

УДК 539.374

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-16

## ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ДЛЯ МАТЕРИАЛОВ С ПЛОЩАДКОЙ ТЕКУЧЕСТИ

Черняков Ю. А., д. ф.-м. н., профессор, Лабибов Р. Р., аспирант

*Днепровский национальный университет им. Олеса Гончара,  
просп. Гагарина, 72, г. Днепр, 49010, Украина*

postrediori@gmail.com

Для описания текучести стали используется обобщенный вариант теории течения с комбинированным упрочнением в предположении, что поведение материала на пике-зубе течения и последующее резкое падение напряжения течения связано с освобождением дислокаций. Особенность теории состоит в том, что она улавливает прерывистость течения на площадке текучести.

*Ключевые слова: текучесть, локализация, прерывистая деформация, упрочнение.*

## ТЕОРІЯ ПЛАСТИЧНОЇ ТЕЧІЇ ДЛЯ МАТЕРІАЛІВ З ПЛОЩИНЮ ТЕКУЧОСТІ

Черняков Ю. А., д. ф.-м. н., професор, Лабібов Р. Р., аспірант

*Дніпровський національний університет ім. Олеса Гончара,  
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49010, Україна*

postrediori@gmail.com

Для опису текучості сталі використовується узагальнений варіант теорії течії з комбінованим зміцненням у припущенні, що поведінка матеріалу на піку-зубі течії і подальше різке падіння напружень пов'язане з вивільненням дислокацій. Особливість теорії полягає у тому, що вона добре описує не монотонність течії, площину текучості і подальше зміцнення, а також вплив ефекту Баушингера на площині текучості та на ділянці зміцнення.

У класичній моделі ідеальної пластично-пружної поведінки пластична текучість зразка розглядається як однорідний процес. Вважається, що неоднорідності у формі смуг Людерса підтверджують зсувний характер деформації текучості.

Експериментальні дані [1, 2, 3] показують, що пластична деформація в умовах одноосового розтягу і тиску пов'язана з розповсюдженням фронту текучості, який розділяє зразок на області пружної деформації та області пластичної деформації, де деформація дорівнює деформації Людерса  $\epsilon_L$ . У роботі показано, що область нестабільної пластичної деформації, що розповсюджується на макрорівні, є областю перервної деформації.

Приймаються дві основні гіпотези нестабільної пластичної течії. Перша гіпотеза, що описана у [1], стверджує, що існування верхньої межі текучості пов'язане з затримкою дислокацій у «атмосферах» навколо атомів нітрогену та вуглецю. У результаті для початку руху дислокаціям необхідно подолати більший супротив цих атмосфер. Друга гіпотеза, описана у [2], пов'язує падіння напружень із збільшенням кількості дислокацій. Таким чином, із збільшенням кількості рухомих дислокацій зменшуються мінімальні напруження, що необхідні для початку руху інших дислокацій.

Одноосову модель розповсюдження дислокацій [4], що пов'язує падіння напружень на початку текучості, було розширено та використано для опису перервної деформації кручення сталевих стрижнів на основі експериментальних даних [5].

*Ключові слова: текучість, локалізація, преривчаста деформація, зміцнення.*

## PLASTICITY THEORY OF MATERIALS WITH YIELDING PLANE

Chernyakov Yu. A., D.Sc. in Phys. and Maths, Prof., Labibov R. R., Graduate Student

*Oles Honchar Dnipro national university,  
Gagarina ave., 72, Dnipro, 49010, Ukraine*

postrediori@gmail.com

Generalized type of yielding theory with combined hardening with the assumption that the behavior of the material on the yielding peak and the following abrupt decrease of stresses is connected to the release of dislocations is used to describe the process of yielding of steel. The well-imposed description

of non-monotonous yielding, yielding plateau, and subsequent hardening as well as Bauschinger effect during yielding and hardening are the peculiarity of the proposed theory.

