

3. Babich, D. V., Vorobey, V. V., Tarasyuk, V. I. & Khoroshun, L. P. (1992). Free vibrations of shells of rotation from temperature-sensitive composite materials. *Prikladnaya Mekhanika*, Vol. 28, No.4, pp. 8-16.
4. Bogdanovich, A. E. & Zarutskiy, V. A. (1991). Free vibrations of ribbed orthotropic cylindrical shells. *Prikladnaya Mekhanika*, Vol. 27, No. 10, pp. 83-90.
5. Bolotin, V. V. & Novichkov, Yu. N. (1980). *Mechanics of multilayered structures*. Moscow: Mashinostroyeniye.
6. Grigolyuk, E. I. & Kulikov, G. M. (1988). *Multilayer reinforced shell: Calculation of pneumatic tires*. Moscow: Mashinostroyeniye.
7. Zarutskiy, V. A. (1999). Stationary waves in multilayer orthotropic ribbed cylindrical shells. "Mechanics of composites". *Dynamics of structural elements* (vol. 9). Kiev: ASK, pp. 44-82.
8. Zarutskiy, V. A. (2001). On the comprehensive experimental studies of stability and vibrations of structurally inhomogeneous shells. *Prikladnaya Mekhanika*, Vol. 37, No. 8, pp. 38-67.
9. Kairov, A. S. & Shevchenko, V. P. (2000). Of natural vibrations of supported shells with attached bodies. *Zbirnyk nauk. prac' Ukr. Derjavnogo Mors'kogo Tekhnichn. un-tu*, No. 5(371), pp. 121-130.
10. Vasil'ev, V. V., Protasov, V. D., Bolotin, V. V. & oth. (1990). *Composite materials: Handbook*. Vasil'ev, V. V. & Tarnopol'skiy, Yu. M. (Eds.). Moscow: Mashinostroyeniye.
11. Kubenko, V. D. & Kovalchuk, P. S. (2009). Experimental study of vibrations and dynamic stability of shells made of laminated composite materials. *Prikladnaya Mekhanika*, Vol. 45, No. 5, pp. 53-79.
12. Lehnitskiy, S. G. (1977). *Theory of elasticity of an anisotropic body*. Moscow: Nauka.
13. Guz', A. N., Grigorenko, Ya. M., Babich, I. Yu. & oth. (1983). *Mechanics of composite materials and structural elements*. Vol. 2. *Mechanics of structural elements*. Kiev: Nauk. dumka.
14. Kubenko, V. D. (Eds.). (1999). *Mechanics of composites*. Vol. 9. *Dynamics of structural elements*. Kiev: ASK.
15. Wilkinson, D. H. (1970). *The algebraic problem of eigenvalues*. Moscow: Nauka.

УДК 539.3

## **ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ І ДИСИПАТИВНИЙ РОЗІГРІВ ШАРНІРНО ОПЕРТОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ ПЛАСТИНИ З П'ЄЗОСЕНСОРАМИ З УРАХУВАННЯМ ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ ТА ДЕФОРМАЦІЙ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ**

<sup>1</sup>Карнаухов В. Г., д. ф.-м. н., професор, <sup>1</sup>Козлов В. І., д. ф.-м. н., професор,

<sup>2</sup>Карнаухова Т. В., к. ф.-м. н., доцент

<sup>1</sup>*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАНУ,  
вул. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна*

<sup>2</sup>*Національний технічний університет «КПІ»,  
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна*

karn@inmech.kiev.ua

Представлена модель вимушених резонансних коливань і вібророзігріву в'язкопружних пластин з п'єзосенсорами з урахуванням геометричної нелінійності та деформацій поперечного зсуву. Методом Бубнова-Гальоркіна одержано наближений аналітичний розв'язок сформульованої задачі для прямокутної шарнірно опертої пластини. Подано аналіз впливу геометричної нелінійності, зсувних деформацій і температури на ефективність роботи п'єзосенсорів.

