

УДК 539.3

ВИМУШЕНІ РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ І ВІБРОРОЗІГРІВ ГНУЧКОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ БАЛКИ З П'ЄЗОСЕНСОРАМИ ПРИ ВРАХУВАННІ ДЕФОРМАЦІЇ ЗСУВУ

Киричок І. Ф., д. ф.-м. н., Сенченков І. К., д. ф.-м. н., Червінко О. П., к. ф.-м. н.

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, м. Київ, 03057, Україна*

term@inmech.kiev.ua

Розглянута задача про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів шарнірно закріпленої в'язкопружної гнучкої балки з п'єзоелектричними сенсорами. Ураховується деформація поперечного зсуву й інерція повороту його нормального елемента. Досліджено вплив деформації зсуву, геометричної нелінійності та умов теплообміну на амплітудно-частотні характеристики прогинів, температури вібророзігріву, електричного показника сенсора та критичні значення амплітуд механічного навантаження з частотою першого резонансу, за яких температура вібророзігріву досягає точки деградації системи.

Ключові слова: балка, п'єзоелектричний сенсор, дисипативний розігрів.

ВЫНУЖДЕННЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВИБРОРАЗОГРЕВ ГИБКОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ БАЛКИ С ПЬЕЗОСЕНСОРАМИ ПРИ УЧЕТЕ ДЕФОРМАЦИИ СДВИГА

Киричок І. Ф., д. ф.-м. н., Сенченков І. К., д. ф.-м. н., Червінко О. П., к. ф.-м. н.

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
ул. Нестерова, 3, г. Київ, 03057, Україна*

term@inmech.kiev.ua

Рассмотрена задача о вынужденных резонансных колебаниях и диссипативном разогреве шарнирно закрепленной вязкоупругой гибкой балки с пьезоэлектрическими сенсорами. Учитывается деформация поперечного сдвига и инерция поворота его нормального элемента. Исследовано влияние деформации сдвига, геометрической нелинейности и условий теплообмена на амплитудно-частотные характеристики прогибов, температуры виброразогрева, электрического показателя сенсора и критические значения амплитуд механической нагрузки с частотой первого резонанса, при которых температура виброразогрева достигает точки деградации системы.

Ключевые слова: балка, пьезоэлектрический сенсор, диссипативный разогрев.

FORCED RESONANT VIBRATIONS AND VIBROHEATING OF A FLEXIBLE VISCOELASTIC ROD WITH PIEZOSENSORS WITH REGARD TO THE SHEAR DEFORMATION

Kirichok I. F., D.Sc. in Physics and Maths, Senchenkov I. K., D.Sc. in Physics and Maths, Chervinko O. P., Ph.D. in Physics and Maths

*S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine,
Nesterova str., 3, Kyiv, 03057, Ukraine*

term@inmech.kiev.ua

The problem of forced resonance oscillations and dissipative heating of a hinged three-layer viscoelastic flexible beam with piezoelectric sensors as outer layer is considered. The deformation of the transverse shear and the inertia of rotation of its normal element are taken into account. The material of middle layer is considered as transversally-isotropic linear viscoelastic one, and outer layers are made of ЦТСтБс-2 viscoelastic piezoceramic. Vibrations are excited by harmonic transversal loading. Harmonical expansion is used to reduce the solution to the set of nonlinear ordinary differential equation. For steady vibration processes considered electromechanical material properties as well as electromechanical field parameters are supposed to be complex quantities. The method of

quasilinearization is used to obtain linearized problem. The set of governing equations is presented in normal form then the problem is solved by using of standard computer code. The calculations are carried out in vicinity of the first resonance. An influence of geometrical nonlinearity, transversal shear strain and inertia rotation on the amplitude-frequency characteristics of deflections, vibration temperature and the electric index of the sensor is studied. The rigid type of resonance characteristics as a result of geometrical nonlinearity is established. An account for shear strain and inertia of rotation shift frequency characteristics mentioned referred towards the lower frequencies. Shear strain and inertia of rotation are essential for evaluation of vibroheating temperature. A notion of critical value of loading parameter is defined as its value for which the temperature of thermal destruction or piezoceramic depolarization is achieved. The influence of referred above factors on critical value of loading parameters and critical time of system destruction is investigated.

Key words: beam, piezoelectric sensor, dissipative heating.

