УДК 512.64

ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОПЕДЕВТИКИ ТЕМЫ «МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА»

Стеганцев Е.В., к. ф.-м. н., ст. преподаватель, Ткаченко И.Г., к. ф.-м. н., доцент

Запорожский национальный университет

На примере задачи о проверке аксиом метрики показывается необходимость и эффективность пропедевтического этапа в организации учебного процесса. В данной статье собраны и систематизированы сведения о точных гранях множества, известные студентам из различных курсов и эффективно использующиеся при проверке аксиом определенного класса метрик.

Ключевые слова: пропедевтика, метрика, неравенство треугольника, максимум функции, супремум множества

Стєганцев Є.В., Ткаченко І.Г. ОРГАНІЗАЦІЯ ПРОПЕДЕВТИКИ ТЕМИ «МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ» / Запорізький національний університет, Україна.

На прикладі задачі про перевірку аксіом метрики демонструється необхідність і ефективність пропедевтичного етапу в організації навчального процесу. У даній статті зібрано і систематизовано відомості про точні грані множини, які відомі студентам із різних курсів і ефективно використовуються при перевірці аксіом певного класу метрик.

Ключові слова: пропедевтика, метрика, нерівність трикутника, максимум функції, супремум множини

Stegantsev E.V., Tkachenko I.G. THE ORGANIZATION OF THE PROPAEDEUTICS OF THE THEME “METRIC SPACE”/ Zaporizhzhya state university, Ukraine

The necessity and the effectiveness of the propaedeutical stage in the organization of the teaching situation have been demonstrated with the example of the problem of the axioms of metric test. The information about the least upper bound and the greatest lower bound, which is known to the students from different courses and which is used for the checking of the axioms of the certain class of metric, has been collected and systematized in the given article.

Key words: propaedeutics, metric, triangle inequality, maximum of the function, supremum of the set

Обучение в вузе является ключевым звеном процесса становления современного специалиста, поскольку приобретенный багаж знаний и навыков будет проявляться в профессиональной деятельности, особенно если речь идет о педагогической специальности. Вопросы эффективности организации профессиональной подготовки занимают важное место в современных исследованиях [2,3]. При организации учебно-познавательной деятельности важно учитывать, что поддержание положительного эмоционального отношения к будущей профессии является одной из главных задач профессионального становления личности. Создать атмосферу уверенности в своих силах, морального удовлетворения от достигнутых успехов можно с помощью зачастую достаточно простых методических приемов. Одним из них является организация учебного процесса «без авралов», то есть систематическая самостоятельная работа, консультации и контрольные мероприятия. С введением кредитно-модульной системы организация систематического контроля уже не является обязанностью преподавателя, но подготовка к нему требует значительных усилий. Для поддержания положительного эмоционального состояния студента важно помочь им «пройти» необходимые шаги в начальных темах учебной дисциплины. Особенно это относится к математическим дисциплинам, где приобретаемые «пробелы» незаметно превращаются в снежный ком. В данной статье затронутые вопросы обсуждаются на примере материала о метрических пространствах.

Метрические пространства детально изучаются студентами математиками в таких общих курсах, как «Дифференциальная геометрия и топология», «Функциональный анализ», а также в некоторых курсах по выбору. Сведения о метрических пространствах используются при изучении практически всех дисциплин фундаментального цикла по специальности математика, среди которых отметим «Дифференциальные уравнения», «Численные методы», «Уравнения математической физики». Это объясняется тем, что поиск решений большого класса уравнений можно представить как нахождение прообраза правой части уравнения в некотором, специально подобранном, метрическом пространстве (числовом или функциональном). Следовательно, усвоение студентами основных понятий теории метрических пространств является важной частью современного математического образования.

В курсе «Дифференциальная геометрия и топология», в котором студенты впервые знакомятся с метрическими пространствами, они изучаются до определения топологии и используются в качестве важного примера топологических пространств. Одной из первых практических задач, которые возникают при изучении метрических пространств, есть задача проверки аксиом метрики. Практика показывает, что ее решение вызывает серьезные затруднения у большинства студентов. Это объясняется отчасти тем, что для решения этой задачи нужно использовать знания, полученные ранее в курсах математического анализа, алгебры и теории чисел, аналитической геометрии и школьной математики. Многие «пробелы» в знаниях студентов особенно проявляются при проверке аксиомы «неравенство треугольника». Вместе с тем, иногда небольшая подсказка помогает студентам преодолеть трудности.

