ЛІТЕРАТУРА

1. Андресен Бент Б. Мультимедиа в образовании : специальный учебный курс. Информационные технологии в образовании / Бент Б. Андресен, Катя ван Ден Бринк. – М. : Дрофа, 2007. – 224 с.
2. Башмаков А. И. Разработка компьютерных учебников и обучающих систем / А. И. Башмаков, И. А. Башмаков. – М. : Информационно-издательский дом «Филинъ», 2003. – 616 с.
3. Гуревич Р.С., Кадемія М.Ю. Використання електронного навчального посібника у вивченні спеціальних дисциплін / Р. С. Гуревич, М. Ю. Кадемія // Наукові праці ЧДУ імені Петра Могили : Педагогіка. – 2006. – Т. 46. – С. 29–34.
4. Лобода Ю. Г. Електронні засоби навчання: структура, зміст, класифікація [Електронне видання] / Ю. Г. Лобода // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2012. – Вип. 2(28). – Режим доступу : http://archive.nbuv.gov.ua/e-journals/ITZN/2012_2/649-1980-2-RV.pdf.
5. Медведева С. Н. Проектирование электронных курсов в инструментальной среде SunRav BookEditor [электронный ресурс] / С. Н. Медведева // Education Technology & Society. – Т. 12. – № 2. – с. 339. – Режим доступа: http://ifets.ieee.org/russian/depository/v12_i2/pdf/1.pdf
6. Робоча програма навчальної дисципліни «Математична статистика» для студентів за напрямом підготовки «Психологія» / Укл. О.С. Пшенична. – Запоріжжя : ЗНУ, 2012. – 10 с.
7. Сидоренко Е. В. Методы математической обработки в психологии / Е. В. Сидоренко. – СПб. : Речь, 2003. – 350 с.
8. Співаковський О. В. Теоретико-методичні основи навчання вищої математики майбутніх вчителів математики з використанням інформаційних технологій : дис. доктора пед. наук : 13.00.02 / Співаковський О. В. ; Херсонський держ. ун-т. – К., 2003. – 534 с.
9. Триус Ю. В. Комп’ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математики : монографія / Ю. В. Триус. – Черкаси : Брама-Україна, 2005. – 400 с.
10. Ширшов Е. В. Информационно-педагогические технологии: ключевые понятия : словарь / Е. В. Ширшов ; под ред. Т. С. Буториной. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2006. – 256 с.

УДК 512.64

ПОСТРОЕНИЕ НЕТРИВИАЛЬНЫХ ПРИМЕРОВ КАК ИНСТРУМЕНТ ГЛУБОКОГО ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

Стеганцева П.Г., к.ф.-м.н., доцент, Белоус О.Г., магистр

Запорожский национальный университет

На примере общей топологии рассматривается методический прием, обеспечивающий неформальное усвоение материала. Во многих исследованиях множество рассматривается вместе с некоторой заданной на нем структурой, и очень часто, не единственной. В общей топологии и функциональном анализе множества снабжаются метрической и топологической структурами. Понятие метризуемого топологического пространства возникает в случае, когда топологическая структура является первичной. В статье строятся нетривиальные примеры применения кардинальных характеристик топологических пространств для их исследования на метризуемость.

Ключевые слова: метризуемые топологические пространства, число Суслина, число Линделефа, вес, плотность.

Білоус О.Г., Стєганцева П.Г. ПОБУДОВА НЕТРИВІАЛЬНИХ ПРИКЛАДІВ ЯК ІНСТРУМЕНТ ГЛИБОКОГО ВИВЧЕННЯ МАТЕРІАЛУ / Запорізький національний університет, Україна.

На прикладі загальної топології розглядається методичний прийом, який забезпечує неформальне засвоєння матеріалу. У багатьох дослідженнях множина розглядається разом з деякою заданою на ній структурою, і дуже часто, не єдиною. У загальній топології та функціональному аналізі множини оснащуються метричною та топологічною структурами. Поняття метризовного топологічного простору виникає у випадках, коли топологічна структура є первинною. У статті будуються нетривіальні приклади застосування кардинальних характеристик топологічних просторів до їх дослідження на метризовність.

