3. Курбас Л. Березіль: Із творчої спадщини / Упоряд. М.Г. Лабінський. Авт. передм. Ю.Бобошко. - К.: Дніпро, 1988. – 518 с.

4. Станиславский К.С. Моя жизнь в искусстве / К.С. Станиславский. – М.: Искусство, 1980. – 341 с.

5. Сухомлинский В.А. Избранные произведения: В 5 т. / В.А.Сухомлинський .– К.: Рад. шк., 1979. – Т 1. – 686 с., Т 3. – 719 с.

УДК 512.64

АЛГОРИТМІЗАЦІЯ ПРОЦЕСУ ПОБУДОВИ ЖОРДАНОВОГО БАЗИСУ ДЛЯ ОПЕРАТОРА З ОДНИМ ВЛАСНИМ ЗНАЧЕННЯМ

Величко О.В., к.ф.-м.н., доцент, Ткаченко І.Г., к.ф.-м.н., ст.викладач, Железняк Р.А., студент

Запорізький національний університет

У статті наголошується на необхідності чітко формулювати для студентів-математиків алгоритми вирішення типових завдань. Побудова такого алгоритму ілюструється на прикладі задачі про побудову канонічного базису для лінійних операторів спеціального виду.

Ключові слова: алгоритм, матриця, базис, власне значення

Величко Е.В., Ткаченко И.Г, Железняк Р. А. АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ПОСТРОЕНИЯ ЖОРДАНОВОГО БАЗИСА ДЛЯ ОПЕРАТОРА С ОДНИМ СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ / Запорожский национальный университет, Украина.

В данной статье отмечается необходимость четко формулировать для студентов-математиков алгоритмы решения типичных задач. Построение такого алгоритма иллюстрируется на примере задачи о построении канонического базиса для линейных операторов специального вида.

Ключевые слова: алгоритм, матрица, базис, собственное значение

Velichko H.V., Tkachenko I.G., Zheleznyak R. A. ALGORITHM PROCESS OF CREATING THE BASIS FOR JORDANIAN OPERATOR WITH ONE'S OWN IMPORTANCE/ Zaporizhzhya national university, Ukraine.

The article notes the need to articulate to students in the math algorithms for solving typical problems. Constructing such an algorithm is illustrated by the problem of constructing a canonical basis for the linear operators of special form.

Key words: algorithm, matrix, basis, the eigenvalue

Рівень фахової підготовки сучасних студентів молодших курсів математичного факультету є, в цілому, дуже низьким. Тому для того, щоб навчити їх розв’язувати стандартні математичні задачі, потрібно не лише ознайомити їх з необхідним теоретичним матеріалом і навести приклади, але і сформулювати алгоритм розв’язання. У даній статті пропонується алгоритм для однієї з найбільш складних задач курсу лінійної алгебри – задачі про пошук такого базису векторного простору, в якому матриця заданого оператора має жорданову форму. Зауважимо, що в основних підручниках, за якими вчаться студенти математичного факультету [1-5,7], висвітлюються лише питання про пошук жорданової форми, а існування жорданового базису лише доводиться. У збірнику задач [6] у вправі 1529 пропонується спосіб знаходження жорданового базису у випадку, коли оператор має одне дійсне власне значення. У даній статті цей спосіб записано у вигляді чіткого алгоритму і наведені приклади.

В університетський курс лінійної алгебри зазвичай входять питання, пов’язані з відображеннями лінійних просторів, тобто з лінійними операторами [1-5,7]. При введенні базису оператор φ однозначно задається своєю матрицею A_φ. Якщо перейти до іншого базису, то матриця оператора змінюється за формулою

$$A'_\varphi = C^{-1} A_\varphi C, \tag{1}$$

де C - матриця переходу від старого базису до нового.

