

3. Homchenko, A. N. (1982). Some Probabilistic Aspects of FEM. Ivano-Frank. in-t nefti i gaza. Ivano-Frankovsk. 9 p. Dep. v VINITI 18.03.82, №1213.
4. Homchenko, A. N., Litvinenko, E. I. & Astionenko, I. A. (2011). Standard Serendip polynomials and ruled surfaces. Mizhvuz. zb. "Komp'juterno-integrovani tehnologii": Osvita, nauka, virobnictvo, Iss. 6, pp. 266-269.
5. Zenkevich, O. & Morgan, K. (1986). Finite Elements and Approximation. Moscow: Mir.
6. Gallager, R. (1984). Finite element method. Basics. Moscow: Mir.
7. Astionenko, I. A., Litvinenko, E. I. & Homchenko, A. N. (2009). The construction of multiparameter polynomials on the bicubic element of the Serendip family. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Fizika, Iss. 16, No. 5(60), pp. 15-31.
8. Astionenko, I. A., Litvinenko, E. I. & Homchenko, A. N. (2009). Inverse problems of Serendip approximations. Vestnik Hersonskogo nacional'nogo tehniceskogo universiteta, Iss. 2(35), pp. 36-42.

УДК 539.375

ВЗАЄМОДІЯ КОЛІНЕАРНИХ ТРІЩИН У СФЕРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З ГНУЧКИМ ПОКРИТТЯМ

Шацький І. П., д. ф.-м. н., Маковійчук М. В., к. ф.-м. н., Щербій А. Б.

*Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Микитинецька, 3, м. Івано-Франківськ, 76002, Україна*

ipshatsky@gmail.com

Досліджено задачу про розтяг сферичної оболонки, що підкріплена гнучким покриттям та містить дві меридіональні тріщини. Покриття моделюється шарніром, що з'єднує береги розрізів в одній з лицьових поверхонь оболонки. Методом сингулярних інтегральних рівнянь визначено напружений стан поблизу вершин тріщин та розподіл шарнірної реакції в покритті. Граничний стан композиції проаналізовано з урахуванням критеріїв крихкого руйнування оболонки та обмеженої міцності покриття. Досліджено вплив параметрів кривини серединної поверхні оболонки та взаємного розташування дефектів на величину руйнівного навантаження.

Ключові слова: сферична оболонка, гнучке покриття, колінеарні тріщини, гранична рівновага.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТРЕЩИН В СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С ГИБКИМ ПОКРЫТИЕМ

Шацкий И. П., д. ф.-м. н., Маковийчук Н. В., к. ф.-м. н., Щербий А. Б.

*Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Микитинецька, 3, м. Івано-Франківськ, 76002, Україна*

ipshatsky@gmail.com

Исследована задача о растяжении усиленной покрытием сферической оболочки с двумя меридиональными трещинами. Гибкое покрытие моделируется шарниром, соединяющим берега разрезов в одной из лицевых поверхностей оболочки. Методом сингулярных интегральных уравнений определены напряженное состояние вблизи вершин трещин и распределение шарнирной реакции в покрытии. Предельное равновесие композиции проанализировано с учетом критериев хрупкого разрушения оболочки и ограниченной прочности покрытия. Исследовано влияние параметров кривизны срединной поверхности оболочки и взаимного расположения дефектов на величину разрушающей нагрузки.

Ключевые слова: сферическая оболочка, гибкое покрытие, коллинеарные трещины, предельное равновесие.

INTERACTION OF COLLINEAR CRACKS IN SPHERICAL SHELL WITH FLEXIBLE COATING

Shatskyi I. P., Dr. Phys. & Math. Sc., Makoviichuk M. V., Ph. D. in Phys. & Math., Shcherbii A. B.

*Ivano-Frankivsk Branch of Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics
and Mathematics NAS of Ukraine,
Mykytynetska str., 3, Ivano-Frankivsk, 76002, Ukraine*

ipshatsky@gmail.com

Elastic and limit equilibrium of tensioned shallow spherical shell weakened by two through the thickness meridional cracks and enhanced by coating on one of the face surfaces is studied in the two-dimensional formulation. The cracks in the shell with a flexible coating are simulated by cuts with eccentrically hinged edges. The boundary problem for equations of classical shell theory with interrelated conditions of tension and bending along the cutting line is formulated within the framework of such model. Singular integral equation for the unknown jump of normal displacement on the cracks edges has been elaborated.

Based on numerical solutions of integral equation dependences of forces and moments intensity factors in the vicinity of the defects tips and distribution of forces in the hinge joints on the parameter of shell curvature and mutual distance between cracks are investigated.

