РОЗДІЛ ІІ. ТЕОРІЯ ТА МЕТОДИКА НАВЧАННЯ (З ГАЛУЗЕЙ ЗНАНЬ)

УДК 512.64 DOI https://doi.org/10.26661/2522-4360-2020-2-05

ФОРМУВАННЯ У СТУДЕНТІВ НАВИЧОК ДОСЛІДНИЦЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ НА КОНКРЕТНОМУ ПРИКЛАДІ

Артеменко А. О.
аспірант
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-6536-3086
krummisvafiklettagja@gmail.com

Стєганцева П. Г.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри загальної математики
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0001-8871-139X
stegpol@gmail.com

Ключові слова:
алгоритм, біном, біноміальный коефіцієнт, вища математика, корінь n-го ступеня з числа.

Відкриття на математичному факультеті нової спеціальності «Середня освіта (математика)» ставить перед колективом цілу низку важливих завдань для забезпечення якісної підготовки студентів за нею. Узагальнена характеристика цих завдань полягає у створенні та підтримці навчально-методичної бази, яка забезпечить формування професійних компетентностей наших випускників. Конкретний зміст цих завдань має кілька складових частин. Виділимо ту з них, яка пов'язана зі специфікою використання інноваційних прийомів в ході підготовки сучасного вчителя. Ці прийоми забезпечують формування таких важливих якостей фахівця, як креативність і гнучкість мислення, вміння приймати рішення в нестандартних ситуаціях, здатність організовувати дослідницьку діяльність учнів та ефективно управляти нею. Ідея написання статті лежить саме в цій площині. У статті запропоновано алгоритм пошуку кореня n-го ступеня з додатного числа як узагальнення відомого алгоритму пошуку квадратного кореня без використання таблиць і калькуляторів. Показано, що цей алгоритм є точним, тоді як у доступних у мережі публікаціях наведені алгоритми, засновані на використанні чисельних методів, тому ці алгоритми є наближеними. Наведено обґрунтування алгоритму, що базується на десятковому записі числа, а також приклад його використання. Крім того, сам алгоритм досить цікавий і привабливий з математичної точки зору, тому з'являється можливість розв'язання декількох методичних і педагогічних задач. Перш за все на цьому прикладі демонструється тісний взаємозв'язок між елементарною математикою і вищою. Далі підкреслюється можливість формування й розвитку дослідницької компетентності як важливої складової частини загальної професійної компетентності вчителя математики в сучасній школі. Нарешті, матеріал статті дає уявлення про те, що постановка завдань на узагальнення відомих задач та алгоритмів є природним і потужним джерелом дослідницьких завдань.

THE DEVELOPMENT OF THE STUDENTS' RESEARCH ACTIVITY SKILLS WITH THE SPECIFIC EXAMPLE

Artemenko A. O.
Ph. D. Candidate
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-6536-3086
krummisvafiklettagja@gmail.com

Stegantseva P. G.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of General Mathematics
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0001-8871-139X
stegpol@gmail.com

Key words:
algorithm, binomial, binomial coefficient, higher mathematics, nth root of number.

An opening of the new specialty at the mathematical faculty poses the set of the important problems of the providing the high-quality education for the students. The generalized description of these tasks is to create and support the educational and methodological base, which will ensure the formation of the professional competencies of our graduates. The specific content of these tasks has several components. Let us single out the one that is associated with the specifics of the use of the innovative techniques in the training of the modern teacher. These techniques provide the formation of such important qualities of a specialist as creativity and flexibility of thinking, the ability to make decisions in non-standard situations, the ability to organize and effectively manage the research activities of the students. The idea of writing this article lies precisely in this plane. The article proposes an algorithm for the extracting nth root of the positive number as a generalization of the well-known algorithm for the extracting the square root without using tables and calculators. It has been shown that this algorithm is exact, while the available publications present the algorithms, which are based on the use of the numerical methods, and therefore are approximate. The article provides the justification for the algorithm, which is based on the decimal representation of the number, as well as, an example of its use. In addition to the fact that the algorithm itself is quite interesting and attractive from a mathematical point of view, it provides the possibility to solve several methodological and pedagogical problems. First of all, this example demonstrates the close relationship between elementary and higher mathematics. Further, the possibility of the formation and development of the research competence as an important component of the general professional competence of the teacher of mathematics in the modern school is emphasized. Finally, the material of the article gives an idea that the formulation of the problems for the generalization of the known problems and algorithms is a natural and, moreover, is the powerful source of the research problems.

Постановка проблеми. Введення спеціальності Середня освіта (математика) ставить перед викладачами ряд нових цікавих задач. З'являється нова можливість постановки і розв’язання дослідницьких завдань, пов'язаних з питаннями освіти, способами залучення уваги молодих дослідників до тих областей в педагогічній освіті і науці, що є новими і бурхливо розвиваються.

