

УДК 539.375

## ПЛАСТИНА З ТРІЩИНОЮ ПІД ДВОВІСНИМ РОЗТЯГОМ ТА ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ СИЛАМИ З УРАХУВАННЯМ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН ТА ЗМІЦНЕННЯ МАТЕРІАЛУ В ЇЇ ВЕРШИНАХ

Білаш О. В., к. е. н.

*Національна академія сухопутних військ ім. гетьмана Петра Сагайдачного,  
вул. Героїв Майдану, 32, м. Львів, 79000, Україна*

oksana.bilash@gmail.com

Розв'язано задачу про сумісну дію зосереджених сил та двовісного розтягу на ізотропну пластину з наскрізною прямолінійною тріщиною, вільною від зовнішнього навантаження, та за наявності пластичних зон у її вершинах з урахуванням зміцнення матеріалу. З використанням методів теорії функцій комплексної змінної розв'язування задачі зведено до задач лінійного спряження, розв'язок яких отримано в класі функцій, обмежених у вершинах пластичних зон. Наведено залежності для знаходження довжини пластичної зони та розходження берегів тріщини у її вершині, проведено їх числовий аналіз при різних параметрах задачі, який подано графічно. У часткових випадках отримано відомі в літературі результати.

*Ключові слова: ізотропна пластина, двовісний розтяг, зосереджені сили, тріщина, пластичні зони, зміцнений матеріал, розходження берегів тріщини.*

## ПЛАСТИНА С ТРЕЩИНОЙ ПОД ДВУХОСНЫМ РАСТЯЖЕНИЕМ И СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗОН И УПРОЧНЕНИЕ МАТЕРИАЛА В ЕЕ ВЕРШИНАХ

Білаш О. В., к. е. н.

*Національна академія сухопутних військ ім. гетьмана Петра Сагайдачного,  
ул. Героев Майдана, 32, г. Львов, 79000, Україна*

oksana.bilash@gmail.com

Исследована задача о совместном действии на изотропную пластину со сквозной трещиной, свободной от внешней нагрузки, сосредоточенных сил и двухосного растяжения на бесконечности. Предполагается, что в вершинах трещины на ее продолжении имеются узкие пластические зоны в материале пластины с упрочнением. С использованием методов теории функций комплексной переменной и комплексных потенциалов исследование задачи сведено к задачам линейного сопряжения, решение которых построено в классе функций, ограниченных в вершинах пластических зон. Записано уравнение для определения их длины, а также найдено раскрытие берегов трещины в ее вершине. Проведен численный анализ задачи. В частных случаях получены известные в литературе результаты.

*Ключевые слова: изотропная пластина, двухосное растяжение, сосредоточенные силы, трещина, пластические зоны, упрочняющий материал, раскрытие берегов трещины.*

## PLATE WITH A CRACK UNDER BIAXIAL TENSILE AND CONCENTRATED FORCES TAKING INTO ACCOUNT PLASTIC ZONES AND STRENGTHENING THE MATERIAL IN HER APEXS

Bilash O. V., Ph. D. in Economics

*Hetman Petro Sahaidachnyi National Army Academy,  
Heroes of Maidan street, 32, Lviv, 79000, Ukraine*

oksana.bilash@gmail.com

The problem of a joint action of concentrated forces and biaxial stretching on infinity isotropic plate with a crack, which banks are free from external loads was researched. In the crack's apexs are present the plastic zones, which strengthened of material take into account. Using methods of theory of complex variable the analytical solution of the problem was received. In the particular case known results in the literature was obtained. A numerical analysis of the divergence crack's banks and length of plastic zone in its apex was conducted.

*Key words: isotropic plate, biaxial stretching, concentrated forces, crack, plastic zones, strengthened material, divergence crack's banks.*

## ВСТУП

Пластинчасті елементи конструкцій широко використовуються в різних галузях техніки і будівництва. У них під час експлуатації чи виготовленні можуть виникнути тріщини, які є сильними концентраторами напружень і при певному навантаженні може відбутися їх руйнування. Дослідження напруженого стану пластинчастих елементів конструкції з тріщинами займалися багато дослідників, що відображено у монографіях [1, 3-14] та довідниках [15, 16]. Для пластичного матеріалу руйнування елемента конструкції з тріщиною супроводжується появою зон пластичності у її вершинах, що відображено в монографіях [7, 10, 13, 14] без урахування зміцнення матеріалу в зонах пластичності та з урахуванням зміцнення матеріалу [3, 4, 17], що проаналізовано в оглядовій статті [18].

