

24. Stastný, J., Skorpil, V. & Fejfar, J. (2013). Audio Data Classification by Means of New Algorithms. 36th International conference on Telecommunications and Signal Processing 2013, (pp. 507-511), Rome, Italy.
25. Sturm, B.L. (2014). A Survey of Evaluation in Music Genre Recognition. Adaptive Multimedia Retrieval: Semantics, Context, and Adaptation. AMR 2012. Lecture Notes in Computer Science, Vol 8382, pp. 29-66.
26. Wichern, G., Yamada, M., Thornburg, H., Sugiyama, M. & Spanias, A. (2010). Automatic audio tagging using covariate shift adaptation. IEEE international conference Acoustics speech and signal processing (ICASSP), 14-19 Mar 2010.
27. Xu, Y., Huang, Q., Wang, W., Foster, P., Sigtia, S., Jackson, P.J.B. & Plumbley, M.D. (2017). Unsupervised Feature Learning Based on Deep Models for Environmental Audio Tagging. IEEE/ACM transactions on audio, speech and language processing, Vol 25(6), pp. 1230-1241.
28. Zaccone, G. & Karim, Md. R. (2018). Deep learning with TensorFlow. Packt Publishing.

УДК 519.172

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-06

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО РИСУНКА НЕПЛАНАРНОГО ГРАФА

Курапов С. В., к. ф.-м. н., доцент, Сгадов С. А.

*Запорожский национальный университет,  
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

lilili5050@rambler.ru, sgadovsa@bk.ru

В данной работе рассматриваются алгебраические методы построения топологического рисунка несепарабельного непланарного графа. Базовым понятием для построения топологического рисунка является теория вращений. Приведен метод выбора оптимального маршрута для проведения соединения на дуальном графе циклов. Рассмотрена операция включения ранее не проведенных ребер в плоский топологический рисунок.

*Ключевые слова: граф, вращение вершины, топологический рисунок.*

## АЛГЕБРАЇЧНІ МЕТОДИ ПОБУДОВИ ТОПОЛОГІЧНОГО РИСУНКА НЕПЛАНАРНОГО ГРАФА

Курапов С. В., к. ф.-м. н., доцент, Сгадов С. А.

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

lilili5050@rambler.ru, sgadovsa@bk.ru

У цій роботі розглядаються алгебраїчні методи побудови топологічного рисунка несепарабельного непланарного графа. Доведено, що граф довільного виду можна розбити на блоки, кожен із яких являє собою максимальний нероздільний підграф. Показана структурна перебудова сепарабельного графа в несепарабельну частину графа. Застосування методів теорії обертання вершин дозволяє описувати топологічний рисунок плоскої частини графа. Так само обертання вершин індукує прості орієнтовані цикли графа. І це в підсумку дозволяє будувати топологічний рисунок графа алгебраїчними методами, не проводячи ніяких геометричних побудов на площині. Плоска частина графа будується алгоритмом виділення підмножини ізометричних циклів з потужністю, рівною цикломатичному числу графа, що характеризується мінімальним значенням функціоналу Маклейна з подальшим видаленням мінімальної кількості ребер. Подальша побудова для проведення з'єднань, віддалених у процесі планаризації, здійснюється пошуком маршрутів для пересічних з'єднань. Наведено метод вибору оптимального маршруту для проведення з'єднання на дуальному графі циклів. Розглянуто операцію включення раніше не проведених ребер у плоский топологічний рисунок.

*Ключові слова: граф, обертання вершини, топологічний рисунок.*

## ALGEBRAIC CONSTRUCTION METHODS OF THE TOPOLOGICAL DRAWING OF NONPLANARIC GRAPH

Kurapov S. V., Ph.D., Associate Professor, Sgadov S. A.

Zaporizhzhya National University,  
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine

lilili5050@rambler.ru, sgadovsa@bk.ru

In this paper, we consider algebraic methods for constructing a topological picture of an inseparable nonplanar graph. It is shown that graph of arbitrary form can be divided into blocks, each of which is a maximal inseparable subgraph. Here restructuring of the separable graph into a non-separable part of graph have been shown.. Using of vertices rotation theory methods allows to describe topological drawing of flat part of the graph. In turn, the vertex rotation induces oriented elementary graph's circles. Finally this allows topological graph drawing build by algebraic methods without any geometrical constructing in the plane. The flat part of the graph is built with extraction algorithm of subset of isometric cycles with a capacity equal to the cyclomatic number of the graph, characterizing with minimum value of the McLane's functional, followed by removing the minimum number of edges. Futher removed during planarization connections building is performed with searching of intersecting connections routes. A method for selecting the optimal route for the connection the connection on the dual cycles' graph is given. The construction of a dual graph allows one to find routes for making connections that have been removed in the process of planarization. When making connections corresponding to the chosen route, the intersection of the edges is considered as the formation of additional vertices in the flat graph graph. The newly introduced vertices are described by rotating the vertices of the graph. This allows us to consider the implementation of intersecting connections as the construction of a new topological drawing with added vertices. Operation of including of previously unrouted edges in planar topological drawing have been considered.

Key words: graph, vertex rotation, topological drawing.

### ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются алгебраические методы для построения топологического рисунка непланарного графа.

Если *граф* состоит из нескольких *компонент связности*, то его можно изучать «по частям», и это может упростить описание графа и облегчить решение многих задач. Однако и *связный граф* иногда можно представить как состоящий из частей, и такое *представление* также может быть полезным (рис. 1). После *компонент связности* простейшими частями такого рода являются блоки (называемые также компонентами *двусвязности*).