*Ключові слова: резонансні коливання, геометрична нелінійність, деформації зсуву, температура, п'єзосенсори.*

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С ПЬЕЗОСЕНСОРАМИ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ И ДЕФОРМАЦИЙ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

<sup>1</sup>Карнаухов В. Г., д. ф.-м. н., профессор, <sup>1</sup>Козлов В. И., д. ф.-м. н., профессор,

<sup>2</sup>Карнаухова Т. В., к. ф.-м. н., доцент

<sup>1</sup>*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина*

<sup>2</sup>*Национальный технический университет «КПИ»,  
просп. Победы, 37, Киев, 03056, Украина*

karn@inmech.kiev.ua

Представлена модель вынужденных резонансных колебаний и виброразогрева вязкоупругих пластин с пьезосенсорами с учетом геометрической нелинейности и деформаций поперечного сдвига. Методом Бубнова-Галеркина получено приближенное аналитическое решение сформулированной задачи для прямоугольной шарнирно опертой пластины. Представлен анализ влияния геометрической нелинейности, деформаций поперечного сдвига температуры на эффективность работы пьезосенсоров.

*Ключевые слова: резонансные колебания, геометрическая нелинейность, деформации сдвига, температура, пьезосенсоры.*

## FORCED VIBRATIONS AND VIBROHEATING OF VISCOELASTIC PLATE WITH PIEZOSENSORS WITH TAKING INTO ACCOUNT GEOMETRICAL NONLINEARITY AND SHEAR STRAINS

<sup>1</sup>Karnaykhov V. G., D.Sc. in Physics and Math., Professor,

<sup>1</sup>Kozlov V. I., D.Sc. in Physics and Math., Professor,

<sup>2</sup>Karnaykhova T. V., Ph. in Physics and Math., Associate Professor,

<sup>1</sup>*S. P. Timoshenko Institute of Mechanics National Academy of Sciences of Ukraine,  
Nesterova str., 3, Kiev, 03056, Ukraine*

<sup>2</sup>*National Technical University of Ukraine «Ihor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»,  
Ave. Victory, 37, Kiev, 03056, Ukraine*

karn@inmech.kiev.ua

With oscillations, the piezosensors have hysteresis losses. These losses are significantly increased for inelastic materials. Sometimes this lead to a significant increase in temperature of dissipative warming up. This temperature affects the performance of the sensors. If temperature reaches the Curie value of the material, the sensor loses its functional purpose due to depolarization of the material. Due to the resonance oscillations of not enough thin plates and an anisotropy of the material, it is necessary to take into account a geometric nonlinearity and deformation of the transverse displacement in the study of their resonant oscillations and dissipative warming.

The article studies a three-layer plate. The plate is composed of an orthotropic viscoelastic core-layer and two outer transversally isotropic layers (facesheets). The core is passive without piezoelectric effect, and facesheets are piezoelectric. Facesheets are opposite polarized. The plate is loaded by pressure. Pressure is uniform and harmonic over time. A frequency of pressure is close to the resonance. The visco-elastic properties of a material are described by Voltaire's operators.

We developed Based a model of forced resonant oscillations of flexible viscoelastic rectangular plates with piezoelectric sensors. In the model, refined hypothesis of S. Timoshenko are employed. Using the Bubnov-Galerkin method, the problem is reduced to a nonlinear integro-differential equation with cubic nonlinearity of the transverse deflection. We use asymptotic methods of nonlinear mechanics solving this equation. We obtain a cubic algebraic equation where the unknown is the square power of the transverse oscillations' amplitude. Using the obtained solution of the problem of electromechanics, a dissipative function is obtained. Finally, an analytical solution of the heat equation with a known heat source is also obtained.