У статті досліджено напружено-деформований стан пластини з тріщиною за сумісної дії двовісного розтягу на безмежності та зосереджених сил за наявності пластичних зон у її вершинах та з урахуванням зміцнення матеріалу. З використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів плоскої задачі теорії пружності розв'язування задачі зведено до задач лінійного спряження, розв'язок яких знайдено у класі функцій, обмежених у вершинах пластичних зон. Визначено довжину пластичної зони та розходження берегів тріщини у її вершині. Проведено числовий аналіз довжини пластичної зони та розходження берегів тріщини у її вершині при різних параметрах задачі, який подано графічно. Частковий випадок цієї задачі, за відсутності зосереджених сил, досліджено у статті [17], де розв'язок знаходився у класі функцій необмежених у вершинах пластичних зон, тим самим підходом у публікації [18] досліджено напружений стан пластини з тріщиною за розтягу її двома зосередженими силами без урахування зміцнення матеріалу.

## ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Дослідимо напружено-деформований стан нескінченної ізотропної пластини за наявності в ній наскрізної прямолінійної тріщини завдовжки  $2l$ , береги якої вільні від зовнішнього навантаження, яка знаходиться під дією двовісного розтягу на нескінченності зусиллями  $p$  і  $q$ , які перпендикулярні та паралельні до берегів тріщини, та двох рівних по величині, але протилежно направлених зосереджених сил  $P$ , точки прикладання яких знаходяться на осі симетрії тріщини на віддалі  $c$  від неї (див. рис.1).

Введемо декартову систему координат  $Oxy$  з початком координат у центрі тріщини, направивши вісь  $Ox$  по ній. Вважаємо, що під дією заданого навантаження, у вершинах тріщини утворилися зміцнені пластичні зони завдовжки  $\Delta$  з вершинами  $d$  і  $-d$ , де напруження розподілено згідно закону [17].

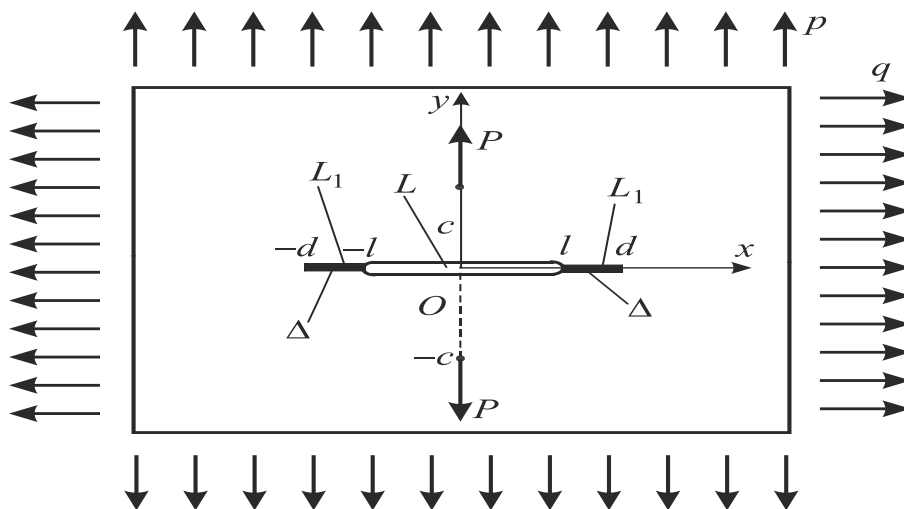


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини з пластичними зонами

$$\sigma(x) = B_1|x| + B_2, \quad (1)$$

де

$$B_1 = \frac{\sigma_Y - \sigma_\epsilon}{d-l}, \quad B_2 = \sigma_\epsilon - \frac{l(\sigma_Y - \sigma_\epsilon)}{d-l}, \quad (2)$$

$\sigma_\epsilon$  і  $\sigma_Y$  – межі міцності та текучості матеріалу.