Существует большое количество метрических пространств, и указать для них универсальный эффективный алгоритм проверки аксиом метрики не представляется возможным. Заметим лишь то, что при доказательстве аксиомы треугольника для классических пространств были получены новые, на то время, неравенства, среди которых неравенство Коши-Буняковского, неравенство Йенсена, неравенство Минковского.

В ряде задач естественно возникают метрики, в которых расстояние описывается с использованием операций нахождения максимума и минимума. Целью данной статьи есть обзор свойств максимума, минимума, супремума и инфимума, которые могут оказаться полезными при проверке аксиомы треугольника для указанных типов метрик.

О ЗАВИСИМОСТИ АКСИОМ МЕТРИКИ

В университетских курсах принято следующее аксиоматическое

Определение. Метрикой (или расстоянием) на произвольном непустом множестве M называется действительная функция $\rho(x, y)$, определенная для всех $x, y \in M$ и удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. Для любых $x, y \in M \quad \rho(x, y) \geq 0$ (аксиома неотрицательности);

2. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества);

3. Для любых $x, y \in M \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии);

4. Для любых $x, y, z \in M \quad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$ (аксиома неравенство треугольника).

Если на множестве M зафиксирована некоторая метрика $\rho(x, y)$, то пара (M, ρ) называется метрическим пространством.

Приведенная в определении система аксиом метрики является зависимой, а именно, достаточно принять только аксиомы 2 и 4, так как аксиомы 1 и 3 являются их следствиями. Доказательство этого факта является полезным упражнением, но на практике, все же, удобнее пользоваться приведенной системой аксиом, так как она описывает больше свойств метрики.

ПРИМЕРЫ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

В этой статье рассмотрим метрики, которые задаются формулой, содержащей символы $\max, \min, \sup, \inf$.

1. Множество точек плоскости с метрикой $\rho(M_1, M_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$.

2. Множество комплексных чисел с метрикой $\rho(z, z_1) = \max\{|r - r_1|, |\varphi - \varphi_1|\}$.

3. Множество вещественных квадратных матриц с метрикой $\rho(A, B) = \max\limits_{i, j = \overline{1, n}} |a_{ij} - b_{ij}|$.

4. Множество вещественных чисел с метрикой $\rho(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}$.

5. Множество вещественных чисел с метрикой $\rho(x, y) = \max\{x - y, y - x\}$.

6. Множество вещественных чисел с метрикой $\rho(x, y) = \max\{x, y\} - \min\{x, y\}$.

7. Множество движений плоскости с метрикой $\rho(f, g) = \max\limits_{x \in D} \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$, где D - круг единичного радиуса с центром в начале координат

8. Множество $C_{[a,b]}$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с метрикой $\rho(f,g)=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$.

9. Множество ограниченных на отрезке $[a,b]$ функций с метрикой

$\rho(f,g)=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$.

10. Множество дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций с метрикой $\rho(f,g)=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|+\sup\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)-g'(x)|$.

МОДУЛЬ ЧИСЛА И ЕГО СВОЙСТВА

Поскольку метрикой может быть только неотрицательная функция, то довольно часто в формуле, задающей эту функцию, присутствует знак модуля. Приведем несколько свойств модуля, которые часто используются при проверке аксиом метрики:

$$|x|=\max\{-x,x\}; \tag{1}$$

$$|x|-|y|\le|x+y|\le|x|+|y|; \tag{2}$$

$$-|x-y|\le|x|-|y|\le|x-y|; \tag{3}$$

$$|x-y|\ge\big||x|-|y|\big|. \tag{4}$$

Равенство (1) верно лишь для действительных чисел, а неравенства (2)-(4) имеют место как для действительных, так и для комплексных чисел.

ОПЕРАЦИИ НАХОЖДЕНИЯ МИНИМУМА И МАКСИМУМА И ИХ СВОЙСТВА

Количество свойств $\max,\min$ чисел или функций очень немногочисленно, и, чаще всего, достаточно знать лишь их определения. Но этот факт как раз и вызывает затруднения при проверке аксиом метрики. Студенты пытаются «придумать» собственные свойства.

