

## РОЗДІЛ II. ТЕОРІЯ ТА МЕТОДИКА НАВЧАННЯ (З ГАЛУЗЕЙ ЗНАНЬ)

УДК 372.851

DOI <https://doi.org/10.26661/2522-4360-2020-1-07>

### ТИПОВІ ПОМИЛКИ І ТРУДНОЩІ ПІД ЧАС РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ ТА МОЖЛИВОСТІ ЇХ УСУНЕННЯ

**Бистрянцева А. М.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу  
Херсонський державний університет  
вул. Університетська, 27, Херсон, Україна  
[orcid.org/0000-0003-0611-1548](https://orcid.org/0000-0003-0611-1548)  
[anbys@ukr.net](mailto:anbys@ukr.net)*

**Чередніченко Ю. С.**

*викладач математики  
Херсонський фізико-технічний ліцей  
вул. Залаегерсег, 39, Херсон, Україна  
[orcid.org/0000-0002-0798-2209](https://orcid.org/0000-0002-0798-2209)  
[fmathiya@gmail.com](mailto:fmathiya@gmail.com)*

**Ключові слова:**

*шкільний курс алгебри,  
рівняння, логарифм,  
математична помилка, метод.*

Стаття присвячена огляду типових помилок і труднощів, які виникають у здобувачів повної загальної середньої освіти в процесі оволодіння базовими математичними знаннями і вміннями, одним з яких є вміння розв'язувати рівняння, і в тому числі логарифмічні рівняння. Це питання не втрачає своєї актуальності і в процесі подальшого навчання в закладах вищої освіти, оскільки саме логарифмічні рівняння мають широке прикладне застосування у багатьох наукових дослідженнях природничого напрямку. Проведений аналіз завдань державної підсумкової атестації та зовнішнього незалежного оцінювання дозволяє стверджувати, що рівень вмінь та навичок здобувачів повної загальної середньої освіти, продемонстрований під час розв'язування рівнянь, а саме логарифмічних рівнянь, є достатньо низьким. Це стосується не лише завдань високого рівня, а й тих, які передбачають лише послідовне виконання чіткого алгоритму. Ґрунтуючись на дослідженнях авторів В.А. Далингер, І.Б. Ляпунова, П.І. Самсонова, Л.П. Черкаської, власному досвіді, матеріалах аналітичних звітів Українського центру оцінювання якості освіти, можна стверджувати, що помилки, допущені учнями під час розв'язування логарифмічних рівнянь, найрізноманітніші – від невірної оформлення до помилок логічного характеру. Під час дослідження на конкретних прикладах були проаналізовані типові помилки і труднощі, які виникають в учнів під час розв'язування завдань на використання логарифмів, надані роз'яснення щодо причин їх виникнення та рекомендації щодо їхнього подальшого ефективного усунення. Під час здійснення пошуку шляхів вдосконалення методики навчання розв'язуванню логарифмічних рівнянь, яка має обов'язково включати оволодіння базовими теоретичними відомостями, знайомство з прийомами та методами розв'язування рівнянь, рекомендується спрямовувати роботу й на виявлення пробілів у знаннях учнів та проведенню роботи по їх усуненню. Якісно організована робота над виявленням та запобіганням прогалин у знаннях та вміннях здобувачів повної загальної середньої освіти забезпечить успішне оволодіння навчальним матеріалом.

## TYPICAL MISTAKES AND DIFFICULTIES IN SOLVING LOGARITHMIC EQUATIONS AND POSSIBILITIES OF THEIR CORRECTIONS

**Bystriantseva A. N.**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Senior Lecturer at the Department of Algebra,  
Geometry and Mathematical Analysis  
Kherson State University  
University str., 27, Kherson, Ukraine  
orcid.org/0000-0003-0611-1548  
anbys@ukr.net*

**Cherednichenko Yu. S.**

*Mathematics Teacher  
Kherson Physical and Technical Lyceum  
Zalaegerszeg str., 39, Kherson, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-0798-2209  
fmathiya@gmail.com*

**Key words:**

*school course of algebra,  
equation, logarithm,  
mathematical error, method.*

The article is devoted to an overview of typical mistakes and difficulties that students of general secondary education have in the process of mastering basic mathematical knowledge and skills, one of which is the ability to solve equations, including logarithmic equations. This issue does not lose its relevance in the process of further education at an institution of higher education, since it is precisely the logarithmic equations are widely applied in many scientific research in the natural direction.