Plastic yielding of a specimen is considered to be a uniform process according to the classical model of ideal plastic-elastic behavior. The emerging discrepancies in a form of Lüders bands are considered to be a confirmation of the shear deformation nature of yielding.

Empirical data in [1-3] show that plastic deformation during uniaxial tension and compression is connected to the advancement of yielding front that divides a specimen into a domain of plastic deformation with strains equal to Lüders deformation  $\varepsilon_L$ , and elastic domain. Unstable plastic deformation that is developed on a macro-level is explicitly shown to be discontinuous deformation.

Two major hypothesis of unstable yielding are accepted. The first [1] states that the existence of high yielding limit is connected to dislocation holding in “atmospheres” forming around atoms of nitrogen and carbon. As a result initial dislocation movement requires higher stresses to release from these atmospheres than to advance further. The second hypothesis [2] connects stress drop with an increase of dislocation population. Thus stresses required for dislocation movement decreases as the number of shifting dislocation number rise.

Uniaxial model [4] of dislocation propagation is connected with load drop at the beginning of yielding was generalized in [5] and was used to predict discontinuous deformation of steel bar twisting.

*Key words: yielding, localization, discontinuous deformation, hardening.*

## ВВЕДЕНИЕ

Экспериментально установлено [1-3], что при одноосном растяжении (сжатии) пластическое деформирование на площадке текучести связано с продвижением фронта пластической деформации, разделяющего стержень на область пластического деформирования, деформация в которой равна деформации Людерса  $\varepsilon_L$ , и области упругого деформирования. Было обращено внимание и на неустойчивость пластического деформирования, которая на макроскопическом уровне проявляется как прерывистая деформация.

В настоящее время приняты две основные гипотезы неустойчивого течения. В соответствии с первой, существование верхнего предела текучести в [1] связывают с закреплением дислокаций в «атмосферах», которые формируются вокруг атомов углерода и азота. Как следствие, начальное перемещение дислокаций требует более высокого напряжения для освобождения из этих атмосфер, чем для последующего движения. Во второй [2] – падение напряжений связывают с размножением дислокаций. С ростом числа подвижных дислокаций напряжение, требуемое для их перемещения, уменьшается.

Одномерная модель [4] размножения дислокаций, связанная с падением нагрузки в начале течения, была обобщена в работе [5] и использовалась для предсказания неоднородной деформации при кручении стальных стержней.

Серия экспериментов, проведенных в работах [6-8], наводит на мысль о пересмотре классической трактовки идеальной пластичности. Как показано в этих экспериментах, пластическая деформация на площадке текучести развивается за счет распространения полос скольжения Людерса-Чернова по длине образца. При этом в каждый момент времени имеет место течение вдоль одной или нескольких полос Людерса, пока вдоль них не будет достигнута пластическая деформация, отвечающая длине площадки текучести. Далее образуется новая полоса на некотором расстоянии от предыдущей, и пластическое течение продолжается.

Намного позже [9] использовали подобную формулировку для введения начального резкого падения нагрузки. Такое поведение с разупрочнением переходит в стандартное упрочнение при определенной деформации и таким образом создает необходимое падение нагрузки, приводящее к распространению области неустойчивости, как показано в [10].

Попытки описания явления локализованного пластического течения в работах [11-13] были направлены на анализ различных уточнений и дополнений к классическим уравнениям пластического состояния. Среди полученных авторами численных результатов имеются более или менее близкие к экспериментальным данным о пластическом течении. При этом можно указать на сильную чувствительность результатов к выбранному классу моделей.

Используемые методики неизбежно приводят к «реально» падающему участку диаграммы напряжений-деформаций, что позволяет провести аналогии между поведением при пластической локализации и разупрочнении. Предпринимались попытки рассмотрения градиентных теорий, позволяющих в полной мере описывать все характерные для площадки текучести эффекты. Так, в [14] представлена модификация уравнений состояния, которая позволяет получить пик-зуб заданной амплитуды в зависимости от пространственной конфигурации зерен и их размера.