Розв’язання прикладних питань суттєво спрощується, якщо матриця оператора має найбільш просту форму. Тому виникає така задача: для заданого оператора φ знайти такий базис (який називають канонічним), у якому його матриця має найпростіший вигляд (який теж називається канонічним), або, що те ж саме, по заданій матриці A_φ знайти таку матрицю C, для якої матриця A'_φ, яка визначається із співвідношення (1), має найпростіший вигляд.

Найпростішим виглядом матриці вважається діагональний. Але не будь-яку матрицю можна звести до такого вигляду. Критерій діагоналізованості матриці наведений, наприклад, у посібниках [2,4,7]. У тому випадку, коли матрицю не можна привести до діагонального вигляду, існують інші канонічні форми. Найбільш відомою з таких форм є жорданова форма матриці, названа так на честь французького математика Marie Ennemond Camille Jordan (5 січня 1838 — 22 січня 1922).

Теореми про існування жорданового базису і способи пошуку жорданової форми наведені в [1-7], і для економії місця ми не будемо їх цитувати, а відразу перейдемо до викладення алгоритму і прикладів.

Для спрощення обмежимось випадком, коли оператор має лише одне власне значення, оскільки в разі довільного оператора задачу можна звести до розглянутої в цій статті.

1. Знаходимо власні значення матриці лінійного оператора як корені характеристичного рівняння $\left|A_{\varphi} - \lambda E\right| = 0$. Перевіряємо умову, що це рівняння має єдиний корінь.

2. Визначаємо алгебраїчну і геометричну кратність власного значення λ. Вводимо в розгляд оператор $\tilde{\varphi} = \varphi - \lambda\varepsilon$, де ε – тотожний оператор.

3. Визначаємо базиси півпросторів $M_k = Ker\tilde{\varphi}^k$, $k = 1,2,...$ до тих пір, поки для деякого $k = m$ отримаємо, що $Ker\tilde{\varphi}^m = V$ (ця умова рівносильна тому, що оператор $\tilde{\varphi}^m$ є нульовим.

4. Визначаємо базиси підпросторів $K_i = \tilde{\varphi}^{i-1}(M_i)$, $i = \overline{1,m}$.

5. Базис підпростору K_m доповнюємо до базису півпростору K_{m-1}, Базис півпростору K_{m-1} доповнюємо до базису K_{m-2} і так далі до K_1 (це завжди можливо зробити, так як $\forall i$ K_i є півпростором K_{i-1}). Для кожного вектора цього базису знайдемо число s із умови, що цей вектор належить підпростору K_s і на належать підпростору K_{s+1}. Величина s визначає розмір відповідної жорданової клітини.

6. По черзі беремо вектори з базису підпростору K_1, який отримали на попередньому етапі алгоритму, позначаємо їх через $\bar{g}_1$ та знаходимо послідовність векторів $\bar{g}_2,...,\bar{g}_s$, які задовольняють співвідношенням $\tilde{\varphi}(\bar{g}_2) = \bar{g}_1,\ldots,\tilde{\varphi}(\bar{g}_s) = \bar{g}_{s-1}$. Записуємо вектори у відповідному порядку та додаємо до векторів жорданового базису, отриманих раніше.

Приклад 1.

$$\mathrm{A}\varphi = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

1. Характеристичне рівняння

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 & 10 \\ -4 & 3-\lambda & 7 \\ -3 & 1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 = 0$$

2. Власне значення $\lambda = 2$. Його алгебраїчна кратність дорівнює 3.