Частину дійсної осі, де розміщена тріщина, позначимо через  $L$ , пластичні зони – через  $L_1$ .

Згідно з формулюваннями задачі маємо такі крайові умови

$$\sigma_{xy}^\pm = 0, \quad x \in L + L_1, \quad \sigma_{yy}^\pm = 0, \quad x \in L, \quad \sigma_{yy}^\pm = B_1|x| + B_2, \quad x \in L_1, \quad (3)$$

де  $\sigma_{yy}$  і  $\sigma_{xy}$  – компоненти тензора напружень, значками «+» і «-» позначено граничне значення відповідної величини при  $y \rightarrow \pm 0$ .

### РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ

Введемо комплексні потенціали  $\Phi(z)$  і  $\Omega(z)$  та скористаємося залежностями [6]

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (4)$$

$$2\mu(u+iv)'_x = 2\mu\partial_x(u+iv) = \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (5)$$

де  $z = x + iy$ ,  $i^2 = -1$ ,  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ ,  $\mu$  – модуль зсуву,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини,  $u$  і  $v$  – проекції вектора переміщення її точки на осі  $Ox$  і  $Oy$  відповідно.

Для функції  $\Phi(z)$  і  $\Omega(z)$  при великих  $|z|$  мають місце розвинення [6]

$$\Phi(z) = \Gamma + O(1/z^2), \quad \Omega(z) = \Gamma + \Gamma' + O(1/z^2), \quad (6)$$

$$\Gamma = 0,25(p+q), \quad \Gamma' = (p-q)/2.$$

Комплексні потенціали  $\Phi(z)$  і  $\Omega(z)$  в околі точок прикладання зосереджених сил можна подати у вигляді [6]

$$\Phi(z) = \frac{2\tilde{P}c}{z^2 + c^2} + \Phi_0(z), \quad \Omega(z) = 2\tilde{P}c \left[ \frac{\kappa - 2}{z^2 + c^2} + \frac{4c^2}{(z^2 + c^2)^2} \right] + \Omega_0(z), \quad (7)$$

де  $\Phi_0(z)$  і  $\Omega_0(z)$  – функції голоморфні у всій комплексній площині,  $\tilde{P} = P/(2\pi(1+\kappa))$ .

Ураховавши (4), з крайових умов (3) одержимо

$$\Phi^\pm(x) + \Omega^\pm(x) = \begin{cases} 0, & x \in L, \\ B_1|x| + B_2, & x \in L_1. \end{cases} \quad (8)$$

На основі залежностей (8) отримаємо такі задачі лінійного спряження для знаходження комплексних потенціалів  $\Phi(z)$  і  $\Omega(z)$

$$(\Phi(x) - \Omega(x))^+ - (\Phi(x) - \Omega(x))^- = 0, \quad x \in L + L_1, \quad (9)$$

$$(\Phi(x) + \Omega(x))^+ + (\Phi(x) + \Omega(x))^- = \begin{cases} 0, & x \in L, \\ B_1|x| + B_2, & x \in L_1. \end{cases}$$

Розв'язавши задачі лінійного спряження (9) та врахувавши (6) і (7), матимемо

$$\Phi(z) - \Omega(z) = R_1(z), \quad (10)$$

$$\Phi(z) + \Omega(z) = R_2(z) + R_3(z), \quad (11)$$

де

$$R_1(z) = -\Gamma' + \frac{2\tilde{P}c(1-\kappa)}{z^2 + c^2} + \frac{4\tilde{P}c(z^2 - c^2)}{(z^2 + c^2)^2}, \quad R_2(z) = \frac{2zX(z)}{z^2 + c^2} \left( A_1 - \frac{2ca_3}{z^2 + c^2} \right),$$

$$R_3(z) = \frac{X(z)}{\pi i} \int_{L_1} \frac{(B_1|t| + B_2)dt}{X^+(t)(t-z)}, \quad X(z) = \sqrt{z^2 - d^2},$$

$$a_3 = \frac{2\tilde{P}c}{\sqrt{d^2 + c^2}}, \quad A_1 = -\frac{\tilde{P}}{\sqrt{d^2 + c^2}} \left( 1 + \kappa + \frac{2c^2}{\sqrt{d^2 + c^2}} \right). \quad (12)$$