ВСТУП

В останні роки для контролю вимушених коливань тонкостінних елементів конструкцій типу балок, пластинок і оболонок з пружних і непружних матеріалів широко застосовуються п'єзоелектричні включення, одні з яких виконують роль збуджувачів або гасителів коливань (актуатори), а інші дають інформацію про механічний стан системи (сенсори) [1, 2]. У багатьох випадках такі системи працюють в умовах інтенсивних гармонічних навантажень, які супроводжуються високим рівнем механічних напружень, прогинів та вібророзігріву. Тому є необхідним у задачах про їх електротермомеханічну поведінку враховувати геометричну нелінійність та деформації поперечного зсуву. Побудова на основі класичних і уточнених гіпотез типу С. П. Тимошенка електротермомеханічних двомірних моделей динамічної поведінки тонкостінних елементів із в'язкопружних пасивних і п'єзоактивних матеріалів з урахуванням фізичної і геометричної нелінійності та розв'язок конкретних задач представлені в монографіях [3-5] та багатьох журнальних працях, частину яких відображено в обзори [6].

У нашій статті розглядаються вимушені резонансні коливання і вібророзігрів тришарової гнучкої балки, складеної із в'язкопружних внутрішнього пасивного і зовнішніх п'єзоактивних шарів, які виконують роль сенсора. Ураховуються деформація поперечного зсуву і геометрична нелінійність кутів повороту в квадратичному наближенні. Досліджується вплив указаних факторів на динамічні і температурні характеристики, електричні показники п'єзосенсора та критичні значення амплітуд механічного навантаження, за яких температура вібророзігріву досягає точки деградації системи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо тришарову гнучку балку ширини b і довжини l , внутрішній шар якої товщини h_0 виготовлений із пасивного трансверсально ізотропного матеріалу, а зовнішні – однакової товщини δ – із п'єзокераміки. Балку віднесено до прямокутної системи координат, так що $0 \leq x \leq l$, $|y| \leq b/2$, $|z| \leq H/2$ ($H = h_0 + 2\delta$). Матеріали шарів вважаємо в'язкопружними. П'єзошари поляризовані за товщиною в протилежних напрямках. Приймаємо, що верхній ($z \geq h_0/2$) і нижній ($z \leq -h_0/2$) п'єзошари характеризуються п'єзомодулями $-d_{31}$ і d_{31} , відповідно. Внутрішні ($z = \pm h_0/2$) поверхні п'єзошарів покриті суцільними електродами, на яких задано електричний потенціал $\varphi(\pm h_0/2) = 0$. Їх зовнішні ($z = \pm H/2$) поверхні електродовані на участках, що виконують роль сенсора. При цьому, при розімкнутих електродах сенсора на ділянці $s^\pm = \pm b\Delta_x$ ($\Delta_x = x_1 - x_0$) виконуються такі електричні граничні умови:

$$\iint D_z^\pm ds = 0 \quad (x_0 \leq x \leq x_1), \quad D_z^\pm = 0 \quad (0 \leq x \leq x_0; \quad x_1 \leq x \leq l), \quad (1)$$

де D_z^\pm – нормальна складова електричної індукції в п'єзошарах.

На балку діє поверхневий тиск $q_z = q \cos \omega t$, що гармонічно змінюється за часом t з частотою ω , близькою до резонансної. У результаті, на розімкнутих електродах на поверхнях s^\pm сенсора виникають електричні потенціали з невідомими значеннями амплітуд $\pm V_s = \varphi(\pm H/2)$. Торці балки шарнірно закріплені, а поверхні знаходяться в умовах конвективного теплообміну з оточуючим середовищем.

Моделювання електромеханічної поведінки такої балки ґрунтується на справедливості за пакетом шарів гіпотези прямої лінії для механічних величин [2]. Відносно електричних змінних приймаємо, що складовими D_x , D_y вектора індукції можна знехтувати, а $D_z = const$ є постійною по товщині п'єзошару. При цьому рівняння електростатики задовольняються тотожно, а складові E_x , E_y вектора електричної напруженості знаходяться із визначальних рівнянь $D_x = 0$, $D_y = 0$.

Урахування геометричної нелінійності реалізується утриманням у співвідношеннях Коші квадратів кутів повороту. Рівняння руху також є нелінійними. Температуру вібророзігріву приймаємо постійною по товщині пакету шарів. В'язкопружні властивості матеріалів описуються інтегральними операторами лінійної в'язкопружності [3] типу

$a * b = \int_0^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau$, які для гармонічних процесів деформування зводяться до множення комплексних величин [4] $a * b = (a' + ia'')(b' + ib'')$.

