густоти і нахилу координатних ліній за допомогою перехідних коефіцієнтів у формулах трансфінітної інтерполяції проведено в роботах [3; 4]. Контроль густоти по координатним лініям за допомогою алгебраїчного методу через введення проміжної системи координат наведено в роботі [5].

Згущення вузлів сіток по координатним лініям сітки (вертикальним і горизонтальним) та до певного вузла за допомогою диференціального методу розглянуто в праці колективу авторів [5]. Вплив контрольних функцій і форми границі області на розподіл вузлів сітки, що генерується еліптичним методом через розв'язання рівняння Бельтрамі, досліджено в роботах О.В. Трофимова, Ю.В. Петрової, В.Д. Лісейкіна [6; 7].

Дослідження згущення вузлів сітки через контрольні функції, що задавали області діагональних ліній, круга, синусоїди за допомогою рівняння Ейлера, що застосовується в задачах газової динаміки, показано в статті [8]. Застосування контрольних функцій як фільтра згущення сітки використовується для глобальних кліматичних моделей у статті [9].

Метою статті є аналіз актуального стану проблеми керування згущенням сітки під час автоматичної побудови структурованих дискретних моделей (сіток) геометричних об'єктів.

Об'єкт дослідження – структуровані сітки для геометричних моделей.

Предмет дослідження – методи керування згущенням структурованих сіток геометричних моделей.

Виклад основного матеріалу дослідження. У структурованих сітках алгоритм нумерації вузлів і визначення комірок, узгоджених із межею, доволі простий. Конструкція таких сіток дає змогу легко збільшувати кількість вузлів для оцінки збіжності, похибки і для підвищення точності чисельних методів розв'язку крайових задач.

Основними методами побудови структурованих сіток є:

- алгебраїчні, що використовують різні види інтерполяцій або спеціальні функції;
- диференціальні, що визначаються розв'язком еліптичних, параболічних і гіперболічних рівнянь;
- варіаційні, що основані на розв'язку задач оптимізації.

Алгебраїчні методи забезпечують швидку побудову сітки, контроль густоти і нахилу координатних ліній за допомогою перехідних коефіцієнтів у формулах трансфінітної інтерполяції. Для трансфінітної інтерполяції використовуються поліноми. Проте в складних областях алгебраїчні методи можуть не давати потрібний результат: елементи можуть мати кути, близькі до 180° (рис. 1). Тому алгебраїчні методи найчастіше використовують як початкове наближення при використанні ітераційних алгоритмів.

Для криволінійної розрахункової області в процесі побудови сітки використовують перетворення координат, що дає змогу криволінійну фізичну область у системі координат (x, y) перевести до прямокутної розрахункової області в системі (ξ, η) . Зв'язок між фізичною та розрахунковою областями визначається залежностями:

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta), \quad (1)$$

Для контролю згущення сітки в заданій області можна використати проміжну систему координат. Наприклад, для проміжної системи координат (s, t) можна використати функцію розтягу, що має вигляд:

$$s = P\xi + (1 - P) \left[1 - \frac{\text{th}[Q(1 - \xi)]}{\text{th}Q} \right], \quad (2)$$

де P і Q – параметри, що забезпечують контроль розподілу точок сітки [5]. Керувати розподіленням вузлів сітки можна, наприклад, при постійному значенні одного параметру $Q = 2$ та різних значеннях іншого $P = 0,1$ – згущення відбувається ліворуч (Рис. 2а), $P = 1$ – сітка рівномірна (Рис. 2б), $P = 1,9$ – згущення відбувається праворуч (Рис. 2в). У формулі (2) при $P = 1$ сітка буде рівномірною, а параметр Q вже не має впливу.

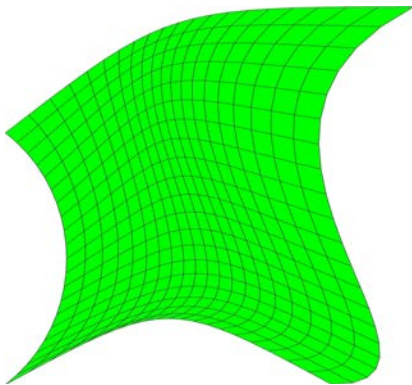


Рис. 1. Елементи сітки мають кути, що близькі до розгорнутих

Диференціальні методи на основі еліптичних і параболічних рівнянь дають гладкі внутрішні координатні лінії, тому є змога будувати ортогональні лінії та лінії, що згущуються. Гіперболічні рівняння дають змогу будувати ортогональну систему, але не завжди їх можна застосовувати для областей, наприклад, які мають задані граничні умови. Отже, такі методи використовують для областей, що не вимагають спеціально заданого розподілу вузлів сітки.

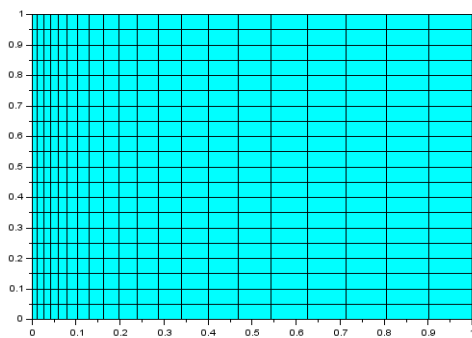
Розглянемо диференціальний метод на прикладі еліптичного рівняння. У найпростішому узагальненому вигляді, з урахуванням перетворення з фізичної до розрахункової області координат (1), маємо рівняння Лапласа для генерації структурованої сітки:

$$\begin{cases} \nabla^2 \xi = 0, \\ \nabla^2 \eta = 0. \end{cases} \quad (3)$$

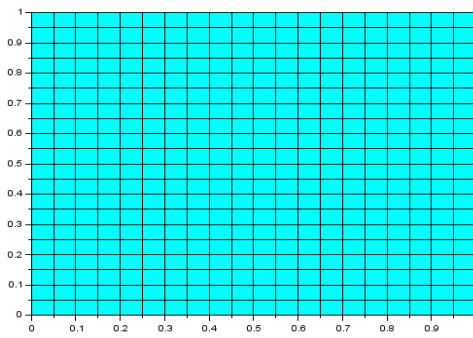
Рівняння (3) дозволяють отримати рівномірну сітку, а для отримання згущення сітки в потрібних областях використовують контрольні функції $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ і рівняння Пуассона:

$$\nabla^2 \xi = P(\xi, \eta), \quad \nabla^2 \eta = Q(\xi, \eta), \quad (4)$$

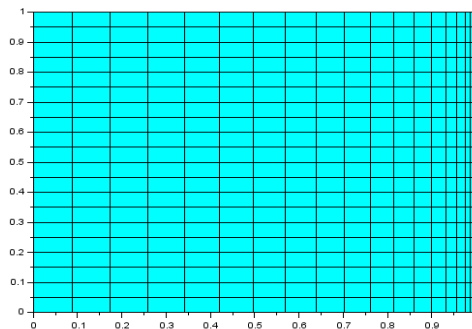
Оскільки лінії сітки задають в просторі (ξ, η) , необхідно отримати залежності



а)



б)



в)

Рис. 2. Керування згущенням сітки

$x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$, тому залежні і незалежні змінні в рівнянні (4) необхідно поміняти місцями.

Розв'язок системи (4) в розрахунковій області системи координат (ξ, η) отримує вигляд:

$$\begin{cases} g_{22} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + g \left(P(\xi, \eta) \frac{\partial x}{\partial \xi} + Q(\xi, \eta) \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = 0, \\ g_{22} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + g \left(P(\xi, \eta) \frac{\partial y}{\partial \xi} + Q(\xi, \eta) \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2, \quad g_{12} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \\ g_{22} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2, \quad g = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

У загальному випадку рівняння (5) є нелінійними, оскільки коефіцієнти залежать від невідомих величин, тому систему рівнянь (5) розв'язують із використанням чисельних методів, наприклад, різницевих схем.

Контрольні функції, наприклад, можуть бути задані формулами:

$$P(\xi, \eta) = -\sum_{n=1}^N a_n \frac{(\xi - \xi_n)}{|\xi - \xi_n|} e^{-c_n |\xi - \xi_n|} - \sum_{i=1}^I b_i \frac{(\xi - \xi_i)}{|\xi - \xi_i|} e^{-d_i \sqrt{(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2}}, \quad (7)$$

$$Q(\xi, \eta) = -\sum_{n=1}^N a_n \frac{(\eta - \eta_n)}{|\eta - \eta_n|} e^{-c_n |\eta - \eta_n|} - \sum_{i=1}^I b_i \frac{(\eta - \eta_i)}{|\eta - \eta_i|} e^{-d_i \sqrt{(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2}}, \quad (8)$$

де N – кількість ліній (координатних ліній $\xi = \xi_n$ та $\eta = \eta_n$), а I – кількість точок (із координатами $\xi = \xi_i$ та $\eta = \eta_i$), біля яких сітка має згущуватися, коефіцієнти a_n, c_n, b_i, d_i – додатні параметри.

Перший член в (7) приводить до суміщення ліній $\xi = const$ до лінії $\xi = \xi_n$, а перший член в (8) приводить до суміщення ліній $\eta = const$ до лінії $\eta = \eta_n$.

Другі члени в формулах (7)–(8) призводять до згущення ліній сітки $\xi = const$ та $\eta = const$ біля точки (ξ_i, η_i) [5].

Якщо згущення необхідно провести тільки по вертикальних лініях, то у формулах (7)–(8) другі параметри будуть відсутні, тобто $b_i = 0, d_i = 0$,

взагалі $Q(\xi, \eta) = 0$, змінюючи параметри, що залишились, можна зміщувати згущення в лівій, наприклад, при $\xi = 0.2$ (рис. 3а), чи правій, наприклад, при $\xi = 0.8$ (рис. 3б), частинах області.

Якщо згущення необхідно провести тільки по горизонтальних лініях, то у формулах (7)–(8) другі параметри будуть відсутні, тобто $b_i = 0, d_i = 0$, взагалі $P(\xi, \eta) = 0$, змінюючи параметри, що залишились, можна зміщувати згущення в нижній, наприклад, при $\eta = 0.2$ (рис. 4а), чи верхній, наприклад, при $\eta = 0.7$ (рис. 4б), частинах області.

Наведемо фрагмент коду програми побудови згущення для сітки по вертикальних та горизонтальних лініях, що була реалізована в пакеті програм Scilab:

```

for i=2 : n-1
for j=2 : n-1
g11 = ((X1(i+1,j) - X1(i-1,j)) ^ 2 + (Y1(i+1,j) - Y1(i-1,j)) ^ 2) / 4;
g12 = (X1(i+1,j) - X1(i-1,j)) * (X1(i,j+1) - X1(i,j-1)) / 4 + (Y1(i+1,j) - Y1(i-1,j)) * (Y1(i,j+1) - Y1(i,j-1)) / 4;
g22 = ((X1(i,j+1) - X1(i,j-1)) ^ 2 + (Y1(i,j+1) - Y1(i,j-1)) ^ 2) / 4;
g = (((X1(i+1,j) - X1(i-1,j)) * (Y1(i,j+1) - Y1(i,j-1)) - (Y1(i+1,j) - Y1(i-1,j)) * (X1(i,j+1) - X1(i,j-1))) / 4) ^ 2;
P1 = -axn * sign((i-1)/(n-1)-x01) * exp(-cxn * abs((i-1)/(n-1)-x01));
Q1 = -ayn * sign((j-1)/(n-1)-y01) * exp(-cyn * abs((j-1)/(n-1)-y01));
X1(i,j) = (g22 * (X1(i-1,j) + X1(i+1,j)) - g12 * (X1(i+1,j+1) - X1(i+1,j-1) - X1(i-1,j+1) + X1(i-1,j-1)) / 2 + g11 * (X1(i,j-1) + X1(i,j+1)) + g * (P1 * (X1(i+1,j) - X1(i-1,j)) / (2 * dx) + Q1 * (X1(i,j+1) - X1(i,j-1)) / (2 * dy))) / (2 * g11 + 2 * g22);
Y1(i,j) = (g22 * (Y1(i-1,j) + Y1(i+1,j)) - g12 * (Y1(i+1,j+1) - Y1(i+1,j-1) - Y1(i-1,j+1) + Y1(i-1,j-1)) / 2 + g11 * (Y1(i,j-1) + Y1(i,j+1)) + g * (P1 * (Y1(i+1,j) - Y1(i-1,j)) / (2 * dx) + Q1 * (Y1(i,j+1) - Y1(i,j-1)) / (2 * dy))) / (2 * g11 + 2 * g22);
end
end
    
```

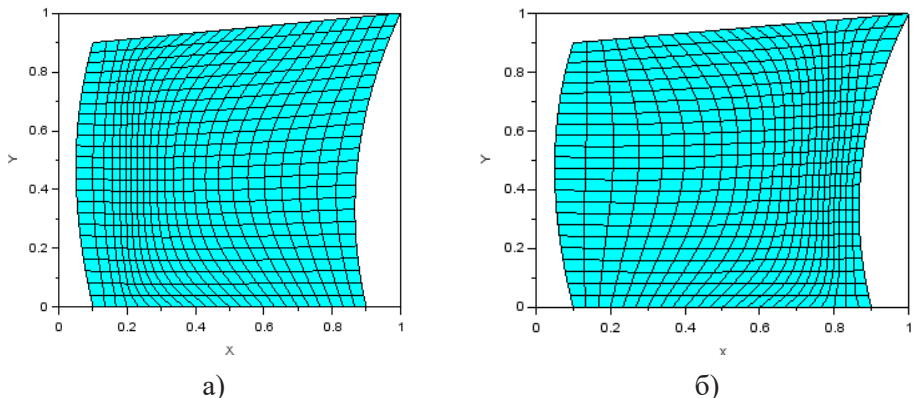


Рис. 3. Згущення сітки в лівій і правій частинах області

Символьне позначення в наведеному кодї максимально наближене до тих позначень, що наведено у формулах (5)–(8), з урахуванням використання методу скінченних різниць (центральні різниці) для наближеної заміни похідних функцій. Спочатку обчислюються значення g_{11} , g_{12} , g_{22} , g за формулами (6), далі $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ за формулами (7)–(8) з використанням тільки частини, що відповідає згущенню для горизонтальних та вертикальних ліній. Наостанок обчислюються значення координат $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ фізичної області, що були виведені з використанням формул системи (5).

Для контролю згущення, наприклад, у формі кіл можна скористатися такими формулами контрольних функцій:

$$P(\xi, \eta) = -\sum_{n=1}^N a_n \text{sign}(\xi) e^{-c_n(|\xi - \xi_0| - \sqrt{R^2 - (\eta - \eta_0)^2})}, \quad (9)$$

$$Q(\xi, \eta) = -\sum_{n=1}^N b_n \text{sign}(\eta) e^{-d_n(|\eta - \eta_0| - \sqrt{R^2 - (\xi - \xi_0)^2})}, \quad (10)$$

де N – кількість кіл (координати відповідних центрів та (ξ_0, η_0)), до яких сітка має згущуватися, коефіцієнти a_n , c_n , b_n , d_n – додатні параметри. Приклади побудови таких кіл показано на рис. 5 (а) – одне коло, б), в) – 2 кола.

Проте інтерес представляє вплив параметрів a_n , b_n , c_n , d_n контрольних функцій на якість сітки. Одним із показників якості сітки є її ортогональ-

ність (кути комірок сітки мали бути близькими до прямих). Відомо, що еліптичні методи забезпечують ортогональність ліній сітки [1; 2].

Дослідимо значення максимального кута кожного елемента на прикладі сітки з двома колами (рис. 5в). Розглянемо випадок, коли значення параметрів для одного кола будуть, відповідно, дорівнювати параметрам іншого.

Якщо перший параметр залишити незмінним $a_n = b_n = 3$, а для другого параметру розглянути 2 випадки ($c_n = d_n = 40$ і $c_n = d_n = 20$), то побачимо, що максимальне значення найбільшого кута елемента в першому випадку дорівнює $147,7^\circ$, дає менший результат порівняно з другим випадком $157,6^\circ$. Отже, якість першої сітки (її ортогональність) є кращою за якість другої сітки. Це означає, що більше значення другого параметра дає кращу якість сітки.

Отже, досліджено вплив параметрів контрольних функцій на якість сітки. Виміряно значення максимального кута кожного елемента на прикладі сітки з двома колами (рис. 5в), якщо значення параметрів для одного кола будуть, відповідно, дорівнювати параметрам іншого. Виявлено, що якість сітки (її ортогональність) є кращою, якщо збільшити значення другого параметра c_n, d_n .

Було використано формули згущення вузлів сіток по координатних лініях сітки за допомогою

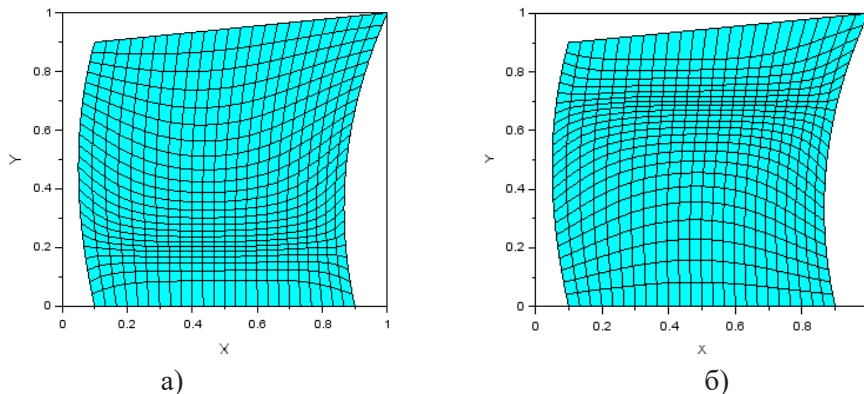


Рис. 4. Згущення сітки в нижній (а) і верхній (б) частинах області

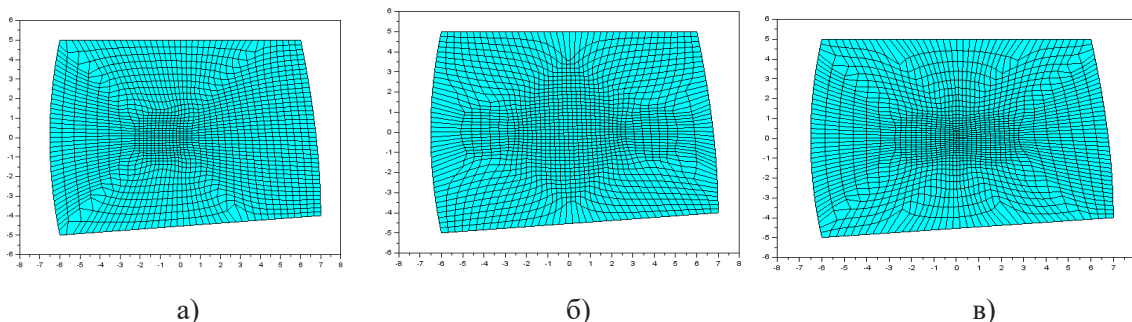


Рис. 5. Згущення сітки до заданих кіл

алгебраїчного (2) та диференціального (7)–(8) методу, що розглянуто в праці [5], та підтверджено їх вплив на згущення по горизонтальних та вертикальних лініях (рис. 2, 3, 4).

Висновки. У роботі було розглянуто методи побудови структурованих дискретних моделей, їх недоліки і переваги. Особлива увага була приділена дослідженню впливу контрольних функцій на керування сіткою.

Було показано на прикладах алгебраїчних методів можливості згущення сітки праворуч чи ліворуч.

Для диференціального методу (еліптичного) розглядалися контрольні функції, за допомогою яких можна виконати згущення до горизонтальних чи вертикальних координатних ліній, досліджено вплив параметрів цих контрольних функцій на згущення. Було досліджено вплив параметрів контрольних функцій, за допомогою яких можна побудувати одне, два чи більше кіл, еліптичного методу на якість побудованої сітки, а саме її ортогональність. Дослідження супроводжувалось візуалізацією отриманих результатів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Чопоров С.В., Гоменюк С.І., Алатамнех Х.Х., Оспіщев К.С. Методи побудови дискретних моделей: структуровані та блочно-структуровані сітки. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 272–284.
2. Халанчук Л.В., Чопоров С.В. Огляд методів генерації дискретних моделей геометричних об'єктів. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2018. № 1. С. 139–152.
3. Яцук Ю.В. Построение расчетных сеток для решения уравнений математической физики методом «объемов Безье». *Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Морская техника и технология*. 2009. № 1. С. 116–120.
4. Mahariq I., Erciyas A. A spectral element method for the solution of magnetostatic fields. *Turkish journal of electrical engineering and computer sciences*. 2017. Vol. 25, No 4, pp. 2922–2932.
5. Молчанов А.М., Щербаков М.А., Янышев Д.С., Куприков М.Ю., Быков Л.В. Построение сеток в задачах авиационной и космической техники : учеб. пособие. Москва : МАИ, 2013. 260 с.
6. Трофимов О.В., Петрова Ю.В. Многосеточные итерационные алгоритмы построения сеток для упругих и упругопластических слоистых пакетов. *Системы та технології*. 2015. № 2 (54). С. 69–80.
7. Liseikin V.D. *A Computational Differential Geometry Approach to Grid Generation*. N.-Y.: Springer, 2007. 293 p.
8. Вальгер С.А., Федорова Н.Н. Применение алгоритма к адаптации расчетной сетки к решению уравнений Эйлера. *Вычислительные технологии*. 2012. Т. 17, № 3. С. 24–33.
9. Surcel D., Laprise R. A General Filter for Stretched-Grid Models: Application in Cartesian Geometry. *Monthly weather review*. 2011. Vol. 139, pp. 1637–1653.

REFERENCES

1. Choporov S. V., Homeniuk S. I., Alatanekh Kh. Kh., Ospishchev K. S. (2016) Metody pobudovy dyskretnykh modelei: strukturovani ta blochno-strukturovani sitky [Discrete models generation methods: structured and block-structured grids]. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences*, no. 1, pp. 272–284.
2. Khalanchuk L.V., Choporov S.V. (2018) Ohliad metodiv heneratsii dyskretnykh modelei heometrychnykh ob'ektiv [Review of discrete models of geometric objects generation methods]. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences*, no. 1, pp. 139–152.
3. Yatsuk Yu. V. (2009) Postroenie raschetnykh setok dlya resheniya uravneniy matematicheskoy fiziki metodom “objemov Bez'e” [Construction of computational grids for solving equations of mathematical physics by the method of “Bezier volumes”]. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Morskaya tekhnika i tekhnologiya*, no. 1, pp. 116–120.
4. Mahariq I., Erciyas A. (2017) A spectral element method for the solution of magnetostatic fields. *Turkish journal of electrical engineering and computer sciences*, vol. 25, no. 4, pp. 2922–2932.
5. Molchanov A. M., Shcherbakov M. A., Yanyshchev D. S., Kuprikov M. Yu., Bykov L. V. (2013) *Postroenie setok v zadachakh aviatsionnoy i kosmicheskoy tekhniki: ucheb. posobie* [Meshing in problems of aviation and space technology]. MAI. Moskva. (in Russian)
6. Trofimov O. V., Petrova Yu. V. (2015) Mnogosetochnye iteratsionnye algoritmy postroeniya setok dlya uprugikh i uprugoplasticheskikh sloistyykh paketov [Multigrid iterative mesh generation algorithms for elastic and elastoplastic layered packets]. *Sistemy ta tekhnologii*, no. 2 (54), pp. 69–80.
7. Liseikin V. D. (2007) *A Computational Differential Geometry Approach to Grid Generation*. N.-Y.: Springer.
8. Val'ger S.A., Fedorova N. N. (2012) Primenenie algoritma k adaptatsii raschetnoy setki k resheniyu uravneniy Eylera [Application of the algorithm to adapting the computational grid to solving the Euler equations]. *Vychislitel'nye tekhnologii*, vol. 17, no. 3, pp. 24–33.
9. Surcel D., Laprise R. (2011) A General Filter for Stretched-Grid Models: Application in Cartesian Geometry. *Monthly weather review*, vol. 139, pp. 1637–1653.