*Key words: resonant vibrations, geometrical nonlinearity, shear strains, temperature, piezosensors.*

## ВСТУП

Для експериментального дослідження вимушених резонансних коливань пластин і їх активного демпфування широко використовуються п'єзосенсори. Усі матеріали при коливаннях мають певні гістерезисні втрати, які суттєво збільшуються для непружних матеріалів. За деяких умов вони призводять до значного підвищення температури дисипативного розігріву, яка може помітно вплинути на ефективність роботи сенсорів. Так, наприклад, якщо температура досягає точки Кюрі матеріалу, то сенсор втрачає своє функціональне призначення через деполяризацію матеріалу. За резонансних коливань не досить тонких пластин та за суттєвої анізотропії матеріалу виникає необхідність враховувати геометричну нелінійність та деформації поперечного зсуву при дослідженні їх резонансних коливань і дисипативного розігріву. У нашій роботі представлена уточнена модель вимушених резонансних коливань і дисипативного розігріву ортотропних в'язкопружних пластин з використанням гіпотез С. П. Тимошенка та адекватних їм гіпотез про розподіл електричних польових величин і температури по товщині пластини.

### МАТЕМАТИЧНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається тришарова пластина, складена з середнього пасивного (без п'єзоєфекту) ортотропного в'язкопружного шару товщиною  $h_0$  і двох зовнішніх шарів товщиною  $h_1$  з трансверсально-ізотропних п'єзоелектричних шарів з товщиною поляризацією. Усі властивості п'єзошарів однакові, але вони мають протилежну поляризацію. Пластина навантажена рівномірним поверхневим гармонічним за часом тиском з частотою, близькою до резонансної. Використана декартова система координат  $(x, y, z)$ , при цьому вісь  $Oz$  направлена по товщині пластини. Для моделювання електромеханічних коливань пластини приймаються уточнені гіпотези, наведені в [4, 5, 7, 13]. Тоді одержимо спрощені визначальні рівняння електров'язкопружності, представлені в [1, 7]. Для пасивного пружного матеріалу спрощені визначальні рівняння при використанні гіпотез С. П. Тимошенка наведено в [1, 7, 13]. З них на основі принципу відповідності [9] знайдемо визначальні рівняння для в'язкопружного матеріалу. З використанням спрощених визначальних рівнянь для активних і пасивних шарів, шляхом інтегрування по повній товщині пластини одержимо визначальні рівняння зусиль і моментів:

$$\begin{aligned} N_{xx} &= A_{11}\varepsilon_1 + A_{12}\varepsilon_2, \dots, M_{xx} = D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2, \dots \\ Q_x &= K_s A_{55}\varepsilon_{13}, Q_x = K_s A_{44}\varepsilon_{23}. \end{aligned} \quad (1)$$

Жорсткі характеристики  $A_{ij}$ ,  $D_{ij}$  наведено в [7]. Для в'язкопружного матеріалу вони є операторами Вольтера.

Для уточненої моделі С. П. Тимошенка компоненти вектора зміщень апроксимуємо лінійним законом:

$$w = w(s, \theta), \quad u(s, \theta, z) = u_0(s, \theta) + z\varphi_x(s, \theta), \quad v = v_0(s, \theta) + z\varphi_y(s, \theta). \quad (2)$$

Величини  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  характеризують незалежний поворот нормалі до пластини.

Вирази для деформацій пластини  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{13}$ ,  $\varepsilon_{23}$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\kappa_{12}$  через  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w$  представлено, наприклад, у [7].

Універсальні рівняння уточненої теорії пластин (рівняння руху, кінематичні співвідношення, граничні й початкові умови) мають такий же вигляд, як і в механічній теорії пластин [1, 7, 13]. Специфічні особливості поведінки матеріалу описуються наведеними вище визначальними рівняннями. Використовуючи універсальні й визначальні рівняння, одержимо рівняння через зміщення й кути повороту, які співпадають з рівняннями термопружності пластин (10.1.31)-(10.1.35) з монографії [13], у яких необхідно лише

модифікувати жорсткісні характеристики і дати іншу інтерпретацію температурним членам. Зберігаючи сили інерції лише в нормальному напрямі, представимо ці рівняння у вигляді:

$$\begin{aligned} L_1(u, v, w) = 0; \quad L_2(u, v, w) = 0; \quad L_3(u, v, w, u_1, v_1) + q_0 = I_0 \ddot{w}; \\ L_4(u_1, v_1, w) = 0; \quad L_5(u_1, v_1, w) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