Врахувавши (6), з (11) отримаємо залежність для знаходження довжини пластичної зони  $\Delta$

$$g(\varepsilon) - \tilde{p}\pi/2 - 0,5Q \left[ 1 + 2\lambda_1^2 / ((1+\kappa)\gamma_1^2) \right] / \gamma_1 = 0, \quad (13)$$

де

$$g(\varepsilon) = (m - (1-m)/\varepsilon) \arccos \lambda^{-1} + (1-m)\gamma_2/\varepsilon,$$

$$m = \sigma_e/\sigma_Y, \quad \lambda = 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon = \Delta/l, \quad \lambda_1 = c/l, \quad (14)$$

$$\tilde{p} = p/\sigma_Y, \quad Q = \tilde{P}/(\sigma_Y l), \quad \gamma_1 = \sqrt{\lambda^2 + \lambda_1^2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\varepsilon(2+\varepsilon)}.$$

Якщо взяти інтеграл, що входить у функцію  $R_3(z)$  (12), то отримаємо

$$R_3(z) = \frac{2}{\pi i} \left[ B_1 z \ln \frac{\sqrt{d^2 - z^2} + \sqrt{d^2 - l^2}}{\sqrt{l^2 - z^2}} + B_2 \ln \frac{d\sqrt{l^2 - z^2}}{z\sqrt{d^2 - l^2} + l\sqrt{d^2 - z^2}} \right]. \quad (15)$$

На основі (10) і (11) можемо записати

$$\Phi(z) = 0,5 \sum_{i=1}^3 R_i(z), \quad \Omega(z) = \Phi(z) - R_1(z). \quad (16)$$

При  $P = 0$ , із (13) отримаємо відповідну залежність зі статті [17], а коли зміщення відсутнє, тобто  $m = 1$ , із (13) одержимо відомі результати із монографій [7, 10], а за відсутності двовісного розтягу матимемо відповідну залежність із публікації [18].

Знайдемо тепер розходження берегів тріщини у її вершині. Якщо врахувати (16), то виходячи з (5), можемо записати

$$2\mu \left[ (u + iv)_x^+ - (u + iv)_x^- \right] = (\kappa + 1) (\Phi^+(x) - \Phi^-(x)), \quad x \in L_1. \quad (17)$$

Беручи до уваги (15) і (12) та підставляючи (16) у (17), отримаємо

$$\frac{4\mu \left[ (v')_x^+ - (v')_x^- \right]}{1+\kappa} = \frac{4x\sqrt{d^2-x^2}}{x^2+c^2} \left( A_1 - \frac{2ca_3}{x^2+c^2} \right) - \frac{B_2}{\pi} [\Gamma(d,x,l) - \Gamma(d,x,-l)] - \frac{x B_1}{\pi} [\Gamma(d,x,l) + \Gamma(d,x,-l)], \tag{18}$$

де

$$\Gamma(d,x,\xi) = \ln \frac{d^2 - x\xi - \sqrt{(d^2-x^2)(d^2-\xi^2)}}{d^2 - x\xi + \sqrt{(d^2-x^2)(d^2-\xi^2)}}.$$

Розходження берегів тріщини у її вершині  $\delta$  знаходимо за формулою

$$\delta = \int_d^l (v^+ - v^-)'_x dx, \tag{19}$$

з якої, після підстановки (18) у (19) та обчислення відповідних інтегралів [2], матимемо

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} = \frac{1+\kappa}{4\mu} & \left\{ \frac{4B_2 l}{\pi} \ln \frac{d}{l} + \frac{2B_1}{\pi} (d^2 - l^2) + 4A_1 \left[ \sqrt{d^2 - l^2} + \sqrt{d^2 + c^2} \cdot \ln \frac{\sqrt{d^2 + c^2} + \sqrt{d^2 - l^2}}{\sqrt{d^2 + c^2} - \sqrt{d^2 - l^2}} \right] - \right. \\ & \left. - 4ca_3 \left[ \frac{\sqrt{d^2 - l^2}}{l^2 + c^2} - \frac{1}{\sqrt{d^2 + c^2}} \ln \frac{\sqrt{d^2 + c^2} + \sqrt{d^2 - l^2}}{\sqrt{d^2 + c^2} - \sqrt{d^2 - l^2}} \right] \right\}. \tag{20} \end{aligned}$$