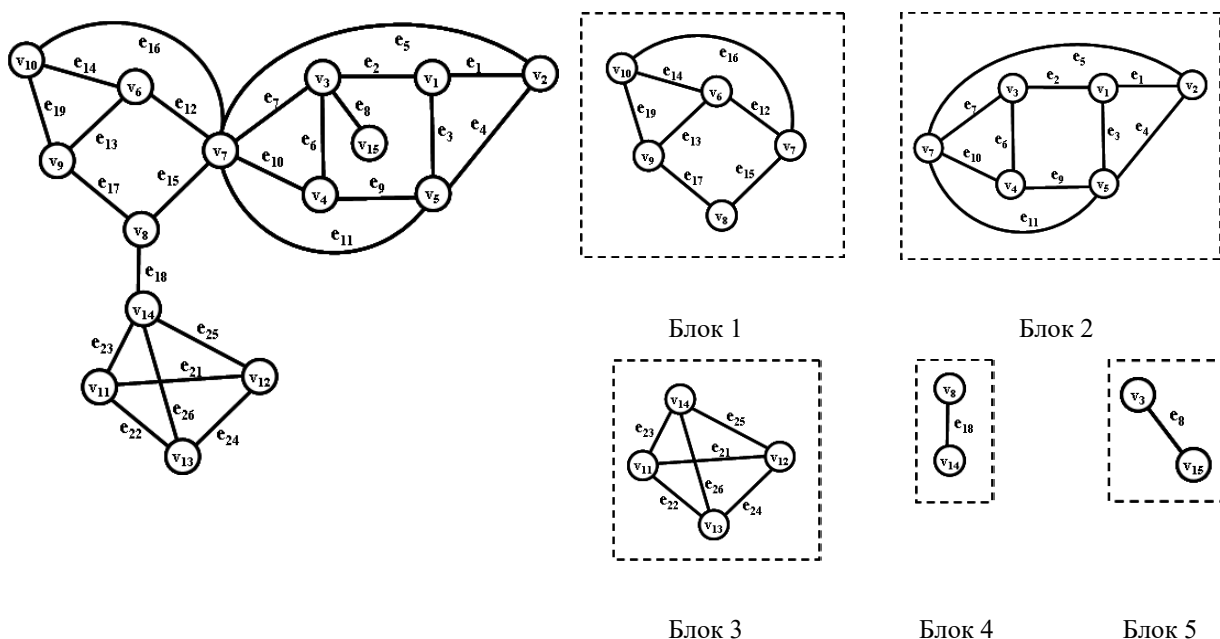


Рис. 1. Связный сепарабельный граф  $G$  и его блоки

Не ко всякому графу можно применить критерий планарности Маклейна [1] для проверки планарности или для выделения плоской части. Очевидно, что нельзя применить данный критерий к графу, имеющему хотя бы одну точку сочленения. Такой граф является разделимым и называется *сепарабельным*. Он разбивается на блоки, каждый из которых представляет собой максимальный неразделимый подграф. Граф, имеющий мосты, также можно отнести к сепарабельным графам.

Граф  $G$  называется *неразделимым*, если он связный и не имеет точек сочленения. Такой граф называется *несепарабельным*.

С другой стороны, применение методов теории вращения вершин, индуцирующих простые циклы, для описания топологического рисунка графа [3] требует видоизменения некоторого вида графов. К таким графам относятся графы с петлями, графы с кратным количеством ребер (мультиграфы), графы с «висячими» вершинами. Кроме того, в некоторых видах графа цепочка ребер, состоящих из вершин с локальной степенью два, должна быть заменена одним ребром (см. рис. 2).

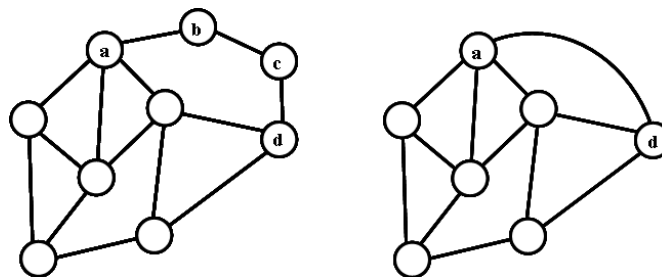


Рис. 2. Замена цепочки ребер одним ребром

Таким образом, требуется как-то обозначить вид графов, к которым можно применять понятие топологического рисунка графа и критерий планарности Маклейна. С этой целью расширим понятие несепарабельного графа [4].

**Определение 1.** *Несепарабельным графом  $G$*  будем называть связный неориентированный граф без петель и кратных ребер, без мостов и точек сочленения, без вершин с локальной степенью меньше или равной двум.

В дальнейшем будем рассматривать только несепарабельные графы.

### ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ РИСУНОК ГРАФА И ЕГО ОПИСАНИЕ

Известно, что топологический рисунок планарного графа можно описать диаграммой вращения его вершин [3]

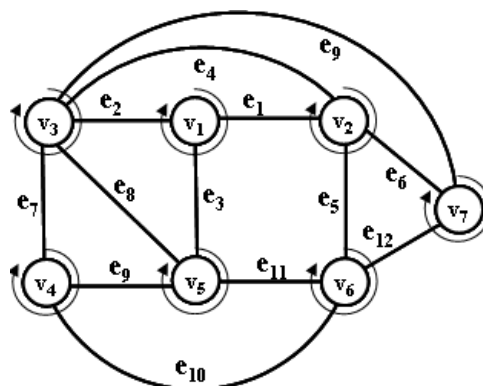


Рис. 3. Топологический рисунок  $(G, \hat{h})$  для графа  $G$

Например, топологический рисунок графа  $(G, \hat{h})$ , представленный на рис. 3, описывается следующей диаграммой вращения вершин:

$$\begin{aligned} \hbar(v_1): & \quad v_3 \quad v_2 \quad v_5, \\ \hbar(v_2): & \quad v_1 \quad v_3 \quad v_7 \quad v_6, \\ \hbar(v_3): & \quad v_5 \quad v_4 \quad v_7 \quad v_2 \quad v_1, \\ \hbar(v_4): & \quad v_3 \quad v_5 \quad v_6, \\ \hbar(v_5): & \quad v_4 \quad v_3 \quad v_1 \quad v_6, \\ \hbar(v_6): & \quad v_4 \quad v_5 \quad v_2 \quad v_7, \\ \hbar(v_7): & \quad v_2 \quad v_3 \quad v_6. \end{aligned}$$

