

3. Shygayev, A. S., Ponomarev, O. A. & Lakhno, V. D. (2013). Theoretical and experimental researches of the open states of DNA. *Matematicheskaya biologiya i bioinformatika*. 2013. T. 8, No. 2, pp. 553–664.
4. Peyrard, M. & Bishop, A. R. (1989). Statistical mechanics of a nonlinear model for DNA denaturation. *Physical Review Letters*, Vol. 62, pp. 2755–2758.
5. Dauxois, T., Peyrard, M. & Bishop, A. R. (1993). Entropy-driven DNA denaturation. *Physical Review E*, Vol. 47, pp. R44–R47.
6. Fakhretdinov, M. I. & Zakirianov, F. K. (2013). Diskretniye brizeri v modeli DNK Peirara-Bishipa. *Zhurnal Tekhnicheskoi Phisiki*, Vol. 83, No. 7, pp. 1–5.
7. Fakhretdinov, M. I., Zakirianov, F. K. & Ekomasov, E. G. (2015). Diskretniye brizeri i multibrizeri v modeli DNK Peirara-Bishipa. *Nelineinaya Dynamika*, Vol. 11, No. 1, pp. 77–87.
8. Mikhlin, Yu. V., Shmatko, T. V. & Manucharyan, G. V. (2004). Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions. *Computer & Structures*, No. 82, pp. 2733–2742.
9. Mikhlin, Yu. V. & Manucharyan, G. V. (2006). Determination of the chaos onset in mechanical systems with several equilibrium positions. *Meccanica*, No. 41, pp. 253–267.

УДК 534

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-02

## БІФУРКАЦІЙНИЙ СТАН ОБЕРТОВОГО МАЯТНИКОВОГО ОСЦИЛЯТОРА З ПАРАМЕТРАМИ ДОВЖИНИ І МАСИ, ЗАЛЕЖНИМИ ВІД ЧАСУ

<sup>1</sup>Грищак Д. В., к. т. н., <sup>2</sup>Грищак Д. Д., к. ф.-м., н., м. н. с., <sup>3</sup>Кадет Н. П.

<sup>1</sup>*Інститут служби зовнішньої розвідки України,  
вул. Бульварно-Кудрявська, 11, м. Київ, 04053, Україна*

<sup>2</sup>*Центральний науково-дослідний інститут озброєння і військової техніки  
Збройних Сил України,  
Повітрофлотський просп., 28, м. Київ, 03049, Україна*

<sup>3</sup>*Національний авіаційний університет,  
просп. Космонавта Комарова, 1, м. Київ, 03058, Україна*

gristchak@gmail.com

У роботі на основі дослідження динаміки маятничого осцилятора, що обертається із швидкістю, залежною від часу, дається аналіз процесу галуження або біфуркаційних станів складної динамічної «ієрархічної» системи за умови залежності її параметрів від часу. Показано, зокрема, що розташування точки біфуркації досліджуваної системи на діаграмі рівноважних станів істотно залежить від закону зміни швидкості обертання маятничого осцилятора від часу, і власна частота коливань досліджуваного лінійного маятника сповільнюється в системі відліку, що обертається, порівняно зі своїм значенням в інерціальній системі згідно із законом, обумовленим залежностями кутової швидкості обертання і довжини осцилятора від часу. Залежність довжини і маси осцилятора від часу, а також величина параметра управління впливають на характер демпфування динамічного процесу. Потенційна функція досліджуваної системи, як і системи з незалежними від часу параметрами, є періодичною функцією від кутової координати, а її залежність від часу відповідає функціям довжини і швидкості обертання за часом. Представлені залежності потенційної функції при різних значеннях параметра управління і функціях зміни довжини і швидкості обертання маятника від часу. Демпфування нелінійного динамічного процесу залежить від характеру зміни довжини і маси осцилятора від часу, величини і знака параметра управління, а також характеру зовнішнього навантаження, діючого на досліджувану систему.

*Ключові слова:* обертовий маятничий осцилятор, залежні від часу параметри, діаграма біфуркацій.

## BIFURCATION AL STATE OF THE REVOLVED PENDULUM OSCILLATOR WITH PARAMETERS OF LENGTH AND MASS, DEPENDING FROM TIME

<sup>1</sup>Gristchak D. V., <sup>2</sup>Gristchak D. D., <sup>3</sup>Kadet N. P.