Залежність (20) подамо так

$$\tilde{\delta} = \delta E / (\sigma_Y l) = \gamma_4 - Q \left\{ (1 + 2\lambda_1^2 / \gamma_1^2) (\gamma_2 - \gamma_1 \gamma_3) - 0,25(1 + \nu) \lambda_1^2 \left[ \gamma_2 / (1 + \lambda_1^2) - \gamma_3 / \gamma_1 \right] \right\} / (\pi \gamma_1),$$

де  $E$  – модуль Юнга матеріалу пластини,

$$\gamma_4 = \left\{ 2 \left[ m - (1 - m) / \varepsilon \right] \ln \lambda + (1 - m)(2 + \varepsilon) \right\}, \quad \gamma_3 = \ln \left[ (\gamma_1 + \gamma_2) / (\gamma_1 - \gamma_2) \right].$$

### ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ТА ВИСНОВКИ

Був проведений числовий аналіз задачі, який поданий на рис. 2-4, при чому рис. 3-4 побудовано при  $\nu = 0,3$ .

На рис. 2-3 крива 1 побудована при  $m = 1$ , крива 2 – при  $m = 1.1$ , крива 3 – при  $m = 1.3$ , крива 4 – при  $m = 1.6$ , крива 5 – при  $m = 2$ .

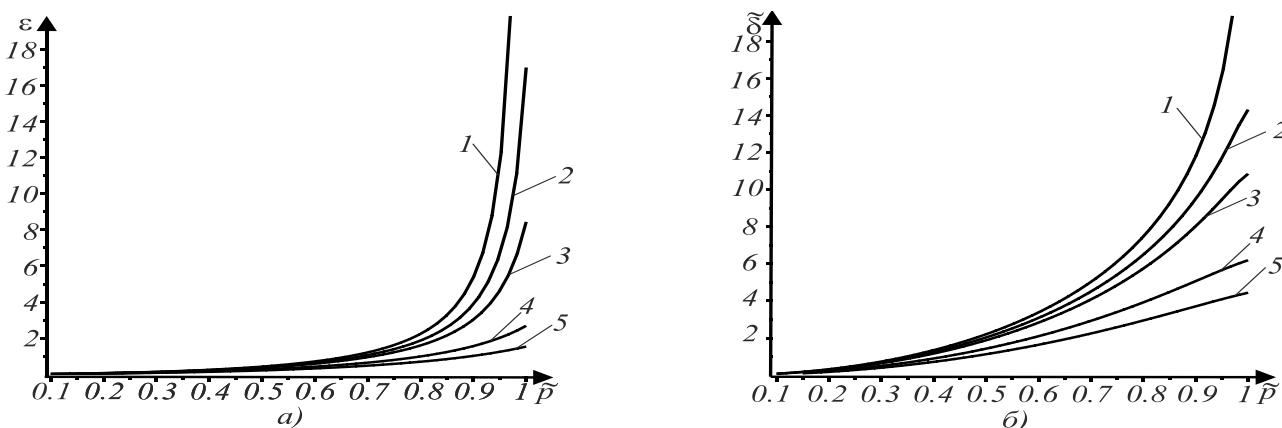


Рис. 2. Графічні залежності  $\varepsilon$  і  $\tilde{\delta}$  від зведеного зусилля на нескінченності  $\tilde{p}$

На рис. 2а) та 2б) дається відповідна графічна залежність зведеної довжини пластичної зони  $\varepsilon = \Delta/l$  та зведеного розходження берегів тріщини у її вершині  $\tilde{\delta} = \delta E/(\sigma_Y l)$  від зведеного зусилля на нескінченності  $\tilde{p} = p/\sigma_Y$ . З цих рисунків видно, що при зростанні зусилля на нескінченності  $\tilde{p}$  довжина пластичної зони та розходження берегів тріщини у її вершині зростають, причому, при  $\tilde{p} \rightarrow \sigma_Y$  довжина пластичної зони прямує до нескінченності. Зауважимо, що зусилля на нескінченності  $q$ , яке паралельне до берегів тріщини, не впливає ні на довжину пластичної зони, ні на розходження берегів тріщини у її вершині.