Приведем список свойств $\max,\min$, которые оказываются полезными для решения задач.

$$\min\{\min\{a,b\},c\}=\min\{a,\min\{b,c\}\}; \tag{5}$$

$$\max\{\max\{a,b\},c\}=\max\{a,\max\{b,c\}\}; \tag{6}$$

$$\max\{\min\{a,b\},c\}=\min\{\max\{a,c\},\max\{b,c\}\}; \tag{7}$$

$$\min\{\max\{a,b\},c\}=\max\{\min\{a,c\},\min\{b,c\}\}; \tag{8}$$

$$a\le c,b\le c\Rightarrow\max\{a,b\}\le c; \tag{9}$$

$$\max\{a,b\}+c=\max\{a+c,b+c\}; \tag{10}$$

$$\forall a,b\ge0\ \ (a\le d+c,b\le e+f)\Rightarrow\max\{a,b\}\le\max\{d+c,e+f\}; \tag{11}$$

$$\forall a,b,c\ge0\ \ \max\{a+b,c\}\le\max\{a,c\}+\max\{b,c\}. \tag{12}$$

Например, в метрическом пространстве из примера 1 (пример 2 отличается по сути лишь обозначениями, в примере 3 под знаком $\max$ не обязательно два, а произвольное конечное число элементов) при проверке неравенства треугольника предлагается использовать правую часть неравенства (2) и определение наибольшего значения двух действительных чисел. Тогда

$$\left|x_1 - x_2\right| \le \left|x_1 - x_3\right| + \left|x_3 - x_2\right| \le \max\{\left|x_1 - x_3\right|, \left|y_1 - y_3\right|\} + \max\{\left|x_2 - x_3\right|, \left|y_2 - y_3\right|\}$$

Аналогично,

$$\left|y_1 - y_2\right| \le \left|y_1 - y_3\right| + \left|y_3 - y_2\right| \le \max\{\left|x_1 - x_3\right|, \left|y_1 - y_3\right|\} + \max\{\left|x_2 - x_3\right|, \left|y_2 - y_3\right|\}$$

Поэтому, согласно (9), для наибольшего из двух чисел $\left|x_1 - y_1\right|, \left|x_2 - y_2\right|$ имеем $\max\{\left|x_1 - x_2\right|, \left|y_1 - y_2\right|\} = \rho(M_1, M_2) \le \rho(M_1, M_3) + \rho(M_3, M_2)$.

Есть и другой способ проверки неравенства треугольника для этой метрики. Предположим, что $\left|x_1 - x_2\right| \ge \left|y_1 - y_2\right|$. Тогда получим $\rho(M_1, M_2) = \max\{\left|x_1 - x_2\right|, \left|y_1 - y_2\right|\} = \left|x_1 - x_2\right| = \left|x_1 - x_3 + x_3 - x_2\right|$. Следовательно, с учетом правой части (2), $\rho(M_1, M_2) \le \left|x_1 - x_3\right| + \left|x_3 - x_2\right|$. Очевидно также, что $\left|x_1 - x_3\right| \le \max\{\left|x_1 - x_3\right|, \left|y_1 - y_3\right|\} = \rho(M_1, M_3)$, $\left|x_3 - x_2\right| \le \max\{\left|x_3 - x_2\right|, \left|y_3 - y_2\right|\} = \rho(M_3, M_2)$. Осталось сложить неравенства одинакового смысла.

Еще один способ доказательства аксиомы треугольника для метрики из примера 1 дает использование свойства (11).

Замечание. Обобщение этого примера сформулируем в виде следующего утверждения.

Лемма. Если ρ_1, ρ_2 - метрики на M, то $\max(\rho_1, \rho_2)$ - тоже метрика на множестве M.

Доказательство. Ограничимся снова проверкой неравенства треугольника и приведем последовательность шагов без словесных комментариев.

