УДК 539.3
DOI https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-16

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ ЦИЛІНДРА ТА ШАРУ, ЯКИЙ ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНИЙ ІЗ НЕДЕФОРМОВАНОЮ ОСНОВОЮ

Ярецька Н. О.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри вищої математики та комп’ютерних застосувань
Хмельницький національний університет
вул. Інститутська, 11, Хмельницький, Україна
orcid.org/0000-0002-3726-2878
iaretskan@gmail.com

Ключові слова: *початкові (залишкові) напруження, штамп, шар, лінеаризована теорія пружності, гармонічний потенціал.*

Стаття присвячена дослідженню контактної взаємодії попередньо напруженого циліндричного штампа на шар із початковими напруженнями без врахування сил тертя. Також робиться припущення, що шар жорстко закріплений із недеформованою основою. Задачу розв’язано у випадку рівних коренів визначального рівняння. Дослідження представлено в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій у рамках лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу. Припускається, що початкові стани пружного циліндричного штампа, пружного шару та основи однорідні та рівні. Дослідження проводиться в координатах початкового деформованого стану, які пов’язані з лагранжевими координатами (природного стану). Крім того, вплив циліндричного штампа спричиняє невеликі збурення відповідних величин основного напружено-деформованого стану. Також передбачається, що пружний циліндричний штамп та пружний шар виготовлені з різних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композиційних матеріалів. Наведені загальні розв’язки основних диференціальних рівнянь лінеаризованої теорії пружності у випадку осесиметричної деформації для скінченної циліндричної області. Задовільнення граничних умов приводить задачу до парних інтегральних рівнянь, які зводяться до інтегрального рівняння типу Фредгольма другого роду. У результаті поставлена задача представлена у вигляді нескінченних рядів, коефіцієнти яких визначаються з нескінченної регулярної системи алгебраїчних рівнянь. Вивчено вплив початкових (залишкових) напружень у шарі та циліндрі на розподіл контактних напружень в області контакту. У випадку рівних коренів для потенціалу гармонічного типу наведено результати чисельного аналізу, що подані у вигляді графіків, які ілюструють доволі значний вплив початкових напружень. Отже, вплив початкових напружень на напружено-деформований стан пружного циліндра, що втискається у пружний шар, полягає у тому, що початкові напруження в шарі призводять у випадку стиснення до зменшення напружень у пружному штампі, а у випадку розтягу – до їх збільшення, а для переміщень – навпаки.

CONTACT PROBLEM FOR PRE-STRESSED CYLINDER AND LAYER, WHICH IS RIGIDLY FIXED WITH THE UNDEFORMED BASIS

Yaretska N. A.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Higher Mathematics and Computer Applications
Khmelnytskyi National University
Institutska str., 11, Khmelnytskyi, Ukraine
orcid.org/0000-0002-3726-2878
iaretskan@gmail.com

Key words: *initial (residual) stresses, punch, layer, the linearized theory of elasticity, the harmonic potential.*

The article is devoted to the study of the contact interaction of a prestressed cylindrical punch on a layer with initial stresses without friction forces. It is also assumed that the layer is rigidly fixed with an undeformed base. The problem is solved in the case of equal roots of the defining equation. The study is presented in general for the theory of large initial deformations and two variants of the theory of small initial deformations within the framework of the linearized theory of elasticity with an arbitrary structure of elastic potential. It is assumed that the initial states of the elastic cylindrical punch, the layer and the base are homogeneous and equal. The study is carried out in the coordinates of the initial deformed state, which are associated with Lagrangian coordinates (natural state). In addition, the influence of the cylindrical punch causes small perturbations of the corresponding values of the basic stress-strain state. It is also assumed that the elastic cylindrical punch and the elastic layer are made of different isotropic, transversely isotropic or composite materials. The general solutions of the basic differential equations of the linearized theory of elasticity in the case of axisymmetric deformation for a finite cylindrical domain are given. Satisfaction of boundary conditions leads the problem to paired integral equations, which are reduced to the Fredholm integral equation of the second kind. As a result, the problem is presented in the form of infinite series, the coefficients of which are determined from an infinite regular system of algebraic equations. The influence of initial stresses in the layer and the cylinder on the distribution of contact stresses in the contact region is studied. In the case of equal roots for the harmonic potential, the results of numerical analysis are given, which are presented in the form of graphs that illustrate a fairly significant effect of the initial stresses. So, influence of initial stresses on the stress-strain state of an elastic cylinder punch, is that the initial stress in the layer in the case of compression reduce the stress in the elastic punch, and in the case of stretching increase it.