Топологический рисунок может быть записан в виде множества вращения вершин графа:

$$\begin{aligned} \hbar(\mathbf{G}) = \{ & \hbar(v_1) = \langle v_3, v_2, v_5 \rangle, \hbar(v_2) = \langle v_1, v_3, v_7, v_6 \rangle, \hbar(v_3) = \langle v_5, v_4, v_7, v_2, v_1 \rangle, \\ & \hbar(v_4) = \langle v_3, v_5, v_6 \rangle, \hbar(v_5) = \langle v_4, v_3, v_1, v_6 \rangle, \hbar(v_6) = \langle v_4, v_5, v_2, v_7 \rangle, \hbar(v_7) = \langle v_2, v_3, v_6 \rangle \}. \end{aligned}$$

Запись вращения вершин трактуется как циклическая запись ненулевых элементов соответствующей строки в матрицы смежностей графа. Запись в виде кортежа можно трактовать как запись циклического кортежа. Например,  $\hbar(v_3) = \langle v_5, v_4, v_7, v_2, v_1 \rangle = \langle v_4, v_7, v_2, v_1, v_5 \rangle = \langle v_7, v_2, v_1, v_5, v_4 \rangle = \langle v_2, v_1, v_5, v_4, v_7 \rangle$ .

В свою очередь, вращение вершин индуцирует ориентированные циклы. Следует заметить, что ориентация базисных циклов направлена в противоположную сторону, за исключением обода  $c_0$ . Запишем циклы в виде циклического кортежа вершин, который можно преобразовать в сумму ориентированных ребер графа (дуг графа):

$$\begin{aligned} c_1 &= \langle v_3, v_4, v_5 \rangle = (v_3, v_4) + (v_4, v_5) + (v_5, v_3); \\ c_2 &= \langle v_1, v_3, v_5 \rangle = (v_1, v_3) + (v_3, v_5) + (v_5, v_1); \\ c_3 &= \langle v_1, v_5, v_6, v_2 \rangle = (v_1, v_5) + (v_5, v_6) + (v_6, v_2) + (v_2, v_1); \\ c_4 &= \langle v_2, v_6, v_7 \rangle = (v_2, v_6) + (v_6, v_7) + (v_7, v_2); \\ c_5 &= \langle v_4, v_6, v_5 \rangle = (v_4, v_6) + (v_6, v_5) + (v_5, v_4); \\ c_6 &= \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = (v_1, v_2) + (v_2, v_3) + (v_3, v_1); \\ c_7 &= \langle v_2, v_7, v_3 \rangle = (v_2, v_7) + (v_7, v_3) + (v_3, v_2); \\ c_0 &= \langle v_3, v_7, v_6, v_4 \rangle = (v_3, v_7) + (v_7, v_6) + (v_6, v_4) + (v_4, v_3). \end{aligned}$$

Данный вид записи нужно рассматривать не как арифметическое сложение ребер, а как последовательность ребер в цикле. Например, циклическая запись цикла  $c_7$  показывает, что за ребром  $(v_2, v_7)$  следует ребро  $(v_7, v_3)$ , за ребром  $(v_7, v_3)$  следует ребро  $(v_3, v_2)$  и процесс объявляется замкнутым.

С другой стороны, каждый индуцированный вращением простой цикл характеризует суграф в подпространстве циклов и может быть записан в виде множества входящих в него ребер, который можно преобразовать в координатную форму или записать в виде множества вершин:

$$\begin{aligned} c_1 &= \{e_7, e_8, e_9\} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0) \rightarrow \{v_3, v_4, v_5\}; \\ c_2 &= \{e_2, e_3, e_8\} = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \rightarrow \{v_1, v_3, v_5\}; \\ c_3 &= \{e_1, e_3, e_5, e_{11}\} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \rightarrow \{v_1, v_2, v_5, v_6\}; \\ c_4 &= \{e_5, e_6, e_{12}\} = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \rightarrow \{v_2, v_6, v_7\}; \\ c_5 &= \{e_9, e_{10}, e_{11}\} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0) \rightarrow \{v_4, v_5, v_6\}; \\ c_6 &= \{e_1, e_2, e_4\} = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}; \\ c_7 &= \{e_4, e_6, e_9\} = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \rightarrow \{v_2, v_3, v_7\}; \\ c_0 &= \{e_7, e_8, e_{10}, e_{12}\} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1) \rightarrow \{v_3, v_4, v_6, v_7\}. \end{aligned}$$

Система базисных циклов обладает следующим свойством:

$$\sum_{i=1}^{m-n+1} c_i \oplus c_0 = \emptyset. \quad (1)$$

Кольцевая сумма базисных циклов и обода – пустое множество.

### ГРАФ ЦИКЛОВ И ЕГО СВОЙСТВА

Так как индуцированные циклы проходят по ребру  $e_i$  дважды – один раз в прямом направлении, а другой – в обратном, то топологический рисунок может характеризовать только плоские графы. Для описания рисунка непланарного графа введем понятие дуального графа  $Q$  к плоскому графу. Такой дуальный плоский граф будем называть графом циклов и обозначать латинской буквой  $Q$ . Например, для нашего топологического рисунка графа  $(G, \hat{h})$  граф  $Q$  имеет вид (см. рис. 4).

