

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-04

## РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ И ШЕРОХОВАТОСТИ, ДЕФОРМИРУЮЩЕЙСЯ ПО НЕЛИНЕЙНЫМ ЗАКОНАМ

Дьяченко Н. Н., к. ф.-м. н., доцент, Мухин В. В., к. т. н., доцент, Мистюк В. Ю., магистр,  
Юрченко А. К., магистр

*Запорожский национальный университет  
ул. Жуковского 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

dyachenkonata69@gmail.com

Рассматривается плоская квазистатическая задача о скольжении без наклона штампа с плоским основанием по поверхности упругого шероховатого слоя (полосы) при нелинейных (степенном и экспоненциальном) законах деформирования шероховатости. Задача решена с учетом влияния трения на нормальные перемещения штампа. Для каждого закона, в двух случаях ограничения на коэффициенты шероховатости, найдены аналитические решения задачи. С помощью метода редукции и метода последовательных приближений найдены числовые результаты и проведен их анализ. Получены выводы относительно влияния коэффициентов шероховатости и трения на контактные характеристики.

*Ключевые слова: плоская контактная задача, штамп с плоским основанием, шероховатость, линейный, степенной и экспоненциальный законы деформирования шероховатости, трение, метод последовательных приближений, метод редукции.*

## РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЛОСКОЇ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ І ШОРСТКОСТІ, ЩО ДЕФОРМУЄТЬСЯ ЗА НЕЛІНІЙНИМИ ЗАКОНАМИ

Д'яченко Н. М., к. ф.-м. н., доцент, Мухін В. В., к. т. н., доцент, Містюк В. Ю., магистр,  
Юрченко А. К., магистр

*Запорізький національний університет  
вул. Жуковського 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

dyachenkonata69@gmail.com

Розглянуто плоску квазистатичну задачу про ковзання без нахилу штампа з плоскою основою по поверхні пружного шорсткого шару (смуги) при нелінійних (степеневому та експоненціальному) законах деформування шорсткості. Задачу розв'язано з урахуванням тертя на нормальні переміщення штампа.

Інтегральне рівняння задачі зведено до інтегрального рівняння Гаммерштейна в операторному вигляді для кожного закону. Виділено два випадки обмежень на коефіцієнти шорсткості: коефіцієнти обмежені знизу (великі) та обмежені зверху (малі). Для кожного закону, у двох випадках обмежень на коефіцієнти шорсткості, доведено єдиність відповідного розв'язку та знайдено аналітичний розв'язок. У кожному випадку розв'язок подано степеневим рядом за всіма степенями незалежної змінної. Коефіцієнти таких рядів задовольняють нескінченним системам нелінійних алгебраїчних рівнянь. За допомогою методу редукції та методу послідовних наближень отримано наближені розв'язки задачі.

Числові результати візуалізовані. Проведено аналіз щодо впливу коефіцієнтів шорсткості та тертя на контактні характеристики. У граничних випадках одержано узгодження отриманих результатів з відомими. Зокрема, дійшли висновку, що при зменшенні коефіцієнта тертя, так само як і при зменшенні коефіцієнтів шорсткості степеневому та експоненціальному законів, що залежать від висоти мікрорівнянь шорсткості, всі контактні характеристики наближаються до відповідних характеристик без урахування тертя або шорсткості відповідно. Найбільше значення контактної тиску досягається на межі площадки контакту, а найменше – у внутрішній точці цієї площадки. При збільшенні коефіцієнта тертя або коефіцієнтів шорсткості нелінійних законів, що залежать від висоти мікрорівнянь, абсциса точки найменшого тиску зміщується від центру в напрямку дії дотичної сили; при цьому заглиблення штампа в пружну шорстку смугу збільшується.

*Ключові слова: плоска контактна задача, штамп з плоскою основою, шорсткість, лінійний, степеневий та експоненціальний закони деформування шорсткості, тертя, метод послідовних наближень, метод редукції.*

## SOLVING OF THE PLANE CONTACT PROBLEM TAKING INTO ACCOUNT FRICTION AND ROUGHNESS, THAT IS DEFORMED BY NONLINEAR LAWS

Dyachenko N. M., Ph. D. in Physics and Math, associate professor, Mukhin V. V., Ph. D. in Engineering, associate professor, Mistiuk V. Yu, M.S. in Math, Yurchenko A. K., M.S. in Math

*Zaporizhzhya National University  
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

dyachenkonata69@gmail.com

The quasi-static plane problem about sliding with a friction of punch with the flat foundation on a surface of an elastic rough layer (a strip) is considered at the nonlinear laws (the power law and the exponential law) of deformation of a roughness. It is supposed, that the punch inclination is absent. Plane contact problems taking into account a roughness are studied in works [3, 5, 9-10], taking into account a friction – in [3, 7], taking into account both factors – in [14,15]. However, in article [14] it is supposed, that tangential stress do not influence normal pressure. In article [15] this factor is taken into account in the linear law of roughness deformation.

Properties of the nonlinear integral operators of the given problem are studied for the power law and the exponential law of roughness deformation. On the basis of these properties the analytical solutions of problems is received in two cases of restriction on the roughness factors for each of these laws. For each of the laws, the integral equation of the problem is reduced to the Hammerstein integral equation. The solution of this equation is represented by a power series in all powers of the independent variable. The coefficients of this series and the deepening of the punch satisfy an infinite system of nonlinear algebraic equations. The reduction method and the method of successive approximations are used to obtain an approximate solution.

The analysis of numerical results concerning influence of a roughness and a friction on contact characteristics is carried out. In the limiting cases, the coordination of the obtained results with the known ones is obtained. In particular, it is obtained that with a decrease in the friction coefficient, as well as with a decrease in the roughness coefficients of the power and exponential law, that is depended on the height of the roughness micro-asperities, all contact characteristics approach the corresponding characteristics without considering the friction or the roughness, respectively. The greatest value of the contact pressure is reached at the boundary of the contact area, and the lowest one at the inner point of this area. As the friction coefficient or the roughness coefficients of the nonlinear laws increase, that is depended on the height of the micro-asperities, the abscissa of the lowest pressure point shifts from the center in the direction of the tangential force; at the same time the deepening of the punch in the elastic rough strip increases.

*Key words: a plane contact problem, a punch with the flat foundation, a roughness, the linear, power and exponential laws of roughness deformation, a friction, a method of successive approximations, a reduction method.*

### ВВЕДЕНИЕ

Актуальность решения контактных задач связана с потребностями инженерной практики [1]. Реальные тела обладают шероховатой поверхностью, а фактический контакт сопровождается трением. Исследованиям микрорельефа поверхностей, в том числе шероховатости, а также влиянию такого микрорельефа на контактное взаимодействие посвящены работы [1-4]. Впервые контактная задача с учетом шероховатости была решена И. Я. Штаерманом [5]. Он предположил, что суммарное перемещение штампа, вдавливаемого в тело с шероховатой поверхностью, состоит из двух слагаемых: первое соответствует перемещению упругого тела, а второе – смятию микровыступов шероховатости. В результате теоретических и экспериментальных исследований получено, что смятие микровыступов может зависеть от давления по линейному, степенному или экспоненциальному законам [3, 6]. Степенной и линейный законы применяются для малых внешних сил, действующих на штамп, а экспоненциальный – для больших [8, 9].

В работах [3, 7-10] и др. решены контактные задачи в пространственной и плоской постановке с учетом шероховатости при различных законах ее деформирования. Такие задачи с дополнительным учетом трения изучены в пространственной постановке в [11-13], в плоской – в [14, 15]. Однако в статье [14] предполагается, что тангенциальные напряжения не влияют на нормальное давление. В статье [15] этот фактор учтен, однако в обеих работах

[14, 15] рассмотрен случай линейного закона деформирования шероховатости, в то время как в данной работе, – случаи нелинейных законов (степенного и экспоненциального).