Вступ. Контактні задачі є важливим розділом механіки деформованого твердого тіла і формують теоретичну основу для розрахунків на контактну міцність, жорсткість і зносостійкість рухомих і нерухомих з'єднань.

Прикладні потреби природознавства, сучасної техніки і новітніх технологій, пов'язані з необхідністю прогнозування контактного поведінки різних конструкцій, стимулювали в останні десятиліття розвиток різних математичних моделей і методів контактної механіки тіл із різними властивостями.

Аналіз стану проблеми. Проблема контактної взаємодії попередньо напружених тіл є актуальна і важлива як для розвитку фундаментальних досліджень із механіки твердого деформованого тіла, так і для застосування в різних галузях промисловості. А успішному розв'язанню задач, пов'язаних із контактною взаємодією деформованих тіл, великою мірою допомагають широкі наукові дослідження. Тому їх розв'язання викликає велику увагу науковців усього світу.

Методи, що розвиваються теорією контактних задач, дають змогу знайти розподіл тиску в місцях контакту, вивчити концентрацію напружень та дослідити напружено-деформівний стан у тілах та ін. Але незважаючи на досягнення, все ще залишається недостатньо розробленою проблема контактної взаємодії попередньо напруженого циліндричного штампа та шару, що жорстко закріплений із недеформованою основою без врахування сил тертя.

Детальний огляд задач, що враховують початкові (залишкові) напруження, представлені в роботах [1–3]. Причому в перших роботах із контактної взаємодії тіл із початковими напруженнями розглядаються або пружні потенціали конкретної структури [4], або задача ставиться в загальному вигляді для стисливих (нестисливих) тіл із потенціалом довільної структури на основі лінеаризованої теорії пружності [1; 2]. Роботи з контактної взаємодії тіл із початковими напруженнями присвячені взаємодії попередньо напружених тіл із жорсткими та пружними штампами без початкових напружень [5].

Задача про тиск циліндричного штампа на шар, коли він лежить на жорсткій основі без тертя представлена в статті [6].

Загальний аналіз основних методів і найбільш відомих результатів у багатьох напрямах контактної взаємодії тіл із початковими (залишковими) напруженнями представлений в оглядових статтях [3; 7].

Є також низка інших узагальнюючих публікацій із лінеаризованої механіки, які повністю або частково пов'язані з тематикою цієї статті [8; 9].

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є розв'язок контактної задачі про тиск пружного циліндричного штампа з початковими напруженнями на пружний шар із початковими напруженнями, що жорстко закріплений із недеформованою основою. Дослідження проводиться в межах лінеаризованої теорії пружності в загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Припускаємо, що початкові напружено-деформовані стани в циліндрі, шарі та основі є однорідними та рівними, а пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовані функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [1].

Для дослідження вводимо лагранжеві координати (x_1, x_2, x_3), які початковому стані збігаються з декартовими координатами (y_1, y_2, y_3). Причому $y_i = \lambda_i x_i \quad (i=\overline{1,3})$, де $\lambda_i \quad (i=\overline{1,3})$ – коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану. Матеріали штампа, шару та основи вважаються ізотропними стисливими або нестисливими. У випадку ортотропних матеріалів приймається, що пружно-еквівалентні напрямки збігаються з напрямами осей координат.

Усі величини, які належать до пружного циліндра, позначаються верхнім індексом «(1)», шару – «(2)», а основи – «(3)».

Розглянемо пружний циліндричний штамп радіуса R і висотою H із початковими напруженнями, що втискається у пружний шар під дією сили P після виникнення там початкового деформованого стану. Товщина шару в початковому деформованому стані пов'язана з товщиною в недеформованому стані відношенням $h_1 = \lambda_3 h_2$. Будемо рахувати, що зовнішнє навантаження прикладене тільки до вільного торця пружного штампа, під дією якого всі точки штампа переміщаються в напрямі осі симетрії y_3 на одну і ту саму величину ε. Вважатимемо, що поверхні поза ділянкою контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а в зоні контакту відсутнє тертя, а переміщення та напруження – неперервні.