В работе [16] была предложена континуальная теория пластического течения с комбинированным упрочнением для материалов с площадкой текучести. Теория позволила описать площадку текучести и участок упрочнения при одноосном нагружении, а также деформацию при мягком циклическом нагружении на площадке текучести. В настоящей работе показано, что вышеуказанный вариант теории течения [16] применяется для описания прерывистого характера деформации при жестком нагружении.

### КОНТИНУАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

Континуальная теория пластического течения с комбинированным упрочнением для материалов с площадкой текучести [16] использует условие текучести вида

$$f \equiv \sqrt{(\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) : (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) / 2} - R(\lambda) = 0, \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\alpha}$  – девиатор остаточных напряжений, определяющий кинематическое упрочнение,  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}/3$  – девиатор тензора напряжений Коши. Особенность теории состоит в том, сила сопротивления движению дислокаций  $R(\lambda)$  представляется в виде суммы двух слагаемых

$$R(\lambda) = R_1(\lambda) + R_2(\lambda), \quad (2)$$

где  $R_1(\lambda)$  – функция разупрочнения, связанная с освобождением дислокаций на площадке текучести,  $R_2(\lambda)$  – функция упрочнения, связанная с движением дислокаций; причем  $R_1(0) + R_2(0) = \sigma_s$  и  $\sigma_s$  – начальный предел текучести.

Из принципа градиентальности, с учетом условия текучести (1), имеем

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \mathbf{N}, \quad (3)$$

где  $\dot{\lambda}$  – пластический множитель,  $\mathbf{N}$  – направляющий девиатор ( $\mathbf{N} : \mathbf{N} / 2 = 1$ ),

$$\mathbf{N} = \frac{(\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha})}{2\bar{\rho}}, \quad (\bar{\rho} = \sqrt{(\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) : (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) / 2}).$$

Скорость изменения параметров изотропного и кинематического упрочнения задается пропорциональными интенсивности скорости пластической деформации сдвига  $\dot{\lambda}$ :

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \beta_0 (\alpha_0 \mathbf{N} - \boldsymbol{\alpha}) \dot{\lambda}, \quad \dot{R}_k = \beta_k (\bar{R}_k - R_k) \dot{\lambda}, \quad R_k(0) = R_{k0}, \quad k = 1, 2, \quad (4)$$

где  $\bar{R}_k$ ,  $R_{k0}$ ,  $\beta_0$ ,  $\alpha_0$  – постоянные материала.

### ОДНООСНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ СТЕРЖНЯ

Рассмотрим стержень постоянного поперечного сечения, один конец которого закреплен, а на другом задано перемещение с постоянной скоростью  $V$  (жесткое нагружение) (Рис. 1). В упругом и в упругопластическом режиме, при условии, что материал упрочняется, распределение деформации в стержне остается однородным. Если же материал разупрочняется, то определяющие уравнения допускают бесконечное множество решений с

неоднородным распределением деформации. Пластическая область может локализоваться в сколь угодно малой области и стержень может исчерпать несущую способность при произвольно малой диссипации.

Как отмечалось выше, пластическая деформация развивается за счет роста протяженности пластической области  $I$  длины  $l$ , в которой деформация достигла величины  $\varepsilon_L$ , как показано на рис. 1. Такой рост происходит на участке  $II$  стержня длиной  $\Delta l = d$ . На участке  $II$  осуществляется переход из точки  $A$  на диаграмме материала в точку  $B$ . Величина  $d$  является параметром материала и зависит от микроструктуры (например, от размера зерна). В области  $III$  имеет место упругое деформирование. Когда область  $II$  достигает конца стержня, а протяженность области  $III$  становится нулевой, осуществляется переход к участку упрочнения.