Важливим завданням кожного фундаментального курсу повинна стати демонстрація його базових властивостей для якісного викладання дисциплін природничо-математичного циклу на всіх рівнях освітнього процесу. Досягти цих цілей можна різними шляхами. Найбільш ефективним з них є залучення студентів до науково-дослідної роботи, наприклад, в рамках написання курсових і кваліфікаційних робіт. В цьому напрямку особливу роль набувають завдання, які формують такі важливі розумові навички, як уміння узагальнювати, виділяти окремі випадки, міркувати за аналогією, знаходити подібності та відмінності тощо.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Питання організації науково-дослідної роботи на різних етапах навчання досить часто обговорюються на різних конференціях, в тому числі і з питань освіти, на сторінках науково-популярних журналів, серед яких можна відзначити «Вопросы образования», «Освіта і наука», «Математика в школі»,«Полином», в яких вчені та вчителі діляться своїм досвідом. Відомі вчені чималу частину свого часу відводять для читання лекцій в різних Літніх школах. Відповіді на деякі питання, пов'язані з організацією дослідницької роботи, можна знайти в їх методичних статтях і посібниках [1-4].

Виділення нерозв’язаних раніше частин загальної проблеми. Відомі алгоритми знаходження кореня n-го степеня з числа засновані в основному на чисельних методах, і тому не є точними. Один з цих методів заснований на чисельному методі Ньютона знаходження коренів рівняння на даному відрізку та ітераційній формулі

$$x_{k+1} = \frac{1}{n}\left((n-1)\, x_k + \frac{A}{x_k^{n-1}} \right).$$

Цей метод використовує деяке початкове наближення, а для збільшення точності використовуються похідні. Визначення точного методу знаходження кореня довільного степеня є цікавим завданням.

Формулювання цілей. Метою цієї роботи є вивчення можливостей формування у студентів навичок організації дослідницької діяльності на прикладі задачі узагальнення алгоритму знаходження квадратного кореня з числа без використання електронних засобів і таблиць.

Виклад основного матеріалу дослідження. Тут ми представимо алгоритм, який точно обчислює корінь n-го степеня з числа A. Нагадаємо спочатку, що арифметичним коренем n-ного степеня з додатного дійсного числа А називається додатне дійсне число $\sqrt[n]{A}$, яке є розв’язком рівняння $x^n = A$.

Пропонований алгоритм складається з наступних кроків:

1. Розбити число A на групи по n цифр, починаючи з розряду одиниць. Якщо число A має дробову частину, її також розбити на групи по n цифр, але починаючи з першого знака після коми. Кількість цифр в останній групі зліва або в останній групі праворуч може бути менше n. Кількість отриманих груп цифр зліва від коми буде дорівнювати кількості цифр у цілій частині результату.

2. Знайти корінь з недоліком з групи цифр, яка містить найбільші розряди (при невеликих n це робиться усно).

3. Відняти n-ий степінь отриманої в пункті 2) цифри від даної групи цифр. До остачі дописати справа наступну групу цифр (виконати конкатенацію).

4. Скласти нерівність виду

$$\begin{aligned} &x(q^{n-1} \cdot C_n^1 \cdot 10^{n-1} + q^{n-2} \cdot C_n^2 \cdot 10^{n-2} \cdot x + q^{n-3} \cdot C_n^3 \cdot 10^{n-3} \cdot x^2 + \ldots + \\ &+ q^2 \cdot C_n^{n-2} \cdot 10^2 \cdot x^{n-3} + q \cdot C_n^{n-1} \cdot 10^1 \cdot x^{n-2} + x^{n-1}) \le r, \end{aligned} \tag{1}$$

де q – число, складене з уже відомих цифр результата; x – невідома цифра результата; r – остача із пункта 3).

5. Найбільший цілий невід'ємний розв’язок x нерівності приписуємо до числа q.

6. Нова остача дорівнює різниці попередньої остачі та значення лівої частини нерівності (1) з кроку 4) при знайденому в 5) кроці значенні x.

7. Повторювати пункти 4) -6) до тих пір, поки існують не розглянуті групи цифр.

Обчислимо, наприклад, корінь 5-го степеня з натурального числа 1099511627776.

1) розбиваємо число на групи по 5 цифр, починаючи з найменших розрядів: 109’95116’27776. Оскільки вийшло три групи, то шукане число буде тризначним.

2) з групи цифр, яка містить найбільші розряди, знаходимо корінь з недоліком, отримуємо $\left[\sqrt[5]{109}\right] = 2$, де $[x]$ – ціла частина числа x. Таким чином, цифра в найбільшому розряді шуканого числа дорівнює 2.

3) віднімаємо з даної групи цифр п'ятий степінь числа 2, а до отриманої різниці конкатенуємо (приписуємо) наступну групу цифр. Отримуємо послідовно *109-32=77;* конкатенація чисел 77 та 95116 дає число *7795116*.

4) складаємо нерівність виду (1) при *q=2*.

$$\begin{aligned} &x(2^4 \cdot 5 \cdot 10^4 + 2^3 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot x + 2^2 \cdot 10 \cdot 10^2 \cdot \\ &\cdot x^2 + 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot x^3 + x^4) \le 7795116 \end{aligned}$$

або

$$x(800000 + 80000 \cdot x + 4000 \cdot x^2 + 100 \cdot x^3 + x^4) \le 7795116 .$$

Максимальна цифра, яка задовольняє цій нерівності, дорівнює 5. Таким чином, нове значення q дорівнює 25.