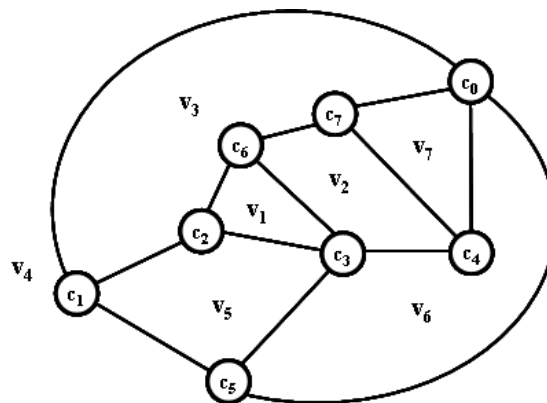


Рис. 4. Граф циклов  $Q$

Рассмотрим свойства графа циклов  $Q$ :

- граф циклов  $Q$  планарного графа – планарен;
- количество независимых простых циклов в графе циклов  $Q$  определяется рангом исходного графа  $G$ ;
- каждому простому циклу в графе циклов  $Q$  может быть поставлен в соответствие центральный разрез соответствующей вершины исходного графа.

Рассмотрим алгоритм определения соответствия между циклами в графе циклов  $Q$  и центральными разрезами для вершины исходного графа  $G$ .

Выписываем все циклы исходного графа  $G$ , в которых содержится вершина  $v_1$ :

$$c_2 = (v_1, v_3) + (v_3, v_5) + (v_5, v_1);$$

$$c_3 = (v_1, v_5) + (v_5, v_6) + (v_6, v_2) + (v_2, v_1);$$

$$c_6 = (v_1, v_2) + (v_2, v_3) + (v_3, v_1).$$

Удалим симметричные ориентированные ребра:

$$c_2 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) + (v_3, v_5) + (\mathbf{v}_5, \mathbf{v}_1);$$

$$c_3 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_5) + (v_5, v_6) + (v_6, v_2) + (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1);$$

$$c_6 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + (v_2, v_3) + (\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1).$$

Будем записывать ориентированные ребра в обратном порядке, соблюдая их последовательность появления, причем нижним индексом будем помечать каждое ориентированное ребро, принадлежащее соответствующему циклу графа циклов  $Q$ . Начинаем с последнего цикла:

$$s(v_1) \rightarrow (v_3, v_2)_6 + (v_2, v_6)_3 + (v_6, v_5)_3 + (v_5, v_3)_2.$$

Нижний индекс в такой записи ориентированного ребра означает номер соответствующего цикла. Тем самым мы поставили в соответствие центральному разрезу вершины  $v_1$  простой ориентированный цикл графа  $G$  в виде последовательности ориентированных ребер. Если рассматривать последовательность циклов в данной записи, то можно поставить в соответствие центральному разрезу вершины  $v_1$  циклический кортеж циклов:

$$s(v_1) \rightarrow \langle c_6, c_3, c_2 \rangle = (c_6, c_3) + (c_3, c_2) + (c_2, c_6).$$

Выписываем все циклы исходного графа  $G$ , в которых содержится вершина  $v_2$ :

$$c_3 = \langle v_1, v_5, v_6, v_2 \rangle = (v_1, v_5) + (v_5, v_6) + (v_6, v_2) + (v_2, v_1);$$

$$c_4 = \langle v_2, v_6, v_7 \rangle = (v_2, v_6) + (v_6, v_7) + (v_7, v_2);$$

$$c_6 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = (v_1, v_2) + (v_2, v_3) + (v_3, v_1);$$

$$c_7 = \langle v_2, v_7, v_3 \rangle = (v_2, v_7) + (v_7, v_3) + (v_3, v_2).$$

Удалим симметричные ориентированные ребра:

$$c_3 = \langle v_1, v_5, v_6, v_2 \rangle = (v_1, v_5) + (v_5, v_6) + (\mathbf{v_6, v_2}) + (\mathbf{v_2, v_1});$$

$$c_4 = \langle v_2, v_6, v_7 \rangle = (\mathbf{v_2, v_6}) + (v_6, v_7) + (\mathbf{v_7, v_2});$$

$$c_6 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = (\mathbf{v_1, v_2}) + (\mathbf{v_2, v_3}) + (v_3, v_1);$$

$$c_7 = \langle v_2, v_7, v_3 \rangle = (\mathbf{v_2, v_7}) + (v_7, v_3) + (\mathbf{v_3, v_2}).$$

Будем записывать ориентированные ребра в обратном порядке, соблюдая их последовательность появления, причем нижним индексом будем пометать каждое ориентированное ребро, принадлежащее соответствующему циклу графа циклов  $Q$ . Начинаем с последнего цикла:

$$s(v_2) \rightarrow (v_3, v_7)_7 + (v_7, v_6)_4 + (v_6, v_5)_3 + (v_5, v_1)_3 + (v_1, v_3)_6.$$

Тем самым мы поставили в соответствие центральному разрезу вершины  $v_2$  простой ориентированный цикл графа  $G$  в виде последовательности ориентированных ребер. Если рассматривать последовательность циклов в данной записи, то можно поставить в соответствие центральному разрезу вершины  $v_2$  циклический кортеж циклов:

$$s(v_2) \rightarrow \langle c_7, c_4, c_3, c_6 \rangle = (c_7, c_4) + (c_4, c_3) + (c_3, c_6) + (c_6, c_7).$$