На основі прийнятих гіпотез тривимірні визначальні співвідношення п'єзокераміки [4], наприклад, для нижнього шару мають вигляд:

$$\sigma_x = c_{11}^E * \varepsilon_x - b_{31} * E_z; \quad \sigma_{xz} = c_{44}^E * \varepsilon_{xz}; \quad D_z = b_{31} * e_x + b_{33} * E_z; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2)$$

Тут $c_{11}^E = 1/s_{11}^E$; $b_{31} = d_{31}/s_{11}^E$; $b_{33} = \varepsilon_{33}^T - d_{31}^2/s_{11}^E$; $c_{44}^E = 1/(s_{44}^E - d_{15}^2/\varepsilon_{11}^T)$; s_{kk}^E , d_{ik} , ε_{kk}^T – ізотермічні комплексні податливості, п'єзомодулі і діелектричні проникливості, відповідно. Для верхнього п'єзошару d_{31} в (2) необхідно замінити на $-d_{31}$. Для пасивного шару справедливі перші дві залежності із (2), де $b_{31} = 0$; $c_{11}^E = E$; $c_{44}^E = G_{13}$ (E і G_{13} – комплексні модулі Юнга і поперечного зсуву). Далі в (2) зірочку спускаємо.

Співвідношення між параметрами деформації e_x , e_{xz} і поздовжнього u та поперечного w переміщень записуються так:

$$e_x = \varepsilon_x + z\kappa_x, \quad \varepsilon_x = \partial u / \partial x + \mathcal{G}_x^2 / 2, \quad \kappa_x = \partial \psi_x / \partial x, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{xz} = \psi_x - \mathcal{G}_x, \quad \mathcal{G}_x = -\partial w / \partial x,$$

де ψ_x – кут повороту спочатку недеформованого нормального елемента.

Зі співвідношень (2), (3), з урахуванням умов $\varphi(H/2) = V_s$, $\varphi(h_0/2) = 0$, наприклад, для верхнього п'єзошару, отримаємо:

$$\sigma_x = (c_{11}^E + \gamma_{33})(\varepsilon_x + z\kappa_x) - \gamma_{31}D_z^+; \quad D_z^+ = -b_{33}V_s/\delta - b_{31}(\varepsilon_x + \tilde{h}\kappa_x), \quad (4)$$

де $\gamma_{31} = b_{31}/b_{33}$; $\gamma_{33} = \gamma_{31}b_{31}$; $\tilde{h} = (h_0 + \delta)/2$.

Задовольняючи D_z^+ із (4) інтегральній умові (1) на поверхні S^+ , знаходимо невідоме значення

$$V_S = -\frac{\gamma_{31}\delta}{\Delta_x} \int_{x_0}^{x_1} (\varepsilon_x + \tilde{h}\kappa_x) dx. \quad (5)$$

Підстановка V_S із (5) у співвідношення (4) призводить до інтегро-диференційного виразу для σ_x , що значно ускладнює побудову співвідношень для зусиль і моментів розглядуваної балки. Тому при побудові таких співвідношень у виразі (4) для σ_x приймаємо другу умову із (1), яка на S^+ є наближеною.

Уводячи замість напружень σ_x , σ_{xz} статично еквівалентні зусилля і моменти $(N_x, Q_x, M_x) = b \int (\sigma_x, \sigma_{xz}, z\sigma_x) dz$ по всьому пакету шарів балки, із (2)-(4) маємо співвідношення

$$N_x = C_{11} * \varepsilon_x, \quad M_x = D_{11} * \kappa_x, \quad Q_x = k_s c_{44} * (\psi_x - \vartheta_x), \quad (6)$$

у яких

$$C_{11} = bh_0 [E + 2\delta_0 (c_{11}^E + \gamma_{33})]; \quad D_{11} = \frac{bh_0^3}{12} [E + 2\delta_*^3 (c_{11}^E + \gamma_{33})],$$

$$C_{44} = bh_0 [G_{13} + 2\delta_0 c_{44}^E]; \quad \delta_0 = \delta/h_0, \quad \delta_*^3 = 3\delta_0 + 6\delta_0^2 + 4\delta_0^3,$$

k_s – коефіцієнт зсуву [2].

Рівняння нелінійних коливань гнучкої балки записується так [2]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} - \rho_* \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial \hat{Q}_x}{\partial x} + Fq_z - \rho_* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} - \hat{Q}_x - N_x \vartheta_x - \rho_{**} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0. \quad (7)$$

У рівняннях (7) $\hat{Q}_x = Q_x - N_x \vartheta_x$, $F = bH$ – площа поперечного перерізу балки; $\rho_{**} = bh_0^3 (\rho_0 + 2\rho_1 \delta_*^3) / 12$; $\rho_* = bh_0 (\rho_0 + 2\rho_1 \delta_0)$, ρ_0 , ρ_1 – питомі густини пасивного і п'єзоактивного матеріалів.