Припустимо, що початковий стан тіл – однорідний, і виконуються співвідношення [1]:

$$y_m = x_m + U_m^0,\ U_m^0 = \delta_{mi}(\lambda_m - 1)\lambda_i^{-1} y_i\ .\ (i,\ m = 1,2,3)$$

Тоді основне рівняння в переміщеннях для стисливих тіл має вигляд формул

$$L'_{m\alpha} U_\alpha = 0,\ \ L'_{m\alpha} = \omega'_{ij\alpha\beta}\, \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta\ ,\ (i,\ m,\ \alpha,\ \beta = \overline{1,\ 3}) \quad (1)$$

а для нестисливих тіл разом із умовою нестисливості:

$$L'_{m\alpha} U_\alpha + q'_{\alpha m}\, \partial p' / \partial y_\alpha = 0,\ L'_{m\alpha} = \kappa'_{im\alpha\beta}\, \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta\ , \quad (2)$$

$$q'_{ij}\, \partial U_j / \partial y_i = 0,\ q'_{ij} = \lambda_i q_{ij},\ (i, j, m, \alpha, \beta = \overline{1,\ 3}).$$

Вирази для визначення складників тензора напружень для стисливих і нестисливих тіл запишемо у вигляді:

$$Q'_{ij} = \omega'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial \acute{o}_\beta},\ Q'_{ij} = \kappa_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial \acute{o}_\beta} + q'_{ij}\, p,$$

$$\omega'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \omega_{ij\alpha\beta},\ \kappa'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \kappa_{ij\alpha\beta}\ ,$$

При однорідних початкових напруженнях $S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0;\ \ S_0^{33} = 0;\ \ \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ розв'язки рівнянь (1), (2) представимо через циліндричні координати (r, θ, z_i) у вигляді розв'язків рівняння:

$$(\Delta_1 + \xi_2'^2\, \partial^2 / \partial y_3^2)(\Delta_1 + \xi_3'^2\, \partial^2 / \partial y_3^2)\tilde{\chi} = 0\ , \quad (3)$$

де $\Delta_1 = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1}\, \partial / \partial r$.

Враховуючи умову існування єдиного розв'язку лінеаризованої теорії пружності для стисливих і нестисливих тіл [1], можливі два варіанти представлення загального розв'язку (3): випадок рівних коренів $(\xi_2'^2 = \xi_3'^2)$ та випадок нерівних коренів $(\xi_2'^2 \neq \xi_3'^2)$. У цій статті обмежимося випадком рівних коренів рівняння (3), тобто:

$$\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + y_3 \tilde{\chi}_2,\ \left(\Delta_1 + \xi_2'^2\, \partial^2 / \partial y_3^2\right)\tilde{\chi}_1 = 0,\ \ \left(\Delta_1 + \xi_2'^2\, \partial^2 / \partial y_3^2\right)\tilde{\chi}_2 = 0 \quad (4)$$

У системі кругових циліндричних координат (r, θ, z_i), де $z_i = v_i^{-1} y_3$, $v_i = \sqrt{n_i}$, $(i = \overline{1,\ 2})$, $n_1 = \xi_2'^2,\ n_2 = \xi_3'^2$, такій постановці відповідають граничні умови:

1) На торці циліндра $z_i = Hv_i^{-1}$, де $v_i = \sqrt{n_i}$, $(i = \overline{1,\ 2})$:

$$u_3'^{(1)} = -\varepsilon, \quad Q_{3r}'^{(1)} = 0, \quad (0 \le r \le R) \tag{5}$$

2) На межі пружного шару в ділянці контакту $z_i = 0$, $(i = \overline{1,\ 2})$:

$$u_3'^{(1)} = u_3'^{(2)}, \quad Q_{33}'^{(1)} = Q_{33}'^{(2)}, \quad Q_{3r}'^{(1)} = Q_{3r}'^{(2)} = 0, \quad (0 \le r \le R) \tag{6}$$

3) На межі пружного шару поза ділянкою контакту $z_i = 0$, $(i = \overline{1,\ 2})$:

$$Q_{33}'^{(2)} = 0, \quad Q_{3r}'^{(2)} = 0, \quad (R \le r < \infty) \tag{7}$$

4) На боковій поверхні пружного штампу $r=R$:

$$Q_{rr}'^{(1)} = 0, \quad Q_{3r}'^{(1)} = 0, \quad (0 \le z_i \le Hv_i^{-1}) \tag{8}$$

5) На нижній поверхні шару,

$$z_i = -\lambda_3 h_2 v_i^{-1} = -Hv_i^{-1}, \ (i = \overline{1,\ 2}):$$

$$u_3'^{(2)} = 0, \quad u_r'^{(2)} = 0, \quad (0 \le r < \infty); \tag{9}$$

Умова рівноваги

$$P = -2\pi R^2 \int_0^1 \rho Q_{33}^{(2)}(0,\rho)d\rho, \tag{10}$$

що встановлює зв'язок між осіданням торця і рівнодіючою навантаження P.