УДК 539.3

DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-15>

ПРО ВЗАЄМОДІЮ ВІДКРИТОЇ ТА ЗАКРИТОЇ ТРІЩИН МІЖ ДВОМА МАТЕРІАЛАМИ

Шевельова А. Є.

*доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
пр. Гагаріна 72, Дніпро, Україна
orcid.org/0000-0001-6688-0942
allasheveleva@i.ua*

Сіліч-Балгабаєва В. Б.

*кандидат технічних наук, старший науковий співробітник,
заступник начальника науково-дослідної частини
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
пр. Гагаріна 72, Дніпро, Україна
orcid.org/0000-0002-9490-3600
v_silichbalgabaieva@ukr.net*

Костенко М. В.

*аспірант кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
пр. Гагаріна 72, Дніпро, Україна
orcid.org/0000-0002-1644-7857
neutralunit1187@gmail.com*

Лобода В. В.

*доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
пр. Гагаріна 72, Дніпро, Україна
orcid.org/0000-0002-0432-629X
loboda@dnu.dp.ua*

Ключові слова: тріщина,
біматеріал, задача
лінійного спряження.

Розглядається відкрита та закрита тріщини між двома ізотропними півплощинами під дією комбінованого навантаження на нескінченості. Така ситуація може мати місце за наявності в області тріщини спеціальних мастильних матеріалів. Вважається, що береги відкритої тріщини не взаємодіють між собою, а закритої – знаходяться в умовах гладкого контакту. Для розв'язання задачі використані представлення напружень та похідних від стрибків переміщень через кусково-аналітичну функцію, що одержані раніше. Сформульована комбінована крайова задача Діріхле-Рімана з областями розривів невідомої функції, що збігаються з відрізкамі розташування тріщин. Виписаний точний аналітичний розв'язок цієї задачі, який задовольняє умовам на нескінченості та умовам однозначності переміщень при обході контурів тріщин. Знайдені досить прості вирази для напружень на межі поділу матеріалів поза тріщинами, а також для похідних

від стрибків переміщень берегів тріщин. Обчислені коефіцієнти інтенсивності напружень та швидкість звільнення енергії для вершин тріщин, які визначають можливість їх розвитку. Показано, що має місце осцилююча коренева особливість у вершинах відкритої тріщини і звичайна коренева особливість у вершинах закритої тріщини. Окремо отримано досить простий розв'язок подібної задачі для випадку тільки однієї відкритої тріщини на межі поділу матеріалів, який використано для оцінки достовірності розв'язку основної задачі шляхом його порівняння для випадку, коли тріщини знаходяться на значному віддаленні між собою. Показано, що у цьому випадку основні характеристики відкритої тріщини для основної і допоміжної задачі дуже добре узгоджуються. Побудовано також розв'язок задачі про взаємодію відкритої і закритої міжфазних тріщин для випадку тіла скінчених розмірів з використанням студентської версії скінченно-елементного пакету ABAQUS. За умови, що розмір тріщин набагато менший за характерний розмір тіла, проведено порівняння аналітичних і чисельних результатів та отримана їх гарна узгодженість.

ON THE INTERACTION OF AN OPEN AND CLOSED CRACKS BETWEEN TWO MATERIALS

Sheveleva A. E.

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Professor at the Department of Computational Mathematics and Mathematical Cybernetics
Oles Honchar Dnipro National University
Gagarina Ave., 72, Dnipro, Ukraine
orcid.org/0000-0001-6688-0942
allasheveleva@i.ua*

Silich-Balgabaieva V. B.

*Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher,
Deputy Chief of Research
Oles Honchar Dnipro National University
Gagarina Ave., 72, Dnipro, Ukraine
orcid.org/0000-0002-9490-3600
v_silichbalgabaieva@ukr.net*

Kostenko M. V.

*Postgraduate Student at the Department of Theoretical and Computer Mechanics
Oles Honchar Dnipro National University
Gagarina Ave., 72, Dnipro, Ukraine
orcid.org/0000-0002-1644-7857
neutralunit1187@gmail.com*

Loboda V. V.

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Head of the Department of Theoretical and Computer Mechanics
Oles Honchar Dnipro National University
Gagarina Ave., 72, Dnipro, Ukraine
orcid.org/0000-0002-0432-629X
loboda@dnu.dp.ua*

Key words: crack, bi-material, linear conjugation problem.

The open and closed cracks between two isotropic half-planes under the action of combined load at infinity are considered. It is assumed that the faces of the open crack do not interact with each other, and the closed ones are in smooth contact. The latter situation may occur in the presence of special lubricants in the crack region. To solve this problem, the previously obtained representations of stresses and derivatives of jump jumps via a piecewise analytic function are applied. Using the conditions at the interface of the materials, these representations made it possible to formulate a combined Dirichlet-Riemann boundary-value problem with areas of discontinuities of unknown function coinciding with the segments of the crack location. An exact analytical solution of this problem is written, which satisfies the conditions at infinity and the conditions of uniqueness of displacements when bypassing the cracks. Based on this solution, quite simple expressions were found for the stresses at the materials interface beyond the cracks, as well as for the derivatives of the of displacements jumps of the crack faces. The stress intensity factors and the energy release rate for the crack tips, which determine the possibility of their development, are also calculated. It is shown that there is an oscillating root singularity at the open crack tips and a common root singularity at the closed crack tips.

A rather simple solution of the similar problem was obtained also, but in the case of the only one open crack at the interface. This solution was used to evaluate the validity of the solution of the main problem by comparing it to the case of the cracks situated at a considerable distance from each other. It is shown that in this case the main characteristics of the open crack for the main and the auxiliary problem agree very well with each other. The solution of the problem of interaction of open and closed interface cracks for the case of a finite size body is also constructed. The student version of the Abaqus finite element package was used for this purpose. Provided that the size of the cracks is much smaller than the characteristic body size, the analytical and numerical results are compared and their good agreement is obtained. This is further evidence of the correctness of the analytical solution obtained in this paper.

Постановка проблеми. Дослідження тріщин між двома матеріалами (міжфазних тріщин) має важливе значення для практики, оскільки такого роду дефекти найчастіше спричиняють руйнування композитних конструкцій. Задача для тріщини, розташованої на межі поділу двох різних пружних ізотропних матеріалів, була поставлена за припущення, що тріщина повністю відкрита [1]. Для такої моделі встановлено, що біля вершин тріщини має місце осцилююча особливість напружень. Надалі міжфазна тріщина в рамках цієї моделі розглядалася в деяких роботах [2–4].

Для усунення осцилюючої особливості напружень у роботі [5] запропоновано контактну модель тріщини, яка враховує гладкий контакт її берегів біля вершин. Аналітичні способи розв'язання задачі для тріщини з зонами контакту, що розташована на межі поділу ізотропних матеріалів, розвивались у роботах [6–9].

Взаємодія двох відкритих міжфазних тріщин вивчалась у роботах [10–12], водночас результати дослідження взаємодії відкритої та закритої міжфазних тріщин авторам невідомі.

У цій роботі розглянуто задачу про взаємодію відкритої та закритої тріщин на межі поділу

матеріалів із використанням комплексних представлень компонент пружно-деформівного стану. Проблему зведено до комбінованої крайової задачі Діріхле-Рімана, для якої виписано аналітичний розв'язок. Одержано досить прості аналітичні формули для всіх необхідних факторів на межі поділу матеріалів.

Постановка задачі. Розглянемо відкриту $c \leq x_1 \leq a$ і закриту $b < x_1 < d$ тріщини на межі поділу $x_2 = 0$ двох пружних матеріалів (рис. 1).

Вважаємо, що вектор $\mathbf{P}^\infty = [\sigma^\infty, \tau^\infty]^T$ задає умови на нескінченності. Вважається також відсутність напружень на гранях відкритої тріщини і умови неперервності на іншій частині біматеріального інтерфейсу. Отже, граничні умови на різних частинах інтерфейсу мають вигляд

$$\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = 0 \quad \text{для } x_1 \in [c, a], \quad (1)$$

$$\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = 0, \quad \langle u_2(x_1, 0) \rangle = 0, \quad \langle \sigma_{22}(x_1, 0) \rangle = 0 \quad \text{для } x_1 \in [b, d], \quad (2)$$

$$\langle u_1(x_1, 0) \rangle = 0, \quad \langle u_2(x_1, 0) \rangle = 0,$$

$$\langle \sigma_{12}(x_1, 0) \rangle = 0, \quad \langle \sigma_{22}(x_1, 0) \rangle = 0 \quad \text{для } x_1 \notin [c, a] \cup [b, d], \quad (3)$$

де $c < a < b < d$, $\langle \cdot \rangle$ означає стрибок відповідної функції при переході через інтерфейс.

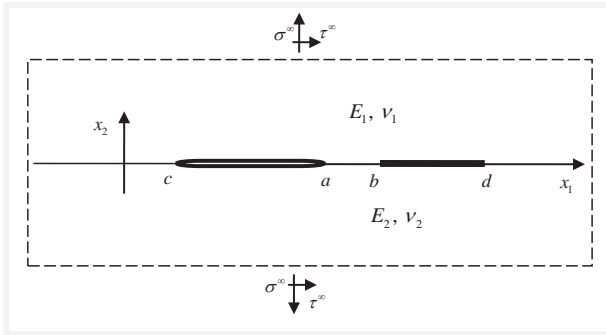


Рис. 1. Відкрита $c \leq x_1 \leq a$ і закрита $b < x_1 < d$ тріщини на межі поділу $x_2 = 0$ двох пружних матеріалів

В роботі [13] отримані представлення

$$\sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) - i\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) = g [F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1)], \quad (4)$$

$$\langle u_1'(x_1, 0) \rangle + i \langle u_2'(x_1, 0) \rangle = F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1), \quad (5)$$

де $g = \frac{2\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}$, $\gamma_1 = \frac{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}{\mu_2 + \kappa_2 \mu_1}$, функція $F_1(z)$

аналітична по всій площині комплексної змінної $z = x + iy$ за виключенням відрізків $[c, a]$ і $[b, d]$ межі поділу матеріалів. При цьому рівняння (4), (5) забезпечують виконання умов неперервності напружень уздовж усього інтерфейсу.

Аналітичне розв'язання проблеми. Співвідношення (4), (5) задовольняють третю і четверту умови (3), що витікає з виконання рівняння $P^{(1)}(x_1, 0) = P^{(2)}(x_1, 0)$ ($P^{(m)} = [\sigma_{22}^{(m)}, \sigma_{12}^{(m)}]^T$) для всього інтерфейсу. Подальше врахування першої і другої умов (3) забезпечує аналітичність функції для всієї площини з розрізом уздовж інтерфейсу.

Задовольняючи інші граничні умови (1) і (2) з використанням (4) і (5), отримуємо такі рівняння:

$$F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in [c, a], \quad (6)$$

$$\text{Im} [F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1)] = 0, \quad \text{Im} [F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1)] = 0$$

для $x_1 \in [b, d]$.

Останні два співвідношення призводять до рівняння

$$\text{Im} F_1^\pm(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in [b, d], \quad (7)$$

Беручи до уваги, що для $x_1 \notin [c, a]$ і $x_1 \notin [b, d]$ співвідношення $F_1^+(x_1) = F_1^-(x_1) = F_1(x_1)$ є справедливим, маємо з (4):

$$(1 + \gamma_1) F_1(x_1) = \sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) - i \sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) \quad \text{для } x_1 \rightarrow \infty.$$

Використовуючи той факт, що функція $F_1(z)$ є аналітичною по всій площині, яка розрізана вздовж $x_1 \in \{[c, a] \cup [b, d]\}$, і застосовуючи умови на нескінченності, приходимо з останнього рівняння до такої умови на нескінченності

$$F_1(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\sigma}^\infty - i \tilde{\tau}^\infty, \quad (8)$$

$$\text{де } \tilde{\sigma}^\infty = \frac{\sigma^\infty}{g(1 + \gamma_1)}, \quad \tilde{\tau}^\infty = \frac{\tau^\infty}{g(1 + \gamma_1)}, \quad \sigma^\infty \text{ і } \tau^\infty -$$

напруження, задані на нескінченності.

Співвідношення (6) і (7) є комбінована гранична задача Діріхле-Рімана. Розв'язання такої проблеми було знайдено і застосовано до аналізу жорсткого штампа [14]. Для цього випадку цей розв'язок може бути записано у вигляді

$$F_1(z) = P(z) X_1(z) + Q(z) X_2(z), \quad (9)$$

де

$$P(z) = C_1 z^2 + C_2 z + C_3, \quad Q(z) = D_1 z + D_2,$$

$$X_1(z) = i e^{i\chi(z)} / \sqrt{(z-c)(z-a)(z-b)(z-d)},$$

$$X_2(z) = e^{i\chi(z)} / \sqrt{(z-c)(z-a)},$$

$$\chi(z) = 2\varepsilon \ln \left[\frac{\sqrt{z-c} \sqrt{(d-a)(z-b)} + \sqrt{(b-a)(z-d)}}{\sqrt{z-a} \sqrt{(d-c)(z-b)} + \sqrt{(b-c)(z-d)}} \right],$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \gamma_1.$$

Невідомі коефіцієнти C_1, C_2, C_3, D_1, D_2 можна знайти з умов на нескінченності та умов однозначності зміщень. Беручи до уваги, що

$$X_1(z) = \frac{i e^{i\beta_0}}{z^2} \left[1 + \frac{1}{z} \left(i\beta_1 + \frac{a+b+c+d}{2} \right) \right] + O\left(\frac{1}{z^4}\right),$$

$$X_2(z) = \frac{e^{i\beta_0}}{z} \left[1 + \frac{1}{z} \left(i\beta_1 + \frac{a+c}{2} \right) \right] + O\left(\frac{1}{z^3}\right),$$

де

$$\beta_0 = 2\varepsilon \ln \left[\frac{\sqrt{(d-a)} + \sqrt{(b-a)}}{\sqrt{(d-c)} + \sqrt{(b-c)}} \right],$$

$$\beta_1 = \varepsilon \left[\sqrt{(b-c)(d-c)} - \sqrt{(b-a)(d-a)} \right],$$

отримаємо такий вираз для $F_1(z)$ на нескінченності

$$F_1(z) = i e^{i\beta_0} \left(C_1 + \frac{C_2}{z} + \frac{C_3}{z^2} \right) \left[1 + \frac{1}{z} \left(i\beta_1 + \frac{a+b+c+d}{2} \right) \right] + e^{i\beta_0} \left(D_1 + \frac{D_2}{z} \right) \left[1 + \frac{1}{z} \left(i\beta_1 + \frac{a+c}{2} \right) \right] + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Прирівнюючи вирази при z^0 і z^{-1} до правої частини (8) і до нуля відповідно, приходимо до системи

$$\begin{cases} i e^{i\beta_0} C_1 + e^{i\beta_0} D_1 = \tilde{\sigma}^\infty - i \tilde{\tau}^\infty, \\ i e^{i\beta_0} \left[C_2 + C_1 \left(i\beta_1 + \frac{a+b+c+d}{2} \right) \right] + e^{i\beta_0} \left[D_2 + D_1 \left(i\beta_1 + \frac{a+c}{2} \right) \right] = 0. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи має вигляд

$$C_1 = -\tilde{\tau}^\infty \cos \beta_0 - \tilde{\sigma}^\infty \sin \beta_0, \quad D_1 = \tilde{\sigma}^\infty \cos \beta_0 - \tilde{\tau}^\infty \sin \beta_0,$$

$$C_2 = -p_1 \sin \beta_0 + p_2 \cos \beta_0, \quad D_2 = p_1 \cos \beta_0 + p_2 \sin \beta_0,$$

де

$$p_1 = C_1 \left(\beta_1 \cos \beta_0 + \frac{a+b+c+d}{2} \sin \beta_0 \right) + D_1 \left(\beta_1 \sin \beta_0 - \frac{a+c}{2} \cos \beta_0 \right),$$

$$p_2 = -C_1 \left(\beta_1 \sin \beta_0 + \frac{a+b+c+d}{2} \cos \beta_0 \right) - D_1 \left(\beta_1 \cos \beta_0 + \frac{a+c}{2} \sin \beta_0 \right).$$

Використовуючи умову однозначності зміщень, приходимо з використанням (5) до такого рівняння

$$\int_b^d [F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1)] dx_1 = 0.$$

Беручи до уваги, що для $x_1 \in [b, d]$

$$X_1^\pm(x_1) = \frac{\pm e^{i\chi^\pm(x_1)}}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)(x_1-b)(d-x_1)}},$$

$$X_2^\pm(x_1) = \frac{e^{i\chi^\pm(x_1)}}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}},$$

останнє співвідношення може бути представлено у вигляді

$$\int_b^d \left[\frac{(C_1 x_1^2 + C_2 x_1 + C_3)(e^{z_0(x_1)} + e^{-z_0(x_1)})}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)(x_1-b)(d-x_1)}} - \frac{(D_1 x_1 + D_2)(e^{z_0(x_1)} - e^{-z_0(x_1)})}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}} \right] dx_1 = 0, \quad (10)$$

де

$$\chi_0(x_1) = 2\varepsilon \left(\tan^{-1} \frac{\sqrt{(b-a)(d-x_1)}}{\sqrt{(d-a)(x_1-b)}} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{(b-c)(d-x_1)}}{\sqrt{(d-c)(x_1-b)}} \right).$$

З рівняння (10) коефіцієнт C_3 може бути представлений у вигляді

$$C_3 = (-C_1 I_1 - C_2 I_2 + D_1 J_0 + D_2 J_1) / I_0,$$

де інтеграли

$$I_k = \int_b^d \frac{x_1^k (e^{z_0(x_1)} + e^{-z_0(x_1)}) dx_1}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)(x_1-b)(d-x_1)}}, \quad k = 0, 1, 2,$$

$$J_m = \int_b^d \frac{x_1^m (e^{z_0(x_1)} - e^{-z_0(x_1)}) dx_1}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}}, \quad m = 0, 1,$$

можна легко обчислити чисельно.

Використовуючи рішення (9) разом із формулою (4), отримуємо

$$\sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) - i \sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) = (1 + \gamma_1) F_1(x_1) \quad \text{для } x_1 \in [b, d], \quad (11)$$

Підстановка (9) призводить до такого виразу

$$\sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) - i \sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) = (e^{z_0(x_1)} + \gamma_1 e^{-z_0(x_1)}) \left(\frac{P(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)(x_1-b)(d-x_1)}} + \frac{Q(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}} \right) \quad \text{для } b < x_1 < d, \quad (12)$$

Підстановка розв'язку (9) в (5) дає такі формули

$$\langle u_1'(x_1, 0) \rangle + i \langle u_2'(x_1, 0) \rangle = -2\sqrt{\alpha} e^{i\chi^*(x_1)} \times \left(\frac{P(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(a-x_1)(b-x_1)(d-x_1)}} + \frac{iQ(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(a-x_1)}} \right) \quad \text{для } x_1 \in [c, a], \quad (13)$$

де $\chi^*(x_1) = 2\varepsilon \ln \left[\frac{\sqrt{x_1-c} \sqrt{(d-a)(b-x_1)} + \sqrt{(b-a)(d-x_1)}}{\sqrt{a-x_1} \sqrt{(d-c)(b-x_1)} + \sqrt{(b-c)(d-x_1)}} \right],$

$$\alpha = \frac{(\gamma_1 + 1)^2}{4\gamma_1}.$$

Варто зазначити, що в цьому випадку отриманий розв'язок є осцилюючим у вершинах відкритої тріщини і має традиційну кореневу сингулярність у вершинах закритої тріщини.

Далі вводимо найбільш важливі коефіцієнти інтенсивності напружень

$$K_2^b = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1-b)} \sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0),$$

$$K_2^a - i K_1^a = \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \sqrt{2\pi(x_1-a)} (x_1-a)^{i\varepsilon} (\sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) - i \sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0)), \quad (14)$$

Використовуючи рівняння (12) і враховуючи, що $\lim_{x_1 \rightarrow b+0} \chi_0(x_1) = 0$, можна знайти

$$K_2^b = \frac{(1 + \gamma_1) \sqrt{2\pi} P(b)}{\sqrt{(b-c)(b-a)(d-b)}}, \quad (15)$$

Використання рівняння (11) для $x_1 \rightarrow a-0$ дає змогу отримати вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень K_1^a і K_2^a :

$$K_2^a - i K_1^a = \sqrt{2\pi} (1 + \gamma_1) \left(\frac{2\sqrt{(a-c)(b-a)(d-a)}}{\sqrt{(d-c)(b-a)} + \sqrt{(b-c)(d-a)}} \right)^{2i\varepsilon} \times \left(\frac{Q(a)}{\sqrt{(a-c)}} - \frac{iP(a)}{\sqrt{(a-c)(b-a)(d-a)}} \right), \quad (16)$$

Відповідно до [15] швидкість вивільнення енергії (ШВЕ) для цієї задачі може бути представлена у вигляді

$$G = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \left\{ \int_a^{a+\Delta l} [\sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_2(x_1 - \Delta l, 0) \rangle + \sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_1(x_1 - \Delta l, 0) \rangle] dx_1 \right\}, \quad (17)$$

Формули (12), (13) в околі правої вершини тріщини

$$\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) - i \sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) \Big|_{x_1 \rightarrow a+0} = \frac{g(1 + \gamma_1)}{(x_1 - a)^{0.5+i\varepsilon}} \times \left(\frac{2\sqrt{(a-c)(b-a)(d-a)}}{\sqrt{(d-c)(b-a)} + \sqrt{(b-c)(d-a)}} \right)^{2i\varepsilon} \left(\frac{Q(a)}{\sqrt{(a-c)}} - \frac{iP(a)}{\sqrt{(a-c)(b-a)(d-a)}} \right), \quad (18)$$

$$\langle u_1(x_1, 0) \rangle + i \langle u_2(x_1, 0) \rangle \Big|_{x_1 \rightarrow a-0} = \frac{\sqrt{2\alpha} (a-x_1)^{0.5-i\varepsilon}}{(0.5-i\varepsilon)} \times \left(\frac{2\sqrt{(a-c)(b-a)(d-a)}}{\sqrt{(d-c)(b-a)} + \sqrt{(b-c)(d-a)}} \right)^{2i\varepsilon} \left(\frac{P(a)}{\sqrt{(a-c)(b-a)(d-a)}} + \frac{iQ(a)}{\sqrt{(a-c)}} \right), \quad (19)$$

Беручи до уваги, що

$$\sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_2(x_1 - \Delta l, 0) \rangle + \sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_1(x_1 - \Delta l, 0) \rangle = -\text{Im} \left\{ [\sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) - i \sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0)] \times [\langle u_1(x_1 - \Delta l, 0) \rangle - i \langle u_2(x_1 - \Delta l, 0) \rangle] \right\}$$

і виконуючи інтегрування в (17) з використанням (18), (19) і значення інтегралу [15]

$$\int_0^1 \left(\frac{1-x}{x} \right)^{0.5+i\varepsilon} dx = \frac{\pi(1+2i\varepsilon)}{2\sqrt{\alpha}},$$

одержуємо

$$G = \frac{\pi g(1 + \gamma_1)}{a-c} \left[Q^2(a) + \frac{P^2(a)}{(b-a)(d-a)} \right], \quad (20)$$

Одна відкрита тріщина. Для підтвердження обґрунтованості отриманого розв'язку припу-

стимо, що є тільки одна відкрита тріщина. У цьому випадку залишається задача лінійного спряження

$$F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1) = 0 \text{ для } x_1 \in [c, a], \quad (21)$$

для якої залишаються справедливими умови на нескінченності (8).