Вводимо в розгляд оператор $\tilde{\varphi} = \varphi - 2\varepsilon$. Його матриця

$$A_{\tilde{\varphi}} = A_{\varphi} - \lambda\mathrm{E} = A_{\varphi} - 2E = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо геометричну кратність власного значення $\lambda = 2$. Ранг матриці $A_{\tilde{\varphi}}$ дорівнює 2, а отже, шукана геометрична кратність дорівнює

$$\dim V - rang A_{\tilde{\varphi}} = 3 - 2 = 1.$$

3. Знаходимо $\mathrm{M}_1 = Ker\tilde{\varphi}^1$. Для цього шукаємо фундаментальний розв'язок системи лінійних рівнянь $\tilde{A} \cdot X = \theta$. Матрицю $\tilde{A}$ за допомогою елементарних перетворень приводимо до ступінчатого вигляду

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2III \\ -III \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3II \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow III \\ \cdot(-1) \rightarrow I \\ \rightarrow II \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Звідси

маємо, що $\begin{cases} x_1 = 2x_3, \\ x_2 = x_3. \end{cases}$ Фундаментальна система розв'язків (ФСР) цієї системи складається з одного

вектора $\bar{a}(2,1,1)$. Таким чином,

$$\mathrm{M}_1 = \ker \varphi^1 = \langle \bar{a} \rangle.$$

Знаходимо $\mathrm{M}_2 = Ker\tilde{\varphi}^2$.

$$A_{\tilde{\varphi}^2} = A_{\tilde{\varphi}}^2 = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2II \\ \\ -II \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (-1) \rightarrow I \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Загальний розв'язок СЛАУ $A_{\tilde{\varphi}^2} X = \theta$ має вигляд $\begin{cases} x_1 = 2x_3, \\ x_2 - \textit{довільне.} \end{cases}$ ФСР складається з векторів $\bar{b}(2,0,1)$ та $\bar{c}(0,1,0)$. Таким чином,

$$\mathrm{M}_2 = Ker\tilde{\varphi}^2 = \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle.$$

Знаходимо $\mathrm{M}_3 = Ker\tilde{\varphi}^3$.

$$A_{\tilde{\varphi}^3} = A_{\tilde{\varphi}}^3 = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином $\tilde{\varphi}^3$ - це нульовий оператор, а отже $\mathrm{M}_3 = Ker\tilde{\varphi}^3 = V = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle$.

4. Підпростір $K_1 = \tilde{\varphi}^0(M_1) = \varepsilon(M_1) = M_1 = \langle \bar{a} \rangle$.

Підпростір $K_2 = \tilde{\varphi}^1(M_2) = \tilde{\varphi}(M_2) = \langle \tilde{\varphi}(\bar{c}), \varphi(\bar{c}) \rangle$.

$$\tilde{\varphi}(\bar{c}) = A_{\tilde{\varphi}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{a},$$

$$\tilde{\varphi}(\bar{c}) = A_{\tilde{\varphi}}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6&2&10\\-4&1&7\\-3&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix} = -\bar{a}.$$

$K_2 = \langle \bar{a}, -\bar{a} \rangle = \langle \bar{a} \rangle$,

$K_3 = \tilde{\varphi}^2(M_3) = \tilde{\varphi}^2(V) = \left\langle \tilde{\varphi}^2(\bar{e}_1), \tilde{\varphi}^2(\bar{e}_2), \tilde{\varphi}^2(\bar{e}_3) \right\rangle$.

$$\tilde{\varphi}^2(\bar{e}_1) = A^2_{\tilde{\varphi}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&0&4\\-1&0&2\\-1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix} = -\bar{a},$$

$$\tilde{\varphi}^2(\bar{e}_2) = A^2_{\tilde{\varphi}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&0&4\\-1&0&2\\-1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \bar{0},$$

$$\tilde{\varphi}^2(\bar{e}_3) = A^2_{\tilde{\varphi}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&0&4\\-1&0&2\\-1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix} = 2\bar{a}.$$

$K_3 = \left\langle -\bar{a}, \bar{0}, 2\bar{a} \right\rangle = \langle \bar{a} \rangle$.

5. Оскільки $K_3 = K_2 = K_1$, то шуканий базис K_1 містить лише один вектор $\bar{a}$, для якого $s(\bar{a}) = 3$.