<sup>1</sup>*Institute Services of External Secret Service of Ukraine,  
Bulvarno-Kudrjavsca str., 11, Kyiv, 04053, Ukraine*

<sup>2</sup>*Central Research institute of armament and military technique of the Armed Forces of Ukraine,  
Povetroflotsky ave., 28, Kyiv, 03049, Ukraine*

<sup>3</sup>*National aviation university,  
Cosmonaut Komarov ave., 1, Kyiv, 03058 Ukraine*

gristchak@gmail.com

In this paper on the basis of research of dynamics of pendulum oscillator, that is revolved with speed dependency upon time, the analysis of process of branching or bifurcational states of the difficult dynamic "hierarchical" system is given on condition of dependence of it parameters on time. It is shown, in particular, that the location of point of bifurcation of the investigated system on an equilibrium bubble diagram substantially depends on the law of change of speed of rotation of pendulum oscillator from time and the eigen frequency of swings of the investigated linear pendulum is slowed in the frame of reference that is revolved, in comparison with the value in the inertial system by law, conditioned by dependences of angular of rotation and length of oscillator on time. Dependence of length and mass of oscillator on time, and also size of management parameter influence on character of damping of dynamic process. A potential function of the investigated system, as well as systems, with not dependency upon time parameters is aperiodic function from an angular coordinate, and its dependence on time answers the functions of length and speed of rotation at times. Presented dependence of potential function on the values of management parameter and functions of change of length and speed of rotation of pendulum at times. Damping of nonlinear dynamic process depends on character of change of length and mass of oscillator from time, size and sign of management parameter, and also character of the external loading operating on investigated.

*Key words: pendulum that rotate, parameters depending on the time, bifurcation diagram.*

### ВСТУП

Проблема теоретичного опису складно організованих систем, зокрема ієрархічного розшарування і нелінійної динаміки, привертає увагу дослідників з точки зору вивчення процесів управління, пов'язаних із здобуттям інформації, і «вироблення сигналів управління» [1]. Відомо [2-9], що дослідження нелінійних коливальних рухів сучасних машин і апаратів, таких, наприклад, як аерокосмічні системи з оболонками, що містять рідину, й інші конструкції нової техніки, базується переважно на вивченні коливальних маятникових осциляторів. Проте класична маятникова модель у ряді випадків не дозволяє адекватно моделювати досліджувані явища і процеси, що призводить до необхідності її уточнення і введення нових степенів свободи і залежності параметрів системи від часу. На прикладі теоретичного аналізу динамічної поведінки маятникового осцилятора, що обертається, із змінними у часі параметрами, як математичної моделі реальної складної динамічної системи, вивчається вплив таких параметрів управління, як залежність швидкості обертання, довжини і маси осцилятора від часу на її біфуркаційний стан. Ця робота певною мірою є продовженням публікацій [10, 11].

### ОСНОВНЕ ВИРІШУЮЧЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ МАЯТНИКОВОГО ОСЦИЛЯТОРА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ, ЗІ ЗМІННИМИ У ЧАСІ ПАРАМЕТРАМИ

Розглядається маятник, що коливається, з масою  $m$ , залежною від часу, поміщеного усередині твердого двовимірного тора радіуса  $L$ , що є функцією часу. Шар може ковзати без тертя усередині тора, що обертається, з кутовою швидкістю  $\Omega$  в загальному випадку, також залежною від часу (як показано на рис. 1).