Розв'язок рівняння (21) при умовах на нескінченності (8) знайдений на основі [16] у вигляді

$$F(z) = (\tilde{\sigma}^\infty + i\tilde{\tau}^\infty) \frac{z - (a+c)/2 - i\varepsilon(a-c)}{\sqrt{(z-c)(z-a)}} \left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{i\varepsilon}, \quad (22)$$

Напруження на межі поділу матеріалів знайдені на основі (4) у формі

$$\begin{aligned} &\sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) + i\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) = \\ &= (\sigma^\infty + i\tau^\infty) \frac{x_1 - (a+c)/2 - i\varepsilon(a-c)}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}} \left(\frac{x_1-c}{x_1-a}\right)^{i\varepsilon} \\ &\text{для } x_1 > a, \end{aligned} \quad (23)$$

Використовуючи рівняння (23) для $x_1 \rightarrow a-0$, знаходимо КІН у формі:

$$K_1^a + iK_2^a = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 - 2i\varepsilon) (\sigma^\infty + i\tau^\infty) (a-c)^{0.5+i\varepsilon}, \quad (24)$$

ШВЕ знаходиться аналогічно розділу 3 і має вигляд

$$G_0 = \Omega (K_1^2 + K_2^2) = \Omega a \pi (1 + 4\varepsilon^2) \left((\sigma^\infty)^2 + (\tau^\infty)^2 \right), \quad (25)$$

$$\text{де } \Omega = \frac{1}{16 \text{ch}^2(\pi\varepsilon)} \left(\frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right).$$

Числові результати та їх аналіз. Для чисельної реалізації отриманих результатів вибиралися матеріали з такими характеристиками: $E_1 = 10^5 \text{ Па}$, $E_2 = 10^9 \text{ Па}$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$. Положення відкритої тріщини не змінювалось, тобто вибиралось $c = -2$, $a = 0$.

На рис. 2 наведено графіки дотичного $\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0)$ та нормального $\sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0)$ напружень на відріжку (a, b) при положенні вершин закритої тріщини $b = 0.4$, $d = 3$ і $\sigma^\infty = 100 \text{ Па}$, $\tau^\infty = 200 \text{ Па}$.

Графіки отримано як за формулою (12), яка описує аналітичний розв'язок, так і за допомогою багатоцільового скінченно-елементного комплексу для інженерного аналізу ABAQUS. В останньому випадку область розглядалась як скінченна, але її розмір був набагато більшим, ніж довжина тріщинуватої області. Проводилось згущення сітки біля тріщини і особливо біля її вершин. Суцільні криві відповідають точному аналітичному розв'язку, а пунктирні криві з трикутними маркерами побудовані за числовими значеннями, які отримані за допомогою пакету ABAQUS. Видно, що результати аналітичного і чисельного аналізів добре узгоджуються, що свідчить про достовірність отриманого розв'язку.

Проаналізовано залежність стрибка переміщення $\langle u_2(x_1, 0) \rangle$ при варіюванні дотичного напруження на нескінченності $\tau^\infty = 200, 400, 600 \text{ Па}$ (криві I, II, III відповідно) для $\sigma^\infty = 100 \text{ Па}$ і фіксованих значень $b=1$, $d=3$. Також наведено графік стрибка переміщення $\langle u_2(x_1, 0) \rangle$ для випадку, коли закрита тріщина знаходиться досить далеко від відкритої, а саме: $b = 8$, $d = 10$. При цьому $\tau^\infty = 200 \text{ Па}$, $\sigma^\infty = 100 \text{ Па}$. На рис. 3 цей графік представлено пунктирною лінією. Видно, що збільшення дотичного напруження на нескінченності τ^∞ призводить до значної модифікації розкриття тріщини і навіть до зміни його знаку в деякій частині області тріщини. Це вказує на необхідність використання контактної моделі тріщини для таких випадків зовнішнього навантаження.

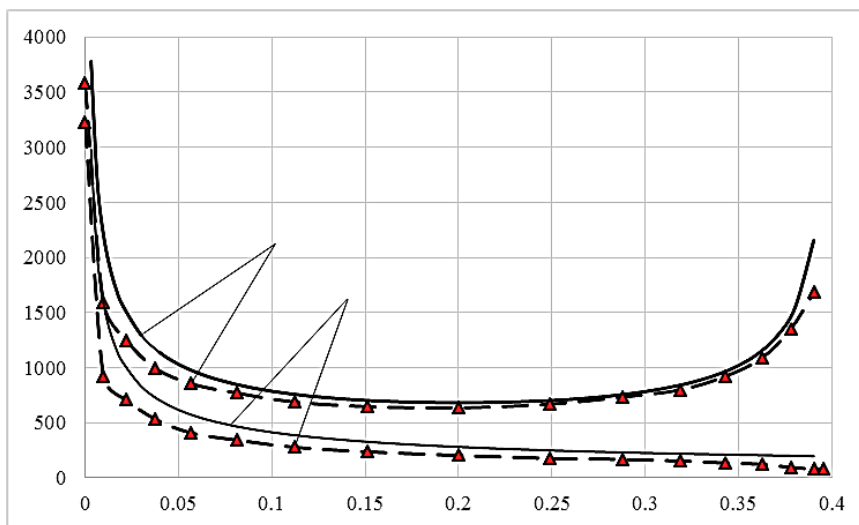


Рис. 2. Графіки дотичного $\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0)$ та нормального $\sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0)$ напружень на відріжку (a, b) при положенні вершин закритої тріщини $b = 0.4$, $d = 3$ і $\sigma^\infty = 100 \text{ Па}$, $\tau^\infty = 200 \text{ Па}$

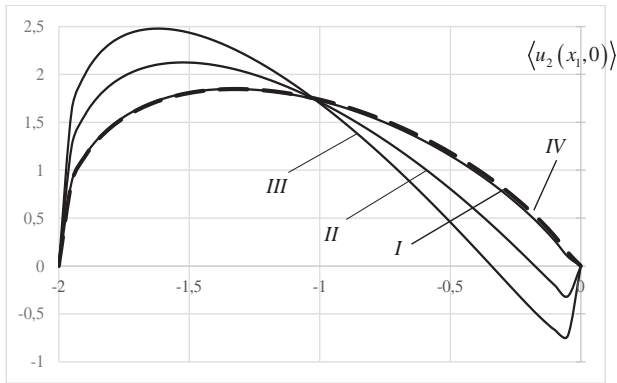


Рис. 3. Стрибки переміщення $\langle u_2(x_1, 0) \rangle$ на відріжку $[c, a]$

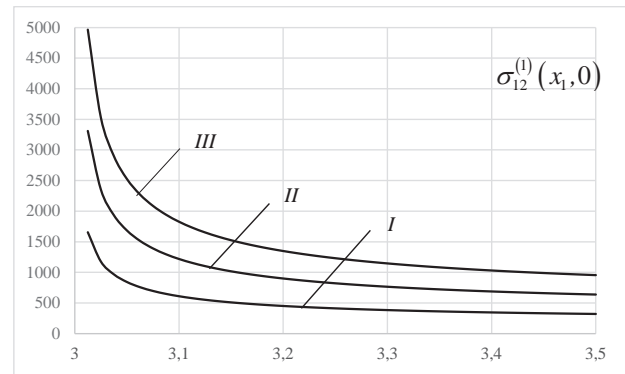


Рис. 4. Дотичне напруження $\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0)$ в правому околі закритої тріщини

Графіки дотичного напруження $\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0)$ в правому околі закритої тріщини наведено на рис. 4 для тих же значень параметрів, що і на рис. 3.

Як видно з отриманих результатів, зі збільшенням дотичного напруження τ^∞ на нескінченності пропорційно збільшуються і значення дотичного напруження $\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0)$.

Висновки. Розглянуто взаємодію відкритої і закритої тріщин на межі поділу ізотропних матеріалів. Для розв'язання задачі використані одержані раніше представлення напружень та похідних від стрибків переміщень через кусково-аналітичну функцію. В результаті проблему зведено до комбінованої крайової задачі Діріхле-Рімана, для якої представлено точний аналітичний розв'язок. На основі цього розв'язку знайдені досить прості вирази для напружень на межі поділу матеріалів, а також коефіцієнти інтенсивності напружень та

швидкість звільнення енергії біля вершин тріщин. Показано, що має місце осцилююча коренева особливість у вершинах відкритої тріщини і звичайна коренева особливість у вершинах закритої тріщини. Поведінка напружень та переміщень представлена графічно. Виявлено, що для досить інтенсивного поля зовнішніх зсувних напружень береги тріщини починають перетинатись, що вказує на необхідність використання контактної моделі тріщини для таких випадків.

Подібну задачу, але для біматеріального тіла скінчених розмірів, змодельовано і розв'язано за допомогою студентської версії кінцево-елементного пакету ABAQUS. Порівняння отриманих аналітичних формул із результатами за методом скінчених елементів продемонструвало їх гарне узгодження та додатково підтвердило правильність застосованих у цій роботі методів та отриманих розв'язків.

ЛІТЕРАТУРА

- Williams M.L. The stresses around a fault or cracks in dissimilar media. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 1959. V. 49. P. 199–204.
- Моссаковский В.И., Рыбка М.Т. Обобщение критерия Гриффитса-Снеддона на случай неоднородного тела. *Прикладная математика и механика*. 1964. № 6. С. 1061–1069.
- Черепанов Г.П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. *Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение*. 1962. № 1. С. 131–137.
- England A.N. A crack between dissimilar media. *Journal of Applied Mechanics*. 1965. V. 32. P. 400–402.
- Comninou M. The interface crack. *Trans. ASME. Ser. E, J. Applied Mechanics*. 1977. V. 44. № 4. P. 631–636.
- Симонов И.В. Трещина на границе раздела в однородном поле напряжений. *Механика композитных материалов*. 1985. № 6. С. 969–976.
- Лобода В.В. Об одном эффекте в теории межфазной трещины. *Доповіди АН УРСР*. 1989. № 8. С. 39–43.
- Острик В.И., Улітко А.Ф. Тріщина на межі розділу півплощин з різних матеріалів. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2000. Т. 43. № 2. С. 119–126.
- Loboda V.V., Sheveleva A.E. On the quasi-invariant phenomena in the axisymmetrical interface crack problem and its application to fixed end cylinder investigation. *International Journal of Solids and Structures*. 1995. V. 32. № 1. P. 117–125.
- Rice J.R., Sih G.C. Plane problem of cracks in dissimilar media. *Journal of Applied Mechanics*. 1965. V. 32. P. 418–423.
- Parihar K.S., Garg A.C. An infinite row of collinear cracks at the interface of two bonded dissimilar elastic half planes. *Eng. Fract. Mech.* 1975. V. 7. № 4. P. 751–759.

12. Нахмейн Е.Л., Нуллер Б.М., Рывкин М.Б. Деформация составной упругой плоскости, ослабленной периодической системой произвольно нагруженных щелей. *Прикладная математика и механика*. 1981. Т. 45, № 6. С. 1088–1094.
13. Лобода В.В., Харун І.В. Міжфазні тріщини з зонами контакту в полі зосереджених сил та моментів. *Мат. методи та фізико-механічні поля*. 2002. Т. 45. № 2. С. 103–113.
14. Нахмейн Е.Л., Нуллер Б.М. Контакт упругой полуплоскости с частично отслоившимся штампом. *Прикладная математика и механика*. 1986. Т. 50 (4). С. 663–673.
15. Shih C.F., Asaro R.J. Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: Part 1 – small scale yielding. *J. Appl. Mech.* 1988. V. 55. P. 299–316.
16. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва : Наука, 1966. 707 с.

REFERENCES

1. Williams M. L. (1959) The stresses around a fault or cracks in dissimilar media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 49, pp. 199–204.
2. Mossakovskiy V. I., Rybka M. T. (1964) Obobshchenie kriteriya Griffitsa-Sneddona na sluchay neodnorodnogo tela [Generalization of the Griffiths-Sneddon criterion to the case of an inhomogeneous body]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, no. 6, pp. 1061–1069.
3. Cherepanov G. P. (1962) O napryazhenom sostoyanii v neodnorodnoy plastinke s razrezami [On the stress state in an inhomogeneous plate with cuts]. *Izv. AN SSSR. OTN. Mekhanika i mashinostroyeniye*, no. 1, pp. 131–137.
4. England A. N. (1965) A crack between dissimilar media. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 32, pp. 400–402.
5. Comninou M. (1977) The interface crack. *Trans. ASME. Ser. E, J. Applied Mechanics*, vol. 44, no 4, pp. 631–636.
6. Simonov I. V. (1985.) Treshchina na granitse razdela v odnorodnom pole napryazheniy [Crack at the interface in a uniform stress field]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, no. 6, pp. 969–976.
7. Loboda V. V. (1989) Ob odnom effekte v teorii mezhfaznoy treshchiny [About one effect in the interface crack theory]. *Dopovidi AN URSR*, no. 8, pp. 39–43.
8. Ostryk V. I., Ulitko A. F. (2000) Trishhyna na mezhi rozdilu pivploshhyn z riznykh materialiv [Crack at the interface between half-planes of different materials]. *Mat. metody ta fizyko-mekhanichni polja*, vol. 43, no. 2, pp. 119–126.
9. Loboda V. V., Sheveleva A. E. (1995) On the quasi-invariant phenomena in the axisymmetrical interface crack problem and its application to fixed end cylinder investigation. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 32, no. 1, pp. 117–125.
10. Rice J. R., Sih G. C. (1965) Plane problem of cracks in dissimilar media. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 32, pp. 418–423.
11. Parihar K. S., Garg A. C. (1975) An infinite row of collinear cracks at the interface of two bonded dissimilar elastic half planes. *Eng. Fract. Mech.*, vol. 7, no. 4, pp. 751–759.
12. Nakhmeyn E. L., Nuller B. M., Ryvkin M. B. (1981) Deformatsiya sostavnoy uprugoy ploskosti, oslablennoy periodicheskoy sistemoy proizvol'no nagruzhennykh shcheley [Deformation of a compound elastic plane weakened by a periodic system of arbitrarily loaded slots]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. 45, no. 6, pp. 1088–1094.
13. Loboda V. V., Kharun I. V. (2002) Mizhfazni trishhyny z zonamy kontaktu v poli zoseredzhenykh syl ta momentiv [Interface cracks with contact zones in the field of concentrated forces and moments]. *Mat. metody ta fizyko-mekhanichni polja*, vol. 45, no. 2, pp. 103–113.
14. Nakhmeyn E. L., Nuller B. M. (1986) Kontakt uprugoy poluploskosti s chastichno otsloivshimsya shtampom [Contact of an elastic half plane and a particularly unbonded stamp]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. 50 (4), pp. 663–673.
15. Shih C. F., Asaro R. J. (1988) Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: Part 1 – small scale yielding. *J. Appl. Mech.*, vol. 55, pp. 299–316.
16. Muskhelishvili N. I. (1977) *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity]. Moscow: Nauka. (in Russian)

УДК 539.3

DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-16>

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ ЦИЛІНДРА ТА ШАРУ, ЯКИЙ ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНИЙ ІЗ НЕДЕФОРМОВАНОЮ ОСНОВОЮ

Ярецька Н. О.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань*

*Хмельницький національний університет
вул. Інститутська, 11, Хмельницький, Україна*

orcid.org/0000-0002-3726-2878

iaretskan@gmail.com

Ключові слова: *початкові (залишкові) напруження, штамп, шар, лінеаризована теорія пружності, гармонічний потенціал.*

Стаття присвячена дослідженню контактної взаємодії попередньо напруженого циліндричного штампа на шар із початковими напруженнями без врахування сил тертя. Також робиться припущення, що шар жорстко закріплений із недеформованою основою. Задачу розв'язано у випадку рівних коренів визначального рівняння. Дослідження представлено в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій у рамках лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу. Припускається, що початкові стани пружного циліндричного штампа, пружного шару та основи однорідні та рівні. Дослідження проводиться в координатах початкового деформованого стану, які пов'язані з лагранжевими координатами (природного стану). Крім того, вплив циліндричного штампа спричиняє невеликі збурення відповідних величин основного напружено-деформованого стану. Також передбачається, що пружний циліндричний штамп та пружний шар виготовлені з різних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композиційних матеріалів. Наведені загальні розв'язки основних диференціальних рівнянь лінеаризованої теорії пружності у випадку осесиметричної деформації для скінченної циліндричної області. Задовільнення граничних умов приводить задачу до парних інтегральних рівнянь, які зводяться до інтегрального рівняння типу Фредгольма другого роду. У результаті поставлена задача представлена у вигляді нескінченних рядів, коефіцієнти яких визначаються з нескінченної регулярної системи алгебраїчних рівнянь. Вивчено вплив початкових (залишкових) напружень у шарі та циліндрі на розподіл контактних напружень в області контакту. У випадку рівних коренів для потенціалу гармонічного типу наведено результати чисельного аналізу, що подані у вигляді графіків, які ілюструють доволі значний вплив початкових напружень. Отже, вплив початкових напружень на напружено-деформований стан пружного циліндра, що втискається у пружний шар, полягає у тому, що початкові напруження в шарі призводять у випадку стиснення до зменшення напружень у пружному штампі, а у випадку розтягу – до їх збільшення, а для переміщень – навпаки.

CONTACT PROBLEM FOR PRE-STRESSED CYLINDER AND LAYER, WHICH IS RIGIDLY FIXED WITH THE UNDEFORMED BASIS

Yaretska N. A.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Higher Mathematics and Computer Applications
Khmelnytskyi National University
Institutska str., 11, Khmelnytskyi, Ukraine
orcid.org/0000-0002-3726-2878
iaretskan@gmail.com*

Key words: *initial (residual) stresses, punch, layer, the linearized theory of elasticity, the harmonic potential.*

The article is devoted to the study of the contact interaction of a prestressed cylindrical punch on a layer with initial stresses without friction forces. It is also assumed that the layer is rigidly fixed with an undeformed base. The problem is solved in the case of equal roots of the defining equation. The study is presented in general for the theory of large initial deformations and two variants of the theory of small initial deformations within the framework of the linearized theory of elasticity with an arbitrary structure of elastic potential. It is assumed that the initial states of the elastic cylindrical punch, the layer and the base are homogeneous and equal. The study is carried out in the coordinates of the initial deformed state, which are associated with Lagrangian coordinates (natural state). In addition, the influence of the cylindrical punch causes small perturbations of the corresponding values of the basic stress-strain state. It is also assumed that the elastic cylindrical punch and the elastic layer are made of different isotropic, transversely isotropic or composite materials. The general solutions of the basic differential equations of the linearized theory of elasticity in the case of axisymmetric deformation for a finite cylindrical domain are given. Satisfaction of boundary conditions leads the problem to paired integral equations, which are reduced to the Fredholm integral equation of the second kind. As a result, the problem is presented in the form of infinite series, the coefficients of which are determined from an infinite regular system of algebraic equations. The influence of initial stresses in the layer and the cylinder on the distribution of contact stresses in the contact region is studied. In the case of equal roots for the harmonic potential, the results of numerical analysis are given, which are presented in the form of graphs that illustrate a fairly significant effect of the initial stresses. So, influence of initial stresses on the stress-strain state of an elastic cylinder punch, is that the initial stress in the layer in the case of compression reduce the stress in the elastic punch, and in the case of stretching increase it.

Вступ. Контактні задачі є важливим розділом механіки деформованого твердого тіла і формують теоретичну основу для розрахунків на контактну міцність, жорсткість і зносостійкість рухомих і нерухомих з'єднань.

Прикладні потреби природознавства, сучасної техніки і новітніх технологій, пов'язані з необхідністю прогнозування контактної поведінки різних конструкцій, стимулювали в останні десятиліття розвиток різних математичних моделей і методів контактної механіки тіл із різними властивостями.

Аналіз стану проблеми. Проблема контактної взаємодії попередньо напружених тіл є актуальна

і важлива як для розвитку фундаментальних досліджень із механіки твердого деформованого тіла, так і для застосування в різних галузях промисловості. А успішному розв'язанню задач, пов'язаних із контактною взаємодією деформованих тіл, великою мірою допомагають широкі наукові дослідження. Тому їх розв'язання викликає велику увагу науковців усього світу.

Методи, що розвиваються теорією контактних задач, дають змогу знайти розподіл тиску в місцях контакту, вивчити концентрацію напружень та дослідити напружено-деформівний стан у тілах та ін. Але незважаючи на досягнення, все ще залишається недостатньо розробленою про-

блема контактної взаємодії попередньо напруженого циліндричного штамп та шару, що жорстко закріплений із недеформованою основою без врахування сил тертя.

Детальний огляд задач, що враховують початкові (залишкові) напруження, представлені в роботах [1–3]. Причому в перших роботах із контактної взаємодії тіл із початковими напруженнями розглядаються або пружні потенціали конкретної структури [4], або задача ставиться в загальному вигляді для стисливих (нестисливих) тіл із потенціалом довільної структури на основі лінеаризованої теорії пружності [1; 2]. Роботи з контактної взаємодії тіл із початковими напруженнями присвячені взаємодії попередньо напружених тіл із жорсткими та пружними штампами без початкових напружень [5].

Задача про тиск циліндричного штамп на шар, коли він лежить на жорсткій основі без тертя представлена в статті [6].

Загальний аналіз основних методів і найбільш відомих результатів у багатьох напрямках контактної взаємодії тіл із початковими (залишковими) напруженнями представлений в оглядових статтях [3; 7].

Є також низка інших узагальнюючих публікацій із лінеаризованої механіки, які повністю або частково пов'язані з тематикою цієї статті [8; 9].

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є розв'язок контактної задачі про тиск пружного циліндричного штамп з початковими напруженнями на пружний шар із початковими напруженнями, що жорстко закріплений із недеформованою основою. Дослідження проводиться в межах лінеаризованої теорії пружності в загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Припускаємо, що початкові напружено-деформовані стани в циліндрі, шарі та основі є однорідними та рівними, а пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовані функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [1].

Для дослідження вводимо лагранжеві координати (x_1, x_2, x_3) , які початковому стані збігаються з декартовими координатами (y_1, y_2, y_3) . Причому $y_i = \lambda_i x_i$ ($i = \overline{1,3}$), де λ_i ($i = \overline{1,3}$) – коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану. Матеріали штамп, шару та основи вважаються ізотропними стисливими або нестисливими. У випадку ортотропних матеріалів приймається, що пружно-еквівалентні напрямки збігаються з напрямками осей координат.

Усі величини, які належать до пружного циліндра, позначаються верхнім індексом «(1)», шару – «(2)», а основи – «(3)».