Ключові слова: метризовні топологічні простори, число Сусліна, число Ліндельофа, вага, щільність.

Bilous O.G., Stegantseva P.G. THE CONSTRUCTION OF THE NONTRIVIAL PROBLEMS AS THE INSTRUMENT OF THE DETAILED STUDY OF THE MATERIAL / Zaporizhzhya national university, Ukraine.

One considers the general method to master the material in details by means of the general topology. In many researches the set is considered together with some structure. This structure is not necessarily unique. The general topology and the functional analysis deal with the sets, supplied with the metric and the topological structures. The concept of the metrizable topological space arises in the case when the topological structure is primary. The cardinal characteristics of the topological spaces and their link with the problem connected with the metrizability of these spaces have been studied in the article. The article gives nontrivial problems of the application of the cardinals for the investigation of the metrizability of the topological spaces.

Key words: metrizable topological spaces, Souslin number, Lindeleph number, weight, density.

Введение. Постановка задач и целей. Одной из важных методических задач является обеспечение глубокого, неформального усвоения знаний. Безусловно, такие знания трудно получить, ограничиваясь заучиванием определений и простейших примеров, которые, как правило, приводятся в учебной литературе после определений. Частично эта задача решается на практических занятиях. Одним из самых эффективных средств на этом пути является конструирование, составление новых задач. Этот прием давно рассматривается в научно-педагогической литературе [3], но и сейчас является актуальным. Он обеспечивает рассмотрение изучаемого понятия «со всех сторон», понимание важности всех его необходимых и достаточных условий. Целью статьи является демонстрация одного из эффективных инструментов глубокого изучения материала на примере общей топологии, а задачами - построение нетривиальных примеров метризуемых и неметризуемых топологических пространств, нахождение явного вида метрики, порождающей топологию метризуемого топологического пространства.

Множество всех топологических пространств содержит важный класс – метрических пространств. Топология метрического пространства порождается его системой открытых множеств, то есть топологическая структура в метрических пространствах является вторичной, порождается метрикой. Во множестве топологических пространств выделяется еще один класс - метризуемых топологических пространств. Этот особый вид пространств уже давно занял свое почетное место среди фундаментальных понятий топологии. Топологическое пространство X называется метризуемым, если существует такая метрика ρ на множестве X, что порождаемая этой метрикой топология совпадает с исходной топологией пространства X.

Доказательство метризуемости топологического пространства - достаточно сложная задача. Вывод о метризуемости можно сделать, либо явно указав метрику, порождающую топологию пространства, либо проверив выполнение всех необходимых и достаточных условий метризуемости. И первая, и вторая задачи для произвольного топологического пространства сопряжены с рядом трудностей.

В общей топологии имеется целый список необходимых условий метризуемости. Они очень полезны для доказательства неметризуемости топологических пространств.

Например, любое метризуемое топологическое пространство обязательно должно удовлетворять первой аксиоме счетности, более того, оно всегда хаусдорфово и нормально. Не менее эффективным средством при доказательстве неметризуемости топологического пространства являются так называемые мощностные характеристики топологического пространства, или иначе, кардинальные числа (число Суслина, число Линделефа, вес, плотность и др.). Эти кардинальные числа были выделены уже на первом этапе развития топологии. Равенство между собой указанных чисел есть еще одно необходимое условие метризуемости топологического пространства.

Мощностной характеристикой топологического пространства называется функция, сопоставляющая этому пространству бесконечное кардинальное число и принимающая одинаковые значения на гомеоморфных топологических пространствах. Мощностные характеристики также называют кардинальными инвариантами [4].

Основная часть. Пусть X - произвольное топологическое пространство.

Определение 1. Числом Суслина $c(X)$ называется наименьший бесконечный кардинал m, такой, что мощность всякого семейства попарно непересекающихся непустых открытых множеств в X не превосходит m.

Определение 2. Весом $w(X)$ называется минимум мощностей всевозможных баз пространства X.

Определение 3. Плотностью $d(X)$ называется минимум мощностей всюду плотных в X множеств.

Определение 4. Числом Линделефа $l(X)$ называется наименьший бесконечный кардинал m , такой, что из всякого открытого покрытия пространства можно выделить подпокрытие мощности, не превосходящей m [5].