Интегральное уравнение, моделирующее плоское контактное взаимодействие штампа с упругой полосой, учитывающее влияние шероховатости, приведено в [3], трения – в [7]. Уравнение, применяемое авторами, является суперпозицией таких уравнений.

Для получения аналитического решения поставленной задачи применяется подход, предложенный в работах [8, 9], с тем отличием, что аналитическое решение представляется степенным рядом, содержащим не только четные степени независимой переменной, но и нечетные. Такой выбор ряда диктуется результатами работы [15].

**Цель работы.** Построить аналитическое и приближенно аналитическое решение квазистатической задачи о напряженном состоянии, которое появляется в упругом слое (полосе) при скольжении по нему без наклона штампа с учетом трения и шероховатости поверхности слоя при степенном и при экспоненциальном законах деформирования шероховатости, обосновать единственность решения в каждом случае и возможность применения численных методов, провести анализ числовых результатов.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим шероховатый слой  $\{|x| < +\infty, 0 < y < h\}$ , настолько толстый, что  $\lambda = \frac{a}{h} \leq \frac{1}{2}$ .

Возможны два случая закрепления полосы ( $y = h$ ) [3]:

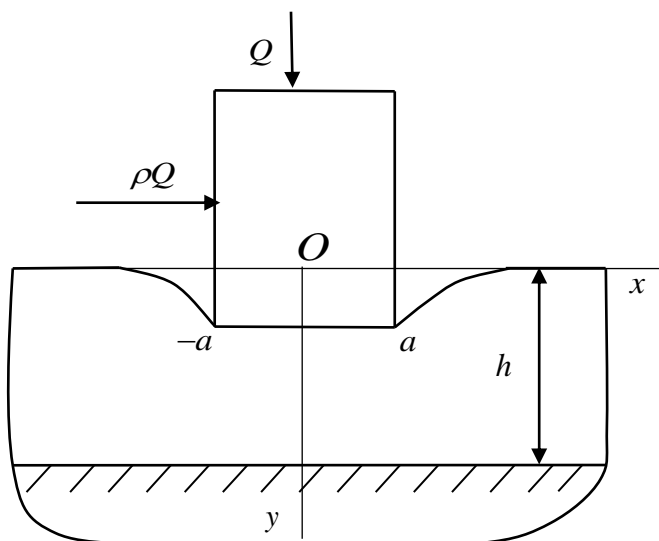


Рис. 1. Схема контакта штампа с упругим слоем

1. Полоса лежит на жестком основании без трения:

$$\tau_{xy}(x, h) = 0, v(x, h) = 0, |x| < +\infty.$$

2. Полоса жестко закреплена на основании:

$$u(x, h) = v(x, h) = 0.$$

Предположим, что штамп вдавливается в упругий шероховатый слой вертикальной силой  $Q$  (рис. 1). В направлении оси  $x$  действует сила, по модулю равная  $\rho Q$ . Эта сила заставляет штамп скользить по поверхности слоя со скоростью настолько малой, что динамическими составляющими можно пренебречь. При этом также предположим, что штамп не совершает поворота под действием приложенных сил.

Граничные условия на поверхности  $y = 0$  в обоих случаях задач 1 и 2 имеют вид [3, 7]:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, 0) = 0, \sigma_y(x, 0) = 0, a < |x| < +\infty, \\ \sigma_y(x, 0) = -p(x), \tau_{xy}(x, 0) = \rho p(x), |x| \leq a, \end{aligned}$$

где  $p(x)$  – нормальное давление под штампом,  $\delta$  – углубление штампа в упругий слой,  $\rho$  – коэффициент трения.

В поставленной задаче интегральное уравнение и условие равновесия имеют вид [3, 7]:

$$W[p^{(i)}](x) + \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \left[ \int_{-a}^a \left[ -\ln \left| \frac{x'-x}{h} \right| + a_0 \right] p^{(i)}(x') dx' + \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \pi \int_{-a}^x \rho p^{(i)}(x') dx' \right] = \delta^{(i)}, \quad i=1, 2, \quad (1)$$

$$\int_{-a}^a p^{(i)}(x') dx' = Q, \quad i=1 \text{ или } i=2, \quad (2)$$

где  $E$  – модуль упругости;  $\nu$  – коэффициент Пуассона, значение величины  $a_0$  может быть  $a_0 = -0,352$  для задачи 1 и  $a_0 = -0,527$  – для задачи 2 при  $\nu = 0,3$ . В задаче неизвестными являются контактные характеристики: нормальное давление и углубление штампа.

Первое слагаемое  $W^{(i)}(x)$  в правой части (1) определяется законом деформирования шероховатости [3, 6]. Для степенного закона [3] –  $W[p^{(1)}](x) = B[p^{(1)}(x)]^\kappa$ , для экспоненциального [6] –  $W[p^{(2)}](x) = H \left( 1 - \exp \left[ -\frac{\beta}{E} p^{(2)}(x) \right] \right)$ . Тут  $B$ ,  $\kappa$ ,  $H$ ,  $\beta$  – коэффициенты шероховатости соответствующих законов.

Введем обозначения:  $C = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}$ ,  $W_1[f](x) = \frac{W[f](x)}{a}$ ,  $p_1^{(i)}(x) = Cp(x)$ ,  $t = \frac{x}{a}$ ,  
 $p_2(t) = p_1(ta)$ ,  $\delta_1^{(i)} = \frac{\delta^{(i)}}{a}$ ,  $B_1 = \frac{B}{C^\kappa a}$ ,  $H_1 = \frac{H}{a}$ ,  $\alpha = \frac{\beta\pi}{2(1-\nu^2)}$ ,  $C_0 = \ln \frac{a}{h} - a_0$ ,  $C_2 = \frac{1-2\nu}{2-2\nu}$ ,

$C_1 = C_2\rho$ ,  $Q_2 = CQ$ , в соответствии с чем перепишем уравнения (1) и (2) в безразмерных величинах ( $i=1$  или  $i=2$ ):

$$W_1[p_2^{(i)}](t) + \int_{-1}^1 [-\ln|t'-t| - C_0] \cdot p_2^{(i)}(t') dt' + C_1 \int_{-1}^t p_2^{(i)}(t') dt' = \delta_1^{(i)}, \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 p_2^{(i)}(t') dt' = Q_2. \quad (4)$$

Введем оператор

$$[Lf](t) = \int_{-1}^1 [\ln|t'-t| + C_0] f(t') dt' - C_1 \int_{-1}^t f(t') dt' \quad (5)$$

и перепишем уравнения (3) в операторном виде ( $i=1$  или  $i=2$ ):

$$W_1[p_2^{(i)}](t) - [Lp_2^{(i)}](t) = \delta_2. \quad (6)$$

В работе [9] доказано, что норму линейного оператора  $L: C[-1;1] \rightarrow C[-1;1]$  можно оценить как

$$\|L\| \leq 8 + 2C_1 = C^*. \quad (7)$$

Через  $C^{**}$  обозначим любое число, большее  $C^*$ .

Дальнейшие действия будем делать в соответствии с подходом, изложенным в работах [8, 9]. Так же, как в этих работах, рассмотрим два случая ограничений на коэффициенты шероховатости. Первый случай – коэффициенты ограничены снизу (большие коэффициенты), второй – ограничены сверху (малые).