Розглянемо пружний циліндричний штамп радіуса R і висотою H із початковими напруженнями, що втискається у пружний шар під дією сили P після виникнення там початкового деформованого стану. Товщина шару в початковому деформованому стані пов'язана з товщиною в недеформованому стані відношенням $h_1 = \lambda_3 h_2$. Будемо рахувати, що зовнішнє навантаження прикладене тільки до вільного торця пружного штамп, під дією якого всі точки штамп переміщуються в напрямі осі симетрії y_3 на одну і ту саму величину ε . Вважатимемо, що поверхні поза ділянкою контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а в зоні контакту відсутнє тертя, а переміщення та напруження – неперервні.

Припустимо, що початковий стан тіл – однорідний, і виконуються співвідношення [1]:

$$y_m = x_m + U_m^0, U_m^0 = \delta_{mi}(\lambda_m - 1)\lambda_i^{-1}y_i, (i, m = \overline{1,2,3})$$

Тоді основне рівняння в переміщеннях для стисливих тіл має вигляд формул

$$L'_{ma}U_\alpha = 0, L'_{ma} = \omega'_{ija\beta} \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta, (i, m, \alpha, \beta = \overline{1,3}) \quad (1)$$

а для нестисливих тіл разом із умовою нестисливості:

$$L'_{ma}U_\alpha + q'_{am} \partial p' / \partial y_\alpha = 0, L'_{ma} = \kappa'_{ima\beta} \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta, \quad (2)$$

$$q'_{ij} \partial U_j / \partial y_i = 0, q'_{ij} = \lambda_i q_{ij}, (i, j, m, \alpha, \beta = \overline{1,3}).$$

Вирази для визначення складників тензора напружень для стисливих і нестисливих тіл запишемо у вигляді:

$$Q'_{ij} = \omega'_{ija\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial \delta_\beta}, Q'_{ij} = \kappa'_{ija\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial \delta_\beta} + q'_{ij} p,$$

$$\omega'_{ija\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \omega_{ija\beta}, \kappa'_{ija\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \kappa_{ija\beta},$$

При однорідних початкових напруженнях $S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0$; $S_0^{33} = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ розв'язки рівнянь (1), (2) представимо через циліндричні координати (r, θ, z_i) у вигляді розв'язків рівняння:

$$(\Delta_1 + \xi_2^2 \partial^2 / \partial y_3^2)(\Delta_1 + \xi_3^2 \partial^2 / \partial y_3^2)\tilde{\chi} = 0, \quad (3)$$

де $\Delta_1 = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r$.

Враховуючи умову існування єдиного розв'язку лінеаризованої теорії пружності для стисливих і нестисливих тіл [1], можливі два варіанти представлення загального розв'язку (3): випадок рівних коренів ($\xi_2^2 = \xi_3^2$) та випадок нерівних коренів ($\xi_2^2 \neq \xi_3^2$). У цій статті обмежимося випадком рівних коренів рівняння (3), тобто:

$$\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + y_3 \tilde{\chi}_2, (\Delta_1 + \xi_2^2 \partial^2 / \partial y_3^2)\tilde{\chi}_1 = 0, (\Delta_1 + \xi_2^2 \partial^2 / \partial y_3^2)\tilde{\chi}_2 = 0 \quad (4)$$

У системі кругових циліндричних координат (r, θ, z_i) , де $z_i = v_i^{-1} y_3$, $v_i = \sqrt{n_i}$, ($i = \overline{1,2}$), $n_1 = \xi_2^2$, $n_2 = \xi_3^2$, такий постановці відповідають граничні умови:

1) На торці циліндра $z_i = H v_i^{-1}$, де $v_i = \sqrt{n_i}$, ($i = \overline{1, 2}$):

$$u_3^{(1)} = -\varepsilon, \quad Q_{3r}^{(1)} = 0, \quad (0 \leq r \leq R) \quad (5)$$

2) На межі пружного шару в ділянці контакту $z_i = 0$, ($i = \overline{1, 2}$):

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \quad Q_{33}^{(1)} = Q_{33}^{(2)}, \quad Q_{3r}^{(1)} = Q_{3r}^{(2)} = 0, \quad (0 \leq r \leq R) \quad (6)$$

3) На межі пружного шару поза ділянкою контакту $z_i = 0$, ($i = \overline{1, 2}$):

$$Q_{33}^{(2)} = 0, \quad Q_{3r}^{(2)} = 0, \quad (R \leq r < \infty) \quad (7)$$

4) На боковій поверхні пружного штампу $r=R$:

$$Q_{rr}^{(1)} = 0, \quad Q_{3r}^{(1)} = 0, \quad (0 \leq z_i \leq H v_i^{-1}) \quad (8)$$

5) На нижній поверхні шару,

$$z_i = -\lambda_3 h_2 v_i^{-1} = -H v_i^{-1}, \quad (i = \overline{1, 2}):$$

$$u_3^{(2)} = 0, \quad u_r^{(2)} = 0, \quad (0 \leq r < \infty); \quad (9)$$

Умова рівноваги

$$P = -2\pi R^2 \int_0^1 \rho Q_{33}^{(2)}(0, \rho) d\rho, \quad (10)$$

що встановлює зв'язок між осіданням торця і рівнодіючою навантаження P .

Метод розв'язку. За допомогою методів розділення змінних (метод Фур'є) випишемо загальний розв'язок для скінченного циліндричного штамп з початковими напруженнями для рівних коренів $n_1 = n_2$, які виражаються через нескінченну систему констант:

$$\tilde{\chi} = (1 + v_1 z_1) [A_0 z_1 + B_0 + C_0 z_1 (3r^2 - 2z_1^2)] + \sum_{k=1}^{\infty} [(A_k + v_1 z_1 B_k) I_0(\gamma_k v_1 r) S_1(\gamma_k z_1 v_1) + J_0(\alpha_k r) (S_2(\alpha_k z_1) + v_1 z_1 S_3(\alpha_k z_1))]$$

де $S_1 = C_k \sin(\gamma_k v_1 z_1)$, $S_2 = E_k \text{sh}(\alpha_k z_1) + F_k \text{ch}(\alpha_k z_1)$, $S_3 = N_k \text{sh}(\alpha_k z_1) + M_k \text{ch}(\alpha_k z_1)$, $A_0, B_0, C_0, A_k, B_k, C_k, F_k, E_k, N_k, M_k$ – коефіцієнти, які визначаються із граничних умов (5)–(9).

Напружено-деформований стан у попередньо напруженому шарі, врахувавши (5)–(9), представимо, наприклад, для рівних коренів у вигляді:

$$u_3^{(2)} = \theta_3 \left(\int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta \rho) d\eta - \int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} G(\eta h) J_0(\eta \rho) d\eta \right),$$

$$Q_{33}^{(2)} = \theta_1 \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta, \quad Q_{3r}^{(2)} = 0, \quad (11)$$

де

$$\theta_1 = C_{44} l_1 (1 + m_1) \kappa, \quad h = h_1 / R, \quad \theta_3 = \frac{m_1}{v_1} (s_1 - s_0),$$

$$s_0 = \frac{(1 + m_2)}{(1 + m_1)}, \quad s_1 = \frac{m_1 - 1}{m_1}.$$

У (11) введено позначення

$$F(\eta) = \eta^3 B_2 R^{-3} (1 - G(\eta))^{-1}.$$

А функції $G(\eta)$ та κ матимуть вигляд:

$$G(t) = (1 - t + 0,5\kappa^2 cht + (1 - s_1)sh t) P(t), \quad \kappa = (s_0 - s_1)(1 - s) - (1 - s_0)(s_1 - s),$$

$$P(t) = 1 + 0,5\kappa t^2 + \kappa(1 - s_1)(s_0 - s)cht, \quad t = h\eta v_1^{-1},$$

де $s = s_0 l_2 l_1^{-1}$.

Для випадку рівних коренів введемо нові величини χ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$),

$$\int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\eta) d\eta = -\frac{8\varepsilon E}{\kappa \theta_2 l R} \chi_0, \quad \chi_k = -\frac{\mu_k N_k}{\varepsilon R}.$$

через які виразимо усі невідомі коефіцієнти в шарі, штампі та основі, що залежать від вигляду пружного потенціалу.

З умов неперервності напружень та переміщень (5), (6) у зоні контакту та поза нею випишемо парні інтегральні рівняння щодо функції $F(\eta)$:

$$\int_0^{\infty} F(\eta) \eta^{-1} J_0(\eta \rho) d\eta = f(\rho), \quad (\rho < 1),$$

$$\int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0, \quad (\rho > 1),$$

де

$$f(\rho) = -\varepsilon \theta_3^{-1} \left(1 - \chi_0 - 2(m_2 - 1) \frac{R^2}{\theta_2} \chi_0 \rho + \right.$$

$$\left. + \theta_4 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k J_0(\mu_k \rho) + 0,5(m_2 - 1) R^2 \sum_{k=1}^{\infty} b_1^{(k)} \chi_k I_0(\gamma_k v_1 R \rho) \right)$$

$$+ \int_0^{\infty} \eta^{-1} F(\eta) G(\eta h) J_1(\eta \rho) d\eta$$

де

$$\theta_3 = m_1 (s_1 - s_0) v_1^{-1},$$

$$\theta_2 = E (8m_1 (1 + H) n_1^{-1} - 4H v_1^{-1} + (1 - m_2) R^2 H^{-1}),$$

$$\theta_4 = (v_1 (m_2 - 1) - m_1 s_0) n_1^{-1},$$

$b_1^{(k)}$ – виражаються із граничних умов (5)–(9), $J_0(\mu_k \rho)$, $I_0(\gamma_k v_1 \rho)$ – функції Бесселя.

Використовуючи формулу звернення [1], матимемо інтегральні рівняння типу Фредгольма 2-го роду стосовно функції $F(\eta)$, які представлені співвідношеннями для рівних коренів:

$$\frac{F(\eta)}{\eta} = -\frac{2\varepsilon}{\pi \theta_3} \left((1 - \chi_0) \psi_0(\eta, 0) - 2(m_2 - 1) \frac{R^2}{\theta_2} \chi_0 \psi_1(\eta, 0) + \theta_4 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \psi_0(\eta, \mu_k) + \right.$$

$$\left. + 0,5(m_2 - 1) R^2 \sum_{k=1}^{\infty} b_1^{(k)} \chi_k \psi_0(\eta, i \gamma_k v_1 R) \right) +$$

$$+ 2\pi^{-1} \int_0^{\infty} u^{-1} F(u) G(uh) \psi_0(\eta, u) du \quad (12)$$

де $\psi_n(x, y) = \int_0^1 t^n \cos xt \cos ytdt$.

Розв'язок (12) шукаємо методом послідовних наближень у вигляді:

$$F(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{(k)}(\eta). \quad (13)$$

Зазначимо, що процес послідовних наближень (13) збіжний при $\lambda_1 > \lambda_{kp}$.

Використовуючи граничні умови (5)–(9) та ортогональність бesselевих функцій, отримаємо нескінченну квазірегулярну систему лінійних рівнянь:

$$\vartheta_k \chi_k + \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_{kn} \chi_n = \varpi_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (14)$$

Таким чином, задача зведена до визначення постійних χ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$), через які виражаються характеристики напружено-деформованого стану пружного шару, циліндра та основи з початковими напруженнями.

Зв'язок між осадом торця штампа та рівнодіючою навантаження P для рівних коренів, відповідно, матиме вигляд:

$$P = 8\pi \varepsilon E \theta_1 (\kappa \theta_2 l R)^{-1} \chi_0,$$

де $\theta_3 = (v_2 + v_1 s) n_1 n_2 ((m_1 v_2^3 + m_2 v_1^3) E)^{-1}$, $l = H / R$.

При обчисленні компонентів напружено-деформованого стану для шару і основи більшість інтегралів у кінцевому вигляді не обчислюються, враховуючи складність функції $G(t)$. Тому, починаючи із другого наближення функції (13), підінтегральні вирази розкладаємо в ряди за степенями h^i ($i=1, 2, \dots$). Тоді компоненти переміщень та напружень у внутрішніх точках шару з початковими напруженнями матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} u_r^{(2)} &= \varepsilon (\pi \theta_3)^{-1} \tilde{T}^1(\Omega_+^3; S_1^1; N_0^1; K_0^1; 1), \\ u_s^{(2)} &= m_1 \varepsilon (\pi \theta_3 v_1)^{-1} \tilde{T}^1(\Omega_-^3; S_1^0; N_0^0; K_0^0; s_1), \\ Q_{33}^{(2)} &= (1 + m_1) \varepsilon l C_{44} (\pi \theta_3 R)^{-1} \tilde{T}^1(\Omega_+^3; S_2^0; N_1^0; K_1^0; s), \\ Q_{3r}^{(2)} &= -(1 + m_1) \varepsilon C_{44} (\pi \theta_3 R v_1)^{-1} \tilde{T}^1(\Omega_-^3; S_2^1; N_1^1; K_1^1; s_0), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{T}^1(\Omega_{\pm}^l; S_m^n; N_m^n; K_m^n; k; a) &= (1 + a_0) \langle (1 - \chi_0) \cdot \Omega \\ (S_m^n; 0; k; a; 0) &- \frac{\theta_3}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{**} \Omega_{\pm}^l (S_{j+m}^n; 0; k; a; 0) - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \Omega_{\pm}^l (K_m^n; \mu_k; k; a; 0) &- \frac{2(m_2 - 1)R^2}{\theta_2} \chi_0 \Omega_{\pm}^l (N_m^n; 0; k; a; 0) + \\ + \theta_4 \frac{(m_2 - 1)R^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_1^{(k)} \chi_k \Omega_{\pm}^l &(K_m^n; i \gamma_k v_1 R; k; a; 0) \rangle + \\ + \sum_{\tau=1}^{\infty} a_{\tau} \langle (1 - \chi_0) \Omega_{\pm}^l &(S_m^n; 0; k; a; v_1 \tau) - \\ - \frac{\theta_3}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{**} \Omega_{\pm}^l (S_{j+m}^n; &0; k; a; v_1 \tau) - \frac{2(m_2 - 1)R^2}{\theta_2} \chi_0 \Omega_{\pm}^l (N_m^n; 0; k; a; v_1 \tau) + \\ + \theta_4 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \Omega_{\pm}^l (K_m^n; \mu_k; &k; a; v_1 \tau) + \frac{(m_2 - 1)R^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_1^{(k)} \chi_k \Omega_{\pm}^l (K_m^n; i \gamma_k v_1 R; k; a; v_1 \tau) \rangle \\ \Omega_{\pm}^3(\hat{L}_m^n, \mu, k, \theta) &= (A_1^{02} - s_0) \hat{L}_m^n(\rho, \mu, z_1 R^{-1} - \theta) + \\ (A_1^{12} - 2k) \hat{L}_m^n(\rho, \mu, &2h_1(Rv_1)^{-1} + z_1 R^{-1} - \theta) + \\ + (A_1^{22} - 2k) \hat{L}_{m+1}^n(\rho, \mu, &2h_1(Rv_1)^{-1} + z_1 R^{-1} - \theta) \pm \\ (A_1^{02} + s_0 - 2k) \hat{L}_m^n(\rho, \mu, &-z_1 R^{-1} - \theta) \pm 2z_1 R^{-1} \hat{L}_{m+1}^n(\rho, \mu, -z_1 R^{-1} - \theta) \pm \end{aligned}$$

$$\pm (A_1^{12} - 2k) \hat{L}_m^n(\rho, \mu, 2h_1(Rv_1)^{-1} - z_1 R^{-1} - \theta) \pm A + z R \pm (A_1^{22} + 2z_1 R^{-1}) \hat{L}_{m+1}^n(\rho, \mu, 2h_1(Rv_1)^{-1} - z_1 R^{-1} - \theta),$$

$$\hat{L}_m^n(t, 0, u) = \hat{L}_m^n(t, u), \quad A_1^{02} = s_0(s_0 - s_1)(s_0 + s_1)^{-1}, \quad 2 \quad (\quad) \quad A_1^{12} = 2s_0(s_0 - s_1)(s_0 + 2s_1)(s_0 + s_1)^{-2}, \quad A_1^{22} = h_1(s_0 v_1 R)^{-1} A_1^{12},$$

$$\begin{aligned} S_n^m(\rho; z) &= \int_0^{\infty} \eta^{n-2} \sin \eta e^{-z\eta} J_m(\eta \rho) d\eta, \\ K_n^m(\rho; \mu_k; z) &= \int_0^{\infty} \eta^n \psi_0(\eta, \mu_k) e^{-z\eta} J_m(\eta \rho) d\eta, \\ N_n^m(\rho; z) &= \int_0^{\infty} \eta^n \psi_1(\eta, 0) e^{-z\eta} J_m(\eta \rho) d\eta, \end{aligned}$$

C_j^{**} – коефіцієнти розкладу у ряд $F(\eta)$.

Результати дослідження. Вплив початкових напружень на закон розподілу контактних напружень для задачі про тиск пружного циліндричного штампа на шар із початковими напруженнями у випадку гармонічного потенціала зображується на рис. 1.

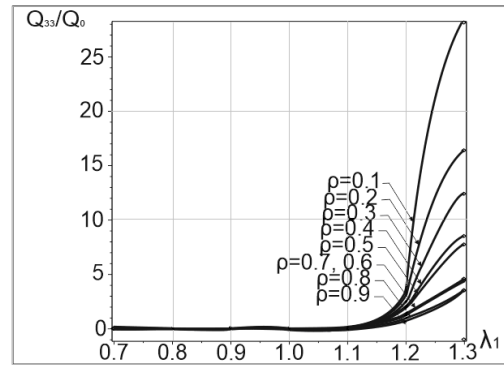


Рис. 1. Вплив початкових напружень на нормальний закон розподілу

З рис. 1 видно, що при розтягненні ($\lambda_1 > 1$) помічається більший вплив початкових напружень, ніж при стиску ($\lambda_1 < 1$).

З отриманих розв'язків за допомогою граничного переходу у випадку гармонічного потенціала можна отримати кілька часткових випадків:

1) при $\lambda_1 = 1$ отримаємо розв'язок задачі про тиск пружного циліндричного штампа на шар без початкових напружень [5];

2) при $h \rightarrow \infty$ отримаємо розв'язок задачі про тиск пружного циліндричного штампа на півпростір із початковими напруженнями [5] та ще кілька часткових випадків:

2.1) задача опору матеріалів про стиснення кругового стержня. У цьому випадку $\nu \rightarrow -1$, $\chi_0 = 1$, $\chi_k = 0$ ($k=1, 2, \dots$).

$$\begin{aligned} U_r^{(1)} &= \frac{RP\rho}{2\pi C_{44} l_1 (1 + m_1)}, \quad U_s^{(1)} = -\frac{m_1 P y_3}{\pi C_{44} l_1 (1 + m_1)}, \\ Q_3^{(1)} &= -\frac{P}{\pi R^2}, \quad Q_{3r}^{(1)} = 0, \quad Q_r^{(1)} = 0. \end{aligned}$$

2.2) Задача про тиск жорсткого циліндричного штампа без тертя на пружний півпростір із початковими напруженнями [10]. У цьому випадку $\nu \rightarrow -1$, $B_k = 0$ ($k=0,1,2,\dots$)

$$Q_3^{(2)} = \frac{8\varepsilon C_{44} l_1 (1 + m_1)}{\pi \sqrt{1 - \rho^2}}, \quad \rho < 1; \quad Q_{33}^{(2)} = 0, \quad \rho > 1;$$

$$U_3^{(2)} = -\varepsilon, \quad \rho < 1; \quad U_3^{(2)} = -\frac{2\varepsilon}{\rho} \arcsin \frac{1}{\rho}, \quad \rho > 1;$$

$$U_r^{(2)} = -\frac{2\nu_1 \varepsilon \rho}{m_1 \pi (s_0 - s_1) (1 + \sqrt{1 - \rho^2})}, \quad \rho < 1;$$

$$U_r^{(2)} = -\frac{2\nu_1 \varepsilon}{m_1 \pi (s_0 - s_1) \rho}, \quad \rho > 1.$$

2.3) Задачу про тиск пружного циліндричного скінченного штампа на півпростір без початкових напружень [5] отримуємо, зробивши заміну

$$\lambda_1 = 1, \quad C_{44} l_1 (1 + m_1) (s - s_0) = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad m_1 (s_0 - s_1) = \frac{2(\nu - 1)}{(1 - 2\nu)}.$$

3) При $\nu \rightarrow -1$ отримуємо розв'язок задачі про тиск жорсткого циліндричного штампа на шар із початковими напруженнями [11], якщо $\lambda_1 = 1$, то отримуємо результати праці [12].

Висновки. Вплив початкових напружень на напружено-деформований стан пружного циліндричного штампа, пружного шару, що жорстко з'єднаний із недеформованою основою, полягає в тому, що початкові напруження в шарі призводять у разі стиснення до зменшення напружень у пружному штампі, а у разі розтягу – до їх збільшення.

Тобто наявність попередньо напруженого стану під час контактної взаємодії пружних циліндра, шару та основи дає змогу регулювати контактні напруження та переміщення при розрахунках конструкцій на міцність. Причому для контактних напружень небезпечними є початкові напруження у випадку розтягнення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактна взаємодія тіл з початковими напруженнями : навч. посібник. Київ : Вища школа, 1995. 304 с.
2. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями : монография. Германия : Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.
3. Guz A.N., Babich S.Y., Rudnitskii V.B. Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research. *Int. Appl. Mech. Rev.* 1998. Vol. 51, No5. P. 343–371. <https://doi.org/10.1115/1.3099009>
4. Александров В.М., Арутюнян Н.Х. Контактные задачи для преднапряженных деформируемых тел. *Прикл. механика.* 1984. Т. 20, № 3. С. 9–16. <https://doi.org/10.1007/BF00883134>
5. Грилицкий Д.В., Кизыма Я.М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости : науч. пособие. Львов : Вища шк., 1981. 136 с.
6. Yaretskaya N.A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *International Applied Mechanics.* 2014. Vol. 50, No 4. P. 378–388. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0641-y>.
7. Babich S.Yu., Guz A.N., Rudnitsky V.B. Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches. *Int. Appl. Mech.* 2004. Vol. 40, No 7. P. 744–765. <https://doi.org/10.1023/B:INAM.0000046219.34646.4e>.
8. Yaretskaya N. A. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics.* 2018. Vol. 54, No 5. P. 539–543. <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0906-y>.
9. Дихтярук Н.Н., Ярецкая Н.А. Контактные задачи для одной и двух предварительно напряжённых полос, усиленных бесконечным стрингером. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2019. № 1. С. 49–57. <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2019-1-07>.
10. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании : науч. пособие. Москва : Физматгиз, 1960. 490 с.
11. Бабич С.Ю. Осесимметричная контактная задача слоя на упругом полупространстве с начальными напряжениями. *Прикл. механика.* 1985. Т. 21, № 11. С. 32–36.
12. Ворovich И.И., Устинов Ю.А. О давлении штампа на слой конечной толщины. *Прикладная математика и механика.* 1959. Т. 21, № 3. С. 445–454.