To estimate the influence of flexible coating on the limit state of the thin-walled elements of constructions with defects the combined fracture criterion which takes into account two mechanisms: propagation of the crack along the shell body and disintegration of the coating with limited strength, were proposed. The first mechanism is implemented in the shell of small curvature (with short cracks), and the second one – in the shell of big curvature (with long cracks). It was discovered that enhancing of external surface of tensioned spherical shell by coating is more efficient than enhancing of internal one. In addition, the limiting load depends from distance between cuts nonmonotonically in case of strengthening of external face of shell.

Key words: spherical shell, flexible covering, collinear cracks, limit equilibrium.

ВСТУП

Одним зі способів подовження ресурсу роботи тонкостінних елементів конструкцій є нанесення різного роду захисних покриттів, які можуть сприймати частину зовнішнього навантаження і тим самим зменшити напруження поблизу наявних пошкоджень. Розрахунки граничного стану складених конструкцій необхідно проводити, застосовуючи критерії міцності і до основи, і до підкріплення. Раніше [1, 2] розроблено модель для оцінки впливу одностороннього гнучкого покриття на міцність пластини з наскрізною тріщиною. Гнучке покриття моделюється шарніром, який з'єднує береги розрізу на одній із лицьових поверхонь пластини. У працях [3-5] таку модель розвинуто для дослідження рівноваги тонких оболонок з тріщинами. Зокрема, для малих параметрів кривини побудовано аналітичні оцінки граничного навантаження вкритої необмежено міцним покриттям оболонки з тріщиною, орієнтованої в головному напрямку серединної поверхні. Числовий аналіз для циліндричної та сферичної оболонок з поодинокую тріщиною проведено в роботах [6, 7]. Проблема взаємодії дефектів у вкритих оболонках дотепер не розглядалася.

Мета цього дослідження – вивчити вплив одностороннього гнучкого покриття на напружено-деформований стан та міцність пологої сферичної оболонки, послабленої системою меридіональних тріщин, з урахуванням обмеженої міцності підкріплення. Числовий аналіз проведено в широкому діапазоні зміни параметрів кривини оболонки та віддалі між дефектами.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо ізотропну сферичну оболонку завтовшки $2h$ з радіусом середньої поверхні R , послаблену двома наскрізними колінеарними розрізами завдовжки $2l$, які розташовані вздовж меридіана на відстані $2d$ між їхніми центрами (рис. 1). Нехай на одну із лицьових поверхонь оболонки нанесено гнучке покриття, яке деформується сумісно з підкладкою і здатне витримати доволі високі напруження. Оболонка зазнає рівномірного розтягу мембранними зусиллями $p = \text{const}$; решту поверхонь об'єкта вважаємо вільними від навантаження. У рамках теорії пологих оболонок Кірхгофа-Лява досліджуємо напружений стан та граничну рівновагу композиції.

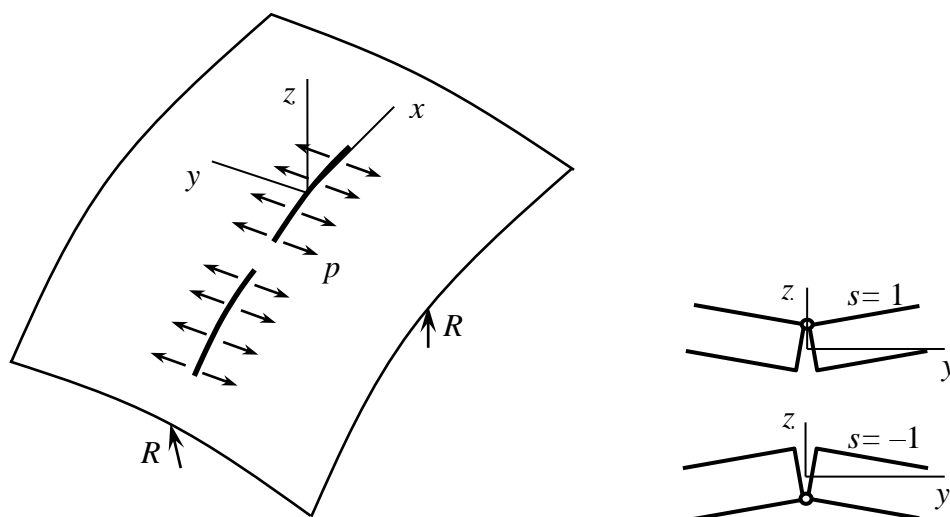


Рис. 1. Схема задачі та модель шарнірного з'єднання

Уважаючи оболонку в зоні збурення напруженого стану пологою, виберемо систему декартових координат $Oxyz$ з центром посередині правого розрізу та віссю абсцис уздовж його лінії. Якщо прийняти гіпотезу Кірхгофа про жорстку нормаль, то тріщини в оболонці з абсолютно гнучким покриттям доцільно моделювати математичними розрізами, береги яких з'єднані шарнірно в одній із лицьових поверхонь оболонки $z = sh$ ($s = +1$ для зовнішнього чи $s = -1$ для внутрішнього підкріплення). Із урахуванням симетрії об'єкта та навантаження відносно осі абсцис такий підхід призводить до задачі теорії пологих оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах [3, 4]:

$$\Delta\Delta\varphi - \frac{B}{R}\Delta w = 0, \quad \Delta\Delta w + \frac{1}{DR}\Delta\varphi = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus L; \quad (1)$$

$$[u_y] - sh[\mathcal{G}_y] = 0, \quad M_y - sh(N_y + p) = 0, \quad x \in L; \quad (2)$$

$$N_x = N_{xy} = N_y = 0, \quad M_x = M_{xy} = M_y = 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Тут φ – функція напружень, w – прогин оболонки, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа; $[u_y]$ – розкриття тріщини в базовій поверхні оболонки, $[\mathcal{G}_y]$ – розрив кута повороту нормалі ($\mathcal{G}_y = \partial w/\partial y$); N_x , N_{xy} , N_y – мембранні зусилля, M_x , M_{xy} , M_y – моменти; $B = 2Eh$, $D = 2Eh^3/(3(1-\nu^2))$, E і ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки; $L = (-l-2d, l-2d) \cup (-l, l)$ – сукупність розрізів.

Сутність такої постановки задачі відображають крайові умови (2). Перша з них означає неперервність переміщень на з'єднаних берегах розрізу, друга описує реактивний момент, викликаний переносом контактної реакції з шарніра у базову поверхню оболонки.

Для побудови розв'язку задачі (1)-(3) скористалися методом сингулярних інтегральних рівнянь. Ураховуючи, що дефекти перебувають в однакових умовах, зусилля та моменти на лінії правої тріщини виразимо через похідні від функцій стрибка [8-11]:

$$N_y(x,0) = \frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ \tilde{K}_{11}(\xi,x) [u_y]'(\xi) - \tilde{K}_{13}(\xi,x) a [\theta_y]'(\xi) \right\} d\xi,$$

$$M_y(x,0) = \frac{Ba}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ \tilde{K}_{31}(\xi,x) [u_y]'(\xi) - \tilde{K}_{33}(\xi,x) a [\theta_y]'(\xi) \right\} d\xi. \quad (4)$$

Тут

$$\tilde{K}_{ij}(\xi,x) = K_{ij}(\xi-x) + K_{ij}(\xi+x+2d), \quad i, j = 1,3;$$

$$K_{11}(z) = \frac{1}{z} - \frac{2}{z} \left(\frac{2}{\gamma|z|} \operatorname{kei}'(\gamma|z|) - \operatorname{ker}(\gamma|z|) + \frac{1}{2} + \gamma|z| \operatorname{ker}'(\gamma|z|) \right),$$

$$K_{13}(z) = K_{31}(z) = -\frac{2(1-\nu)}{z} \left(\frac{2}{\gamma^2 z^2} + \frac{2}{\gamma|z|} \operatorname{ker}'(\gamma|z|) + \operatorname{kei}(\gamma|z|) \right) - 2\gamma \operatorname{sgn} z \operatorname{ker}'(\gamma|z|),$$

$$K_{33}(z) = \frac{2(1-\nu)^2}{z} \left(\frac{2}{\gamma|z|} \operatorname{kei}'(\gamma|z|) - \operatorname{ker}(\gamma|z|) \right) - 2(1-\nu^2) \gamma \operatorname{sgn} z \operatorname{ker}'(\gamma|z|) - 2\gamma^2 \int_0^z \operatorname{kei}(\gamma|z|) dz;$$

$a = h/\sqrt{3(1-\nu^2)}$, $\gamma^2 = 1/(Ra)$, $\operatorname{ker} z$, $\operatorname{kei} z$ – функції Томсона.