6. Як перший базисний вектор беремо вектор $\bar{g}_1 = \bar{a} = (2,1,1)$. Для нього $s = 3$, оскільки $\bar{g} \in K_3$. За знайденим вектором $\bar{g}_1$ знайдемо вектори $\bar{g}_2$ та $\bar{g}_3$.

Вектор $\bar{g}_2$ визначається з умови $\tilde{\varphi}(\bar{g}_2) = \bar{g}_1$. Координати вектора $\bar{g}_2$ є розв'язком системи $A_{\tilde{\varphi}}X = (2 \quad 1 \quad 1)^t$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-6&2&10&2\\-4&1&7&1\\-3&1&5&1\end{array}\right)\begin{array}{l}-2III\\-III\\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\-1&0&2&0\\-3&1&5&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\-3II\end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\-1&0&2&0\\0&1&-1&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\to III\\ \cdot(-1) \to I\\ \to II\end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&0\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Звідси маємо, що $\begin{cases} x_1 = 2x_3, \\ x_2 = x_3 + 1. \end{cases}$ Взявши $x_3 = 0$, отримаємо частинний розв'язок

$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0$. Таким чином, вважаємо, що $\bar{g}_2 = (0,1,0)$.

Вектор $\bar{g}_3$ визначається з умови $\tilde{\varphi}(\bar{g}_3) = \bar{g}_2$. Координати вектора $\bar{g}_3$ є розв'язком системи $A_{\tilde{\varphi}}X = (0 \quad 1 \quad 0)^t$.

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 & \vline & 0 \\ -4 & 1 & 7 & \vline & 1 \\ -3 & 1 & 5 & \vline & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2III \\ -III \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \vline & 0 \\ -1 & 0 & 2 & \vline & 1 \\ -3 & 1 & 5 & \vline & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3II \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \vline & 0 \\ -1 & 0 & 2 & \vline & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \vline & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow III \\ \cdot(-1) \rightarrow I \\ \rightarrow II \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \vline & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \vline & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \vline & 0 \end{pmatrix}$$

Звідси маємо, що $\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 1, \\ x_2 = x_3 - 3. \end{cases}$

Взявши $x_3 = 0$, отримаємо частинний розв'язок $x_1 = -1, x_2 = -3, x_3 = 0$. Таким чином, вважаємо, що $\bar{g}_3 = (-1,-3,0)$.

Включаємо вектори $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$ в жордановий базис (в цьому випадку це зводиться до їх пере означення другою літерою) і отримаємо шуканий канонічний базис: $\bar{f}_1 = (2,1,1)$, $\bar{f}_2 = (0,1,0)$, $\bar{f}_3 = (-1,-3,0)$

Перевірка: $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$$C^{-1} \cdot \mathrm{A}\varphi \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отримана матриця має жорданову форму, а отже, канонічний базис знайдено вірно.

Приклад 2:

$$\mathrm{A}\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

1. Характеристичне рівняння

$$\left| A_\varphi - \lambda E \right| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 8 \\ 3 & -1-\lambda & 6 \\ -2 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^3 = 0.$$

2. Власне значення $\lambda = -1$. Його алгебраїчна кратність дорівнює 3.

Вводимо в розгляд оператор $\tilde{\varphi} = \varphi - \lambda\varepsilon = \varphi + \varepsilon$. Його матриця

$$\tilde{A} = A_{\tilde{\varphi}} = A_\varphi - \lambda \mathrm{E} = A_\varphi + E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо геометричну кратність власного значення $\lambda = -1$. Ранг матриці $A_{\tilde{\varphi}}$ дорівнює 1, а отже, шукана геометрична кратність дорівнює

$$\dim V - rang A_{\tilde{\varphi}} = 3 - 1 = 2.$$

3. Знаходимо $\mathrm{M}_1 = Ker \tilde{\varphi}^1$. Для цього шукаємо фундаментальний розв'язок системи лінійних рівнянь $\tilde{A} \cdot X = \theta$. Матрицю $\tilde{A}$ за допомогою елементарних перетворень приводимо до ступінчатого вигляду

