УДК 531:383-62:50 DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-11

МІНІМАКСНЕ КЕРУВАННЯ ГІРОСКОПІЧНИМИ СИСТЕМАМИ

[1]Новицький В. В., д. ф.-м. н., професор, [1]Коломійчук О. П., к. ф.-м. н., [2]Святовець І. Ф., к. ф.-м. н.

[1]*Інститут математики НАН України, вул. Терещенківська, Київ-4, 301601,Україна*

[2]*Запорізька державна інженерна академія, пр. Соборний, 226, м. Запоріжжя, 69006, Україна*

novyc@imath.kiev.ua, kolomithyk@rambler.ru, sv.irina0702@gmail.com

При вирішенні практичних задач механіки, гіроскопії і навігації традиційно застосовуються моделі майже консервативних систем, зокрема керованих, характеристики яких можна суттєво поліпшити за допомогою методів оптимального керування. Використовуючи специфіку матриці коефіцієнтів у рівняннях майже консервативних систем і наявність малого параметра при матриці збурень, процес вирішення задач оптимального керування можна значно спростити.
У статті досліджується задача мінімаксного керування для лінійної стаціонарної динамічної майже консервативної системи (консервативної системи зі слабко збуреною матрицею коефіцієнтів), на яку діє невідоме збурення з обмеженою енергією.
Формулюється необхідна умова існування розв’язку рівняння Ріккаті відповідного вигляду, та знаходиться умова для оцінки параметра, що входить у рівняння Ріккаті.
Використовується один з ефективних підходів до знаходження розв’язку рівняння Ріккаті для майже консервативних систем. А саме: матриця-розв’язок рівняння Ріккаті представляється у вигляді розкладу в ряд за малим параметром, і невідомі складові цієї матриці визначаються з нескінченної системи матричних рівнянь.
Наводиться приклад застосування запропонованих алгоритмів до моделі двох зв’язаних керованих осциляторів.
У прикладному плані представлені в статті дослідження є ефективними для розробки стійких до збурень гіроскопічних і навігаційних систем.
Ключові слова: майже консервативна система, мінімаксне керування, рівняння Ріккаті.

MINIMAX CONTROL OF GYROSCOPIC SYSTEMS

[1]Novitsky V. V., [1]Kolomiychuk O. P., [2]Svyatovets I. F.

[1]*Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Tereschenkivska str., Kiev-4, 301601, Ukraine*

[2]*Zaporizhzhya State Engineering Academy, Soborny ave., 226, Zaporizhzhya, 69006, Ukraine*

novyc@imath.kiev.ua, kolomithyk@rambler.ru, sv.irina0702@gmail.com

In solving practical problems of mechanics, gyroscopy and navigation, models of almost conservative systems, in particular, controlled, whose characteristics can be substantially improved by means of optimal control, are traditionally used. Using the specificity of the matrix of coefficients in the equations of almost conservative systems and the presence of a small parameter in the perturbation matrix, the process of solving optimal control problems can be greatly simplified.
The article deals with the problem of the minimax control for a linear stationary dynamic almost conservative system (a conservative system with a weakly perturbed matrix of coefficients), on which there is an unknown perturbation with limited energy.
The necessary condition for the existence of a solution of the Riccati equation of the corresponding form is formulated, and a condition for evaluating the parameter included in the Riccati equation is found.
One of the effective approaches to finding a solution to the Riccati equation for almost conservative systems is used. Namely, the matrix-solution of the Riccati equation is represented in the form of a decomposition in series for a small parameter, and the unknown components of this matrix are determined from an infinite system of matrix equations.
An example of the application of the proposed algorithms to the model of two connected controlled oscillators is presented.
In terms of application the research papers presented in this article are effective for the development of gyroscopic and navigational systems resistant to perturbation.
Key words: almost conservative system, minimax control, Riccati equation.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА УМОВА ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ

Нехай на керовану лінійну стаціонарну майже консервативну систему [1, 2] діє невідоме збурення $f(t)$ з обмеженою енергією. Модель матиме вигляд

$$\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x + \varepsilon Bu + \varepsilon \Psi f , \tag{1}$$

де $x = [x_1, ..., x_{2n}]^T$ $2n$-вимірний вектор стану, $u = [u_1, ..., u_m]^T$ – m-вимірний вектор керувань, ε – малий параметр; $A_0, A_1 \in \Re_{2n\times 2n}$, причому $A_0 = -A_0^T$ и $\det(A_0) \neq 0$, $B \in \Re_{2n\times m}$ – матриця при керуванні, $\Psi \in \Re_{2n\times k}$ – матриця при збуренні.