Підставимо вирази (4) в крайову умову (2) на правому розрізі. Виключаючи функцію $[\theta_y]$, отримуємо сингулярне інтегральне рівняння для знаходження розриву переміщень:

$$\frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l K(\xi,x) [u_y]'(\xi) d\xi = -p, \quad x \in (-l,l); \quad (5)$$

$$K(\xi,x) = \tilde{K}_{11}(\xi,x) - 2s\tilde{K}_{13}(\xi,x)/\sqrt{3(1-\nu^2)} + \tilde{K}_{33}(\xi,x)/(3(1-\nu^2)).$$

На кінцях розрізу розв'язок рівняння (5) повинен задовольняти умову:

$$[u_y](\pm l) = 0. \quad (6)$$

Якщо розглядати рівні колінеарні тріщини в оболонці без покриття, то, підставляючи інтегральні представлення (4) в класичні крайові умови $N_y + p = 0$, $M_y = 0$, $x \in L$, отримуємо систему інтегральних рівнянь для знаходження розриву переміщення і кута повороту на правому розрізі:

$$\frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ \tilde{K}_{11}(\xi,x) [\bar{u}_y]'(\xi) - \tilde{K}_{13}(\xi,x) a [\bar{\theta}_y]'(\xi) \right\} d\xi = -p,$$

$$\frac{Ba}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ \tilde{K}_{31}(\xi,x) [\bar{u}_y]'(\xi) - \tilde{K}_{33}(\xi,x) a [\bar{\theta}_y]'(\xi) \right\} d\xi = 0, \quad x \in (-l,l), \quad (7)$$

з додатковими умовами:

$$[\bar{u}_y](\pm l) = 0, \quad [\bar{\theta}_y](\pm l) = 0. \quad (8)$$

За знайденими функціями стрибка переміщення і кута повороту нормалі обчислюють коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів:

$$K_N^\pm = \mp \frac{B}{4} \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{2|x \mp l|} [u_y]'(x), \quad K_M^\pm = \pm (3 - 2\nu - \nu^2) \frac{D}{4} \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{2|x \mp l|} [\theta_y]'(x), \quad (9)$$

а за виразами (4) – розподіл зусиль $N(x)$ у покритті на лінії розрізів.

КРИТЕРІЙ РУЙНУВАННЯ

Перейдемо до розгляду можливих сценаріїв руйнування надтріснутої оболонки з покриттям.

Вважаємо, що руйнування підкріпленої оболонки з тріщинами може відбуватися двома шляхами: розповсюдження тріщин без порушення цілісності покриття та втрата несучої здатності через розтріскування покриття. Перший механізм оцінюємо енергетичним критерієм лінійної механіки руйнування за комбінованого розтягу-згину [4, 5, 7, 11]:

$$\frac{\pi}{4h^2 E} \left[K_N^2 + \frac{3(1+\nu)}{3+\nu} \left(\frac{K_M}{h} \right)^2 \right] = 2\gamma_*, \quad (10)$$

де γ_* – густина ефективної поверхневої енергії матеріалу.

Після підстановки знайдених значень коефіцієнтів інтенсивності (9) у критерій (10) визначаємо граничне навантаження p_{1*} , при якому настане розвиток тріщини.

Для оцінки граничного стану покриття скористаємось класичною теорією міцності:

$$\max_{x \in [-l, l]} N(x) = N_*, \quad (11)$$

де N_* – критична сила, яку здатне витримати покриття. Використавши знайдені значення $N(x)$, отримаємо граничне навантаження p_{2*} , при якому відбудеться руйнування покриття.

За руйнівне зусилля слід, вочевидь, прийняти менше з p_{1*} та p_{2*} .

Нарешті, підставляючи класичні результати із задачі (6), (7) в критерій (10), отримуємо величину руйнівного зусилля p_{3*} для оболонки з тріщинами без покриття.

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Числовий розв'язок задач (5), (6) та (7), (8) побудували при $\nu = 0,3$ методом механічних квадратур [8, 9] з використання як квадратурних вузлів та вузлів колокації нулів поліноми Чебишева відповідно першого та другого роду.

Графіки, подані на рис. 2, характеризують розподіл безрозмірних зусиль у покритті на лінії тріщин для різних значень безрозмірних параметрів кривини $\lambda = \gamma l = \left(3(1-\nu^2) \right)^{1/4} l / \sqrt{Rh}$ та відносної віддалі між тріщинами $\rho = l/d$. При зростанні параметра λ спостерігаємо суттєве підвищення реактивного зусилля в шарнірі, особливо посередині розрізу. Залежність реакції від параметра ρ є немонотонна.

Залежності безрозмірних значень коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів, від параметра відносної віддалі між тріщинами ρ , будували при фіксованих значеннях параметра кривини λ (рис. 3). Вплив шарнірного з'єднання берегів тріщини за розтягу оболонки проявляється в суттєвому зменшенні коефіцієнтів інтенсивності зусиль та збільшенні коефіцієнтів інтенсивності моментів. У випадку з'єднання берегів у внутрішній поверхні ($s = -1$) практично відсутня немонотонна залежність від параметра взаємного розташування дефектів ρ .