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 1/4 \\ \cdot 1/3 \\ \cdot 1/2 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -1 \\ +I \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо, що $\begin{cases} x_1 = -2x_3, \\ x_2 - довільне. \end{cases}$

Фундаментальна система розв'язків цієї системи складається з двох векторів $\bar{a}(-2,0,1)$ та $\bar{b}(0,1,0)$. Таким чином,

$$\mathrm{M}_1 = \ker \varphi^1 = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle .$$

Знаходимо $\mathrm{M}_2 = Ker\tilde{\varphi}^2$.

$$A_{\tilde{\varphi}^2} = A_{\tilde{\varphi}}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $\tilde{\varphi}^2$ - це нульовий оператор, а отже,

$$\mathrm{M}_2 = Ker\tilde{\varphi}^2 = V = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle .$$

4. Підпростір $K_1 = \tilde{\varphi}^0(M_1) = \varepsilon(M_1) = M_1 = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$.

$K_2 = \tilde{\varphi}(M_2) = \tilde{\varphi}(V) = \langle \tilde{\varphi}(e_1), \tilde{\varphi}(e_2), \tilde{\varphi}(e_3) \rangle$.

$$\tilde{\varphi}(e_1) = A_{\tilde{\varphi}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\varphi}(e_2) = A_{\tilde{\varphi}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{0},$$

$$\tilde{\varphi}(e_3) = A_{\tilde{\varphi}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Позначимо $\bar{c} = (4,3,-2)$. Тоді $\tilde{\varphi}(e_1) = \bar{c}, \tilde{\varphi}(e_2) = \bar{0}, \tilde{\varphi}(e_3) = 2\bar{c}$, а отже, $K_2 = \langle \bar{c} \rangle$.

Оскільки оператор $\tilde{\varphi}^2$ є нульовим, то K_3 вже визначати не треба.

5. Базис K_2 складається з вектора $\bar{c}$. Доповнимо його до базису підпростору K_1. Вектори $\bar{c}$ та $\bar{b}$ лінійно незалежні, належать двовимірному простору K_1, а тому вони і утворюють шуканий базис K_1.

Визначаємо $s(\bar{b}) = 1, \quad s(\bar{c}) = 2$.

6. Беремо вектор $\bar{g}_1 = \bar{b}$. Оскільки $s(\bar{b}) = 1$, то вводимо його в канонічний базис: $\bar{f}_1 = \bar{b} = (0,1,0)$.

Переходимо до наступного елемента базису K_1 - вектора $\bar{g}_1 = \bar{c} = (4,3,-2)$. Оскільки $s(c) = 2$, то потрібно знайти вектор $\bar{g}_2$. Вектор $\bar{g}_2$ визначається з умови $\tilde{\varphi}(g_2) = \bar{g}_1$. Координати вектора $\bar{g}_2$ є розв'язком системи

$$A_{\tilde{\varphi}} X = (4 \quad 3 \quad -2)^t.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & 3 \\ -2 & 0 & -4 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 1/4 \\ \cdot 1/3 \\ \cdot 1/2 \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -I \\ +I \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Звідси маємо, що $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 1, \\ x_2 - \textit{довільне}. \end{cases}$

Взявши $x_2 = x_3 = 0$, отримаємо частинний розв'язок $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$. Таким чином, вважаємо, що $\bar{g}_2 = (1,0,0)$.

Вводимо вектори $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ в жордановий базис, тобто покладаємо, що $\bar{f}_2 = \bar{g}_1 = (4,3,-2)$, $\bar{f}_3 = \bar{g}_2 = (1,0,0)$

Шуканий канонічний базис: $\bar{f}_1 = (0,1,0)$, $\bar{f}_2 = (4,3,-2)$, $\bar{f}_3 = (1,0,0)$.