Проблема мінімаксного керування [3–5] полягає в тому, щоб знайти керування $u(t)$, яке мінімізує функціонал

$$J = \int_0^\infty \left(x^T Qx + u^T u - \gamma^2 f^T f\right)dt \tag{2}$$

і збурення $f(t)$, що його максимізує.

У функціоналі (2) γ – задане число, $Q > 0$ – додатно визначена матриця.

Бажане оптимальне керування шукатимемо у вигляді

$$u = -\varepsilon B^T Sx, \tag{3}$$

а найгірше збурення

$$f = K_f x, \quad K_f = \varepsilon \gamma^{-2} \Psi^T S . \tag{4}$$

Тут S – додатно визначена матриця-розв'язок матричного рівняння Ріккаті наступного вигляду

$$S(A_0 + \varepsilon A_1) + (A_0 + \varepsilon A_1)^T S - \varepsilon^2 SBB^T + \gamma^{-2}\varepsilon^2 S\Psi\Psi^T S + Q = 0 . \tag{5}$$

Якщо покласти

$$P = \varepsilon S , \tag{6}$$

матричне рівняння (5) перепишеться у такий спосіб

$$P(A_0 + \varepsilon A_1) + (A_0 + \varepsilon A_1)^T P - \varepsilon PBB^T P + \gamma^{-2}\varepsilon P\Psi\Psi^T P + \varepsilon Q = 0 . \tag{7}$$

Відзначимо, що не для всіх значень γ існує додатно визначена матриця P, яка є розв'язком рівняння Ріккаті (7). Відомо [3], що існує мінімальне значення $\gamma = \gamma_{\min}$ таке, що для всіх значень $\gamma \in [\gamma_{\min}, \infty)$ матриця P додатно визначена, а при $\gamma < \gamma_{\min}$ матриця P знакозмінна.

Перепишемо рівняння (7) у зручному для подальшого дослідження вигляді

$$P(A_0 + \varepsilon A_1) + (A_0 + \varepsilon A_1)^T P - \varepsilon P\left(BB^T - \gamma^{-2}\Psi\Psi^T\right)P + \varepsilon Q = 0 . \tag{8}$$

Виходячи з формулювання задачі мінімаксного керування, зрозуміло, що керування $u(t)$ повинно діяти на систему по тих же $m \le n$ каналах, що і збурення $f(t)$. Інакше кажучи, ненульові елементи матриці $\Psi \in \Re_{2n\times k}$ можуть розташовуватися тільки в тих рядках, у яких знаходяться ненульові елементи матриці $B \in \Re_{2n\times m}$, яка має максимальний ранг m. З цього, очевидно, випливає така умова

$$2n \ge m = rang(B) \ge rang(\Psi). \tag{9}$$

Відомо [8–11], що $rang\left(AA^T\right)=rang(A)$. Тоді умова (9) може бути записана у вигляді

$$2n \ge m = rang\left(BB^T\right) \ge rang\left(\Psi\Psi^T\right). \tag{10}$$

Оцінимо параметр γ. Припустимо, що

$$BB^T - \gamma^{-2}\Psi\Psi^T \tag{11}$$

з (8) є невід'ємно визначеною матрицею рангу m.

Знайдемо конструктивні умови для оцінки параметра γ, що входить у рівняння Ріккаті (8).

З викладеного вище випливає, що

$$N = BB^T - \gamma^{-2}\Psi\Psi^T = B\left(I_m - \gamma^{-2}HH^T\right)B^T. \tag{12}$$

Матриця N матиме максимальний ранг m тоді та тільки тоді, коли буде невиродженою матриця

$$M = I_m - \gamma^{-2}HH^T. \tag{13}$$

Для існування додатно визначеного розв'язку $P>0$ рівняння Ріккаті (8) M повинна бути теж додатно визначеною, що буде тоді і тільки тоді, коли виконано умову [9]

$$|\gamma| \ge \sqrt{\lambda_{\max}\left(HH^T\right)}. \tag{14}$$

ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ РІККАТІ ДЛЯ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ

Для розв'язання рівняння (8) застосуємо викладений у роботі [6–7] підхід, який був запропонований для розв'язання задачі оптимального керування майже консервативними системами з малим параметром. А саме, шукатимемо матрицю-розв'язок P у вигляді розкладу за малим параметром