И так далее. Для всего множества центральных разрезов вершин запишем соответствия в виде простых ориентированных циклов, сформированных циклами базиса:

$$s(v_1) \rightarrow (v_3, v_2)_6 + (v_2, v_6)_3 + (v_6, v_5)_3 + (v_5, v_3)_2;$$

$$s(v_2) \rightarrow (v_3, v_7)_7 + (v_7, v_6)_4 + (v_6, v_5)_3 + (v_5, v_1)_3 + (v_1, v_3)_6;$$

$$s(v_3) \rightarrow (v_4, v_6)_0 + (v_6, v_7)_0 + (v_7, v_2)_7 + (v_2, v_1)_6 + (v_1, v_5)_2 + (v_5, v_4)_1;$$

$$s(v_4) \rightarrow (v_6, v_7)_0 + (v_7, v_3)_0 + (v_3, v_5)_1 + (v_5, v_6)_5;$$

$$s(v_5) \rightarrow (v_6, v_4)_5 + (v_4, v_3)_1 + (v_3, v_1)_2 + (v_1, v_2)_3 + (v_2, v_6)_3;$$

$$s(v_6) \rightarrow (v_7, v_3)_0 + (v_3, v_4)_0 + (v_4, v_5)_5 + (v_5, v_1)_3 + (v_1, v_2)_3 + (v_2, v_7)_4;$$

$$s(v_7) \rightarrow (v_3, v_4)_0 + (v_4, v_6)_0 + (v_6, v_2)_4 + (v_2, v_3)_7.$$

Или в виде циклического кортежа циклов:

$$s(v_1) \rightarrow \langle c_6, c_3, c_2 \rangle = (c_6, c_3) + (c_3, c_2) + (c_2, c_6);$$

$$s(v_2) \rightarrow \langle c_7, c_4, c_3, c_6 \rangle = (c_7, c_4) + (c_4, c_3) + (c_3, c_6) + (c_6, c_7);$$

$$s(v_3) \rightarrow \langle c_2, c_1, c_0, c_7, c_6 \rangle = (c_2, c_1) + (c_1, c_0) + (c_0, c_7) + (c_7, c_6) + (c_6, c_2);$$

$$s(v_4) \rightarrow \langle c_1, c_5, c_0 \rangle = (c_1, c_5) + (c_5, c_0) + (c_0, c_1);$$

$$s(v_5) \rightarrow \langle c_2, c_3, c_5, c_1 \rangle = (c_2, c_3) + (c_3, c_5) + (c_5, c_1) + (c_1, c_2);$$

$$s(v_6) \rightarrow \langle c_3, c_4, c_0, c_5 \rangle = (c_3, c_4) + (c_4, c_0) + (c_0, c_5) + (c_5, c_3);$$

$$s(v_7) \rightarrow \langle c_7, c_0, c_4 \rangle = (c_7, c_0) + (c_0, c_4) + (c_4, c_7).$$

Следует заметить, что сумма всех центральных разрезов исходного графа, записанная в виде соответствия циклического кортежа циклов, также есть пустое множество.

$$\sum_{i=1}^n s(v_i) = \emptyset. \quad (2)$$

## ПОСТРОЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО РИСУНКА НЕПЛАНАРНОГО НЕСЕПАРАБЕЛЬНОГО ГРАФА

Приступим к построению топологического рисунка непланарного графа  $G$ . Предположим, что нам нужно в топологический рисунок графа вставить ребро  $\{v_2, v_4\}$ . Естественно, что проведение данного соединения обязательно будет пересекать ребра плоской части графа. Будем вводить новые вершины как результат пересечения ребер. Вернемся к рассмотрению графа циклов для нашего примера (см. рис. 5).

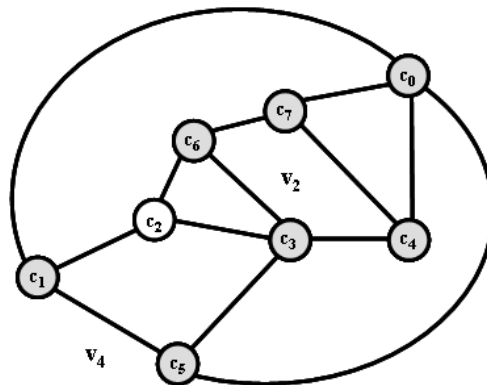


Рис. 5. Граф циклов  $Q$  с помеченными вершинами

Вершину  $v_2$  окружают следующие вершины, соответствующие циклам исходного графа:

$$s(v_2) \rightarrow \langle c_7, c_4, c_3, c_6 \rangle = (c_7, c_4) + (c_4, c_3) + (c_3, c_6) + (c_6, c_7).$$

Вершину  $v_4$  окружают следующие вершины, соответствующие циклам исходного графа:

$$s(v_4) \rightarrow \langle c_1, c_5, c_0 \rangle = (c_1, c_5) + (c_5, c_0) + (c_0, c_1).$$

Методом распространения волны выделим все маршруты, соединяющие выбранные вершины дуального графа циклов. В данном случае имеем пять маршрутов для проведения соединения  $(v_2, v_4)$ . Будем отсчитывать маршруты от вершины  $v_2$  к вершине  $v_4$ . Тогда можно записать выбранные маршруты в виде кортежей циклов  $h_1 = \langle c_7, c_0 \rangle$ ,  $h_2 = \langle c_4, c_0 \rangle$ ,  $h_3 = \langle c_3, c_5 \rangle$ ,  $h_4 = \langle c_6, c_2, c_1 \rangle$ ,  $h_5 = \langle c_3, c_2, c_1 \rangle$ .

Рассмотрим маршрут  $h_5 = \langle c_3, c_2, c_1 \rangle$  и определим порядок проведения соединения  $(v_2, v_4)$ . При проведении соединения  $\{v_2, v_4\}$  вначале пересекается ребро  $e_3 = \{v_1, v_5\}$ , принадлежащее циклу  $c_3$  и циклу  $c_2$ . Затем пересекается ребро  $e_8 = \{v_3, v_5\}$ , принадлежащее циклу  $c_2$  и циклу  $c_1$ . Следовательно, вводятся две новые вершины для исходного графа  $G$ . Обозначим их как  $v_8$  и  $v_9$ .