Так как $\forall x, y, z \in M$

$$\rho_1(x, y) \le \rho_1(x, z) + \rho_1(z, y) \le \max\{\rho_1(x, z), \rho_2(x, z)\} + \max\{\rho_1(y, z), \rho_2(y, z)\},$$

$$\rho_2(x, y) \le \rho_2(x, z) + \rho_2(z, y) \le \max\{\rho_1(x, z), \rho_2(x, z)\} + \max\{\rho_1(y, z), \rho_2(y, z)\}$$

то $\max\{\rho_1(x, y), \rho_2(x, y)\} \le \max\{\rho_1(x, z), \rho_2(x, z)\} + \max\{\rho_1(z, y), \rho_2(z, y)\}$, **что и требовалось доказать**.

В примере 8 при проверке аксиомы треугольника воспользуемся тем, что для любой функции $\omega(x) \in C_{[a,b]}$ по определению наибольшего значения функции выполнено $\omega(x) \le \max\limits_{x \in [a,b]} \omega(x)$. По правилу сложения неравенств одинакового смысла получим, что на отрезке $[a, b]$ для любых функций $\omega_1(x), \omega_2(x) \in C_{[a,b]}$ имеет место неравенство $\omega_1(x) + \omega_2(x) \le \max\limits_{x \in [a,b]} \omega_1(x) + \max\limits_{x \in [a,b]} \omega_2(x)$. Тогда по свойству (9) имеем

$$\max_{x \in [a,b]} (\omega_1(x) + \omega_2(x)) \le \max_{x \in [a,b]} \omega_1(x) + \max_{x \in [a,b]} \omega_2(x). \qquad (13)$$

Заметим, что аналогично можно показать, что для любых функций $\omega_1(x), \omega_2(x) \in C_{[a,b]}$ имеет место неравенство

$$\min_{x \in [a,b]} \omega_1(x) + \min_{x \in [a,b]} \omega_2(x) \le \min_{x \in [a,b]} (\omega_1(x) + \omega_2(x)). \qquad (14)$$

Далее, для любых трех функций f, g, h выполняется неравенство

$\left|f(x)-g(x)\right| \le \left|f(x)-h(x)\right|+\left|h(x)-g(x)\right|$. Возьмем максимальное значение левой и правой частей: $\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f(x)-g(x)\right| \le \max\limits_{x\in[a,b]}\left(\left|f(x)-h(x)\right|+\left|h(x)-g(x)\right|\right)$.

Согласно полученному выше неравенству (13) имеем

$\max\limits_{x\in[a,b]}\left(\left|f(x)-h(x)\right|+\left|h(x)-g(x)\right|\right) \le \max\limits_{x\in[a,b]}\left|f(x)-h(x)\right| + \max\limits_{x\in[a,b]}\left|h(x)-g(x)\right|$, т.е.

$$\rho(f,g)=\max_{x\in[a,b]}\left|f(x)-g(x)\right| \le \max_{x\in[a,b]}\left|f(x)-h(x)\right| + \max_{x\in[a,b]}\left|h(x)-g(x)\right| = \rho(f,h)+\rho(h,g)$$

и неравенство треугольника доказано.

ТОЧНАЯ ГРАНЬ МНОЖЕСТВА И ЕЕ СВОЙСТВА

Дополним список свойствами точной верхней и точной нижней граней множества X ($\sup X$ и $\inf X$ соответственно):

Если $A+B$ - множество чисел вида $a+b$, где $a\in A\subset R$ и $b\in B\subset R$, то

$$\sup(A+B)=\sup A+\sup B \tag{15}$$

$$\inf(A+B)=\inf A+\inf B \tag{16}$$

Если $A\cdot B$ - множество чисел вида $a\cdot b$, где $a\in A\subset R$ и $b\in B\subset R$, то

$$\sup(A\cdot B)=\sup A\cdot\sup B \tag{17}$$

$$\inf(A\cdot B)=\inf A\cdot\inf B \tag{18}$$

Если $A-B$ - множество чисел вида $a-b$, где $a\in A\subset R$ и $b\in B\subset R$, то

$$\sup(A-B)=\sup A-\inf B \tag{19}$$

Метрика из примера 9 обобщает метрику из примера 8 на случай множества всех функций, ограниченных на отрезке $[a,b]$ (не обязательно непрерывных). При проверке неравенства треугольника воспользуемся тем, что для любых трех ограниченных функций f,g,h и любого $x\in[a,b]$ выполняется правая часть неравенства (2) и тем, что по свойству (15) супремум суммы функций равен сумме их супремумов:

$$\left|f(x)-g(x)\right| \le \left|f(x)-h(x)\right|+\left|h(x)-g(x)\right| \le \sup_{x\in[a,b]}\left|f(x)-h(x)\right| + \sup_{x\in[a,b]}\left|h(x)-g(x)\right|$$