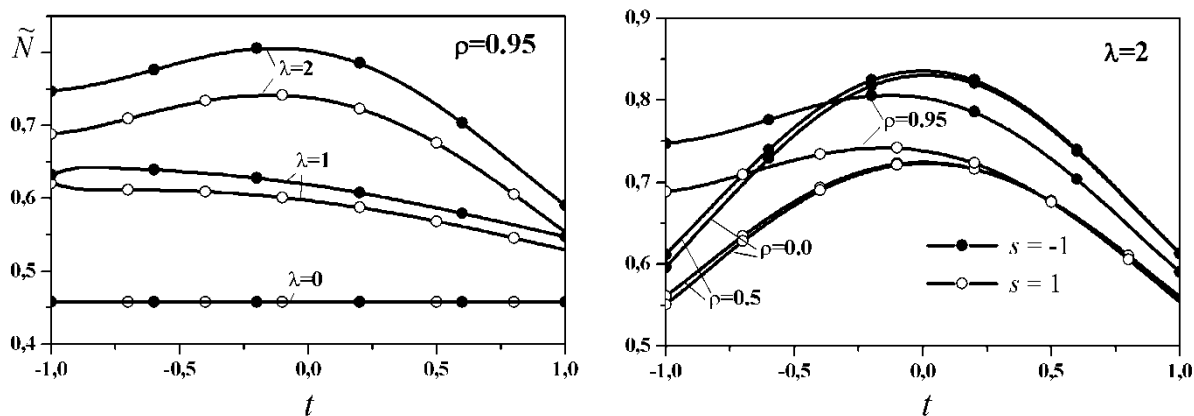


Рис. 2. Розподіл реакції в шарнірі $\tilde{N} = N(t)/\rho$, $t = x/l$:

зліва – залежність від параметра кривини λ , справа – від параметра взаємного розташування тріщин ρ ;
 $s = 1$ – зовнішнє, $s = -1$ – внутрішнє покриття.