Механічні граничні умови вільно опертої балки мають вигляд

$$u = 0, \quad w = 0, \quad M_x = 0 \quad (x = 0, l). \quad (8)$$

Усереднене за період коливань і в площині поперечного перерізу рівняння теплопровідності розглядуваної балки таке:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2\alpha_s (b+H)}{\lambda F} (T - T_c) + \langle W \rangle, \quad (9)$$

де

$$\langle W \rangle = \frac{\omega b}{\lambda F} \int_{(H)} (\sigma_x'' e_x' - \sigma_x' e_x'' + \sigma_{xz}'' e_{xz}' - \sigma_{xz}' e_{xz}'') dz \quad (10)$$

– усереднена швидкість дисипації; $\alpha_s = (\alpha_+ + \alpha_-) / 2$, α_+ , α_- – коефіцієнти теплообміну на поверхнях $z = \pm H/2$; λ , a – усереднені коефіцієнти теплопровідності і температуропровідності; T_c – температура зовнішнього середовища.

Початкова і граничні теплові умови на краях балки мають вигляд

$$T = T_0 \quad (t = 0), \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \pm \alpha_{0,l} (T - T_c) \quad (x = 0, l). \quad (11)$$

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ

При побудові розв'язку поставленої задачі розв'язувальні рівняння електров'язкопружності (3), (6), (7) подамо у вигляді шуканих величин u , w , ψ_x , N_x , \hat{Q}_x , M_x , записавши їх у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} &= \rho_* \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; & \frac{\partial \hat{Q}_x}{\partial x} &= \rho_* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Fq_z; \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} &= \hat{Q}_x + N_x \psi_x - J_{SD} * (\hat{Q}_x N_x) + \tilde{\rho}_* \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= J_c * N_x - \frac{1}{2} \psi_x^2 + J_{SD} * (\psi_x \hat{Q}_x); \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial x} &= J_D * M_x; & \frac{\partial w}{\partial x} &= -\psi_x + J_{SD} * \hat{Q}_x, \end{aligned} \tag{12}$$

де $J_c = 1/c_{11}$; $J_D = 1/D_{11}$; $J_{SD} = 1/(k_s c_{44})$.

При навантаженні типу $q_z = q' \cos \omega t - q'' \sin \omega t$ ($q'' = 0$), нехтуючи перехідними процесами, наближений розв'язок нелінійних рівнянь (12) побудуємо у вигляді гармонічного ряду за часом [3]. Обмежимося побудовою розв'язку в одночастотному наближенні для змінних $A = \{w, \psi_x, \hat{Q}_x, M_x\}$, які характеризують згин балки, і при утриманні членів до другої гармоніки включно в рядах для змінних $B = \{u, N_x\}$ плоского деформування балки так, що

$$A = A' \cos \omega t - A'' \sin \omega t, \quad B = B^0 + \sum_{k=1}^2 \left(B^k \cos k\omega t - B''^k \sin k\omega t \right). \tag{13}$$

Застосовуючи викладений в [3] підхід, з рівнянь (12) і граничних умов (8) відносно коефіцієнтів представлення (13) одержуємо систему нелінійних диференціальних рівнянь $N = 18$ порядку. Лінеаризуючи отриману систему методом квазілінеаризації [3], приходимо до послідовних розв'язків лінійних крайових задач вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{Y}^{n+1}}{dx} &= A(J(k\omega), \vec{Y}^n) \vec{Y}^{n+1} + \vec{F}(q, M_E, \vec{Y}^n), \\ B_1 \vec{Y}^{n+1}(0) &= 0, \quad B_2 \vec{Y}^{n+1}(l) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \tag{14}$$

де $\vec{Y} = \left\{ u', u'', u', u'', w', w'', \psi_x', \psi_x'', N_x', N_x'', N_x', N_x'', \hat{Q}_x', \hat{Q}_x'', M_x', M_x'', u, N_x \right\}$ – вектор-стовбець

шуканих функцій; A и \vec{F} – квадратична матриця N -го порядку системи диференціальних рівнянь і вектор-стовбець її правих частин, елементи яких через громізdkість не виписуємо; B_1, B_2 – прямокутні матриці, які визначаються із умов (8). Дисипативна функція (10) у термінах шуканих величин записується так:

$$\langle W \rangle = \frac{\omega}{2\lambda F} \left\{ \sum_{k=1}^2 k \left(N_x^k \varepsilon_x' - N_x^k \varepsilon_x'' \right) + M_x'' \kappa_x' - M_x' \kappa_x'' + Q_x'' \varepsilon_{xz}' - Q_x' \varepsilon_{xz}'' \right\}. \tag{15}$$

Для розв'язку крайової задачі (14) використовувалась типова програма для розв'язку звичайних диференціальних рівнянь [2]. Задача теплопровідності (9), (11) з урахуванням (15) розв'язується методом кінцевих різниць з використанням явної схеми.

РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ ТА ЇХ АНАЛІЗ

Числові результати одержано для балки з суцільно електродованими вздовж її довжини зовнішніми поверхнями п'єзошарів і геометричними розмірами $l=0,4\text{ м}$, $h_0=0,1\cdot 10^{-5}\text{ м}$, $b=H$. Пасивний шар виготовлено з полімеру з такими в'язкопружними характеристиками:

$$\begin{aligned} E^k &= E^0(k\omega)^p; & E'' &= E^k \cdot \beta(k\omega)^q \quad (k=1,2); & G_{13} &= 0,025E; \\ E^0 &= 0,308 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; & \beta &= 0,16; & q &= -0,145; & p &= 0,076; \\ \nu' &= 0,35; & \nu'' &= 0; & \rho_0 &= 2,77 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; & \lambda &= 0,45 \text{ Вт/(м} \cdot \text{град)}. \end{aligned}$$

Сенсори виготовлено із в'язкопружної п'єзокераміки ЦТСтБС-2 [1], параметри комплексних модулів якої такі:

$$\begin{aligned} s'_{11} &= 12,5 \cdot 10^{-12} \text{ н/м}^2; & s'_{55} &= 39,7 \cdot 10^{-12} \text{ н/м}^2; & d'_{31} &= -1,6 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}; & d'_{15} &= 4,5 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}; \\ \epsilon'_{33} &= 21 \cdot 10^2 \epsilon_0; & \epsilon'_{11} &= 18,5 \cdot 10^2 \epsilon_0; & \epsilon_0 &= 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}; & \delta_{11}^s &= 0,16 \cdot 10^{-2}; & \delta_{55}^s &= 0,14 \cdot 10^{-2}; \\ \delta_{31}^d &= 0,4 \cdot 10^{-2}; & \delta_{15}^d &= 0,35 \cdot 10^{-2}; & \delta_{33}^e &= 0,35 \cdot 10^{-5}; & \delta_{11}^e &= 0,5 \cdot 10^{-2}; \\ \nu_E &= \nu'_E = 0,37 \quad (\nu''_E = 0), & \rho_0 &= 7,52 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; & \lambda &= 0,47 \text{ Вт/(м} \cdot \text{град)}; & T_0 &= T_c = 20^\circ \text{ C}. \end{aligned}$$

При урахуванні деформації поперечного зсуву приймається, що $K_s=5/6$ [2]. Розрахунки проведено для найбільш енергоємної моди згинальних коливань балки в околі першої резонансної частоти при повністю покритих поверхнях балки п'єзошарами сенсора.

На рис. 1 і рис. 2 наведені криві частотних залежностей максимальних значень амплітуд $\tilde{w} = |w(0,5l)|/h_0$ прогину (АЧХ) і електричних потенціалів $\pm|V_s|$ на електродах сенсора, які розраховані для амплітуди поперечного тиску $q_0 = 0,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$.