де вирази для операторів  $L_i$  ( $i=1-5$ ) наведено в [13]. У них слід усі пружні характеристики замінити на інтегральні оператори Вольтера з використанням алгебри операторів [9]. Наприклад, оператор  $L_1$  співпадає з рівнянням (10.1.31), де пружні константи необхідно замінити на оператори Вольтера так, що

$$\begin{aligned} L_1(u, v, w) = A_{11} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + A_{12} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \\ + A_{66} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Оператор  $L_2(u, v, w)$  одержимо з (4) за допомогою таких замін:

$$u \rightarrow v, \quad v \rightarrow u, \quad x \rightarrow y, \quad y \rightarrow x, \quad A_{11} \rightarrow A_{22}.$$

Оператор  $L_4$  є лінійним і має вигляд:

$$L_4 = D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + D_{66} \left( \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \right) - K_s A_{55} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \right). \quad (5)$$

Оператор  $L_5$  одержимо з (5) шляхом замін:

$$\varphi_x \rightarrow \varphi_y, \quad \varphi_y \rightarrow \varphi_x, \quad x \rightarrow y, \quad y \rightarrow x, \quad D_{11} \rightarrow D_{12}, \quad A_{55} \rightarrow A_{44}.$$

Оператор  $L_3$  має вигляд:

$$L_3 = K_s A_{55} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) + K_s A_{44} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) + N(u, v, w) + q(x, y, t) - I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Тут при врахуванні сил інерції тільки в поперечному напрямку

$$N = N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (7)$$

Для короткозамкнутих електродів заряд  $Q$ , який знімається з них, розраховується за формулою [3-5, 10-11]:

$$Q = \gamma_{31} (h_0 + h_1) \iint_{(s)} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) dx dy. \quad (8)$$

Отже, для визначення показників сенсора необхідно розв'язати задачу електромеханіки і виразити  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  через поперечний прогин. Тоді за формулою (8) можна знайти прогин через показники сенсора.

### НАБЛИЖЕНИЙ АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ТА ЙОГО АНАЛІЗ

Оператори  $L_4$ ,  $L_5$  є лінійними відносно  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w$ . Розглянемо резонансні коливання шарнірно опертої пластини в околі деякої (наприклад, першої) резонансної частоти коливань прямокутної пластини з розмірами  $a \leq x \leq a$ ;  $0 \leq y \leq b$ . Для шарнірного опирання представимо розв'язок задачі та навантаження у вигляді:

$$\begin{aligned} w &= W_{mn} \sin k_m x \sin p_n y; \quad \varphi_x = \varphi_{1mn} \cos k_m x \sin p_n y; \\ \varphi_y &= \varphi_2 \sin k_m x \cos p_n y \quad (k_m = m\pi/a; \quad p_n = n\pi/b); \\ q_0 &= q_{mn} \sin k_m x \sin p_n y. \end{aligned} \quad (9)$$

Підставляючи ці вирази в оператори  $L_4, L_5$  і розв'язуючи отримані рівняння, матимемо:

$$\varphi_{1mn} = w_{1mn} W_{mn}, \quad \varphi_{2mn} = w_{2mn} W_{mn}. \quad (10)$$

Тут коефіцієнти при  $W_{mn}$  є операторами Вольтера, які виражаються через електромеханічні властивості матеріалів. Підставляючи (9), (10) в оператори  $L_1, L_2$ , приходимо до лінійної системи інтегро-диференціальних рівнянь відносно  $u$  і  $v$ :

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{66} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &= (C \sin 2kx \cos 2py + C_1 \sin kx) W^2, \\ A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) &= (D \cos 2kx \sin 2py + D_1 \sin py) W^2, \end{aligned} \quad (11)$$