Введем вершину  $v_8$  в ребро  $e_3$  циклов  $c_3$  и  $c_2$ :

$$c_2 = \langle v_1, v_3, v_5, v_8 \rangle = (v_1, v_3) + (v_3, v_5) + (v_5, v_8) + (v_8, v_1);$$

$$c_3 = \langle v_1, v_8, v_5, v_6, v_2 \rangle = (v_1, v_8) + (v_8, v_5) + (v_5, v_6) + (v_6, v_2) + (v_2, v_1).$$

Теперь введем вершину  $v_9$  в ребро  $e_8$  циклов  $c_1$  и  $c_2$ :

$$c_1 = \langle v_3, v_4, v_5, v_9 \rangle = (v_3, v_4) + (v_4, v_5) + (v_5, v_9) + (v_9, v_3);$$

$$c_2 = \langle v_1, v_3, v_9, v_5, v_8 \rangle = (v_1, v_3) + (v_3, v_9) + (v_9, v_5) + (v_5, v_8) + (v_8, v_1).$$

Осталось последовательно ввести части соединения  $\{v_2, v_4\}$  в соответствующие циклы. Будем последовательно вводить ребро  $\{v_2, v_8\}$  в цикл  $c_3$ , ребро  $\{v_8, v_9\}$  в цикл  $c_2$  и ребро  $\{v_9, v_4\}$  в цикл  $c_1$ .

Вводим ребро  $\{v_2, v_8\}$  в цикл  $c_3$ :

$$\begin{aligned} c_3 &= (v_1, v_8) + (v_8, v_5) + (v_5, v_6) + (v_6, v_2) + (v_2, v_1) + (v_2, v_8) + (v_8, v_2) = \\ &= (v_8, v_5) + (v_5, v_6) + (v_6, v_2) + (v_2, v_8) + (v_2, v_1) + (v_1, v_8) + (v_8, v_2). \end{aligned}$$

В результате образуются два новых цикла:

$$c_3 = (v_8, v_5) + (v_5, v_6) + (v_6, v_2) + (v_2, v_8);$$

$$c_8 = (v_2, v_1) + (v_1, v_8) + (v_8, v_2).$$

Вводим ребро  $\{v_8, v_9\}$  в цикл  $c_2$ :

$$\begin{aligned} c_2 &= (v_1, v_3) + (v_3, v_9) + (v_9, v_5) + (v_5, v_8) + (v_8, v_1) + (v_9, v_8) + (v_8, v_9) = \\ &= (v_8, v_1) + (v_1, v_3) + (v_3, v_9) + (v_9, v_8) + (v_9, v_5) + (v_5, v_8) + (v_8, v_9). \end{aligned}$$

В результате образуются два новых цикла:

$$c_2 = (v_8, v_1) + (v_1, v_3) + (v_3, v_9) + (v_9, v_8);$$

$$c_9 = (v_9, v_5) + (v_5, v_8) + (v_8, v_9).$$

Вводим ребро  $\{v_9, v_4\}$  в цикл  $c_1$ :

$$\begin{aligned} c_1 &= (v_3, v_4) + (v_4, v_5) + (v_5, v_9) + (v_9, v_3) + (v_9, v_4) + (v_4, v_9) = \\ &= (v_4, v_5) + (v_5, v_9) + (v_9, v_4) + (v_9, v_3) + (v_3, v_4) + (v_4, v_9). \end{aligned}$$

В результате образуются два новых цикла:

$$c_1 = (v_4, v_5) + (v_5, v_9) + (v_9, v_4);$$

$$c_{10} = (v_9, v_3) + (v_3, v_4) + (v_4, v_9).$$

Новая система циклов имеет вид:

$$c_1 = (v_4, v_5) + (v_5, v_9) + (v_9, v_4);$$

$$c_2 = (v_8, v_1) + (v_1, v_3) + (v_3, v_9) + (v_9, v_8);$$

$$c_3 = (v_8, v_5) + (v_5, v_6) + (v_6, v_2) + (v_2, v_8);$$

$$c_4 = \langle v_2, v_6, v_7 \rangle = (v_2, v_6) + (v_6, v_7) + (v_7, v_2);$$

$$c_5 = \langle v_4, v_6, v_5 \rangle = (v_4, v_6) + (v_6, v_5) + (v_5, v_4);$$

$$c_6 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = (v_1, v_2) + (v_2, v_3) + (v_3, v_1);$$

$$c_7 = \langle v_2, v_7, v_3 \rangle = (v_2, v_7) + (v_7, v_3) + (v_3, v_2);$$

$$c_8 = (v_2, v_1) + (v_1, v_8) + (v_8, v_2);$$

$$c_9 = (v_9, v_5) + (v_5, v_8) + (v_8, v_9);$$

$$c_{10} = (v_9, v_3) + (v_3, v_4) + (v_4, v_9);$$

$$c_0 = \langle v_3, v_7, v_6, v_4 \rangle = (v_3, v_7) + (v_7, v_6) + (v_6, v_4) + (v_4, v_3).$$



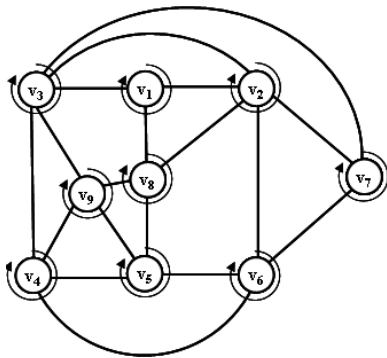


Рис. 6. Топологический рисунок с двумя точками пересечения

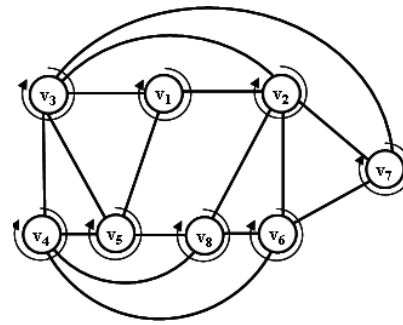


Рис. 7. Топологический рисунок с одной точкой пересечения

В результате получен топологический рисунок непланарного графа с двумя точками пересечения (см. рис. 6). Если воспользоваться маршрутом  $h_3$ , то полученный топологический рисунок будет характеризоваться только одной точкой пересечения (см. рис. 7).