The analysis of tasks of the state final attestation and external independent assessment is carried out. It shows that the level of skills and abilities of students of general secondary education demonstrated in solving equations, namely logarithmic equations, is quite low. This applies not only to high-level tasks, but also to those that involve only the consistent execution of a clear algorithm.

Based on the research of the authors V.A. Dalinger, I.B. Lyapunov, P.I. Samsonov, L.P. Cherkaska, own experience, materials of analytical reports of the Ukrainian Center for Educational Quality Assessment, it can be argued that the mistakes made by students during solving logarithmic equations, are various: from incorrect presentation to mistakes that have logical character. With concrete examples in the research were analyzed typical mistakes and difficulties that students have when solving problems using logarithms, explanations are given about the causes of their occurrence and recommendations are given for their further effective elimination.

When searching for ways to improve the teaching methodology for solving logarithmic equations, which must necessarily include the mastery of basic theoretical information, familiarity with the techniques and methods of solving equations, it is recommended to direct the work to identify gaps in the knowledge of students and carrying out work to eliminate them. Qualitatively organized work on identifying and preventing gaps in knowledge and skills of students of general secondary education will ensure successful mastery of educational material.

**Постановка проблеми.** У шкільному курсі алгебри одне з провідних місць займає змістова лінія рівнянь та нерівностей, вивченню якої приділяється велика кількість навчального часу. Вона широко представлена в завданнях зовнішнього незалежного оцінювання, державної підсумкової атестації. Тема «Логарифмічні рівняння» в курсі алгебри і початків аналізу є традиційною та має значне подальше практичне застосування, але учням дуже важко засвоїти її через складність і новизну матеріалу. Матеріали аналітичних звітів Українського центру оцінювання якості освіти демонструють погіршення результатів виконання завдань, пов'язаних з рівняннями, зокрема, з логарифмічними рівняннями. Як показує практика, рівень вмінь та навичок учнів під час розв'язування завдань, що виходять за рамки алгоритму та потребують додаткових міркувань, доволі низькі. Тому надзвичайно важливим для сучасного вчителя математики є пошук шляхів вдосконалення методики навчання розв'язуванню логарифмічних рівнянь. Передумовою цього може слугувати процес пошуку, попередження та своєчасного усунення різноманітних помилок, які виникають під час вивчення зазначеної теми. Якісно організована робота над виявленням та запобіганням прогалин у знаннях та вміннях забезпечить успішне оволодіння навчальним матеріалом.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** На уроках математики вчитель має справу з різноманітними помилками учнів, які повинні бути вчасно виявлені та виправлені. Тому якісна математична підготовка школярів є неможливою без вдало організованої роботи над прогалинами в знаннях учнів. Це питання висвітлено в працях таких авторів, як В.А. Далингер, І.Б. Ляпунов, Л.І. Марченко, Т.І. Іванко, П.І. Самсонов, Л.В. Самойленко, Л.П. Черкаська, Л.А. Благодир, В.О. Швець.

Авторський колектив Л.А. Благодир, В.О. Швець [1, с. 19] здійснили теоретичний аналіз науково-педагогічної та психологічної літератури, яка присвячена вивченню математичних помилок учнів. У роботі авторів увага присвячена природі типових математичних помилок, їх класифікації та причинам виникнення. Виділяючи причини появи помилок, акцентована увага на формалізмі у знаннях учнів, послабленні психічних функцій, таких як увага, пам'ять, мислення. Автори погоджуються з тим, що важливим етапом усунення помилок є систематизація та подальша робота над ними з метою більш глибокого розуміння школярами математичних фактів.