Перевірка: $C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$C^{-1} \cdot \mathrm{A}\varphi \cdot C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Приклад 3:

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

1. Характеристичне рівняння

$$|A_{\varphi} - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^4 = 0.$$

2. Власне значення $\lambda = 1$. Його алгебраїчна кратність дорівнює 4.

Вводимо в розгляд оператор $\tilde{\varphi} = \varphi - \lambda\varepsilon = \varphi - \varepsilon$. Його матриця

$$\widetilde{A} = A_{\widetilde{\varphi}} = A_{\varphi} - \lambda \mathrm{E} = A_{\varphi} - E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо геометричну кратність власного значення $\lambda = 1$. Ранг матриці $A_{\widetilde{\varphi}}$ дорівнює 2, а отже, шукана геометрична кратність дорівнює

$$\dim V - rang A_{\widetilde{\varphi}} = 4 - 2 = 2.$$

3. Знаходимо $\mathrm{M}_1 = Ker \widetilde{\varphi}^1$. Для цього шукаємо фундаментальний розв'язок системи лінійних рівнянь $\widetilde{A} \cdot X = \theta$. Матрицю $\widetilde{A}$ за допомогою елементарних перетворень приводимо до ступінчатого вигляду

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -IV \\ -IV \\ -IV \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -I \\ \\ \cdot(-1) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \rightarrow II \\ \rightarrow IV \\ \\ \rightarrow I \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо, що $\begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 = x_4. \end{cases}$ Фундаментальна система розв'язків цієї системи складається з двох векторів $\bar{a}(1,1,0,0)$ та $\bar{b}(0,0,1,1)$. Таким чином,

$$\mathrm{M}_1 = \ker \varphi^1 = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle.$$

Знаходимо $\mathrm{M}_2 = Ker \widetilde{\varphi}^2$.

$$A_{\widetilde{\varphi}^2} = A_{\widetilde{\varphi}}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $\widetilde{\varphi}^2$ - це нульовий оператор, а отже

$$\mathrm{M}_2 = Ker \widetilde{\varphi}^2 = V = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4 \rangle.$$

4. Підпростір

$K_1 = \widetilde{\varphi}^0 (M_1) = \varepsilon (M_1) = M_1 = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$,

$K_2 = \widetilde{\varphi} (M_2) = \widetilde{\varphi} (V) = \langle \widetilde{\varphi}(\bar{e}_1), \widetilde{\varphi}(\bar{e}_2), \widetilde{\varphi}(\bar{e}_3), \widetilde{\varphi}(\bar{e}_4) \rangle$.

$$\tilde{\varphi}(e_1) = A_{\tilde{\varphi}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1 & 1\\-1 & 1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix},$$

$$\tilde{\varphi}(e_2) = A_{\tilde{\varphi}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1 & 1\\-1 & 1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\tilde{\varphi}(e_3) = A_{\tilde{\varphi}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1 & 1\\-1 & 1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\tilde{\varphi}(e_4) = A_{\tilde{\varphi}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1 & 1\\-1 & 1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Позначимо $\bar{c} = (1,1,1,1)$, $\bar{d} = (1,1,0,0)$. Тоді $\tilde{\varphi}(e_1) = \bar{c}$, $\tilde{\varphi}(e_2) = -\bar{c}$, $\tilde{\varphi}(e_3) = -\bar{d}$, $\tilde{\varphi}(e_4) = \bar{d}$ а отже $K_2 = \langle \bar{c}, -\bar{c}, -\bar{d}, \bar{d} \rangle = \langle \bar{c}, \bar{d} \rangle$.

Оскільки оператор $\tilde{\varphi}^2$ є нульовим, то K_3 вже визначати не треба.

5. Оскільки простір K_2 двовимірний, і K_2 є підпростором двовимірного простору K_1, то це означає, що $K_2 = K_1$. Отже, базис $\{\bar{c}, \bar{d}\}$ простору K_2 є базисом K_1.