Следует отметить, что совпадение значений мощностных характеристик является необходимым, но не достаточным условием для метризуемости топологического пространства.

Прямая зоргенфрея. Пусть R - множество вещественных чисел, B - семейство всех его подмножеств вида $[x,r)$, где $x \in R$, $r \in Q$, $x < r$. Легко проверить, что B образует базу некоторой топологии τ на R [2]. Топологическое пространство (R,τ) называется прямой Зоргенфрея. Покажем, что данное топологическое пространство не является метризуемым. Для этого достаточно найти две различные по своему значению мощностные характеристики.

Число Суслина $c(R)$ для данного топологического пространства равно $\aleph_0$. Действительно, укажем пример счетного семейства непустых, открытых, попарно непересекающихся подмножеств этого пространства. Таковым будет, например, набор полуинтервалов $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right),\ldots,\left[n-\frac{1}{2};n+\frac{1}{2}\right),\ldots,$ находящийся во взаимно однозначном соответствии с множеством натуральных чисел. Докажем, что все семейства с указанными свойствами имеют мощность, не превосходящую $\aleph_0$. Предположим противное. Пусть существует семейство непустых, открытых, попарно непересекающихся подмножеств этого пространства, мощность которого равна $\aleph_1$. Каждому открытому множеству из этого семейства (оно обязательно имеет хотя бы один открытый шар - интервал) можно поставить в соответствие рациональное число, которое принадлежит этому шару. Поэтому множество рациональных чисел эквивалентно множеству элементов семейства. Так как множество рациональных чисел счетно, то мощность выбранного набора подмножеств тоже счетно. Получили противоречие. Значит $c(R) = \aleph_0$.

Найдем вес данного пространства. Предположим, что существует такое семейство K открытых подмножеств из (R,τ), что $|K| = \aleph_0$ и K образует базу топологии. Существует точка $x_0 \in R$, которая не является точной нижней гранью никакого элемента из K. Тогда, открытое множество $[x_0, x_0+1)$ нельзя представить в виде объединения элементов из семейства K, и, следовательно, K не является базой топологии. Полученное противоречие приводит к выводу $w(R) = \aleph_1$.

Найденные мощностные характеристики топологического пространства – прямой Зоргенфрея – различны по своему значению. Следовательно, рассматриваемое топологическое пространство не является метризуемым.

Пример метризуемого топологического пространства. Рассмотрим множество R^2, элементы которого будем обозначать буквами $A, B, C, \ldots$ За элементом $(0,0) \in R^2$ закрепим обозначение O. Рассмотрим также совокупность τ подмножеств из R^2, состоящую из: пустого множества; открытых шаров $B_\varepsilon(O)$ радиуса ε с центром в точке O; множеств вида $\{(A,B) \subset OA : (A,B) \cap O = \varnothing\}$, где OA - прямая, проходящая через точки O и A; и всевозможных их объединений. Покажем, что семейство τ задает топологию на R^2, и исследуем топологическое пространство (R^2, τ) на метризуемость.

Семейство τ является топологией, если выполнены следующие три аксиомы:

1. $\varnothing \in \tau$, $R^2 \in \tau$;

2. Если $U_1 \in \tau$ и $U_2 \in \tau$, то $U_1 \cap U_2 \in \tau$;

3. Если $U_i \in \tau$, то $\bigcup\limits_i U_i \in \tau$.

Аксиома 1 выполняется. Действительно, $\varnothing \in \tau$ по условию задачи, $R^2 \in \tau$, так как для любой точки из R^2 можно указать некоторое подмножество из семейства τ, содержащее эту точку, то есть R^2 является объединением элементов из τ.

Аксиома 2. Пересечениями пар элементов из семейства τ являются либо $\varnothing$ $(U_1 = \varnothing, U_2 \in \tau)$, либо $B_\varepsilon(O)$ $(U_1 = B_\varepsilon(O), U_2 = B_{\varepsilon_1}(O), \varepsilon < \varepsilon_1)$, либо $(A,B) \subset OA$ $(U_1 = B_{OB}(O), U_2 = (A,C) \subset OA$ или $U_1 = (C,A) \subset OA, U_2 = (B,D) \subset OA)$ (рис 1.). Таким образом, аксиома 2 выполняется.