В.А. Далингер ділить помилки на випадкові та систематичні (стійкі). До випадкових він відносить ті, які з'являються одноразово, несистематично у одного-двох учнів. До стійких (типо-

вих) відносить ті, які з'являються у одного і того ж учня (або у кількох) неодноразово, або ті, які з'являються хоча і одноразово, але у багатьох учнів [2, с. 94].

У своєму дослідженні Л.П. Черкаська [3] наводить систематизацію помилок, розподіляючи їх за розділами програми, видами навчальної діяльності, особливостями психічної діяльності учнів та зовнішніми обставинами виявлення помилок. А основним напрямом для вивчення помилок вбачається виявлення причин їх виникнення. Автор розглядає загальні методи корегування навчальної діяльності, покликані запобігти та усунути учнівські помилки. Серед цих методів можна виділити: збільшення питомої ваги самостійної роботи школярів, концентрація уваги на всіх можливих способах перевірки розв'язання задач.

Авторські колективи все частіше наголошують на відсутності систематизації математичних помилок за змістовими лініями навчального матеріалу шкільного курсу математики. Саме такий поділ розширить можливості вдосконалення діяльності вчителя та підвищить ефективність роботи з виявлення та ліквідації прогалин у знаннях учнів.

Типові помилки, які виникають в учнів під час розв'язування логарифмічних рівнянь, розглянуто у роботах [4; 5; 6], а систематизовані методи їх розв'язування – у роботах [7; 8; 9].

Грунтуючись на дослідженнях В.А. Далингера, І.Б. Ляпунова, П.І. Самсонова, відзначимо, що помилки, допущені учнями під час розв'язування логарифмічних рівнянь, найрізноманітніші – від невірної оформлення до помилок логічного характеру.

Для того щоб не допускати ці помилки, в своєму уроці Л.І. Марченко пропонує у вигляді гри завдання, спрямовані на засвоєння учнями різних методів розв'язування логарифмічних рівнянь. Л.В. Самойленко на прикладах детально показує розв'язування логарифмічних рівнянь та нерівностей різними методами за рівнями складності, на які потрібно звернути увагу для попередження помилок. Для кращого узагальнення і систематизації знань та вмінь учнів Т.І. Іванко подає цілий ряд завдань: завдання для усного розв'язування, завдання для письмового розв'язування, індивідуальні завдання. Так, учень, ознайомившись з рівнем складності завдань, вчиться вибирати найбільш раціональний шлях розв'язання.

**Метою статті** є виявлення та аналіз типових помилок, допущених учнями під час розв'язування логарифмічних рівнянь, та надання рекомендацій по їх усуненню.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Під час вивчення розділу «Показникова і логарифмічна функції» в курсі алгебри і початків аналізу,

якому приділяється 16 годин для рівня стандарту і 40 годин для профільного рівня, слід виділити таку важливу тему, як «Логарифмічні рівняння». У процесі вивчення цього розділу учні, відповідно до чинної програми з математики, систематизують, узагальнюють і поглиблюють знання про степені, корені та їх властивості, засвоюють властивості логарифмічної функції, отримують навички та вміння виконувати тотожні перетворення виразів, що містять логарифмічну функцію, здійснювати обчислення числових виразів з логарифмами, розв'язувати логарифмічні рівняння. Також учні повинні навчитися схематично зображати графіки логарифмічних функцій із різними основами, пам'ятати основні властивості цих функцій, навчитися використовувати їх під час розв'язування логарифмічних рівнянь. На факультативах, гурткових заняттях бажано ознайомити учнів із побудовою графіків логарифмічних функцій з модулем та з розв'язуванням логарифмічних рівнянь з параметром.

Під час розв'язування будь-якого завдання завжди є ймовірність допущення помилок. Як було зазначено вище, помилки, яких припускаються учні під час розв'язування логарифмічних рівнянь, різноманітні. Зокрема:

1. Типовою помилкою під час розв'язування логарифмічних рівнянь є використання без додаткових пояснень перетворень, які порушують рівносильність, що призводить до втрати або появи сторонніх коренів.