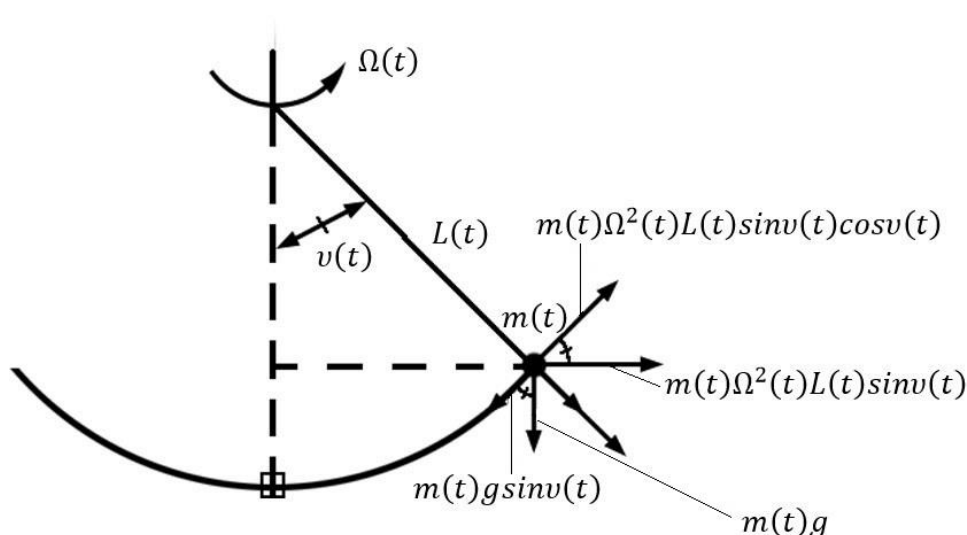


Рис. 1. Маятниковий осцилятор, що обертається, зі змінними у часі параметрами [11]

Основне вирішуюче рівняння вимушених коливань досліджуваної системи надано в роботі [10]:

$$\frac{d}{dt} \left[ m(t)L(t) \frac{d\nu}{dt} \right] = -m(t)g \sin \nu + m(t)\Omega^2(t)L(t)\sin \nu \cos \nu + F(t), \quad (1)$$

де  $F(t)$  – функція зовнішньої дії на центр маси.

Після перетворень початкове рівняння (1) приводиться до вигляду:

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} + D'(t) \frac{d\nu}{dt} = \omega_0^2 \left\{ \frac{\Omega_0^2}{2\omega_0^2} [1 + \eta(t)]^2 \sin 2\nu - \frac{\sin \nu}{[1 + \psi(t)]} \right\} + \tilde{F}(t), \quad (2)$$

де

$$L(t) = L_0(1 + \psi(t)), \quad D'(t) = \frac{m'(t)}{m(t)} + \frac{L'(t)}{L(t)}, \quad Q(t) = \Omega^2(t), \quad (3)$$

$$\tilde{F}(t) = \frac{F(t)}{m(t)L(t)}, \quad G(t) = \frac{g}{L(t)}.$$

Вводячи параметр  $\mu = \frac{\Omega_0^2 L_0}{g}$  та позначивши  $\omega_0^2 = \frac{g}{L_0}$ , рівняння (2) переписується у формі:

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} = \omega_0^2 \sin \nu \left\{ \mu \cos \nu [1 + \eta(t)]^2 - 1 \right\} \frac{1}{1 + \psi(t)} + D'(t) \frac{d\nu}{dt} + \tilde{F}(t), \quad (4)$$

де

$$L(t) = L_0 [1 + \psi(t)], \quad \Omega(t) = \Omega_0 [1 + \eta(t)]. \quad (5)$$

У випадку, коли  $|\nu| \ll 1$ , рівняння (4) лінеаризується:

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} + \omega^2 \nu = D'(t) \frac{d\nu}{dt} + \tilde{F}(t), \quad (6)$$

де

$$\omega^2 = \omega_0^2 \frac{1}{1+\psi(t)} \left\{ 1 - \mu [1+\eta(t)]^2 \right\} \quad (7)$$

– власна частота коливань лінеаризованого осцилятора, що обертається, із врахуванням залежності довжини і швидкості обертання від часу.

Зі співвідношення (7) виходить, що власна частота досліджуваного лінійного маятника (дійсна за умови  $\mu [1+\eta(t)]^2 < 1$ ) сповільнюється в системі відліку, що обертається, порівняно зі своїм значенням в інерціальній системі відліку згідно із законом, обумовленим залежностями кутової швидкості обертання і довжини осцилятора від часу. За умови

$$\mu [1+\eta(t)]^2 > 1 \quad \left( \Omega_0^2 > \frac{g}{L_0 [1+\eta(t)]} \right) \quad \text{чи} \quad \Omega_0^2 > \omega_0^2 \frac{1}{[1+\eta(t)]} \quad (8)$$

лінійний осцилятор у системі відліку, що обертається, не коливається, а здійснює затухаючі неперіодичні рухи за умови  $D'(t) \neq 0$ ,  $\tilde{F}(t) = 0$ .