Метод розв'язку. За допомогою методів розділення змінних (метод Фур'є) випишемо загальний розв'язок для скінченного циліндричного штампа з початковими напруженнями для рівних коренів n_1=n_2, які виражаються через нескінченну систему констант:

$$\tilde{\chi} = (1 + v_1 z_1)\left[A_0 z_1 + B_0 + C_0 z_1\left(3r^2 - 2z_1^2\right)\right] +$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(A_k + v_1 z_1 B_k\right) I_0(\gamma_k v_1 r) S_1(\gamma_k z_1 v_1) + J_0(\alpha_k r)\left(S_2(\alpha_k z_1) + v_1 z_1 S_3(\alpha_k z_1)\right)\right]$$

де $S_1 = C_k \sin(\gamma_k v_1 z_1)$, $S_2 = E_k \mathrm{sh}(\alpha_k z_1) + F_k \mathrm{ch}(\alpha_k z_1)$, $S_3 = N_k \mathrm{sh}(\alpha_k z_1) + M_k \mathrm{ch}(\alpha_k z_1)$, A_0, B_0, C_0, A_k, B_k, C_k, F_k, E_k, N_k, M_k – коефіцієнти, які визначаються із граничних умов (5)–(9).

Напружено-деформований стан у попередньо напруженому шарі, врахувавши (5)–(9), представимо, наприклад, для рівних коренів у вигляді:

$$u_3^{(2)} = \theta_3\left(\int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta\rho)d\eta - \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} G(\eta h) J_0(\eta\rho)d\eta\right),$$

$$Q_{33}^{(2)} = \theta_1 \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta\rho)d\eta, \ \ Q_{3r}^{(2)} = 0, \tag{11}$$

де

$$\theta_1 = C_{44} l_1 (1 + m_1)\kappa, \ h = h_1 / R, \ \theta_3 = \frac{m_1}{v_1}(s_1 - s_0),$$

$$s_0 = \frac{(1 + m_2)}{(1 + m_1)}, \ s_1 = \frac{m_1 - 1}{m_1}.$$

У (11) введено позначення

$$F(\eta) = \eta^3 B_2 R^{-3} (1 - G(\eta))^{-1}.$$

А функції $G(\eta)$ та κ матимуть вигляд:

$$G(t) = \left(1 - t + 0,5\kappa t^2 cht + (1 - s_1)sht\right)P(t), \quad \kappa = (s_0 - s_1)(1 - s) - (1 - s_0)(s_1 - s),$$

$$P(t) = 1 + 0,5\kappa t^2 + \kappa(1 - s_1)(s_0 - s)cht, \quad t = h\eta v_1^{-1}.,$$

де $s = s_0 l_2 l_1^{-1}$.

Для випадку рівних коренів введемо нові величини χ_k $(k = 0, 1, 2,...)$,

$$\int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\eta)d\eta = -\frac{8\varepsilon E}{\kappa\theta_2 lR}\chi_0, \quad \chi_k = -\frac{\mu_k N_k}{\varepsilon R}.$$

через які виразимо усі невідомі коефіцієнти в шарі, штампі та основі, що залежать від вигляду пружного потенціалу.

З умов неперервності напружень та переміщень (5), (6) у зоні контакту та поза нею випишемо парні інтегральні рівняння щодо функції $F(\eta)$:

$$\int_0^\infty F(\eta)\eta^{-1} J_0(\eta\rho)d\eta = f(\rho), \ (\rho < 1),$$

$$\int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta\rho)d\eta = 0, \ (\rho > 1),$$

де

$$f(\rho) = -\varepsilon\theta_3^{-1}\left(1 - \chi_0 - 2(m_2 - 1)\frac{R^2}{\theta_2}\chi_0\rho + \right.$$
$$\left. +\theta_4 \sum_{k=1}^\infty \chi_k J_0(\mu_k\rho) + +0,5(m_2 - 1)R^2 \sum_{k=1}^\infty b_1^{(k)} \chi_k I_0(\gamma_k v_1 R\rho)\right)$$
$$+\int_0^\infty \eta^{-1} F(\eta) G(\eta h) J_1(\eta\rho)d\eta$$

де

$$\theta_3 = m_1(s_1 - s_0)v_1^{-1},$$

$$\theta_2 = E\left(8m_1(1 + H)n_1^{-1} - 4Hv_1^{-1} + (1 - m_2)R^2 H^{-1}\right),$$

$$\theta_4 = (v_1(m_2 - 1) - m_1 s_0)n_1^{-1},$$

$b_1^{(k)}$ – виражаються із граничних умов (5)–(9), $J_0(\mu_k\rho)$, $I_0(\gamma_k v_1\rho)$ – функції Бесселя.