Визначаємо $s(\bar{c}) = s(\bar{d}) = 2$.

6. Беремо вектор $\bar{g}_1 = \bar{c}$. Так як $s(\bar{c}) = 2$, то потрібно знайти вектор $\bar{g}_2$. Вектор $\bar{g}_2$ визначається з умови $\tilde{\varphi}(\bar{g}_2) = \bar{g}_1 = (1,1,1,1)$. Координати вектора $\bar{g}_2$ є розв'язком системи

$$A_{\tilde{\varphi}}X = (1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1)^t.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 1 & -1 & 1 & 1\\-1 & 1 & -1 & 1 & 1\\-1 & 1 & 0 & 0 & 1\\-1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}-IV\\-IV\\-IV\\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c}0 & 0 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -II\\ \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c}0 & 0 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Звідси маємо, що $\begin{cases} x_2 = x_1 + 1, \\ x_4 = x_3. \end{cases}$

Взявши $x_1 = x_3 = 0$, отримаємо частинний розв'язок $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$. Таким чином, вважаємо, що $\bar{g}_2 = (0,1,0,0)$.

Вводимо вектори $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ в жордановий базис, тобто покладаємо, що $\bar{f}_1 = \bar{g}_1 = (1,1,1,1)$, $\bar{f}_2 = \bar{g}_2 = (0,1,0,0)$.

Беремо вектор $\bar{g}_1 = \bar{d}$. Так як $s(\bar{d}) = 2$, то потрібно знайти вектор $\bar{g}_2$. Вектор $\bar{g}_2$ визначається з умови $\tilde{\varphi}(\bar{g}_2) = \bar{g}_1 = (1,1,0,0)$. Координати вектора $\bar{g}_2$ є розв'язком системи

$$A_{\tilde{\varphi}} X = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^t .$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} -IV \\ -IV \\ -IV \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -II \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Звідси маємо, що $\begin{cases} x_2 = x_1, \\ x_4 = x_3 + 1. \end{cases}$

Взявши $x_1 = x_3 = 0$, отримаємо частинний розв'язок $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1$. Таким чином, вважаємо, що $\bar{g}_2 = (0,0,0,1)$.

Вводимо вектори $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ в жордановий базис, тобто покладаємо, що $\bar{f}_3 = \bar{g}_1 = (1,1,0,0)$, $\bar{f}_2 = \bar{g}_2 = (0,0,0,1)$.

Шуканий канонічний базис: $\bar{f}_1 = (1,1,1,1)$, $\bar{f}_2 = (0,1,0,0)$, $\bar{f}_3 = (1,1,0,0)$, $\bar{f}_4 = (0,0,0,1)$.

Перевірка: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$C^{-1} \cdot \mathrm{A}\varphi \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Після опанування студентами цього матеріалу можна перейти до задач про знаходження жорданового базису довільного оператора. Алгоритм і приклади до цієї теми автори планують викласти у своїй наступній статті.

ЛІТЕРАТУРА

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры/ Александров П.С. - М.:Наука. 1979. - 505с.
2. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре.— 5-е изд., испр.— М.: Добросвет, 1998.—320 с.
3. Ильин В.А. Линейная алгебра/ В.А.Ильин, Э.Г. Позняк - М.: Наука, 1984.
4. Кострикин А. И. Введение в алгебру/. Кострикин А. И. – Ч. II: Линейная алгебра: Учеб. для вузов. — М.: Физико-математическая литература, 2000. — 368 с.
5. Кострикин А.И. Линейная алгебра и геометрия/ А.И.Кострикин, Ю.И. Мании. - М.: Наука,1986.
6. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре/ Проскуряков И.В. - М.: Наука, 1974. - 384с.
7. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре: Учеб. пособ. для вузов/ Фаддеев Д.К. - М.:Наука, 1984. - 416с.