Дотримуючись роботи [1], розглядається стійкість вирішення рівняння (4) за умови відсутності зовнішньої дії. Стаціонарні стани ( $\ddot{\nu} = \text{const}$ ) вимагають одночасного виконання рівностей  $\nu = 0$  і  $\dot{\nu} = 0$ , тобто

$$\sin \nu \left\{ \mu \cos \nu [1+\eta(t)]^2 - 1 \right\} \frac{1}{1+\psi(t)} = 0. \quad (9)$$

Рівнянню (9) задовольняють або  $\sin \nu = 0$ ,  $\nu = \pm k\pi$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), або  $\cos \nu = \frac{1}{\mu [1+\eta(t)]^2}$ ,

$\mu [1+\eta(t)]^2 \geq 1$ . Перший розв'язок відповідає «класичним», стаціонарним станам  $\nu = 0$  (стійкий стан), що не обертаються, і  $\nu = \pm k\pi$  (нестійкий стан).

Розв'язок

$$\nu = \arccos \left\{ \frac{1}{\mu [1+\eta(t)]^2} \right\} \quad \text{або} \quad \nu = \arccos \left\{ \mu [1+\eta(t)]^2 \right\}^{-1} \quad (10)$$

при кожному  $\mu [1+\eta(t)]^2 > 1$  породжує аналогічно для системи з постійними від часу параметрами дві симетричні гілки. При значенні  $\mu [1+\eta(t)]^2 = 1$  з  $\nu = 0$  виходять три рішення, як показано на рис. 2, де вирішення рівняння

$$\frac{d^2 \nu}{dt^2} = \omega_0^2 \sin \nu \left\{ \mu \cos \nu [1+\eta(t)]^2 - 1 \right\} \frac{1}{1+\psi(t)} \quad (11)$$

показані як функції параметра  $\mu$  як параметра управління. При значеннях  $\mu [1+\eta(t)]^2 \rightarrow \infty$

маємо  $\frac{1}{\mu [1+\eta(t)]^2} \rightarrow 0$ ,  $\nu \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .

Як впливає з приведеного аналізу, стійкий стаціонарний стан  $\nu = 0$  стає нестійким, і нові нестійкі стаціонарні стани задаються співвідношенням (10) і є симетричними.

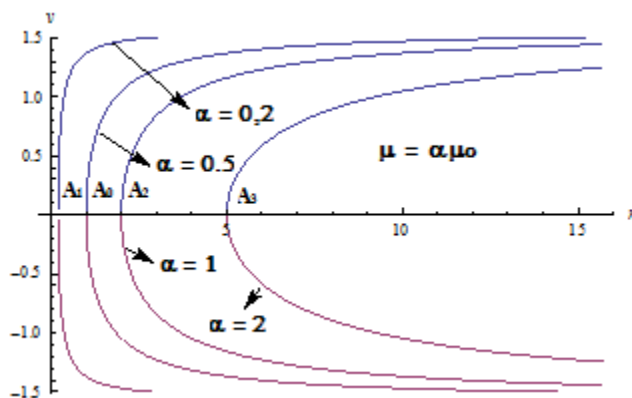


Рис. 2. Біфуркаційна діаграма нелінійного маятнікового осцилятора, що обертається, відповідно до залежності (10)

Приведені залежності побудовані для фіксованого моменту  $t$  і заданого закону зв'язку швидкості обертання і часу (тут  $n$  позначає параметр управління досліджуваної системи  $\mu$ ,  $\mu_0$  – параметр системи, властивості якої не залежать від часу, що управляє, величина параметра  $a$  визначає величину швидкості обертання  $[1 + \eta(t)]^2$  для фіксованого моменту часу). Як випливає з рис. 7, положення точки біфуркації досліджуваної системи із змінними параметрами істотно залежить від закону зміни швидкості обертання маятнікового осцилятора від часу.

Що стосується потенціальної функції обертового маятнікового осцилятора із змінними у часі параметрами, то у гамільтоновій системі вона пов'язана з діючою системою сил

$$\tilde{F}(t) = \omega_0^2 \sin v \left\{ \mu \cos v [1 + \eta(t)]^2 - 1 \right\} \frac{1}{1 + \psi(t)}$$

залежністю [1]  $F = \frac{\partial V(v)}{\partial v}$ , з якої випливає, що

$$V(v, \mu, t) = \frac{\omega_0^2}{1 + \psi(t)} \left\{ \frac{\mu}{2} [1 + \eta(t)]^2 \cos v - 1 \right\} \cos v \tag{12}$$

є періодична функція кутової координати с періодом  $2\pi$  і характером поведінки за часом, пов'язаним із залежностями від часу довжини і швидкості обертання.