**Случай больших коэффициентов шероховатости  $B_1$  и  $H_1$ .** Для степенного и экспоненциального законов соответственно введем замены  $\psi^{(b,1)}(t) = B_1 [p_2^{(1)}(t)]^\kappa - \delta_1^{(1)}$ ,  $\psi^{(b,2)}(t) = \frac{\delta_1^{(2)}}{H_1} - \left[ 1 - \exp(-\alpha p_2^{(2)}(t)) \right]$  и обозначения

$$\varphi_\eta^{(1)}(\psi)(t) = \left[ \psi(t) + \frac{\delta_1^{(1)}}{\eta} \right]^\kappa, \quad \varphi_\eta^{(2)}(\psi)(t) = \ln \left[ 1 + \psi(t) - \frac{\delta_1^{(2)}}{\eta} \right],$$

после чего перепишем уравнения (6) в виде ( $i=1, 2$ ):

$$\psi^{(b,i)}(t) = \left[ G^{(b,i)} \psi^{(b,i)} \right](t); \tag{8}$$

$$\left[ G^{(b,i)} \psi \right](t) = (-1)^{i-1} C^{(i)} D^{(i)} \cdot \left[ L \varphi_{\eta^{(i)}}^{(i)}(\psi) \right](t);$$

$$C^{(1)} = [1/B_1]^{1/\kappa}, \quad D^{(1)} = \eta^{(1)} = 1; \quad C^{(2)} = 1/\alpha, \quad D^{(2)} = 1/H_1, \quad \eta^{(2)} = H_1.$$

**Случай малых коэффициентов  $B_1$  и  $H_1$ .** Введем малые параметры Боголюбова-Крылова

$$\mu^{(1)} = 1 - B_1/C^{**}, \quad \mu^{(2)} = 1 - H_1/C^{**}, \quad \text{и замены} \quad \psi^{(s,1)}(t) = \left[ p_1^{(1)}(t) \right]^\kappa - \frac{\delta_1^{(1)}}{C^{**}},$$

$$\psi^{(s,2)}(t) = - \left[ 1 - \exp(-\alpha p_1^{(2)}(t)) \right] + \frac{\delta_1^{(2)}}{C^{**}}, \quad \text{тогда уравнения (6) приобретут вид (1=1,2):}$$

$$\psi^{(s,i)}(t) = \left[ G^{(s,i)} \psi^{(s,i)} \right](t); \tag{9}$$

$$\left[ G^{(s,i)} \psi \right](t) = \mu^{(i)} \left[ \psi(t) + (-1)^{i+1} \frac{\delta_1^{(i)}}{C^{**}} \right] + \frac{1}{C^{**}} \cdot K^{(i)} \cdot \left[ L \varphi_{C^{**}}^{(i)}(\psi) \right](t), \quad K^{(1)} = D^{(1)}, \quad K^{(2)} = C^{(2)}.$$

Уравнения (8) и (9) являются уравнениями Гаммерштейна.

## 2. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ В УРАВНЕНИЯХ

Разложение образа степенной функции  $f(t) = t^N$  ( $N = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) при действии оператора  $L: C[-1; 1] \rightarrow C[-1; 1]$  имеет вид [9]:

$$\left[ Lf \right](t) = \sum_{r=0}^{\infty} \beta_{N,r} t^r, \tag{10}$$

где при  $N = 2j, j = 1, 2, 3, \dots$

$$\beta_{2j,2k} = -\frac{2}{k(2j-2k+1)} \quad (k=1, 2, 3, \dots), \quad \beta_{2j,2k+1} = 0, \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad k \neq j,$$

$$\beta_{2j,0} = -\frac{2}{(2j+1)^2} + \frac{2C_0}{2j+1} - \frac{C_1}{2j+1}, \quad \beta_{2j,2j+1} = -\frac{C_1}{2j+1},$$

при  $N = 0$

$$\beta_{0,2k+1} = 0, \quad \beta_{0,2k} = -\frac{1}{k(-2k+1)} \quad (k=1,2,3,\dots), \quad \beta_{0,1} = -C_1, \quad \beta_{0,0} = -2 + 2C_0 - C_1,$$

а при  $N = 2j - 1$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$

$$\beta_{2j-1,2k-1} = -\frac{2}{(2k-1)(2j-2k+1)} \quad (k=1,2,3,\dots), \quad \beta_{2j-1,2k} = 0 \quad (k=1,2,3,\dots, k \neq j),$$

$$\beta_{2j-1,2j} = -\frac{C_1}{2j}; \quad \beta_{2j-1,0} = -\frac{C_1}{2j}.$$

Рассмотрим нелинейные операторы. Аналогично [9] обосновывается, что образами непрерывных функций при действии нелинейных операторов  $G^{(b,i)}$  и  $G^{(s,i)}$ ,  $i=1,2$  являются непрерывные функции. Дальнейшие исследования этих операторов будем проводить на множествах соответственно:

$$X^{(b,1)} = \left\{ \psi(t) \in C[-1;1]: -\delta_1^{(1)} + \varepsilon_b \leq \psi(t) \leq 0 \right\}, \quad 0 < \varepsilon_b < \delta_1^{(1)},$$

$$X^{(b,2)} = X^{(s,2)} = \left\{ \psi(t) \in C[-1;1]: \psi(t) \geq 0 \right\}.$$

$$X^{(s,1)} = \left\{ \psi(t) \in C[-1;1]: -\frac{\delta_1^{(2)}}{C^{**}} + \varepsilon_s \leq \psi(t) \leq 0 \right\}, \quad 0 < \varepsilon_s < \frac{\delta_1^{(2)}}{C^{**}}.$$

В силу формулы Лагранжа по функциональному аргументу на указанных множествах имеют место неравенства

$$\left\| \varphi^{(1)}(\psi_1) - \varphi^{(1)}(\psi_2) \right\| \leq \frac{1}{\kappa} \cdot \left[ \frac{\delta_1^{(1)}}{\eta} \right]^{\frac{1}{\kappa}-1} \cdot \|\psi_1 - \psi_2\| \quad \text{для } \eta = 1 \text{ или } \eta = C^{**};$$

$$\left\| \varphi^{(2)}(\psi_1) - \varphi^{(2)}(\psi_2) \right\| \leq \frac{\eta}{\eta - \delta_1^{(2)}} \cdot \|\psi_1 - \psi_2\| \quad \text{для } \eta = H_1 \text{ или } \eta = C^{**}.$$

Используем эти неравенства и оценку (7) для нормы оператора  $L$ . Аналогично [9] получим, что для всех функций  $\psi_1(t)$  и  $\psi_2(t)$  из указанных множеств выполнены оценки ( $i=1,2$ ):

$$\left\| G^{(b,i)}\psi_1 - G^{(b,i)}\psi_2 \right\| \leq \left| C^{(i)} D^{(i)} \right| \cdot \|L\| \cdot \left\| \varphi^{(i)}(\psi_1) - \varphi^{(i)}(\psi_2) \right\| \leq u^{(i)} \|\psi_1 - \psi_2\|,$$

$$u^{(1)} = \frac{C^*}{\kappa \delta_1^{(1)}} \left[ \frac{\delta_1^{(1)}}{B_1} \right]^{1/\kappa}, \quad u^{(2)} = \frac{C^*}{\alpha(H_1 - \delta_1^{(2)})}; \quad (11)$$

$$\left\| G^{(s,i)}\psi_1 - G^{(s,i)}\psi_2 \right\| \leq \max \left\{ \mu^{(i)} \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|; \frac{1}{C^{**}} \cdot K^{(i)} \cdot \|L\| \cdot \left\| \varphi^{(i)}(\psi_1) - \varphi^{(i)}(\psi_2) \right\| \right\} \leq u^{(i+2)} \|\psi_1 - \psi_2\|,$$

$$u^{(3)} = \max \left\{ \mu^{(1)}; \frac{C^*}{\kappa \delta_1^{(1)}} \left[ \frac{\delta_1^{(1)}}{C^{**}} \right]^{1/\kappa} \right\}, \quad u^{(4)} = \max \left\{ \mu^{(2)}; \frac{C^*}{\alpha(C^{**} - \delta_1^{(1)})} \right\}. \quad (12)$$