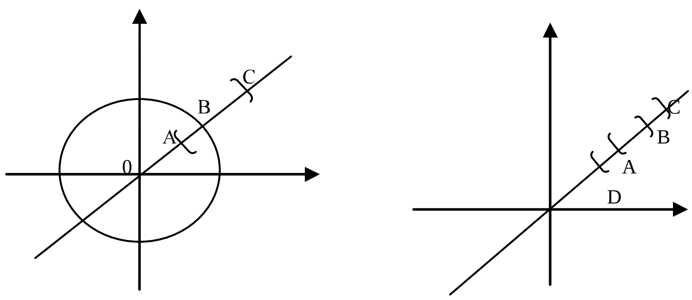

Рис. 1 Аксиома 3 выполняется по описанию τ.

Поскольку, все аксиомы выполнены, то семейство τ - топология на R^2.

Перейдем к вопросу о метризуемости топологического пространства (R^2, τ). Проверим одно из необходимых условий метризуемости топологического пространства –

совпадение мощностных характеристик. Найдем число Суслина, число Линделефа, вес и плотность.

Число Суслина $c(R^2)=\aleph_1$, то есть любое семейство непустых, открытых, попарно непересекающихся множеств имеет мощность, не превосходящую $\aleph_1$. Примером такого семейства является набор интервалов на всевозможных прямых вида $y=kx$, где $k\in R$.

Покажем, что рассматриваемое топологическое пространство не имеет счетной базы. Действительно, предположим, что счетная база σ существует, тогда каждому ее элементу поставим в соответствие действительное число k, выделяющее прямую $y=kx$, содержащую этот элемент. Очевидно, что существует $k_0\in R$ и не участвующее в этом соответствии. Тогда, любое открытое в этой топологии множество, которое принадлежит прямой $y=k_0x$, не является объединением элементов набора σ, откуда следует, что σ не может быть базой топологии. Таким образом, $w(R^2)=\aleph_1$.

Аналогичным образом приходим к выводу о том, что никакой счетный набор открытых множеств не будет покрытием этого топологического пространства. Континуальное же покрытие, очевидно, существует. Согласно определению, число Линделефа для данного топологического пространства равно $\aleph_1$.

Перейдем теперь к отысканию плотности $d(R^2)$. Пусть существует счетное всюду плотное множество A в этом пространстве. Каждая из точек этого множества принадлежит прямой, уравнение которой $y=kx$. Поэтому элементы множества A имеют вид: $(x_i,k_i\cdot x_i)_{i=1}^{\infty}$. Очевидно, существует $k_0\neq k_i$ при любом $i=\overline{1,\infty}$, так как $k\in R$, а множество R континуально. Тогда на прямой с уравнением $y=k_0x$ нет ни одной точки из множества A. Получаем, что любая точка этой прямой не имеет окрестности, пересекающейся с множеством A, то есть не является точкой прикосновения этого множества. Из того, что не выполняется равенство $\overline{A}=R^2$, следует, что A не всюду плотно. Значит, не существует счетного всюду плотного множества в рассматриваемом топологическом пространстве. Очевидно, что континуальное всюду плотное множество существует, например, все R^2. Следуя определению, получаем, что плотность $d(R^2)$ топологического пространства равна $\aleph_1$.

Найденные выше мощностные характеристики совпадают по своему значению, а значит, необходимое условие метризуемости выполняется, но вопрос о метризуемости этого топологического пространства еще остается открытым. Мы не будем проверять выполнимость достаточных условий, а укажем метрику, порождающую топологию рассматриваемого пространства.

Пусть ρ - обычная евклидова метрика на плоскости ($\rho(z_1,z_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$), где $z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)$. Введем новую функцию расстояния на плоскости по формуле

$$d(z_1,z_2)=\begin{cases}\rho(z_1,z_2), \text{ если прямая } z_1z_2 \text{ проходит через начало координат,}\\ \rho(z_1,0)+\rho(0,z_2), \text{если прямая } z_1z_2 \text{ не проходит через начало координат,}\\ 0, \text{ если } z_1=z_2.\end{cases}$$

Покажем, что $d(z_1,z_2)$ является метрикой на R^2. Для этого напомним аксиомы метрики.