Результати чисельного аналізу потенціальної функції.

Так, наприклад, для параметрів  $\omega_0^2 = 100$ ,  $\mu = 1$ ,  $[1 + \eta(t)]^2 = (1 + t)^2$ ,  $[1 + \psi(t)] = (1 + t)$  залежність (12) у діапазоні часу  $0.5 < t < 5$  має вигляд:

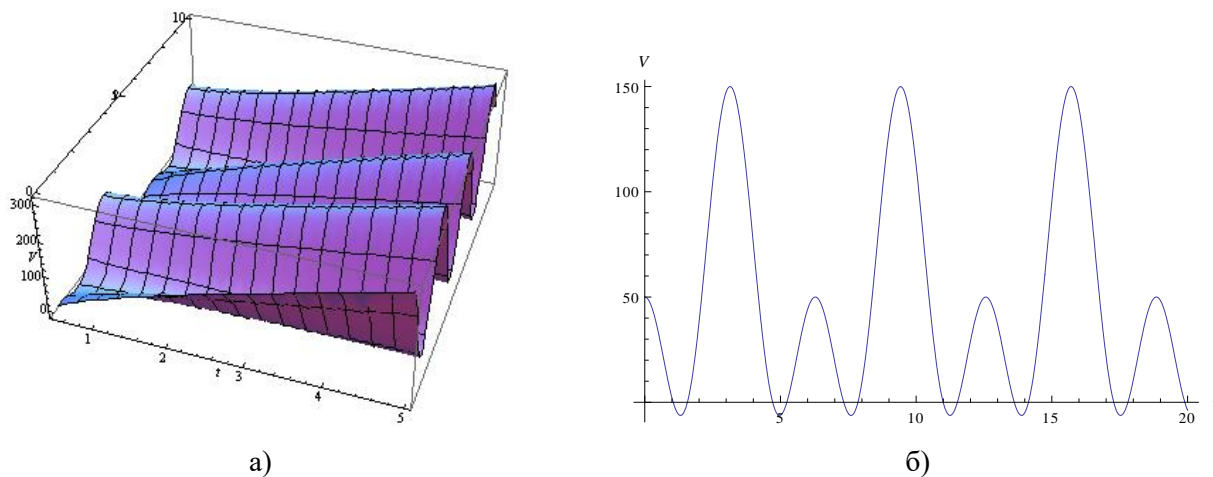


Рис. 3. Поведінка потенціальної функції: а) при заданому значенні параметра  $\mu = 1$ ; б) при фіксованих параметрах  $\mu = 1$  і  $t = 1$

Для системи з параметрами, які не залежать від часу, відповідні графіки мають вигляд.