З рис. 2 можна зробити висновок, що зі зростанням параметра  $m$ , що характеризує величину лінійної зміцнюваності матеріалу, довжина пластичної зони та розходження берегів тріщини у її вершині зменшується.

На рис. 3а), 3в), 3д) та 3б), 3г), 3е) дається відповідна графічна залежність зведеної довжини пластичної зони  $\varepsilon = \Delta/l$  та зведеного розходження берегів тріщини у її вершині  $\tilde{\delta} = \delta E/(\sigma_Y l)$  від зведеної величини зосереджених сил  $Q = P/(\sigma_Y l)$  при різних значеннях відносної координатної точки прикладання зосереджених сил  $\lambda_1 = c/l$ .

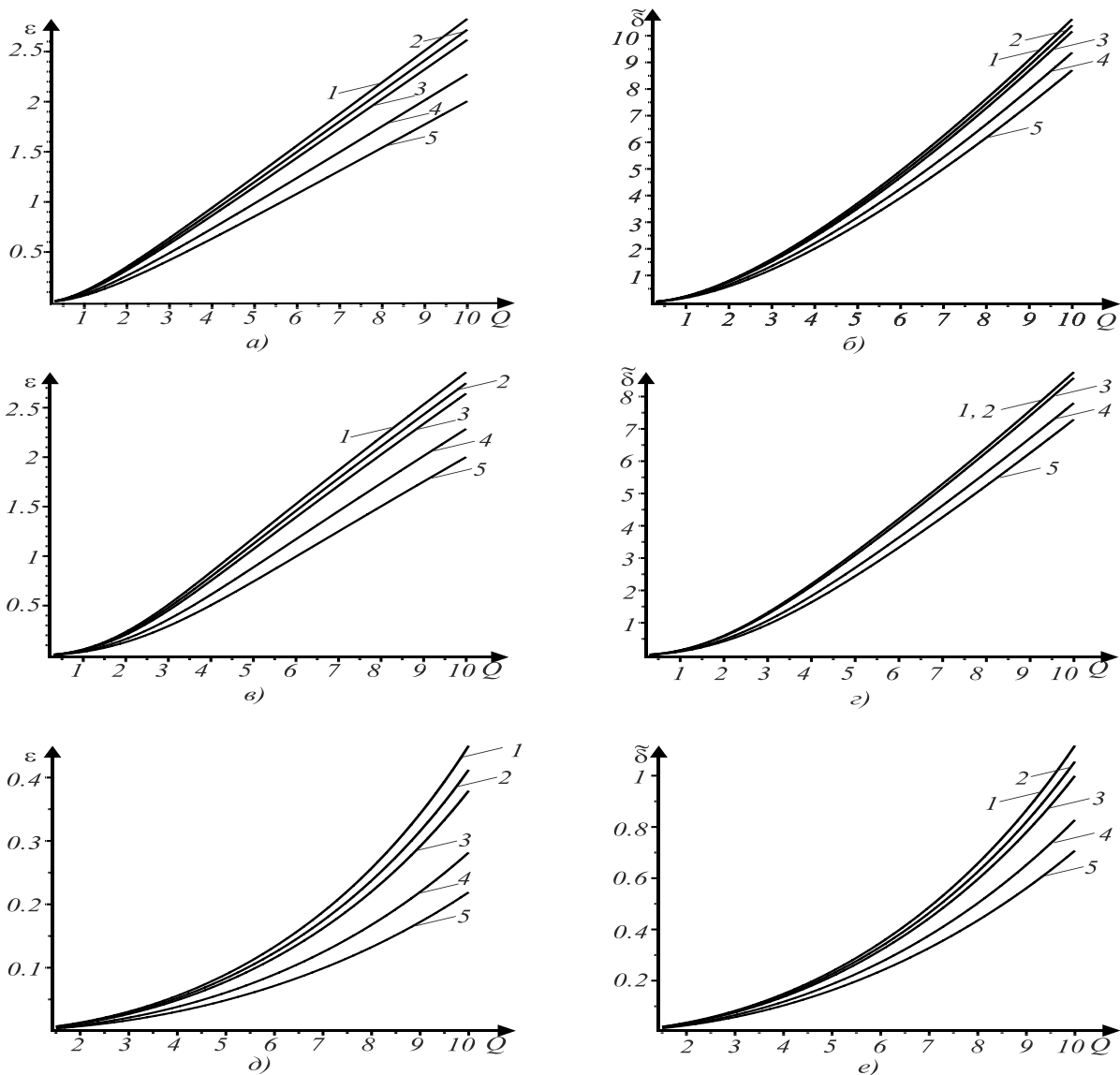


Рис. 3. Графічні залежності  $\varepsilon$  і  $\tilde{\delta}$  від зведеної величини зосереджених сил  $Q$  при різних відносних значеннях координати точки прикладання  $c/l$

Рис. 3а) і 3б) побудовано, коли  $\lambda_1 = 0$ , тобто зосереджені сили прикладені до берегів тріщини, а 3в) і 3г) та рис. 3д) і 3е) – відповідно при  $\lambda_1 = 2$  та  $\lambda_1 = 10$ . На основі цього рисунка можна зробити висновок, що