Из принципа сжимающих отображений (теоремы Банаха) [16] следует, что уравнения (8) и (9) имеют единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений, если

$$u^{(i)} < 1 \quad (i = \overline{1, 4}). \tag{13}$$

Решение неравенства (13) относительно  $B_1$  и  $H_1$  дает неравенства двух видов. Соотношения (11) и (13) задают ограниченность снизу этих коэффициентов:

$$B_1 > \delta_1^{(1)} \left[ \frac{C^*}{\kappa \delta_1^{(1)}} \right]^\kappa, \quad H_1 > \delta_1^{(1)} + \frac{C^*}{\alpha}. \tag{14}$$

Эти ограничения соответствуют случаю больших коэффициентов шероховатости. Соотношения (12) и (13) дают ограниченность сверху  $B_1$  и  $H_1$ :

$$0 < B_1 < C^{**}, \quad 0 < H_1 < C^{**}, \tag{15}$$

что соответствует случаю малых коэффициентов шероховатости. Однако, следует заметить, что вторые компоненты под знаком максимумов в (12) гарантированно меньше 1, что объясняется физическим смыслом величин, из которых они состоят, а также правильным выбором значения величины  $C^{**}$ , например,  $C^{**} = 12$ . При этом следует учитывать, что согласно результатам исследований [2, 3, 6], значения параметров  $\kappa$  и  $\alpha$  удовлетворяют неравенствам  $0,1 \leq \kappa \leq 1$  и  $1 \leq \alpha \leq 8$ .

### 3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

В соответствии с результатами работы [15], в случае линейного закона деформирования шероховатости, функция нормального давления представляется степенным рядом. Линейный закон является частным случаем степенного закона и предельным случаем экспоненциального (при малых внешних силах). Как показано в работах [3, 7-9], в контактных задачах с учетом шероховатости, деформирующейся по нелинейным законам, физические свойства функции давления аналогичны линейному. В связи с этим, функции  $\psi^{(b,i)}$ ,  $\psi^{(s,i)}$  ( $i = 1, 2$ ) представляются степенными рядами того же типа, что и функции давлений. В контактных задачах с учетом шероховатости, но без трения (см. [8, 9]) эти функции представлялись рядами по четным степеням  $t$ . В задаче с трением и шероховатостью линейного закона степенной ряд функции давления содержит не только четные, но и нечетные степени. Можно предположить, что функции  $\psi^{(b,i)}$ ,  $\psi^{(s,i)}$  ( $i = 1, 2$ ) представляются рядами такого же типа. Окончательный вывод о правильности такого предположения можно будет сделать после получения системы алгебраических уравнений, эквивалентной данной системе интегральных уравнений, в случае, если она получится корректной.

Введем обозначения для  $\Delta = 0$  или  $\Delta = 1$ :

$$\xi_0^{(\Delta,1)} = \gamma_0^{(\Delta,1)} + \frac{\delta_1^{(1)}}{(C^{**})^\Delta}, \quad \xi_0^{(\Delta,2)} = \gamma_0^{(\Delta,2)} + 1 - \frac{\delta_1^{(2)}}{(C^{**})^\Delta (H_1)^{1-\Delta}},$$

$$\sigma_0^{(\Delta,1)} = \left[ \xi_0^{(\Delta,1)} \right]^\omega, \quad \sigma_0^{(\Delta,2)} = \ln \xi_0^{(\Delta,2)};$$

$$\xi_k^{(\Delta,i)} = \frac{\gamma_k^{(\Delta,i)}}{\xi_0^{(\Delta,i)}}; \quad P_{m,k}^{(1)} = \prod_{r=1}^{k-m+1} \frac{\omega - r + 1}{r}, \quad P_k^{(1)} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}; \quad \omega = \frac{1}{\kappa}; \quad a_{k,k}^{(\Delta,i)} = \xi_k^{(\Delta,i)}$$

$$(m = 1, \dots, k, \quad k = 1, 2, 3, \dots);$$

$$a_{m,k}^{(\Delta,i)} = \sum_{r=1}^m a_{k-r,m-r+1}^{(\Delta,i)} P_s^{(\Delta,i)} \quad (m=1,\dots,k-1, k=2,3,\dots);$$

$$\sigma_k^{(\Delta,1)} = \sigma_0^{(\Delta,1)} \sum_{m=1}^k P_{m,k}^{(\Delta,1)} a_{k,m}^{(\Delta,1)}, \quad \sigma_k^{(\Delta,2)} = \sum_{m=1}^k p_{k-m+1}^{(\Delta,2)} a_{k,m}^{(\Delta,2)} \quad (k=1,2,3,\dots).$$

**Случай больших коэффициентов шероховатости.** Неизвестные функции в уравнении (8) представим в виде ( $i=1,2$ ):

$$\psi^{(b,i)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^{(0,i)} t^k, \quad (16)$$

тогда

$$p_2^{(i)}(t) = (-1)^{i-1} C^{(i)} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^{(0,i)} t^j, \quad \Delta=0. \quad (17)$$

Подставляя разложения (10), (16), (17) в (8), получим пару бесконечных систем нелинейных алгебраических уравнений, выраженную через неизвестные коэффициенты соответствующих рядов (14) ( $i=1,2$ ):

$$\gamma_k^{(0,i)} = C^{(i)} D^{(i)} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^{(0,i)} \beta_{j,k} \quad (k=0,1,2,\dots). \quad (18)$$

Уравнение (18) для каждого закона содержит еще неизвестную – углубление штампа. Условия равновесия (4) позволяет получить еще уравнения:

$$\delta_1^{(1)} = B_1 \left[ \frac{1}{Q_2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2\sigma_j^{(0,1)}}{\sigma_0^{(0,1)}(2j+1)} \right]^{-\kappa} - \gamma_0^{(0,1)}, \quad (19)$$

$$\delta_1^{(2)} = H_1 \left\{ 1 + \gamma_0^{(0,2)} - \exp \left[ -\frac{\alpha Q_2}{2} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j^{(0,2)}}{2j+1} \right] \right\}. \quad (20)$$

Таким образом, по-отдельности, при  $i=1$  и при  $i=2$  получаем две бесконечные системы нелинейных алгебраических уравнений (18), (19) или (18), (20), эквивалентные двум системам, состоящим из интегрального уравнения Гаммерштейна (8) и уравнения равновесия (4). Каждая из полученных алгебраических систем представляется корректно. Таким образом, предположение о возможности представления функций  $\psi^{(b,i)}$  ( $i=1$  или  $i=2$ ) степенным рядом (16) – справедливо.

Кроме того, функция нормального давления, заданная рядом (17), углубление штампа вида (19) или (20) дают аналитическое решение соответствующей задачи (для степенного или экспоненциального закона) для случая, когда удовлетворяются указанные системы нелинейных алгебраических уравнений и выполняются ограничения (14).