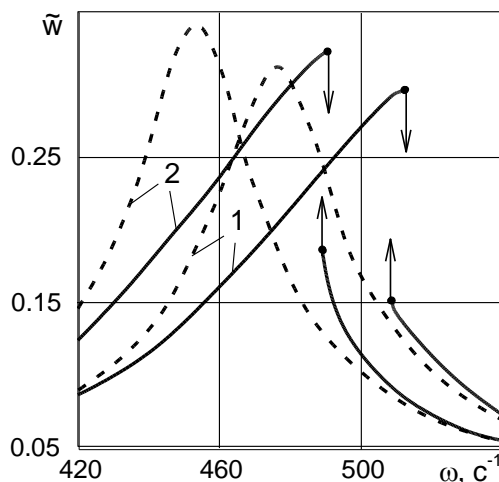


Рис. 1. Частотні залежності амплітуд прогину

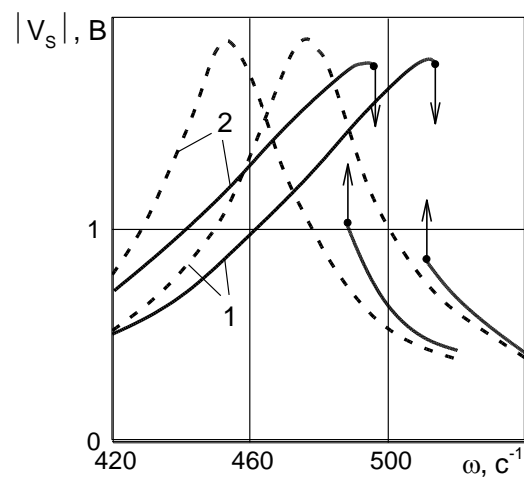


Рис. 2. Частотні залежності електричних потенціалів

При цьому штрихові криві отримані на основі розв'язку лінійної задачі, а суцільні – при урахуванні геометричної нелінійності. Криві 1 відповідають розв'язку задачі у класичній постановці, а криві 2 – при урахуванні деформації поперечного зсуву й інерції повороту.

Аналогічні частотні залежності усталеної ($\tau = at/l^2 = 0,1$) температури $\Delta T = T(0,5l) - T_0$ (ТЧХ), розраховані при $q_0 = 0,6 \cdot 10^6 \text{ Па}$ і $\alpha_s = 15 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{град)}$, показані на рис. 3.

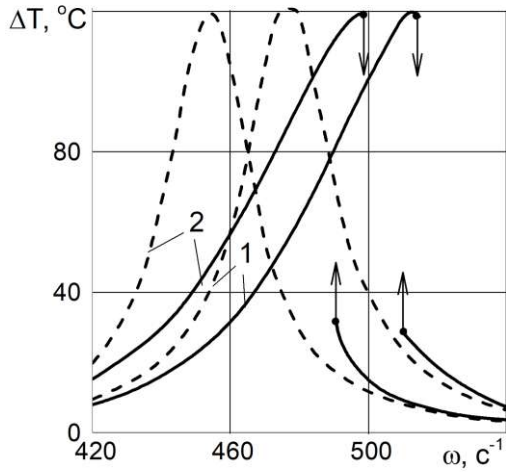


Рис. 3. Частотні залежності температури вібророзігріву

Аналіз кривих на рис. 1-3 та проведені числові розрахунки показують, що врахування геометричної нелінійності як у класичній, так і в уточненій постановках задачі з ростом амплітуди навантаження призводить до трансформації частотних залежностей амплітуд прогину, показника сенсора і температури вібророзігріву (штрихові лінії) у нелінійні характеристики жорсткого типу (суцільні криві) аж до появи неоднозначних ділянок. Урахування деформації поперечного зсуву (криві 2) супроводжується зміщенням частотних характеристик розглядуваних величин у бік зменшення відносно класичного резонансу (криві 1) системи. При цьому абсолютні величини амплітуд електричного потенціалу $|V_s|$ сенсора на класичному і уточненому резонансах практично не відрізняються.

Температура дисипативного розігріву в'язкопружних елементів із пасивних і п'єзоактивних складових при відповідних рівнях гармонічного навантаження в умовах теплообміну може досягати критичного значення $T_{кр}$, при якому відбувається теплове руйнування системи через розм'якшення пасивного матеріалу або деполяризації п'єзокераміки (точка Кюрі). При цьому необхідно визначити амплітуду критичного навантаження $q_{кр}$, що відповідає стаціонарній температурі $T_{кр}$, та критичний час $\tau_{кр}$ дії навантаження, яке перевищує $q_{кр}$. На рис. 4 подано криві 1-3 залежності максимального значення (стаціонарної) усталеної температури вібророзігріву T_m у середній точці балки від амплітуди механічного навантаження q_0 , розраховані на уточненій частоті $\omega = 454 c^{-1}$ з коефіцієнтами теплообміну $\alpha_s = (5; 10; 15) Bm/(m^2 \cdot град)$, відповідно.

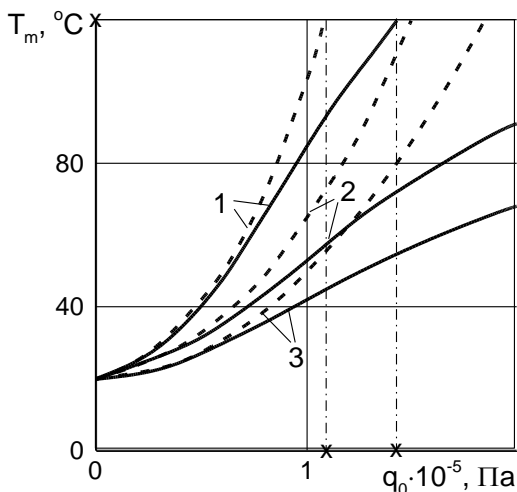


Рис. 4. Залежності максимальної температури вібророзігріву T_m від амплітуди механічного навантаження q_0