де зірочки опущено, а

$$\begin{aligned} C &= -\frac{1}{4} A_{11} k^3 - \frac{1}{4} A_{12} k p^2 - \frac{1}{2} A_{66} k p^2, \quad C_1 = \frac{1}{4} A_{11} k^3 - \frac{1}{4} A_{12} k p^2, \\ D &= -\frac{1}{4} A_{22} p^3 - \frac{1}{4} A_{12} k^2 p - \frac{1}{2} A_{66} k^2 p, \quad D_1 = \frac{1}{4} A_{22} p^3 - \frac{1}{4} A_{12} k^2 p. \end{aligned} \quad (12)$$

Граничні умови для  $u$  і  $v$  вибираємо у вигляді:

$$u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (x = 0; a); \quad v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (y = 0; b). \quad (13)$$

Тоді розв'язок системи (11) вибираємо у вигляді:

$$u = W^2 (A \cos 2py + A_1) \sin 2kx; \quad v = W^2 (B \cos 2kx + B_1) \sin 2py. \quad (14)$$

Використовуючи одержані розв'язки для  $\varphi_x, \varphi_y, u, v$  через  $W(t)$ , з третього рівняння системи (1) методом Бубнова-Гальоркіна одержимо нелінійне інтегро-диференціальне рівняння з кубічною нелінійністю

$$I_0 \ddot{W} + D \cdot \dot{W} + (K \cdot w)(G \cdot W^2) = q. \quad (15)$$

За допомогою асимптотичних методів нелінійної механіки зведемо рівняння (15) до нелінійного диференціального рівняння

$$\ddot{W} + 2\tilde{\mu}_1 \dot{W} + \omega_0^2 W + K_1 w^3 = q_1, \quad q_1 = q/I_0. \quad (16)$$

Розв'язок цього рівняння і детальний його аналіз наведено в [1].

При вимушених коливаннях з частотою, близькою до резонансної,

$$\omega = \omega_0 + \delta, \quad \delta/\omega_0 \ll 1 \quad (17)$$

квадрат амплітуди коливань  $X = |W|^2$  знаходиться з кубічного рівняння [1]:

$$X \left[ \left( \delta - \frac{3K_1}{8\omega_0} X \right)^2 + \tilde{\mu}_1^2 \right] = \frac{q_1^2}{4\omega_0^2}. \quad (18)$$

Після визначення  $W$  з (10), (14) знаходимо  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ ,  $u$  і  $v$ . Потім з (14) знаходяться  $u$  і  $v$ . Знаючи  $w$ ,  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ ,  $u$ ,  $v$ , знайдемо деформації, а з визначальних рівнянь – зусилля і моменти. З (8) знаходимо

$$Q_{mm} = -4(h_0 + h_1) \gamma_{31} \left( \frac{\varphi_{1mm}}{p_n} + \frac{\varphi_{2mm}}{k_m} \right). \quad (19)$$

Підставляючи в (19) вирази (14), одержимо

$$Q_{mm} = -4(h_0 + h_1) \gamma_{31} \left( \frac{w_{1mm}}{p_n} + \frac{w_{2mm}}{k_m} \right) w_{mm}. \quad (20)$$

Задача електромеханіки розв'язана. З цього рівняння видно, що поведінка модуля заряду з частотою повторює поведінку модуля амплітуди коливань.

Для ортотропного матеріалу стаціонарна температура дисипативного розігріву знаходиться з розв'язку рівняння теплопровідності з відомим джерелом тепла, яке збігається з дисипативною функцією

$$\bar{\lambda}_1 \theta_{xx} + \bar{\lambda}_2 \theta_{yy} - (2\delta/h) \theta + D/h = 0 \quad (21)$$

за відповідних граничних умов для температури.