Опишем квазистатический процесс деформирования стержня, при котором его длина увеличилась на значение  $\Delta u = V\Delta t$ , где  $V$  – скорость перемещения конца стержня,  $\Delta t$  – время. При перемещении конца стержня на расстояние  $\Delta u$  к пластической области добавится участок длины  $\Delta l$ , который перейдет из упругого состояния в пластическое. Выразим приращение длины всего образца  $\Delta u$  через приращения длины каждой области (I)-(III):

$$V\Delta t \equiv \Delta u = \Delta u_I + \Delta u_{II} + \Delta u_{III}. \quad (5)$$

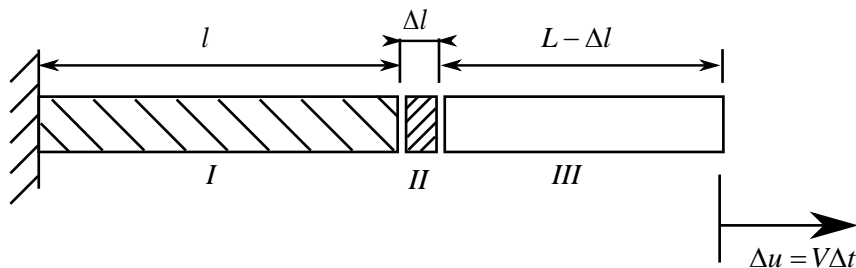


Рис. 1. Области пластичности (I), упругости (III) и текучести (III) в образце

Изменение длины пластической области будет зависеть от того, падают или растут напряжения в области (I):

$$\Delta u_I = \begin{cases} \Delta\sigma l/H, & \Delta\sigma > 0, \\ \Delta\sigma l/E, & \Delta\sigma < 0, \end{cases} \quad (6)$$

где  $E$  – упругий модуль,  $H$  – модуль упрочнения в точке  $B$  диаграммы материала. Для области (II), где происходит пластическое течение:

$$\Delta u_{II} = \varepsilon_L \Delta l = \varepsilon_L c_p \Delta t, \quad (7)$$

где  $c_p$  – скорость распространения фронта пластической деформации в стержне. Приращение длины упругой области имеет вид:

$$\Delta u_{III} = \Delta\sigma(L-l)/E, \quad (8)$$

где  $\Delta\sigma$  – изменение напряжений в образце.

Подставляя (6)-(8), в (5) получим:

$$\Delta\sigma l/E + \varepsilon_L c_p \Delta t + \Delta\sigma(L-l)/E = V\Delta t.$$

Отсюда находим выражение для изменения напряжений в образце за время  $\Delta t$ :

$$\Delta\sigma = \frac{E}{L}(V - \varepsilon_L c_p)\Delta t. \quad (9)$$

Так как описанный процесс локализации площадки текучести в слое ширины  $d$  занимает некоторое время  $\Delta t$ , то при рассмотрении эксперимента с образцом целесообразно определить скорость движения пластического фронта  $V = d/\Delta t$ . При достаточном размере локализованной области  $d$  по отношению к размеру образца  $L$  можно наблюдать приращение каждого отдельного слоя к области пластичности в виде периодических колебаний на диаграмме площадки текучести образца (Рис. 2).