**Случай малых коэффициентов шероховатости.** Аналогично предыдущему случаю, неизвестные функции в уравнении (9) представим в виде ( $i=1,2$ ):

$$\psi^{(s,i)}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j^{(1,i)} t^j, \quad \Delta=1, \quad (21)$$

тогда

$$p_2^{(i)}(t) = (-1)^{i-1} K^{(i)} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^{(1,i)} t^j. \quad (22)$$



Затем, используя (10), (21), (22), получим пару бесконечных систем нелинейных алгебраических уравнений, эквивалентных (9), а именно ( $i = 1, 2$ ):

$$\begin{cases} \gamma_0^{(s,i)} = (-1)^{i-1} \mu^{(i)} \frac{\delta_1^{(i)}}{C^{**}} + \mu^{(i)} \gamma_0^{(1,i)} + \frac{K^{(i)}}{C^{**}} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^{(1,i)} b_{j,0}, \\ \gamma_k^{(s,i)} = \mu^{(i)} \gamma_k^{(1,i)} + \frac{K^{(i)}}{C^{**}} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^{(1,i)} b_{j,k} \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (23)$$

а также пару уравнений, эквивалентных условиям равновесия (4):

$$\delta_1^{(1)} = C^{**} \left[ \frac{1}{Q_1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma_j^{(1,1)}}{\sigma_0^{(1,1)}} \frac{1}{2j+1} \right]^{-\kappa} - C^{**} \gamma_0^{(1,1)}, \quad (24)$$

$$\delta_1^{(2)} = C^{**} \left\{ 1 + \gamma_0^{(1,2)} - \exp \left[ -\frac{\alpha Q_2}{2} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j^{(1,2)}}{2j+1} \right] \right\}. \quad (25)$$

В этом случае, как и в предыдущем, получены корректные системы, поэтому представление функции  $\psi^{(s,i)}$  ( $i = 1$  или  $i = 2$ ) степенным рядом (21) является обоснованным. Решение систем (23), (24) или (23), (25) позволяет получить контактные характеристики в аналитическом виде: функцию давления вида (22) и углубление штампа вида (24) или (25).

Для решения бесконечных систем (18), (19) или (18), (20), или (23), (24), или (23), (25) нелинейных алгебраических уравнений, удовлетворяющих условиям сжатия (13), необходимо заменить их конечными, то есть применить метод редукции. Обоснование возможности применения этого метода проводится на основе классических теорем, приведенных в [16] применительно к сжимающим отображениям так же, как это было сделано в работах [8, 9]. При этом решения приближенных редуцированных систем можно найти методом последовательных приближений [16].

#### 4. АНАЛИЗ ЧИСЛОВЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для приближенных вычислений выберем  $\nu = 0,3$ ,  $C_0 = -3$  так же, как в монографии [3]. Путем численного эксперимента выбрано значение  $N = 30$  числа членов ряда (16) или (21) для обеспечения точности до третьей значащей цифры.

В контактной задаче с учетом трения функция давления штампа на упругую гладкую полосу (без шероховатости) равна функции давления на упругую гладкую полуплоскость. Последняя функция получена в работе [7]:

$$p_2^*(t) = \frac{Q_2 \sin(\pi\theta)}{\pi \sqrt{1-t^2}} \cdot \left( \frac{1-t}{1+t} \right)^{0,5-\theta}, \quad \theta = \frac{1}{\pi} \cdot \arctg \frac{2-2\nu}{\rho(1-2\nu)}. \quad (26)$$

Чтоб определить углубление штампа в упругую гладкую полосу  $\delta_1^*$ , необходимо в уравнении (3) положить  $W_1 [p_2^*](t) \equiv 0$ ,  $t = 1$ , а функцию  $p_2^*(t)$  задать формулой (26):

$$\delta_1^* = - \int_{-1}^1 p_2^*(t') [\ln|t'-t| + C_0] dt' + C_2 \rho \int_{-1}^1 p_2^*(t') dt'. \quad (27)$$

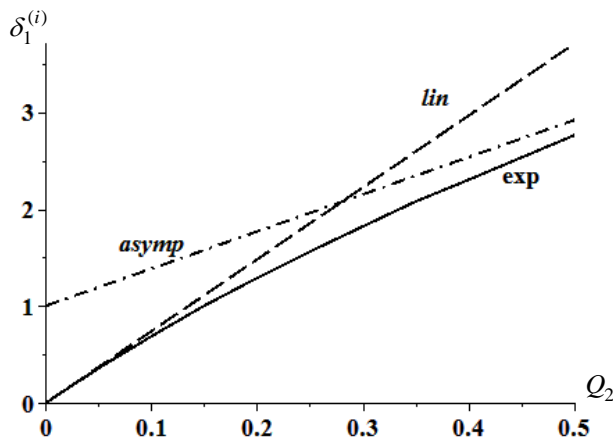


Рис. 2

На рис. 2 приведен график зависимости углублений штампа с плоским основанием в упругую полосу с шероховатостью от силы  $Q_2$ . Коэффициент трения выбран равным  $\rho = 0,3$ . Углубления рассчитаны для экспоненциального закона при фиксированных  $H_2 = 1$ ,  $\alpha = 7$ , а для степенного закона при  $\kappa = 1$  и  $B_1 = \alpha H_1 = 7$  (то же, что и для линейного закона). Соответствующие линии обозначены «exp» и «lin».

Значения углублений близки при малых  $Q_2$ .

При больших  $Q_2$  график, построенный для экспоненциального закона, приближается к асимптоте (линия «asympt» на рис. 2), значения ординат которой имеют вид  $H_1 + \delta_1^*$ , где  $\delta_1^*$  определяется по формуле (27). Соотношение для ординат асимптоты выбраны предельным переходом в уравнении (3) при  $p_2^{(2)} \rightarrow \infty$ . Для экспоненциального закона такой переход оказывается возможным, в отличие от линейного закона. Это связано с тем, что для экспоненциального закона первое слагаемое стремится к константе  $H_1$ , а для степенного – к бесконечности. Вследствие чего происходит стабилизация углублений штампа при экспоненциальном законе, что соответствует стабилизации смятий микровыступов шероховатости, связанной с ограниченностью их высоты.

Таким образом, приходим к выводу, что линейный и степенной законы пригодны для расчетов при малых внешних силах  $Q_2$ , а экспоненциальный – при больших.

Для безразмерной силы  $Q_2 = 8,625 \cdot 10^{-3}$  на рис. 3, а, б построены графики зависимостей углублений штампа при степенном законе от показателей шероховатости  $\kappa$  (рис. 3, а) и от коэффициента трения  $\rho$  (рис. 3, б). На рис. 3, а значение  $\rho = 0,3$  фиксировано,  $B_1$  – различные (1 –  $B_1 = 1$ ; 2 –  $B_1 = 0,5$ ; 3 –  $B_1 = 0,2$ ). На рис. 3, б линии 1 соответствуют  $B_1 = 1$ ,  $\kappa = 0,4$ , линии 2 –  $B_1 = 1$ ,  $\kappa = 0,5$ , линии 3 –  $B_1 = 0,5$ ,  $\kappa = 0,4$ .

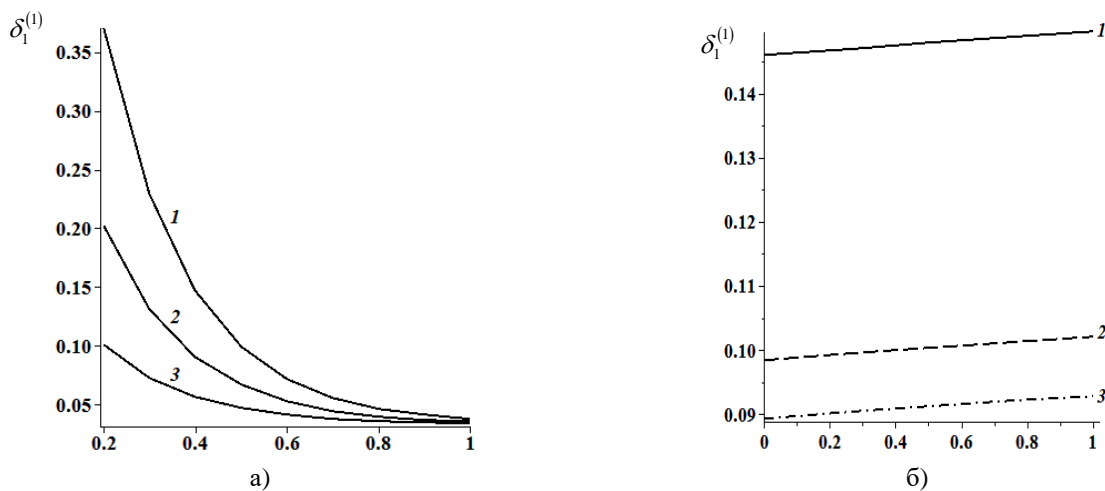


Рис. 3

Для  $Q_2 = 5 \cdot 10^{-2}$  на рис. 4, а, б изображены графики зависимостей углублений штампа при экспоненциальном законе от показателей шероховатости  $H_1$  (рис 4, а) и от коэффициента трения  $\rho$  (рис. 4, б). На рис. 4, а значение  $\rho = 0,3$  фиксировано  $\alpha$  – различные (1 –  $\alpha = 7$ ; 2 –  $\alpha = 4$ ; 3 –  $\alpha = 2$ ; 4 –  $\alpha = 1$ ). На рис. 4, б линии 1 соответствуют  $H_1 = 1, \alpha = 8$ , линии 2 –  $H_1 = 1, \alpha = 7$ , линии 3 –  $H_1 = 0,5, \alpha = 7$ .