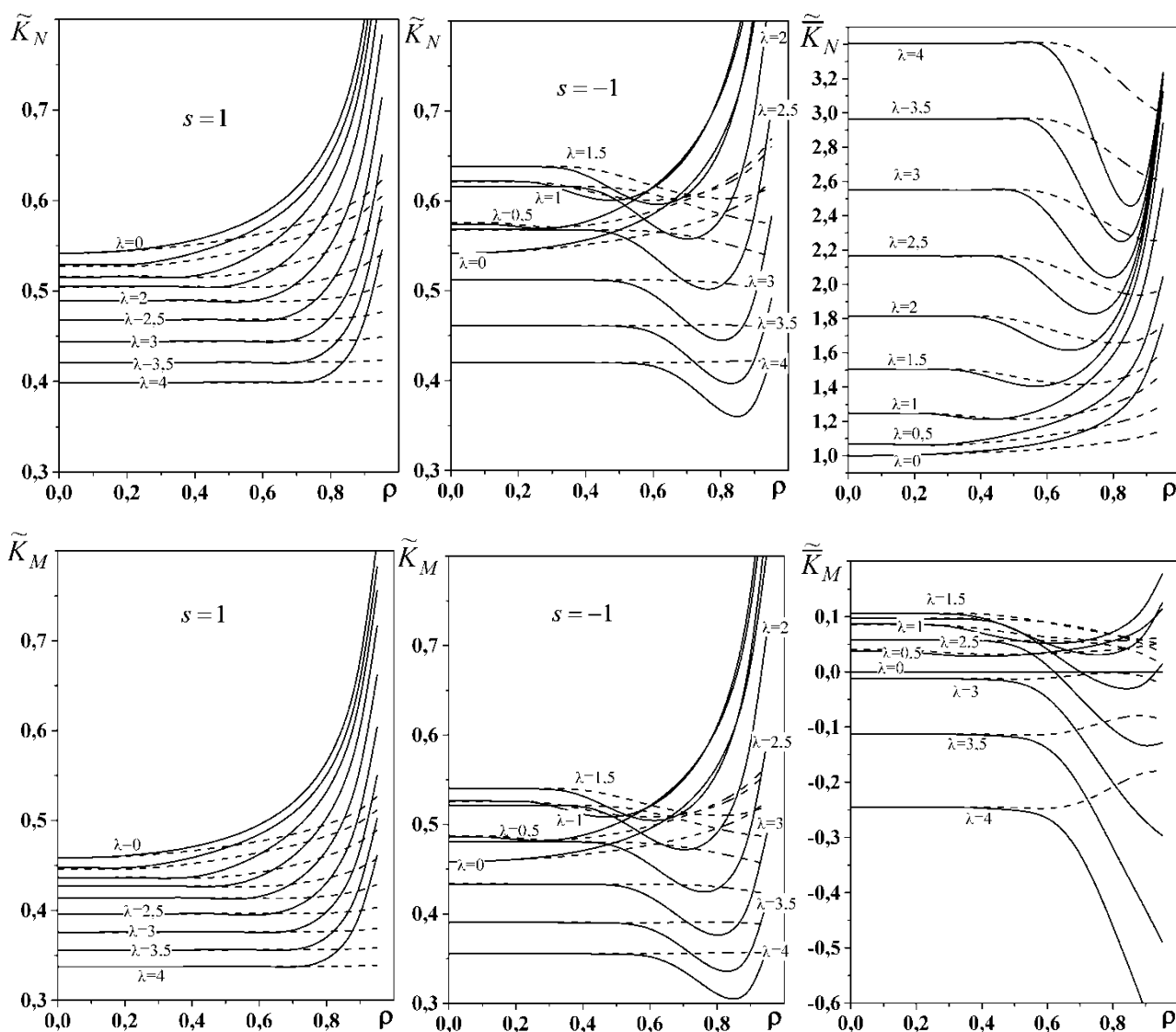


Рис. 3. Залежності коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів від взаємного розташування тріщин:

$$\tilde{K}_N = K_N / (p\sqrt{l}), \quad \tilde{K}_M = K_M / (sph\sqrt{l}) \quad (s = 1 - \text{зовнішнє, } s = -1 - \text{внутрішнє покриття});$$

$$\tilde{\bar{K}}_N = \bar{K}_N / (p\sqrt{l}), \quad \tilde{\bar{K}}_M = \bar{K}_M / (ph\sqrt{l}) \quad - \text{оболонка без покриття [11-13];}$$