Выделим множество вращения вершин для топологического рисунка, представленного на рис. 6:

$$\begin{aligned} \hat{h}(\mathbf{G}) = \{ & \hat{h}(v_1) = \langle v_3, v_2, v_8 \rangle, \hat{h}(v_2) = \langle v_1, v_3, v_7, v_6, v_8 \rangle, \hat{h}(v_3) = \langle v_9, v_4, v_7, v_2, v_1 \rangle, \\ & \hat{h}(v_4) = \langle v_3, v_9, v_5, v_6 \rangle, \hat{h}(v_5) = \langle v_4, v_9, v_8, v_6 \rangle, \hat{h}(v_6) = \langle v_4, v_5, v_2, v_7 \rangle, \hat{h}(v_7) = \langle v_2, v_3, v_6 \rangle, \\ & \hat{h}(v_8) = \langle v_1, v_2, v_5, v_9 \rangle, \hat{h}(v_9) = \langle v_3, v_8, v_5, v_4 \rangle \}. \end{aligned}$$

Множество вращения вершин для топологического рисунка, представленного на рис. 7:

$$\begin{aligned} \hat{h}(\mathbf{G}) = \{ & \hat{h}(v_1) = \langle v_3, v_2, v_5 \rangle, \hat{h}(v_2) = \langle v_1, v_3, v_7, v_6, v_8 \rangle, \hat{h}(v_3) = \langle v_5, v_4, v_7, v_2, v_1 \rangle, \\ & \hat{h}(v_4) = \langle v_3, v_5, v_8, v_6 \rangle, \hat{h}(v_5) = \langle v_4, v_3, v_1, v_8 \rangle, \hat{h}(v_6) = \langle v_4, v_8, v_2, v_7 \rangle, \hat{h}(v_7) = \langle v_2, v_3, v_6 \rangle, \\ & \hat{h}(v_8) = \langle v_5, v_2, v_6, v_4 \rangle \}. \end{aligned}$$

Самое время применить алгоритм для определения вращений вершин.

### АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ВРАЩЕНИЙ ВЕРШИН ДЛЯ ЗАДАНОЙ СИСТЕМЫ ЦИКЛОВ

Пусть задан граф  $\mathbf{G}$ . Предположим, что задано и множество изометрических циклов данного графа [1, 5], характеризующее базис с нулевым значением функционала Маклейна. Тогда существует обод, определенный как кольцевая сумма всех циклов базиса [2].

Опишем алгоритм построения диаграммы вращения вершин.

**Шаг 1. [Циклическая вершинная запись подмножества циклов].** Представим запись циклов в виде ориентированных ребер, используя вектор  $P_e$  для выделенного базиса с нулевым значением функционала Маклейна при заданном направлении вращения. Запись будем производить с учетом того, что по каждому ребру мы проходим дважды, как в прямом, так и в обратном направлении.

**Шаг 2. [Просмотр списка циклов].** Последовательно просматриваем изометрические циклы базиса и обод. Выбираем непомеченный цикл и идем на шаг 3. Если список всех циклов окончен, то получаем диаграмму вращений вершин для плоского рисунка графа.

**Шаг 3. [Окаймляющая запись вершин].** Просматриваем ориентированную запись вершин выбранного цикла. В диаграмме вращений вершин для каждой вершины записываем окаймляющие ее вершины из данной ориентированной записи вершин в заданной последовательности. В случае необходимости объединяем записи для каждой вершины в диаграмме вращений. Идем на шаг 2.

Рассмотрим пример работы данного алгоритма.

В качестве примера построим диаграмму вращений вершин графа для плоского рисунка графа, представленного на рис. 7.

Согласно шагу 1 алгоритма, запишем систему независимых циклов и обод для плоского графа в виде ориентированных ребер через вершины (вращение по часовой стрелке):

$$\begin{aligned}
 c_1 &= (v_3, v_4) + (v_4, v_5) + (v_5, v_3) = \langle v_3, v_4, v_5 \rangle; \\
 c_2 &= (v_3, v_5) + (v_5, v_1) + (v_1, v_3) = \langle v_3, v_5, v_1 \rangle; \\
 c_3 &= (v_1, v_5) + (v_5, v_8) + (v_8, v_2) + (v_2, v_1) = \langle v_1, v_5, v_8, v_2 \rangle; \\
 c_4 &= (v_2, v_8) + (v_8, v_6) + (v_6, v_2) = \langle v_2, v_8, v_6 \rangle; \\
 c_5 &= (v_2, v_6) + (v_6, v_7) + (v_7, v_2) = \langle v_2, v_6, v_7 \rangle; \\
 c_6 &= (v_4, v_8) + (v_8, v_5) + (v_5, v_4) = \langle v_4, v_8, v_5 \rangle; \\
 c_7 &= (v_4, v_6) + (v_6, v_8) + (v_8, v_4) = \langle v_4, v_6, v_8 \rangle; \\
 c_8 &= (v_3, v_1) + (v_1, v_2) + (v_2, v_3) = \langle v_3, v_1, v_2 \rangle; \\
 c_9 &= (v_3, v_2) + (v_2, v_7) + (v_7, v_3) = \langle v_3, v_2, v_7 \rangle; \\
 c_0 &= (v_3, v_7) + (v_7, v_6) + (v_6, v_4) + (v_4, v_3) = \langle v_3, v_7, v_6, v_4 \rangle.
 \end{aligned}$$

Согласно шагу 2 алгоритма, просматриваем все циклы и выбираем первый цикл  $c_1 = \langle v_3, v_4, v_5 \rangle$ . Вершину  $v_3$  окружают вершины:  $v_5$  – слева и  $v_4$  – справа. Вершину  $v_4$  окружают вершины:  $v_3$  – слева и  $v_5$  – справа. Вершину  $v_5$  окружают вершины:  $v_4$  – слева и  $v_3$  – справа. Для записи диаграммы вращений будем использовать только номера вершин.