REFERENCES

1. Ghuzj O. M., Babysh S. Ju., Rudnyckij V. B. (1995) *Kontaktna vzajemodija til z pochatkovymu napruzhennjamu* [Contact Interactoin of Prestressed Bodies]. Kyjiv: Vyshha shkola. (in Ukrainian)
2. Guz' A. N., Babich S. Yu., Glukhov Yu. P. (2015) *Smeshannye zadachi dlya uprugogo osnovaniya s nachal'nymi napryazhenimi* [Mixed Problems for Prestressed Elastic Foundation]. Germaniya: LAP LAMBERT. (in Russian)

3. Guz A. N., Babich S. Y., Rudnitskii V. B. (1998) Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research. *Int. Appl. Mech. Rew.* Vol. 51, No5. pp. 343–371.
4. Aleksandrov V. M., Arutyunyan N. Kh. (1984) Kontaktnye zadachi dlya prednapryazhennykh deformiruemyykh tel [Contact problems for prestressed deformed bodies]. *Prikl. mekhanika.* Vol. 20, No 3. pp. 9–16.
5. Grilitskiy D. V., Kizyma Ya. M. (1981) *Osesimmetrichnye kontaktnye zadachi teorii uprugosti i termouprugosti* [Axisymmetric contact problems in the theory of elasticity and thermoelasticity]. L'vov: Vishcha shk. (in Russian)
6. Yaretskaya N. A. (2014) Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *International Applied Mechanics.* Vol. 50, No 4. pp. 378–388.
7. Babich S. Yu., Guz A. N., Rudnitsky V. B. (2004) Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches. *Int. Appl. Mech.* Vol. 40, No 7. pp. 744–765.
8. Yaretskaya N. A. (2018) Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics.* Vol. 54, No 5. pp. 539–543.
9. Dikhtyaruk N. N., Yaretskaya N. A. (2019) Kontaktnye zadachi dlya odnoy i dvukh predvaritel'no napryazhennykh polos, usilennykh beskonechnym stringerom [Contact tasks for one and two preliminary stressed strips strengthened by an infinite stringer]. *Visnyk Zaporiz'kogo nacional'nogo universytetu. Fyzyko-matematychni nauky.* No 1. pp. 49–57.
10. Vlasov V. Z., Leont'ev N. N. (1960) *Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii* [Beams, slabs and shells on an elastic foundation]. Moskva : Fizmatgiz. (in Russian)
11. Babich S. Yu. (1985) Osesimmetrichnaya kontaktnaya zadacha sloya na uprugom poluprostranstve s nachal'nymi napryazheniyami [Axisymmetric contact problem of a layer on an elastic half-space with initial stresses]. *Prikl. mekhanika.* Vol. 21, No 11. pp.32–36.
12. Vorovich I. I., Ustinov Yu. A. (1959) O davlenii shtampa na sloy konechnoy tolshchiny [About the pressure of the punch on a layer of finite thickness]. *Prikladnaya matematika i mekhanika.* Vol. 21, No 3. pp. 445–454.

РОЗДІЛ II. КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ

УДК 004.75

DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-17>

РЕАЛІЗАЦІЯ ЗАПЕРЕЧУВАНОВОГО ШИФРУВАННЯ ДАНИХ НА БАЗІ РОЗПОДІЛЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

Гальченко А. В.

*аспірант кафедри програмної інженерії
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-2258-9755
andream1993@ukr.net*

Чопоров С. В.

*доктор технічних наук, доцент,
професор кафедри програмної інженерії
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0001-5932-952X*

Ключові слова: *балансування навантаження, віртуальні машини, витік даних, заперечуване шифрування, несанкціонований доступ, обчислення, примушування, продуктивність, розподілені системи, шифрування, часові характеристики.*

Інформаційний простір розширюється досить швидко. Щодня користувачі створюють та обробляють велику кількість даних із використанням автоматизованих систем і мобільних пристроїв. Тобто контроль за поширенням даних, не кажучи про їх захист, стає все складнішим. Саме цим користуються треті особи (зловмисники). Вони отримують доступ до різноманітної інформації та використовують її в особистих цілях. Досить часто їх вигода є наслідком збитків, які несуть власники вказаної інформації. Для захисту інформації в більшості випадків використовують криптографічні засоби захисту. Їх застосування дає змогу запобігти витоку даних у разі отримання зловмисником доступу до інформаційної системи. Однак на практиці третіми особами використовуються різноманітні способи несанкціонованого доступу як до інформації, так і до ключів для захисту даних. Оскільки засоби криптографічного перетворення інформації поступово втрачають свою надійність, розроблення новітніх методів інформаційної безпеки є перспективним напрямом досліджень. Одним із них є розроблення механізмів заперечуваного шифрування даних. Алгоритми перетворення інформації на їх основі дають змогу захистити дані від витоку протягом усього часу їх існування. Також використання зазначених алгоритмів дає можливість зменшити ймовірність застосування атак на основі примусу користувачів інформаційних систем. Разом із тим встановлено, що, незважаючи на велике різноманіття рішень, вищевказані механізми досі не використовуються на практиці. Основною причиною цього є правові й технічні аспекти, які полягають у необхідності використання значних обчислювальних ресурсів. Головною метою дослідження є створення моделі розподілених обчислень, яка буде використана для покращення ефективності механізмів заперечуваного шифрування. Об'єктом дослідження є сучасні архітектури, моделі та принципи побудови розподілених систем обробки даних, що дають змогу об'єднати для сумісної роботи мільйони комп'ютерів по всьому світу. Предметом дослідження є алгоритми заперечуваного шифрування та їх реалізації на базі розподілених обчислень. За результатами дослідження авторами запропоновано декілька схем розподілених систем залежно від

технічних можливостей користувачів і методів розподілу задач. Ефективність вказаних схем перевірена в ході обчислювальних експериментів, результатом яких є покращення часових характеристик алгоритмів заперечуваного шифрування даних. Проведене дослідження дало змогу на практиці підвищити продуктивність виконання алгоритмів заперечуваного шифрування за допомогою наявних способів і схем реалізації розподіленої обробки даних між групою мережових комп'ютерів. Наукова новизна запропонованого підходу полягає в застосуванні засобів розподіленої обробки даних для реалізації механізмів заперечуваного шифрування даних. Практична значимість результатів полягає в отриманні підвищення продуктивності для наявних алгоритмів заперечуваного шифрування, що в перспективі дасть змогу їх практичного застосування.

THE DENIABLE ENCRYPTION BASED ON THE DISTRIBUTED CALCULATIONS

Halchenko A. V.

*Postgraduate Student at the Department of Software Engineering
Zaporizhzhia National University
Zhukovskogo str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-2258-9755
andream1993@ukr.net*

Choporov S. V.

*Doctor of Sciences in Engineering, Associate Professor,
Professor at the Department of Software Engineering
Zaporizhzhia National University
Zhukovskogo str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0001-5932-952X
s.choporoff@znu.edu.ua*

Key words: *coercion, computation, data leakage, denied encryption, distributed systems, encryption, load balancing, performance, time characteristics, unauthorized access, virtual machines.*

The cyberspace expands fast. A plenty of information is being created and processed by information systems and users' devices every day. The data spread control becomes more difficult. It's the best time to steal, collect and make a profit from users sensitive data. A lot of hacker techniques are used by them. The users are low skills and not ready to protect their data. General, the cryptographic security methods are the most used for sensitive data protection. It protects data from unauthorized access. But there is not any way to protect data from leaking. Also, the cryptography keys information is the another profit for intruders. Its allows them to use other systems for spy, information systems recognizing, use and sale their resources for another users. Also, most information security rules are broken by inside users. That's why the nowadays information security tools based on the cryptography systems lose its reliability. The innovated information security tools development is the top priority. It has to increase information systems protection independent of users' behavior. The deniable encryption schemes is one of the available ways. Its protection is based on the public key cryptography schemes. They prevent the data leaking inside and outside of information systems. It also prevents from the information security policy breaking by users. But they are not applied, because of their low productivity. It confines their applying on practice. The adaptive models' development based on the distributed computing for the deniable encryption schemes practice applying is the main investigation purpose. The modern architectures and models of the distributed data processing systems is the object of this research. The productivity increasing of deniable encryption algorithms by the distributed systems' implementation is the subject of this paper. As a result, the several effective models based on the distributed systems have been implemented into the low productivity deniable encryption algorithm and been tested. The effective load balance method has been found. The highest productivity has been reached. The base deniable encryption algorithm has not been modified. The experiment results have been compared with the other authors' investigations. The development of the effective distributed data processing model and it's applying in the deniable encryption algorithm is the scientific novelty of the proposed approach. The productivity increasing of the deniable encryption algorithm is the practice result.

Вступ. Сучасне інформаційне поле досягло небачених розмірів, не лише дані про навколишнє середовище потребують систематичної обробки і зберігання. За даними [1], до 2020 року розмір інформаційного простору досягне 40 ЗБ (без урахування даних на пристроях). Для обробки цієї інформації створено велику кількість алгоритмів, які застосовуються для вирішення різноманітних завдань. Попри те що персональні комп'ютери, мобільні пристрої, промислові й мережеві автоматизовані системи обробки даних набули значних обчислювальних потужностей, їх кількість недостатня для обробки, накопичення та захисту вищевказаної інформації. Для розв'язання цієї проблеми створили й активно використовують розподілені системи обробки даних [2], які не лише дають змогу об'єднати потужності вказаних пристроїв, а й забезпечують балансування навантаження на них для отримання результатів за оптимальний час.

Згідно з твердженнями Ендрю Таненбаума [3], єдиного трактування розподіленої системи не існує. У більшості випадків до них зараховують групи комп'ютерів, у яких відмова одного з них не призводить до зупинки обчислювальної системи, а задачі розподіляються між іншими комп'ютерами. Але вказане не є основним призначенням розподілених обчислень, лише окремою вимогою, яка висувається до них. Більш вузькою і валідною характеристикою вказаних систем є набір незалежних комп'ютерів, які з'єднані каналами зв'язку й утворюють єдине ціле. На тепер існують різні реалізації розподілених систем, які включають поділ обчислень на мережевому, транспортному та прикладному рівнях моделі OSI.

Постановка проблеми. Алгоритми заперечуваного шифрування даних є засобами захисту нового покоління. Їх використання дає можливість забезпечити конфіденційність даних до витоку та після нього. Також вони дають змогу запобігти можливості застосування примусу до користувачів з метою отримання закритих даних. Основна проблема практичного застосування заперечуваного шифрування – це низька швидкість перетворення інформації [4]. З огляду на розмір даних, у сучасних обставинах вказане є суттєвим недоліком.

Установлено, що раніше для розв'язання подібних проблем здійснювали шляхом унесення відповідних змін у базові алгоритми перетворення даних, використання симетричних криптографічних систем за рахунок маніпуляцій обчислювальним процесом [4–6].

У результаті розроблено низку власних рішень для підвищення ефективності використання вказаних алгоритмів на локальних пристроях [7; 8]. Отримані результати близькі до сучасних систем

криптографічного перетворення даних, однак обчислювальні ресурси локальних пристроїв є обмеженими. Тому подальші дослідження щодо практичного застосування цих алгоритмів на програмному рівні полягають у розподілі обчислень між кількома пристроями, об'єднаними в локальну мережу.

Метою дослідження є розроблення моделі розподілених обчислень для реалізації механізмів заперечуваного шифрування даних. Подібний підхід повинен забезпечити гнучкість управління процедурами перетворення даних алгоритмів заперечуваного шифрування та, як наслідок, покращити їх часові характеристики.

Виклад основного матеріалу.

1. Огляд моделей розподілених обчислень

Під системою, яка реалізує розподіл обробки даних, у науковій літературі розуміють таку, структурні й функціональні частини якої можуть бути розміщені одночасно на декількох вузлах. Незважаючи на відмінності в побудові та складності структури, в основі розподілених систем лежить використання моделі «клієнт-сервер» [2; 3; 6; 9].

Практичне застосування вказаного підходу потребує маніпуляції процесом виконання завдань. У зв'язку з цим виділяють синхронну й асинхронну моделі «клієнт-сервер». Алгоритм роботи першої ґрунтується на очікуванні клієнтом завершення обробки свого запиту на стороні серверу. Остання ж дає клієнту змогу продовжити виконання інших завдань до завершення обробки його запиту на сервері. Разом із тим під час використання цієї моделі важливим завданням є організація взаємодії програмного забезпечення, яке розміщене на вузлах та утворює розподілену систему.

За результатами аналізу вихідної моделі можна виділити взаємодію програмного забезпечення вузлів на таких рівнях:

- 1) інтерфейс користувача (відповідає за взаємодію оператора з системою);
- 2) логіка програмного забезпечення (відповідає за валідне виконання закладених у програму алгоритмів);
- 3) доступ до бази даних (відповідає за управління інформацією на вузлах).

Трапляється, що користувачі, які працюють у неоднорідних системах, потребують доступу до даних в інших систем. У зв'язку з цим обчислювальні системи почали розділяти між групами комп'ютерів з єдиним сервером, який здійснює контроль за доступом інформації на обчислювальних вузлах. До того ж блок логіки програмного забезпечення може бути розміщений як на клієнті, так і на сервері (або розділений між ними).

На рис. 1 наведено приклади сучасної розподіленої системи, у якій кожний вузол виконує окремі

частини вихідного завдання внаслідок розподілу логіки програмного забезпечення між вузлами, та системи на базі багатоланкової архітектури (зі зростанням) «у ширину»:

Особливістю останньої системи є неможливість прямого доступу до інформації з боку користувачів. Вищевказані системи є найбільш поширеними й дають можливість об'єднувати мільйони комп'ютерів, незважаючи на географічне положення.

Незважаючи на відмінності, до всіх розподілених систем висувається низка вимог [3]:

1) відкритість (ґрунтується на використанні загальнодоступних протоколів і стандартів, створенні специфікації для залучення незалежних розробників до створення системи);

2) масштабованість (дає змогу додавати нові вузли для збільшення продуктивності й зменшення навантаження на вихідну систему);

3) підтримка логічної цілісності даних (гарантує валідність і повноту обробки даних);

4) стійкість (забезпечує дублювання модулів з метою перерозподілу завдань між вузлами);

5) безпека (гарантує можливість доступу до системи лише авторизованих вузлів і користувачів, захист тимчасових даних від модифікації та витоку);

6) ефективність (ґрунтується на мінімізації витрат від реалізації системи).

Вищевказані положення є обов'язковими до виконання при побудові розподілених систем. Незважаючи на це, в окремих випадках дозволяється знехтувати виконання деяких вимог на користь продуктивності системи. Прикладом узгаданого є ієрархічна мережа DNS-серверів, у якій розробники знехтували вимогами безпеки.

2. Огляд методів балансування навантаження

З метою отримання кращих показників продуктивності внаслідок масштабування системи виникає необхідність використовувати алгоритми балансування навантаження (управління розподілом завдань між вузлами) [6; 9].

Узагальненим прикладом їх роботи є розподіл завдань між вузлами, які натепер найменш завантажені. Такий підхід до організації обчислювального процесу дає можливість збільшити продуктивність обчислень, регулювати навантаження на вузлах і підвищити стійкість системи до відмов загалом.

Для досягнення кращих показників продуктивності обчислень на етапі проектування розподілених систем розробники реалізують механізми балансування навантаження на мережевому, транспортному та прикладному рівнях моделі OSI.

Балансування навантаження на мережевому рівні ґрунтується на використанні набору фізичних серверів, які забезпечують стійкість системи до відмов шляхом їх дублювання процедур між групою вузлів. Указаний підхід потребує значних фінансових витрат, але забезпечує високі показники ефективності системи. Технологія балансування навантаження на цьому рівні реалізує управління розподілом завдань за рахунок вирівнювання по DNS, NLB-кластеру та IP-адрес.

На транспортному рівні поділ навантаження між групою вузлів реалізовано за рахунок застосування певного алгоритму (пошук серверів по колу або пошук найменш завантаженого серверу), який виконується за окремим вузлом (подібний до проксі-серверу). Подібний підхід є більш простим та ефективним, а також перешкоджає прямий доступ користувачів до серверу шляхом комутації запитів і відповідей між ними.

Технологія розподілу завдань на прикладному рівні досить подібна до попередньої. Однак у її основі лежить використання механізмів аналізу контексту запитів. Завдяки такому підходу до вирішення завдання запити клієнтів перенаправляються виключно на ті вузли, які відповідають за виконання певних завдань.

Вищевказані підходи до регулювання навантаження на мережеві вузли реалізовані у вигляді алгоритмів балансування навантаження [6]. Для досягнення кращих показників продуктивності необхідно обрати відповідний алгоритм згідно з такими вимогами:

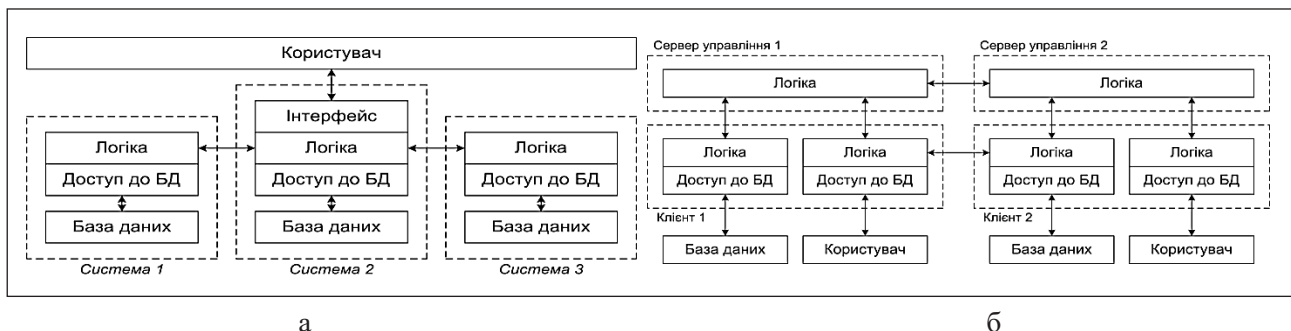


Рис. 1. Приклад сучасних системи обробки даних:
а – розподілена система; б – мережа прямого обміну даними

1) справедливість (ґрунтується на динамічній оцінці завантаження вузлів і використовується для прогнозування піків навантаження);

2) раціональність (дає змогу досягти максимально рівномірного поділу навантаження між вузлами);

3) швидкість (гарантує безперешкодну та швидку обробку даних).

У таблиці 1 наведено порівняльну характеристику відомих алгоритмів балансування навантаження щодо виконання вищевказаних критеріїв вибору.

3. Тестові моделі обчислень

У роботі автори дослідили можливість використання вищевказаних положень і виконали їх імплементацію у вихідну модель обчислень. Указане дало змогу реалізувати поділ обчислень тестового алгоритму заперечуваного шифрування даних між групою вузлів. З метою перевірки роботоспроможності цього підходу та пошуку оптимального варіанта організації обчислень синтезовані такі моделі розподілених обчислень (рис. 2): «клієнт-клієнт», «клієнт-сервер», «клієнт-сервер-клієнт».

Таблиця 1

Аналіз методів балансування навантаження

№ з/п	Критерії порівняння	Методи балансування навантаження			
		Round Robin	Weighted Round Robin	Least Connections	Sticky Sessions
1	Справедливість	Черга запитів			
2	Раціональність	Послідовний розподіл запитів між вузлами	Пріоритет мають більш потужні вузли	Пріоритет у вузла з меншим навантаженням	Послідовний розподіл для визначених IP-адрес
3	Швидкість	Залежить від продуктивності вузлів	Залежить від кількості потужних вузлів	Ефективна швидкість при використанні однакових вузлів	Витрати на зміну основного вузла

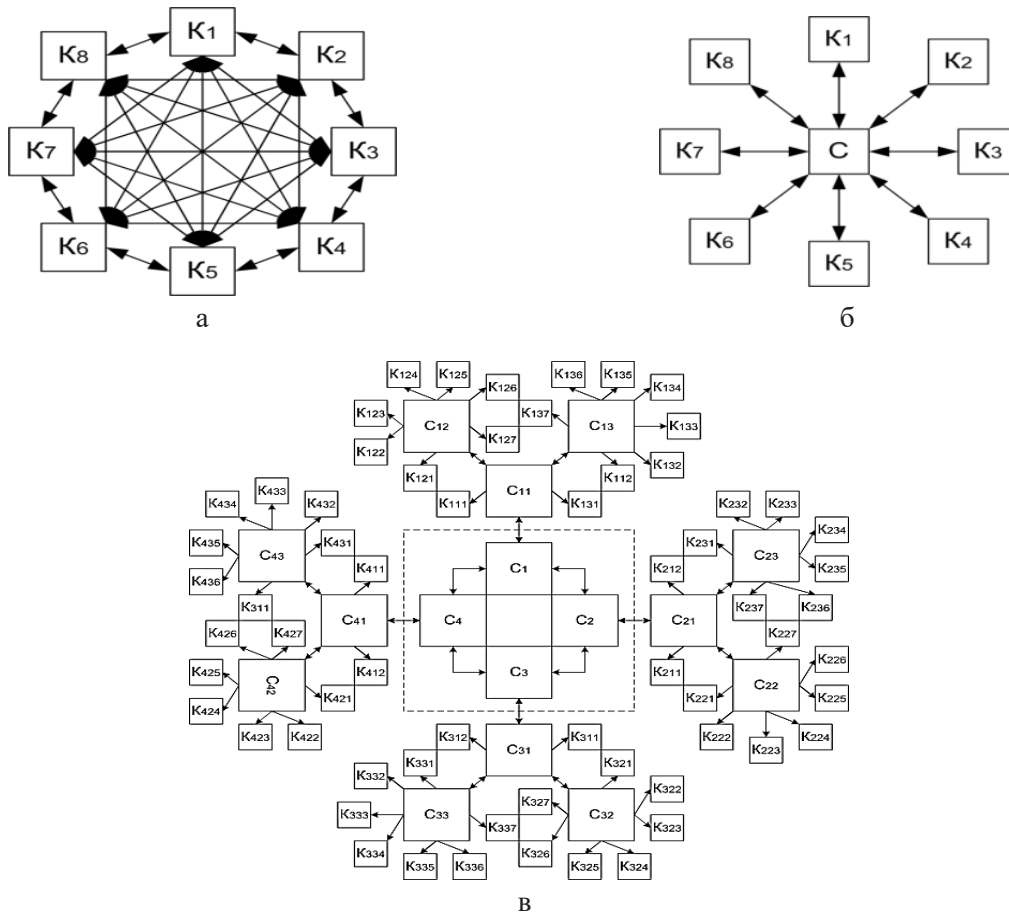


Рис. 2. Схеми розподілу обчислень:
а – «клієнт-клієнт», б – «клієнт-сервер», в – «клієнт-сервер-клієнт»

Модель, представлена на рис. 2а, ґрунтується на обміні даними виключно між клієнтами. Вузол, який ініціює обробку даних, виконує функції управління обчислювальним процесом. Реалізація вказаної моделі дає змогу зменшити витрати на обмін даними між вузлами, що можуть вплинути на кінцевий час обробки даних.

Обробка даних згідно з моделлю «клієнт-сервер» (рис. 2б) потребує виділення окремого вузла, який буде виконувати функції обробки даних або перерозподіл запитів клієнта між групою обчислювальних серверів. Указана модель є досить ефективною при використанні малопотужних вузлів у системі. Однак сучасні комп'ютери здатні виконувати більшу кількість завдань з обробки даних, зокрема виконання важких обчислень з використанням спеціалізованого програмного забезпечення. Отже, використання цієї моделі обчислень є доцільним у разі наявності в системі окремих вузлів із потужними обчислювальними ресурсами.

Реалізація моделі обчислень на рис. 2в доцільна лише в разі можливості масштабування системи «у ширину».