при віддаленні точки прикладання зосереджених сил від тріщини або при зростанні параметра  $m$ , тобто змінюваності матеріалу, довжина пластичної зони та розходження берегів тріщини у її вершині зменшуються, а при зростанні величини зосереджених сил навпаки зростають.

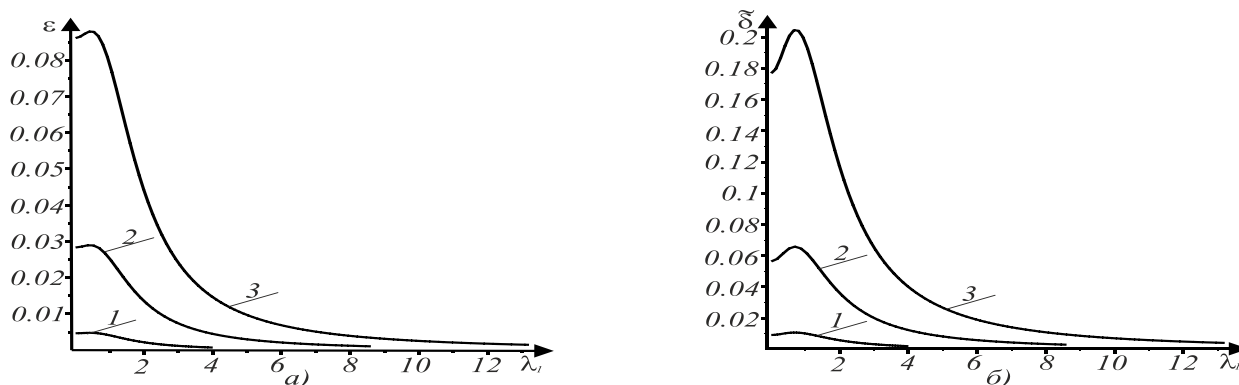


Рис. 4. Графічні залежності  $\varepsilon$  і  $\deltã$  від відносної координати точки прикладання сили  $\lambda_1$  при різних значеннях зведеної величини зосереджених сил  $Q$

На рис. 4а) і 4б) наведену графічну залежність зведеної довжини пластичної зони  $\varepsilon$  та зведеного розходження берегів тріщини у її вершині від відносної координати точки прикладання зосереджених сил  $\lambda_1 = c/l$  при  $m=1.1$ . Крива 1 характеризує випадок, коли зведена сила  $Q = 0.2$ , крива 2 –  $Q = 0.5$ , крива 3 –  $Q = 0.9$ . З цього рисунка видно, що коли точка прикладання сили віддаляється від тріщини, то довжина пластичної зони і розходження берегів тріщини у її вершині спочатку зростає, а потім зменшується, особливо суттєво при великих  $c$ .