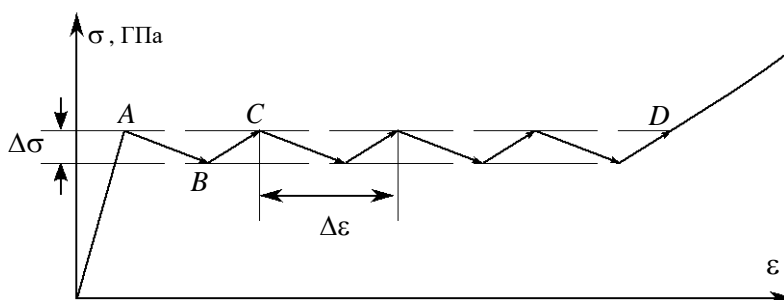


Рис. 2. Колебания на площадке текучести при одноосной деформации стержня

Если на площадке текучести образца схематически выделить осцилляции, то каждому приращению локализованного слоя к пластической области отвечает участок  $A-B-C$ , который привносит свою часть пластической деформации Людерса  $\Delta\varepsilon_L$ . Участок  $A-B$  отвечает за разупрочнение каждого приращенного локализованного слоя. Модуль разупрочнения  $K$  здесь равен  $K = dR(0)/d\lambda$ . Участок  $B-C$  отвечает упрочнению элементарного слоя, модуль упрочнения  $H$  равен модулю упрочнения образца после достижения точки  $D$  и равен  $H = dR(\varepsilon_L)/d\lambda$ .

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ МАТЕРИАЛА

Для полного описания напряженно-деформируемого состояния материала не хватает значения  $R_1$ , влияние которого проявляется только на участке локализованного течения  $II$  (Рис. 1). Оценить его можно используя экспериментальные данные.

В работе [8] была использована сталь-25 со следующими параметрами:  $\varepsilon_L = 1,75\%$ . Растяжение образца происходило со скоростью  $\dot{L}/L = 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ . При этом фронт локализации перемещался вдоль образца со скоростью  $V_p = 5 \times 10^{-3} \text{ sec}^{-1}$ . По результатам эксперимента на одноосное растяжение были составлены зависимости напряжений и деформаций в зависимости от времени. У материала наблюдалась явно выраженная площадка текучести, следующая за участком упругости. На площадке текучести напряжения не были постоянными и совершали периодические осцилляции с амплитудой по напряжениям  $\Delta\sigma = 14,7 \text{ МПа}$ . Период осцилляций составлял  $\Delta t = 13 \text{ sec}$ , что отвечало деформации  $\Delta\varepsilon_L = 0,1\%$ . Используя эти параметры, находим  $R_{10} = 0,04$ ,  $R_{20} = 0,05$ . Данные значения коэффициентов позволяют получить полное описание материала на площадке текучести.

### ВЫВОДЫ

Проведенная оценка дает основание полагать, что теория пластического течения с комбинированным упрочнением позволяет описать прерывистость пластического течения материала с площадкой текучести при жестком нагружении.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Cottrell A. H., Bilby B. A. Dislocation Theory of Yielding and Strain Ageing of Iron. *Proceedings of the Physical Society. Section A.* 1949. 62.
2. Johnston W. G., Gilman J. J. Dislocation Velocities, Dislocation Densities, and Plastic Flow in Lithium Fluoride Crystals. *Journal of Applied Physics.* 1959. 30. P. 129–144.
3. Hall E. O. Yield point phenomena in metals and alloys. Plenum Press, 1970.
4. Hahn G. A. model for yielding with special reference to the yield-point phenomena of iron and related bcc metals. *Acta Metallurgica.* 1962. 10. P. 727–738.
5. Shioya T., Shioiri J. Elastic-plastic analysis of the yield process in mild steel. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 1976. 24. P. 187–204.
6. Shaw J. A., Kyriakides S. Thermomechanical aspects of NiTi. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 1995. 43. P. 1243–1281.
7. Shaw J. A., Kyriakides S. Initiation and Propagation of Localized Deformation in Elasto-Plastic Strips Under Uniaxial Tension. *International Journal of Plasticity.* 1998. 13. P. 837–871.
8. Kyriakides S., Miller J. E. On the Propagation of Luders Bands in Steel Strips. *Journal of Applied Mechanics.* 2000. 67. P. 645–654.
9. Yoshida F., Kaneda Y., Yamamoto S. A plasticity model describing yield-point phenomena of steels and its application to FE simulation of temper rolling. *International Journal of Plasticity.* 2008. 24. P. 1792–1818.
10. Kyriakides S. Buckle propagation in pipe-in-pipe systems. Part I. Experiments. *International Journal of Solids and Structures.* 2002. 39. P. 351–366.
11. Needleman A., Rice J. Limits to Ductility Set by Plastic Flow Localization. *Mechanics of Sheet Metal Forming.* – 1978.
12. Needleman A., Tvergaard V. Analyses of Plastic Flow Localization in Metals. *Annalen der Physik.* 1992. 45. P. 3–18.
13. Zuev L. On the waves of plastic flow localization in pure metals and alloys. *Вопросы механики твердого тела.* 2007. 16. P. 286–310.
14. Dowling N. Fatigue Failure Predictions for Complicated Stress-Strain Histories. 1971.
15. Frederick C. O., Armstrong P. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. *Materials at High Temperatures.* 2007. 24. P. 1–26.
16. Лабібов Р. Р., Черняков Ю. А. Феноменологічна теорія пластического течения на площадке текучести. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Механіка.* 2016. №5 (24), Вип. 20. С. 99–107.