Використовуючи формулу звернення [1], матимемо інтегральні рівняння типу Фредгольма 2-го роду стосовно функції $F(\eta)$, які представлені співвідношеннями для рівних коренів:

$$\frac{F(\eta)}{\eta} = -\frac{2\varepsilon}{\pi\theta_3}\left((1 - \chi_0)\psi_0(\eta, 0) - 2(m_2 - 1)\frac{R^2}{\theta_2}\chi_0\psi_1(\eta, 0) + \theta_4 \sum_{k=1}^\infty \chi_k \psi_0(\eta, \mu_k) + \right.$$
$$\left. +0,5(m_2 - 1)R^2 \sum_{k=1}^\infty b_1^{(k)} \chi_k \psi_0(\eta, i\gamma_k v_1 R)\right) +$$
$$+2\pi^{-1}\int_0^\infty u^{-1} F(u) G(uh) \psi_0(\eta, u)du \tag{12}$$

де $\psi_n(x, y) = \int_0^1 t^n \cos xt \cos ytdt$.

Розв'язок (12) шукаємо методом послідовних наближень у вигляді:

$$F(\eta) = \sum_{k=0}^\infty F^{(k)}(\eta). \tag{13}$$

Зазначимо, що процес послідовних наближень (13) збіжний при $\lambda_1 > \lambda_{kp}$.

Використовуючи граничні умови (5) – (9) та ортогональність бесселевих функцій, отримаємо нескінченну квазірегулярну систему лінійних рівнянь:

$$\vartheta_k \chi_k + \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_{kn} \chi_n = \varpi_k \quad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots). \qquad (14)$$

Таким чином, задача зведена до визначення постійних χ_k (k = 0, 1, 2,...), через які виражаються характеристики напружено-деформованого стану пружного шару, циліндра та основи з початковими напруженнями.

Зв'язок між осадом торця штампа та рівнодіючою навантаження P для рівних коренів, відповідно, матиме вигляд:

$$P = 8\pi\varepsilon E \theta_1 (\kappa\theta_2 l R)^{-1} \chi_0,$$

де $\theta_5 = (v_2 + v_1 s) n_1 n_2 ((m_1 v_2^3 + m_2 v_1^3) E)^{-1}$, $l = H \,/\, R$.

При обчисленні компонентів напружено-деформованого стану для шару і основи більшість інтегралів у кінцевому вигляді не обчислюються, враховуючи складність функції $G(t)$. Тому, починаючи із другого наближення функції (13), підінтегральні вирази розкладаємо в ряди за степенями h^{-i} (i=1, 2,...). Тоді компоненти переміщень та напружень у внутрішніх точках шару з початковими напруженнями матимуть вигляд:

$$u_r'^{(2)} = \varepsilon(\pi\theta_3)^{-1} \tilde{T}^1(\Omega_+^3; S_1^1; N_0^1; K_0^1; 1),$$

$$u_3'^{(2)} = m_1 \varepsilon(\pi\theta_3 v_1)^{-1} \tilde{T}^1(\Omega_-^3; S_1^0; N_0^0; K_0^0; \mathrm{s}_1),$$

$$Q_{33}'^{(2)} = (1 + m_1)\varepsilon l_1 C_{44} (\pi\theta_3 R)^{-1} \tilde{T}^1(\Omega_+^3; S_2^0; N_1^0; K_1^0; s),$$

$$Q_{3r}'^{(2)} = -(1 + m_1)\varepsilon C_{44} (\pi\theta_3 R v_1)^{-1} \tilde{T}^1(\Omega_-^3; S_2^1; N_1^1; K_1^1; s_0),$$

де

$$\tilde{T}^1(\Omega_\pm^l; S_{m_1}^n; N_{m_2}^n; K_{m_3}^n; \mathrm{k}; \mathrm{a}) = (1 + a_0)\Big\langle (1 - \chi_0) \cdot \Omega$$

$$\left(S_{m_1}^n; 0; \mathrm{k}; \mathrm{a}; 0\right) - \frac{\theta_3}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{**} \Omega_\pm^l \left(S_{j+m_1}^n; 0; \mathrm{k}; \mathrm{a}; 0\right) -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \Omega_\pm^l \left(K_{m_3}^n; \mu_k; \mathrm{k}; \mathrm{a}; 0\right) - \frac{2(m_2 - 1)R^2}{\theta_2} \chi_0 \Omega_\pm^l \left(N_{m_2}^n; 0; \mathrm{k}; \mathrm{a}; 0\right) +$$