4. Розроблення алгоритму балансування навантаження

З метою підвищення ефективності обчислень авторами запропоновано алгоритм балансування навантаження, який ґрунтується на статичних методах розподілу обчислень (із повним попереднім розподілом між вузлами). Механізм його роботи зводиться до рівномірного розподілу навантаження між усіма обчислювальними вузлами (подібний до Round Robin [6]). В узагальненому вигляді цей алгоритм включає такі кроки:

1) Визначити перелік PCL -вузлів, які є учасниками розподіленої обчислювальної системи на період сканування.

2) Визначити вільні ресурси, якими володіють PCL -вузли на період опитування ($CPUs$, V_{RAM} та V_{HDD}).

3) Виконати поділ даних на базові блоки, розмір яких залежить від кінцевого обчислювального алгоритму обробки даних (алгоритм поділу даних [8] наведений нижче).

4) Виконати потокову відправку/отримання блоків з даними на/з PCL -вузлів. У разі використання динамічного поділу обчислень виконати пакетну відправку даних.

5) У разів появи в системі нових PCL -вузлів або появи додаткових ресурсів на раніше відкинутих вузлах виконуються кроки 2 і 4.

5. Розроблення алгоритмів перетворення даних

Вищевказані рішення застосовані під час побудови обчислювальної моделі (рис. 2а), до складу якої входять такі процедури: пошук клієнтів, поділ, відправка й отримання, шифрування та дешифрування даних, контроль доступу. Попри

вказане, залежно від обраної схеми обчислень (рис. 2б, 2в) приведені алгоритми можуть бути використані на всіх вузлах. Це зумовить лише зміщення центру управління обчисленнями.

Алгоритм пошуку вузлів потребує виконання таких кроків:

1) Визначити перелік вузлів підключених до мережі PCL_{act} .

2) Сформувати перелік PCL_{DE} -вузлів шляхом фільтрування PCL_{act} -клієнтів за наявністю встановлених DE -агентів.

3) Виконати запит технічних характеристик PCL_{DE} -вузлів, зокрема інформації про процесори $CPUs$, розмір оперативної пам'яті V_{RAM} і розмір вільного місця накопичувача V_{HDD} .

4) Сформувати перелік PCL -вузлів шляхом фільтрування PCL_{DE} -вузлів за критеріями: $CPUs > 1$, $V_{RAM} \geq 2$ ГБ та $V_{HDD} \geq 20$ ГБ.

5) Сформувати остаточний перелік PCL -вузлів у форматі: $IP \# CPUs \# V_{RAM} \# V_{HDD}$.

На підставі кількості вузлів, які можуть узяти участь в обчисленнях, програма може надати рекомендацію для користувача щодо доцільності вибору однієї з вищевказаних моделей обробки даних.

Поділ даних може бути реалізований як на сервері, так і на клієнтах [8]. Він реалізує підготовку даних для подальшого балансування навантаження в ході обчислювального процесу. Його алгоритм включає кроки:

1) Визначити розміри відкритих і закритих даних ($\|F_M\|$ і $\|F_T\|$), а також різницю між ними $dF_S = \|F_M\| - \|F_T\|$.

2) Визначити розмір блоку з даними згідно з розмірами ключа K_S шифрування та службових даних ADI_S за допомогою виразу $B_S = K_S - ADI_S$.

3) Визначити максимальний розмір вихідних даних за допомогою наступного виразу

$$D_{max} = f_{max}(\|F_M\|, \|F_T\|) + K_S - f_{max}(\|F_M\|, \|F_T\|) \pmod{B_S}.$$

4) Визначити початкову кількість блоків BQ за допомогою розміру блоку даних B_S і відношення

$$1 < BQ \leq \left\lceil \frac{D_{max}}{B_S} \right\rceil.$$

5) Розділити файли з даними F_M та F_T на фрагменти більш меншого розміру

$$FOD_{1...PCL} = \left\{ F_M \left[\frac{i...i+1}{PCL} \cdot BQ \cdot B_S \right]; F_T \left[\frac{i...i+1}{PCL} \cdot BQ \cdot B_S \right] \right\}.$$

Процедури інформаційного обміну є базовими для вищевказаних моделей і розподілених обчислень загалом. Вони включають алгоритми відправки даних та отримання відповідних результатів обчислень.

Алгоритм відправки даних на PCL_i -вузли включає такі кроки:

- 1) Формування переліку PCL -вузлів.
- 2) Формування захищеного каналу обміну даними між вузлами за допомогою OT_n^1 -протоколу [10], який ґрунтується на використанні схеми RSA.
- 3) Поділ вихідних даних на PCL -частин.
- 4) Відправка FOD_i -фрагменту вихідних даних і ключової інформації на PCL_i -вузол.

Отримання результатів обчислень (відповідь PCL_i -вузла) включає такі кроки:

- 1) Формування захищеного каналу обміну даними між вузлами за допомогою OT_n^1 -протоколу, який ґрунтується на використанні схеми RSA.

- 2) Відправка FOD_i -результату обчислень головному вузлу.

Алгоритм відновлення даних передбачає формування тимчасового файлу для зберігання фрагментів інформації. Він виконується виключно на сервері та включає виконання додаткових кроків [8]:

- 1) Визначити максимальний розмір даних

$$SMO = 2 \cdot k \cdot K_S.$$

- 2) Визначити максимальну кількість блоків

$$BQ_{max} = \frac{SMO}{2 \cdot BQ}.$$

- 3) Згрупувати блоки даних і зберегти в окремі файли за допомогою виразу

$$FOD_V = \left\{ C_{V1...BQ_{max}} ; D_{V1...BQ_{max}} \right\}.$$

- 4) Сформувати кінцевий файл з даними $\{F_C; F_D\}$ за допомогою виразу

$$\{F_C; F_D\} = FOD_1 \| FOD_2 \| FOD_3 \| \dots \| FOD_{PCL}.$$

Залежності від обраного алгоритму заперечуваного шифрування вказаний нижче порядок дій може бути змінений. Приклад адаптованого блокового алгоритму шифрування даних, який ґрунтується на використанні алгоритму заперечуваного шифрування з відкритим ключем розширеної криптографічної схеми Рабіна [4; 7], включає виконання таких кроків:

- 1) Сформувати два великі прості числа p та q .
- 2) Сформувати ключі шифрування $N=p \cdot q$ та дешифрування $(p; q)$.
- 3) Зчитування блоків даних $F_{M_{1..n}}$ та $F_{T_{1..n}}$ і їх попередня обробка.
- 4) Обчислення випадкових значень

$$R_{i,1..n} = \{r_{i,1}, r_{i,2}, r_{i,3}, \dots, r_{i,n}\}$$

для блоків закритих даних за допомогою виразу $r_i = (N - T_i)^2 \bmod N$.

- 5) Обчислення значення блоків шифрограми $C_i = \{A_i; B_i\}$ за допомогою виразів $A_i = 2 \cdot r_i - M_i \pmod{N}$ та $B_i = r_i \cdot (r_i - M_i) \pmod{N}$.

- 6) Зберегти отримані значення у файл із шифрограмою F_C .

- 7) Повторювати виконання кроків 1–4 до завершення обробки блоків.

Дешифрування даних умовно поділено на 2 етапи [4; 7]. Перший із них передбачає відновлення відкритих даних і включає такі кроки:

- 1) Зчитати блоки даних $F_{C_{1..n}}$ з шифрограми та виконати їх попередню обробку.

- 2) Обчислити корені рівняння за складним модулем $x_2 + A_i \cdot x - B_i = 0 \pmod{N}$ для кожного блоку шифрограми. Складність його рішення ґрунтується на неможливості швидкого вирішення порівнянь другої степені за простим модулем: $r_i = \sqrt{x_i} \pmod{p}$ та $r_i = \sqrt{x_i} \pmod{q}$ [11].

- 3) Обчислити варіанти вихідних відкритих даних за допомогою

$$M_{1..n,1..4} = 2 \cdot A_i - r_{i,1..4} \pmod{N}.$$

- 4) Виконати зворотню обробку блоків з даними, а результат зберегти у файл із дешифрованими даними F'_M .

- 5) Повторювати виконання кроків 1–4 до завершення обробки блоків.

Останній алгоритм передбачає дешифрування закритих даних і виконується у тому разі, якщо головний клієнт був авторизованим у системі. Він потребує виконання таких кроків:

- 1) Дешифрування відкритих даних згідно з алгоритмом, який наведений вище. У результаті отримано корені $R_{i,1..n} = \{r_{i,1}, r_{i,2}, r_{i,3}, \dots, r_{i,n}\}$.

- 2) Обчислення коренів порівнянь другої степені за простим модулем: $z_i = \sqrt{r_i} \pmod{p}$ та $z_i = \sqrt{r_i} \pmod{q}$ [11].

- 3) Обчислення варіантів вихідних даних за допомогою виразу $T_{1..n} = N - z_{i,1..4} \pmod{N}$.

Алгоритм, який відповідає за контроль доступу, забезпечує виконання вимог безпеки. Він також забезпечує моніторинг активності каналів зв'язку між головним та обчислювальними вузлами (для моделі на рис. 2а). У разі відсутності зв'язку хоча б з одним з обчислювачів дані, які знаходяться на них, повинні бути остаточно знищені. Указаний підхід має забезпечити захист фрагментів з даними в разі втручання зловмисників на один із вузлів. Недоліком цього підходу є можливість зростання часу виконання обчислень або відмови від використання системи загалом (у разі нестабільного зв'язку між вузлами).

Реалізації вищевказаних моделей обчислень мають свої особливості й недоліки. Зокрема, використання систем (рис. 2б і 2в) передбачає появу додаткових витрат часу (затримок) під час обміну даними між клієнтом і сервером. Крім того, у разі використання групи серверів з'являється можливість втрати результатів обчислень через порушення зв'язку між локальними клієнтами й серверами. Попри це, у загальному випадку алгоритм

функціонування серверів однаковий і включає такі кроки:

- 1) Отримання завдання на обробку даних від PCL_{DE} -клієнта.
- 2) Сканування мережі на предмет активних PCL_{DE} -клієнтів згідно з вищевказаним алгоритмом пошуку.
- 3) Завантаження даних від PCL_{DE} -клієнта на сервер.
- 4) Балансування навантаження за допомогою одного з вищевказаних методів.
- 5) Відправка завдань на PCL_{DE} -обчислювачі й очікування результатів обчислень.
- 6) Повернення результатів обчислень PCL_{DE} -обчислювачів на сервер.
- 7) Закриття каналів зв'язку з PCL_{DE} -обчислювачами, які завершили обробку даних.
- 8) Повернення оброблених даних на вихідний PCL_{DE} -клієнт.

Попри те яка з вищевказаних схем розподілення обчислень буде застосована, кожний вузол має бути оснащений мінімальним набором програмного забезпечення, що включає мережевий агент (для обміну даними по мережі), блок управління (ядро), блок даних (для організації доступу до бази даних і зберігання тимчасових даних у ній), обчислювальний блок (реалізує логіку обробки даних, яка виконується розподіленою мережею). Водночас алгоритм роботи PCL_{DE} -обчислювача включає такий порядок дій:

- 1) Очікування запиту на обробку даних від серверу управління.
- 2) Обробка даних: попередня обробка (підготовка), шифрування, дешифрування даних згідно з вищевказаними алгоритмами. При цьому ефективна обробка даних забезпечується лише з використанням багатопотокових обчислень.
- 3) Підготовка результатів обчислень і їх відправка на сервер управління.

4) Повторення кроків 1–3 до вимкнення агента або клієнта загалом.

6. Обчислювальні експерименти

З метою апробації запропонованих рішень автори провели експерименти. Разом із тим через обмеженість у кількості технічних засобів заплановано проведення досліджень лише перших двох схем обчислень. Але у зв'язку з тим що вони подібні між собою, за винятком серверу управління обчисленнями, пріоритетним стало дослідження лише першої схеми розподіленої обробки даних. Для оцінювання другої необхідно лише врахувати втрати часу, які з'являються при обміні даними між клієнтами та сервером управління.

Експериментальний стенд включає таке програмне й апаратне забезпечення (рис. 3):

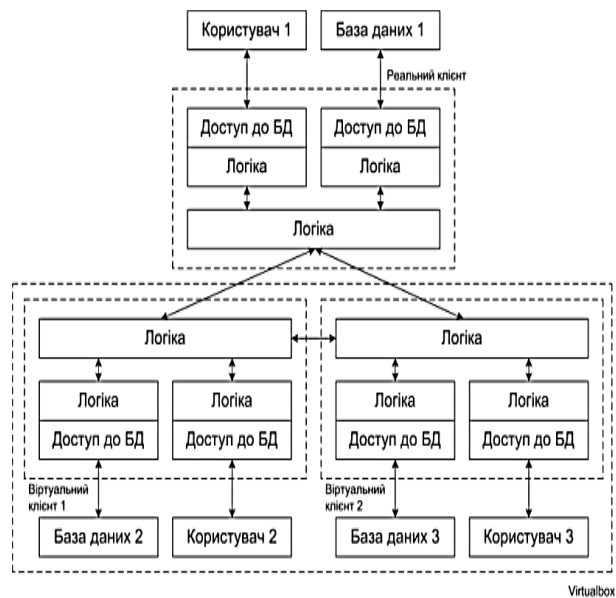


Рис. 3. Структурна схема експериментального стенду

Таблиця 2

Результати обчислювальних експериментів

Критерії	Час шифрування даних, с. (P_ENC)			Час дешифрування даних, с.					
				відкритих (P_DEC)			закритих (S_DEC)		
Кількість вузлів	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	4,71	2,35	1,57	163,30	81,65	54,43	309,98	154,99	103,33
2	4,39	2,19	1,46	162,60	81,30	54,20	321,36	160,68	107,12
3	4,25	2,13	1,42	136,19	68,10	45,40	317,68	158,84	105,89
4	4,06	2,03	1,35	130,24	65,12	43,41	309,36	154,68	103,12
5	4,57	2,29	1,52	150,54	75,27	50,18	265,57	132,79	88,52
6	4,37	2,19	1,46	154,58	77,29	51,53	318,98	159,49	106,33
7	4,23	2,12	1,41	150,96	75,48	50,32	317,91	158,96	105,97
8	4,18	2,09	1,39	151,75	75,88	50,58	309,03	154,52	103,01
9	4,36	2,18	1,45	135,23	67,62	45,08	306,36	153,18	102,12
10	4,27	2,13	1,42	150,18	75,09	50,06	295,74	147,87	98,58

ЦП Intel(R) Core(TM) i5-8250, ОЗП 4 ГБ (по 2 ГБ для віртуальних машин), HDD 100 ГБ (по 40 ГБ для віртуальних машин); ОС Windows 10, середовище програмування PythonIDLE 3.7.3.

Технічним обмеженням указанного експерименту є обмеженість обчислювальних ресурсів. У ролі активного вузла використано реальне робоче місце, а пасивними є 2 віртуальні машини.

Як тестові дані використано фрагменти бази даних юридичних осіб у форматі XML і фрагмент текстового файлу з даними для доступу до особистих кабінетів сервісу GMAIL.

Для виконання обчислень використано ключ шифрування розміром 1024 біти, як найбільш оптимальний з погляду безпеки та продуктивності.

Результати. За результатами проведених експериментів побудовано модель розподіленого шифрування даних, яка реалізує механізми заперечуваного шифрування. Результати експериментів викладено в таблиці 2 та на рис. 4.

Обговорення. Результати експериментів (таблиця 2) демонструють можливість поділу обчислень між групою тестових вузлів без порушення логічної цілісності даних на етапах шифрування та дешифрування даних.

Також, згідно з отриманими часовими характеристиками, можна зробити висновок, що поділ обчислень між близькими за технічними характеристиками вузлами зумовлює приріст швидкості виконання процедури шифрування та дешифрування даних (рис. 4).

Однак прискорення в процедурі шифрування не є суттєвим і при незначному розмірі вихідних даних може бути виконане на локальному робочому місці за прийнятний час. Разом із тим спостерігається суттєве прискорення обчислень у

процедурі дешифрування даних, що є цільовим завданням поділу обчислень.

При проведенні вказаного дослідження автори обмежилися тестуванням однієї (базової схеми обчислень), оскільки результати тестування останніх зводяться до оцінювання часу на передачу даних між вузлами мережі. У разі використання даних малого розміру це може призвести до появи суттєвих витрат часу щодо їх розподілу між клієнтами.

Висновки. У розглянутій роботі вивчено основні методи й підходи, які використовуються для побудови розподілених систем. Ураховуючи особливості перетворень даних, які лежать в основі механізмів заперечуваного шифрування, запропоновано реалізувати розподіл обчислень між групою комп'ютерів, об'єднаних у локальну мережу. Виконано побудову та програмну реалізацію запропонованих моделей, що виконують розподілене шифрування даних. Ефективність запропонованого підходу доведена в ході експериментів. Показано, як можна виконати перетворення даних з використанням указаних алгоритмів за оптимальний час, і визначено мінімальні технічні характеристики вузлів для виконання обчислень.

Науковою новизною вказаної роботи є використання розподіленої обробки даних в алгоритмах заперечуваного шифрування, які є досить вимогливими до обчислювальних ресурсів.

Практичне значення роботи полягає в розробленні моделі розподіленого шифрування даних, у якій можуть бути наявні механізми заперечуваного шифрування. Також використання цього підходу зумовило зростання продуктивності вихідного алгоритму шифрування за рахунок масштабування моделі обчислень.

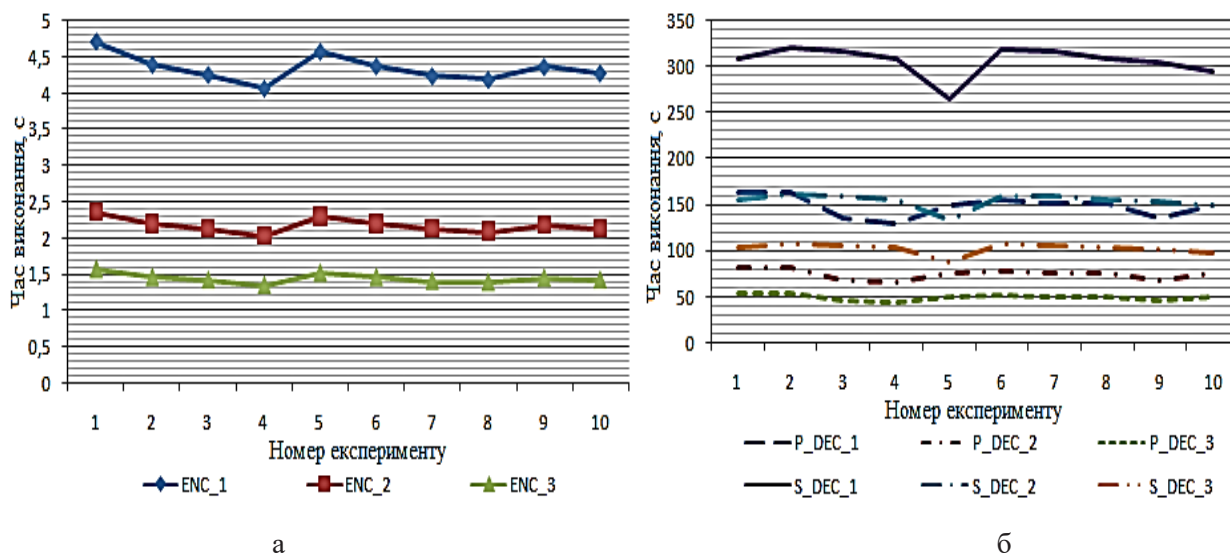


Рис. 4. Графік витрат часу на виконання обчислень: а – шифрування, б – дешифрування

Напрями подальших досліджень пов'язані з розробленням ефективних апаратних рішень, застосування яких призведе до вирішення проблем з продуктивністю в окремих блоках обчислень алгоритмів заперечуваного шифрування та появи

можливості їх практичного застосування в промислових масштабах, розробленням і пошуком рішень для ефективної реалізації механізмів заперечуваного шифрування на базі сучасних симетричних криптографічних схем перетворення даних.

ЛІТЕРАТУРА

1. Рытенкова О. Рост объема информации – реалии цифровой вселенной. *Технологии и средства связи*. 2013. № 1 (94). С. 24–25.
2. Бабичев С.Л., Коньков К.А. Распределенные системы: учебное пособие для вузов. Москва : Юрайт, 2019. 507 с.
3. Таненбаум Э.С., Стеен В.М. Распределенные системы. Принципы и парадигмы. Санкт-Петербург : Питер, 2003. 877 с.
4. Молдовян Н.А., Вайчикаускас М.А. Расширение криптосхемы Рабина: алгоритм отрицаемого шифрования по открытому ключу. *Вопросы защиты информации*. 2014. № 2. С. 12–16.
5. Молдовян Н.А., Биричевский А.Р., Мондикова Я.А. Отрицаемое шифрование на основе блочных шифров. *Информационно-управляющие системы*. 2014. № 5. С. 80–86.
6. Балансировка нагрузки в облачных вычислениях / Е.Н. Десятирикова и др. *Вестник ВГУ*. 2017. № 3. С. 103–109.
7. Гальченко А.В., Чопоров С.В. Заперечуване шифрування на основі застосування підходу гібридних криптографічних систем. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. 2019. № 1. С. 178–191.
8. Гальченко А.В., Чопоров С.В. Використання методу розділяй та володарюй в алгоритмах заперечуваного шифрування (неопублікована).
9. Бугеря А.Б., Ким Е.С., Соловьев М.А. Распараллеливание реализаций сугубо последовательных алгоритмов. *Труды ИСП РАН*. 2018. Т. 30. № 2. С. 25–44.
10. Chou T., Orlandi C. The Simplest Protocol for Oblivious Transfer. *LATINCRYPT 2015: 4th International Conference on Cryptology and Information Security in Latin America*, Guadalajara, 23-26 Aug. 2015. Guadalajara, 2015. P. 40–58.
11. Schlage-Puchta J.C. On Shank's algorithm for modular square roots. *Applied Mathematics E-Notes*. 2005. Vol. 5. P. 84–88.

REFERENCES

1. Rytenkova O. (ed.) (2013) Rost ob"ema informatsii – realii tsifrovoy vselennoy [Growth of information volume - digital universe reality]. *Tekhnologii i sredstva svyazi*, vol. 1, no. 94, pp. 24–25.
2. Babichev S. L., Kon'kov K. A. (2019) Raspredelennye sistemy: uchebnoe posobie dlya vuzov [Distributed systems]. M.: Yurayt (in Russian).
3. Tanenbaum E. S., Steen V. M. (2003) Raspredelennye sistemy. Printsipy i paradigmy [Distributed systems. Principles and paradigms]. SaintPetersburg: Piter (in Russian).
4. Moldovyan N. A., Vaychikauskas M. A. (2014) Rasshirenie kriptoskhemy Rabina: algoritm otritsaemogo shifrovaniya po otkrytomu klyuchu [The Rabin's cryptography scheme extending: public key deniable encryption algorithm]. *Voprosy zashchity informatsii*, vol. 2, pp. 12–16.
5. Moldovyan N. A., Birichevskiy A. R., Mondikova Ya. A. (2014) Otritsaemoe shifrovanie na osnove blochnykh shifrov [Deniable encryption based on the block ciphers]. *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy*, vol. 5, pp. 80–86.
6. Desyatirikova E. N., Khadzh A. M., Khodar A., Al'kadi U., Radzhab Kh. (2017) Balansirovka nagruzki v oblachnykh vychisleniyakh [Load balancing in cloud computing]. *Vestnik VGU*, vol. 3, pp. 103–109.
7. Halchenko A. V., Choporov S. V. (2019) Zaperechuvane shyfruvannya na osnovi zastosuvannya pidk-hodu hibrydnykh kryptohrafichnykh system [Deniable encryption based on hybrid cryptographic systems using]. *Radioelektronika, informatyka, upravlinnia*, vol. 1, pp. 178–191.
8. Halchenko A. V., Choporov S. V. (2020) Vykorystannia metodu rozdiliai ta volodariui v alhorytmakh zaperechuvanoho shyfruvannya [The divide and conquer method in the deniable encryption algorithms] (unpublished).
9. Bugerya A. B., Kim E. S., Solov'ev M. A. (2018) Rasparallelivanie realizatsiy sugubo posledovatel'nykh algoritmov [The distributed implementation of sequential algorithms]. *Trudy ISP RAN*, vol. 30, no. 2, pp. 25–44.
10. Chou T., Orlandi C. (2015) The Simplest Protocol for Oblivious Transfer. *Proceedings of the LATINCRYPT 2015: 4th International Conference on Cryptology and Information Security in Latin America, (Mexico, Guadalajara, August 23–26, 2015)* (eds. Lauter K., Rodríguez-Henríquez F.), Berlin: Springer, pp. 40–58.
11. Schlage-Puchta J. (2005). On Shank's algorithm for modular square roots. *Applied Mathematics E-Notes*, vol. 5, pp. 84–88.

ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ БИБЛИОТЕКИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО АНАЛИЗА НА ЯЗЫКЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ PYTHON

Игнатченко М. С.

*аспирант кафедры программной инженерии
Запорожский национальный университет
ул. Жуковского, 66, Запорожье, Украина
orcid.org/0000-0001-5753-2620
gomenjukmarija@gmail.com*

Кудин А. В.

*кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры программной инженерии
Запорожский национальный университет
ул. Жуковского, 66, Запорожье, Украина
orcid.org/0000-0002-5917-9127
oleksiy.kudin@gmail.com*

Гнездовский А. В.

*старший преподаватель кафедры информационных технологий в туризме
Национальный университет «Запорожская политехника»
ул. Жуковского, 64, Запорожье, Украина
orcid.org/0000-0003-0392-3030
gnezdovskiy.alexey@gmail.com*

Ключевые слова: метод конечных элементов, объектно-ориентированное программирование, Python, библиотека классов, наследование, инкапсуляция.

Необходимость оценки прочности и долговечности вновь создаваемых или уже эксплуатируемых инженерно-технических систем приводит к возникновению сложных задач механики деформируемого твердого тела. Их решение в большинстве случаев невозможно без использования компьютерного моделирования и численных методов. Наиболее популярным среди них является метод конечных элементов. Его практическое применение невозможно без использования вычислительной техники. Разработка соответствующего программного обеспечения является по-прежнему актуальной задачей. Большинство существующих популярных программ, автоматизирующих различные аспекты применения метода конечных элементов, являются закрытыми коммерческими системами. Соответствующее программное обеспечение с открытым исходным кодом в большинстве случаев написано на языке программирования C++, что в силу его сложности затрудняет адаптацию этих программ для решения новых классов задач. В последнее время большую популярность приобрел язык программирования Python. Его отличительными особенностями являются выразительность и простота, а также большое количество библиотек, что делает Python перспективным инструментом для разработки программ, выполняющих инженерно-технические расчеты. В статье описана объектно-ориентированная реализация библиотеки классов, предназначенных для конечно-элементного анализа стационарных и динамических задач теории упругости на языке программирования Python.

Разработана иерархическая структура классов, инкапсулирующих объект расчета, статическую и динамическую реализации метода конечных элементов, конечные элементы разных типов, дискретную модель исходного объекта и т. д. Благодаря простоте реализации, удалось построить набор эффективных и интуитивно-понятных классов, позволяющих, с одной стороны, выполнять расчет различных типов задач механики, а с другой – дать возможность легко его расширять для повышения функциональности библиотеки при решении специализированных задач. Приведены примеры использования описанных классов для решения задач теории упругости.

ОБ'ЄКТНО-ОРІЄНТОВАНА РЕАЛІЗАЦІЯ БІБЛІОТЕКИ СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНОГО АНАЛІЗУ МООВОЮ ПРОГРАМУВАННЯ PYTHON

Ігнатченко М. С.

*аспірант кафедри програмної інженерії
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0001-5753-2620
gomenjukmarija@gmail.com*

Кудін О. В.

*кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри програмної інженерії
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-5917-9127
oleksiy.kudin@gmail.com*

Гнездовський О. В.

*старший викладач кафедри інформаційних технологій у туризмі
Національний університет «Запорізька політехніка»
вул. Жуковського, 64, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0003-0392-3030
gnezdovskiy.alexey@gmail.com*

Ключові слова: *метод скінченних елементів, об'єктно-орієнтоване програмування, Python, бібліотека класів, успадкування, інкапсуляція.*

Необхідність оцінювання міцності й довговічності розроблених або вже наявних інженерно-технічних систем призводить до виникнення складних задач механіки деформованого твердого тіла. Їх розв'язання в більшості випадків неможливе без використання комп'ютерного моделювання та чисельних методів, найбільш популярним серед яких є метод скінченних елементів. Його практичне застосування неможливе без використання обчислювальної техніки. Розроблення відповідного програмного забезпечення є, як і раніше, актуальною проблемою. Більшість наявних популярних програм, що автоматизують різні аспекти застосування методу скінченних елементів, є закритими комерційними системами. Відповідне програмне забезпечення з відкритим вихідним кодом у більшості випадків написано мовою програмування C++, що в силу її складності робить процес адаптації цих програм для вирішення нових класів задач досить непростим завданням. Останнім часом великої популярності набула мова програмування Python. Її відмінними рисами є виразність і простота, а також велика кількість наявних бібліотек, що робить Python перспективним інструментом для розроблення програм для інженерно-технічних розрахунків.

У статті описана об'єктно-орієнтована реалізація бібліотеки класів, призначених для скінчено-елементного аналізу стаціонарних і динамічних задач теорії пружності мовою програмування Python. Розроблена ієрархічна

структура класів, що інкапсулюють об'єкт розрахунку, статичну й динамічну реалізацію методу скінченних елементів, скінченні елементи різних типів, дискретну модель вихідного об'єкту тощо. Завдяки простоті реалізації вдалося побудувати набір ефективних та інтуїтивно-зрозумілих класів, що дають змогу, з одного боку, виконувати розрахунок різних типів задач механіки, а з іншого – легко його розширювати для підвищення функціональності бібліотеки. Наведено приклади використання описаних класів для розв'язання задач теорії пружності.

OBJECT-ORIENTED IMPLEMENTATION OF THE FINITE ELEMENT ANALYSIS LIBRARY IN THE PYTHON PROGRAMMING LANGUAGE

Ihnatchenko M. S.

*Postgraduate Student at the Department of Software Engineering
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0001-5753-2620
gomenjukmarija@gmail.com*

Kudin O. V.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor at the Department of Software Engineering
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-5917-9127
oleksiy.kudin@gmail.com*

Gnezdovskiy O. V.

*Assistant Professor at the Department of Information Technology in Tourism
Zaporizhzhia Polytechnic National University
Zhukovskoho str., 64, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0003-0392-3030
gnezdovskiy.alexey@gmail.com*

Key words: *finite element method, object-oriented programming, Python, class library, inheritance, encapsulation.*

The need to assess the strength and durability of newly created or already in use engineering and technical systems leads to the emergence of complex problems in the mechanics of a deformable solid. Their solution in most cases is impossible without the use of computer modeling and numerical methods. The most popular of these is the finite element method. The main idea of which is to replace a solid body with its discrete analogue. Its practical application is impossible without the use of computer technology. The development of appropriate software is still an urgent task. Most of the existing popular programs that automate various aspects of the application of the finite element method are closed commercial systems. The corresponding open source software is in most cases written in the C++ programming language, which, due to its complexity, makes it difficult to adapt these programs to solve new classes of problems. Recently, the Python programming language has become very popular. Its distinctive features are expressiveness and simplicity, as well as a large number of libraries, which makes Python a promising tool for developing programs that perform engineering calculations. The article describes an object-oriented implementation of a library of classes intended for finite element analysis of stationary and dynamic problems of elasticity theory in the Python programming language. A hierarchical structure of classes encapsulating the calculation object, static and dynamic implementations of the finite element method, finite elements of various types, a discrete model of the original object,

etc. was developed. calculation of various types of problems in mechanics, and on the other hand, make it easy to expand it to increase the functionality of the library when solving specialized problems. Examples of using the described classes for solving problems of the theory of elasticity are given. A possible direction for the development of the PyFEM library is both its extension by means of classes that implement the solution of new types of problems, and the addition of parallel computation support to PyFEM in order to increase the computational speed.

Постановка проблемы. В процессе разработки и производства современных инженерно-технических систем (высотных зданий и сооружений, аэрокосмической техники, транспортных машин, речных и морских судов и т. п.) постоянно возникают актуальные сложные проблемы, связанные с необходимостью оценки прочности и долговечности вновь создаваемых или уже эксплуатируемых конструкций. Решение соответствующих задач механики деформируемого твердого тела в большинстве случаев невозможно без использования компьютерного моделирования и численных методов, одним из наиболее эффективных среди которых является метод конечных элементов (далее – МКЭ) [1].

Применение МКЭ на практике без использования вычислительной техники не представляется возможным, поэтому к настоящему времени создано и постоянно продолжается разрабатываться большое количество разнообразного программного обеспечения (далее – ПО), автоматизирующего различные аспекты применения МКЭ: от генерации дискретных конечно-элементных моделей рассчитываемого объекта до визуального представления больших массивов полученных численных результатов. К наиболее известному ПО для конечно-элементного анализа различных типов задач относятся Abaqus [2], Ansys [3], COMSOL [4], MSC Nastran [5] и др. [6]. Однако большинство этих программ является закрытыми коммерческими системами. Альтернативой им является ПО с открытым программным кодом, среди которого можно выделить следующее: dial. II [7], FreeFEM [8], GetFEM [9], OpenCAD [10] и др. [11; 12]. В основном все эти программы написаны на языке программирования C++ [13], к сожалению, внесение в них изменений для адаптации данного ПО к решению новых классов задач является в силу сложности C++ весьма нетривиальной процедурой. Поэтому на практике возникает задача создания такого ПО для конечно-элементного анализа, которое, с одной стороны, имело бы открытую и доступную для понимания архитектуру и поддерживало бы возможность легкого внесения изменений для расширения его функциональности, а с другой – имело бы сопоставимую с написанными на C++ системами скорость работы.

В последнее время одним из наиболее популярных при разработке научного ПО является язык программирования Python [14], который изна-

чально создавался для повышения эффективности работы программиста. Он имеет легкий для понимания синтаксис, и на данный момент для него разработано большое количество библиотек, реализующих различные математический функционал (например, NumPy [15] и SciPy [16]). Однако к настоящему времени систем конечно-элементного анализа на Python разработано сравнительно мало. Среди них можно выделить, например, fempy [17], FEpiCS [18], PolyFEM [19], SfePy [20], впрочем часть из них только имеет python-интерфейс, но написана на C++. Это можно объяснить тем фактом, что принято считать скорость работы python-программ более низкой, чем у аналогов, написанных на C++. Тем не менее, динамическая типизация Python и его возможности по быстрой разработке приложений делают его перспективным средством создания нового эффективного ПО для численного решения широких классов задач механики с использованием МКЭ. Поэтому разработка открытой архитектуры ПО для МКЭ является актуальной в настоящее время задачей. С этой целью на языке Python разработана объектно-ориентированная библиотека классов PyFEM, реализующая решение статических и динамических задач теории упругости с помощью МКЭ. Она имеет простую открытую архитектуру, позволяющую легко расширять ее как специальными типами конечных элементов (КЭ), так и алгоритмами решения новых классов задач.

Изложение основного материала.

1. Конечно-элементная объектно-ориентированная модель классов PyFEM

ПО для конечно-элементного анализа в общем виде состоит из трех главных подсистем: препроцессора, процессора и постпроцессора. Препроцессор автоматизирует подготовку исходных для расчета данных (чаще всего под этим понимается генерация конечно-элементной модели исходного объекта расчета); процессор непосредственно выполняет расчет задачи, а постпроцессор – автоматизацию анализа полученных численных результатов.

Язык программирования Python поддерживает различные парадигмы программирования, в том числе и самую популярную на сегодняшний день объектно-ориентированную. Согласно ей, программа описывается в виде некоторой совокупности взаимодействующих друг с другом объектов, каждый из которых принадлежит к определенному типу данных (классу). Процессор библиотеки

PyFEM представляет собой набор классов, инкапсулирующих такие базовые сущности МКЭ, как дискретная модель рассчитываемого объекта (конечно-элементная сетка); КЭ заданного типа, реализующий построение локальной матрицы жесткости (массы и демпфирования); параметры расчета (упругие и физические свойства материала, краевые условия, нагрузки, температуру и т. п.); методы расчета (статика, динамика, упруго-пластичность и т. п.), включающие глобальные матрицы жесткости, массы и демпфирования и алгоритмы их построения; решатель системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ); хранилище результатов расчета и подсистему вывода информации о ходе расчета, возникших ошибках и т. п. (рис. 1).

Описание дискретной модели исходной области можно представить в виде иерархии классов, где базовый абстрактный класс TMesh содержит всю необходимую для расчета информацию о структуре сетки: тип КЭ; количество узлов; количество конечных и граничных элементов (ГЭ) и т. п., но не имеет реализации загрузки данных из файла конкретного формата (vol, mesh, trpa и т. д.). Производные от TMesh классы (например, TMeshVOL) содержат только методы чтения информации из файлов данных о сетке в заданном формате (рис. 2).

Наиболее важными с точки зрения программной реализации МКЭ являются классы, инкапсулирующие различные типы КЭ (их упругие и физические характеристики, локальные матрицы

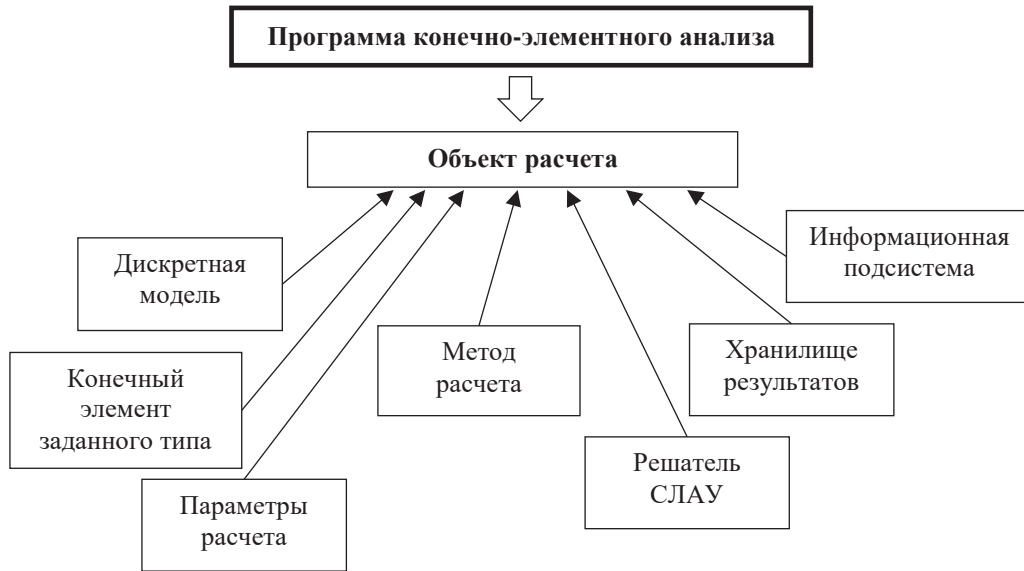


Рис. 1. Общая архитектура библиотеки конечно-элементного анализа PyFEM

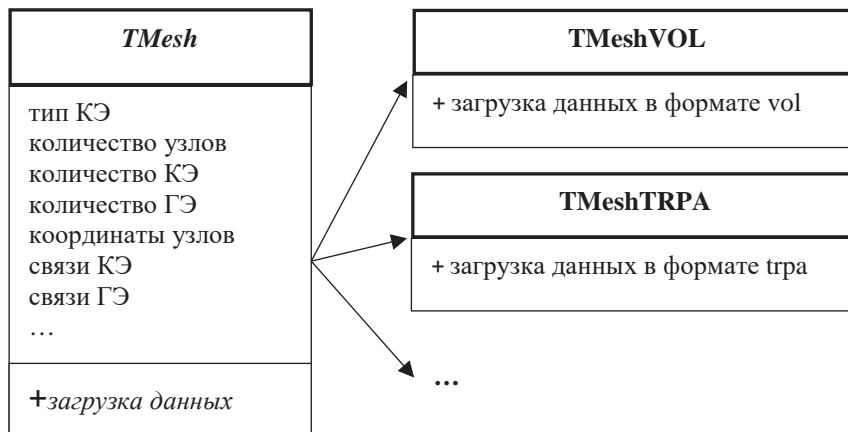


Рис. 2. Иерархия классов, описывающих дискретную модель рассчитываемого объекта

жесткости, массы и демпфирования и т. п.). Для учета их многообразия в PyFEM реализована следующая иерархическая структура классов (рис. 3). Базовым является абстрактный класс TFE, описывающий наиболее фундаментальные свойства изопараметрического КЭ: количество узлов (размерность); площадь сечения для одномерных или толщину для двумерных элементов; упругие свойства; температуру; коэффициент теплового расширения; плотность; коэффициент демпфирования; локальные матрицы жесткости, массы и демпфирования, параметры квадратур для численного интегрирования и т. п. В данном классе определена, но не реализована процедура построения локальных матриц, т. к. она зависит от типа конкретного элемента. Производные от TFE абстрактные классы TFE1D, TFE2D и TFE3D реализуют построение локальных матриц для стандартных одно-, двух- и трехмерных элементов, но не содержат соответствующие процедуры построения функций форм КЭ.

Класс TFE1D2 инкапсулирует линейный двухузловой КЭ и содержит методы построения соответ-

ствующих функций формы, которые используются в базовом классе TFE1D для генерации локальных матриц стержневых элементов. Аналогично, классы TFE2D3 и TFE2D4 описывают линейный треугольник и билинейный четырехугольник. Класс TFE2D6, реализованный как наследник от TFE2D3, поддерживает работу с квадратичным (шестиузловым) треугольником. Абстрактные классы TFEP и TFES уточняют построение локальных матриц жесткости, массы и демпфирования КЭ пластин и оболочек. Производные от TFE2D и TFEP классы TFE2D3P, TFE2D4P и TFE2D6P реализуют соответствующие КЭ пластин, а производные от TFE2D и TFES классы TFE2D3S, TFE2D4S и TFE2D6S – оболочек. В свою очередь, дочерние от TFE3D классы TFE3D4, TFE3D8 и TFE3D10 описывают тетраэдральные (4 и 10 узлов) и кубические (8 узлов) КЭ. Такая иерархия классов, описывающих КЭ, является интуитивно понятной и удобной как для использования в расчетах, так и для ее расширения путем добавления новых классов, описывающих специальные типы элементов (например, многослойные оболочки и пластины,

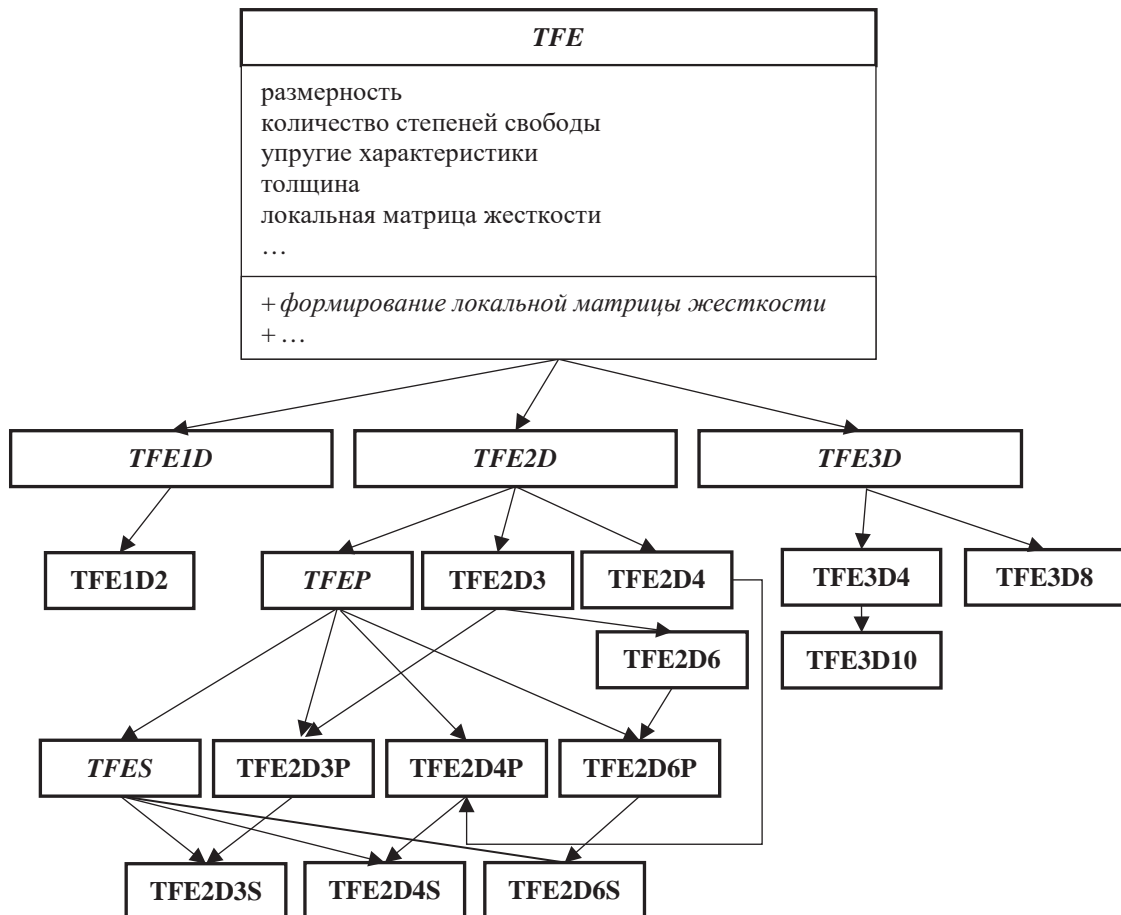


Рис. 3. Иерархия классов, инкапсулирующих изопараметрические конечные элементы разных типов

массивы, композиты и т. п.). Для их реализации пользователю достаточно внести соответствующие изменения в процедуру генерации локальных матриц КЭ.

Для описания параметров расчета в PyFEM используется специальный класс TFEMParams. В нем централизовано хранится информация о типе задачи (статика, динамика); способе решения СЛАУ (прямом или итерационном); точности вычислений; упругих и физических характеристиках, краевых условиях; нагрузках и т. д. (рис. 4). Следует отметить, что большинство параметров (например, упругие характеристики, краевые условия, нагрузки и т. п.) хранятся в виде списка объектов класса TParameter, содержащего информацию о типе параметра (упругие характеристики, начальные или граничные условия, объемная, сосредоточенная или поверхностная нагрузка и т. п.); а также функциональных выражений, описывающих значение параметра и предиката его отбора. С помощью такой организации данных пользователь имеет возможность задавать большинство параметров, различных для разных частей рассчитываемого объекта (например, согласно заданному выражению предиката, могут быть определены различные упругие характеристики объекта для разных его частей).