## REFERENCES

17. Cottrell, A. H. & Bilby, B. A. (1949). Dislocation Theory of Yielding and Strain Ageing of Iron. *Proceedings of the Physical Society. Section A*, 62.
18. Johnston, W. G. & Gilman, J. J. (1959). Dislocation Velocities, Dislocation Densities, and Plastic Flow in Lithium Fluoride Crystals. *Journal of Applied Physics*, 30, pp. 129-144.
19. Hall, E. O. (1970). Yield point phenomena in metals and alloys. Plenum Press.
20. Hahn, G. A. (1962). Model for yielding with special reference to the yield-point phenomena of iron and related bcc metals. *Acta Metallurgica*, 10, pp. 727-738.
21. Shioya, T. & Shioiri, J. (1976). Elastic-plastic analysis of the yield process in mild steel. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 24, pp. 187-204.
22. Shaw, J. A. & Kyriakides, S. (1995). Thermomechanical aspects of NiTi. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43, pp. 1243-1281.

23. Shaw, J. A. & Kyriakides, S. (1998). Initiation and Propagation of Localized Deformation in Elasto-Plastic Strips Under Uniaxial Tension. *International Journal of Plasticity*, 13, pp. 837-871.
24. Kyriakides, S. & Miller, J. E. (2000). On the Propagation of Luders Bands in Steel Strips. *Journal of Applied Mechanics*, 67, pp. 645-654.
25. Yoshida, F., Kaneda, Y. & Yamamoto, S. (2008). A plasticity model describing yield-point phenomena of steels and its application to FE simulation of temper rolling. *International Journal of Plasticity*, 24, pp. 1792-1818.
26. Kyriakides, S. (2002). Buckle propagation in pipe-in-pipe systems. Part I. Experiments. *International Journal of Solids and Structures*, 39, pp. 351-366.
27. Needleman, A. & Rice, J. (1978). Limits to Ductility Set by Plastic Flow Localization. *Mechanics of Sheet Metal Forming*.
28. Needleman, A. & Tvergaard, V. (1992). Analyses of Plastic Flow Localization in Metals. *Annalen der Physik*, 45, pp. 3-18.
29. Zuev, L. (2007). On the waves of plastic flow localization in pure metals and alloys. *Voprosy mekhaniki tverdogo tela*, 16, pp. 286-310.
30. Dowling, N. (1971). Fatigue Failure Predictions for Complicated Stress-Strain Histories.
31. Frederick, C. O. & Armstrong, P. (2007). A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. *Materials at High Temperatures*, 24, pp. 1-26.
16. Labibov, R. R. & Chernyakov, Yu. A. (2016). Phenomenological theory of plastic flow at the flow area. *Visnyk Dnipropetrovs'koho universytetu. Seriya: Mekhanika*, No. 5(24), Iss. 20, pp. 99-107.