$$+\theta_4 \frac{(m_2 - 1)R^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_1^{(k)} \chi_k \Omega_\pm^l \left(K_{m_3}^n; i\gamma_k v_1 R; \mathrm{k}; \mathrm{a}; 0\right)\Big\rangle +$$

$$+\sum_{\tau=1}^{\infty} a_\tau \Big\langle (1 - \chi_0) \Omega_\pm^l \left(S_{m_1}^n; 0; \mathrm{k}; \mathrm{a}; v_1\tau\right) -$$

$$-\frac{\theta_3}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{**} \Omega_\pm^l \left(S_{j+m_1}^n; 0; \mathrm{k}; \mathrm{a}; v_1\tau\right) - \frac{2(m_2 - 1)R^2}{\theta_2} \chi_0 \Omega_\pm^l \left(N_{m_2}^n; 0; \mathrm{k}; \mathrm{a}; v_1\tau\right) +$$

$$+\theta_4 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \Omega_\pm^l \left(K_{m_3}^n; \mu_k; \mathrm{k}; \mathrm{a}; v_1\tau\right) + \frac{(m_2 - 1)R^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_1^{(k)} \chi_k \Omega_\pm^l \left(K_{m_3}^n; i\gamma_k v_1 R; \mathrm{k}; \mathrm{a}; v_1\tau\right)\Big\rangle$$

$$\Omega_\pm^3(\hat{\mathrm{L}}_m^n, \mu, \mathrm{k}, \theta) = (A_1^{02} - s_0)\hat{\mathrm{L}}_m^n\left(\rho, \mu, z_1 R^{-1} - \theta\right) +$$

$$\left(A_1^{12} - 2k\right)\hat{\mathrm{L}}_m^n\left(\rho, \mu, 2h_1(Rv_1)^{-1} + z_1 R^{-1} - \theta\right) +$$

$$+\left(A_1^{22} - 2k\right)\hat{\mathrm{L}}_{m+1}^n\left(\rho, \mu, 2h_1(Rv_1)^{-1} + z_1 R^{-1} - \theta\right) \pm$$

$$\left(A_1^{02} + s_0 - 2k\right)\hat{\mathrm{L}}_m^n\left(\rho, \mu, -z_1 R^{-1} - \theta\right) \pm 2z_1 R^{-1} \hat{\mathrm{L}}_{m+1}^n\left(\rho, \mu, -z_1 R^{-1} - \theta\right) \pm$$

$$\pm\left(A_1^{12} - 2k\right)\hat{\mathrm{L}}_m^n\left(\rho, \mu, 2h_1(Rv_1)^{-1} - z_1 R^{-1} - \theta\right) \pm \ A \quad + \ z\ R$$

$$\pm (A_1^{22} + 2z_1 R^{-1})\hat{\mathrm{L}}_{m+1}^n\left(\rho, \mu, 2h_1(Rv_1)^{-1} - z_1 R^{-1} - \theta\right),$$

$$\hat{\mathrm{L}}_m^n(\mathrm{t}, 0, \mathrm{u}) = \hat{\mathrm{L}}_m^n(\mathrm{t}, \mathrm{u}),\ A_1^{02} = s_0(s_0 - s_1)(s_0 + s_1)^{-1}, \qquad 2 \quad (\qquad)($$

$$A_1^{12} = 2s_0(s_0 - s_1)(s_0 + 2s_1)(s_0 + s_1)^{-2},\ A_1^{22} = h_1(s_0 v_1 R)^{-1} A_1^{12},$$

$$S_n^m(\rho; z) = \int_0^\infty \eta^{n-2} \sin\eta\, e^{-z\cdot\eta} J_m(\eta\rho)\, d\eta,$$

$$K_n^m(\rho; \mu_k; z) = \int_0^\infty \eta^n \psi_0(\eta, \mu_k) e^{z\cdot\eta} J_m(\eta\rho)\, d\eta,$$

$$N_n^m(\rho; z) = \int_0^\infty \eta^n \psi_1(\eta, 0) e^{z\cdot\eta} J_m(\eta\rho)\, d\eta,$$

C_j^{**} – коефіцієнти розкладу у ряд $F(\eta)$.

Результати дослідження. Вплив початкових напружень на закон розподілу контактних напружень для задачі про тиск пружного циліндричного штампа на шар із початковими напруженнями у випадку гармонічного потенціала зображується на рис. 1.