5) отримуємо послідовно значення лівої частини нерівності при $x=5$. Нова остача дорівнює 7795116-6565625=1229491. Результат конкатенації: 122949127776.

6) складаємо нерівність виду (1) при q=25.

$$x(25^4 \cdot 5 \cdot 10^4 + 25^3 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot x + 25^2 \cdot 10 \cdot 10^2 \cdot$$
$$\cdot x^2 + 25 \cdot 5 \cdot 10 \cdot x^3 + x^4) \le 122949127776$$

або

$$x(19531250000 + 156250000 \cdot x + 625000 \cdot$$
$$\cdot x^2 + 1250 \cdot x^3 + x^4) \le 122949127776$$

Число $x=6$ – максимальний цілий розв'язок нерівності, тому нове значення q=256.

7) ми знайшли всі цифри результату, тому алгоритм завершив роботу. Дійсно, ліва частина останньої нерівності при $x=6$ дорівнює 122949127776, а значить, нова остача дорівнює 0.

Отже, $\sqrt[5]{1099511627776} = 256$.

Зауважимо, що запропонований алгоритм є точним. На кожному циклі 4)-6) алгоритму знаходиться цифра результату, яка вже не змінюється до кінця роботи алгоритму.

Для обґрунтування побудованого алгоритму скористаємося десятковим записом цілого числа. Так називається його представлення у вигляді суми ступенів числа 10, у якій коефіцієнтами є цифри числа. Якщо результат знаходження кореня n-го степеня з числа A має k цифр, то $A = \left(10^k a_k + 10^{k-1} a_{k-1} + ... + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0\right)^n$. Запишемо праву частину останньої рівності у вигляді n-го степеня бінома, тобто $A = \left(10 \cdot \overline{a_k a_{k-1} ... a_2 a_1} + a_0\right)^n$, де риска означає, що символи під нею є цифрами числа. Звідси випливає можливість застосування формули бінома Ньютона, в якій і виникають біноміальні коефіцієнти C_n^l. Цей факт пояснює вид виразу в дужках у нерівності (1) для знахождения чергової цифри результата знаходження кореня n-го степеня.

Наприклад, куб чотиризначного числа можна записати так:

$$(10^3 a + 10^2 b + 10c + d)^3 = (10\overline{abc} + d)^3 =$$
$$= C_3^0 10^3 (\overline{abc})^3 + C_3^1 10^2 (\overline{abc})^2 d + C_3^2 10(\overline{abc}) d^2 + C_3^3 d^3.$$

Три останніх доданки якраз і складають вираз у дужках нерівності (1) після його множення на цифру d, яка на даному етапі алгоритму є шуканою, а попередні 3 цифри a, b, c результата знайдені на попередніх кроках алгоритму.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Завдання на узагальнення цілком природно виникають в рамках будь-якого навчального процесу і складають цікавий клас дослідницьких завдань. Розглянутий в роботі приклад підтверджує цей факт. Розв'язання таких задач студентами формує у них навички, які допоможуть їм у їхній професійній діяльності. Відомо, що хороший фахівець розв'язує не тільки чужі задачі, але вміє ставити і розв'язувати свої завдання. Уміння ставити завдання говорить про глибоке розуміння ситуації.

Підняте у статті питання демонструє можливості зближення вузівської математики зі шкільною, що важливо для створення гарної навчально-методичної бази для спеціальності Середня освіта (математика).

Література

1. Сабитов Р.А. Основы научных исследований : учебное пособие. Челябинск : ЧГУ, 2002. 138 с.
2. Мигуренко Р.А. Научно-исследовательская работа : учебно-методическое пособие. Томск : ТГУ, 2006. 184 с.
3. Солимар Л. Как писать научные статьи. Москва, 1966. С. 67–73.
4. Скопенков А.Б. Размышления об исследовательских задачах для школьников. *Мат. Просвещение*. 2008. № 12. С. 23–32.
5. Ландо С.К. Введение в дискретную математику. Москва : МЦНМО, 2012. 195 с.

References

1. Sabitov R.A. (2002) Osnovy nauchnykh issledovaniy: Ucheb. Posobie [Fundamentals of scientific research: Tutorial]. Chelyabinsk: Chelyabinsk State University (in Russian).
2. Migurenko R.A. (2006) Nauchno-issledovatel'skaya rabota. Uchebno-metodicheskoe posobie. [Research work. Study guide]. Tomsk: publishing office of Tomsk State University (in Russian).
3. Solimar L. (1966) Kak pisat' nauchnye stat'i. [How to write scientific articles] *Fiziki shutyat* [Physicists are joking]. Moscow, pp. 67–73.
4. Skopenkov A.B. (2008) Razmyshleniya ob issledovatel'skikh zadachakh dlya shkol'nikov [Reflections on Research Problems for Students]. *Mat. Prosveshchenie*, vol. 12, pp. 23–32.
5. Lando S.K. (2012) Vvedenie v diskretnuyu matematiku [Introduction to discrete mathematics]. Moscow: MCCME (in Russian).