суцільні лінії відповідають ближнім, а штрихові – дальнім вершинам

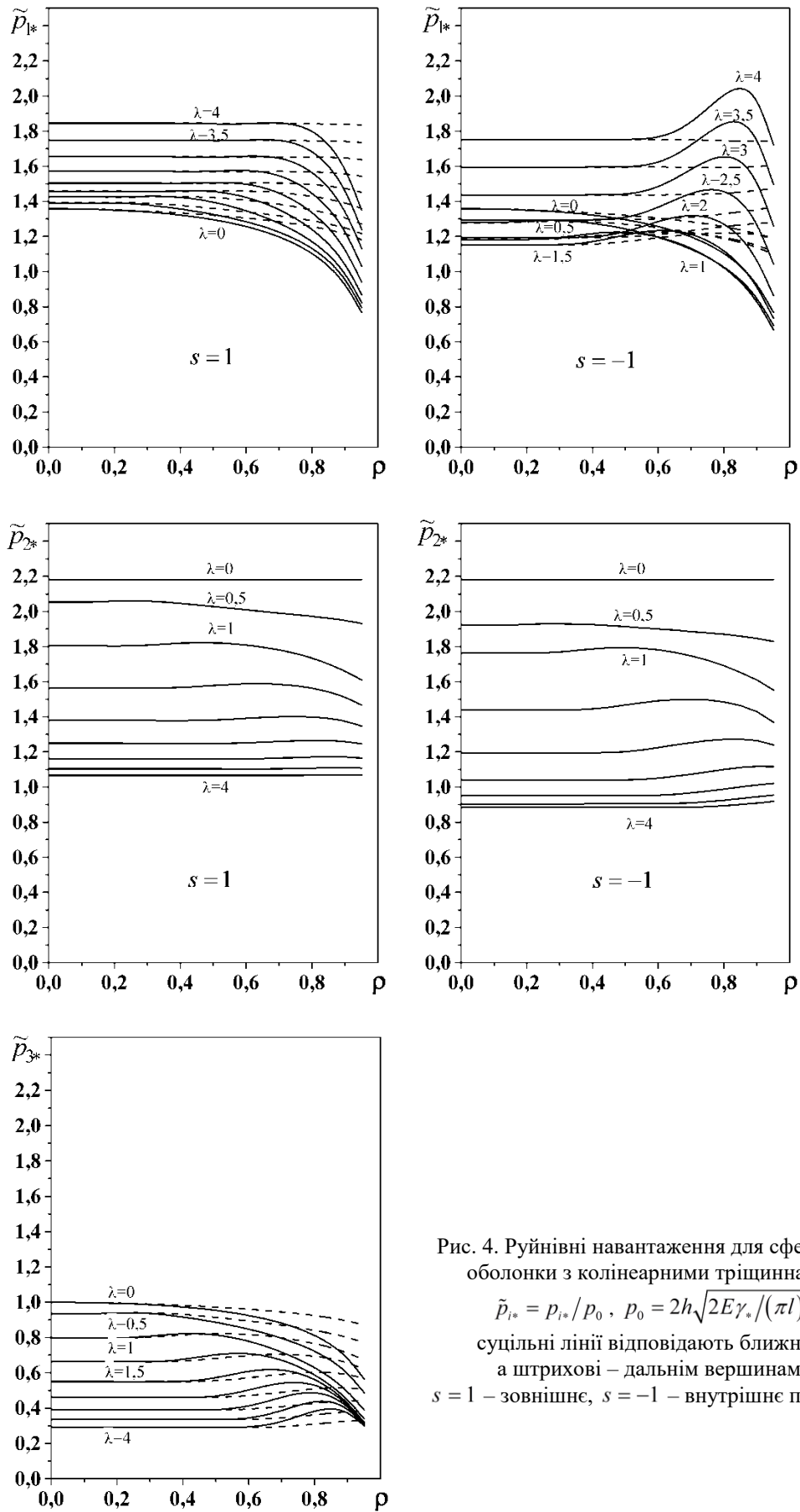


Рис. 4. Руйнівні навантаження для сферичної оболонки з колінеарними тріщинами:
 $\tilde{p}_{i*} = p_{i*} / p_0, p_0 = 2h\sqrt{2E\gamma_* / (\pi l)}$;
 суцільні лінії відповідають ближнім, а штрихові – дальнім вершинам;
 $s = 1$ – зовнішнє, $s = -1$ – внутрішнє покриття

Результати дослідження граничної рівноваги вкритої сферичної оболонки з двома тріщинами відображено на рис. 4. Граничні навантаження p_{1*} , отримані за критерієм розтріскування оболонки, можуть набувати значень як більших, так і менших, порівняно з аналогічно навантаженою пластиною. Для випадку покриття на зовнішній поверхні оболонки спостерігається немонотонна залежність навантаження p_{1*} від параметра ρ для ближніх вершин дефектів; водночас за великих λ небезпечними виявляються дальні вершини тріщин (штрихові лінії лежать нижче від суцільних). Натомість, у разі підкріплення внутрішньої поверхні завжди небезпечними є ближні вершини розрізів.

Граничні навантаження p_{2*} , розраховані за міцністю покриття, отримано при $N_*/p_0 = 1$, $p_0 = 2h\sqrt{2E\gamma_*/(\pi l)}$. Для слабших покриттів з меншим N_* ординати кривих p_{2*} закономірно зменшуються, усуваючи тим самим ефект підкріплення. Значення p_{2*} істотно знижуються при збільшенні параметра кривини λ і практично не залежать від параметра взаємного розташування дефектів ρ . При малих кривинах оболонки руйнівним є навантаження $p_{1*} = \min\{p_{1*}, p_{2*}\}$; при більших кривинах – $p_{2*} = \min\{p_{1*}, p_{2*}\}$.

У часткових випадках $\lambda = 0$ та $\rho = 0$ отримаємо відомі результати для колінеарних тріщин у вкритій пластині [14] та для поодинокі меридіональної тріщини у сферичній оболонці з покриттям [7] відповідно.

ВИСНОВКИ

Руйнівне навантаження розтягу для сферичної оболонки з двома тріщинами з покриттям на внутрішній поверхні ($s = -1$) немонотонно залежить від параметрів кривини та відстані між дефектами, а небезпечними можуть бути зовнішні вершини дефектів. При малих кривинах оболонки руйнівними є навантаження, розраховані за міцністю болонки; при більших кривинах – за міцністю покриття. За будь-яким із критеріїв підкріплення оболонки ззовні є вигіднішим, аніж зсередини. Для оцінки міцності вкритих надтріснутих оболонок вирішальне значення має врахування обмеженої міцності гнучкого покриття. Неміцні підкріплення не дають відновлювального ефекту і не можуть визнаватися ефективними.