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_i\,. \tag{15}$$

У такому ж вигляді представимо і матрицю Q

$$Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_i\,. \tag{16}$$

Підставивши (15) і (16) в (8), одержуємо

$$\begin{gathered}\left(P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \ldots\right)\cdot\left(A_0 + \varepsilon A_1\right) + \left(A_0 + \varepsilon A_1\right)^T\cdot\left(P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \ldots\right) - \\ - \varepsilon\cdot\left(P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \ldots\right)\cdot\left(BB^T - \gamma^{-2}\Psi\Psi^T\right)\cdot\left(P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \ldots\right) + \\ + \varepsilon\cdot\left(Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \ldots\right) = 0\,.\end{gathered} \tag{17}$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε, отримаємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь типу Ріккаті

$$A_0 P_0 - P_0 A_0 = 0\,, \tag{18}$$

$$A_0 P_i - P_i A_0 = P_{i-1}A_1 + A_1^T P_{i-1} - \sum_{k=0}^{i-1} P_k\cdot\left(BB^T - \gamma^{-2}\Psi\Psi^T\right)\cdot P_{i-1-k} + Q_{i-1}, \quad i = 1,2,\ldots. \tag{19}$$

Для знаходження бажаного наближення матриці-розв'язку P потрібно послідовно розв'язати відповідну кількість рівнянь даної системи.

ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ НАВЕДЕНОГО ВИЩЕ ПІДХОДУ

Розглянемо систему четвертого порядку, яка відповідає моделі двох зв'язаних керованих осциляторів з матрицями

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = 0,$$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} q_{01} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{02} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{03} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{04} \end{bmatrix}, \quad Q_i = 0, \quad i = 1,2,..., \tag{20}$$

$\omega_1, \omega_2 > 0$, $\omega_1 \neq \omega_2$, $q_{01}, q_{02}, q_{03}, q_{04} > 0$. Оберемо матрицю Ψ при збуренні у вигляді, що задовольняє умовам існування розв'язку рівняння. Нехай

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Оцінимо параметр γ. Для цього обчислимо матрицю (11)

$$BB^T - \gamma^{-2}\Psi\Psi^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\dfrac{1}{\gamma^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Для невід'ємної визначеності цієї матриці необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова $\gamma^2 \geq 1$. Але, враховуючи умову рівності рангів матриць BB^T і $BB^T - \gamma^{-2}\Psi\Psi^T$, остаточно отримаємо $\gamma^2 > 1$, або $|\gamma| > 1$. Будемо шукати матрицю – розв'язок P з точністю до першого порядку мализни за ε, тобто у вигляді $P = P_0 + \varepsilon P_1$.

Після розв'язання рівняння (18) отримаємо загальний вигляд матриці P_0, а саме –

$$P_0 = \begin{bmatrix} p_{11}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{22}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{11}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{22}^0 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

При розв'язанні першого рівняння із системи (19) знайдемо значення

$$p_{11}^0 = \sqrt{\frac{\gamma^2(q_{01}+q_{03})}{\gamma^2-1}}, \quad p_{22}^0 = \sqrt{q_{02}+q_{04}} \tag{24}$$

та загальний вигляд матриці P_1, а саме –

$$P_1 = \begin{bmatrix} p_{11}^1 & 0 & \dfrac{q_{01}}{2\omega_1} & 0 \\ 0 & p_{22}^1 & 0 & \dfrac{q_{02}}{2\omega_2} \\ \dfrac{q_{01}}{2\omega_1} & 0 & p_{11}^1 & 0 \\ 0 & \dfrac{q_{02}}{2\omega_2} & 0 & p_{22}^1 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

З другого рівняння (19) знайдемо значення

$$p_{11}^1 = 0, \quad p_{22}^1 = 0. \tag{26}$$

Остаточно, з точністю до першого наближення, матриця-розв'язок P матиме наступний вигляд

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{\dfrac{\gamma^2(q_{01}+q_{03})}{\gamma^2-1}} & 0 & \varepsilon\dfrac{q_{01}}{2\omega_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{q_{02}+q_{04}} & 0 & \varepsilon\dfrac{q_{02}}{2\omega_2} \\ \varepsilon\dfrac{q_{01}}{2\omega_1} & 0 & \sqrt{\dfrac{\gamma^2(q_{01}+q_{03})}{\gamma^2-1}} & 0 \\ 0 & \varepsilon\dfrac{q_{02}}{2\omega_2} & 0 & \sqrt{q_{02}+q_{04}} \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Тоді

$$S = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\varepsilon}\sqrt{\dfrac{\gamma^2(q_{01}+q_{03})}{\gamma^2-1}} & 0 & \dfrac{q_{01}}{2\omega_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\varepsilon}\sqrt{q_{02}+q_{04}} & 0 & \dfrac{q_{02}}{2\omega_2} \\ \dfrac{q_{01}}{2\omega_1} & 0 & \dfrac{1}{\varepsilon}\sqrt{\dfrac{\gamma^2(q_{01}+q_{03})}{\gamma^2-1}} & 0 \\ 0 & \dfrac{q_{02}}{2\omega_2} & 0 & \dfrac{1}{\varepsilon}\sqrt{q_{02}+q_{04}} \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Шукане керування матиме вигляд

$$u = \begin{bmatrix} -\varepsilon\dfrac{q_{01}}{2\omega_1}x_1 - \sqrt{\dfrac{\gamma^2(q_{01}+q_{03})}{\gamma^2-1}}x_3 \\ -\varepsilon\dfrac{q_{02}}{2\omega_2}x_2 - \sqrt{q_{02}+q_{04}}x_4 \end{bmatrix}, \tag{29}$$