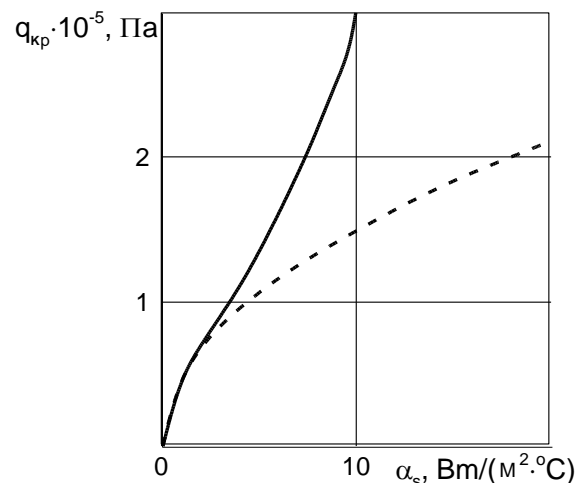


Рис. 5. Залежність критичного навантаження $q_{кр}$ від коефіцієнта теплообміну α_s

Прийmemo за точку деградації, позначену хрестиком на осі ординат, температуру $T_m = T_{кр} = 120^\circ C$, за якої настає втрата працездатності розглядуваної системи. Цій

температурі на осі абсцис відповідає позначене хрестиком критичне значення амплітуди критичного навантаження. Залежність $q_{кр}$ від коефіцієнта теплообміну α_s показана кривими на рис. 5. Аналіз кривих на рис. 4, 5 показує, що при гармонічному збудженні розглядуваної балки на уточненій резонансній частоті урахування геометричної нелінійності призводить до зниження рівня вібророзігріву T_m та збільшення амплітуди критичного навантаження $q_{кр}$. Цей ефект посилюється з ростом коефіцієнту теплообміну α_s .

На рис. 6 кривими 1-3 показана еволюція максимальної температури вібророзігріву T_m за часом τ , відповідно розрахована для амплітуд навантаження $q = (1,0; 1,08, 1,2) \cdot 10^5 \text{ Па}$ з параметром теплообміну $\alpha_s = 5 \text{ Вм}/(\text{м}^2 \cdot \text{град})$. Хрестиками на осі ординат і абсцис позначені точки деградації і критичного часу $\tau_{кр}$, відповідно. Видно, що для амплітуд $q < q_{кр} = 1,08 \cdot 10^5 \text{ Па}$ значення усталеної температури вібророзігріву (крива 1) не досягає $T_{кр}$ і теплове руйнування не настає. При $q > q_{кр}$ (криві 2, 3) настає момент часу $\tau \geq \tau_{кр}$, за якого вібророзігрів досягає точки деградації матеріалу.

На рис. 7 для коефіцієнтів теплообміну $\alpha_s = (5; 10) \text{ Вм}/(\text{м}^2 \cdot \text{град})$ наведені криві 1, 2 залежності амплітуди навантаження $q > q_{кр}$ (значення $q_{кр}$ показані хрестиком) від критичного параметра часу $\tau_{кр}$, після якого настає теплове руйнування розглядуваного об'єкта. Подані на графіках криві, які є аналогом кривих Велера із теорії циклічного руйнування, при тепловому руйнуванні суттєво залежать від коефіцієнта теплообміну на поверхні балки.