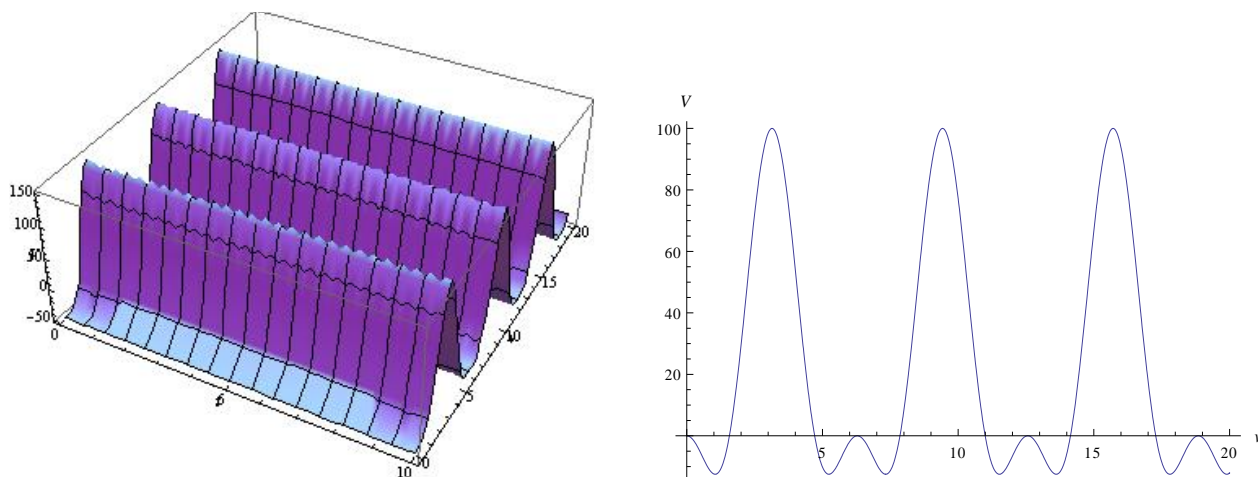


Рис. 4. Поведінка потенціальної функції системи з параметрами, не залежними від часу при заданому значенні параметра управління  $\mu = 1$

Графіки залежності потенціальної функції при різних значеннях параметра управління  $\mu$  і функціях зміни довжини і швидкості обертання маятника від часу представлені на рис. 5–7.

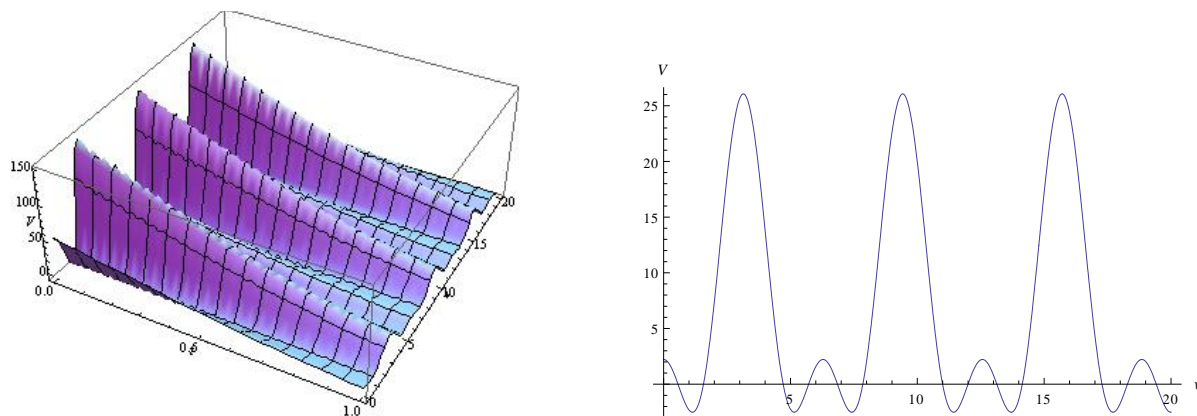


Рис. 5. Поведінка потенціальної функції системи з параметрами  $\mu = 1$ ,  $\psi(t) = \exp 2t$ ,  $\eta(t) = \cos t$

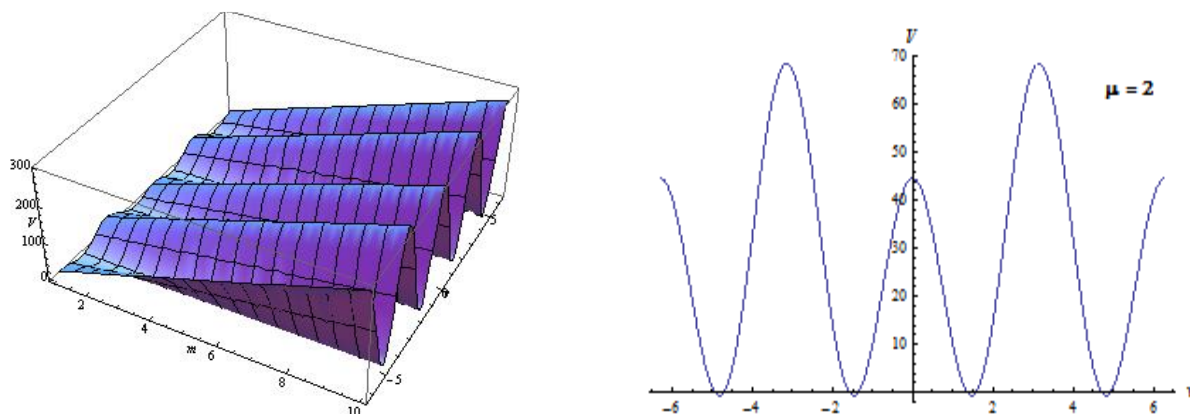


Рис. 6. Вплив параметра управління  $\mu \geq 1$  при фіксованому значенні  $t = 1$  на поведінку потенціальної функції  $V(\nu, \mu, t)$  з характеристиками системи  $\psi(t) = \exp 2t$ ,  $\eta(t) = \cos t$