Наприклад: Розв'язати рівняння  $\log_3(5-x) = 3 - \log_3(-1-x)$  [4, с. 445].

Першим кроком учні під час розв'язування рівняння переносять доданок, який містить логарифмічний вираз, в ліву частину рівняння. З властивості добутку логарифма та означення логарифма отримують квадратне рівняння, коренями якого є  $x_1 = -4$ ,  $x_2 = 8$ . Найчастіше, не проводячи додаткових міркувань, у відповідь записують обидва числа. Але за перевіркою  $x = 8$  не є коренем рівняння, оскільки при цьому ліва і права його частини втрачають сенс. Перевірка показує, що лише число  $x = -4$  є коренем заданого рівняння.

2. Ціла група помилок виникає, коли учні не приділяють належної уваги знаходженню області визначення рівнянь, особливо коли вона є ключем знаходження розв'язку.

Наприклад: Розв'язати рівняння  $\log_3 \frac{2x+1}{x} = \log_3(x+1) + \log_{\frac{1}{3}} x$  [6, с. 8].

Використовуючи властивість частки та степеня логарифма, у лівій і правій частинах рівняння отримують різницю логарифмів. Звівши подібні доданки, взаємно знищують вираз  $-\log_3 x$ . У результаті потенціювання одержують лінійне рівняння, коренем якого є  $x = 0$ . Без урахувань

області допустимих значень ( $x > 0$ ) у відповідь записують сторонній корінь  $x = 0$ .

3. Найпоширеніша помилка полягає в тому, що учні під час розв'язування логарифмічних рівнянь не володіють на необхідному рівні визначеннями понять, формулами, формулюваннями теорем, алгоритмами, невірно перетворюють логарифмічні вирази.

Наприклад: Розв'язати рівняння  $\lg^2(2x+3) = \lg^2(3x+2)$  [5, с. 53].

Першим кроком уважний учень перенесе доданок з лівої до правої частини рівняння і виконає розкладання отриманого виразу на множники. У результаті отримає сукупність рівнянь, після потенціювання яких має лінійне та квадратне рівняння, коренями яких є  $x = 1$ ,  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $x = -\frac{5}{3}$ .

При цьому дуже важливо зробити перевірку або врахувати ОДЗ, щоб позбавитись стороннього кореня  $x = -\frac{5}{3}$ . Однак значна кількість учнів вважають доцільним не помічати другий степінь логарифмів, одразу переходять до рівності аргументів логарифмів і, як наслідок, втрачають корінь.

Логарифмічні рівняння доцільно вивчати паралельно з показниковими, оскільки вони теоретично взаємопов'язані і допомагають розвитку логічного мислення в учнів, вмінню зіставляти, аналізувати, робити висновки. Знайомство з цими рівняннями краще починати з самого початку вивчення тем «Степені і корені», «Логарифм», щоб на заняттях, присвячених темам «Показникові рівняння», «Логарифмічні рівняння», систематизувати раніше отримані знання і закріпити напрацьовані навички. Це допоможуть зробити картки з різноманітними завданнями, кросворди, вікторини, математичні диктанти, тести та самостійні роботи [10, с. 4, 13].

Вони дозволяють підходити до контролю знань диференційовано, активізувати навчальну діяльність учнів. З їх допомогою можна організувати як групову, так й індивідуальну роботу з учнями, а також використовувати під час і після вивчення теми для перевірки залишкових знань учнів.

Успішне розв'язування логарифмічних рівнянь неможливе без оволодіння основними методами їх розв'язування: використання означення логарифма, властивостей логарифмів, метод заміни змінної, потенціювання, логарифмування, зведення до однієї основи, графічний метод, застосування монотонності функцій [11, с. 96]. Крім того, слід звернути увагу учнів на те, що оскільки логарифмічна функція визначена лише на множині додатних чисел, то варто ще до розв'язування логарифмічного рівняння знайти область визначення виразів, які стоять під знаком логарифма,

адже саме ця помилка призводить до появи сторонніх коренів.