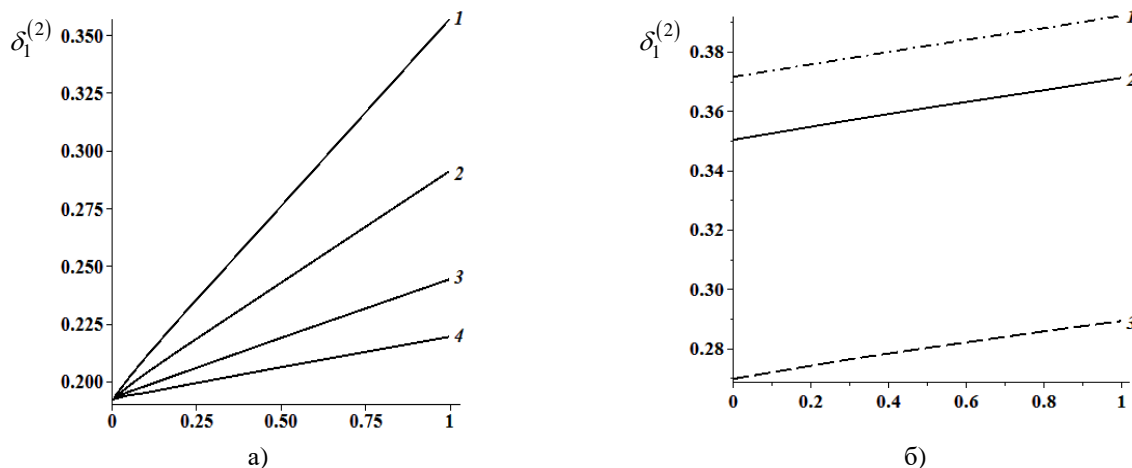


Рис. 4

Анализируя зависимости на рис. 3 и 4, приходим к следующим выводам. С уменьшением как  $B_1$ , так и  $H_1$  (при фиксированном  $\rho$ ) углубление штампа уменьшается, приближаясь к числовому значению  $\delta_1^*$ , отвечающему гладкой полосе с учетом трения с коэффициентом  $\rho = 0,3$ , рассчитанному по формуле (27). При уменьшении  $\kappa$  углубление увеличивается, а при уменьшении  $\alpha$  – уменьшается. При фиксированных коэффициентах шероховатости увеличение коэффициента трения  $\rho$  ведет к увеличению углубления.

Положив  $Q_2 = 8,625 \cdot 10^{-3}$ , на рис. 5 а, б, в построены графики распределения нормального давления под штампом при степенном законе деформирования шероховатости. На рис 5, а – для фиксированных  $\rho = 0,3, \kappa = 0,4$  и различных  $B_1$  (1 –  $B_1 = 0$ ; 2 –  $B_1 = 0,01$ ; 3 –  $B_1 = 0,1$ ; 4 –  $B_1 = 1$ ). На рис. 5, б – для фиксированных  $\rho = 0,3, B_1 = 1$  и различных  $\kappa$  (1 –  $\kappa = 1$ ; 2 –  $\kappa = 0,9$ ; 3 –  $\kappa = 0,8$ ; 4 –  $\kappa = 0,6$ ; 5 –  $\kappa = 0,2$ ). На рис. 5, в – для фиксированных  $\kappa = 0,4, B_1 = 1$  и различных  $\rho$  (1 –  $\rho = 0,0001$ ; 2 –  $\rho = 0,8$ ; 3 –  $\rho = 0,5$ ; 4 –  $\rho = 0,3$ ; 5 –  $\rho = 1$ ).

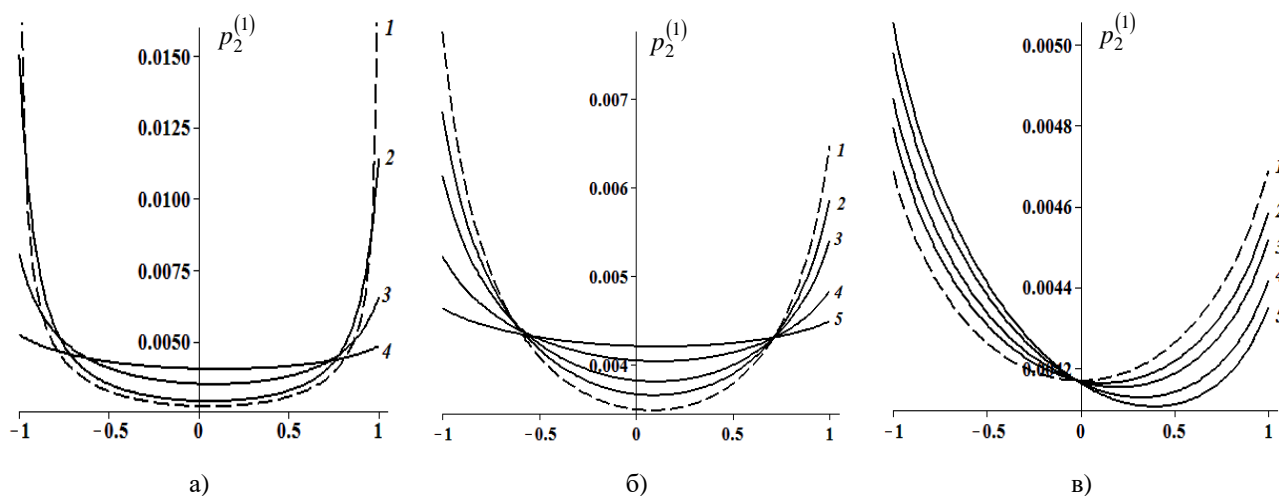


Рис. 5

На рис. 6 а, б, в построены графики распределения нормального давления под штампом при экспоненциальном законе деформирования шероховатости, где  $Q_2 = 5 \cdot 10^{-2}$ . Рис 6, а соответствует  $\rho = 0,3$ ,  $\alpha = 4$  и различные  $H_1$  (1 –  $H_1 = 0$ ; 2 –  $H_1 = 0,01$ ; 3 –  $H_1 = 0,1$ ; 4 –  $H_1 = 1$ ). Рис. 6, б –  $\rho = 0,3$ ,  $H_1 = 1$  и различные  $\alpha$  (1 –  $\alpha = 1$ ; 2 –  $\alpha = 2$ ; 3 –  $\alpha = 7$ ). Рис. 6, в –  $\alpha = 7$ ,  $H_1 = 1$  и различные  $\rho$  (1 –  $\rho = 0,0001$ ; 2 –  $\rho = 0,8$ ; 3 –  $\rho = 0,5$ ; 4 –  $\rho = 0,3$ ; 5 –  $\rho = 1$ ).