Согласно 3-му шагу алгоритма, строим таблицу (диаграмму) вращений вершин по принципу помещения в строку данной вершины смежных вершин, находящихся слева и справа в вершинной записи цикла:

вершина 1:  
 вершина 2:  
 вершина 3: 5 4  
 вершина 4: 3 5  
 вершина 5: 4 3  
 вершина 6:  
 вершина 7:  
 вершина 8:

Выбираем второй цикл  $c_2 = \langle v_3, v_5, v_1 \rangle$  и достраиваем таблицу вращений вершин согласно ориентированной записи цикла:

вершина 1: 5 3  
 вершина 2:  
 вершина 3: 1 5 4  
 вершина 4: 3 5  
 вершина 5: 4 3 1  
 вершина 6:  
 вершина 7:  
 вершина 8:

Выбираем третий цикл  $c_3 = \langle v_1, v_5, v_8, v_2 \rangle$  и достраиваем таблицу вращений вершин:

вершина 1:	2	5	3	
вершина 2:	8	1		
вершина 3:	1	5	4	
вершина 4:	3	5		
вершина 5:	4	3	1	8
вершина 6:				
вершина 7:				
вершина 8:	5	2		

Последовательно выбираем циклы и достраиваем вращение вершин.

.....

Выбираем восьмой цикл  $c_8 = \langle v_3, v_1, v_2 \rangle$  и достраиваем таблицу вращений вершин:

вершина 1:	2	5	3	2	
вершина 2:	7	6	8	1	3
вершина 3:	2	1	5	4	
вершина 4:	3	5	8	6	
вершина 5:	4	3	1	8	4
вершина 6:	4	8	2	7	
вершина 7:	6	2			
вершина 8:	4	5	2	6	4

Выбираем девятый цикл  $c_7 = \langle v_3, v_2, v_7 \rangle$  и достраиваем таблицу вращений вершин:

вершина 1:	2	5	3	2	
вершина 2:	7	6	8	1	3
вершина 3:	7	2	1	5	4
вершина 4:	3	5	8	6	
вершина 5:	4	3	1	8	4
вершина 6:	4	8	2	7	
вершина 7:	6	2	3		
вершина 8:	4	5	2	6	4

Выбираем обод  $c_0 = \langle v_3, v_7, v_6, v_4 \rangle$  и окончательно достраиваем таблицу вращений вершин:

вершина 1:	2	5	3	2	
вершина 2:	7	6	8	1	3
вершина 3:	7	2	1	5	4
вершина 4:	3	5	8	6	3
вершина 5:	4	3	1	8	4
вершина 6:	4	8	2	7	4
вершина 7:	6	2	3	6	
вершина 8:	4	5	2	6	4

По исчерпанию циклов алгоритм заканчивает свою работу.

## ВЫВОДЫ

В работе рассматриваются алгебраические методы построения топологического рисунка несепарабельного непланарного графа. Исходной информацией для построения служит топологический рисунок планарной части графа. Построение дуального графа позволяет находить маршруты для проведения соединений, удаленных в процессе планаризации. При проведении соединений, соответствующих выбранному маршруту, пересечение ребер рассматривается как образование в рисунке плоского графа дополнительных вершин. Вновь введенные вершины описываются вращением вершин графа. Это позволяет рассматривать проведение пересекающихся соединений как построение нового топологического рисунка  $G, h(v + v')$  с добавленными вершинами  $v'$ . Рассмотрены алгебраические операции включения ранее не проведенных ребер в плоский топологический рисунок. Приведен алгоритм для построения диаграммы вращения вершин относительно заданной системы простых ориентированных циклов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мак-Лейн С. Комбинаторное условие для плоских графов. *Кибернетический сборник. Новая серия*. 1970. Вып. 7. С. 68–77.
2. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. Москва: Мир, 1984. 455 с.
3. Рингель Г. Теорема о раскраске карт. Москва: Мир, 1977. 126 с.
4. Харари Ф. Теория графов. Москва: Мир, 1973. 300 с.
5. Cycle bases in graphs: characterization, algorithms, complexity, and applications / T. Kavitha et al. *Computer Science Review*. 2009. Vol. 3, Issue 4. P. 199–243.

## REFERENCES

1. McLane, S. (1970). Combinatorial condition for planar graphs. In: Cybernetic collection. New episode, Issue 7, pp. 68–77.
2. Swami, M. & Thulasaraman, K. (1984). Graphs, networks and algorithms. Moscow: Mir.
3. Ringel, G. (1977). A theorem on the coloring of maps. Moscow: Mir.
4. Harari, F. (1973). Theory of graphs. Moscow: Mir.
5. Kavitha, T., Liebchen, C., Mehlhorn, K., Michail, D., Rizzi, R., Ueckerdt, T. & Zweig, K. (2009). Cycle spaces in graphs: characterization, algorithms, complexity, and applications. *Computer Science Review*, Volume 3, Issue 4, pp. 199–243.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-07

## СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБЛЕГЧЕННЫХ ПОДПОРНЫХ СТЕН, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, КОНТАКТИРУЮЩИХ С ГРУНТОМ

Латифов Ф. С., д. ф.-м. н., профессор, Ганиев Д. С., докторант  
*Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет,*  
*ул. А. Султановой, 5, г. Баку, Азербайджан 1073/1*

flatifov@mail.ru

В работе рассматривается система цилиндрических подпорных стен, которая используется для обеспечения сейсмоустойчивости сооружений. Подпорные стены моделируются двумя цилиндрическими оболочками с ортотропными механическими характеристиками в условиях динамического нагружения. В математической модели данной оболочечной системы