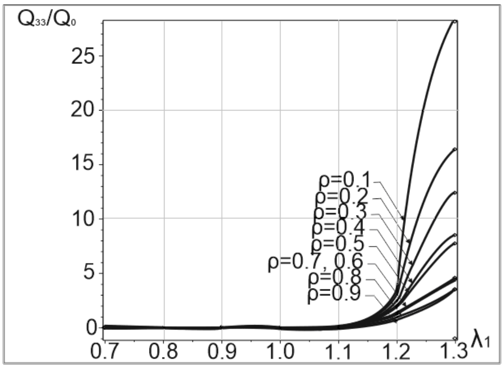

Рис. 1. Вплив початкових напружень на нормальний закон розподілу

З рис. 1 видно, що при розтягненні (λ_1>1) помічається більший вплив початкових напружень, ніж при стиску (λ_1<1).

З отриманих розв'язків за допомогою граничного переходу у випадку гармонічного потенціала можна отримати кілька часткових випадків:

1) при λ_1=1 отримаємо розв'язок задачі про тиск пружного циліндричного штампа на шар без початкових напружень [5];

2) при h→∞ отримаємо розв'язок задачі про тиск пружного циліндричного штампа на півпростір із початковими напруженнями [5] та ще кілька часткових випадків:

2.1) задача опору матеріалів про стиснення кругового стержня. У цьому випадку v→-1, χ_0=1, χ_k=0 (k=1,2,..).

$$U_r'^{(1)} = \frac{RP\rho}{2\pi C_{44} l_1 (1 + m_1)}, \quad U_3'^{(1)} = -\frac{m_1 P y_3}{\pi C_{44} l_1 (1 + m_1)},$$

$$Q_3'^{(1)} = -\frac{P}{\pi R^2}, \quad Q_{3r}'^{(1)} = 0, \quad Q_{rr}'^{(1)} = 0.$$

2.2) Задача про тиск жорсткого циліндричного штампа без тертя на пружний півпростір із початковими напруженнями [10]. У цьому випадку $\nu \to -1$, $B_k = 0$ ($k=0,1,2,..$)

$$Q_3'^{(2)} = \frac{8\varepsilon C_{44} l_1 (1+m_1)}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}, \quad \rho < 1; \quad Q_{33}'^{(2)} = 0, \quad \rho > 1;$$

$$U_3'^{(2)} = -\varepsilon, \quad \rho < 1; \quad U_3'^{(2)} = -\frac{2\varepsilon}{\rho}\arcsin\frac{1}{\rho}, \quad \rho > 1;$$

$$U_r'^{(2)} = -\frac{2\nu_1\varepsilon\rho}{m_1\pi(s_0 - s_1)(1+\sqrt{1-\rho^2})}, \quad \rho < 1;$$

$$U_r'^{(2)} = -\frac{2\nu_1\varepsilon}{m_1\pi(s_0 - s_1)\rho}, \quad \rho > 1.$$

2.3) Задачу про тиск пружного циліндричного скінченного штампа на півпростір без початкових напружень [5] отримаємо, зробивши заміну

$$\lambda_1 = 1, \; C_{44} l_1 (1+m_1)(s - s_0) = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \; m_1(s_0 - s_1) = \frac{2(\nu - 1)}{(1-2\nu)}.$$

3) При $\nu \to -1$ отримаємо розв'язок задачі про тиск жорсткого циліндричного штампа на шар із початковими напруженнями [11], якщо $\lambda_1 = 1$, то отримаємо результати праці [12].

Висновки. Вплив початкових напружень на напружено-деформований стан пружного циліндричного штампа, пружного шару, що жорстко з'єднаний із недеформованою основою, полягає в тому, що початкові напруження в шарі призводять у разі стиснення до зменшення напружень у пружному штампі, а у разі розтягу – до їх збільшення.