Таким образом, число $\rho(f,h)+\rho(h,g)$ является верхней гранью для функции $\left|f(x)-g(x)\right|$. Супремум – это по определению наименьшая из верхних граней. Поэтому, усиливая последнее неравенство, получим $\rho(f,g)=\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f(x)-g(x)\right| \le \rho(f,h)+\rho(h,g)$, т.е. неравенство треугольника выполняется.

В примере 10 проверку неравенства треугольника можно выполнить аналогично для каждого слагаемого в отдельности и сложить неравенства одинакового смысла.

СВЯЗЬ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТРИКАМИ НА ОДНОМ И ТОМ ЖЕ МНОЖЕСТВЕ

Из теории метрических пространств известно, что на одном и том же множестве можно рассматривать различные метрики. Понятно, что определенный интерес представляет вопрос о существовании связей между ними. Так в примере 1 на множестве точек плоскости рассматривалась метрика

$\rho_\infty(M_1, M_2) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$, в которой расстояние равно наибольшей из длин проекций отрезка M_1M_2 на оси координат. На том же множестве часто рассматривают метрики $\rho_1(M_1, M_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ (расстояние – сумма длин проекций отрезка M_1M_2 на оси координат) и $\rho_2(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (расстояние – длина отрезка M_1M_2). Все эти метрики являются частными случаями класса метрик на плоскости R^2, задающихся формулой $\rho_p(M_1, M_2) = \sqrt[p]{|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p}$.

Очевидно, $\rho_2(M_1, M_2) \le \rho_1(M_1, M_2)$ (длина гипотенузы не превосходит суммы длин катетов). При $x_1 = y_1 = 0$ последнее неравенство равносильно алгебраическому неравенству $\sqrt{x^2 + y^2} \le |x| + |y|$. Заметим также, что $\rho_\infty(M_1, M_2) \le \rho_2(M_1, M_2)$. Из этого неравенства при $x_1 = y_1 = 0$ получим равносильное неравенство

$$\max\{|x|, |y|\} \le \sqrt{x^2 + y^2}\,. \qquad (20)$$

В этой статье мы остановились лишь на некоторых вопросах теории метрических пространств. Целый ряд методических задач возникает при организации изучения в метрических пространствах открытых и замкнутых множеств, сходимости последовательностей точек, непрерывных отображений [1, 4] и т.д.

Как правило, любая задача из курса высшей математики сводится к решению последовательности задач элементарной математики. Важной методической задачей является выделение тех понятий и свойств, изучаемых в школьной математике, которые применяются при изучении соответствующей темы. Это позволяет эффективно организовать пропедевтику и помочь студентам избежать трудностей, связанных с наличием пробелов в их школьном образовании. Иногда необходимые предварительные сведения известны студентам, но они не систематизированы и воспринимаются ими разрознено. Так, например, понятия максимума и минимума и их свойства изучаются в школе, понятия точной грани множества изучаются на первом курсе, но их свойства описываются по мере необходимости для каждого конкретного курса. Сводка и обзор этих, достаточно простых свойств, позволяет унифицировано проводить проверку аксиом для метрик определенного вида, что и было продемонстрировано в статье. В дальнейшем представляет интерес анализ необходимых знаний из курса элементарной математики для организации обучения решению задач из курса высшей математики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виро О.Я./ Виро О.Я., Иванов О.А., Нецветаев Н.Ю., Харламов В.М. Элементарная топология.- М.: Изд-во МЦНМО.- 2008.- 354 с.
2. Климов Е.А. психолого-педагогические проблемы профессиональной консультации/ Е.А.Климов.- М.: Знание, 1983.- 95 с.
3. Кузьмина Н.В. Методы исследования педагогической деятельности/ Н.В.Кузьмина.- Л.: Изд-во ЛГУ, 1970.- 116 с.
4. Скворцов В.А. Примеры метрических пространств/ В.А. Скворцов // Б-ка «Математическое просвещение». – Вып. 16.- 24 с.