ЛІТЕРАТУРА

1. Шацкий И. П. Растяжение пластины, содержащей прямолинейный разрез с шарнирно соединенными кромками. *Журн. прикл. механики и техн. физики*. 1989. № 5. С. 163–165.
2. Шацкий І. Модель тріщини в пластинці з гнучким покриттям. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 2000. Вип. 57. С. 42–47.
3. Шацкий І. П. Интегральное рівняння задачі про тріщину в пологій оболонці з гнучким покриттям. *Доп. АН України*. 1992. № 1. С. 46–48.
4. Шацкий И. П. Задача о трещине в полой оболочке с гибким покрытием. *Прикл. механика и техн. физика*. 1996. 37, № 2. С. 131–138.
5. Шацкий І. П., Щербій А. Б. Вплив гнучкого покриття на міцність пологої оболонки з тріщиною вздовж лінії кривини. *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій* (вип. 2): В 3-х т. Під заг. ред. Панасюка В. В. Львів: Каменяр, 1999. Т. 2. С. 333–335.
6. Шацкий І. П., Маковійчук М. В., Щербій А. Б. Вплив гнучкого покриття на міцність пологої циліндричної оболонки з поперечною тріщиною. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2015. Вип. 24. С. 248–257.
7. Шацкий І. П., Маковійчук М. В., Щербій А. Б. Вплив гнучкого покриття на граничну рівновагу сферичної оболонки з меридіональною тріщиною. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2017 (в друці).

8. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 444 с.
9. Хижняк В. К., Шевченко В. П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек. Донецк: Изд-во Донец. ун-та, 1980. 126 с.
10. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.
11. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. Киев: Наук. думка, 1985. 224 с.
12. Механика композитов. В 12 т. Гузь А. Н. (ред.). Киев: Наук. думка, 1993. (Т. 7. Концентрация напряжений. Киев: А. С. К., 1998. 387 с.)
13. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. Львів: СПОЛОМ, 2003. 320 с.
14. Шацький І. П. Взаємодія колінеарних розрізів з шарнірно з'єднаними берегами у розтягнутій пластинці. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 1992. Вип. 36. С. 93–97.

REFERENCES

1. Shatskii, I. P. (1989). Tension of a plate containing a rectilinear cut with hinged rims. *J. Appl. Mech. and Techn. Phys.*, Vol. 30, No. 5, pp. 828-830.
2. Shats'kyi, I. (2000). A model of crack is in plate with flexible covering. *Visnyk Lviv. un-tu. Ser. mech.-math.*, Vol. 57, pp. 42-47.
3. Shatskyi, I. P. (1992). Integral equation of problem about a crack in shallow shell with flexible covering. *Dop. AN Ukraine*, No. 1, pp. 46-48.
4. Shatskii, I. P. (1996). Crack problem for a shallow shell with a flexible coating. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, Vol. 37, No. 2, pp. 259-265.
5. Shatskyi, I. P. & Shcherbii, A. B. (1999). Influence of flexible covering on streng of shallow shell with crack along curvature line. *Mehanika ruinovannia materialiv i mitsnist konstrukttsii*, Iss. 2, Vol. 2, pp. 333-335. (In 3 V. ed. by Panasyuk V. V., Kameniar, Lviv, Ukraine).
6. Shatskyi, I. P., Makoviichuk, M. V. & Shcherbii, A. B. (2015). Influence of flexible coating on strength of shallow cylindrical shell with a circumferential crack. *Problemy obchysluvalnoi mehaniky i mitsnosti konstrukttsii*, Iss. 24, pp. 248-257.
7. Shatskyi, I. P., Makoviichuk, M. V. & Shcherbii, A. B. (2017). Influence of flexible coating on strength of shallow spherical shell with a meridional crack. *Fiz.-khim. mehanika materialiv* (in print).
8. Panasyuk, V. V., Savruk, M. P. & Datsyshyn, A. P. (1976). Stress distribution near cracks in plates and shells. Kiev: Naukova dumka, Ukraine.
9. Khyzhnyak, V. K. & Shevchenko, V. P. (1980). Mixed problems of the plates and shells theory. Donetsk: Izd-vo Donets. un-ta, Ukraine.
10. Savruk, M. P. (1981). Two-dimensional problems of elasticity for cracked bodies. Kiev: Naukova dumka, Ukraine.
11. Osadchuk, V. A. (1985). Stress-strain state and limit equilibrium of shells with the cuts. Kiev: Naukova dumka, Ukraine.
12. Guz, A. N. (Eds.). (1993). *Mechanics of composites*, in 12 Vol. Kiev: Naukova dumka, Ukraine (Guz, A. N., Kosmodamianskii, A. S., Shevchenko, V. P. et al. (Eds.). (1998). *Concentration of stresses*, Vol. 7, Kiev: A. S. K., Ukraine).
13. Kushnir, R. M., Nykolyshyn, M. M. & Osadchuk, V. A. (2003). Elastic and elastoplastic limiting state of shells with defects. Lviv: SPOLOM, Ukraine.
14. Shats'kii, I. P. (1993). The interaction of collinear cuts with hinged rims in a plate under tension. *J. Sov. Math.*, Vol. 67, Iss. 5, pp. 3355-3358.