Наиболее важной составляющей любого ПО конечно-элементного анализа является модуль, непосредственно реализующий алгоритм решения конкретного типа задачи. В силу большого количества видов расчетов (статика, динамика, нелинейность, контактные задачи и т. п.) их универсальная практическая реализация сопряжена с определенными трудностями. В библиотеке PyFEM для этого разработан ряд взаимосвязанных классов, каждый из которых предназначен для решения конкретного типа задачи. Базовый абстрактный класс TFEM содержит наиболее общие свойства и методы, необходимые для про-

граммной реализации МКЭ: описание конечно-элементной сетки; все необходимые для расчета параметры; решатель СЛАУ; таблицу результатов и т. д. Центральным методом TFEM является процедура запуска расчета, которая в данном классе является абстрактной, т. к. ее конкретная реализация зависит от типа задачи. В PyFEM на данный момент реализованы два класса-наследника от TFEM: TFEMStatic и TFEMDynamic, предназначенные для решения соответствующих упругих статических и динамических задач (рис. 5).

Такой подход позволяет упростить процедуру расширения библиотеки для решения новых типов задач. Для этого достаточно добавить новый класс-наследник от TFEM (TFEMStatic или TFEMDynamic) и переопределить в нем метод конечно-элементного расчета соответствующего типа задачи. Все необходимые для расчета параметры уже доступны из базовых классов.

Ну и, наконец, центральной частью библиотеки PyFEM является класс TObject. Фактически он является оберткой для TFEM и его наследников и реализует пользовательский интерфейс доступа к библиотеке. Управляя методами данного класса, пользователь может определить новый объект расчета, задать для него конечно-элементную модель, упругие и физические характеристики, краевые условия и нагрузки, а также другие необходимые для расчета параметры. Пользователь также может выбрать способ решения СЛАУ (прямой или итерационный), формат вывода результатов расчета в файл или на экран и т. п. (рис. 6).

Помимо вывода результатов расчета на экран или в файл после расчета (в случае его успеха), автоматически формируется файл результатов в формате JSON [21], в котором сохраняется вся необходимая для последующего анализа информация об объекте расчета и всех полученных результатах. Данный файл можно использовать для анализа полученных результатов. С этой

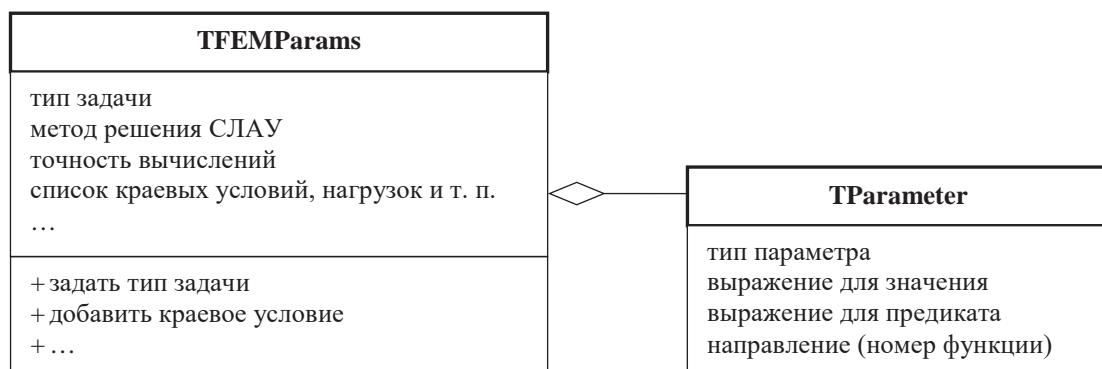


Рис. 4. Организация централизованного хранения параметров решения задачи с возможностью задания предиката отбора

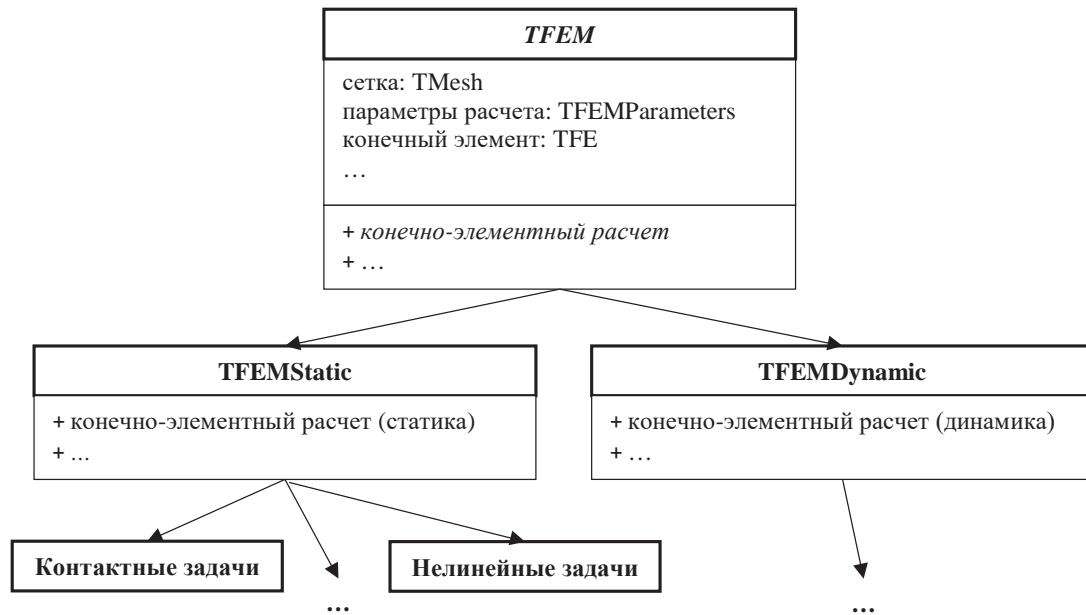


Рис. 5. Иерархия классов, реализующих конечно-элементный расчет разных видов

целью в PyFEM разработаны ряд вспомогательных классов, предназначенных для реализации функций постпроцессора. Главным среди них является TPlot. Он описывает графический интерфейс, в котором отображается визуализация распределения выбранного пользователем фазового параметра по области расчета. Данный класс реализован с помощью библиотеки PyQt5 [22] и графического стандарта OpenGL [23], поэтому он является кроссплатформенным (как и вся библиотека PyFEM) и может запускаться в среде операционных систем Linux, MacOS и Windows.

2. Пример решения задачи с помощью PyFEM

Для выполнения конечно-элементного расчета с помощью PyFEM необходимо выполнить следующие шаги:

1) подключить необходимые для расчета классы и константы:

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-
```

```
from core.fem_defs import DIR_X, DIR_Y, DIR_Z
from core.fem_object import TObject
from plot.plot3d import TPlot;
```

2) создать экземпляр класса TObject и задать его параметры:

```
obj = TObject()
if obj.set_mesh(mesh_name):
obj.set_problem_type('static')
obj.set_solve_method('direct')
obj.add_young_modulus('203200')
obj.add_poisson_ratio('0.27')
```

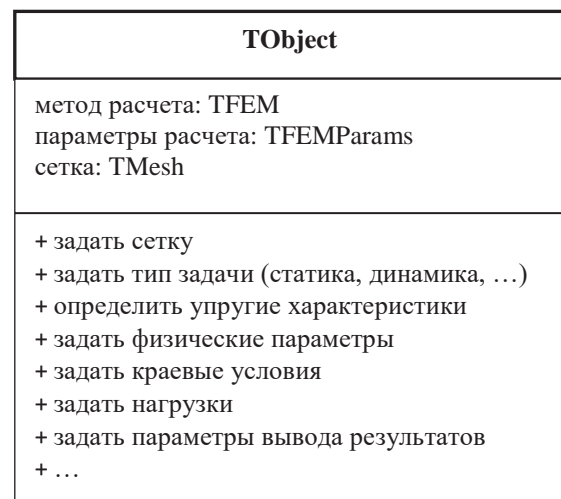


Рис. 6. Пользовательский интерфейсный класс взаимодействия с библиотекой PyFEM

```
obj.add_boundary_condition(DIR_X|DIR_Y|DIR_Z,
'0', 'x == -0.1 or x == 0.1 or y == -0.1 or y == 0.1')
obj.add_concentrated_load(DIR_X, '-2000', 'z == 0')
# ...;
```

3) выполнить расчет и вывести/визуализировать результаты:

```
if obj.calc():
obj.print_result()
obj.save_result(res_name)
TPlot(res_name)
return True
# ...
```

Например, программа на Python расчета цилиндрической оболочки с жестко защемленными краями под действием внутреннего давления с помощью PyFEM может иметь следующий вид:

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-
```

```
from core.fem_defs import *
from core.fem_object import TObject
from plot.plot3d import TPlot
```

```
def shell6_test(res_name):
    obj = TObject()
    if obj.set_mesh('mesh/shell-tube6.trpa'):
    obj.set_problem_type('static')
    obj.set_solve_method('direct')
    obj.add_young_modulus('203200')
    obj.add_poisson_ratio('0.27')
    obj.add_thickness('0.0369')
    obj.add_boundary_condition(DIR_X | DIR_Y |
DIR_Z, '0',
'z == 0 or z == 4.014')
    obj.add_pressure_load('0.05')
    if obj.calc():
    obj.print_result()
    obj.save_result(res_name)
    TPlot(res_name)
    return True
    return False

if __name__ == '__main__':
    shell6_test('shell6_test').
```

В данном примере с помощью метода класса TObject set_mesh() из заданного файла данных загружается информация о дискретной модели оболочки (тип КЭ, количество узлов, КЭ и ГЭ, связях КЭ и ГЭ). После этого, если загрузить данные не удалось, программа завершает свою работу, в противном же случае выполняется дальнейшая настройка исследуемого объекта и запуск его расчета. В случае успеха на экран будет выведена информация о результатах расчета и запущен постпроцессор.

Реализованная в библиотеке PyFEM подсистема вывода информации о ходе решения задачи (классы TProgress и TException) информируют пользователя как о состоянии процесса расчета, так и о возникающих ошибках (рис. 7). Пример работы постпроцессора библиотеки PyFEM приведен на рис. 8. Следует отметить, что время решения данной задачи на компьютере с процессором AMD Ryzen 7 2700X Eight-Core Processor тактовой частотой 3.70 ГГц и объемом оперативной памяти 32 Гбайт под управлением операционной системы Windows 10 время решения данной задачи (без использования параллельных вычислений) соста-

```
D:\anaconda3\python.exe D:/Work/python/pyfem/fem_test.py
Object: shell-tube6
Points: 25752
FE: 12748 - triangular shell element (6 nodes)
Assembling global stiffness matrix... 100%
Computation of pressure load... 100%
Use of boundary conditions... 100%
Solving of equation system... 100%
Calculation results... 100%
***** Success! *****
Lead time 303.786180 sec
```

Рис. 7. Вывод информации о ходе расчета

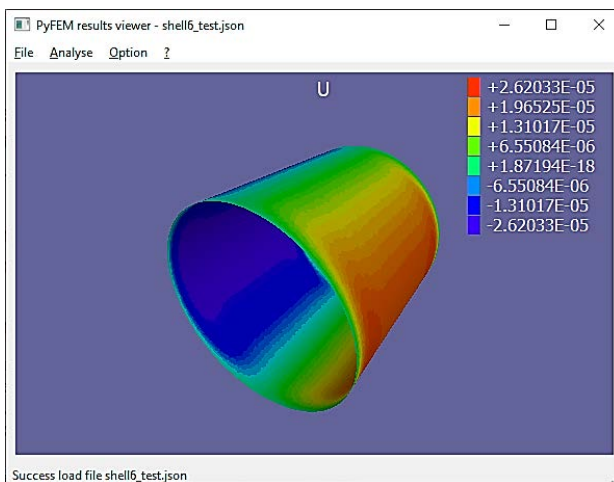


Рис. 8. Пример визуализации результатов расчета

вило 4 мин 17 сек. Решение этой же задачи с помощью библиотеки QFEM [11], написанной на C++, заняло 2 мин 51 сек. Таким образом, можно констатировать тот факт, что использование языка программирования Python для реализации конечно-элементных расчетов является перспективным направлением.

Выводы. Представленный набор классов для реализации конечно-элементного анализа статических и динамических задач механики на языке программирования Python имеет открытую архитектуру и является простым в использовании. Приведенный пример расчета показал, что скорость работы интерпретируемого языка Python является сравнимой с языком C++. В то же время удобство и наглядность языка Python, а также высокая эффективность разработки программ на нем делают его перспективным языком программирования для реализации ПО численного анализа. Возможным направлением развития библиотеки PyFEM является как ее расширение за счет классов, реализующих решение новых типов задач, так и добавление в PyFEM поддержки параллельных вычислений с целью повышения быстродействия вычислений.

ЛІТЕРАТУРА

1. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Sixth edition. Butterworth-Heinemann, 2016. 753 p.
2. Design and Engineering Simulation | SIMULIA – Dassault Systemes. URL: <https://www.3ds.com/products-services/simulia/>.
3. Engineering Simulation & 3D Design Software | Ansys. URL: <https://www.ansys.com/>.
4. COMSOL Multiphysics® Modelling Software. URL: <https://www.comsol.com/>.
5. MSC Nastran – Multidisciplinary Structural Analysis. URL: <https://www.mssoftware.com/product/msc-nastran>.
6. Top Finite Element Analysis (FEA) Software List, Reviews, Comparison & Price | TEC. URL: <https://www3.technologyevaluation.com/sd/category/finite-element-analysis-fea>
7. The dial.II Finite Element Library. URL: <https://www.dealii.org/>.
8. FreeFEM – An open-source PDE Solver using The Finite Element Method: URL: <https://freefem.org/>.
9. GetFEM Homepage – GetFEM. URL: <http://getfem.org/>.
10. OpenSCAD The Programmers Solid 3D CAD Modeller. URL: <https://www.openscad.org/>.
11. QFEM – The Simple FEM Solver. URL: <https://github.com/SeregaGomen/QFEM>.
12. qzCAD. URL: <https://github.com/qzcad>.
13. Страуструп Б. Язык программирования C++. Специальное издание. Москва : Бином-Пресс, 2007. 1104 с.
14. Welcome to Python.org. URL: <https://www.python.org/>.
15. NumPy. URL: <https://numpy.org/>.
16. SciPy.org. URL: <https://www.scipy.org/>.
17. fempy – PiPy. URL: <https://pypi.org/project/fempy/>.
18. FEniCS Project. URL: <https://fenicsproject.org/>.
19. polyfem. URL: <https://polyfem.github.io/>.
20. SfePy: Simple Finite Elements in Python. URL: <http://sfepy.org/doc-devel/index.html>.
21. JSON. URL: <http://json.org/json-ru.html>.
22. PyQt5. PyPI. URL: <https://pypi.org/project/PyQt5/>.
23. OpenGL. The Industry Standard for High Performance Graphics. URL: <https://www.opengl.org/>.

REFERENCES

1. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Sixth edition. Butterworth-Heinemann, 2016. 753 p.
2. Design and Engineering Simulation | SIMULIA – Dassault Systemes. URL: <https://www.3ds.com/products-services/simulia/>.
3. Engineering Simulation & 3D Design Software | Ansys. URL: <https://www.ansys.com/>.
4. COMSOL Multiphysics® Modelling Software. URL: <https://www.comsol.com/>.
5. MSC Nastran – Multidisciplinary Structural Analysis. URL: <https://www.mssoftware.com/product/msc-nastran>.
6. Top Finite Element Analysis (FEA) Software List, Reviews, Comparison & Price | TEC. URL: <https://www3.technologyevaluation.com/sd/category/finite-element-analysis-fea>
7. The dial.II Finite Element Library. URL: <https://www.dealii.org/>.
8. FreeFEM – An open-source PDE Solver using The Finite Element Method: URL: <https://freefem.org/>.
9. GetFEM Homepage – GetFEM. URL: <http://getfem.org/>.
10. OpenSCAD The Programmers Solid 3D CAD Modeller. URL: <https://www.openscad.org/>.
11. QFEM – The Simple FEM Solver. URL: <https://github.com/SeregaGomen/QFEM>.
12. qzCAD. URL: <https://github.com/qzcad>.
13. Stroustrup B. (2007) Yazyk programirovaniya C++. Specialnoe izdanie, Moscow: Binom-Press (In Russian).
14. Welcome to Python.org. URL: <https://www.python.org/>.
15. NumPy. URL: <https://numpy.org/>.
16. SciPy.org. URL: <https://www.scipy.org/>.
17. fempy – PiPy. URL: <https://pypi.org/project/fempy/>.
18. FEniCS Project. URL: <https://fenicsproject.org/>.
19. polyfem. URL: <https://polyfem.github.io/>.
20. SfePy: Simple Finite Elements in Python. URL: <http://sfepy.org/doc-devel/index.html>.
21. JSON. URL: <http://json.org/json-ru.html>.
22. PyQt5. PyPI. URL: <https://pypi.org/project/PyQt5/>.
23. OpenGL. The Industry Standard for High Performance Graphics. URL: <https://www.opengl.org/>.

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У ЗБІРНИКУ НАУКОВИХ ПРАЦЬ «ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ. ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ»

Вимоги до оформлення статей:

До друку приймаються статті, що мають наукову і практичну цінність. Автор має право представити тільки одну наукову статтю в один номер, яка раніше не публікувалася. Автор несе відповідальність за оригінальність тексту статті, точність наведених фактів, цитат, статистичних даних, власних назв, географічних назв та інших відомостей, а також за те, що в матеріалах не містяться дані, що не підлягають відкритій публікації. Редакція не несе відповідальності за викладену в статті інформацію. Остаточне рішення про публікацію ухвалюється редакцією, яка також залишає за собою право на додаткове рецензування, редагування і відхилення статей.

Технічні вимоги:

- до друку приймаються статті українською, російською та англійською мовами;
- електронний варіант статті у форматі ***.doc**, ***.docx** або ***.rtf**, підготовлений у текстовому редакторі Microsoft Word;
- формат А4 через 1,5 інтервал;
- шрифт Times New Roman, розмір 14;
- поля: ліве – 3 см, праве – 1,5 см, верхнє, нижнє – 2 см.

Структура статті:

- рядок 1** – УДК (вирівнювання по лівому краю);
- рядок 2** – назва тематичного розділу (вирівнювання по лівому краю);
- рядок 3** – назва статті (вирівнювання по центру, напівжирний шрифт, великі літери);
- рядок 4** – прізвище та ініціали автора статті; науковий ступінь, вчене звання, посада із зазначенням кафедри (вирівнювання по центру);
- рядок 5** – місце роботи (навчання), адреса роботи (навчання), orcid-код, електронна адреса автора (вирівнювання по центру).

Якщо автор не має orcid-коду, його можна отримати за посиланням <https://orcid.org/>

абзац 1 – розширена анотація (1800 знаків без пробілів) та ключові слова (мінімум 5 слів), написані мовою, як і уся стаття;

абзац 2 – назва статті (напівжирний шрифт, усі літери великі), прізвище, ініціали автора, науковий ступінь, вчене звання, посада із зазначенням кафедри, місце роботи (навчання), адреса роботи (навчання), orcid-код, електронна адреса автора, **розширена** анотація (1800 знаків без пробілів) та ключові слова (мінімум 5 слів), написані **англійською мовою**. Переклад англійською мовою повинен бути достовірним (не машинним).

У випадку, якщо стаття не українською мовою, обов'язково подаються назва статті (напівжирний шрифт, усі літери великі), прізвище, ініціали автора, науковий ступінь, вчене звання, посада із зазначенням кафедри, місце роботи (навчання), адреса роботи (навчання), orcid-код, електронна адреса автора, розширена анотація (1800 знаків без пробілів) та ключові слова (мінімум 5 слів), написані українською мовою.

Основний текст статті повинен відповідати структурі IMRAD (Introduction, Methods, Results, and Discussion) + Literature Review:

Вступ – короткий вступ (1-2 сторінки), який повинен дати відповіді на запитання «чому проведено дослідження?», «які об'єкт, мета й основні гіпотези дослідження?»; Огляд літератури - розділ, що містить аналіз останніх публікацій за темою дослідження (переважна більшість публікацій повинна бути за останні 5 років, самоцититування не більше 30% від кількості літературних джерел), з огляду літератури читачі повинні мати змогу оцінити стан проблеми у світі, аналіз літературних джерел повинен мати критичний характер;

Методи – розділ, який може включати 2-3 рівнозначних за обсягом параграфи, що висвітлюють основні методи, підходи, алгоритми дослідження;

Результати – розділ, який містить аналіз основних результатів дослідження (графіки, таблиці з чисельними даними, загалом, результати обчислювальних експериментів); Дискусія – розділ (до 1 сторінки), який також можна назвати Висновок або Висновки, що містить порівняння отриманих результатів з результатами інших досліджень (як власних так інших авторів), а також дає відповідь на запитання «які перспективи дослідження?», формулює наукову новизну результатів.

Література розміщується після статті у порядку згадування; друкується через 1,5 інтервал, 14 розміром, шрифтом Times New Roman і оформляється у відповідності вимог міждержавного стандарту ДСТУ 8302:2015.

Посилання на літературу в тексті слід давати в квадратних дужках, наприклад, [2, с. 25; 5, с. 33], в яких перша цифра вказує порядковий номер джерела в списку літератури, а друга – відповідну сторінку в цьому джерелі; одне джерело (без сторінок) відокремлюється від іншого крапкою з комою [3; 4; 6; 8; 12; 15].

Наприкінці статті розміщується транслітерована і перекладена англійською версія літератури (References), оформлена згідно з вимогами APA (American Psychological Association).

Порядок подання матеріалів:

Для публікації статті у фаховому науковому виданні необхідно надіслати на електронну адресу редакції editor@physmath.journalsofznu.zp.ua наступні матеріали:

добре вичитану наукову статтю, обов’язково оформлену відповідно до вказаних вимог;
інформаційну довідку про автора;
 відскановане **підтвердження сплати коштів** (реквізити для сплати надаються автору після вдалого проходження рецензування).

Зразок оформлення назви електронних файлів: Іванов_І.І._стаття, Іванов_І.І._оплата.

Адреса та контактні дані:

Редакція збірника наукових праць «Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки»

вул. Жуковського 66, корп. 1, ауд. 216, м. Запоріжжя, Україна, 69060

Телефон: +38 (066) 53 57 687

Електронна пошта: editor@physmath.journalsofznu.zp.ua

Офіційний сайт: www.journalsofznu.zp.ua/index.php/phys-math

Збірник наукових праць

**ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ.
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ**

№ 1, 2020

Комп'ютерна верстка – Н.С. Кузнєцова
Коректура – В.В. Ізак

Підписано до друку: 28.10.2020.
Формат 60x84/8. Гарнітура Times New Roman.
Папір офсет. Цифровий друк. Ум. друк. арк. 17,44.
Замов. № 1120/308. Наклад 100 прим.

Видавництво і друкарня – Видавничий дім «Гельветика»
69063, Україна, м. Запоріжжя, вул. Олександрівська, 84, оф. 414
Телефони: +38 (048) 709 38 69, +38 (095) 934 48 28, +38 (097) 723 06 08
E-mail: mailbox@helvetica.com.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 6424 від 04.10.2018 р.