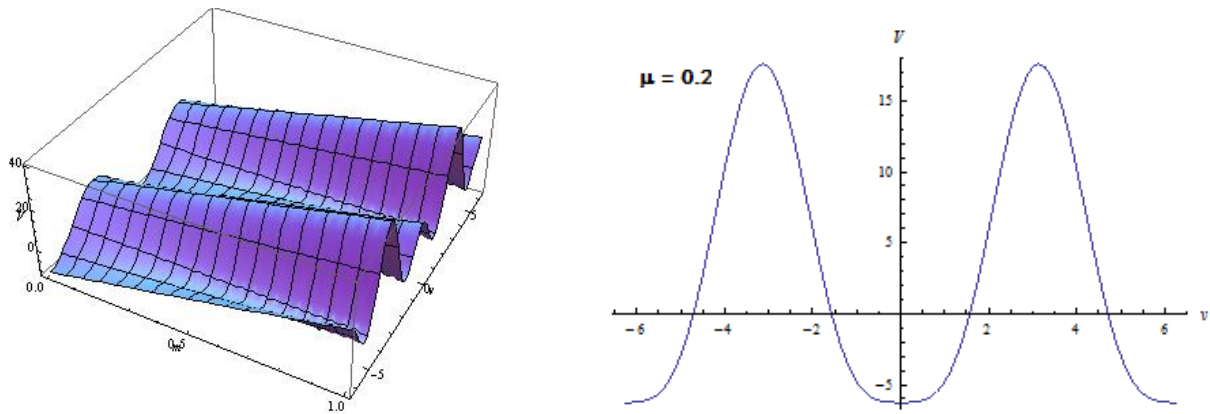


Рис. 7. Вплив параметра управління  $\mu < 1$  при фіксованому значенні  $t = 1$  на поведінку потенціальної функції  $V(v, \mu, t)$  з характеристиками системи  $\psi(t) = \exp 2t$ ,  $\eta(t) = \cos t$

### ВИСНОВКИ

З приведенного аналізу зроблено висновок, що розташування точки біфуркації досліджуваної системи на діаграмі рівноважних станів істотно залежить від закону зміни швидкості обертання маятникового осцилятора від часу. Залежність довжини і маси осцилятора від часу, а також величина параметра управління впливають на характер демпфування динамічного процесу. Цей аналіз може бути основою для подальшого дослідження резонансних явищ у складних динамічних системах з параметрами, залежними від часу.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Николис Дж. Динамика иерархических систем. Эволюционное представление. Москва: Мир, 1989. 486 с.
2. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Нестационарные колебания осциллятора переменной массы с учетом вязкого трения. *Вібрації в техніці і технологіях*. 2014. № 3 (75). С. 18–27.
3. Безгласный С. П., Кутырева Н. И. Управление колебаниями маятника переменной длины. *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*. 2013. Т. 15, № 6 (3). С. 589–593.
4. Безгласный С. П., Кутырева Н. И. Стабилизация нестационарных движений маятника на вращающемся основании. *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*. 2014. Т. 16, № 4. С. 77–82.
5. Красильников П. С., Сторожкина Т. А. Исследование резонансных колебаний математического маятника переменной длины. *Электронный журнал «Труды МАИ»*. Вып. 46. С. 1–11.
6. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. Москва: Машиностроение, 1968. 532 с.
7. Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. Москва: Машиностроение, 1977. 208 с.
8. Kubenko V. D., Koval'chuk P. S. Modeling the Nonlinear Interaction of Standing and Traveling Bending Waves in Fluid-Filled Cylindrical Shells Subject to Internal Resonances. *International Applied Mechanics*. 2015. Vol. 50, No. 3. P. 353–364.
9. Limarchenko O. S. Peculiarities of application of perturbation techniques in problems of nonlinear oscillations of liquid with a free surface in cavities of non-cylindrical shape. *Український математичний журнал*. 2007. Vol. 59, № 1. P. 44–70.
10. Азарсков В. Н., Грищак Д. В., Грищак Д. Д. Приближенное аналитическое решение задачи динамики математического маятника переменной массы и длины. *Труды XI Междунар. науч.-техн. конф. «АВИА-2013»*, (Киев, 21–23 мая, 2013). Киев: НАУ. 2013. Т. 4. С. 22.1–22.4.
11. Грищак Д. Д. Управління вимушеними коливаннями обертового математичного маятника з довжиною і масою, залежними від часу. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2016. № 2. С. 69–81.