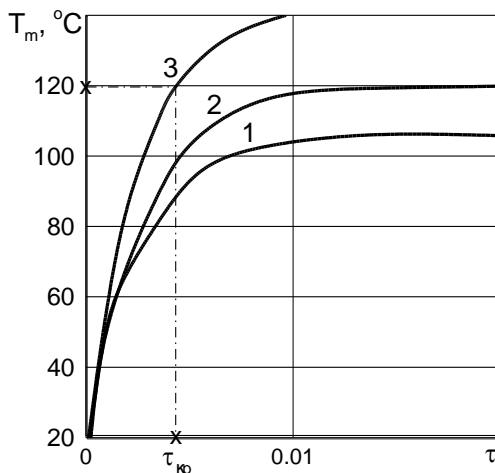


Рис. 6. Еволюція максимальної температури вібророзігріву T_m за часом τ

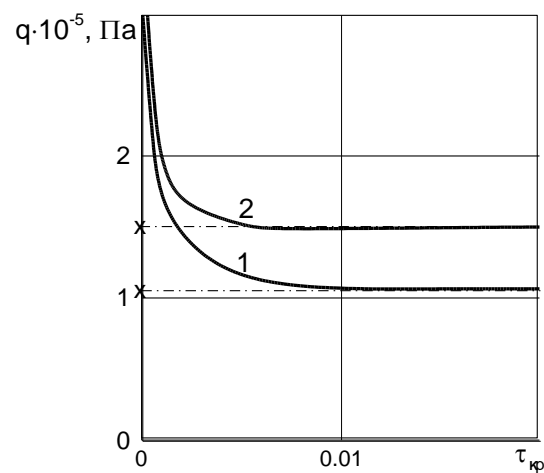


Рис. 7. Залежності амплітуди навантаження q від критичного параметра часу $\tau_{кр}$

ВИСНОВКИ

Представлені постановка і розв'язок задачі про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів в'язкопружної балки з п'єзоелектричними сенсорами при врахуванні деформації поперечного зсуву і геометричної нелінійності в квадратичному наближенні. Для найбільш енергоємної моди коливань досліджено вплив указаних факторів і умов теплообміну на частотні залежності максимальних амплітуд прогину, температури вібророзігріву, електричні показники сенсора та критичні значення амплітуд механічного навантаження, за яких температура досягає точки деградації і система втрачає працездатність.

ЛІТЕРАТУРА

1. Болкисев А. М., Карлаш В. Л., Шульга Н. А. О зависимости свойств пьезокерамических материалов от температуры. *Прикладная механика*. 1984. 20, № 7. С. 70–74.
2. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. Киев: Наук. думка, 1981. 516 с.
3. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. Киев: Наук. думка, 1986. 222 с.
4. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф. Механика связанных полей в элементах конструкций. *Электротермовязкоупругость*. Т. 4. Киев: Наук. думка, 1988. 320 с.
5. Карнаухов В. Г., Михайленко В. В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. Житомир, 2005. 428 с.
6. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф., Козлов В. И. Термомеханика неупругих тонкостенных элементов конструкций с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами при гармоническом нагружении (Обзор). *Прикладная механика*. 2017. 53, № 1. С. 9–74.
7. Стивенс К. Поперечные колебания вязкоупругого стержня с начальной кривизной под действием периодической осевой силы. *Прикладная механика, сер. Е. Тр. Амер. об-ва инженеров-механиков*. Москва: Мир, 1969. №. 4. С. 168–173.
8. Gabbert U., Tzou H. S. Smart structures and structropic systems. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2001. 384 p.
9. Blaguenon A., Lene F., Bernadou M. Active control of a beam using a piezoceramic element. *Smart Mater. Struct.* 1999. 8. P. 116–124.

REFERENCES

1. Bolkisev, A. M., Karlash, V. L. & Shul'ga, N. A. (1984). On the dependence of the properties of piezoceramic materials on the temperature. *Prikladnaya mekhanika*, 20, No. 7, pp. 70-74.
2. Grigorenko, YA. M. & Vasilenko, A. T. (1981). The theory of shells of variable rigidity. Kiev: Nauk. dumka.
3. Karnaukhov, V. G. & Kirichok, I. F. (1986). Related problems of the theory of viscoelastic plates and shells. Kiev: Nauk. dumka.
4. Karnaukhov, V. G. & Kirichok, I. F. (1988). Mechanics of bound fields in structural elements. *Electrothermal viscoelasticity*. Vol. 4. Kiev: Nauk. dumka.
5. Karnaukhov, V. G. & Mikhaylenko, V. V. (2005). Nonlinear thermomechanics of piezoelectric inelastic bodies under monoharmonic loading. *Zhitomir*.
6. Karnaukhov, V. G., Kirichok, I. F. & Kozlov, V. I. (2017). Thermomechanics of inelastic thin-walled structural elements with piezoelectric sensors and actuators under harmonic loading (Review). *Prikladnaya mekhanika*, 53, No. 1, pp. 9-74.
7. Stivens, K. (1969). Transverse vibrations of a viscoelastic rod with initial curvature under the action of a periodic axial force. *Prikladnaya mekhanika, ser. Ye. Tr. Amer. ob-va inzhenerov-mekhanikov*. Moscow: Mir. No. 4, pp. 168-173.
8. Gabbert, U. & Tzou, H. S. (2001). Smart structures and structropic systems. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.
9. Blaguenon, A., Lene, F. & Bernadou, M. (1999). Active control of a beam using a piezoceramic element. *Smart Mater. Struct.*, 8, pp. 116-124.