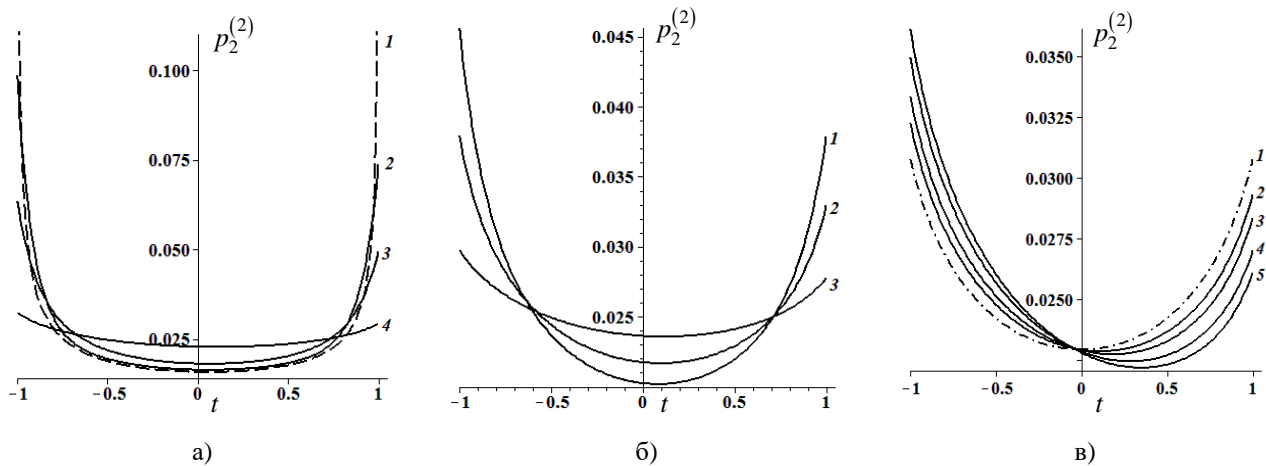


Рис. 6

На рис. 5, а и рис 6, а штриховыми линиями изображены графики одной и той же функции давлений ( $B_1 = H_1 = 0$ ), рассчитанной по формуле (26). Из графиков на этих рисунках следует, что при  $B_1 \rightarrow 0$  и  $H_1 \rightarrow 0$  для всех  $t \in (-1; 1)$  значения функций давлений на шероховатую полосу приближаются к значениям функции давлений на гладкую полосу ( $B_1 = H_1 = 0$ ). На рис. 5, б штриховой линии соответствует график функции давлений для линейного закона, которая полностью совпадает с функцией, построенной в работе [15]. Штриховой линией на рис. 5, в и рис. 6, в показаны функции давлений для  $\rho = 0,0001$ . Их значения отличаются менее, чем на 1% от значений, рассчитанных в работе [9], при  $\rho = 0$  и тех же коэффициентах шероховатости степенного и экспоненциального законов соответственно. Указанные факты свидетельствуют о достоверности результатов.

В диапазоне, где значения коэффициентов шероховатости  $B_1$  или  $H_1$  удовлетворяют одновременно двум соответствующим ограничениям (14) и (15) (то есть коэффициент  $B_1$  или  $H_1$  является и большим, и малым), расчеты проведены по двум алгоритмам. Отклонение между результатами составило менее 1%.

Для малых значений силы  $Q_2$  величины рассчитанные по алгоритму линейного, степенного ( $\kappa = 1$ ) и экспоненциального законов для коэффициентов, связанных равенством  $B_1 = \alpha H_1$ . Результаты имели хорошее согласование.

Для задачи без трения в работе [9] получено согласование с результатами работ [3, 7]. При этом, как показано выше, значения контактных характеристик задачи без трения являются предельным случаем задачи с трением. Это очередное подтверждение достоверности результатов.

Шероховатость поверхности полосы влияет на контактное давление так, что ее наличие делает эту функцию непрерывной во всех точках площадки контакта, в том числе и на границе, в отличие от задачи без учета шероховатости. Трение влияет на функцию давлений так, что она становится несимметричной. Из анализа рис. 5 и рис. 6 следует, что наибольшее значение нормального давления достигается на границе площадки контакта при  $t = -1$ , а

наименьшее – в некоторой внутренней точке площадки контакта. Увеличение коэффициента шероховатости приводит к смещению этой точки в сторону правой границы площадки контакта. Такой же эффект наблюдается с ростом коэффициентов шероховатости  $B_1$  и  $H_1$ , отвечающих за высоту микровыступов шероховатости. Однако, с ростом коэффициентов  $\kappa$  (от 0,1 до 1) и  $\alpha$  (от 1 до 8) абсцисса точки минимума функции контактного давления смещается в сторону к  $t = 0$ .

### ВЫВОДЫ

В работе изучена плоская квазистатическая контактная задача о скольжении с трением штампа с плоским основанием по границе упругого шероховатого слоя (полосы) при нелинейных (степенном и экспоненциальном) законах деформирования шероховатости. Предполагается, что штамп не совершает наклона. Найдено аналитическое решение данной задачи в двух случаях ограничения на коэффициент шероховатости с обоснованием его единственности.

Проведен анализ числовых результатов и получены следующие выводы. При уменьшении коэффициентов шероховатости степенного и экспоненциального законов, зависящих от высоты микровыступов шероховатости, также, как и при уменьшении коэффициента трения, все контактные характеристики приближаются к соответствующим характеристикам без учета шероховатости или трения соответственно. Наибольшее значение контактного давления достигается на границе площадки контакта, а наименьшее – во внутренней точке этой площадки. При увеличении коэффициента трения или коэффициентов шероховатости нелинейных законов, зависящих от высоты микровыступов, абсцисса точки наименьшего давления смещается от центра в направлении действия касательной силы; при этом углубление штампа в упругую шероховатую полосу увеличивается.

Представляют интерес плоские задачи контакта с трением для шероховатой полосы и штампа, совершающего поворот или имеющего неплоское основание. Кроме того, для дальнейшего исследования может быть предложена задача, в которой шероховатость поверхности полосы деформируется по экспоненциально-степенному закону, как это было исследовано в работе [17] без учета трения. Для решения некоторых из этих задач может быть применен подход, изложенный в данной работе.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ткачук Н. Н., Скрипченко Н. Б., Ткачук Н. А., Грабовский А. В. Контактное взаимодействие сложнопрофильных деталей машиностроительных конструкций с учетом локальной податливости поверхностного слоя. Харьков: ФОП Панов А.Н., 2017. 148 с.
2. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчётов на трение и износ. Москва: Машиностроение, 1977. 576 с.
3. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. Москва: Наука, 2001. 478 с.
4. Козачок О. П., Мартиняк Р. М., Слободян Б. С. Взаємодія тіл з регулярним рельєфом за наявності міжконтактного середовища. Львів: Растр-7, 2018. 200 с.
5. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Москва; Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1949. 270 с.
6. Бартенев Г. М., Лаврентьев В. В. Трение и износ полимеров. Москва: Химия, 1972. 240 с.
7. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. Москва: Наука, 1980. 302 с.
8. Гоман О. Г., Шишканова С. Ф., Д'яченко Н. М. Задачі про штампи при різних законах деформування шорсткості. Вісник Херсонського державного технічного університету. 2003. № 3(19). С.98–101.
9. Тітова О. О., Гриценко О. М., Д'яченко Т. А., Стасюк О. В. Плоска контактна задача про вдавнення штампа з плоскою основою в пружну шорстку смугу при різних законах

деформування шорсткості. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2012. № 2. С. 105–113.

10. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. Москва: Наука, 1983. 488 с.
11. Грабко Е. В. Численное решение статической задачи о контакте упругих шероховатых тел при наличии кулонова трения. *Проблеми обчислювальної математики і міцності конструкцій*. 2012. Вип. 18. С. 39–47.
12. Шишканова А. А. О решении контактной задачи с учетом трения и шероховатости для штампа в форме двусвязного квадрата в плане. *Вісник Донецького університету. Сер. А. Природничі науки*. 2004. Вип. 1. С. 95–102.
13. Шашкова Є. В., Д'яченко Н. М. Ковзання з тертям квадратного у плані штампа по межі пружного шорсткого півпростору. *Проблеми корозійно-механічного руйнування, інженерія поверхні, діагностичні системи: Матеріали відкритої науково-технічної конференції молодих науковців і спеціалістів Фізико-механічного інституту ім. Г. В. Карпенка НАН України КНМ*. Львів, 2005. С. 294-297.
14. Pauk V., Zastrau B. W. Plane Contact Problems with Partial Slip for Rough Elastic Half-Space. *J. Theor. Appl. Mech.* 2004. Vol. 42, No. 1. P. 107–124.
15. Дьяченко Н. Н., Синченко Е. С., Качан А. И. Аналитическое и приближенно аналитическое решение плоской контактной задачи с учетом трения и шероховатости. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 79–91.
16. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. Москва: Наука, 1984. 752 с.
17. Д'яченко Н. М., Столярчук І, А., Резвіна Д. Г., Смолянкова Т. М. Експоненціально-степеневий закон деформування шорсткості в плоскій задачі про вдавнення штампа. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичних науки*. 2014. № 2. С. 42–55.

## REFERENCES

1. Tkachuk, M. M., Skripchenko, N. B., Tkachuk, N. A., Lvov, G. I. & Grabovskiy, A. V. (2017). Contact interaction of complex parts engineering constructions taking into account the local compliance of the surface layer. Kharkiv: FOP Panov A. N.
2. Kragelsky, I. V., Dobychin, M. N. & Komalov, V. S. (1977). Fundamentals calculations on a friction and wear. Moscow: Mashinostroenie.
3. Goryacheva, I. G. (2001). Mechanics of friction interaction. Moscow: Nauka.
4. Kozachok, O. P., Martynyak, R. M. & Slobodian, B. S. (2018). Interaction between bodies with regular relief in the presence of an interstitial medium. Lviv: Rastr-7.
5. Shtaerman, I. Ya. (1949). Contact problems of the theory of elasticity. Moscow–Leningrad: Gostekhteorizdat.
6. Bartenev, G. M. & Lavrentev, V. V. (1972). Friction and wear of polymers. Moscow: Himiya.
7. Galin, L. A. (1980). Contact problems in the theory of elasticity and viscoelasticity. Moscow: Nauka.
8. Goman, O. G., Shishkanova, S. F. & Dyachenko, N. M. (2003). Problems of punch in various laws of roughness deformation. *Visnyk Khersonskogo dergavnogo universitetu*, No. 3(19), pp. 98-101.
9. Titova, O. O., Gritsenko, O. M., Dyachenko, T. A. & Stasyuk, O. V. (2012). The plane contact problem on pressing of punch with the flat fundament in the elastic strip at the different laws of deformation of the roughness. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Fyzyko-matematychni nauky*, No. 2, pp. 105-113.
10. Alexandrov, V. M. & Mhitaryan, S. M. (1983). Contact problems for bodies with thin coatings and layers. Moscow: Nauka.
11. Grabko, E. V. (2012). Numerical solution of the static contact problem of elastic rough bodies with coulomb friction. *Problemy obchysliuvalnoi matematyky i mitsnosti konstruksii*, Issue 18, pp. 39-47.
12. Shishkanova, A. A. (2004). About the solution of a contact problem taking into account a friction and a roughness for a punch in the form of a doubly-connected square in the plan. *Visnik Donezskogo universitetu. Pripodnichі nauki*, Issue 1, pp. 95-102.

13. Shashkova, Ye. V. & Dyachenko, N. M. (2006). The decision of the problem about sliding of a punch with friction on border rough half-space by the linear law of deformation of a roughness. Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Fizyko-matematychni nauky, No. 1, pp. 25-33.
14. Pauk, V. & Zastrau, B. W. (2004). Plane Contact Problems with Partial Slip for Rough Elastic Half-Space. J. Theor. Appl. Mech, Vol. 42, No. 1, pp. 107-124.
15. Dyachenko, N. N., Sinchenko, E. S. & Kachan, A. I. (2016). Analytical and approximately analytical solution of the plane contact problem taking into account the friction and the roughness. Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Fizyko-matematychni nauky, No. 1, pp. 79-91.
16. Kantorovich, L. V. & Akilov, G. P. (1984). Functional Analysis. Moskow: Nauka.
17. Dyachenko, N. N., Rezvina, D. G. & Smolyankova, T. N. (2014). Exponential-power the law of deformation of the roughness in the flat problem about indentation of a punch. Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Fizyko-matematychni nauky, No. 2, pp. 42-55.

УДК 519.85

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-05

## МЕТОД ГІЛОК І МЕЖ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ ЛІНІЙНОЇ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ НА РОЗМІЩЕННЯХ З ІМОВІРНІСНОЮ НЕВИЗНАЧЕНІСТЮ

<sup>1</sup>Ємець О. О., <sup>2</sup>Барболіна Т. М.<sup>1</sup>Полтавський університет економіки і торгівлі,  
вул. Ковалю, 3, м. Полтава, Україна<sup>2</sup>Полтавський національний педагогічний університет імені В. Г. Короленка,  
вул. Остроградського, 2, м. Полтава, Україна

yemetsli@ukr.net, tm-b@ukr.net

Актуальним напрямом сучасної теорії оптимізації є дослідження задач комбінаторної природи за різних видів невизначеності. Один із підходів до формулювання оптимізаційних задач з імовірнісною невизначеністю ґрунтується на введенні відношення порядку на фактор-множині, що утворюється при розбитті заданої множини незалежних випадкових величин на основі порівняння їх числових характеристик. Ця стаття присвячена обґрунтуванню методу гілок і меж для розв'язування оптимізаційних задач на розміщеннях, постановка яких здійснена на основі такого підходу.

Зокрема, обґрунтовано алгоритм методу гілок і меж для розв'язування задач оптимізації на розміщеннях з лінійною цільовою функцією, у якій коефіцієнти є детермінованими величинами, тоді як елементи мультимножини є класами еквівалентності за згаданою еквівалентністю ( $H$ -задач). Пропонується проводити галуження загальної множини розміщень, надаючи певні можливі значення частині змінних. Коли отримується одноелементна множина, здійснюється перевірка, чи належить одержане розміщення множині, що визначена додатковими (некомбінаторними) обмеженнями. Запропоновано й обґрунтовано спосіб оцінювання підмножин, у якому використовуються властивості екстремалі в лінійній безумовній задачі стохастичної комбінаторної оптимізації на розміщеннях, сформульовано алгоритм методу гілок і меж. Роботу алгоритму проілюстровано прикладом.

Для лінійної безумовної задачі оптимізації на розміщеннях, у якій коефіцієнти цільової функції є класами еквівалентності, а елементи мультимножини – детермінованими величинами ( $H_d$ -задач), встановлено зв'язок із  $H$ -задачами. Спираючись на цей взаємозв'язок та властивості розв'язку  $H$ -задачі, встановлено властивості мінімалі у розв'язку  $H_d$ -задачі. Розглянуто особливості застосування методу гілок і меж для розв'язування  $H_d$ -задач: як і для  $H$ -задачі пропонується використовувати галуження «вглиб», також обґрунтовано спосіб оцінювання підмножин.

*Ключові слова:* евклідова задача комбінаторної оптимізації, задача оптимізації на розміщеннях, стохастична комбінаторна оптимізація, метод гілок і меж.