1. Для любых $z_1,z_2\in R^2$ $d(z_1,z_2)\geq 0$;

2. $d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$;

3. Для любых $z_1, z_2 \in R^2$ $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$;

4. Для любых $z_1, z_2, z_3 \in R^2$ $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$.

Все эти аксиомы выполняются. Действительно,

1. $d(z_1, z_2) \geq 0$, так как $\rho(z_1, z_2)$ - неотрицательная функция.

2. Пусть $d(z_1, z_2) = 0$. Тогда $z_1 = z_2$, так как в противном случае $d(z_1, z_2) = \rho(z_1, z_2) > 0$, если прямая $z_1 z_2$ проходит через начало координат и $d(z_1, z_2) = (\rho(z_1, 0) + \rho(0, z_2)) > 0$, если прямая $z_1 z_2$ не проходит через начало координат. Это противоречит условию, что ρ - метрика. Обратно, пусть $z_1 = z_2$, тогда очевидно, что $d(z_1, z_2) = 0$.

3. $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$, так как все правые части равенства $d(z_1, z_2) = \rho(z_1, 0) + \rho(0, z_2)$ симметричны относительно z_1 и z_2 ($\rho(z_1, z_2) = \rho(z_2, z_1)$ и $\rho(z_1, 0) + \rho(0, z_2) = \rho(z_2, 0) + \rho(0, z_1)$).

4. $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$. Здесь нужно рассмотреть все возможные случаи расположения точек z_1, z_2, z_3 на плоскости.

Случай 1. Пусть $0 \in z_1 z_2$, $z_3 \in z_1 z_2$, тогда

$$d(z_1, z_2) = \rho(z_1, z_2) \leq \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3) = d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3).$$

Случай 2. Пусть $0 \in z_1 z_2$, $z_3 \notin z_1 z_2$, получаем

$$d(z_1, z_2) = \rho(z_1, z_2) \leq \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3) \leq \rho(z_1, 0) + \rho(0, z_3) + \rho(z_3, 0) + \rho(0, z_2) = d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2).$$

Случай 3. В случае $0 \notin z_1 z_2$, $z_3 \in 0 z_1$, будем иметь

$$d(z_1, z_2) = \rho(z_1, 0) + \rho(0, z_2) \leq \rho(z_1, z_3) + \rho(z_3, 0) + \rho(0, z_2) == d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2) \quad .$$

Случай 4. Наконец, если $0 \notin z_1 z_2$, $z_3 \notin 0 z_1$, $z_3 \notin 0 z_2$, то

$$d(z_1, z_2) = \rho(z_1, 0) + \rho(0, z_2) \leq \rho(z_1, 0) + \rho(z_3, 0) + \rho(0, z_2) + \rho(z_3, 0) = d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2).$$

Значит d - метрика на R^2.

Рассмотрим вид открытых относительно метрики d шаров. Это даст возможность сравнить открытые относительно этой метрики множества с элементами исходной топологии. Пусть $B_\varepsilon(z_0)$ - шар в (R^2, d), тогда, по определению открытого шара, $B_\varepsilon(z_0) = \{z \in R^2 : d(z, z_0) < \varepsilon\}$. Здесь надо рассмотреть два случая: 1) $z_0 = 0$ и 2) $z_0 \neq 0$.

1) Пусть $z_0 = 0$. Тогда $\forall z$ $d(z, z_0) = d(z, 0) = \rho(z, 0)$ и определение открытого шара перепишется в виде $B_\varepsilon(z_0) = \{z \in R^2 : \rho(z, 0) < \varepsilon\}$. Значит, в случае, когда центр шара совпадает с началом координат, шар представляет собой открытый круг радиуса ε с центром в точке $z_0 = 0$, то есть обычный открытый круг на плоскости R^2.

2) Если же $z_0 \neq 0$, то положим $h = \rho(z_0, 0)$. Здесь возможны два случая: $\varepsilon \leq h$ и $\varepsilon > h$.