За можливістю не варто використовувати формули логарифмування добутку, частки і парного степеня, коли це призводить до звуження області визначення рівняння, а користуватися цими формулами тільки справа наліво, що приводить до розширення області визначення (в цьому разі можлива хіба що поява сторонніх коренів, але їх можна відсіяти перевіркою).

Якщо доводиться використовувати вираз зі змінною як нову основу логарифма, то щоб не втратити корені рівняння, необхідно розглядати два випадки: вираз, який береться як нова основа, дорівнює одиниці (якщо це можливо на області визначення рівняння, що розглядається), і перевіряємо, чи будуть ці значення змінної, за яких вираз дорівнює одиниці, коренями цього рівняння; нова основа не дорівнює одиниці – в цьому разі користуємося формулою переходу від однієї основи логарифма до іншої [9].

Але запорукою успішного засвоєння такої теми, як логарифмічні рівняння, є розв'язання таких рівнянь у великій кількості. Адже розв'я-

зуючи достатню кількість вправ, учні формулюють ґрунтовні і міцні знання, підвищують рівень володіння своїми знаннями та вміннями їх застосовувати.

**Висновки та перспективи дослідження.** Без вивчення логарифмічних рівнянь, як і більшості інших рівнянь, шкільний курс математики мав би меншу значущість не тільки в математичній освіті, а й у формуванні мислення учнів. Помилки, які виникають під час вивчення цієї теми, виникають через незнання основних понять та властивостей, невміння застосовувати теорію на практиці, неуважність, панування шаблонного мислення.

Тому у результаті дослідження можна акцентувати особливу увагу на необхідності ґрунтовного вивчення теми «Логарифмічні рівняння». Вже розв'язування навіть найпростіших завдань, яке передбачає лише виконання алгоритмічних дій, надає можливість запам'ятати не лише основні типи логарифмічних рівнянь, але й бачити нестандартні підходи до розв'язування завдань, які розвивають ґрунтовні і міцні знання з математики, підвищують рівень володіння своїми знаннями та вміннями їх застосовувати.

### Література

1. Благодир Л.А., Швець В.О. Математичні помилки як об'єкт наукових досліджень. *Наукові записки Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія: Педагогічні та історичні науки / М-во освіти і науки України, Нац. пед. ун-т ім. М.П. Драгоманова. Київ : Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2011. Випуск 93. С. 19–28.*
2. Далингер В.А. Типичные ошибки учащихся по математике и их причины. *Современные наукоемкие технологии.* 2014. № 12–1. С. 94–97.
3. Черкаська Л.П. Основні напрямки здійснення корекції математичної підготовки учнів. *Наукові записки. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти.* 2015. № 7 (3). С. 105–109.
4. Далингер В.А. Типичные ошибки учащихся при решении логарифмических уравнений, неравенств и их систем и пути их предупреждения. *Международный журнал экспериментального образования.* 2015. № 4–2. С. 445–450.
5. Ляпунов И.Б. Классические ошибки учащихся СУНЦ НГУ при неравносильных переходах в уравнениях и неравенствах. *Вестник НГУ. Серія: Педагогика.* 2012. Т. 13. Випуск 1. С. 46–55.
6. Самсонов П.И. Тема урока: «Решение логарифмических уравнений – поиск ошибок». *Математика.* 2009. т. № 2. С. 7–9.
7. Марченко Л.І. Основні методи розв'язання логарифмічних рівнянь. *Математика в школах України.* 2009. Березень (№ 8). С. 22–24.
8. Іванко Т.І. Систематизація методів розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь і нерівностей. *Математика в школах України.* 2007. Березень (№ 7). С. 16–21.
9. Самойленко Л.В. Методика навчання логарифмічних рівнянь та нерівностей. *Наукові записки молодих учених.* 2019. № 4.
10. Орлова О.А. Методическое пособие по математике «Решение показательных и логарифмических уравнений». URL: <http://surl.li/erfi> (дата звернення: 13.08.2020).
11. Бистрянцева А.М., Чередніченко Ю.С. Методи розв'язування логарифмічних рівнянь в курсі алгебри старшої школи. *Пошук молодих.* Вип. 18: зб. матеріалів Всеукраїнської студ. наук.-практ. конф. «STEM–освіта як напрям модернізації методик навчання природничо-математичних дисциплін у середніх і вищих навчальних закладах» (м. Херсон, 26-27 квітня 2018 р.) / уклад. В. Д. Шарко. Херсон : Видавництво ХНТУ. 2018. С. 95–96.