Тобто наявність попередньо напруженого стану під час контактної взаємодії пружних циліндра, шару та основи дає змогу регулювати контактні напруження та переміщення при розрахунках конструкцій на міцність. Причому для контактних напружень небезпечними є початкові напруження у випадку розтягнення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактна взаємодія тіл з початковими напруженнями : навч. посібник. Київ : Вища школа, 1995. 304 с.
2. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряженими : монография. Германия : Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.
3. Guz A.N., Babich S.Y., Rudnitskii V.B. Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research. *Int. Appl. Mech. Rew*. 1998. Vol. 51, No5. P. 343–371. https://doi.org/10.1115/1.3099009
4. Александров В.М., Арутюнян Н.Х. Контактные задачи для преднапряженных деформируемых тел. *Прикл. механика*. 1984. Т. 20, № 3. С. 9–16. https://doi.org/10.1007/BF00883134
5. Грилицкий Д.В., Кизыма Я.М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости : науч. пособие. Львов : Вища шк., 1981. 136 с.
6. Yaretskaya N.A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *International Applied Mechanics.* 2014. Vol. 50, No 4. P. 378–388. https://doi.org/10.1007/s10778-014-0641-y.
7. Babich S.Yu., Guz A.N., Rudnitsky V.B. Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches. *Int. Appl. Mech*. 2004. Vol. 40, No 7. P. 744–765. https://doi.org/10.1023/B:INAM.0000046219.34646.4e.
8. Yaretskaya N. A. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 2018. Vol. 54, No 5. P. 539–543. https://doi.org/10.1007/s10778-018-0906-y.
9. Дихтярук Н.Н., Ярецкая Н.А. Контактные задачи для одной и двух предварительно напряжённых полос, усиленных бесконечным стрингером. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2019. № 1. С. 49–57. https://doi.org/10.26661/2413-6549-2019-1-07.
10. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании : науч. пособие. Москва : Физматгиз, 1960. 490 с.
11. Бабич С.Ю. Осесимметричная контактная задача слоя на упругом полупространстве с начальными напряжениями. *Прикл. механика*. 1985. Т. 21, № 11. С. 32–36.
12. Ворович И.И., Устинов Ю.А. О давлении штампа на слой конечной толщины. *Прикладная математика и механика.* 1959. Т. 21, № 3. С. 445–454.

REFERENCES

1. Ghuzj O. M., Babych S. Ju., Rudnycjkyj V. B. (1995) *Kontaktna vzajemodija til z pochatkovymy napruzhennjamy* [Contact Interactoin of Prestressed Bodies]. Kyjiv: Vyshha shkola. (in Ukrainian)
2. Guz' A. N., Babich S. Yu., Glukhov Yu. P. (2015) *Smeshannye zadachi dlya uprugogo osnovaniya s nachal'nymi napryazhenimi* [Mixed Problems for Prestressed Elastic Foundation]. Germaniya: LAP LAMBERT. (in Russian)

3. Guz A. N., Babich S. Y., Rudnitskii V. B. (1998) Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research. *Int. Appl. Mech. Rew*. Vol. 51, No5. pp. 343–371.
4. Aleksandrov V. M., Arutyunyan N. Kh. (1984) Kontaktnye zadachi dlya prednapryazhennykh deformiruemykh tel [Contact problems for prestressed deformed bodies]. *Prikl. mekhanika*. Vol. 20, No 3. pp. 9–16.
5. Grilitskiy D. V., Kizyma Ya. M. (1981) *Osesimmetrichnye kontaktnye zadachi teorii uprugosti i termouprugosti* [Axisymmetric contact problems in the theory of elasticity and thermoelasticity]. L'vov: Vishcha shk. (in Russian)
6. Yaretskaya N. A. (2014) Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *International Applied Mechanics.* Vol. 50, No 4. pp. 378–388.
7. Babich S. Yu., Guz A. N., Rudnitsky V. B. (2004) Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches. *Int. Appl. Mech*. Vol. 40, No 7. pp. 744–765.
8. Yaretskaya N. A. (2018) Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. Vol. 54, No 5. pp. 539–543.
9. Dikhtyaruk N. N., Yaretskaya N. A. (2019) Kontaktnye zadachi dlya odnoy i dvukh predvaritel'no napryazhennykh polos, usilennykh beskonechnym stringerom [Contact tasks for one and two preliminary stressed strips strengthened by an infinite stringer]. *Visnyk Zaporizjkogho nacionaljnogho universytetu. Fizyko-matematychni nauky.* No 1. pp. 49–57.
10. Vlasov V. Z., Leont'ev N. N. (1960) *Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii* [Beams, slabs and shells on an elastic foundation]. Moskva : Fizmatgiz. (in Russian)
11. Babich S. Yu. (1985) Osesimmetrichnaya kontaktnaya zadacha sloya na uprugom poluprostranstve s nachal'nymi napryazheniyami [Axisymmetric contact problem of a layer on an elastic half-space with initial stresses]. *Prikl. mekhanika*. Vol. 21, No 11. pp.32–36.
12. Vorovich I. I., Ustinov Yu. A. (1959) O davlenii shtampa na sloy konechnoy tolshchiny [About the pressure of the punch on a layer of finite thickness]. *Prikladnaya matematika i mekhanika.* Vol. 21, No 3. pp. 445–454.