Если $\varepsilon \leq h$, то все элементы шара $B_\varepsilon(z_0)$ лежат на прямой $0 z_0$. Действительно, если $z \notin 0 z_0$, то $d(z, z_0) = \rho(z, 0) + \rho(0, z_0) > \rho(0, z_0) = h$. Из условия $z \in 0 z_0$ следует, что $d(z, z_0) = \rho(z, z_0)$. Таким образом, шар $B_\varepsilon(z_0)$ в этом случае будет множеством точек плоскости, лежащих на прямой $0 z_0$ и удаленных от точки z_0 на расстояние, меньшее ε. Другими словами, это будет интервал на прямой $0 z_0$ с центром в точке z_0 и длиной 2ε.

Пусть теперь $\varepsilon > h$. Если точка z принадлежит шару $B_\varepsilon(z_0)$, но не принадлежит прямой $0z_0$, то $d(z, z_0) = \rho(z,0) + \rho(0, z_0) = \rho(z,0) + h < \varepsilon$, откуда $\rho(z,0) < \varepsilon - h$. Это означает, что шару $B_\varepsilon(z_0)$ принадлежат те точки, которые удалены от точки 0 на расстояние, меньшее, чем $\varepsilon - h$. Если точка z принадлежит шару $B_\varepsilon(z_0)$ и принадлежит прямой $0z_0$, то $d(z, z_0) = \rho(z, z_0) < \varepsilon$, то есть шару $B_\varepsilon(z_0)$ принадлежат те точки, лежащие на прямой $0z_0$, которые удалены от точки z_0 на расстояние, меньшее ε. Таким образом, если $\varepsilon > h$, то открытый шар $B_\varepsilon(z_0)$ представляет собой объединение интервала прямой $0z_0$ с центром в точке z_0 и открытого шара с центром в точке 0 и радиусом $\varepsilon - h$ [3].

Очевидно, что открытые множества из семейства τ полностью совпадают с открытыми относительно метрики d на R^2 множествами. А это означает, что топологическое пространство (R^2, τ) является метризуемым пространством.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Метризуемость топологического пространства является одним из важнейших его свойств. Исследовать пространство на метризуемость становится намного легче, если знать все необходимые и достаточные условия метризуемости. Данная статья посвящена одному из необходимых условий метризуемости, связанному с понятием мощностных характеристик топологических пространств. Знакомство с такими мощностными характеристиками, как число Суслина, число Линделефа, плотность и вес позволяет раскрыть дополнительные свойства и характеристики топологических пространств. Для определенного класса топологических пространств мощностные характеристики являются эффективным средством решения проблемы метризуемости пространства.

Для того, чтобы успешно применять этот аппарат, необходимо разобраться в его составляющих, в существующих между ними связях, особенностях. Современная педагогика, общая и частные методики располагают рядом эффективных средств, одним из которых является составление задач самими обучаемыми. Построение нетривиальных примеров понятий, позволяющих глубоко осмыслить определение понятия и научиться его применять, можно рассматривать как вариацию этого средства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Введение в топологию [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич [та ін.]. ; под ред. Фукс Д.Б. - М. : Наука, 1995. - 416 с.
2. Городецкий В.В. Методы решения задач по функциональному анализу [Текст] / В.В. Городецкий, Н.И. Нагнибида, П.П. Настасиев. – К. : Вища шк., 1990. – 479 с.
3. Куприянова М.А. Составление математических задач как инструмент развития универсальных учебных действий на уроках математики основной школы // Известия РГПУ им. А.И.Герцена. – 2012. - № 150. – С.207-211.
4. Математическая энциклопедия. Т. 3 / под. ред. И.М. Виноградова – М. : «Советская энциклопедия», 1982. – 592 с.
5. Энгелькинг Р. Общая топология / Пер. с англ. А.В. Архангельского, М.Я. Антоновского - М. : Мир, 1986. – 752 с.
6. Топологические пространства и их непрерывные отображения : Методические указания к выполнению лабораторных работ (для студентов математических специальностей) / Сост. : А.В. Оськин, И.Г. Величко, В.В. Кайзер, П.Г. Стеганцева. – Запорожье : ЗГУ, 1993. – 64 с.