### References

1. Blagodyr L.A., Shvets V.O. (2011) Matematychni pomylky yak ob'iekt naukovykh doslidzhen [Mathematical errors as an object of scientific research]. *Scientific notes of the National Pedagogical University named after MP Drahomanov. Series: Pedagogical and historical sciences* / Ministry of Education and Science of Ukraine, Nat. ped. Univ. M. P. Dragomanova, Vol. 93 (pp. 19–28). Kyiv : NPU Publishing House M. P. Dragomanova.
2. Dalinger V.A. (2014) Tipichnyye oshibki uchashchikhsya po matematike i ikh prichiny [Typical errors of students in mathematics and their causes]. *Modern science-intensive technologies*. Vol. 121. P. 94–97.
3. Cherkaska L. P. (2015) Osnovni napriamky zdiisnennia korektsii matematychnoi pidhotovky uchniv [The main directions of correction of mathematical training of students]. *Scientific notes. Series: Problems of methods of physical-mathematical and technological education*. Vol. 7 (3). (pp. 105–109).
4. Dalinger V. A. (2015) Tipichnyye oshibki uchashchikhsya pri reshenii logarifmicheskikh uravneniy, neravenstv i ikh sistem i puti ikh preduprezhdeniya [Typical errors of students in solving logarithmic equations, inequalities and their systems and ways to prevent them]. *International Journal of Experimental Education*. Vol. 4–2. P. 445–450.
5. Lyapunov I.B. (2012) Klassicheskiye oshibki uchashchikhsya SUNTS NGU pri neravnosilnykh perekhodakh v uravneniyakh i neravenstvakh [Classical errors of students of SUNC NSU at non-equivalent transitions in equations and inequalities]. *Journal of the NSU. Series: Pedagogy*. (Vols. 13), Vol. 1. P. 46–55.
6. Samsonov P.I. (2009) Tema uroka: “Resheniye logarifmicheskikh uravneniy – poisk oshibok” [Lesson topic: “Solving logarithmic equations – finding errors”]. *Math*. Vol. 2. P. 7–9.
7. Marchenko L.I. (2009) Osnovni metody rozv'iazannia loharyfmichykh rivnian [Basic methods for solving logarithmic equations]. *Mathematics in schools of Ukraine*. Vol. 8. P. 22–24.
8. Ivanko T.I. (2007) Systematyzatsiia metodiv rozv'iazuvannia pokaznykovykh i loharyfmichnykh rivnian i nerivnostei [Systematization of methods for solving exponential and logarithmic equations and inequalities]. *Mathematics in schools of Ukraine*. Vol. 7. P. 16–21.
9. Samoilenko L.V. (2019) Metodyka navchannia loharyfmichnykh rivnian ta nerivnostei [Methods of teaching logarithmic equations and inequalities]. *Scientific notes of young scientists*. Vol. 4.
10. Orlova O.A. Metodicheskoye posobiye po matematike “Resheniye pokazatelnykh i logarifmicheskikh uravneniy” [Methodical manual on mathematics “Solution of exponential and logarithmic equations”]. URL: <http://surl.li/erfi>.
11. Bystriantseva A.N., Cherednichenko Y.S. (2018) Metody rozv'iazuvannia loharyfmichnykh rivnian v kursi alhebray atsrshoi shkoly [Methods for solving logarithmic equations in the course of high school algebra]. *Search for the young*. Collection of materials of the Ukrainian student scientific-practical conference “STEM-education as a direction of modernization of teaching methods of natural and mathematical disciplines in secondary and higher educational institutions” (pp. 95–96). Kherson : KhNTU Publishing House.