Утримуючи в дисипативній функції члени, пропорційні квадрату амплітуди поперечного зміщення, матимемо:

$$D = \frac{\omega}{2} \left\{ D_{11}'' \left| \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right|^2 + 2D_{12}'' \left| \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right| + D_{22}'' \left| \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right|^2 + 2D_{66}'' \left| \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right|^2 + K_s A_{44}'' \left| \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \right|^2 + K_s A_{55}'' \left| \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \right|^2 \right\}. \quad (22)$$

Підставляючи в (22) одержаний розв'язок задачі електромеханіки, матимемо

$$D = |W|^2 (D_0 + D_1 \cos 2k_m x + D_2 \cos 2p_m y + D_{12} \cos 2k_m x \cos 2p_m y). \quad (23)$$

Для випадку теплоізоляованих торців пластини розв'язок рівняння теплопровідності (21) з урахуванням (23) знаходиться у вигляді:

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 \cos 2kx + \theta_2 \cos 2py + \theta_3 \cos 2kx \cos 2py. \quad (24)$$

Констант  $\theta_i$  ( $i=0-3$ ) легко знаходяться підстановкою (24) в рівняння (21) і прирівнюванням коефіцієнтів при  $1$ ,  $\cos 2kx$ ,  $\cos 2py$ ,  $\cos 2kx \cos 2py$ . Через їх громіздкість вирази для них не наводяться. Ці константи пропорційні квадрату амплітуди  $|W|^2$ :

$$\theta_0 = \psi_0 |W|^2, \quad \theta_1 = \psi_1 |W|^2, \quad \theta_2 = \psi_2 |W|^2, \quad \theta_3 = \psi_3 |W|^2. \quad (25)$$

Детальний аналіз поведінки амплітуди коливань з частотою, яка описується кубічним рівнянням (21), наведено в [1]. Ця характеристика має типовий для нелінійних жорстких систем вигляд. Поведінка температури дисипативного розігріву аналогічна амплітудно-частотній характеристиці.

З виразу (24) та з фізичних міркувань випливає, що при коливаннях по першій моді максимальна температура досягається в центрі пластини, коли  $x = a/2$ ,  $y = b/2$ , і дорівнює

$$\theta_{\max} = |\theta_0| + |\theta_1| + |\theta_2| + |\theta_3| = |W|^2 \tilde{\theta}, \quad \tilde{\theta} = (|\psi_0| + |\psi_1| + |\psi_2| + |\psi_3|). \quad (26)$$

Прирівнюючи максимальну температуру температурі, яка відповідає точці деградації матеріалу  $\theta_k$ , знайдемо критичне механічне навантаження, при досягненні якого сенсор перестав виконувати своє функціональне призначення. З використання (26) критична амплітуда коливань визначається зі співвідношення

$$|W_{kr}|^2 = X_{kr} = \theta_k / \tilde{\theta}. \quad (27)$$

Підставляючи (27) в (18), одержимо критичне механічне навантаження

$$(q_1)_{kr} = 2\omega_0 \left( \frac{\theta_k}{\tilde{\theta}} \right)^{1/2} \left[ \left( \delta - \frac{3K_1}{8\omega_0} \frac{\theta_k}{\tilde{\theta}} \right)^2 + \tilde{\mu}_1^2 \right]. \quad (28)$$

При досягненні механічним навантаженням критичного значення п'єзосенсор деполаризується і сенсор припиняє виконувати своє функціональне призначення.

## ВИСНОВКИ

У статті на основі уточнених гіпотез С. П. Тимошенка, доповнених адекватними їм гіпотезами відносно розподілу електричних польових величин, розроблено модель вимушених резонансних коливань гнучких в'язкопружних прямокутних пластин з п'єзоелектричними сенсорами. Методом Бубнова-Гальоркіна задача зведена до нелінійного інтегро-диференціального рівняння з кубічною нелінійністю відносно поперечного прогину. Для його розв'язку застосовано методи нелінійної механіки. Одержано кубічне алгебраїчне рівняння відносно квадрата амплітуди поперечних коливань. З використанням одержаного розв'язку задачі електромеханіки знайдена дисипативна функція і знайдено аналітичний розв'язок рівняння теплопровідності з відомим джерелом тепла. Досліджено теплове руйнування п'єзосенсора в результаті досягнення температурою дисипативного розігріву точки Кюрі й деполаризації п'єзоактивного матеріалу. Знайдено критичне механічне навантаження, після досягнення якого має місце вказаний тип теплового руйнування.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. Москва: Наука, 1974. 446 с.
2. Булат А. Ф., Дырда В. И., Карнаухов В. Г., Звягильский Е. Л., Кобец А. С. Прикладная механика упруго-наследственных сред. Т. 4. Вынужденные колебания и диссипативный разогрев неупругих тел. Киев: Наук. думка, 2014. 520 с.
3. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость. Киев: Наук. думка, 1989. 290 с.
4. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. Киев: Наук. думка, 1986. 222 с.
5. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 4. Электротермовязкоупругость. Киев: Наук. думка, 1988. 328 с.
6. Карнаухов В. Г., Михайленко В. В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. Житомир: ЖГТУ, 2005. 428 с.

7. Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Карнаухова Т. В. Вплив деформацій зсуву на ефективність роботи п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів при активному демпфуванні резонансних коливань непружних пластин і оболонок. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2015. № 95. С. 75–95.
8. Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. Киев: Выща школа, 1976. 589 с.
9. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. Москва: Наука, 1977. 384 с.
10. Шульга Н. А., Карлаш В. Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. Киев: Наук. думка, 2008. 272 с.
11. Gabbert U., Tzou H. S. Smart Structures and Structronic Systems. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Pub., 2001. 384 p.
12. Karnaukhov V. G., Karnaukhova T. V., McGillicaddy O. Thermal failure of flexible rectangular viscoelastic plates with distributed sensors and actuators. *Journal of Engineering Mathematics*. 2013. 78, N 1. P. 199–212.
13. Reddy J. N. Theory and analysis of Elastic Plates and Shells. Boca Raton-London-New York, 2007. 547 p.

### REFERENCES

1. Ambartsumyan, S. A. (1974). General theory of anisotropic shells. Moskow: Nauka.
2. Bulat, A. F., Dyrda, V. I., Karnaukhov, V. G., Zvyagil'skiy, E. L. & Kobets A. S. (2014). Applied mechanics of elastic-hereditary media. (vol. 4) Forced oscillations and dissipative heating of inelastic bodies. Kiev: Nauk. dumka.
3. Grinchenko, V. T., Ulitko, A. F. & Shul'ga, N. A. (1989). Mechanics of bound fields in structural elements. (vol. 5) Electroelasticity. Kiev: Nauk. dumka.
4. Karnaukhov, V. G. & Kirichok, I. F. (1986). Related problems of the theory of viscoelastic plates and shells. Kiev: Nauk. dumka.
5. Karnaukhov, V. G. & Kirichok, I. F. (1988). Mechanics of bound fields in structural elements. (vol. 4) Electrothermal viscoelasticity. Kiev: Nauk. dumka.
6. Karnaukhov, V. G. & Mikhaylenko, V. V. (2005). Nonlinear thermomechanics of piezoelectric inelastic bodies under monoharmonic loading. Zhitomir: ZhGTU.
7. Karnaukhov, V. G., Kozlov, V. I. & Karnaukhova T. V. (2015). Influence of displacement deformations on the efficiency of piezoelectric sensors and actuators during active damping of resonant oscillations of inelastic plates and membranes. *Opir materialiv i teoriya sporud*, No. 95, pp. 75-95.
8. Mitropol'skiy, Yu. A. & Moseenkov, B. I. (1976). Asymptotic solutions of partial differential equations. Kiev: Vyshcha shkola.
9. Rabotnov, Yu. N. (1977). Elements of hereditary mechanics of solids. Moskow: Nauka.
10. Shul'ga, N. A. & Karlash, V. L. (2008). Resonant electromechanical oscillations of piezoelectric plates. Kiev: Nauk. dumka.
11. Gabbert, U. & Tzou, H. S. (2001). Smart Structures and Structronic Systems. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Pub.
12. Karnaukhov, V. G., Karnaukhova, T. V. & McGillicaddy, O. (2013). Thermal failure of flexible rectangular viscoelastic plates with distributed sensors and actuators. *Journal of Engineering Mathematics*, 78, No. 1, pp. 199-212.
13. Reddy, J. N. (2007). Theory and analysis of Elastic Plates and Shells. Boca Raton-London-New York.