а найгірше збурення

$$f = \left[\frac{\varepsilon q_{01}}{2\gamma^2\omega_1}x_1 + \sqrt{\frac{q_{01}+q_{03}}{\gamma^2(\gamma^2-1)}}x_3\right]. \tag{30}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Новицький В. В. Керування гіроскопічними системами та інші задачі аналітичної механіки. *Математика та її застосування: праці Інституту математики НАН України*. 2008. Т. 78. 124 с.
2. Новицький В. В. Рівняння Ляпунова для майже консервативних систем. Київ: Інститут математики НАН України, 2004. 33 с. (Препринт / НАН України, Ін-т математики; 2004-7).
3. Александров А. Г. Методы построения систем автоматического управления. Москва: Физматлит, 2008. 232 с.
4. Бирюков Р. С. Минимаксное управление линейным объектом при внешнем возмущении и неопределенных начальных условиях на конечном временном интервале. *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского*. 2013. № 3(1). С. 206–211.
5. Игнащенко Е. Ю., Панков А. Р., Семенихин К. В. Минимакс-статистический подход к оптимизации линейных моделей в условиях априорной неопределенности. *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2010, № 5. С. 32–40.
6. Новицкий В. В., Хуан Чень Оптимальное управление почти консервативными системами. *Сучасні проблеми аналітичної механіки:* зб. праць Ін-ту математики НАН України. 2004. Т. 1, № 2. С. 152–157.
7. Зінчук М. О., Новицький В. В. Оптимальне керування неперервними майже консервативними системами. *Проблеми аналітичної механіки:* зб. праць Ін-ту математики НАН України. 2006. Т. 3, № 1. С. 75–89.
8. Стренг Г. Линейная алгебра и её применения. Москва: Мир, 1980. 456 с.
9. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. Москва: Мир, 1989. 656 с.
10. Ланкастер П. Теория матриц. Москва: Наука, 1978. 280 с.
11. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Москва: Наука, 1988. 552 с.

REFERENCES

1. Novitskiy, V. V. (2008). Control of gyroscopic systems and other analytical mechanics problems. Matematika ta yiyi zastosuvannya: pratsi Institutu matematyki NAN Ukrainy, Vol. 78, 124 p.
2. Novitskiy, V. V. (2004). Lyapunov equation for almost conservative systems. Kiev: Institut matematyki, 33 p. (Preprint. NAN Ukrainy, Institut matematyki; 2004.7).
3. Aleksandrov, A. G. (2008). Methods of construction of automatic control systems. Moskow: Fizmatlit.
4. Biryukov, R. S. (2013). Minimax control of linear object in the external disturbance and undefined initial conditions on a finite time interval. Matematicheskoe modelirovanie. Optimalnoe upravlenie. Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I.Lobachevskogo, Vol. 3, No. 1, pp. 206-211.
5. Ignashshenko, E. YU., Pankov, A. R. & Semenixin, K. V. (2010). Minimax-statistical approach to optimizing linear models under the conditions of a priori uncertainty. Izvestiya RAN. Teoriya I sistemy upravleniya, Vol. 5, pp. 32-40.
6. Novitskiy, V. V. & Khuan Chen (2004). Optimal control almost conservative systems. Suchasni problemy analitychnoyi mekhaniky: zbirnyk prats Institutu matematyki NAN Ukrainy, Vol. 1, No. 2, pp. 152-157.
7. Zinchuk, M. O. & Novitskiy, V. V. (2006). Optimal control of continuous almost conservative systems. Problemy analitychnoyi mekhaniky: zbirnyk prats Institutu matematyki NAN Ukrainy, Vol. 3, No. 1, pp. 75-89.
8. Streng, G. (1980). Linear algebra and its application. Moskow: Mir.
9. Khorn, R. & Dzhonson, Ch. (1989). Matrix Analysis. Moskow: Mir.
10. Lankaster, P. (1978). Matrix theory. Moskow: Nauka.
11. Gantmaxer, F. R. (1988). Matrix theory. Moskow: Nauka.