## ЛІТЕРАТУРА

1. Бережницький Л. Т., Делявський М. В., Панасюк В. В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. Киев: Наукова думка, 1979. 400 с.
2. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. Москва: Изд-во «Наука», 1967. 608 с.
3. Кир'ян В. І., Осадчук В. А., Николишин М. М. Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій. Львів: СПОЛОМ, 2007. 320 с.
4. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. Львів: СПОЛОМ, 2003. 320 с.
5. Мазурак Л. П., Бережницький Л. Т. Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин. Киев: Наукова думка, 1990. 256 с.
6. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 707 с.
7. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1968. 246 с.
8. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. 256 с.
9. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1988. 324 с.
10. Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. Киев: Наук. думка, 1989. 248 с.

11. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 444 с.
12. Морозов Н. Р. Математические вопросы теории трещин. Москва: Наука, 1984. 256 с.
13. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. Москва: Наука, 1985. 502 с.
14. Мирсалимов В. М. Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами. Баку: Элм, 1984. 122 с.
15. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: Маруками Ю. (ред.). Москва: Мир, 1990. Т. 2. 560 с.
16. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев: Наук. думка, 1988. 617 с. (Механика разрушения и прочности материалов. Т. 2.)
17. Каминский А. А., Галатенко Г. В. Исследование роста усталостных трещин в материалах с упрочнением. *Прикл. механика*. 1984. Т. 2, № 4. С. 54–60.
18. Витвицький П. М. Про розвиток пластичних деформацій біля кінців щілини в тонкій пластинці при її розтягу зосередженими силами. *ДАН УРСР. Сер. А*. 1969. № 4. С. 316–320.

### REFERENCES

1. Beregnitskiy, L. T., Delyavskiy, M. V. & Panasyuk, V. V. (1979). Bending of thin plates with defects type of cracks. Kiev: Naukova Dumka.
2. Bronshtejn, I. N. & Semendjajev, K. A. (1967). Handbook of mathematics. M.: Nauka.
3. Kyrjan, V. I., Osadchuk, V. A. & Nykolyshyn, M. M. (2007). Destruction mechanics of the weld-fabricated connections of metal structures. Lviv: SPOLOM, 2007.
4. Kushnir, R. M., Nykolyshyn, M. M. & Osadchuk, V. A. (2003). Elastic and elasticly-plastic limit state of shells with boundary condition. Lviv: SPOLOM.
5. Mazurak, L. P. & Beregnitskiy, L. T. Bending of transversally isotropic plate with defects like cracks. Kiev: Naukova Dumka.
6. Mushelishvili, N. I. (1966). Some basic problems of mathematical theory of elasticity. M.: Nauka.
7. Panasjuk, V. V. (1968). Limit equilibrium of brittle bodies with cracks. Kiev: Naukova Dumka.
8. Prusov, I. A. (1975). The conjugation method in plate theory. Minsk: Publisher Belarusian University.
9. Savruk, M. P. (1988). Two-dimensional elasticity problems for bodies with cracks. Kiev: Naukova Dumka.
10. Savruk, M. P., Osiv, P. N. & Prokopchuk, I. V. (1989). Numerical analysis in plane problems of fracture theory. Kiev: Naukova Dumka.
11. Panasjuk, V. V., Savruk, M. P. & Dacyshyn, A. P. (1976). Distribution of stresses near cracks in plates and shells. Kiev: Naukova Dumka.
12. Morozov, N. R. (1984). Mathematical questions in the theory of cracks. M.: Nauka.
13. Parton, V. Z. & Morozov, N. R. (1985). Mechanics of elastoplastic fracture. M.: Nauka.
14. Mirsalimov, V. M. (1984). Destruction of elastic and elastoplastic bodies with cracks. Baky: Jel'm.
15. Marukami Ju. (Eds.). (1990). Reference book on the coefficients of intensity of tensions. M.: Myr. Vol. 2.
16. Savruk, M. P. (1988). Coefficients of stress intensity in bodies with cracks. Kiev: Naukova Dumka. (Mechanics of fracture and strength of materials. Vol. 2.)
17. Kaminskyj, A. A. & Galatenko, G. V. (1984). Investigation of the growth of fatigue cracks in materials with hardening. Applied mechanics, Vol. 2, No. 4, pp. 54-60.
18. Vytvyckyj, P. M. (1969). About development of plastic deformation near the ends of the slit in the small plate when it lumped tensile forces. DAN URSR, Vol. A, No. 4, pp. 316-320.