## REFERENCES

1. Nicolis, J. (1989). Dynamics of the hierarchical systems. Evolutional presentation. Moscow: Mir.
2. Olshansky, V. P. & Olshansky, S. V. (2014). Non-stationary vibrations of oscillator of variable mass taking into account a viscid friction. *Vibratsiyi v tekhnitsi i tekhnolohiyakh*, No. 3(75), pp. 18–27.
3. Bezglasnyi, S. P. & Kutyreva, N. I. (2013). Control of oscillations of a pendulum of variable length. *Izvestiia samarskogo nauchnogo tcentra Rossiiskoi akademii nauk*, Vol. 15, No. 6(3), pp. 589–593.
4. Bezglasnyi, S. P. & Kutyreva, N. I. (2014). Stabilization of nonstationary pendulum movements on a rotating base. *Izvestiia samarskogo nauchnogo tcentra Rossiiskoi akademii nauk*, Vol. 16, No. 4, pp. 77–82.
5. Krasilnikov, P. S. & Storozhkina, T. A. Study of resonant oscillations of a mathematical pendulum of variable length. *Elektronnyi zhurnal «Trudy MAI»*, Issue 46, pp. 1–11.
6. Mikishev, G. N. & Rabinovich, B. I. (1968). Dynamics of a solid body with cavities partially filled with liquid. Moscow: Mashinostroenie.
7. Narimanov, G. S., Dokuchaev, L. V. & Lukovskii, I. A. (1977). Nonlinear dynamics of an aircraft with a liquid. Moscow: Mashinostroenie.
8. Kubenko, V. D. & Koval'chuk, P. S. (2015). Modeling the Nonlinear Interaction of Standing and Traveling Bending Waves in Fluid-Filled Cylindrical Shells Subject to Internal Resonances. *International Applied Mechanics*, Vol. 50, No. 3, pp. 353–364.
9. Limarchenko, O. S. (2007). Peculiarities of application of perturbation techniques in problems of nonlinear oscillations of liquid with a free surface in cavities of non-cylindrical shape. *Ukrayins'kyi matematychnyy zhurnal*, Vol. 59, No. 1, pp. 44–70.
10. Azarskov, V. N., Grishchak, D. V. & Grishchak, D. D. (2013). An approximate analytical solution of the problem of the dynamics of a mathematical pendulum of variable mass and length. *Proceedings of the XI International Scientific and Technical Conference “AVIA-2013”*, (pp. 22.1–22.4), Kiev (NAU).
11. Grishchak, D. D. (2016). Control for forced vibrations of rotating mathematical pendulum with dependent from time length and mass. *Visnik Zaporiz'kogo nacional'nogo universitetu. Fiziko-matematični nauki*, No. 2, pp. 69–81.

УДК 0048:681.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-03

**ОГЛЯД МЕТОДІВ МАШИННОГО НАВЧАННЯ В ЗАДАЧІ  
ПРОГНОЗУВАННЯ ФІНАНСОВИХ ЧАСОВИХ РЯДІВ**

Гурєєва К. М., Кудін О. В., к. ф.-м. н., Лісняк А. О., к. ф.-м. н.

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

avk256@gmail.com

Часові ряди, які відображають динаміку деякого процесу, є досить складними за своєю структурою та можуть включати тренд, сезонну складову, випадковий шум. Такі часові ряди містять характеристики, що описують зміни стану системи протягом її еволюції. Наприклад, фінансові часові ряди відображають поточний економічний стан, і тому перспективними є дослідження в цій сфері для моделювання подальшого розвитку економіки. У літературі запропоновано велику кількість різноманітних моделей для вирішення проблем прогнозування, це класичні методи математичної статистики, а також методи машинного навчання. Актуальною є задача аналізу сучасних методів і моделей прогнозування фінансових часових рядів та класифікації досить великого обсягу існуючих публікацій за певними ознаками. Метою даної